इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
प्रबंध अध्ययन विद्यापीठ

BCOC - 134
व्यावसायिक गणित और सांख्यिकी

भाग अ व्यावसायिक गणित

आव्यूह

अवकलन कैलकुलस

राजस्व गणित

कार्यक्रम निर्माण समिति – बी.कॉम (सी.बी.सी एस.)

प्रो. मधु त्यागी
पूर्व निदेशक, प्रबंध विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. आर. पी. हुडा
पूर्व कुलपति, एम. डी.
विश्वविद्यालय, रोहतक

प्रो. बी आर अनन्थन
पूर्व कुलपूति, रानी चेन्नम्मां
विश्वविद्यालय, बेलगाँव, कर्नाटक

प्रो. आई वी. त्रिवेदी
पूर्व कुलपति
एम. एल. सुखाडिया
विश्वविद्यालय, उदयपुर राजस्थान

प्रो. पुरुषोतम राव (सेवानिवृत्त)
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
उस्मानिया, विश्वविद्यालय,हैदराबाद

प्रो. डी. पी. एस वर्मा (सेवानिवृत्त)
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. के. वी. भानुमर्ति (सेवानिवृत्त)
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. डेवब्रत्ता मित्रा
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
उत्तर बंगाल, विश्वविद्यालय,डार्जिलिंग

प्रो. खुर्शीद अहमद भट
डीन, वाणिज्य एवं प्रबंधन संकाय,
कश्मीर विश्वविद्यालय, श्रीनगर

प्रो. कविता शर्मा
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो.आर.के. ग्रोवर (सेवानिवृत्त)
प्रबंध विद्यापीठ, इग्नू

संकाय सदस्य
एस. ओ. एम. एस. इग्नू

प्रो. एन. वी. नरसिम्हम
प्रो. नवल किशोर
प्रो. एम.एस.सेनम राजू
प्रो. सुनील कुमार
डॉ. सुबोध केशरवानी
डॉ. रश्मी बंसल
डॉ. मधुलिका पी.सरकार
डॉ. अनुप्रिया पाण्डेय

पाठ्यक्रम डिजाइन एवं पाठ्यक्रम निर्माण दल

प्रो. मधु त्यागी
पूर्व निदेशक, प्रबंध विद्यापीठ,
इग्नू, नई दिल्ली

डॉ. एच. के. डांगी
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
(इकाई 10 से 11 व्यवसाय गणित)

डॉ. विद्यया रतन
श्री राम कॉलेज ऑफ कॉमर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. ब्रह्म भट्ट
स्कूल ऑफ कॉमर्स
गुजरात विश्वविद्यालय, अहमदाबाद

प्रो. एम.एस.सेनम राजू
एसओएमएस, इग्नू, नई दिल्ली
(इकाई 15 से 18)

प्रो. जी. पी. सिंह (सेवानिवृत्त)
सोहराष्ट्र विश्वविद्यालय, गुजरात
(इकाई 1 से 4 व्यवसाय गणित)

डॉ.सरबजीत कौर,
दायल सिंह कॉलेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
(इकाई 5 से 9 व्यवसाय गणित)

डॉ. ओ.पी. गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सी.आर. कोठारी
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

प्रो. (श्रीमती) सरला अचुथान
गुजरात विश्वविद्यालय, अहमदाबाद

संकाय सदस्य
एस. ओ. एम. एस. इग्नू
प्रो. एन. वी. नरसिम्हम
प्रो. नवल किशोर
प्रो. एम.एस.सेनम राजू
प्रो. सुनील कुमार
डॉ. सुबोध केशरवानी
डॉ. रशमी बंसल
डॉ. मधुलिका पी.सरकार
डॉ. अनुप्रिया पाण्डेय

संपादक एवं पाठ्यक्रम समन्वयक
प्रो. एम.एस.सेनम राजू, इग्नू
डॉ. अनुप्रिया पाण्डेय, इग्नू

विषय संशोधन (भाग अ)
प्रो. गोपीनाथ प्रधान (सेवानिवृत्त)
एसओएसएस, इग्नू , नई दिल्ली

अनुवाद

अनुवाद (भाग अ)
डॉ.महेन्द्र शंकर, (सेवानिवृत्त)
एन सी आर टी, दिल्ली
भाग ब
ईसीओ-07 एवं ईसीओ-03
से लिया गया है।

अनुवाद (भाग ब)
प्रो. आई.वी. त्रिवेदी, एम.एल सुखाड़िया
विश्वविद्यालय, उदयपुर, राजस्थान
डॉ. सुमन मिश्रा
एम.जी. कॉलेज, उदयपुर, राजस्थान
श्री आर.टी. पाण्डेय
पुष्पांजली, नई दिल्ली

डॉ. अनुप्रिया पाण्डेय
एस.ओ.एम.एस., इग्नू, नई दिल्ली
श्री के.के. खन्ना
ज़किर हुसैन कॉलेज, नई दिल्ली

सामग्री निर्माण

श्री वाई. एन. शर्मा
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी., इग्नू, नई दिल्ली

श्री सुधीर कुमार
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी., इग्नू, नई दिल्ली

जनवरी, 2020

ISBN : 978-93-89668-99-5

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के बारे में विश्वविद्यालय कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली से अधिक जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से कुलसचिव, सामग्री निर्माण एवं वितरण विभाग द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।
लेज़र कम्पोज़र : टेसा मीडिया एण्ड कम्प्यूटर्स, सी–206, शाहीन बाग, जामिया नगर, नई दिल्ली
मुद्रक : पी. स्क्वायर सॉल्यूशन्स, एच-25, साईट-बी, इण्डस्ट्रीयल एरिया, मथुरा

पाठ्यक्रम (कोर्स) प्रस्तावना

च्वाइस बेस्ड क्रेडिट सिस्टम स्कीम के अन्तर्गत यह कोर्स बी. कॉम कार्यक्रम का एक अनिवार्य कोर्स है। इस कोर्स का मुख्य उद्देश्य विधार्थियों को गणितीय एवं सांख्यिकी तकनीकों से अवगत कराना है, जिससे उन्हें व्यवसाय में किये जाने वाले निर्णयन में सुविधा हो। इस कोर्स (पाठ्यक्रम) में दो प्रमुख भाग हैं। **भाग – अ व्यावसायिक गणित है।** इस भाग में कुल 11 इकाइयाँ हैं।

भाग ब व्यावसायिक सांख्यिकी है। इस भाग में कुल 7 (इकाई 12 – 18) इकाइयाँ हैं।

भाग अ व्यावसायिक गणित

पाठयक्रम के इस भाग व्यावसायिक गणित, में विधार्थियों को व्यावसयिक गणित के कुछ मौलिक गणितीय संक्रियाओं जैसे आव्यूह, अवकल कैलकुलस और राजस्व गणित से परिचित कराना है। इसके ज्ञान से विधार्थी व्यवसाय में प्रयोग आने वाले कुछ समस्याओं के सदंर्भ में निर्णय लेने में सक्षम हो सकेंगे।

आव्यूह

इकाई 1 आव्यूह का परिचय में आव्यूह और उसके प्रकारों, आव्यूह के योग व्यवकलन तथा गुणन; समामित आव्यूहों पर संक्रियाओं तथा एक आव्यूह के परिवर्त की चर्चा की गई है। एक सारणिक के मान का अभिकलन तथा क्रैमर–नियम की सहायता से रैखिक समीकरणों को हल करना भी सिखाया गया है।

इकाई 2 सारणिक में सारणिक की चर्चा की गई है इसमें उसके मान का अभिकलन, सारणिक गुणों, उपसारणिक तथा सह–खंड की चर्चा की गई है।

इकाई 3 आव्यूहों के प्रतिलोम में आव्यूहों के प्रतिलोमों को ज्ञात करने की विधियों पर तथा रैखिक समीकरणों के निकायों को हल करने में उनके उपयोग पर ध्यान दिया गया है। इस प्रक्रिया में, यह इकाई किसी आव्यूह की जाति की संकल्पना का परिचय कराती है तथा उसके निर्धारित करने की विधि बताती है। इस खंड की अंतिम

इकाई 4 व्यापार और अर्थषास्त्र में आव्यूहों के अनुप्रयोग, व्यापार और आर्थिक समस्याओं में आव्यूहों के अनुप्रयोगों के कार्य पर ध्यान देती है। इन अनुप्रयोगों की चर्चा करते समय, यह इकाई मांग–आपूर्ति संतुलन, राष्ट्रीय आय निर्धारण तथा निवेश–बहिर्वेश विश्लेषण जैसे महत्वपूर्ण प्रकरणों का वर्णन करती है।

अवकलन कैलकुलस

इकाई 5 गणितीय फलन के माध्यम से गणितीय फलनों पर चर्चा प्रारंभ करता है। फलन की संकल्पना पर एक संक्षिप्त चर्चा करने के बाद, यह इकाई फलनों के तीन समूहों बीजीय, अबीजीय तथा प्रतिलोम को उनके अर्थों को स्पष्ट करने के लिए प्रस्तुत करती है। इस इकाई में सम्मिलित किए गए महत्वपूर्ण फलन बहुपद, लघुगणकीय और चरघातांकी फलन हैं, जिनके अध्ययनों में बृहत अनुप्रयोग हैं। कुछ फलनों का आलेखी प्रस्तुतिकरण इस इकाई का दूसरा केन्द्र–बिन्दु क्षेत्र है। व्यापार और आर्थिक विश्लेषणों में फलनों का उपयोग अभिरूचि का तीसरा क्षेत्र है, जिसे चर्चाओ में अंतर्विष्ट किया गया है।

इकाई 6 सीमा और सांतत्व, अवकलन की पृष्ठभूमि आवश्यकताओं को, सीमा और सांतत्य की संकल्पनाओं को सम्मिलित करके विस्तृत करती है। पिछली दो इकाइयों में दी गई तैयारी सामग्री के बाद, अवकलन की तकनीकों को

इकाई 7 अवकलन की संकल्पना, में लिया गया है। प्रथम सिद्धांत द्वारा अवकलन प्रारंभ करते हुए, यह इकाई मानक अवकलनों को स्पष्ट करती है, जिनमें अस्पष्ट, लघुगणकीय और प्रतिलोम फलन जैसे महत्वपूर्ण फलन भी सम्मिलित हैं।

इकाई 8 फलनों उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ में किसी फलन के अधिकतम और न्यूनतम मानों को ज्ञात करने के लिए, अवकलन के अनुप्रयोग के प्रकरण का वर्णन किया गया है। इस खंड की अंतिम इकाई, अर्थात्

इकाई 9 अवकलजों के अनुप्रयोग में अवकलन के अनुप्रयोगों को और आगे विस्तृत किया गया है। इस प्रक्रिया में, यह इकाई अवकलन की सहायता से कुछ महत्वपूर्ण संकल्पनाओं जैसे प्रवणता, मांग की प्रत्यास्थता, आपूर्ति की प्रत्यास्थता; औसत और सीमांत राजस्व जैसे लागत और लाभ अधिकतमीकरण के व्युत्पन्न करने को सम्मिलित करती है।

विधार्थियों को ब्याज की संकल्पना और उसके परिकलन से अवगत करने के उद्देश्य से, राजस्व संबंधित मौलिक गणित को सम्मिलित किया गया है।

राजस्व गणित

इकाई 10 ब्याज दर में साधारण और चक्रवृद्धि ब्याजों पर चर्चा की गई है। इसमें उनके अभिकलन भी सम्मिलित हैं।

इकाई 11 यौगिकीकरण एवं बट्टा में अंकित और प्रभावी ब्याज की दरों में संबद्ध अभिकलन प्रक्रिया; वर्तमान मूल्य और बट्टों की चर्चा को जारी रखा गया है। यह इकाई समय के अनुसार धनराशि के मान की धारणा का बोध कराने का प्रयास करती है।

इकाई 1 आव्यूहों का परिचय

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित को समझ पाएँगे:

- आव्यूह की मौलिक संकल्पना;
- आव्यूहों के प्रकार;
- आव्यूह बीजगणित की मूलभूत संक्रियाएँ; तथा
- किसी आव्यूह का परिवर्त

1.1 प्रस्तावना

आव्यूह (matrix; बहुवचन में matrices) संख्याओं को पंक्तियों और स्तभों में रखने की एक व्यवस्था होती है। (i) आँकड़ों के समुच्चयों के लिए एक संक्षिप्त संकेतन तथा (ii) आँकड़ो के समुच्चयों के साथ कार्य करने के लिए प्रभावी विधियों के इसके अभिलक्षणों के कारण, यह उन समस्याओं के हल ज्ञात करने में एक सहायक साधन बन जाता है, जिन्हें रैखिक समीकरण के एक निकाय के रूप में निरूपित किया जा सकता है। यह कहने की आवश्यकता नहीं है कि आव्यूह बीजगणित के अनेक क्षेत्रों जैसे अभियांत्रिकी, अर्थशास्त्र और व्यापार, समाजशास्त्र, सांख्यिकी, भौतिकी, औषधि विज्ञान तथा सूचना

प्रौद्यगिकी में बृहत अनुप्रयोग पाए जाते हैं। इन अनुप्रयोगों की बेहतर समझ के लिए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:समाजशास्त्री एक समूह के ही अंदर प्रभावशीलता के अध्ययन के लिए आव्यूहों का उपयोग करते हैं; जनगणना करने वाले जन्म लेने वालों और उत्तरजीवियों के अध्ययन में इनका उपयोग करते है; उद्योग और व्यापार उत्पादन और बिक्री के लिए ग्राहकों की प्राथमिकताओं के मूल्यांकन जैसे क्षेत्रों में तीव्र और सही निर्णय लेने में आव्यूहों की सहायता लेते हैं। कुछ व्यक्ति रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming) तकनीकों का उपयोग करते हैं; जो लाभ को अधिकतम करने के लिए आँकड़ों के आव्यूह सूत्रणों पर आधारित हैं तथा इससे वह कच्चे माल के उत्पादन या उपलब्धता की योजना बनाते हैं। आव्यूहों का उपयोग व्यापार के स्थान, उत्पादों की मार्किटिंग (खरीद–बिक्री) या वित्तीय संसाधनों की व्यवस्था करने इत्यादि पर निर्णय पर पहुँचने के लिए भी किया जाता है। अर्थशास्त्री आव्यूहों का उपयोग अंतरउद्योग प्रवाहों की जाँच करने के लिए, खेल सिद्धांत का अध्ययन करने के लिए तथा सामाजिक उत्तरदायित्व (हिसाब–किताब) के निकाय की रचना करने में करते हैं।

इसके अतिरिक्त, चिकित्सा संबंधी अध्ययनों में, वैज्ञानिक अस्पतालों और औषधालयों में किसी दवाई का उपयोग करने की सलाह देने से पहले उस दवाई की प्रभावकारिता की सांख्यिकी के रूप में मान्यता दर निर्धारित करने में आँकड़ो का उपयोग आव्यूह रूप में करते हैं। अनेक आई टी कंपनियाँ प्रयोक्ता की सूचना ज्ञान करने, प्रश्नों की जाँच करने तथा डेटाबेसों (databases) के प्रबंधन में आँकड़ों की संरचनाओं के रूप में आव्यूहों का प्रयोग भी करते हैं।

बोध प्रश्न क

1) एक आव्यूह क्या होता है ?

2) उद्योग और व्यापार आव्यूहों का उपयोग क्यों करेंगे ?

3) आँकड़ों का आव्यूह सूत्रण, जो रैखिक प्रोग्रामन में प्रयुक्त किया जाता है, किन उद्देश्यों के लिए उपयोग किया जाता है ?

1.2 आव्यूह

परिभाषा: आव्यूह को पंक्तियों और स्तंभों में व्यवस्थित संख्याओं के एक आयाताकार व्यूह (array) के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसे कोष्ठकों [ ] या ( ) के एक युग्म द्वारा किया गया होता है। उदाहरणार्थ, संख्याओं का निम्नलिखित व्यूह एक आव्यूह दर्शाता है।

$$\begin{bmatrix} 11 & 42 & 22 & 84 \\ 10 & 15 & 60 & 25 \\ 41 & 28 & 45 & 51 \end{bmatrix}$$

किसी आव्यूह में निहित पंक्तियों और स्तभों की संख्या के आधार पर, हम उसकी विमाएँ, अर्थात् उसकी **कोटि (order)** का निर्धारण करते हैं। परिपाटी अनुसार, एक

आव्यूह की कोटि में पंक्तियों को पहले तथा स्तभों को बाद में व्यक्त किया जाता है। क्योंकि उपरोक्त आव्यूह में 3 पंक्तियाँ और 4 स्तंभ हैं; इसलिए हम कहते हैं कि इसकी विमाएँ (या कोटि) 3 × 4 है।

पंक्तियों और स्तभों में प्रकट होने वाली संख्याएँ उस आव्यूह के **अवयव (elements)** कहलाते हैं। उपरोक्त आव्यूह में; प्रथम पंक्ति के प्रथम स्तंभ में अवयव 11 है; प्रथम पंक्ति के दूसरे स्तंभ में अवयव 42 है। ऐसे ही तर्क का अनुसरण करते हुए, हम अन्य अवयवों की पहचान कर सकते हैं।

एक आव्यूह को सामान्यतः अंग्रेजी के बड़े अक्षरों द्वारा तथा उसके अवयवों को संगत छोटे अक्षरों द्वारा, जिनके नीचे पंक्ति और स्तंभ सूचित करने वाली दो संख्याएँ लिखी जाती हैः व्यक्त किया जाता है। उदाहरणार्थ, किसी आव्यूह में a_{23} के रूप में निरूपित एक अवयव को दूसरी पंक्ति और तीसरे स्तंभ में स्थित अवयव के रूप में पढ़ा जाता है। इस प्रकार m पंक्तियों और n स्तंभों वाले एक आव्यूह को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता हैः

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

उपरोक्त आव्यूह को $A = [a_{ij}]_{mxn}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ i = 1,2,3,...,m और j=1,2,3,.....,n है। यह m x n कोटि का एक आव्यूह प्रदर्शित करता है।

1.2.1 आव्यूहों के प्रकार

हम सामान्यतः अधिकांश रूप से प्रयुक्त किए जाने वाले आव्यूहों की चर्चा करेंगे, जिससे हम इनका व्यापार से संबंधित समस्याओं में उपयोग करने में समर्थ हो सकें। एक बार जब हम आव्यूह के परिवर्त से परिचित हो जाएँगे, तब हम अन्य प्रकार के आव्यूहों को लेंगे।

1) **पंक्ति आव्यूहः** वह आव्यूह जिसकी केवल एक पंक्ति होती है या कोटि $1\times n$ का आव्यूह **पंक्ति आव्यूह (row matrix)** कहलाता है।

उदाहरण 1:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) **स्तंभ आव्यूहः** वह आव्यूह जिसमें कवेल एक स्तंभ होता है या कोटि $m\times 1$ का आव्यूह **स्तंभ आव्यूह (column matrix)** कहलाता है।

उदाहरण 2:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) **आयातकार आव्यूहः** एक आव्यूह आयताकार कहा जाता है, यदि उसमें पक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर नहीं हो।

उदाहरण 3:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

4) **वर्ग आव्यूहः** वह आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर होती है वर्ग आव्यूह कहलाता है, अर्थात् कोटि $m \times n$ का आव्यूह एक वर्ग आव्यूह होता है, यदि $m = n$ हो।

उदाहरण 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5) **विकर्ण आव्यूहः** एक वर्ग आव्यूह जिसमें विकर्ण अवयवों के अतिरिक्त सभी अवयव शून्य हों विकर्ण आव्यूह (diagonal matrix) कहलाता है।

वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$एक विकर्ण आव्यूह होता है,यदि सभी $i \neq j$ के लिये $a_{ij} = 0$ हो।

उदाहरण 5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6) **अदिष आव्यूहः** एक विकर्ण आव्यूह जिसमें सभी विकर्ण अवयव एक ही हो अदिश आव्यूह (scalar matrix) कहलाता है।

उदाहरण 6:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

7) **तत्समक आव्यूह (इकाई आव्यूह):** एक अदिश आव्यूह जिसमें सभी विकर्ण अवयव एक के बराबर हो इकाई आव्यूह (unit matrix) या तत्समक आव्यूह (identity matrix) कहलाता है। एक तत्समक आव्यूह को अंग्रजी के बड़े अक्षर I से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8) **त्रिभुजाकार आव्यूहः** एक वर्ग आव्यूह त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है, यदि मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हों [**निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह**

(**lower triangular matrix**)] या मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य हों [**उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह** (**upper triangular matrix**)]

उदाहरण 8:

i) निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9) **शून्य आव्यूह:** एक वर्ग आव्यूह जिसमें सभी अवयव शून्य हों शून्य आव्यूह (zero या null matrix) कहलाता है। इसे अंग्रेजी के बड़े अक्षर O द्वारा व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 9:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10) **सममित आव्यूह** : वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ एक सममित आव्यूह (symmetric matrix) होता है, यदि सभी i और j के लिए $a_{ij} = a_{ji}$ हो। हम इस इकाई में आव्यूह के परिवर्त (transpose) के बारे में पढ़ने के बाद इस आव्यूह पर पुनः चर्चा करेंगे।

उदाहरण 10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

11) **उप आव्यूह:** एक दिए हुए आव्यूह की कुछ पंक्तियों या कुछ स्तंभों या दोनों को हटा देने के बाद प्राप्त आव्यूह उस दिए हुए आव्यूह का उप आव्यूह (sub matrix) कहलाता है।

उदाहरण 11:

आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ के उप आव्यूह हैं।

बोध प्रश्न ख

1) किसी आव्यूह के विकर्ण अवयव क्या हैं ?

2) निम्नलिखित आव्यूह में अवयव a_{21}, a_{34}, a_{24} और a_{11} ज्ञात कीजिए:

$$\begin{bmatrix}-5 & 12 & 5 & 9\\ 7 & 6 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 5\\ 8 & 7 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

इसके विकर्ण अवयव भी ज्ञात कीजिए।

3) x और y ज्ञात कीजिए, यदि

$$\begin{bmatrix}x+y & 2\\ 1 & x-y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$ है।

4) निम्नलिखित आव्यूहों का वर्गीकरण कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}-5\\ 7\\ 3\\ 8\end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix}7 & 6 & 3 & 1\end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix}8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$ (ix) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 2 & -1\\ 5 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

1.3 आव्यूह बीजगणित

इस अनुच्छेद में, हम आव्यूहों पर मूलभूत संक्रियाओं की चर्चा करेंगे। हम योग और गुणन की संक्रियाओं को लेने से पहले आव्यूह की समानता की धारणा से प्रारंभ करते हैं। आव्यूह बीजगणित में अवयव क्रमित संख्याएँ होते हैं तथा इसीलिए उन पर संक्रियाएँ क्रमित विधि में की जानी होती हैं। इस ओर ध्यान देना उपयोगी होगा कि जब हम योग और गुणन जैसी मुख्य संक्रियाएं कर रहे होते हैं, तब व्यवकलन और विभाजन जैसी अन्य संक्रियाएँ इन्हीं से व्युत्पन्न होती हैं।

1.3.1 आव्यूहों की समानता

दो आव्यूह बराबर (समान) होते हैं यदि निम्नलिखित तीन प्रतिबंध पूरे होते हैं:

i) प्रत्येक आव्यूह में पंक्तियों की संख्या समान हों।

ii) प्रत्येक आव्यूह में स्तंभों की संख्या समान हों ।

iii) प्रत्येक आव्यूह में संगत अवयव बराबर हों।

उपरोक्त प्रतिबंधों से केवल यह वांछित है कि विचाराधीन आव्यूह यथार्थ रूप से एक ही हैं।

उदाहरण 12: नीचे दिए दोनों आव्यूहों पर विचार कीजिए :

$A = \begin{bmatrix}2 & x\\ y & 3\end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

यदि $A = B$ है, तो x = 3 और y = 4 है क्योंकि समान आव्यूहों के संगत अवयवों को बराबर होना पड़ेगा।

आगे, मान लीजिए कि हमें एक आव्यूह नीचे दिए अनुसार दिया है:

$C = \begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix}$। तब, C न तो A के बराबर है और न ही B के बराबर है, क्योंकि C में तीन स्तंभ हैं। इसके फलस्वरूप, C आव्यूह A या B के बराबर नहीं है।

1.3.2 दो आव्यूहों का जोड़ना और घटाना

- आव्यूहों को तभी और केवल तभी जोड़ा या घटाया जा सकता है, जब वे समान कोटि के हों।
- दो (m x n) आव्यूहों का योग या अंतर एक अन्य (m x n) आव्यूह होता है, जिसके अवयव दिए हुए आव्यूहों के संगत अवयवों का योग या अंतर होते हैं।

दो आव्यूहों

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ और $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ के लिए, $A \pm B = C$ है,

जहाँ $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ तथा सभी i और j के लिए, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ है।

उदाहरण 13:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ के लिए:

यहाँ

$$A + B \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+7 & 2+3 & 3+5 \\ 2+5 & 1+(-1) & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तथा

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-7 & 2-3 & 3-5 \\ 2-5 & 1-(-1) & 4-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

एक आव्यूह का निषेधन: किसी आव्यूह A के निषेधन (negation) को − A से व्यक्त किया जाता है, जिसे A के सभी अवयवों को उनके निषधनों (ऋणात्मकों) द्वारा प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है।

उदाहरणार्थ, यदि

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो $-A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ होता है।

अतः, दो आव्यूहों A और B के व्यवकलन (घटाने) को आव्यूह A तथा आव्यूह B के निषेधन के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

A – B = A + (–B)

1.3.3 एक अदिश राशि द्वारा आव्यूह का गुणन

यदि किसी आव्यूह को एक अदिश राशि द्वारा गुणा किया जाता है, तो उसके सभी अवयवों को उस राशि से गुणा किया जाता है। यदि आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ को किसी अदिश राशि से गुणा किया जाता है तो $\lambda A = \lambda[a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a]_{ijm \times n}$ होता है।

उदाहरणार्थ, यदि

$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो $3A = 3\begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 9 & 15 \\ 15 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ है।

आव्यूहों के योग के गुण

1. **आव्यूहों का योग क्रमविनिमेय (cummutative) होता है** : यदि A और B एक ही कोटि के दो आव्यूह हैं, तो A + B = B + A होता है।
2. **आव्यूहों का योग साहचर्य (associative) होता है** : यदि A, B और C एक ही कोटि के तीन आव्यूह है, तो (A + B) + C = A + (B + C) होता है।
3. **योज्य तत्समक (additive identity) का अस्तित्व** : यदि A कोई आव्यूह है तथा O आव्यूह A जैसी कोटि का ही शून्य आव्यूह है, तो

   (A + O) = O + A = A होता है।
4. **योज्य प्रतिलोम (additive inverse) का अस्तित्वः** किसी भी आव्यूह A के लिए

   A + (–A) = (–A) + A = O होता है।

निम्नलिखित उदाहरण इन गुणों को स्पष्ट करता हैः

मान लिजिए कि

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ और $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, है। तब,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 11 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 11 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A + B;$$

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 11 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ 9 & -2 & 6 \end{bmatrix};$$

$$B + C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix};$$

$$A + (B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ 9 & -2 & 6 \end{bmatrix} = (A + B) + C;$$

$A + O = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = A$ तथा

$A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$ है।

1.3.4 दो आव्यूहों का गुणन

दो आव्यूह गुणन की आवश्यकता को तभी संतुष्ट करते हैं, जब पहले आव्यूह के स्तंभों की संख्या दूसरे आव्यूह की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। यदि आव्यूह A कोटि $m \times n$ का एक आव्यूह है, अर्थात् इसमें m पंक्तियाँ और n स्तंभ हैं, तो आव्यूह B को कोटि $n \times p$ का अवश्य होना चाहिए, जहाँ n पंक्तियों की संख्या है तथा p स्तंभों की संख्या है, जिसका m के बराबर होना आवश्यक नहीं है। तब, गुणनफल AB कोटि $m \times p$ (A की पंक्तियों की संख्या और B के स्तंभों की संख्या) का एक अन्य आव्यूह $C = A \times B$ होता है।

मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]_{mxn}$ और $B = [b_{ij}]_{nxp}$ दो आव्यूह हैं। तब, गुणनफल AB, एक अन्य आव्यूह C है, जहाँ

$C = [c_{ij}]_{mxp}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj}$ है, i =1,2,3,....,m और j=1,2,3,......,p के लिये

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix},$$

जहाँ

$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \ldots + a_{1m} b_{m1}$

$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + \ldots + a_{1m} b_{m2}$

$c_{1p} = a_{11} b_{1p} + a_{12} b_{2p} + \ldots + a_{1m} b_{mp}$

$c_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + \ldots + a_{2m} b_{m1}$

$c_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + \ldots + a_{2m} b_{m2}$

$c_{2p} = a_{21} b_{1p} + a_{22} b_{2p} + \ldots + a_{2m} b_{mp}$

$c_{n1} = a_{n1} b_{11} + a_{n2} b_{21} + \ldots + a_{nm} b_{m1}$

$c_{n2} = a_{n1} b_{12} + a_{n2} b_{22} + \ldots + a_{nm} b_{m2}$

$c_{np} = a_{n1} b_{1p} + a_{n2} b_{2p} + \ldots + a_{nm} b_{mp}.$

टिप्पणी: आव्यूह गुणनफल AB में, आव्यूह A पूर्व –गुणक (pre-factor) तथा आव्यूह B अनु–गुणक (post-factor) कहलाता है।

उदाहरण 14: मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है।

यहाँ आव्यूह A की कोटि 2 x 3 है तथा आव्यूह B की कोटि 3 x 3 है।

अतः, गुणनफल AB परिभाषित है।

AB = $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$,

जहाँ c_{11} = (1x0) + (3x5) + 5x(−1) = 0 + 15 − 5 = 10

c_{12} = (1x1) + (3x2) + (5x2) = 1 + 6 + 10 = 17

c_{13} = (1x2) + (3x1) + (5x1) = 2 + 3 + 5 = 10

c_{21} = (5x0) + (−1)x5 + (−1)x(−1) = 0 − 5 + 1 = −4

c_{22} = (5x1) + (−1)x2 + (−1) x 2 = 5 − 2 − 2 = 1

c_{23} = (5x2) + (−1)x1 + (−1)x1 = 10 − 1 − 1 = 8

इस प्रकार, AB = $\begin{bmatrix} 10 & 17 & 10 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ है।

अब इन आव्यूहों A और B पर विचार करते हुए देखिए कि क्या गुणनफल BA परिभाषित है। आप पाएँगें कि यह परिभाषित नहीं है। क्यों? क्योंकि B में स्तंभों की संख्या A की पंक्तियों की संख्या के बारबर नहीं है। इससे प्रदर्शित होता है कि आव्यूह गुणन **क्रमविनिमेय** नहीं होता है।

दो आव्यूहों A और B के लिए, यदि AB और BA दोनों परिभाषित हों, तो यह आवश्यक नहीं है कि वे बराबर हों।

उदारणार्थ, यदि A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो

AB = $\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ और BA = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ है।

यहाँ $AB \neq BA$ है।

दो आव्युहों A और B के लिए, यदि $AB = O$ है, तो यह आवश्यक नहीं है कि A और B में से कोई शून्य आव्यूह हो।

उदाहरण 15: मान लीजिए कि A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ और B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

यहाँ AB = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ = O है परंतु न तो A = O है और न ही B = O है।

आव्यूह गुणन के गुण

1) **साहचर्यताः** आव्यूह गुणन साहचर्य होता है। क्रमशः कोटियो $m \times n, n \times p$ और $p \times q$ के तीन आव्यूहों A, B और C के लिए, $(A\,B)\,C = A(BC)$ होता है।

2) **योग पर वितरणः** आव्यूह गुणन आव्यूह योग पर वितरित होता है। क्रमशः कोटियों $m \times n, n \times p$ और $p \times q$ के तीन आव्यूहों A, B और C के लिए, $A\,(B + C) = AB + AC$ होता है।

3) **तत्समक** : कोटि $m \times n$ के किसी आव्यूह A के लिए, कोटि $n \times n$ का एक तत्समक आव्यूह I_n तथा कोटि $m \times m$ का एक तत्समक आव्यूह ऐसा होता है कि कोटि $n \times n$ के एक वर्ग आव्यूह के लिए, $I_n A = A I_n = A$ होता है।

उदाहरण 16: यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, है, तो दर्शाइए कि

i) (AB) C= A (BC)

ii) A (B+C) = AB + AC

iii) AI = IA = A

हल:

i) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}$

$(AB)\, C = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ 11 & -23 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$A\, (BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ 11 & -23 \end{bmatrix}$

अतः, (AB) C= A (BC) है।

ii) $B + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$A\, (B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 14 & -11 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$AB + AC = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 14 & -11 \end{bmatrix}$

अतः, A (B+C) = AB + AC है।

iii) $I\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$

$A\, I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$

अतः, AI = IA = A है।

बोध प्रश्न ग

1. निम्नलिखित दोनों आव्यूहों की जाँच कीजिए। बताइए, क्या ये बराबर हैं। अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

2. मान लीजिए कि नीचे दिए दोनों आव्यूह बराबर हैं। x ओर y के मान क्या है ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & y \end{bmatrix}$$

3. आप कब कहते हैं कि आव्यूह गुणन परिभाषित है ?

4. उदाहरणों की सहायता से आव्यूह गुणन के गुणों को स्पष्ट कीजिए।

5 आप कब कहेगे कि कोई आव्यूह संक्रिया क्रमविनिमेय नहीं है ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & y \end{bmatrix}$$

6. आप क्यों कहेंगे कि आव्यूह योग साहचर्य है ?

1.4 एक आव्यूह का परिवर्त

प्रारंभिक आव्यूह की पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त नया आव्यूह उसका परिवर्त (transpose) कहलाता है। मान लीजिए कि हमारे पास कोटि $m \times n$ का एक आव्यूह A =$[a_{ij}]$ है। हम इसकी पंक्तियों और स्तंभो को परस्पर बदलते हैं। इस प्रकार प्राप्त किया गया आव्यूह A का परिवर्त है तथा इसे A^T या A' से व्यक्त किया जाता है । इस प्रकार, यदि

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ है, तो } A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ है ।}$$

किसी भी आव्यूह A के लिए, A A' और A'A सदैव परिभाषित होते है; इनका बराबर होना आवश्यक नहीं है। ऊपर दिए आव्यूहों के लिए A A' और A'A परिभाषित हैं, परंतु ये बराबर नहीं है, क्योंकि A A'की कोटि 3×3 तथा A A' की 2×2 कोटि है।

एक आव्यूह के परिवर्त के गुण

i) **(A')' = A**

ii) **(kA)' = k A'** , जहाँ k कोई अदिश राशि है।

iii) **(A + B)' = A' + B'**

iv) **I' = I**

v) **(AB)' = B' A'**

उदाहरण 17: मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $(A')' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$ है।

$3A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ है।

$(3A)' = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ and $3A'=3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (3A)'$ है।

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ और $B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ है।

अतः, $A' + B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = (A + B)'$ है।

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $(AB)' = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$B'A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} = (AB)'$ है।

1.4.1 सममित आव्यूह

आव्यूह A सममित आव्यूह कहलाता है, यदि $A' = A$ हो। उदाहरणार्थ,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = A$ है, अतः, A एक सममित आव्यूह है।

1.4.2 विषम सममित आव्यूह

आव्यूह A विषम सममित आव्यूह (Skew symmetric matrix) कहलाता है यदि $A' = -A$ हो। उदाहरणार्थ, यदि

$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ है, तो

$A' = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -A$, है।

अतः, A एक विषम सममित आव्यूह है।

1.4.3 लाम्बिक आव्यूह

आव्यूह A लाम्बिक आव्यूह (orthogonal matrix) कहलाता है, यदि $AA' = A'A = I$ हो। उदहारणार्थ, यदि

$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो

$A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ है।

अब, $AA' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ है।

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ है।}$$

इसी प्रकार, सिद्ध किया जा सकता है कि $A'A = I$ है।

बोध प्रश्न घ

1. आप किसी आव्यूह के परिवर्त से क्या समझते हैं ?

2. आपको एक आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ दिया हुआ है। इसका सत्यापन कीजिए कि $[A']' = A$ है।

3. परिवर्त नियम के उपयोग से आप एक लाम्बिक आव्यूह किस प्रकार प्राप्त करते हैं?

1.5 सारांश

इस इकाई में, हमने आव्यूहों का अध्ययन किया है, जो रैखिक समीकरणों के रूप में व्यक्त की जा सकने वाली समस्याओं के अद्वितीय हल ज्ञात करने में सहायक होते हैं। आव्यूह की संकल्पना का परिचय देने तथा आव्यूहों के प्रकारों के बारे में बताने के बाद, मूलभूत संक्रियाओं योग और गुणन को लिया गया है। हम देख चुके हैं कि आव्यूह को पंक्तियों और स्तंभों में व्यवस्थित संख्याओं के एक आयातकार व्यूह के रूप में परिभाषित किया जाता है। आव्यूह पंक्ति और स्तंभ, तत्समक, विकर्ण, शून्य, सममित, आयातकार, त्रिभुजाकार तथा लम्बिक प्रकारों के होते हैं। यह इकाई आव्यूह के परिवर्त पर एक संक्षिप्त चर्चा के साथ समाप्त होती है जो प्रारंभिक आव्यूह की पंक्तियों और स्तंभो को परस्पर बदलने पर एक नया आव्यूह प्राप्त होता है इस भाग में, लाम्बिक और विषम सममित जैसे कुछ विशिष्ट आव्यूहों की चर्चा की गई है।

1.6 शब्दावली

विकर्ण आव्यूहः उपरि बाएँ के निम्न दाएँ की ओर जाने वाले केवल विकर्ण में शून्येतर अवयव।

आव्यूहों की समानताः दो आव्यूह बराबर (समान) होते हैं, यदि प्रत्येक आव्यूह में पंक्तियों की संख्या, स्तंभो की संख्या एक ही हो तथा प्रत्येक में संगत अवयव बराबर भी हो।

तत्समक आव्यूहः एक आव्यूह जिसे प्रायः I के रूप में लिखा जाता है तथा जिसमें मुख्य विकर्ण पर 1 अवयव होता है और अन्य स्थानों पर शून्य (0) होता है।

निम्न त्रिभुजाकार आव्यूहः एक विशेष प्रकार का वर्ग आव्यूह, जिसमें मुख्य विकर्ण के ऊपर की सभी प्रविष्टियाँ शून्य होती हैं।

आव्यूह गुणनः एक सुसंगत संक्रिया, जब पहले आव्यूह में स्तंभो की संख्या दूसरे आव्यूह की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।

आव्यूहः आँकड़ों को एक आयातकार व्यूह में निरूपित करने की विधि।

एक आव्यूह का निषेधनः आव्यूह के अवयवों को उनके निषधनों (ऋणात्मकों) द्वारा प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त आव्यूह।

लाम्बिक आव्यूहः आव्यूह A लांबिक आव्यूह कहलाता है, यदि

$$A\,A' = A'\,A = I \text{ हो।}$$

आयातकर आव्यूह : ऐसा आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर नहीं हों।

अदिश आव्यूहः एक ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसमें सभी विकर्ण अवयव एक ही हों।

अदिशः एक अकेला अचर, चर या व्यंजक

विषम सममित आव्यूहः आव्यूह A विषम सममित आव्यूह कहलाता है,

यदि $A' = -A$ हो।

वर्ग आव्यूह : एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर हो।

उप आव्यूह : एक दिए हुए आव्यूह में से कुछ पंक्तियों या स्तंभों या दोनों के हटाने से प्राप्त आव्यूह दिए हुए आव्यूह का उप आव्यूह कहलाता है।

सममित आव्यूहः एक आव्यूह सममित होता है, यदि वह अपने परिवर्त के बराबर हो।

विमाएँ या कोटिः किसी आव्यूह में पक्तियों की संख्या तथा स्तभों की संख्या।

आव्यूह का परिवर्त : प्रारंभिक आव्यूह की पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त नया आव्यूह।

उपरि त्रिभुजाकार आव्यूहः एक विशेष प्रकार का वर्ग आव्यूह, जिसमें मुख्य विकर्ण के नीचे की सभी प्रविष्टियाँ शून्य हों।

शून्य आव्यूहः ऐसा आव्यूह जिसके सभी अवयव शून्य हों।

1.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

क) 1. आव्यूह पंक्तियों और स्तंभों में संख्याओं को रखने की एक व्यवस्था है।

2. उद्योग और व्यापार में आव्यूह का उपयोग व्यापार के स्थान, उत्पादों की मार्किटिंग या वित्तीय संसाधनों की व्यवस्था से संबंधित विषयों पर निर्णय पर पहुँचने के लिए किया जाता है।

3. कच्चे माल के उत्पादन या उपलब्धता के लिए योजना बनाने के लिए।

ख) 1. **विकर्ण अवयवः** सभी अवयव a_{ij} विकर्ण अवयव कहलाते है; यदि $i=j$ अवयव $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ विकर्ण अवयव हैं। उपरोक्त आव्यूहों में, आव्यूह A में 1, 4 विकर्ण अवयव हैं तथा आव्यूह B में 2, 0, -2 विकर्ण अवयव है और C में 1, 0, विकर्ण अवयव है।

2. $a_{21} = 7$, $a_{34} = 5$, $a_{24} = 1$ और $a_{11} = -5$ है। -5, 6, 0, 2 विकर्ण अवयव हैं

3. x = 5, y = -2

2 $x = 5$; $y = -2$

4. (i) तत्समक आव्यूह (ii) निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह (iii) स्तंभ आव्यूह (iv) पंक्ति आव्यूह (v) शून्य आव्यूह (vi) उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह (vii) अदिश आव्यूह (viii) 2×3 आव्यूह (ix) 4×3 आव्यूह

ग) 1. ये दोनों आव्यूह बराबर नहीं है, क्योंकि ये एक ही विमांओं के नहीं हैं।

2. $x = 1$ और $y = 4$

3. आव्यूह गुणन AB तभी परिभाषित होता है, जब A में स्तंभो की B संख्या की पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।

4. साहचर्यता, वितरण और तत्समक गुणों को स्पष्ट कीजिए।

5. यह देखने के लिए कि गुणनफल BA परिभाषित है या नहीं, आव्यूहों A और B पर विचार कीजिए। यदि नहीं है, तो यह इस कारण हो सकता है कि B में स्तंभों की संख्या A की पंक्तियों की संख्या के बराबर नहीं है। ऐसा ही परिणाम यह इंगित करता है कि आव्यूह गुणन क्रमविनिमेय नहीं है।

6. क्योंकि (A+B) +C = A= (B+C) है।

घ) 1. प्रारभिक आव्यूह की पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त नया आव्यूह उसका परिवर्त कहलाता है।

2. $[A]' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, प्राप्त कीजिए तथा फिर इसका परिवर्त ज्ञात करके

$[\boldsymbol{A}']' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ प्राप्त कीजिए।

3. एक ऐसा उदाहरण लीजिए ताकि $AA' = A'A = \mathrm{I}$ हो।

1.8 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

1 आपको बताया गया है कि नीच दिए दोनों आव्यूह बराबर हैं। x, y और z के मान क्या है ?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 6 & y+4 \\ \frac{z}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तरः A = B दिया हुआ है। इसलिए इनकी सभी संगत प्रविष्टियाँ बराबर होनी चाहिए। अतः, हमें ज्ञात है कि

$a_{11} = b_{11}$, $a_{1,2} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, इत्यादि। इस प्रकार,

$4 = x$, $-2 = y + 4$ और $3 = {}^{z}/_{3}$ है।

आव्यूहो को $\begin{bmatrix}4 & 0\\6 & -2\\3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & 0\\6 & y+4\\\frac{z}{3} & 1\end{bmatrix}$, के रूप में पुनः लिखकर

हम x= 4, y = −6 और z = 9 प्राप्त करते हैं।

2. आव्यूह गुणन, क्रमविनिमेय क्यों नहीं है ?

उत्तर: जब हम वर्ग आव्यूहों का उपयोग नहीं करते है, तब हम क्रम बदल कर आव्यूहों का गुणा करने का प्रयास भी नहीं कर सकते, क्योंकि उनकी विमाएँ सुमेलित नहीं हो सकेंगी। परंतु वर्ग आव्यूहों के हाने पर भी क्रमविनिमेय वाली विशषता सदैव नहीं होती। उदाहरणार्थ, 2 × 2 आव्यूहों A और B की इस स्थिति पर विचार कीजिए:

मान लीजिए

$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$, है।

तब, $AB = \begin{bmatrix}a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$ है।

$BA = \begin{bmatrix}a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12}\\a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$

इस ओर ध्यान दिया जा सकता है कि ये दोनों आव्यूह समान (बराबर) नहीं हैं, जब तक कि हम A और B के लिए मानों पर कुछ प्रतिबंध न लगाएँ। क्योंकि हम पहले आव्यूह की पंक्तियों को लेकर दूसरे आव्यूह के स्तंभों से गुणा करते हैं; इसलिए ऐसी प्रक्रिया से जो क्रम पलट देती है, मानों में परिवर्तन हो जाता हैं।

3. यदि $A = \begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\-2 & -1 & 4\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}3 & 4 & 0\\5 & -2 & 3\end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix}7 & -6 & 2\\1 & -4 & 11\end{bmatrix}$,

है, तो मान निकालिए:

(i) A + B

(ii) B − C

(iii) 2A + B − C

उत्तर: (i) $\begin{bmatrix}5 & -1 & 1\\3 & -3 & 7\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}-4 & 10 & -2\\4 & 2 & -8\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

4. निम्नलिखित संबंधो से आव्यूहों A और B को ज्ञात कीजिए:

$2A - B = \begin{bmatrix}6 & -6 & 0\\-4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ और $2B + A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\-2 & 1 & -7\end{bmatrix}$

उत्तर: $A = \begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\-2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}$

5. यदि $A = \begin{bmatrix}9 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix}1 & 5\\7 & 12\end{bmatrix}$ है, तो ऐसा आव्यूह X ज्ञात कीजिए कि

3A + 5B + 2X = O हो।

उत्तरः $\begin{bmatrix} -16 & -14 \\ -47/2 & -69/2 \end{bmatrix}$

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो दर्शाइए कि

   i) A (B + C) = AB + AC

   ii) (AB)C = A(BC)

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, है, तो ज्ञात कीजिए (A – 2I) (A – 3I).

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो दर्शाइए कि गुणनफल AA' और $A'A$ सममित हैं, परंतु बराबर नहीं हैं।

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

1.9 संदर्भ पुस्तकें

- Allen, R.G.D., “Mathematical Analysis for Economists”, London: English Language Book Society and Macmillan, 1974.
- Archibald, G.C., Richard G.Lipsey. “An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics”, Delhi: All India Traveller Bookseller, 1984
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, “Fundamental Methods of Mathematical Economics” (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Dowling, Edward,T. “Schaum’s Outline Series: Theory and Problems of Mathematics for Economists”, New York: McGraw Hill Book Company, 1986.
- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, PearsonEducational Asia, Delhi, 2002.
- Wegner, Trevor. (2016). *Applied Business Statistics: Methods and Excel-Based Applications,* Juta Academic. ISBN 9781485111931
- Yamano, Taro, “Mathematics for Economists: An Elementary Survey”,New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited, 1970.

इकाई 2 सारणिक

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित को समझ पाएँगे:

- सारणिक की मौलिक संकल्पना
- आव्यूह और सारणिक के बीच अंतर
- किसी सारणिक के सहखंड और उपसारणिक
- रैखिक समीकरणों के निकाय के हल प्राप्त करने के लिए सारणिक का अनुप्रयोग (क्रैमर–नियम)

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, हमने आव्यूहों पर सरल संक्रियाएँ देखी हैं; जिनका उपयोग, रैखिक समीकरणों के रूप में दी समस्याओ के हल प्राप्त करने के लिए, एक पृष्ठभूमि सामग्री के रूप में किया जा सकता है। प्रस्तुत इकाई में, हम इस चर्चा को सारणिक (determinant) तक विस्तृत करेंगे, जिसकी खोज क्रैमर (Cramer) द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करते समय की गई थी। ध्यान दीजिए कि सारणिक एक संख्यात्मक मान है, जिसका अभिकलन किसी वर्ग आव्यूह के अवयवों से किया जा सकता है।

आयूव्ह A के सारणिक को $\det(A), \det A$, या $|A|$. द्वारा व्यक्त किया जाता है। ज्याभितीय रूप से देखने पर, इसे आव्यूह द्वारा वर्णित रैखिक रूपांतरण के आयतन स्केलिंग गुणक (volume scaling factor) के रूप में देखा जा सकता है। हमें एक सारणिक धनात्मक या ऋणात्मक मान के रूप में प्राप्त होता है।

बोध प्रश्न क

1. आव्यूह और सारणिक के बीच भेद बताइए।
2. क्रैमर ने सारणिक की खोज किस प्रकार की ?
3. केवल किस प्रकार के आव्यूह से सारणिक को अभिकलित किया जा सकता है?

2.2 एक सारणिक के मान का अभिकलन

सारणिक के मान का परिकलन निम्नलिखित प्रक्रिया का पालन करके किया जा सकता हैः एक वर्ग आव्यूह पर विचार कीजिए। इसकी प्रथम पंक्ति या प्रथम स्तंभ के लिए, उसका उपआव्यूह प्राप्त कीजिए। आगे, चुने हुए अवयवों में से प्रत्येक अवयव को उसके उपआव्यूह के संगत सारणिक से गुणा कीजिए। अंत में, एकांतर चिह्नों के साथ (बारी–बारी से चिह्न बदलते हुए) उन्हें जोड़ दीजिए।

कोटि एक (n=1) के आव्यूह का सारणिक

एक आधार स्थिति के रूप में किसी $|1 \times 1|$ आव्यूह के सारणिक का मान स्वयं वह अकेला मान होता है। इसके कहने का अर्थ है कि यदि किसी आव्यूह

में एक ही अवयव है, तो स्वयं वह अवयव ही आव्यूह A का सारणिक होता है, अर्थात् यदि $A = [a]$ है, तो $|A| = a$ है।

उदाहरणार्थ यदि $A = [2]$ है, तो $|A| = 2$ है।

उस आव्यूह का सारणिक जिसकी कोटि दो (n=2) है

यदि किसी वर्ग आव्यूह A की कोटि 2 है, तो |A| = (विकर्ण अवयवों का गुणन – अविकर्ण अवयवों का गुणन) होता है, अर्थात्

यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, है, तो $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \text{ x } a_{22}) - (a_{21} \text{ x } a_{12})$ है।

उदाहरणार्थ, यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो $|A| = (2 \text{ x } 2) - (1 \text{ x } 3) = 4 - 3 = 1$ है।

उस आव्यूह का सारणिक जिसकी कोटि तीन (n=3) है

मान लीजिए कि

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \text{ है}$$

तब, $$det\ (A) = det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \text{ है।}$$

दूसरे शब्दों में, आव्यूह $\boldsymbol{A}$ की प्रथम पंक्ति $(a\ b\ c)$ पर जाइए। प्रत्येक प्रविष्टि को उस 2×2 आव्यूह के सारणिक से गुणा कीजिए, जो A में से उस प्रविष्टि को अंतर्विष्टि करने वाली पंक्ति और स्तंभ को काटने से प्राप्त होता है। फिर हम परिणामी पदों को जोड़ते और घटाते हैं, अर्थात् बारी–बारी से चिह्न बदलते हुए जोड़ते और घटाते हैं (a – पद को जोड़िए, b– पद को घटाइए, c– पद को जोड़िए)।

उदाहरणार्थ, यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ है, तो

$$|A| = +2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 2(-3 + 2) - 1(-3 - 1) - 1(-2 - 1) = -2 + 4 + 3 = 5$ है।

हम यही विधि 4×4 आव्यूह के सारणिक को अभिकलित करने में कर सकते हैं। वस्तुतः, यह विधि किसी भी विमाओं वाले किसी भी वर्ग आव्यूह के लिए अनुप्रयोग की जा सकती है। ध्यान दीजिए कि आपको केवल प्रथम पंक्ति के उपयोग की ही आवश्यकता नहीं है; आप किसी भी पंक्ति या किसी भी स्तंभ का उपयोग कर सकते हैं; जब तक यह जानकारी रखें कि कहाँ धन (+) चिह्न लगाना है और कहाँ ऋण (–) चिह्न लगाना है। इस प्रकार,

यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{bmatrix}$ है, तो $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$, है,

जहाँ

M_{ij} आव्यूह A में से i वीं पंक्ति और f वें स्तंभ को काटने से प्राप्त उसका उप आव्यूह है।

बोध प्रश्न ख

1. अकेले अवयव वाले आव्यूह के सारणिक का क्या मान है ?

2. आपको आव्यूह $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ दिया हुआ है। इसके सारणिक का मान ज्ञात कीजिए।

3. किसी भी विमाओं वाले एक वर्ग आव्यूह के सारणिक को ज्ञात करने के लिए, आप किस सूत्र का उपयोग करेंगे ?

2.3 सारणिकों के गुण

I. **यदि किसी सारणिक की सभी पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदल दिया जाए, तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है, अर्थात् $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^t|$ होता है।**

उदाहरणार्थ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} \text{ है।}$$

II. **यदि किसी सारणिक की किन्ही दो पंक्तियों/स्तंभो को परस्पर बदल दिया जाता है, तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है, परंतु चिह्न बदल जाता है।**

उदाहरणार्थ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$ है।

III. **यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ/स्तंभ सर्वसम (identical) हैं, तो उस सारणिक का मान षून्य होता है।**

उदाहरणार्थ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ है।

IV. **यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति/स्तंभ के सभी अवयवों को किसी संख्या (मान लीजिए) k से गुणा किया जाए, तो उस सारणिक के मान का उस संख्या से गुणा हो जाता है।**

उदाहरणार्थ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 56$$ है। और $$\begin{vmatrix} 2x1 & 2x6 & 2x5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2x56 = 112$$ है।

V. यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति/स्तंभ के सभी अवयवों में/में से एक अन्य पंक्ति /स्तंभ के संगत अवयवों के **k** गुने को जोड़ा/घटाया जाए, तो उस सारणिक का मान वही रहता है।

उदाहरणार्थ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 56$$ है, और $$\begin{vmatrix} 1+(2\times 6) & 6 & 5 \\ 3+(2\times 2) & 2 & 1 \\ -2+(2\times 0) & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 56$$ है।

VI. यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति/स्तंभ के सभी अवयव दो या अधिक अवयवों के योग/अंतर हों; तो उस सारणिक को दो या अधिक सारिणकों के योग/अंतर के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2+3 \\ 3 & 2 & 0+1 \\ -2 & 0 & 2+(-5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -24 + 80 = 56$$ है।

बोध प्रश्न ग

1. आपने एक सारणिक की दो पंक्तियों/स्तंभों को परस्पर बदल दिया है। उसके मान का क्या होगा ?

2. जॉन एक सारणिक की पंक्तियों और स्तभों के साथ कुछ हस्तकौशल कर रहा है, परंतु उसका एक ही मान प्राप्त कर रहा है। वह क्या कर रहा है के बारे में आप क्या सोचते हैं?

3. सीता ने एक वर्ग आव्यूह A की अंतिम पंक्ति के सभी अवयवों को एक अचर k से गुणा कर दिया है। उसकी इस क्रिया के कारण संगत सारणिक का उसे क्या मान प्राप्त होना चाहिए ?

4. स्मिथ ने एक सारणिक में इस प्रकार परिवर्तन किए कि उसे दो सर्वसम स्तंभ प्राप्त हो जाएँ। ऐसे सारणिक का उसे क्या मान प्राप्त होगा?

2.4 उपसारणिक और सहखंड

एक सारणिक के किसी अवयव का उपसारणिक

मान लीजिए कि $|A| = |a_{ij}|$ कोटि n का एक सारणिक है। अवयव a_{ij} , जो सारणिक $|A|$ की i वी पंक्ति और j वें स्तंभ में विद्यमान है, का उपसारणिक वह सारणिक है जो $|A|$ की i वीं पंक्ति और j वें स्तंभ को काटने पर शेष रह जाता है।

कोटि 3 के सारणिक $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ के लिए,

a_{11} का उपसारणिक (minor) $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ है, जो

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ की

पहली पंक्ति और पहले स्तंभ को हटाने से प्राप्त होता है।

इस प्रकार, a_{22} का उपसारणिक $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ है, जो $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ की

दूसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ को हटाने से प्राप्त होता है।

दृष्टांत्मक उदाहरण:

आव्यूह $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ दिया है। a_{32} और a_{23} के उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

a_{32} का उपसारणिक $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = (7x4) – (9x3) = 28 – 27 = 1 है।

a_{23} का उपसारणिक $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ = (7x2) – (5x6) = 14 – 30 = –16 है।

एक सारणिक के किसी अवयव का सहखंड

एक सारणिक के किसी अवयव का सहखंड (cofactor) उस अवयव का चिह्नित उपसारणिक होता है। इस उपसारणिक का चिह्न i और j के मानों द्वारा निर्धारित होता है, अर्थात् उस पंक्ति और स्तंभ के अनुसार जिसमें वह अवयव विद्यमान है। अवयव

a_{ij} के सहखंड को A_{ij} द्वारा व्यक्त किया जाता है।

a_{ij} का सहखंड $= (-1)^{i+j}$ a_{ij} का उपसारणिक है।

कोटि 3 के एक सारणिक $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ के लिए,

a_{11} का सहखंड $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ है।

इसी प्रकार, a_{32} का सहखंड $a_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1)5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ है।

उपसरणिक का चिह्न + है, यदि $i + j$ सम है तथा उपसारणिक का चिह्न – है, यदि $i + j$ विषम है।

दृष्टांत्मक उदाहरण:

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ के लिए, आइए इस आव्यूह के संगत सारणिक के सभी अवयवों के सहखंडों को ज्ञात करें।

सभी अवयवों के सहखंडों को ज्ञात करें

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(2x(-3) - 0x1) = -6 - 0 = -6$ है।

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(3x(-3) - 1x(-2) = -(-9 + 2) = 7$ है।

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(3x0 - 2x(-2)) = (0 + 4) = 4$ है।

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(6x(-3) - 5x0) = -(-18 - 0) = 18$ है।

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(1x(-3) - 5x(-2)) = (-3 +10 = 7$ है।

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(1x0 - 6x(-2)) = -(0 + 12) = -12$ है।

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(6x1 - 2x5) = 6 - 10 = -4$ है।

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(1x1 - 5x3) = -(1 - 15) = 14$ है।

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(1x2 - 6x3) = 2 - 18 = -16$ है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 1: यदि : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो $|A|$ ज्ञात कीजिए।

हलः

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$|A| = 1M_{11} - 2M_{12} + 0M_{13} + 1M_{14}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-6-3) - 4(0-9) + 1(0+9) = 9 + 36 + 9 = 54$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(-6-3) - 4(-4-12) + 1(-2+12) = -27 + 64 + 10 = 47$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(0-9) + 1(-4-12) + 1(-6-0) = -27 - 16 - 6 = -49$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(0+9) + 1(-2+12) + 4(-6-0)$$

$= 27 + 10 - 24 = 13.$

$|A| = 1M_{11} - 2M_{12} + 0M_{13} + 1M_{14}$

$|A| = 1 \times 54 - 2 \times 47 + 0 \times (-49) + 1 \times 13$

$= 54 - 94 + 0 + 13 = -27$ हैं।

उदाहरण 2: $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix}$ का मान निकालिए।

हलः

प्रथम पंक्ति में से a, दूसरी पंक्ति में से b तथा तीसरी पंक्ति में से c सार्व गुणनखंड बाहर निकालने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = \text{abc} \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c^2 \\ a^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix}$$

अब, प्रथम स्तंभ में से a^2, दूसरे स्तंभ में से b^2 तथा तीसरे स्तंभ मे से c^2 सार्व गुणनखंड बाहर निकालिए। जिससे प्राप्त होता है:

$$a^3b^3c^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^3b^3c^3\,[0(0-1) - 1(0-1) + 1(1-0)] = a^3b^3c^3[0+1+1] = 2a^3b^3c^3.$$

बोध प्रश्न घ

1. किसी वर्ग आव्यूह के उपसारणिक से आप क्या समझते हैं ?

2. किसी वर्ग आव्यूह का सहखंड क्या होता है ?

3. एक वर्ग आव्यूह में आप कोई संहखंड कैसे प्राप्त करेंगे ?

4 आपको निम्नलिखित सारणिक दिया हुआ है:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

इसके सभी अवयवों के लिए, उपसारणिक और सहखंड ज्ञात कीजिए।

2.5 रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने के लिए सारणिकों में क्रैमर–नियम का उपयोग

क्रैमर–नियम

यह विधि, सारणिकों का उपयोग करते हुए n चरों में n रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने के लिए, एक स्विस गणितज्ञ गेब्रेल क्रैमर (Gabriel Cramer) द्वारा प्रदान की गई थी। मान लीजिए कि n चरों $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$ वाली n रैखिक

समीकरणों का निकाय निम्नलिखित है:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

उपरोक्त निकाय को आव्यूह रूप में, $AX = B$ लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \text{ है।}$$

मान लीजिए कि

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ है।}$$

सारणिक के गुण $C_1 \to x_1 C_1$ का अनुप्रयोग कीजिए।

$$x_1 D = \begin{vmatrix} x_1 a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ x_1 a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ x_1 a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ x_1 a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

सारणिक के गुण $C_1 \rightarrow C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n C_n$

का अनुप्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x_1 D = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots .. a_{1n}x_n & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots .. a_{2n}x_n & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots .. a_{3n}x_n & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots .. a_{nn}x_n & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 \text{ है, जहाँ}$$

D_1 आव्यूह A का सारणिक है, जबकि उसके प्रथम स्तंभ को $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$

द्वारा प्रतिस्थापित कर लिया गया है।

अतः, $x_1 D = D_1$ है, जिससे $x_1 = \frac{D_1}{D}$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, यह दर्शाता जा सकता है कि $x_2 D = D_2$ है, जहाँ D_2 आव्यूह A को सारणिक, है, जबकि उसके दूसरे स्तंभ को $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$ द्वारा प्रतिस्थपित कर लिया गया है।

इससे हमें $x_2 = \frac{D_2}{D}$ प्राप्त हेाता है। इसी प्रकार, $x_n = \frac{D_n}{D}$ है, जहाँ D_n A आव्यूह का सारणिक है, जबकि उसके nवें स्तंभ को $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$ द्वारा प्रतिस्थापित कर लिया गया है।

नोटः रैखिक समीकरणों के किसी निकाय के लिए

यदि ***D ≠ 0*** है तो निकाय का एक अद्वितीय हल है तथा यह निकाय संगत **(Consistent)** है।

यदि ***D = 0*** है तथा ***D_1, D_2, D_3, D_4...... D_n*** सभी भी शून्य है;

तो इस निकाय के अंनत **(infinite)** हल होते हैं तथा निकाय संगत है।

यह ***D = 0*** है तथा ***D_1, D_2, D_3, D_4...... D_n*** में से न्यूनतम एक शून्य के बराबर नहीं है, तो इस निकाय का कोई हल नहीं होता है, तथा यह निकाय असंगत (***inconsistent***)होता है।

दृष्टांत्मक उदाहरणः

I. **निम्नलिखित समीकरणः** निकाय को क्रैमर – नियम द्वारा हल कीजिएः

$x - 4y - z = 11$

$2x - 5y + 2z = 39$

$-3x + 2y + z = 1$

हलः

हमें $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-5-4) + 4(2+6) - 1(4-15)$

$= -9 + 32 + 11 = 34$ प्राप्त है।

यहाँ $D \neq 0$, है। इसलिए, एक अद्धितीय हल है, जिसे

$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D}$ के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & -4 & -1 \\ 39 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11(-5-4) + 4(39-2) - 1(78+5)$

$= -99 + 148 - 83 = -34$ है।

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & -1 \\ 2 & 39 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(39-2) - 11(2+6) - 1(2+117)$

$= 37 - 88 - 119 = -170$ है।

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 11 \\ 2 & -5 & 39 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-5-78) + 4(2+117) + 11(4-15)$

$= -83 + 476 - 121 = 272$ है।

अतः $x = \frac{D_1}{D} = \frac{-34}{34} = -1, y = \frac{D_2}{D} = \frac{-170}{34} = -5$ और $z = \frac{D_3}{D} = \frac{272}{34} = 8$

II. निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रैमर –नियम द्वारा हल कीजिएः

$x - 3y - 8z = -10$

$3x + y - 4z = 0$

$2x + 5y + 6z = 13$

हलः

हमें $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1(6+20) + 3(18+8) - 8(15-2)$

$= 26 + 78 - 104 = 0$ प्राप्त है।

साथ ही,

$$D_1 = \begin{vmatrix} -10 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -10(6+20)+3(0+52)-8(0-13)$$

$= -260 + 156 + 104 = 0,$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -10 & -8 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 13 & 6 \end{vmatrix} = 1(0+52)+10(18+8)-8(39-0)$$

$= 52 + 260 - 312 = 0$ तथा

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -10 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 1(13-0)+3(39-0)-10(15-2)$$

$= 13 + 117 - 130 = 0$ है।

यहाँ

$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ है अतः यह निकाय संगत है, जिसके अनंत हल हैं।

III. निम्नलिखित समीकरण – निकाय को क्रैमर –नियम द्वारा हल कीजिए:

$x - 3y + 4z = 3$

$2x - 5y + 7z = 6$

$3x - 8y + 11z = 11$

हलः हमें $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & -8 & 11 \end{vmatrix} = 1(-55+56)+3(22-21)+4(-16+15)$

$= 1 + 3 - 4 = 0$ प्राप्त है।

साथ ही,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 6 & -5 & 7 \\ 11 & -8 & 11 \end{vmatrix} = 3(-55+56)+3(66-77)+4(-48+55)$$

$= 3 - 33 + 28 = -2 \neq 0$

क्योंकि $D = 0$ है और $D_1 \neq 0$ है, इसलिए इस निकाय का कोई हल नहीं है। यह निकाय असंगत है।

बोध प्रश्न ङ

1) क्रैमर–नियम क्या है ?

2) क्रैमर–नियम का उपयोग करते समय, आप कब यह कहेंगे कि रैखिक समीकरणों का यह निकाय असंगत है ?

3) रैखिक समीकरणों के निकास का एक उदाहरण दीजिए।

4) रैखिक समीकरणों के असंगत निकाय क्या अर्थ है ?

2.6 सारांश

इस इकाई में, हमने एक सारणिक में संबद्ध सीमकरण – हल यांत्रिकी की चर्चा की है। यह देखा गया है कि सारणिक एक संख्यात्मक मान है तथा इसे एक वर्ग आव्यूह के अवयवों से अभिकलित किया जा सकता है। हमने सारणिक का मान अभिकलित करना सीखा है, जिसे निम्नलिखित विधि अपनाते हुए परिकलित किया जा सकता है:

एक वर्ग आव्यूह लीजिए। इसकी पहली पंक्ति या पहले स्तंभ के प्रत्येक अवयव के लिए, हम उसका उपआव्यूह प्राप्त करते है। इसके आगे, चुने हुए अवयवो में से प्रत्येक अवयव को इस उपआव्यूह के संगत सारणिक से गुणा कीजिए। अंत में, एकांतर चिह्नों के साथ उन्हें जोड़ दीजिए। हमने $|1 \times 1|$ आव्यूह के सारणिक के मान से प्रारंभ किया था, जो स्वयं वह अकेला मान ही होता है। यदि वर्ग आव्यूह A की कोटि 2 है, तो $|A|=$ (विकर्ण अवयवों का गुणन) – (अविकर्ण अवयवों का गुणन) होता है। कोटि 3×3 के एक वर्ग आव्यूह की स्थिति में, हमें उस आव्यूह की प्रथम पंक्ति पर जाने की आवश्यकता होती लें है। प्रत्येक प्रविष्टि को उस 2×2 आव्यूह के सारणिक से गुणा कीजिए, जो प्रांरभिक आव्यूह में से उस प्रविष्टि को अंतर्विष्टि करने वाली पंक्ति और स्तंभ को काटने से प्राप्त होता है। फिर हम परिणामी पदों को जोड़ते और घटाते है: अर्थात् बारी–बारी से चिह्न बदलते हुए जोड़ते और घटाते हैं (a –पद को जोड़िए, b –पद को घटाइए, c – पद को जोड़िए)। कोटि 3×3 में अपनाई गई विधि को किसी भी विमाओं वाले वर्ग आव्यूह के लिए विस्तृत किया जा सकता है। हमनें इस ओर भी ध्यान दिया है कि हमें केवल प्रथम पंक्ति या स्तंभ के उपयोग तक ही सीमित रहने की कोई आवश्यकता नहीं है। किसी सारणिक का मान अभिकलित करते समय, किसी भी पंक्ति या स्तंभ का उपयोग कर सकते हैं : जब तक आप यह सुनिश्चित कर लेते हैं कि कहाँ धन $(+)$चिह्न लगाना है और कहाँ ऋण $(-)$चिह्न लगाना है।

सारणिक के गुणों की चर्चा करते समय, हमने देखा था कि दो पंक्तियों / स्तंभों को परस्पर बदलने पर, उसका मान वही रहता है परंतु चिह्न बदल जाता है। सारणिक का मान शून्य होता है, यदि उसकी दो पंक्तियाँ या स्तंभ सर्वसम हों। साथ ही, सारणिक की सभी पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदलने पर उसका मान वही रहता है। यही परिणाम तब भी प्राप्त होता है जब हम सारणिक की एक पंक्ति/स्तंभ के सभी अवयवों में/में से एक अन्य पंक्ति/स्तंभ के संगत अवयवों के k गुने को जोड़ते/घटाते हैं। यदि हम किसी सारणिक की एक पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयवों को एक अचर k से गुणा करें, तो उस सारणिक का मान k गुना हो जाता है।

किसी वर्ग आव्यूह के संगत सारणिक का मान अभिकलित करने के लिए, हम उसके उपसारणिक और सहखंड की संकल्पनाओं का परिचय देते हैं। जहाँ एक वर्ग आव्यूह के सारणिक में से उस आव्यूह के एक अवयव के संगत पंक्ति और स्तंभ को हटा लेने पर प्राप्त सारणिक उसका उपसारणिक कहलाता है, जबकि चिह्नित उपसारणिक सहखंड कहलाता है। इस इकाई के अंतिम भाग में, हम रेखिक समीकरणों के निकाय को हल करने में सारणिकों के उपयोग को उजागर करते हैं तथा इस संदर्भ में क्रैमर–नियम का अध्ययन करते हैं।

2.7 शब्दावली

सहखंड: चिह्नित उपसारणिक।

क्रैमर –नियम: सारणिको का उपयागे करते हुए n चरों वाली n रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने की विधि।

सारणिक: एक वर्ग आव्यूह के अवयवों से अभिकलित एक संख्यात्मक मान।

रैखिक समीकरण –निकाय: दो या अधिक रैखिक समीकरणों का एक संग्रह जिसमें चरों की संख्या भी वही होती है।

उपसारणिक: एक वर्ग आव्यूह के एक अवयव के संगत पंक्ति और स्तंभ को हटाने पर प्राप्त आव्यूह का सारणिक।

2.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

क)

1. एक आव्यूह सारणी रूप में अवयवों की केवल एक क्रमित व्यवस्था है, जबकि सारणिक एक वर्ग आव्यूह से जुड़ा (सहचर) केवल एक संख्यात्मक मान है।

2. उत्तर : रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करते समय

3. उत्तर : वर्ग आव्यूह

ख)

1. उत्तर : 1×1 आव्यूह का सारणिक स्वयं वह संख्या ही होता है।

2. उत्तर : प्रथम पंक्ति के अनुदिश, उपरि बाएँ घटक a से प्रारंभ करते हुए, चलिए। हम घटक (अवयव) a को a की पंक्ति और स्तंभ को हटाने पर बने उपआव्यूह को के सारणिक से गुणा करते हैं। इस स्थिति में, यह उपआव्यूह 1×1 आव्यूह है और जिसका अवयव d है इसलिए इसका सारणिक केवल d है। अतः, सारणिक का प्रथम पद ad है।

   अब प्रथम पंक्ति के दूसरे घटक की ओर चलिए, जिसका उपरि दायाँ घटक b है। b को b की पंक्ति और स्तंभ को हटाने पर बने उपआव्यह के सारणिक से गुणा कीजिए, जो c है। अतः, सारणिक का अगला पद bc हैं। संपूर्ण सारणिक केवल प्रथम पद ad ऋण (minus) दूसरा पद bc है।

3. उत्तर : मान लीजिए कि आव्यूह $A_{n\times n}$ है। तब, $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$ है, जहाँ $|M_{ij}|$ आव्यूह A का उपआव्यूह है, जो iवीं पंक्ति और jवें स्तंभ को काटने से प्राप्त होता है।

ग)

1. उत्तर : सारणिक का मान वही रहता है, परंतु चिह्न बदल जाता है।

2. उत्तर (i) वह सारणिक की सभी पंक्तियों और स्तंभो को परस्पर बदल रहा है तथा (ii) सारणिक की एक पंक्ति/ स्तंभ के सभी अवयवों में/में से एक अन्य पंक्ति /स्तंभ के संगत अवयवों के k गुने को जोड़/घटा रहा है।

3. उत्तर : उसे सारणिक का मान प्रांरभिक मान का k गुना प्राप्त होना चाहिए।

4. उसे सारणिक का मान शून्य प्राप्त होगा।

घ)

1. उत्तर : किसी वर्ग आव्यूह के एक अवयव के संगत पंक्ति और स्तंभ को हटाने के बाद प्राप्त आव्यूह के सारणिक का मान।

2. उत्तर : सहखंड को चिह्नित उपसारणिक के रूप में परिभाषित किया जाता है। एक अवयव a_{ij} के सहखंड को A_{ij} द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, जहाँ M_{ij} अवयव a_{ij} का उपसारणिक है।

3. उत्तर : किसी आव्यूह में से एक निर्दिष्ट अवयव के संगत पंक्ति और स्तंभ को हटाने पर प्राप्त सारणिक का एक संख्यात्मक मान है, जिसके आगे धनात्मक (+) या ऋणात्मक(–) चिह्न लगा होता है, जो इस पर निर्भर करता है कि वह अवयव एक + स्थिति में है या – स्थिति में है।

4. उत्तर : अयवय a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

यहाँ

$a_{11} = 1$ है। इसलिए $M_{11} = a_{11}$ का उपसारणिक $= 3$

M_{12} अवयव का a_{12} उपसारणिक $= 4$

M_{21} अवयव का a_{21} उपसारणिक $= -2$

M_{22} अवयव का a_{22} उपसारणिक $= 1$

आगे, के a_{ij} सहखंड पर जाइए, जिसे A_{ij} लिखा जाता है।

अतः

$A_{11} = (-1)^{1+1}, \quad M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2}, \quad M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1}, \quad M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}, M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$

ङ)

1. उत्तर n चरों में रैखिक समीकरणों के निकाय को सारणिकों की सहायता से हल करने की विधि

2. उत्तर : जब सारणिक $D = 0$ हो तथा $D_1, D_2, D_3, D_4 \ldots\ldots D_n$ में से न्यूनतम एक शून्य के बराबर नहीं हो।

3. उत्तर : $2x + y = 5$ and $-x + y = 2$ को लीजिए। इन पर एक साथ कार्य करने पर निकाय बन जाता है।

4. उत्तर : रैखिक समीकरणों का निकाय असंगत कहलाता है, जब इसका कोई हल नहीं होता।

2.9 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

समीकरणों के निम्नलिखित निकायों को, क्रैमर–नियम का उपयोग करते हुए, हल कीजिए:

i) $5x - 7y + z = 11;\ 6x - 8y - z = 15;\ \ 3x + 2y - 6z = 7;$

ii) $x + 2y - 2z = -7;\ 2x - y + z = 6;\ \ x - y - 3z = -3;$

iii) $6x + y - 3z = 5;\ \ x + 3y - 2z = 5;\ \ 2x + y + 4z = 8$

iv) $2x - 3y - 4z = 29;\ \ -2x + 5y - z = -15;\ 3x - y + 5z = -11$

v) $2x - y + z = 4;\ \ x + 3y + 2z = 12;\ \ 3x + 2y + 3z = 10;$

उत्तर: (i) $x = 1;\ y = -1;\ z = -1;$ (ii) $x = 1;\ y = -2;\ z = 2;$
(iii) $x = 1;\ y = 2;\ z = 1;$ (iv) $x = 2;\ y = -3;\ z = -4;$
(v) कोई हल नहीं

नोट: इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

2.10 संदर्भ पुस्तकें

- Allen, R.G.D., “Mathematical Analysis for Economists”, London: English Language Book Society and Macmillan, 1974.
- Archibald, G.C., Richard G.Lipsey. “An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics”, Delhi: All India Traveller Bookseller, 1984
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Dowling, Edward,T. “Schaum’s Outline Series: Theory and Problems of Mathematics for Economists”, New York: McGraw Hill Book Company, 1986.
- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, Pearson Educational Asia, Delhi, 2002.
- Yamane, Taro, “Mathematics for Economists: An Elementary Survey”, New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited, 1970.

इकाई 3 आव्यूहों के प्रतिलोम

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित को समझ पाएँगेः

- एक आव्यूह के प्रतिलोम की संकल्पना;
- सहखंडज के उपयोग से एक आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करना;
- प्रारंभिक संक्रियाएँ;
- प्रारंभिक संक्रियाओं के उपयोग से एक आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करना; और
- एक आव्यूह की जाति

3.1 प्रस्तावना

इस खंड की प्रथम इकाई शीर्षक 'आव्यूहों का परिचय' में, हम आव्यूहों पर योग, व्यवकलन और गुणन की संक्रियाओं को देख चुके हैं। परंतु जैसा कि आप स्मरण कर सकते हैं, आव्यूहों के विभाजन पर कोई चर्चा नहीं हुई थी। इसका मुख्य कारण यह था कि एक आव्यूह को दूसरे आव्यूह से विभाजित नहीं किया जा सकता। यद्यपि हम ऐसा नहीं कर सकते, फिर भी इस उद्देश्य के लिए एक संबंधित संकल्पना है, जिस पर कार्य किया जा सकता है। यह एक आव्यूह का 'व्युत्क्रम या प्रतिलोम' (inverse या inversion) कहलाती है।

प्रतिलोम की सहज धारणा प्राप्त करने के लिए, यह स्मरण करना उपयोगी है कि $4x = 8$ जैसी एक सरल समीकरण हल हो जाती है, यदि इसके दोनों पक्षों को 4 द्वारा विभाजित कर दिया जाता है। इस क्रिया का परिणाम $x = 2$ हल के रूप में प्राप्त होना है। ठीक इस पर ध्यान दीजिए कि हम 4 द्वारा भाग देने के स्थान पर, इस समस्या को हल करने के लिए, हम दोनों पक्षो को $1/4$ से गुणा कर सकते थे।

इस स्थिति में भी उत्तर 2 प्राप्त होता। यहाँ जो भी किया गया है वह यह है कि गुणन में $4/1$ के व्युत्क्रम (reciprocal) की सहायता ली गई है। इस प्रकार, व्युत्क्रम $1/4$ संख्या $4/1$ का प्रतिलोम है। $4/1$ को उसके व्युत्क्रम $1/4$ से गुणा करने पर, हमे 1 प्राप्त होता है। आव्यूह के प्रतिलोम को भी हम व्युत्क्रम संख्याओं के साथ ऐसी ही संक्रिया के रूप में सोच सकते हैं।

3.2 प्रतिलोम आव्यूह

मान लीजिए कि A कोई आव्यूह है। तब, A के प्रतिलोम (inverse) को A^{-1} के रूप में लिखा जा सकता है। क्योंकि हम आव्यूह से भाग नहीं दे सकते, इसलिए इसे हम $1/A$ के व्यत्क्रुम के रूप में नहीं लिखते हैं। अदिश संख्या पद्धति के साथ प्रतिलोम आव्यूह (inverse matrix) की समानता के लिए हमारी खोज यह दर्शाएगी कि जिस प्रकार 4 और उसके व्युत्क्रम $1/4$ को गुणा करने पर 1 प्राप्त होता है, उसी प्रकार किसी आव्यूह का उसके प्रतिलोम से गुणा करने पर **तत्समक आव्यूह (Identity matrix)** प्राप्त होता है। अर्थात् $A \times A^{-1} = \mathbf{I}$ है, जो एक वर्ग आव्यूह होगा, जिसके विकर्ण में 1 लिखा होगा।

3.2.1 प्रतिलोम आव्यूह की परिभाषा

किसी $n \times n$ वर्ग आव्यूह A का प्रतिलोम एक अन्य $n \times n$ आव्यूह होता है, जिसे A^{-1} से व्यक्त किया जाता है, ताकि

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \boldsymbol{I},$$

जहाँ $\boldsymbol{I}$ एक $n \times n$ तत्समक आव्यूह है। अर्थात् किसी आव्यूह को उसके प्रतिलोम से गुणा करने पर एक तत्समक आव्यूह प्राप्त होता है। पंरतु ध्यान दीजिए कि सभी वर्ग आव्यूहों के प्रतिलोम आव्यूह नहीं होते हैं। यदि आव्यूह का सारणिक शून्य हो, तो उसका प्रतिलोम नहीं होगा। क्योंकि वह आव्यूह जिसके सारणिक शून्य हो **विचित्र** ($\boldsymbol{singular}$) कहलाता है, इसलिए हम यह प्रतिबंध निर्दिष्ट करते हैं कि केवल एक **अविचित्र** ($\boldsymbol{non-singular}$) **आव्यूह** का ही प्रतिलोम होता है। ऐसा ही आव्यूह

व्युत्क्रमणीय आव्यूह (***invertible matrix***) कहलाता है। इसी कारण, विचित्र आव्यूह अव्युत्क्रमणीय आव्यूह भी कहलाता है।

3.2.2 प्रतिलोम आव्यूह के गुण

1. एक वर्ग आव्यूह व्युत्क्रमणीय तभी और केवल तभी होता है, जब वह अविचित्र हो।

2. किसी आव्यूह के प्रतिलोम का प्रतिलोम स्वयं वह आव्यूह ही होता है, अर्थात् $(A^{-1})^{-1} = A$ होता है।

3. किसी आव्यूह के परिवर्त का प्रतिलोम उसके प्रतिलोम के परिवर्त के बराबर होता है, अर्थात् $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ होता है।

4. यदि A और B एक ही कोटि के दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं, तो AB भी व्युत्क्रमणीय होता है, जिसके लिए कथन $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ सत्य है।

3.2.3 एक 2 × 2 आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करना

स्वयं को प्रतिलोम के अभिकलन की धारणा से परिचित कराने के दृष्टिकोण के साथ, हम एक

उदाहरण के रूप में नीचे एक 2 × 2 आव्यूह पर चर्चा कर रहे हैं।

मान लीजिए कि $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ है, जहाँ a, b, c और d संख्याएँ हैं। इसके प्रतिलोम को निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, जहाँ $(ad - bc)$ इस आव्यूह के सारणिक का मान है। प्रतिलोम ज्ञात करने की प्रक्रिया आगे जारी रखने के लिए, इसको शून्य के बराबर नहीं होना चाहिए।

इस प्रकार, हम अभिकलन तभी कर पाएँगे जब हमारे पास एक वर्ग आव्यूह हो तथा एक शून्येतर (non–zero) सारणिक हो।

उदाहरण 1: आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4\times3-5\times2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -2.5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है।

$4x=8$, जैसी अकेली समीकरण को हल करने की विधि की तरह, हम प्रतिलोम तकनीक का उपयोग करते हुए, किसी आव्यूह × के अज्ञात मान के लिए हल कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि हमें $XA = B$ दिया है, जहाँ A और B ज्ञात हैं; तो हम आव्यूह × ज्ञात करने के लिए प्रतिलोम की विधि का उपयोग कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए हम लिखते हैं:

$XAA^{-1} = BA^{-1}$ हैं। क्योंकि $AA^{-1} = I$, इसलिए हम प्राप्त करते है:

$XI = BA^{-1}$, अर्थात्, $X = BA^{-1}$ (X के तत्समक आव्यूह से गुणा के कारण)

याद रखिए कि प्रतिलोम ज्ञात करने के सभी प्रतिबंध जैसे कि A एक वर्ग आव्यूह है और व्युत्क्रमणीय है तथा B की कोटि गुणन नियम के अनुरूप है, वाँछित हल प्राप्त करने के लिए संतुष्ट हो रहे हैं।

3.2.4 बड़े आव्यूहों के प्रतिलोम अभिकलित करना

ऊपर हम एक 2 X 2 आव्यूह के प्रतिलोम को देख चुके हैं। बड़े आव्यूहों 3x3, 4x4, ... की तुलना में इसके प्रतिलोम का अभिकलन सरल है। परंतु बड़े आव्यूहों के प्रतिलोम ज्ञात करने के लिए, हमें दो मुख्य विधियों का उपयोग करना पड़ेगा। ये विधियाँ हैं:

(i) उपसारणिकों, सहखंडो और सहखंडज के उपयोग से किसी आव्यूह का प्रतिलोम तथा (ii) प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के उपयोग से किसी आव्यूह का प्रतिलोम। हमने आव्यूह कैलकुलेक्टर जैसे कम्प्यूटर (Computer) के उपयोग को इस वर्तमान इकाई में सम्मिलित नहीं किया है, जिसका उपयोग किसी आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करने में किया जा सकता है।

नोट: एक विकर्ण आव्यूह का प्रतिलोम उसके विकर्ण के प्रत्येक अवयव को उसके व्युत्क्रम से प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है। उदाहणार्थ, एक विकर्ण आव्यूह $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ को लीजिए। तब,

$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ है। सत्यापन कीजिए कि $CC^{-1} = \mathrm{I}$ है, जहाँ I तत्समक आव्यूह है।

बोध प्रश्न क

1. आप एक आव्यूह के प्रतिलोम की धारणा को किस प्रकार स्पष्ट करेंगे ?
2. किसी वर्ग आव्यूह को उसके प्रतिलामे से गुणा करने पर क्या परिणाम प्राप्त होता है ?
3. आप प्रतिलोम की संक्रिया किस प्रकार के आव्यूह पर लागू कर सकते हैं ?
4. एक आव्यूह के प्रतिलोम की परिभाषा लिखिए।
5. एक विचित्र आव्यूह क्या होता है ?
6. आप एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह की पहचान किस प्रकार करेंगे ?
7. आप इसका सत्यापन किस प्रकार करेंगे कि आपने एक आव्यूह का प्रतिलाम सही परिकलित किया है ?
8. क्या आप आव्यूह पर विभाजन की संक्रिया कर सकते हैं ?

3.3 आव्यूह प्रतिलोम विधि : सारणिक और सहखंडज मार्ग

आगे आने वाली पंक्तियों में, हम एक आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करने की ऊपर बताई गई दो विधियों में से एक की चर्चा करेंगे। इसकी पृष्ठभूमि तैयार करने के लिए, हम पहले एक आव्यूह के सहखंडज (adjoint) की संकल्पना की चर्चा करेंगे, जो एक वर्ग आव्यूह में सहखंड का परिवर्त होता है। प्रतिलोम, जो सहखंडज को सारणिक से भाग देने पर प्राप्त होता है को दूसरे चरण के रूप में एक पृथक उपअनुच्छेद के अंतर्गत दिया गया है।

3.3.1 एक आव्यूह का सहखंडज

ऊपर बताई गई आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करने की दोनो विधियों में से पहली विधि के उपयोग करने में एक आव्यूह के सहखंडज की संकल्पना को समझने की आवश्यकता है।

यदि $A = [a_{ij}]$ कोटि n का एक वर्ग आव्यूह है, तो A के सहखंडज को कोटि n के आव्यूह $[A_{ij}]$ के परिवर्त के रूप में परिभाषित किया जाता है, जहाँ $|A|$ में A_{ij} अवयव a_{ij} का सहंखड है। दूसरे शब्दो में, मान लीजिए कि

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ है।}$$

$$\text{तब, } Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & . & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & . & A_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & . & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ का परिवर्त}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & . & A_{n2} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} & . & A_{n3} \\ . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & . & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ है।}$$

यहाँ $|A|$ में A_{11} अवयव a_{11} का सहखंड है,

$|A|$ में A_{12} अवयव a_{12} का सहखंड है, इत्यादि।

टिप्पणियाँ:

1. यदि $\boldsymbol{A}$ कोटि $\boldsymbol{n}$ का एक वर्ग आव्यूह है, तो $A.Adj(A) = Adj(A).A = |\boldsymbol{A}|.I_n$ होता है, जहाँ I_n कोटि $\boldsymbol{n}$ का एक तत्समक आव्यूह है।
2. $\boldsymbol{adj(AB) = adj(A).adj(B)}$ है।
3. $\boldsymbol{adj(A') = (adj(A))'}$ है।

उदाहरण 2 : आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ का संहखंडज ज्ञात कीजिए तथा

प्रमेय $A.adj(A) = adj(A).A = |A|.I_n$ का सत्यापन कीजिए।

हलः

$Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ का परिवर्त

$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ दिया हुआ है। आइए इस आव्यूह के सभी अवयवों के सहखड ज्ञात करें।

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(2x(-3) - 0x1) = -6 - 0 = -6$ है।

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(3x(-3) - 1x(-2) = -(-9 + 2) = 7$ है।

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(3x0 - 2x(-2)) = (0 + 4) = 4$ है।

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(6x(-3) - 5x0) = -(-18 - 0) = 18$ है।

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(1x(-3) - 5x(-2)) = (-3 +10) = 7$ है।

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(1x0 - 6x(-2) = -(0 + 12) = -12$ है।

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(6x1 - 2x5) = 6 - 10 = -4$ है।

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(1x1 - 5x3) = -(1 - 15) = 14$ है।

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(1x2 - 6x3) = 2 - 18 = -16$ है।

अतः,

$adj(A) = \begin{bmatrix} -6 & 7 & 4 \\ 18 & 7 & -12 \\ -4 & 14 & -16 \end{bmatrix}$ का परिवर्त

$\Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} -6 & 18 & -4 \\ 7 & 7 & 14 \\ 4 & -12 & -16 \end{bmatrix}$ है।

साथ ही, $|A| = 1(-6 - 0) - 6(-9 + 2)+5(0 + 4)$

$= -6 + 42 + 20 = 56$ है।

अब,

$$A.adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 18 & -4 \\ 7 & 7 & 14 \\ 4 & -12 & -16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+42+20 & 18+42-60 & -4+84-80 \\ -18+14+4 & 54+14-12 & -12+28-16 \\ 12+0-12 & -36+0+36 & 8+0+48 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

इस प्रकार,

$$adj(A).A = \begin{bmatrix} -6 & 18 & -4 \\ 7 & 7 & 14 \\ 4 & -12 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+54+8 & -36+36-0 & -30+18+12 \\ 7+21-28 & 42+14+0 & -12+28-16 \\ 12+0-12 & -36+0+36 & 8+0+48 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

$$\begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix} = 56 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|.I_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

(I) ,(II) और (III) से,

$Adj(A).A = A.adj(A) = |A|.I_3$ है।

3.3.2 एक आव्यूह के सहखंडज के उपयोग से प्रतिलोम का अभिकलन

मान लीजिए कि A कोटि n का एक वर्ग आव्यूह है। कोटि n का वर्ग आव्यूह B आव्यूह A का प्रतिलोम आव्यूह कहलाता है, यदि

$$A \times B = B \times A = I_n \text{ हो।}$$

A के प्रतिलोम को A^{-1} द्वारा व्यक्त किया जाता है, अर्थात् $B = A^{-1}$ है ताकि

$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$ हो।

पिछले उपअनुच्छेद में, हम देख चुके हैं कि $A.adj(A) = |A|.I_n$

होता है, जिससे $A.\frac{\boldsymbol{adj(A)}}{|A|.} = \boldsymbol{I_n}$

प्राप्त होता है। इस प्रकार, A व्युत्क्रमणीय है तथा $A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adj(A)}}{|A|.}$, जहाँ $|A| \neq 0$ है।

अतः, केवल अविचित्र आव्यूह ही व्युत्क्रमणीय होते हैं।

उदाहरण 3 : आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए तथा फिर दर्शाइए कि

$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_3$ है।

हलः

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

$|A| = 1(2-4) + 2(-6-8) + 3(3+2) = -2 - 28 + 15 = -15$ है।

आव्यूह A के अवयवों के सहखंड हैं:

$A_{11} = (2-4) = -2$

$A_{12} = -(-6-8) = 14$

$A_{13} = (3+2) = 5$

$A_{21} = -(4-3) = -1$

$A_{22} = (-2-6) = -8$

$A_{23} = -(1+4) = -5$

$A_{31} = (-8+3) = -5$

$A_{32} = -(4-9) = 5$

$A_{33} = (-1+6) = 5$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ का परिवर्त}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 14 & 5 \\ -1 & -8 & -5 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \text{ का परिवर्त}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 14 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

क्योंकि $A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adj(A)}}{|A|.}$ है, इसलिए

$$A^{-1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 14 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

अतः,

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}\right) \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 14 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -2-28+15 & -1+16-15 & -5-10+15 \\ -6-14+20 & -3+8-20 & -15-5+20 \\ -4+14-10 & -2-8+10 & -10+5-10 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \text{ है।}$$

इसी प्रकार, $A^{-1} \times A = I_3$ है।

उदहारण 4: ऐसा आव्यूह X ज्ञात कीजिए ताकि $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ हो।

हल: मान लीजिए कि

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ है तथा $B = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ है।

अतः, उपरोक्त संबंध को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है।

इसके फलस्वरूप $X = A^{-1}B$ है।

यहाँ $|A| = (2 \times 4 - ((-1) \times 3) = 8+3 = 11$ है।

$Adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ का परिवर्त

$= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ का परिवर्त

$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ है।

$A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adj(A)}}{|A|.}$, है। अतः, $A^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

अतः,

$X = A^{-1}B$

$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 40+15 & 16-27 \\ 10-10 & 4+18 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 55 & -11 \\ 0 & 22 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ है।

उदाहरण 5: यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है तथा $detA = 5$ है, तो $det\,[(2A)^{-1}]$ क्या होगा ?

हल: यदि A कोटि 3 का आव्यूह है, तो A^{-1} भी कोटि 3 का होगा। पुनः $det\,(cA) = c^n(\det A)$, जहाँ n उस आव्यूह की कोटि है। सारणिक के एक अदिश संख्या होने के कारण, इस प्रकार, $det\,A = \frac{1}{\det A^{-1}}$. $det\,[(2A)^{-1}] = 2^3 det[A]$ तथा

$det\,[(2A)^{-1}] = 2^3 det[A]$ तथा $t[A^{-1}] = \frac{1}{8.5} = \frac{1}{40}$ है।

बोध प्रश्न ख

1. यदि A कोटि n का एक वर्ग आव्यूह है, तो $A.\mathrm{adj}(A)$ क्या होगा ?
2. आपके पास दो सहखंडज आव्यूह $adj(A)$ और $adj(B)$ हैं। बताइए कि आप किस प्रकार $adj(AB)$ ज्ञात करेंगे।
3 आप किस प्रकार दर्शा सकते हैं कि $adj(A') = (adj(A))'$ होता है ?

3.4 आव्यूह प्रतिलोम विधि : प्रारंभिक संक्रियाएँ मार्ग

प्रतिलोम ज्ञात करने में, प्रारंभिक संक्रियाएँ एक क्रांतिक भूमिका अदा करती हैं। एक ऐसा आव्यूह A लीजिए, जिसके प्रतिलोम (A^{-1}) का आस्तित्व हो। इस आव्यूह का प्रारंभिक पंक्ति या स्तंभ संक्रियाओं से प्रतिलोम ज्ञात करने के लिए, $A = IA$ लिखिए तथा $A = IA$ पर पंक्ति या स्तंभ संक्रियाओं का एक अनुक्रम तब तक लगाते रहिए, जब तक कि हमें $I = BA$ न प्राप्त हो जाए। आव्यूह B आव्यूह A का प्रतिलोम आव्यूह होगा।

3.4.1 प्रारंभिक आव्यूह संक्रियाएँ

एक प्रारंभिक $(elementary)$ आव्यूह एक वर्ग आव्यूह होता हैं जो एक तत्समक आव्यूह पर एक प्रारंभिक पंक्तिया स्तंभ संक्रिया करने पर प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, जब तत्समक आव्यूहों पर पारंभिक संक्रियाएँ की जाती है, तब उनसे प्रारंभिक आव्यूह प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 6: यदि हम एक तत्समक आव्यूह लें और उसकी प्रथम पंक्ति को उसे 3 से गुणा करें, तो हम प्रारंभिक आव्यूह

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, निम्नलिखित दो आव्यूह भी प्रारंभिक आव्यूह समझे जाते हैं:

$(i)\ \ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ और $(ii)\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

इन आव्यूहों को प्राप्त करने की विधि को देखने के लिए, आपको

i) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ की दो पंक्तियों को परस्पर बदलने की आवश्यता है, ताकि E_1 प्राप्त हो जाए तथा

ii) तत्सभक आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ की दूसरी पंक्ति को लेकर उसमें प्रथम पंक्ति का दुगुना जोड़ने की आवश्यकता है, ताकि E_2 प्राप्त हो जाए।

प्रारंभिक आव्यूह संक्रियाएँ तीन प्रकार की होती हैं:

1. दो पंक्तियों या (स्तंभों) को परस्पर बदलना।
2. एक पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को एक शून्येतर संख्या से गुणा करना।
3. एक पंक्ति (या स्तंभ) को एक शून्येतर संख्या से गुणा करना तथा परिणाम एक अन्य पंक्ति (या स्तंभ) में जोड़ देना।

जब इन संक्रियाओं को पंक्तियों पर किया जाता है, तो ये प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाएँ (elementrary row operations) कहलाती हैं तथा जब इन्हें स्तंभो पर किया जाता है, तो ये प्रारंभिक स्तंभ संक्रियाँए (elementrary column operations) कहलाती हैं।

एक दिए हुए आव्यूह पर उपरोक्त संक्रियाएँ करने से प्राप्त रूपांतरणों (trnasformations) को इस प्रकार लिखा जाता है:

1. किन्हीं दो पंक्तियों (स्तंभो) को परस्पर बदलना

   $R_i \leftrightarrow R_j$ / $C_i \leftrightarrow C_j$

2. किसी पंक्ति (स्तंभो) को एक शून्येतर अदिश से गुणा करना

   $R_i \rightarrow kR_i$ / $C_i \rightarrow kC_i$

3. किसी पंक्ति (स्तंभ) में अन्य पंक्ति (स्तंभ) को एक शून्येतर अदिश से गुणा करके जोड़ना

   $R_i \rightarrow R_i + kR_j$ / $C_i \rightarrow C_i + kC_j$

यदि आव्यूह A पर एक या अधिक प्रारंभिक संक्रियाएँ करने के बाद एक वर्ग आव्यूह B प्राप्त होता है, तो A और B तुल्य $(equivalent)$ आव्यूह कहलाते हैं तथा इन्हें $A \sim B$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

3.4.2 प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के उपयोग से प्रतिलोम का अभिकलन

मान लीजिए कि A एक अविचित्र वर्ग आव्यूह है। अतः, हमें प्राप्त है:

$$A = I \times A$$

यदि A पर बाइ ओर से तथा I पर दाइ ओर से प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाएँ की जाती हैं, तो हमे $I = B \times A$ जैसा एक नया रूप प्राप्त होता है। तब, आव्यूह B आव्यूह A का प्रतिलोम होता है।

उदाहरण 7: प्रारंभिक संक्रियाओं का उपयोग करते हुए, आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ है।

अतः, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ है।

$R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ के उपयोग से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \rightarrow \frac{1}{5} R_2$ के उपयोग से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2$ के उपयोग से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2$ के उपयोग से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_3 \rightarrow 5R_3$ और

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \rightarrow R1 + \frac{6}{5} R_3$ और

$R_2 \rightarrow R2 - + \frac{2}{5} R_3$ के उपयोग से

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} A$$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ है।

बोध प्रश्न ग

1. एक प्रारंभिक आव्यूह क्या होता है ?
2. आपको प्रारंभिक आव्यूह कब प्राप्त होंगे ?
3. प्रारंभिक आव्यूह संक्रियाओं के तीनों प्रकारों को लिखिए।
4. जेम्स ने प्रारंभिक संक्रियाएँ करके एक आव्यूह से एक वर्ग आव्यूह प्राप्त किया। तब उसने कहा कि इन संक्रियाओं के कारण उसने एक आयातकार आव्यूह व्युत्पित किया है। क्या आप कहेंगे कि जेम्स सही है ? अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।
5. प्रारंभिक संकारकों (operators) के अर्थ बताइए।

3.5 एक आव्यूह के प्रतिलोम और जाति

किसी वर्ग आव्यूह के प्रतिलोम के अस्तित्व के निर्धारण करने की दो विधियाँ हैं; अर्थात्

(i) **उसका सारणिक अभिकलित कीजिए** तथा ज्ञात कीजिए कि यह शून्य के बराबर नहीं है, तथा

(ii) **उसकी जाति (rank) निर्धारित करें** और देखें कि वह व्युत्क्रमणीय है।

हम उपरोक्त दो विधियों में से पहली विधि को पहले ही देख चुके हैं। आइए दूसरी विधि, अर्थात् किसी आव्यूह की जाति पर दृष्टि डालें। ध्यान दीजिए कि एक आव्यूह की जाति एक वर्ग आव्यूह से जुड़ी एक अद्वितीय संख्या होती है। यदि किसी $n \times n$ आव्यूह की जाति (या क्रम) n से छोटी है, तो उस आव्यूह का कोई प्रतिलोम नहीं होता है।

3.5.1 एक आव्यूह की जाति

किसी आव्यूह में, रैखिकतः स्वतंत्र (linerarly independent) पंक्तियों की अधिकतम संख्या पंक्ति जाति (row rank) कहलाती है। इसी प्रकार, किसी आव्यूह में रैखिकत : स्वतंत्र स्तभों की संख्या स्तंभ जाति (column rank) कहलाती है।

यदि A एक $m \times n$ आव्यूह है, अर्थात् A में m पंक्तियाँ हैं और n स्तंभ हैं, तो

A की पंक्ति जाति $A \leq m$ और $A \leq n$ की स्तंभ जाति $\leq n$ हैं...............................(1)

यद्यपि यह इतनी स्पष्ट नहीं है, परंतु किसी आव्यूह A के लिए,

A की पंक्ति जाति = A की स्तंभ जाति है .... (2)

इस कारण, पंक्ति जाति और स्तंभ जाति के बीच भेद करने की कोई आवश्यकता नहीं है।

अतः, यदि A की कोटि $m \times n$ है, तो (1) में दी असमिकाओं से यह निष्कर्ष निकलता है कि जाति $(A_{m\times n}) \leq \min(m,n)$, जहाँ $min(m,n)$ दोनों संख्याओं m और n में से छोटी संख्या को व्यक्त करता है (या उनकी उभयनिष्ठ मान, यदि $m = n$ है) (1) उदाहरणार्थ, एक 3 x 5 आव्यूह की जाति 3 से अधिक नहीं हो सकती तथा एक 4 x 2 आव्यूह की जाति 2 से अधिक नहीं हो सकती। ध्यान दीजिए कि आव्यूह A की जाति को P(A) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

टिप्पणियाँ:

- एक शून्य आव्यूह की जाति शून्य कही जाती है।
- प्रांरभिक रूपांतरणो से किसी आव्यूह की जाति में कोई बदलाव नहीं होता।

क्योंकि किसी आव्यूह की जाति की पहचान रैखिक स्वतंत्रता से जुडी हुई है, इसलिए यह न्यायसंगत प्रतीत होता है कि इस संकल्पना को स्पष्ट रूप से समझ लिया जाए।

3.5.2 रैखिक स्वतंत्रता

एक सादिश (**vector**) (अर्थात् एक परिमाण और दिशा दोनो निरूपित करना वाला चर) अन्य संदिशों पर आश्रित (**dependent**) रहता है, यदि वह अन्य सदिशों का एक रैखिक संयोजन (**scalar** multiples) होता है। अर्थात् यदि हम कुछ सादिशों के आदिश गुणज (linear combination) लें और इन्हें जोड़ कर एक नया सदिश प्राप्त कर लें, तो नया सादिश अन्य सदिश का एक **रैखिक संयोजन** कहा जाता है।

उदाहरण 8: मान लीजिए कि $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 37 \\ 26 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ और $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$ के साथ 2y + 3 z दिया हुआ है।

अब y और z पर संक्रिया करके प्राप्त कीजिए:

$$2\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 9 \\ 2 \times 7 + 3 \times 4 \end{bmatrix}$$

अब, इस ओर ध्यान दिया जा सकता है कि 2y और 2z अदिश गुणज हैं। अतः, y और z का x एक रैखिक संयोजन है।

इस प्रकार, सदिशों का एक समुच्चय रैखिकत : स्वतंत्र होता है, यदि विचाराधीन समुच्चय में कोई भी सदिश

i) उस समुच्चय के अन्य सदिश का एक अदिश गुणज नहीं हो, या (ii) उस समुच्चय के अन्य सदिशों का एक रैखिक संयोजन नहीं हो।

विलोमतः सदिशों का एक समुच्चय रैखिकत : आश्रित (linerarly dependent) होता है, यदि उस समुच्चय में कोई भी सदिश (i) उस समुच्चय के अन्य सदिश का एक अदिश गुणज हो, या

ii) उस समुच्चय के अन्य सदिशों का एक रैखिक संयोजन हो।

पंक्ति सदिशों

$\boldsymbol{a} = [1 \quad 2 \quad 3]$, $\boldsymbol{b} = [5 \quad 6 \quad 7]$, $\boldsymbol{c} = [6 \quad 8 \quad 10]$,

$\boldsymbol{x} = [2 \quad 4 \quad 6]$, $\boldsymbol{y} = [0 \quad 0 \quad 1]$, $\boldsymbol{z} = [0 \quad 1 \quad 0]$ पर

विचार कीजिए।

हम निम्नलिखित प्रेक्षण कर सकते हैं:

(i)	a और b रैखिकत : स्वतंत्र हैं।	कोई भी अन्य का आदेश गुणज नहीं है।
(ii)	a और x रैखिकत : आश्रित हैं।	$2a = x$ है।
(iii)	a ,b और c रैखिकत औरः आश्रित हैं।	a, b और c रैखिक संयोजन है, क्योंकि $a +,b \quad c$ है।
(iv)	x , y :और z स्वतंत्र हैं।	कोई भी अन्य का न तो अदिश गुणज है और न ही अन्य का एक रैखिक संयोजन है।

3.5.3 एक आव्यूह की व्युत्क्रमता और जाति

एक बार यदि हम पंक्तियों या स्तंभों की रैखिकतः स्वतंत्रता निर्धारित कर लें, तो उस आव्यूह की जाति ज्ञात हो जाती है। क्योंकि प्रस्तुत इकाई में हमारे सरोकारों में से एक जाति के आधार पर किसी आव्यूह की व्युत्क्रमता के बारे में निष्कर्ष निकालना है, इसलिए हम एक वर्ग आव्यूह की रैखिकतः स्वतंत्र पंक्तियों या स्तंभों के साथ कार्य करते हैं तथा उसकी जाति सुनिश्चित करते हैं। ऐसा परिणाम विचारधीन आव्यूह की व्युत्क्रमता इंगित करेगा।

उदाहरणार्थ, आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ को लीजिए।

यह देखा जा सकता है कि इस 2 x 2 आव्यूह के न तो स्तंभ और न ही पंक्तियाँ रैखिक आश्रितता के प्रतिबंधों के अनुरूप हैं। अतः, इस आव्यूह की जाति 2 के बराबर है और यह पूर्ण जाति का है। इस परिणाम के आधार पर, हम कह सकते हैं कि यह एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

इसकी जाँच करने के लिए कि इस आव्यूह का वास्तव में एक प्रतिलोम है, इस पर प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं का उपयोग कीजिए। प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं का उपयोग करने के लिए, हम A = IA, अर्थात्

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A$ लिख सकते हैं।

$R_2 \to R_2 - 2R_1$ उपयोग कीजिए, जिससे

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A$ हैं।

पुनः $R_2 \to -\frac{1}{5} R_2$ उपयोग कीजिए, जिससे

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} A$ लेने पर, हम प्राप्त करते हैं:

आगे, $R_1 \to R_1 - 2R_2$

$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\2/5 & -1/5\end{bmatrix} A,$ जिससे

$A^{-1} = \begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\2/5 & -1/5\end{bmatrix}$ प्राप्त होता है।

साथ ही, हम इसका निर्धारण भी कर सकते हैं कि पूर्ण जाति वर्ग आव्यूह से छोटी जाति का आव्यूह व्युत्क्रमणीय नहीं होता है।

उदाहरण 9: मान लीजिए कि

$\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 4\\3 & 1 & 1 & 0\\-1 & -5 & -1 & 8\\3 & 8 & 2 & -12\end{bmatrix}$ एक 4 x 4 एक आव्यूह है।

इसके चार पंक्ति सदिश हैः

$r_1 = (1, -2, 0, 4)$

$r_2 = (3, 1, 1, 0)$

$r_3 = (-1, -5, -1, 8)$ और

$r_4 = (3, 8, 2, -12)$

यह देखा जा सकता है कि

$r_3 = 2r_1 - r_2$ है

तथा $r_4 = 3r_1 + 2r_2$ है।

इस प्रकार, सदिशों r_3और r_4 को r_1और r_2 के रैखिक संयोजनों के रूप में लिखा जा सकता है। इसका अर्थ है कि स्वतंत्र पंक्तियों की अधिकतम संख्या 2 है तथा इस आव्यूह की जाति 2 है। अतः, यह आव्यूह व्युत्क्रमणीय नहीं है।

उदाहरण 10: निम्नलिखित 4 $\times$ 4 आव्यूह की जाति निर्धारित कीजिए तथा देखिए कि क्या इसका एक प्रतिलोम हैः

$$C = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

क्योंकि $r_2 = r_4 = -r_1$ और $r_3 = r_1$ है, इसलिए पहली पंक्ति के अतिरिक्त सभी पंक्तियाँ लुप्त हो जाएँगी। अब, क्योंकि केवल 1 शून्यतर पंक्ति शेष रह जाती है, इसलिए C की जाति =1 है। अतः, यह आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

बोध प्रश्न घ

1. किसी आव्यूह के उपसारणिकों के आधार पर आप उसकी जाति किस प्रकार निर्धारित करेंगे ?

2. स्टोर्ट के पास एक 3 × 3 आव्यूह है, जिसकी जाति 2 है। क्या वह इसका प्रतिलोम ज्ञात कर सकता है ?
3. एक सदिश क्या होता है ?
4. संदिशों के रैखिक संयोजन का अर्थ स्पष्ट कीजिए।
5. आप कब यह कहेंगे कि सदिशों का एक समुच्चय रैखिकतः आश्रित है ?

3.6 प्रतिलोम आव्यूह द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करना

यह अनुच्छेद स्पष्ट करेगा कि प्रतिलोम आव्यूहों के उपयोग द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय को किस प्रकार हल किया जाता है। इस विधि को समझने के लिए, हम मुख्यतः उदाहरणों पर निर्भर करेंगे।

3.6.1 समीकरणों के निकाय

मान लीजिए कि आपका परिवार राष्ट्रीय जूलोजिकल पार्क (National Zoological Park) नई दिल्ली जा रहा है। परिवार के सदस्यों में एक वयस्क और दो बच्चे हैं, जिनके लिए प्रवेश शुल्क की कुल लागत 50 रुपये है। आपके मित्र का परिवार इस यात्रा में आपके साथ सम्मिलित हो जाता है। अब आप तीन व्यवस्क और पाँच बच्चे हो जाते हैं तथा उनके प्रवेश शुल्क की कुल लागत 140 रुपये है। आपका कार्य है कि प्रति बच्चा और वयस्क टिकट की लागत ज्ञात करना है। इस समस्या को हल करने के लिए, आपको दो अज्ञातों को ज्ञात करने के लिए, दो समीकरणों की आवश्यकता है। इसी प्रकार, आपकों समीकरणों का एक निकाय प्राप्त हो जाएगा। इस उद्देश्य के लिए, आपको एक व्यस्क टिकट की लागत x और एक बच्चे की टिकट की लागत y लेते हुए, समीकरणों का निकाय स्थापित करना पड़ेगा। समीकरणों का निकायः

$$x + 2y = 50$$

$$3x + 5y = 140$$

यद्यपि रैखिक समीकरणों के निकायों जैसा कि एक ऊपर दिया है, को हल करने की हमारे पास अनेक विधियाँ उपलब्ध हैं; परंतु हम समीकरणों के इस निकाय को प्रतिलोम आव्यूहों के उपयोग द्वारा हल करेंगे। ध्यान दीजिए कि हल करने की प्रस्तुत विधि के लिए, हमें दो चरणों का अनुसरण करना होगा जो ये हैंः

i) गुणांक (Coefficient) आव्यूह और उसका प्रतिलोम आव्यूह ज्ञात करना तथा

ii) इस प्रतिलोम आव्यूह का समीकरणों के हल करने में उपयोग करना।

गुणांक आव्यूह में, समीकरणों के निकाय के चरों के आगे लिखे गुणांक, अर्थात् संख्याएं निहित होती हैं। उपरोक्त उदाहरण के पदों में देखने पर, पहली समीकरण में, x का गुणांक 1 और y का गुणांक 2 है। दूसरी समीकरण में, x का गुणांक 3 और y का गुणांक 5 है। आव्यूह रूप में इनकों व्यवस्थित करने पर, एक 2×2 आव्यूह जनित होगा। आइए इसे आव्यूह A कहें। इस प्रकार, हम गुणांक आव्यूह प्राप्त करते हैं।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

इस गुणांक आव्यूह में, प्रथम पंक्ति के अवयव प्रथम समीकरण के गुणांक हैं; जबकि दूसरी पंक्ति के अवयव दूसरी समीकरण के गुणांक हैं। पुनः आव्यूह का प्रथम स्तंभ x के गुणांकों से बना है तथा दूसरा स्तंभ y के गुणांकों से बना है क्योंकि हमारे पास दो चर हैं, इसलिए हमें एक 2×1 आव्यूह प्राप्त होता है, जो चर आव्यूह कहलाता है।

अतः यहाँ चर आव्यूह

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ है।

एक तीसरे आव्यूह, जो **अचर आव्यूह** कहलाता है, समीकरणों के निकाय के अचरों को अंतर्निहित करता है। आइए इस आव्यूह को B कहें, जो एक 2×1 आव्यूह है, क्योंकि इसमें दो पंक्तियाँ और एक स्तंभ है।

इसे

$B = \begin{bmatrix} 50 \\ 140 \end{bmatrix}$ लिखिए।

इस व्यवस्था से, हमें आव्यूह में समीकरणों का एक निकाय प्राप्त हो जाता है, जिसका निकाय का हल ज्ञात करने और उत्तर ज्ञात करने में उपयोग किया जा सकता है।

अब, जब हम वाँछित आव्यूहों को जान गए हैं; इनको एक साथ रख कर एक आव्यूह समीकरण प्राप्त हो जाती है। ऐसी समीकरण में एक गुणांक आव्यूह, एक चर आव्यूह और एक अचर आव्यूह सम्मिलित होते हैं, जिनका उपयोग करके निकाय हल किया जाता है। आवश्यक रूप से, हम जानते हैं कि यदि आव्यूह A को आव्यूह X से गुणा करते हैं, तो यह आव्यूह B के बराबर होगा।

अतः हम इस आव्यूह समीकरण को $AX = B$ रूप में लिखते हैं। अर्थात्,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 140 \end{bmatrix}$

या, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50 \\ 140 \end{bmatrix}$

या, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 140 \end{bmatrix}$ (प्रतिलोम की सहखंडज विधि द्वारा)

या, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ है।

अतः हल है कि प्रति बच्चा टिकट की लागत रु.10 है तथा प्रति व्यस्क टिकट की लागत रु. 30 है।

उपरोक्त चर्चा को अपने ध्यान में रखते हुए, हम n चरों वाली n रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने की विधि को नीचे व्यापीकृत कर रहे हैं:

मान लीजिए कि n चरों $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$ वाली n रैखिक समीकरणों का निकाय है:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$

.

.

.

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$

उपरोक्त निकाय को आव्यूह रूप में

$$AX = B$$

लिखा जा सकता है, जहाँ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$

है।

$$AX = B \text{ से,}$$

$$X = A^{-1}B \text{ है।}$$

अतः, आव्यूह A^{-1} का B से गुणा करने पर निकाय का हल प्राप्त हो जाता है। A^{-1} को किसी भी विधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है (या तो सहखंडज विधि या फिर प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाएँ विधि)।

उदाहरण 11: निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:

$$x + 2y - 2z = -7$$

$$2x - y + z = 6$$

$$x - y - 3z = -3$$

हल:

यहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ है।

अब, हम $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ लेते हुए A^{-1} ज्ञात करते हैं।

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ और $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \rightarrow \frac{-1}{5} R_2$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$ और $R_3 \to R_3 + 3R_2$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_3 \to \frac{-1}{4} R_3$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} A$$

$R_2 \to R_2 + R_3$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} A$$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ है।

$X = A^{-1}B$ लेने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-7}{5} + \frac{12}{5} + 0 \\ -\frac{49}{20} - \frac{6}{20} + \frac{3}{4} \\ \frac{7}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{5} \\ -\frac{40}{20} \\ \frac{40}{20} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

अतः, x= 1; y= –2; और z=2 है।

बोध प्रश्न ड

1. समीकरणों के निकाय से आप क्या समझते हैं ?
2. एक गुणांक आव्यूह क्या होता है ?
3. अचर आव्यूह का अर्थ स्पष्ट कीजिए।
4. आप समीकरणों के निकाय को किस प्रकार हल करते हैं ?

3.7 सारांश

इस इकाई में, हमने एक आव्यूह के प्रतिलोम की चर्चा की है। यहा कहा जाता है कि इस संकल्पना के पीछे सहज धारणा अदिश संख्या पद्धति में विभाजन संक्रिया से संबंधित है, जहाँ संख्या a के भाग देने पर वही परिणाम होता है, जो $1/a$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है। एक आव्यूह, जिसमें विभाजन संक्रिया नहीं होती है, में संख्या पद्धति के व्युत्क्रमों के गुणा के तरह कुछ सोचा जा सकता है तथा आव्यूह A के लिए, $1/a$ के स्थान पर A^{-1} लिखा जा सकता है। हम देख चुके हैं कि आव्यूह A के प्रतिलोम, जिसे A^{-1} लिखा जाता है, को एक अन्य आव्यूह A से व्युत्पन्न किया जाता है, ताकि $AA^{-1} = \mathrm{I}$ हो, जहाँ I तत्समक आव्यूह है। परंतु यह प्रतिलोम केवल वर्ग आव्यूहों तक ही सीमित रहता है। क्योंकि कुछ वर्ग आव्यूहो के शून्येतर सारणिक नहीं होते हैं इसलिए केवल अविचित्र आव्यूहों के ही प्रतिलोम होते हैं तथा ऐसे आव्यूह को व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहा जाता है। आव्यूह के प्रतिलोम ज्ञात करने की दो विधियों को प्रस्तुत किया गया है। ये हैं: (i) उपसारिणकों सहखंडो और सहखंडज द्वारा प्रतिलोम ज्ञात करना तथा (ii) प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं द्वारा प्रतिलोम ज्ञात करना। जहाँ इन दोनो में से पहली विधि में आव्यूह के सहखंडज को अभिकालित करने की आवश्यकता होती है, जो सहखंडो के आव्यूह का परिवर्त होता है, वहीं दूसरी विधि एक वर्ग आव्यूह के रूपांतरणो की सहायता लेती है, जो एक तत्समक आव्यूह पर प्रारंभिक पंक्ति या स्तंभ संक्रियाओं को करने पर प्राप्त होते हैं।

हमें एक आव्यूह की जाति ज्ञात करने की विधि भी उजागर हुई है। इस जाति के उपयोग से, हम एक वर्ग आव्यूह के प्रतिलोम को निर्धारित कर सकते हैं। इसी प्रक्रिया में, यह स्पष्ट किया गया है कि एक आव्यूह की जाति एक संख्या होती है, जो उस आव्यूह में रैखिकतः स्वतंत्र पंक्तियों/स्तंभों की अधिकतम संख्या पर निर्भर करती है। यदि किसी वर्ग आव्यूह की जाति पूर्ण से कम है, तो इससे प्रदर्शित होता है कि आव्यूह व्यत्क्रमणीय नहीं है।

इस इकाई के अंतिम भाग में, हमने प्रतिलोम विधि के उपयोग से, समीकरणों के निकाय का हल करना सीखा है। इसी प्रक्रिया में, हमने रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह रूप में बदलने की चर्चा की है तथा अज्ञात चरों के मान निकाले हैं।

3.8 शब्दावली

सहखंडज आव्यूहः एक वर्ग आव्यूह, जो दिए हुए आव्यूह के सहखंड आव्यूह का परिवर्त होता है।

गुणांक आव्यूहः रैखिक समीकरणों के एक समुच्चय में चरों के गुणांक

अचर आव्यूहः समीकरणों के निकाय के अचर

प्रारंभिक आव्यूहः एक वर्ग आव्यूह जो किसी तत्समक आव्यूह पर एक

प्रारंभिक पंक्ति या स्तंभः संक्रिया करने पर प्राप्त होता है।

प्रारंभिक संकारकः वर्ग आव्यूहों के उपयोग से, आव्यूह गुणन द्वारा की गई प्रत्येक प्रारंभिक संक्रिया।

प्रतिलोम आव्यूहः किसी वर्ग आव्यूह A से व्युत्पित किया गया एक अन्य वर्ग आव्यूह A^{-1} ताकि $AA^{-1} = \mathrm{I}$, जहाँ I तत्समक आव्यूह है।।

रैखिक संयोजनः कुछ सदिशों के अदिश गुणज जिनको जोड़ कर एक नया सदिश प्राप्त हो जाए।

रैखिकतः आश्रितः संदिशों का एक ऐसा समुच्चय ताकि इनमें से न्यूनतम एक को अन्य के रैखिक संयोजन के रूप में लिखा जा सके।

रैखिकतः स्वतंत्रः सदिशों का एक ऐसा समुच्चय जिसमें किसी भी सदिश को अन्य सदिशों के रैखिक संयोजन के रूप में न लिखा जा सकें।

अविचित्र आव्यूहः एक वर्ग आव्यूह जिसका सारणिक शून्येतर हो।

एक आव्यूह की जातिः किसी आव्यूह में रैखिकतः स्वतंत्र पंक्तियों / स्तंभों की अधिकतम संख्या।

विचित्र आव्यूहः एक वर्ग आव्यूह जिसका सारणिक शून्य हो।

समीकरणों का निकायः उस समीकरणों का संग्रह जिन पर एक साथ कार्य किया जाता है।

3.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. आव्यूहों में वैसी विभाजन संक्रिया नहीं होती जो अदिशों की स्थिति में होती है। विभाजन की आवश्यकता को पूरा करने के लिए, से संख्या पद्धति में व्युत्क्रमों के गुणन के रूप में समझा जा सकता है, जिससे वही परिणाम 1 प्राप्त होता है। अतः, यदि कोई आव्यूह A दिया है, तो $\frac{1}{A}$ के स्थान पर A^{-1} लिखा जा सकता है।

2. एक तत्समक आव्यूह

3. वर्ग आव्यूह

4. एक वर्ग आव्यूह $A_{n\times n}$ का प्रतिलोम एक अन्य आव्यूह है जिसे A^{-1} द्वारा व्यक्त किया जाता है, ताकि $AA^{-1} = A^{-1}A = \boldsymbol{I}$ हो, जहाँ I एक $n \times n$ तत्मसक आव्यूह है।

5. वह आव्यूह जिसका सारणिक शून्य है।

6. वह वर्ग आव्यूह जिसका शून्यतर सारणिक है (अर्थात् एक अविचित्र आव्यूह) ।

7. इसे प्रारंभिक आव्यूह से गुणा कीजिए, जिससे तत्समक आव्यूह प्राप्त होगा।

8. नहीं। विभाजन के तुल्य कोई आव्यूह संक्रिया नहीं है। विभाजन के निकटतम पहुँचने के लिए, हम एक आव्यूह को उसके प्रतिलोम से गुणा कर सकते हैं।

(ख)

1. $|A|.I_n$,जहाँ I_n कोटि n का एक तत्समक आव्यूह है।

2. $adj(A)$ को $adj(B)$ से गुणा करके।

3. एक आव्यूह A लीजिए तथा A का सहखंडज और A' ज्ञात कीजिए।

   बताई गई समिका को स्थापित करने के लिए, अपने परिणामों का उपयोग कीजिए।

(ग)

1. एक आव्यूह जो एक तत्समक आव्यूह से केवल एक अकेली प्रारंभिक पंक्ति संक्रिया का अंतर रखता है।

2. जब तत्समक आव्यूह पर प्रारंभिक संक्रियाएँ की जाती हैं।

3. (i) दो पंक्तियों (या स्तंभों) को परस्पर बदलिए, (ii) किसी पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को एक शून्येतर संख्या से गुणा कीजिए तथा (iii) किसी पंक्ति (या स्तंभ) को एक शून्येतर संख्या से गुणा कीजिए तथा परिणाम को अन्य पंक्ति (या स्तंभ) में जोड़ दीजिए।

4. जेम्स गलत है। उसे तुल्य आव्यूह प्राप्त होंगे।

5. वर्ग आव्यूहों के उपयोग से, आव्यूह गुणन द्वारा प्रत्येक प्रकार की प्रारंभिक संक्रियाएँ की जा सकती हैं; जो प्रारंभिक संकारक कहलाती हैं।

(घ)

1. किसी शून्येतर आव्यूह की जाति को r के रूप में परिभाषित किया जाता है, यदि न्यूनतम इसका r पंक्ति का एक उपसारणिक शून्य के बराबर नहीं हो, जब कि प्रत्येक $(r + 1)$ पंक्ति का उपसारिणक, यदि कोई है तो, शून्य हो।

2. नहीं। एक वर्ग आव्यूह, जो पूर्ण जाति वाला नहीं है, विचित्र होता है।

3. चर जो परिमाण और दिशा दोनों को निरूपित करते हैं।

4. कुछ सदिशों के अदिश गुणजों को लीजिए तथा इनको जोड़ कर एक नया सदिश प्राप्त कीजिए।

5. यदि समुच्चय का कोई सदिश

   (i) उस समुच्चय के अन्य सदिश का एक अदिश गुणज है, या

   (ii) उस समुच्चय के अन्य सदिशों का एक रैखिक संयोजन है।

(ङ)

1. दो या अधिक समीकरणों का एक संग्रह जिसमें अज्ञातों की संख्या समीकरणों की संख्या के बराबर हो।

2. रैखिक समीकरणों के निकाय में गुणांकों से बना आव्यूह।

3. वह आव्यूह जिसमें समीकरणों के निकाय के अचर अंतर्विष्ट हों।

4. प्रत्येक अज्ञात राशि के मान ज्ञात कीजिए, जो निकाय की प्रत्येक समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

3.10 स्वपरख प्रश्न

1 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो ज्ञात कीजिए $adj(A)$ ।

2 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ है, तो $A.adj(A) = adj(A).A = |A|.I$ को सत्यापन कीजिए।

3 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ है, आव्यूह B ज्ञात कीजिए, यदि AB बराबर

(I) $\begin{bmatrix} 22 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ (II) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (III) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4 $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ है।

X ज्ञात कीजिए, यदि $BX = C$ है।

5 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

6 आव्यूह के प्रतिलोम के उपयोग से, निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:

$5x - 6y + 4z = 15$

$7x + 4y - 3z = 19$

$2x + y + 6z = 46$

7 निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:

$2x + 6y + 11 = 0$

$6x + 20y - 6z - 3 = 0$

$6y - 18z + 1 = 0$

8. किसी आव्यूह की जाति से आपका क्या तात्पर्य होता है ? निम्नलिखित आव्यूह की जाति ज्ञात कीजिए:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 13 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

9. x का मान ज्ञात कीजिए ताकि निम्नलिखित आव्यूह की जाति 3 से छोटी हो:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 9 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

10. निम्नलिखित आव्यूह को लेते हुए, आप इसकी व्यत्क्रमणीयता पर क्या टिप्पणी करेंगे अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

11. निम्नलिखत आव्यूह दिया है। इसकी जाति की जाँच कीजिए तथा संहखंडज की विधि द्वारा इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। इसकी व्युत्क्रमणीयता पर टिप्पणी कीजिए।

समीकरणों का काई हल नहीं है।

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

उत्तर:

1. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

3. (I) $\begin{bmatrix} 32 & 9 \\ -110 & -30 \end{bmatrix}$ (II) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ (III) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{14}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6. $x = 3; y = 4; z = 6$

7. समीकरणों का कोई हल नहीं है।

8. 2

9. $x = 1$

10. क्योकि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है, इसलिए $\rho(A) \leq 3$ है अब,

$|A| = 1(32 - 30) - 2(24 - 20) + 3(18 - 16) = 2 - 8 + 6 = 0$ है।

$|A|$ कोटि 3 का केवल एक ही उपसारणिक है, जो शून्य के बराबर है। परंतु कोटि 2 को एक उपसारणिक शून्य के बराबर नहीं है, अर्थात् $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $= 4 - 6 = -2 \neq 0$ है। अतः, पूर्ण जाति से कम जाति का एक वर्ग आव्यूह व्युत्क्रमणीय नहीं होता है।

11. यह आव्यूह रैखिकतः स्वतंत्र है तथा इसकी जाति 3 है। सारणिक –24 है तथा इस आव्यूह का प्रतिलोम

$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.17 \\ -0.5 & 0.25 & 0.33 \\ -1 & 0.5 & 0.33 \end{bmatrix}$ है।

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

3.11 संदर्भ पुस्तकें

- Allen, R.G.D., "Mathematical Analysis for Economists", London: English Language Book Society and Macmillan, 1974.
- Archibald, G.C., Richard G.Lipsey. "An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics", Delhi: All India Traveller Bookseller, 1984.

- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Dowling, Edward,T. "Schaum's Outline Series: Theory and Problems of Mathematics for Economists", New York: McGraw Hill Book Company, 1986.
- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, PearsonEducational Asia, Delhi, 2002.
- Yamane, Taro, "Mathematics for Economists: An Elementary Survey", New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited, 1970.

इकाई 4 व्यापार और अर्थशास्त्र में आव्यूहों के अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित को समझ पाएँगे:

- आँकड़ों का आव्यूही निरूपण;
- बाजार मांग और आपूर्ति संतुलन;
- राष्ट्रीय आय मॉड्ल, तथा
- निवेश–बहिर्वेश विश्लेषण

4.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, हमने आव्यूह बीजगणित द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करना सीखा था। वर्तमान इकाई में, व्यापार और अर्थशास्त्र के कुछ प्रकरणों के इस साधन के अनुप्रयोगों की चर्चा की जाएगी। इस ओर ध्यान देना उपयोगी होगा कि आव्यूह बीजगणित का अनेक क्षेत्रों में बृहत रूप से उपयोग किया जाता है, जिनमें मांग–आपूर्ति संतुलन, राष्ट्रीय आय निर्धारण तथा निवेश–बहिर्वेश विश्लेषण भी सम्मिलित हैं। हम आगे आने वाली चर्चाओ में ऐसे अनुप्रयोगों को देखेंगे।

4.2 आँकड़ों का आव्यूही निरूपण

आँकड़ों को संक्षिप्त रूप से निरूपित करने की सबसे अधिक सुविधाजनक विधि आव्यहों की है। आइए निम्नलिखित उदाहरणों को लें:

उदाहरण 1: किसी फर्म की तीन फेक्ट्रियाँ (F1, F2 and F3) तथा चार गोदाम (W1, W2, W3, W4) हैं। वह प्रत्येक फेक्ट्री से प्रत्येक गोदाम की न्यूनतम प्रति इकाई परिवहन लागत ज्ञात करना चाहती है। लागत ऑकड़े नीचे आव्यूह रूप में दिए हुए हैं। प्रत्येक फेक्ट्री के लिए, अपने उत्पाद (माल) को गोदामों तक पहुँचाने की न्यूनतम तथा साथ ही अधिकतम प्रति इकाई लागत ज्ञात कीजिए।

गोदाम

		$W1$	$W2$	$W3$	$W4$
	F1	15	17	20	12
फैक्ट्रियाँ	F2	21	10	17	19
	F2	10	27	18	16

उत्तर:

i) F1, F2 और F3 से क्रमशः (W4, W2, और W1) तक ले जाने की प्रति इकाई न्यूनतम लागत है।

ii) F1, F2 और F3 से क्रमशः (W3, W1, और W2) तक ले जाने की प्रति इकाई अधिकतम लागत है।

उदाहरण 2: किसी व्याख्यान प्रतियोगिता में, एक प्रतिभागी पाँच भाषाओं हिन्दी, अंग्रेजी, पंजाबीख गुजराती और तमिल में से किसी भी भाषा पर बोल सकता है। एक कॉलेज (मान लीजिए सं.1) ने प्रतियोगिता में भाग लेने के लिए 30 विधार्थी भेजे, जिनमें से 10 ने हिन्दी में, 9 ने अंग्रेजी में, 6 ने पंजाबी में, 3 ने गुजराती में तथा शेष ने तमिल में बोलने का प्रस्ताव दिया। अन्य कॉलेज (मान लीजिए सं 2) ने 25 विधार्थी भेजे, जिनमें से 7 ने हिन्दी में, 8 ने अंग्रजी में; 10 ने पंजाबी में बोलने का प्रस्ताव दिया। तीसरे कॉलेज (मान लीजिए सं 3) के 22 विद्यार्थियो में से 12 ने हिन्दी में, 5 ने अंग्रेजी में और 5 ने गुजराती में बोलने का प्रस्ताव दिया। उपरोक्त दी हुई सूचना को आव्यूह रूप में लिखिए।

उत्तर:

	हिन्दी	अंग्रजी	पंजाबी	गुजराती	तमिल
कॉलेज 1	10	9	6	3	1
कॉलेज 2	7	8	10	0	0
कॉलेज 3	12	5	0	5	0

उदाहरण 3: किसी वित्तीय कंपनी के भारत के एक विशेष राज्य में प्रत्येक डिवीजन, प्रत्येक जिले और प्रत्येक तालुका (Takula) में कार्यालय अवस्थित हैं। कल्पना कीजिए कि उस राज्य में पाँच डिवीजन, 30 जिले और 200 तालुका हैं। प्रत्येक कार्यालय में

1 हेड़ क्लर्क, 1 केशियर, 1 क्लर्क और 1 चपरासी है। एक डिवीजनल कार्यालय में; इनके अतिरिक्त, एक कार्यालय अधीक्षक, 2 क्लर्क, 1 टाइपिस्ट और 1 चपरासी है। एक जिला कार्यालय में, इनके अतिरिक्त 1 क्लर्क और 1 चपरासी है। मूल मासिक वेतन (रु. में) इस प्रकार है:

कार्यालय अधीक्षक	15000
हेड क्लर्क	12000
केशियर	11750
क्लर्क और टाइपिस्ट	11500
चपरासी	7500

आव्यूह संकेतन का उपयोग करते हुए, ज्ञात कीजिए:

i) सभी कार्यालयों में मिलाकर प्रत्येक प्रकार के पदों की कुल संख्या।

ii) प्रत्येक प्रकार के कार्यालयों का कुल मूल मासिक वेतन बिल तथा

iii) सभी कार्यालयों को मिलाकर कुल मूल मासिक वेतन बिल।

उत्तर: कार्यालयों की संख्या को एक पंक्ति आव्यूह के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है:

$$A = \begin{array}{ccc} \text{डिविजन} & \text{जिला} & \text{तालुका} \\ \end{array}$$
$$A = [5 \quad 30 \quad 200]$$

कर्मचारी – संयोजन को 3 × 6 आव्यूह के रूप में इस प्रकार व्यवस्थित किया जा सकता है:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} O & H & C & T & CL & P \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

जहाँ O = कार्यालय अधीक्षक (Office Superintendent),

H = हेड क्लर्क,

C= केशयर,

T = टाइपिस्ट

CL = क्लर्क, और

P = चपरासी (peon) है।

स्तंभ आव्यूह D में वे अवयव होंगे, जो मूल मासिक वेतन के संगत है:

$$D = \begin{array}{c} O \\ H \\ C \\ T \\ Cl \\ P \end{array} \begin{bmatrix} 15000 \\ 12000 \\ 11750 \\ 11500 \\ 11500 \\ 7500 \end{bmatrix}$$

I) सभी कार्यालय में मिलाकर, प्रत्येक प्रकार के पदों की कुल संख्या आव्यूह AB के स्तंभ है:

$$A,B = [5 \quad 30 \quad 200]\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2\\0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = [3 \quad 235 \quad 235 \quad 5 \quad 275 \quad 270]$$

II) प्रत्येक प्रकार के कार्यालयों का कुल मूल मासिक वेतन बिल आव्यूह BD के अवयव है।

$$BD = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2\\0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15000\\12000\\11750\\11500\\11500\\7500\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}99750\\61750\\42750\end{bmatrix}$$

III) सभी कार्यालयों का कुल बिल आव्यूह

$[5 \quad 30 \quad 200]\begin{bmatrix}99750\\61750\\42750\end{bmatrix} = [10901250]$ का अवयव है।

बोध प्रश्न क

1. आप व्यापार संक्रिया के आँकड़ों को एक आव्यूह रूप में संचित करने के लिए प्राथमिकता क्यों देंगे ?

2. आप घर और अपने अध्ययन केन्द्र के बीच यात्रा करने के लिए दो साधनों बस और रेलगाड़ी का उपयोग करते हैं। अंतिम दो दिनों की यात्रा की लागत नीचे दी गई है:

   दिन एक : ₹ 20 (बस में) + ₹ 30 (रेलगाड़ी में) = ₹ 50 (कुल)

   दिन एक : ₹ 0 (बस में) + ₹ 60 (रेलगाड़ी में) = ₹ 60 (कुल)

   उपरोक्त आँकड़ों को आव्यूह रूप में लिखिए।

3. तीन प्रकार की मोटर कारों को निर्मित करने की कुल लागत निम्नलिखित सारणी द्वारा दी जाती है:

मोटर कार का प्रकार	श्रम (घंटे)	सामग्री (इकाई)	उप–ठेके पर दिया कार्य (इकाई)
कार A	40	100	50
कार B	80	150	80
कार C	100	250	100

श्रम लागत ₹ 2 प्रति घंटा, सामग्री की लागत ₹ प्रति इकाई तथा उप–ठेके पर दिए कार्य की लागत ₹ 3 प्रति इकाई है। आव्यूहों का उपयोग करते हुए, क्रमशः प्रकार A, प्रकार B और प्रकार C के 3000, 2000 और 1000 वाहनों को निर्मित करने की कुल लागत ज्ञात कीजिए।

4.3 बाजार मांग और आपूर्ति संतुलन

सूक्ष्मअर्थशास्त्र (microeconomics) मे यह देखा जाता है कि किसी वस्तु (माल) की मांग और उसकी आपूर्ति को स्वयं एक उसके मूल्य के फलनों के रूप में व्यक्त किया जाता है। ऐसे संबंध कें परिणामी संतुलन (equilibrium) को मांग और आपूर्ति फलनों के बीच समिका द्वारा दिया जाता है। संतुलन मूल्य और राशि के निर्धारण भी प्रक्रिया को देखने के लिए, आइए कार उद्योग के एक परिकल्पित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 4: यदि कार के लिए मांग और आपूर्ति वक्र

$D = 100 - 6P$ और $S = 28 + 3P$ हैं।

जहाँ P कारों के मूल्य हैं; तो संतुलन पर खरीदी गईं और बेची गईं कार की क्या राशि है ?

उत्तर: हम जानते हैं कि संतुलन राशि वहाँ होगी जहाँ आपूर्ति मांग के बराबर होगी। अतः, पहले हम आपूर्ति को मांग के बराबर स्थापित करते हैं:

$100 - 6P = 28 + 3P$ हैं। इन्हें पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$72 = 9P \quad \Rightarrow P = 8 \text{ हैं।}$$

क्योंकि संतुलन मूल्य ज्ञात कर लिया है, इसलिए हम आपूर्ति या मांग समीकरण में, केवल $P = 8$ प्रतिस्थापित करके, संतुलन राशि ज्ञात कर सकते हैं। अर्थात्, यदि P को आपूर्ति समीकरण में प्रतिस्थापित करें; तो हम प्राप्त करते है:

$S = 28 + 3 \times 8 = 28 + 24 = 52$

इस प्रकार, संतुलन मूल्य = 8 है और संतुलन राशि = 52 है।

परंतु इस सरल बाजार सूत्रण में पहले से ही यह मान लिया गया है कि किसी वस्तु की मांग और आपूर्ति प्रतिस्थापकों और पूरक मालों के मूल्यों जैसे अन्य कारणों द्वारा प्रभावित नहीं होती है। वास्तविकता में, इस प्रकार के दृश्यों को सभावेशित करने के लिए, एक बेहतर विकल्प यह होगा कि मांग और आपूर्ति की समीकरणों में अन्य वस्तुओं के मूल्यों को भी सम्मिलित कर लिया जाए। यह बताना लाभप्रद होगा कि ऊपर वर्णित की गई मांग–आपूर्ति संतुलन की विधि को संबंधित वस्तुओं के अंतरसंबंधित बाजारों की बड़ी संख्या के लिए विस्तृत किया जा सकता है। इस प्रकार की रूपरेखा में, युगपत् समीकरणों के एक निकाय का उपयोग करते हुए, समावेशित वस्तुओं के जिनमें एक बड़ी संख्या में आपूर्ति और मांग समीकरण अंतर्विष्ट होते हैं; संतुलन मूल्य और राशियाँ प्राप्त की जा सकती हैं। हम इस कार्य को अभी नहीं ले रहे है परन्तु इस बल दी गई प्रक्रिया को समझने के लिए, आइए एक दो–वस्तु बाजार मॉड्ल पर विचार करें तथा इसे आव्यूह बीजगणित की तकनीकों की सहायता से संतुलन मूल्य राशि संयोजनों के लिए हल करें।

उदाहरण 5: निम्नलिखित द्वारा देय एक दो–वस्तु (x और y) बाजार मॉड्ल पर विचार कीजिए:

मांग समीकरण:

$D_x = 11 - 2P_x + P_y$

$D_y = 8 + P_x - P_y$

आपूर्ति समीकरणः

$S_x = 1 + 3P_x$

$S_y = 6 + P_y$

जहाँ D_x और $D_y \to x$ और y के लिए मांगी गई राशि है,

S_x और $S_y \to x$ और y की आपूर्तित राशि है, तथा

P_x और $P_y \to x$ और y के मूल्य हैं

संतुलन मूल्य और राशियाँ ज्ञात कीजिए।

x के लिए संतुलन प्रतिबंधः

$D_x = S_x = Q_x$

अतः, दो हुई समीकरणों के पदों में, हमे प्राप्त होता हैः

$11 - 2P_x + P_y = 1 + 3P_x$

या $3P_x + 2P_x - P_y = 11 - 1$

या $5P_x - P_y = 10$ --- (1)

पुनः y के लिए संतुलन प्रतिबंध स्थापित कीजिए, अर्थात्

$D_y = S_y = Q_y$

या $8 + P_x - P_y = 6 + P_y$

or, $P_x - 2P_y = 6 - 8$

या $-P_x + 2P_y = 2$ --- (2)

समीकरणों (1) और (2) को एक साथ आव्यूह रूप में लिखने पर, हम

$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$ प्राप्त करते हैं।

हम आगे, उपरोक्त समीकरण – निकाय को आव्यूह प्रतिलोम विधि द्वारा दोनों मूल्यों के लिए हल करते हैं।

अतः, $\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$

क्योंकि $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ का सारणिक = 9 है तथा $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ का सहखंडज $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ है,

इसलिए $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.22 & 0.11 \\ 0.11 & 0.56 \end{bmatrix}$ है।

इस प्रकार, $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.42 \\ 2.22 \end{bmatrix}$ है।

अतः, $\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.42 \\ 2.22 \end{bmatrix}$ है।

जिससे संतुलन मूल्य $P_x = 2.42$ और $P_y = 2.22$ हैं।

इन मूल्यों को मांग समीकरणों में रखने पर, हम x और y की संतुलन राशियाँ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, $Q_x = 8.38$ और $Q_y = 8.20$ हैं।

संतुलन मूल राशियो के लिए हल करने में, हम आव्यूह प्रतिलोम विधि के अतिरिक्त क्रैमर–नियम का उपयोग करके भी यही परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।

बोध प्रश्न ख

1. आपको संतुलन मांग और आपूर्ति मूल्य–राशि संयोजन, आव्यूह के प्रतिलोम का उपयोग करते हुए, अभिकलित करने को कहा जाता है। आप मांग–आपूर्ति समीकरणों को किस प्रकार सूत्रित करना चाहेंगे ?

2. आव्यूह बीजगणित का उपयोग करते हुए मांग– आपूर्ति संतुलन अभिकलित करते समय, आप आव्यूह के प्रतिलोम के अतिरिक्त किस अन्य विधि का उपयोग कर सकते हैं ?

3. मांग–आपूर्ति विश्लेषण में, संतुलन स्थापित करने के लिए किस प्रतिबंध का संतुष्ट होना आवश्यक है ?

4.4 राष्ट्रीय आय मॉड्ल

राष्ट्रीय आय मॉड्ल आव्यूह बीजगणित के अनुप्रयोग का एक अन्य क्षेत्र है। हम किसी अर्थव्यवस्था के लिए एक सरल दो–समीकरण राष्ट्रीय आय मॉड्ल (National Income Model) पर विचार करेंगे। इस प्रतिपादन को सरल रखने के लिए, हमने वर्तमान विश्लेषण में बाहरी देशों के साथ सरकारी और व्यापारिक संबंधों को सम्मिलित नहीं किया है।

मौलिक रूप से, हमारा उद्देश्य संतुलन राष्ट्रीय आय तथा साथ ही किसी अर्थव्यवस्था की खपत के अभिकलन की ओर आगे बढ़ना है। इस उद्देश्य के लिए, हम नीचे दी हुई दो समीकरणों से प्रारंभ करते हैं:

$$Y = C + I_0 \qquad (1)$$

$$C = a + bY \qquad (2)$$

जहाँ Y राष्ट्रीय आय है, C खपत है, I_0 स्वायत्त निवेश (autonomous investment) है तथा a और b अचर हैं। इन दो समीकरणों में से, पहली समीकरण यह दर्शाती है कि राष्ट्रीय आय के कुल मान को व्यय अभिगम (expenditure approach) से देखा गया है। अर्थात्, अर्थव्यवस्था का माल और सेवाओं पर हुआ कुल व्यय खपत व्यय और निवेश व्यय के बराबर है। दूसरी समीकरण यह दर्शाती है कि आय और खपत के बीच में एक रैखिक संबंध है। वर्तमान संदर्भ में, रैखिक रेखांक के अंतः खंड पद 'a' को शून्य से अधिक कल्पित किया गया

है, क्योंकि यह व्यापक रूप से अभिगृहीत किया जाता है कि खपत धनात्मक ही रहती है, चाहें वहाँ आय कुछ भी नहीं हो। प्रवणता गुणांक b को शून्य से बड़ा परंतु एक से छोटा लिया जाता है, क्योंकि मानव की व्यापक मनोवैज्ञानिक प्रवृत्ति यह है कि संपूर्ण आय से खपत कम रखो। संतुलन पर आय और खपत के मानों को अभिकलित करने के लिए, हम (1) और (2) को नीचे दर्शाए अनुसार पुनर्व्यस्थित करते हैं:

$$Y - C = I_0 \tag{3}$$

$$-bY + C = a \tag{4}$$

समीकरणों (3) और (4) को एक साथ आव्यूह रूप में लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ a \end{bmatrix}$$

या, $$\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I_0 \\ a \end{bmatrix} \tag{5}$$

अब हम सुतलन Y तथा साथ ही C समीकरण (5) से या तो क्रैमर–नियम द्वारा या आव्यूह के प्रतिलोम विधि द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 6: निम्नलिखित राष्ट्रीय आय मॉडल दिया है:

$$Y = C + I$$

$$C = 5 + \frac{3}{4}Y$$

$$I = 10$$

Y और C ज्ञात कीजिए।

तीसरी समीकरण में से I का मान पहली समीकरण में रखने पर,

$Y = C + 10$

या, $Y - C = 10$ है। (6)

पुनः दूसरी समीकरण $C = 5 + \frac{3}{4}Y$

को निम्नलिखित रूप में पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है:

$$\frac{-3}{4}Y + C = 5 \tag{7}$$

समीकरणों (6) और (7) को आव्यूह समीकरण के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{8}$$

क्रैमर–नियम का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{15}{\frac{1}{4}} = 60$$

$$\text{और } C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -\frac{3}{4} & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12.5}{\frac{1}{4}} = 50,$$

जो वाँछित संतुलन मान है।

बोध प्रश्न ग

1. राष्ट्रीय आय मॉडल में खपत समीकरण $C = a + Y$ पर क्या प्रतिबंध लगाए गए हैं ?

2. आपके द्वारा अध्ययन किए गए राष्ट्रीय आय मॉडल में सतुलन निर्धारित करते समय, कौन–कौन से चरों को अभिकलित किया गया है ?

3. ऊपर अनुच्छेद 4.4 के उदाहरण को लीजिए तथा प्रतिलोम आव्यूह विधि द्वारा, आय और खपत के संतुलन मानों के लिए हल कीजिए।

4.5 निवेश –बहिर्वेश विश्लेषण

निवेश –बहिर्वेश (Input-Output) (I-O) विश्लेषणस एक अन्य क्षेत्र है जहाँ परिणामों के निगमन में आव्यूह बीजगणित बहुत सहायक रहता है। प्रारंभ करने के लिए, हम इसमें संबद्ध प्रक्रिया की चर्चा करते हैं। I-O विश्लेषण अंतरउद्योग (inter-industry) विश्लेषण भी कहलाता है, क्योंकि यह विभिन्न उद्योगों में अंतरआश्रितता और अंतरसंबंधता को स्पष्ट करता है। उदाहरणार्थ, दो–उद्योग मॉड्ल में, इस्पात उद्योग के लिए कोयला निवेश है तथा कोयला उद्योग के लिए इस्पात एक निवेश है, यद्यपि ये दोनों क्रमशः अपने–अपने उद्योगों के बर्हिवेश हैं।

4.5.1 अभिधारणाएँ

अर्थव्यवस्था को सेक्टरों (उद्योगों) की एक परिभित संख्या में निम्नलिखित अभिधारणाओं (assumptions) के आधार पर विभाजित किया जाता है:

i) प्रत्येक उद्योग केवल एक सजातीय बहिर्वेश निर्मित (उत्पादित) करता है।

ii) प्रत्येक सेक्टर का उत्पादन स्केल (पैमाने) के अनुसार निरंतर कुछ वापिस देता रहेगा, अर्थात् प्रत्येक निवेश में दो गुना परिवर्तन होने पर बहिर्वेश में भी ठीक दो गुना परिवर्तन होगा।

iii) प्रत्येक सेक्टर में, प्रति इकाई बहिर्वेश के लिए निवेश आवश्यकता निश्चित और अचर रहती है। प्रत्येक सेक्टर (उद्योग) में बहिर्वेश का स्तर अद्वितीय रूप से प्रत्येक निवेश की राशि को निर्धारित करता है, जिसे खरीदा जाता है। इसके साथ ही, यदि किसी कार्य स्तर पर ₹ 1,00,000 प्रति निवेश के 5 व्यक्तियों की आवश्यता है, तो यह अभिधारणा (कल्पना) की जाती है कि उस फर्म के किसी भी माप में प्रसारित या संकुचित होने पर भी इसी अनुपात की आवश्यकता रहेगी।

iv) वस्तुओं की अंतिम मांग इस पद्धति के बाहर से दी जाती है। प्राथमिक गुणक (अर्थात् श्रम) की कुल राशि भी दी जाती है। इन दो अभिधारणाओं की उपस्थिति से पद्धति (या तंत्र) अंतमुक्त बन जाती है तथा इसीलिए यह मॉड्ल

मुक्त मॉड्ल या विवृत मॉड्ल (Open Model) कहलाता हैं इसके विपरीत, संवृत मॉड्ल (Closed Model) में सभी चरों का निर्धारण पद्धति के अंदर ही होता है।

4.5.2 निवेष – बहिर्वेश सारणी

I-O सारणी विभिन्न उद्योगों में कुल उत्पाद और कुल निवेश का बंटवारा दर्शाती है आइए कल्पना करें कि किसी अर्थव्यवस्था में उत्पादन करने वाले केवल 2 सेक्टर हैं। साथ ही, प्रत्येक सेक्टर के उत्पादन का उपयोग निवेश के रूप में सभी सेक्टरों में किया जाता है तथा अंतिम खपत के लिए किया जाता है। मान लीजिए कि

i) X_1 और X_2 इन 2 सेक्टरों के कुल बहिर्वेश है;

ii) इन सेक्टरों के बहिर्वेश के लिए F_1 और F_2 अंतिम मांग और खपत की कुल राशियाँ है।

iii) i वें उद्योग के बहिर्वेश की राशि X_{ij} है, जिसे j वें उद्योग द्वारा ($i,j = 1,2$) एक मध्यस्थ निवेश के रूप में उपयोग किया गया है।

iv) L प्राथमिक गुणन (यहाँ श्रम) की दी राशि को निरूपित करता है था i वें उद्योग द्वारा उपयोग की गई प्राथमिक गुणक की राशि L_i है।

तब, निम्नलिखित सारणी सरलीकृत अर्थव्यवस्था के लिए I-O सारणी निरूपित करती है:

उत्पादन करने वाले सेक्टर की संख्या	सेक्टर का कुल बहिर्वेश	उत्पादन करने वाले सेक्टरों की निवेश आवश्यकताएँ		अंतिम उपयोगों के लिए आवश्यकताएँ
		X_1	X_2	
1	X_1	X_{11}	X_{12}	F_1
2	X_2	X_{21}	X_{22}	F_2
प्राथमिक निवेश (श्रम)	कुल प्राथमिक निवेश = L	L_1	L_2	

इस ओर देना महत्वपूर्ण है कि उपरोक्त सारणी में दिए गए मद (items) भौतिक इकाइयाँ प्रति वर्ष हैं। क्योंकि किसी भी पंक्ति में, सभी प्रविष्टियों को समान भौतिक इकाइयों में मापा गया है इसलिए पंक्तियों के अनुसार योग करने में कोई कठिनाई नहीं है। 'कुल बहिर्वेश' स्तंभ प्रत्येक वस्तु का बहिर्वेश तथा श्रम का समग्र निवेश देता है। परंतु एक ही स्तंभ में मदों को समान इकाइयों में मापा नहीं गया है। इसलिए स्तंभो के अनुसार योग करना सही नहीं होगा।

इस सारणी से यह देखा जा सकता है कि पहले उद्योग की आवश्यकताओं को तीसरे स्तंभ में दिया गया है: पहले उद्योग के बहिर्वेश की X_1 इकाइयों को पहले माल की X_{11} इकाइयों, दूसरे माल की X_{21} इकाइयों तथा श्रम की L_1 इकाइयों के उपयोग से उत्पादित किया गया है। इसी प्रकार का अर्थ अन्य स्तंभ, अर्थात् स्तंभों 2 और 4 के लिए भी दिया जाता है।

'अतिम मांग', अर्थात् स्तंभ (5) खपत के लिए उपलब्ध वस्तुओं को दर्शाता है। यह कल्पना की गई है कि श्रम की खपत प्रत्यक्ष रूप से नहीं होती है। यदि हम मान लें कि प्रत्येक उद्योग के बहिर्वेश की प्रत्येक इकाई का मूल्य ₹ 1 है तथा श्रम की प्रत्येक इकाई को मजदूरी ₹1 की दर से प्राप्त होती है, तो उपरोक्त सारणी की प्रत्येक प्रविष्टि को मुद्रा मूल्य (भौतिक इकाई के स्थान पर) के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में स्तंभों के अनुसार योग करना संभव हो जाता है। प्रत्येक स्तंभ का येाग संगत उद्योग की कुल लागत प्रदान करता है। इस प्रकार, उद्योग 1 का राजस्व X_1 इकाइयों $(= X_{11} + X_{12} + F_1)$ की बिक्री से बढ़ता है तथा उस उद्योग की लागत $(X_{11} + X_{21} + L_1)$ इकाई है। यही बात अन्य उद्योग के लिए भी सत्य है।

इन उत्पादन सेक्टरों को दष्टिगत रखते हुए, प्रत्येक में कुल बहिर्वेश को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$X_1 = X11 + X12 + F_1 \qquad (1)$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + F_2 \qquad (2)$$

तथा

$$L = L_1 + L_2$$

अर्थात् ,

$X_i = \sum_{j=1}^{2} X_{ij} + F_i$ और $L = \sum_{i=1}^{2} X_i$ है।

यहाँ $X_i = i$ वें सेक्टर का कुल बहिर्वेश, $X_{ij} = i$ वें सेक्टर का बहिर्वेश जिसे j वें सेक्टर में निवेश के रूप में प्रयुक्त किया गया है तथा $F_i = i$ वें सेक्टर के लिए अंतिम मांग है।

उपरोक्त सर्वसमिका यह बताती है कि किसी विशेष सेक्टर के सभी बहिर्वेशों को अर्थव्यवस्था के उत्पादन करने वाले सेक्टरों में से एक सेक्टर में निवेश के रूप में और/या एक अंतिम मांग के रूप में उपयोग किया जा सकता है। अतः मौलिक रूप से, I-O विश्लेषण इन युगपत समीकरणों के हल ज्ञात करने से अधिक कुछ नहीं है।

4.5.3 तकनीकी गुणांक आव्यूह

निश्चित निवेश आवश्यकताओं की अभिधारणा से, हम देखते है कि j वीं वस्तु के 1 इकाई उत्पादन के लिए, i वी वस्तु का प्रयुक्त निवेश एक निश्चित राशि होना चाहिए जिसे हम a_{ij} से व्यक्त करते है। इस प्रकार, $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$, है। यदि X_j , j वीं वस्तु (j वें उत्पादन सेक्टर) के कुल बहिर्वेश को निरूपित करता है, तो i वीं वस्तु की निवेश आवश्यकताएँ $a_{ij}X_j$ के बराबर होंगी, अर्थात् $X_{ij} = a_{ij}X_j$ होगा।

हम a_{ij} को एक निवेश गुणांक (input coffeicient) कहते हैं।

आइए X_{ij} और X_j पर मूल्य के पदो में विचार करें। अतः, a_{ij} निवेश का मान प्रति इकाई बहिर्वेश के रूप में देता है। इस प्रकार, $a_{ij} = 0.02$ यह सूचित करता है कि एक रुपए मूल्य की j वीं वस्तु को उत्पादित (निर्मित) करने के लिए 20 पैसे मूल्य की i वीं वस्तु की आवश्यकता होगी।

इस ओर ध्यान दिया जा सकता है कि प्रत्येक स्तंभ में अवयवों को योग उस उत्पादन सेक्टर में एक रुपए मूल्य के बहिर्वेश को उत्पादित करने के लिए आवश्यक गौण (secondary) निवेश प्रदान करता है। अतः, निवेश गुणांक आव्यूह के प्रत्येक स्तंभ में अवयवों का योग 1 से कम होना चाहिए। यह इसलिए है, क्योंकि इसमें प्राथमिक निवेशों की लागत सम्मिलित नहीं है। उपरोक्त दो–सेक्टर उदाहरण में, हमने $j = 1,2$ के साथ $\sum_{i=1}^{2} a_{ij}$ पर विचार किया है। यदि हम बहिर्वेश का मूल्य □ 1 लेते हैं, तो उसे उत्पादन के सभी गुणकों के भुगतान द्वारा पूर्णतःसमाप्त हो जाना चाहिए। प्राथमिक निवेश (यहाँ श्रम) को भुगतान की गई राशि को सम्मिलित किए बिना, स्तंभ का योग □ 1 से कम होना चाहिए। इस प्रकार jवीं वस्तु की 1 इकाई को निर्मित करने के लिए आवश्यक प्राथमिक निवेश

$1 - \sum_{i=1}^{2} a_{ij}$ होना चाहिए।

ऊपर विचार की गई अर्थव्यवस्था के लिए, यदि दोनों उत्पादन सेक्टरों के लिए प्रति रुपए मूल्य के बहिर्वेश में प्राथमिक निवेशों की लागत l_1 और l_2 हैं, तो हम लिखते हैं:

$$l_1 = 1 - (a_{11} + a_{21})$$

तथा

$$l_2 = 1 - (a_{12} + a_{22})$$

प्रत्येक उत्पादन सेक्टर के लिए, कुल बहिर्वेश को समीकरणों (1) और (2) में $X_{ij} = a_{ij}X_jX_1$ या प्रतिस्थापित करके निवेश गुणांकों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार, इस दो उत्पादन सेक्टर अर्थव्यवस्था के लिए,

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + F_1$$

$$\text{या, } X_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 = F_1$$

$$\text{या, } (1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 = F_1 \qquad (3)$$

इसी प्रकार,

$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + F_2$$

$$\text{या, } -a_{21}X_1 + X_2 - a_{22}X_2 = F_2$$

$$\text{या, } -a_{21}X_1 + (1 - a_{22})X_2 = F_2 \qquad (4)$$

समीकरणों (3) और (4) को आव्यूह रूप में लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

देखिए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix}$ को एक तत्समक आव्यूह $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ में से एक निवेश गुणांक आव्यूह $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ को घटाने पर प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात्, $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ से प्राप्त किया जा सकता है।

अतः समीकरण (5) को इस रूप में लिखा जा सकता है:

$(I - A)\,X = F$ (6)

जहाँ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ और

$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ है।

ध्यान दीजिए कि आव्यूहों A, X और F में से प्रत्येक की कोटि हमारे द्वारा लिए गए सेक्टरों की संख्या के अनुसार है।

आव्यूह $(I - A)$ **तकनीकी (technology) आव्यूह** कहलाता है।

यदि $(I - A)$ अविचित्र है, अर्थात् $|I - A| \neq 0$ है, तो समीकरण (6) को X के लिए हल किया जा सकता है। इस प्रकार,

$$X = (I - A)^{-1} F \qquad (7)$$

यदि $D = |I - A|$ आव्यूह $[I - A]$ का सारणिक है और $D \neq 0$ है, तो प्रतिलोम आव्यूह को

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1 - a_{22}}{D} & \frac{a_{12}}{D} \\ \frac{a_{21}}{D} & \frac{1 - a_{11}}{D} \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} 1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1 - a_{11} \end{bmatrix}$$

के रूप में लिखा जा सकता है।

अतः,

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} 1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1 - a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

या, $X_1 = \frac{(1 - a_{22})F_1 + a_{12}F_2}{D}, X_2 = \frac{a_{21}F_1 + (1 - a_{11})F_2}{D}$ है, जहाँ

$D = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}$ है।

4.5.4 हॉकिन्स–साइमन प्रतिबंध

यदि I-O का हल ऋणात्मक बहिर्वेश प्रदान करता है, तो इसका अर्थ है कि किसी उत्पाद की प्रत्येक इकाई के उत्पादन में उस उत्पाद की एक इकाई से अधिक उत्पाद प्रयुक्त हुआ है। ऐसा होना वास्तविक नहीं है तथा ऐसी पद्धति स्वीकार्य नहीं होती। हॉकिन्स–साइमन प्रतिबंध ऐसी घटनाओं से हमे सचेत करते हैं। इसके लिए कि हमारी मूल समीकरण $X = [I - A]^{-1}F$ हल के रूप में ऋणात्मक संख्याएँ नहीं दे, हमें ऐसे आव्यूह $[I - A]$ की आवश्यकता है कि

i) आव्यूह का सारणिक सदैव धनात्मक हो, तथा

ii) सभी विकर्ण अवयवों $(1 - a_{11}), (1 - a_{22})$ को धनात्मक होना चाहिए। दूसरे शब्दों में,

सभी अवयव a_{11}, a_{22} एक से कम होने चाहिए। इसका अर्थ है कि किसी सेक्टर के बहुर्वेश की एक इकाई को स्वयं अपने बहिर्वेश की एक इकाई से अधिक उपयोग नही

करना चाहिए। ये ही हॉकिन्स–साइमन प्रतिबंध कहलाते हैं। इसके साथ ही, पहले प्रतिबंध $D > 0$ का यह अर्थ है कि (2 उद्योग स्थिति के लिए),

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0, \text{ या } (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0 \text{ है।}$$

यह प्रतिबंध सुनिश्चित करता है कि किसी वस्तु की एक इकाई के उत्पादन के लिए, उस वस्तु की प्रत्यक्ष और अप्रत्यक्ष रूप से आवश्यकता को भी एक से कम होना चाहिए।

उदाहरण 7: मान लीजिए कि

$$[\text{I-A}] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ है। तब,}$$

$$[\text{I-A}] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

से हम सारणिक $[1-A]$ का मान = –0.06 प्राप्त कर सकते हैं, जो शून्य से छोटा है। क्योंकि हॉकिन्स–साइमन प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होते हैं, इसलिए इस स्थिति में कोई भी हल संभव नहीं होगा।

4.5.5 संवृत और विवृत निवेश –बहिर्वेशा मॉड्ल

उपरोक्त उदाहरण में, दो उद्योगो के अतिरिक्त, हमारे मॉड्ल में अंतिम मांग का एक बहिर्जात (exogenous) सेक्टर भी है, जो प्राथमिक निवेश गुणकों (श्रम सेवाएँ), जो इन दोनो उद्योगों द्वारा उत्पादित नहीं है) की आपूर्ति करता है तथा दोनों उत्पादन उद्योगों के बहिर्वेश की खपत करता है (निवेश के रूप में नहीं)। ऐसा ही एक I-O मॉड्ल एक 'विवृत मॉड्ल कहलाता है। इसमें 'अंतिम मांग बिल' के पदों में बहिर्जात सेक्टरों के साथ ही (open model) उत्पादन सेक्टरों के पदों में अंतर्जात (endogenous) सेक्टर भी सम्मिलित होते हैं। I-O मॉड्ल, जिसमें अंतर्जात अंतिम मांग सेक्टर होते हैं; संवृत मॉड्ल (closed model) कहलाता है।

बोध प्रश्न घ

1. एक निवेश गुणांक आव्यूह क्या होता है ?

2. एक विवृत निवेश–बहिर्वेश मॉड्ल क्या होता है ?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

3. निवेश गुणांक आव्यूह के रूप में दिया हुआ है। इसका तकनीकी आव्यूह प्राप्त कीजिए।

4. किसी निवेश–बहिर्वेश मॉड्ल में हॉकिन्स–साइमन प्रतिबंधों के महत्व की चर्चा कीजिए।

4.6 सारांश

इस इकाई में, हमने व्यापार और अर्थशास्त्र में आव्यूह बीजगणित के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा की है। उदाहरणों की सहायता से हमने आँकड़ों को आव्यूह रूप में प्रस्तुत करना सीखा है। हमारी समझ के लिए, आव्यूहों का उपयोग करके युगपत समीकरणों से मांग–आपूर्ति संतुलन का अभिकलन दर्शाया गया हैं। आव्यूह विधियों से राष्ट्रीय आय मॉड्ल को हल करने की तकनीक स्पष्ट की गई है।

इस इकाई के अंतिम भाग में, हमें निवेश–बहिर्वेश विश्लेषण से अवगत कराया गया तथा हल निगमित करने में आव्यूह बीजगणित की तकनीक के उपयोग को दर्शाया गया। इस प्रक्रिया में, हमने एक विवृत निवेश–बहिर्वेश मॉड्ल के हल करने के लिए, वाँछित चरणों के प्रदर्शन से पूर्व निवेश–बहिर्वेश व्यापार मॉड्ल और तकनीकी आव्यूह के सूत्रण को सीखा है।

4.7 शब्दावली

संवृत निवेश–बहिर्वेश मॉड्लः विवृत निवेश–बहिर्वेश मॉड्ल को बहिर्जात सेक्टर ठीक एक उद्योग के रूप में पद्धति में इस प्रकार सम्मिलित हो जाता है कि प्रत्येक उत्पादन सेक्टर का समस्त बहिर्वेश गौण निवेश या मध्यस्थ उत्पादों के रूप में अन्य उत्पादन सेक्टरों द्वारा समावेशित कर लिया जाता है। आवश्यक रूप से, घरों के कार्यो वाले सेक्टर को एक उद्योग के रूप में माना जाता है तथा इसके कोई भी बहिर्वेश अंतिम उत्पाद के रूप में बाजार में नहीं बेचा जाता है।

अंतर्जात चरः किसी मॉड्ल के अंतर ही जनित आश्रित चर (dependent variable) तथा इसीलिए इसका मान उस मॉड्ल में निहित फलन के संबंधों में से किसी एक द्वारा बदला (निर्धारित किया) जाता है।

बहिर्जात चरः एक चर जिसका मान एक दिए मॉड्ल के बाहर से निर्धारित किया जाता है।

हॉकिन्स–साइमन प्रतिबंधः किसी उत्पाद की प्रत्येक इकाई के उत्पादन में उस उत्पाद की एक इकाई से अधिक का उपयोग नहीं किया जा सकत है। इस प्रतिबंध में वाँछनीय है कि तकनीकी (प्रौद्योगिकी) आव्यूह के सभी मुख्य उपसारणिक धनात्मक होने चाहिए।

निवेश गुणांक आव्यूहः उत्पादन सेक्टरों द्वारा प्रति इकाई बहिर्वेश के लिए आवश्य विभिन्न गौण निवेशों का एक आव्यूह।

निवेश–बहिर्वेश मॉड्लः एक आर्थिक मॉड्ल जो किसी राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था के विभिन्न सेक्टरों (उद्योगो) की बीच अंतरआश्रितता निरूपित करता है।

निवेश–बहिर्वेश व्यापार आव्यूहः एक आव्यूह जो एक उद्योग के कुल बहिर्वेश के बंटन को निवशों के रूप में तथा अंतिम मांग के लिए अन्य सभी उद्योगों में दर्शाता है।

मॉड्लः समीकरणों, फलन संबंधों तथा सर्वगसमिकाओं का एक समुच्चय जो कुछ आर्थिक परिघटनाओं को स्पष्ट करने का प्रयास करता है।

विवृत निवेश–बहिर्वेश मॉड्लः एक मॉड्ल जिसमें उत्पादन सेक्टर किसी अर्थव्यवस्था के घर के कार्यों के सेक्टर से प्राथमिक निवेशों की खरीद और अंतिम उत्पादों की बिक्री के माध्यम से विचार–विमर्श करते हैं।

प्राथमिक निवेशः उत्पादन प्रक्रिया के मूलभूत निवेश, जैसे श्रम।

तकनीकी (प्रौद्योगिकी) आव्यूहः किसी तत्समक आव्यूह में से एक निवेश–गुणांक आव्यूह को घटाने से प्राप्त आव्यूह।

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. इसके संक्षिप्त और सुविधाजनक विशेषता (अभिलक्षण) के कारण

दिन	बस	रेलगाड़ी	योग
1	20	30	50
2	0	60	60

2. कारों A, B और C के लिए; श्रम घंटे, प्रयुक्त सामग्री तथा उप–ठेके पर दिए गए कार्यः

$X = \begin{bmatrix} 40 & 100 & 50 \\ 80 & 150 & 80 \\ 100 & 250 & 100 \end{bmatrix}$, प्रति इकाई श्रम लागत, सामग्री की लागत तथा उप–ठेके पर दिए कार्य $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ प्रत्येक कार A, B और C की लागत $XY = \begin{bmatrix} 330 \\ 550 \\ 750 \end{bmatrix}$, तीनों कारों A, B और C के निर्माण की कुल लागत आव्यूह

$$XYZ = [3000 \quad 2000 \quad 1000] \begin{bmatrix} 330 \\ 550 \\ 750 \end{bmatrix} = [990000 + 1100000 + 750000] = [2840000]$$

द्वारा जाती है।

(ख)

1. मांग और आपूर्ति की उन समीकरणों पर विचार कीजिए जिनमें आपूर्ति और मांग की राशि तथा स्वयं उस वस्तु के मूल्य को प्रभावित करने वाले गुणक सम्मिलित हों।

2. क्रैमर–नियम का उपयोग कीजिए।

3. माँग आपूर्ति के बराबर होती है।

(ग)

1. $a > 0$ और $0 < b < 1$

2. आय और खपत

3. अनुच्छेद 4.3 में दी विधि को पढ़ने के बाद स्वयं करें।

(घ)

1 उत्पादन सेक्टरों द्वारा प्रति इकाई बहिर्वेश के लिए आवश्यक विभिन्न गौण निवेशों का एक आव्यूह।

2. इस मॉड्ल में अंतिम मांग का बहिर्जात सेक्टर अंतर्विष्ट होता है जो प्राथमिक निवेश गुणकों की आपूर्ति करता है (श्रम सेवांएँ), जो इन दोनों उद्योगों द्वारा उत्पादित नहीं की जाती है।) तथा दोनों उत्पादन उद्योगो के बहिर्वेश की खपत करता है (एक निवेश के रूप में नहीं)

3. $A = \begin{pmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$

4. किसी उत्पाद की प्रत्येक इकाई के उत्पादन में उस उत्पाद की एक इकाई से अधिक का उपयोग नहीं किया जा सकता।

4.9 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

1. बड़ी उर्जा कंपनी विद्युत, प्राकृतिक गैस और तेल उत्पादित करती है। एक रुपए मूल्य की विद्युत के उत्पादन के लिए, विद्युत से ₹0.30 प्राकृतिक गैस से ₹ 0.10 और तेल से ₹0.20 के निवेशों की आवश्यकता है। एक रुपए मूल्य की प्राकृतिक गैस के उत्पादन के लिए, विद्युत से ₹ 0.30, प्राकृतिक गैस से ₹0.10 और तेल से ₹0.20 के निवेशों की आवश्यकता है। एक रुपए मूल्य के तेल के उत्पादन के लिए, प्रत्येक सेक्टर के लिए ₹ 0.10 के निवेशों की आवश्यता है। प्रत्येक सेक्टर के लिए उस बहिर्वेश को ज्ञात कीजिए, जिसकी आवश्यकता विद्युत के लिए 25 करोड़ रुपए प्राकृतिक गैस के लिए 15 करोड़ रु प्राकृतिक गैस के लिए 15 करोड़ रुपए और तेल के लिए 20 करोड़ रुपए की अंतिम मांग को संतुष्ट करने के लिए हैं।

2. किसी अस्पताल को संचालित करने की दैनिक लागत C आंतरिक रोगियों की संख्या I और बाहरी रोगियों की संख्या P का एक रैखिक फलन में एक निश्चित लागत a जोड़ कर प्राप्त होती है। अर्थात्

$$C = a + bP + dI \text{ है।}$$

3. दिनों के निम्नलिखित आँकडे दिए रहने पर, रैखिक समीकरणों का एक निकाय स्थापित करके तथा आव्यूह के प्रतिलोम का उपयोग करते हुए a, b और d के मान ज्ञात कीजिए:

दिन	लागत (₹ में)	आंतरिक रोगियों की संख्या	बाहरी रोगियों की संख्या
1	6950	40	10
2	6725	35	9
3	7100	40	12

4. किसी ट्रस्ट के पास ₹10000 का फंड है, जिसे दो प्रकार के बॉन्डों में निवेशित किया जाना है। पहला बॉन्ड 5% वार्षिक ब्याज देता है। तथा दूसरा बॉन्ड 6% वार्षिक ब्याज देता है। आव्यूह बीजगणित का उपयोग करते हुए, निर्धारित कीजिए कि 10000 रु को दोनों प्रकार के बॉन्ड़ो में किस प्रकार विभाजित किया जाए कि वार्षिक ब्याज ₹ 550 प्राप्त हो।

5. किसी व्यक्ति ने ₹30000 तीन विभिन्न निवेशों में क्रमशः 2%, 3% और 4% वार्षिक ब्याज की दरों से निवेश किए। इससे कुल वार्षिक आय ₹1000 है। यदि पहले और दूसरे निवेशों से कुल, आय तीसरे निवेश की आय से ₹ 50 अधिक है, तो आव्यूह बीजगणित का उपयोग करते हुए, प्रत्येक निवेश की राशि ज्ञात कीजिए।

6. राष्ट्रीय आय मॉड्ल दिया हुआ हैः

$Y = C + I + G$ (G: सरकारी आय)

$C = 5 + \frac{3}{4}Y$

$I = 10$

$G = 10$

आव्यूह प्रतिलोम विधि का उपयोग करते हुए, Y और C ज्ञात कीजिए।

उत्तरः

1. मान लीजिए कि $x_1 =$ विद्युत कंपनी का कुल बहिर्वेश (E)

$x_2 =$ प्राकृतिक गैस कंपनी का कुल बहिर्वेश (G)

$x_3 =$ तेल कंपनी का कुल बहिर्वेश(O)

आवश्यक विद्युत की कुल राशि विद्युत, प्राकृतिक गैस और तेल (आंतरिक मांग) को उत्पादित करने के लिए आवश्यक विद्युत की राशियों का योग प्लस (plus) विद्युत की अंतिम (बाहरी) मांग है।

$$x_1 = 0.30x_1 + 0.30x_2 + 0.10x_3 + 25$$

आवश्यक **प्राकृतिक गैस की कुल राशि** विद्युत, प्राकृतिक गैस और तेल (आंतरिक मांग) को उत्पादित करने के लिए आवश्यक प्राकृतिक गैस की राशियों का योग प्लस प्राकृतिक गैस की अंतिम (बाहरी) मांग है।

$$x_2 = 0.10x_1 + 0.10x_2 + 0.10x_3 + 15$$

आवश्यक **तेल की कुल राशि** विद्युत, प्राकृतिक गैस और तेल (आतंरिक मांग) को उत्पादित करने के लिए आवश्यक तेल की राशियों का योग प्लस तेल की अंतिम (बाहरी) मांग है।

$$x_3 = 0.20x_1 + 0.20x_2 + 0.10x_3 + 20$$

तकनीकी आव्यूह M अंतिम मांग आव्यूह D तथा कुल मांग आव्यूह X का उपयोग करते हुए हम प्राप्त करते हैं:

$X = MX + D$, जिसका हल $X = [I - M]^{-1}$D हैं।

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3 & .3 & .1 \\ .1 & .1 & .1 \\ .2 & .2 & .1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$I - M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .3 & .3 & .1 \\ .1 & .1 & .1 \\ .2 & .2 & .1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .7 & -.3 & -.1 \\ -.1 & .9 & -.1 \\ -.2 & -.2 & -.9 \end{bmatrix}$$

$$[I - M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.58 & 0.24 \\ 0.22 & 1.22 & 1.16 \\ 0.4 & 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$[I - M]^{-1}D = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.58 & 0.24 \\ 0.22 & 1.22 & 1.16 \\ 0.4 & 0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 27 \\ 40 \end{bmatrix} \text{ हैं।}$$

अर्थात् विद्युत का कुल बहिर्वेश 53 रूपए करोड़ है, प्राकृति गैस का कुल बहिर्वेश 27 करोड रूपए है। तथा तेल का कुल बहिर्वेश 40 करोड रूपए हैं।

2. सारणी में दिए मानों को C = a + bP + dI में प्रतिस्थापित करने पर, हमें रैखिक समीकरणों का निम्नलिखित समुच्चय प्राप्त होता है:

$$a + 10b + 40d = 6950$$

$$a + 9b + 35d = 6725$$

$$a + 12b + 40d = 7100$$

उपरोक्त समीकरण – निकाय आव्यूह रूप में है:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 40 \\ 1 & 9 & 35 \\ 1 & 12 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6950 \\ 6725 \\ 7100 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

अब $A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adj(A)}}{|A|.}$ जहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 40 \\ 1 & 9 & 35 \\ 1 & 12 & 40 \end{vmatrix} = -10$ है

तथा $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 60 & -80 & 10 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

अतः, संबंध (I) से हम प्राप्त होते हैं:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 60 & -80 & 10 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6950 \\ 6725 \\ 7100 \end{bmatrix} = \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} -50000 \\ -750 \\ -300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 75 \\ 30 \end{bmatrix}$$

अतः, a = 5000, b = 75 और d = 30.

1. मान लीजिए के a and $(10000 - a)$ को क्रमशः पहले और दूसरे प्रकार के बॉन्डों में निवेश किया जाता है। अतः, इन बॉन्डों के मानों को पंक्ति आव्यूह रूप में $A = [a \quad (10000 - a)]$ लिखा जा सकता है।

साथ ही, इन बॉन्डों से प्राप्त होने वाले ब्याज की राशियों को स्तंभ आव्यूह के रूप में

$B = \begin{bmatrix} 5\% \\ 6\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.06 \end{bmatrix}$ लिखा जा सकता है।

अतः कुल ब्याज = AB $= [a \quad (10000 - a)] \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.06 \end{bmatrix} = [600 - 0.01a]$ है।

परंतु कुल ब्याज= ₹550 दिया है।

अतः $600 - 0.01\,a = 550$

$$0.01\,a = 50$$

$$a = 5000$$

पहले बॉन्ड में निवेश = ₹ 5000 है।

और दूसरे बॉन्ड में निवेश = 10000 – 5000 = ₹ 5000 है।

4. मान लीजिए कि तीन निवेशों की राशियाँ x, y और z है। दिए हुए आँकड़ों को निम्नलिखित रैखिक समीकरणों के निकाय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$x + y + z = 30000$ ………………………….… (i)

$0.02x + 0.03y + 0.04z = 1000$ ……….. (ii)

$0.02x + 0.03y - 0.04z = 50$ ……………. (iii)

समीकरणों (ii) और (iii) को इस रूप में भी लिखा जा सकता है:

$2x + 3y + 4z = 100000$ ……………(ii)

$2x + 3y - 4z = 5000$ ……………(iii)

इन समीकरणों को आव्यूह रूप AX = B में व्यक्त किया जा सकता है,

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 30000 \\ 100000 \\ 5000 \end{bmatrix}$ है।

यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -8$ है,

$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -24 & 7 & 1 \\ 16 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ है।

अब $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|.} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -24 & 7 & 1 \\ 16 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B$

$$= -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -24 & 7 & 1 \\ 16 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30000 \\ 100000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1875 \\ 16250 \\ 11875 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

अत:, 2%, 3% और 4% निवेश क्रमशः ₹ 1875, ₹ 16250 और ₹ 11875 है।

5. $Y = 100$ और $C = 80$ है।

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

4.10 संदर्भ पुस्तकें

- Abraham, W.I., *National Income and Economic Accounting:* Prentice-Hall Inc., New Jersey, Chapter 7 (including the Appendix, 1968.
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright,Fundamental Methods of Mathematical Economics (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Stafford, L.W.T., *Mathematics for Economists:* The English Language Book society and Macdonald & Evans Ltd., London, Chapter 17, 1977.
- Wisniewski, M., *Introductory Mathematical Methods in Economics:* McGraw-Hill Book Company, London, Chapter 7, 1991.

इकाई 5 गणितीय फलन

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित को समझ पाएँगेः

- एक फलन का अर्थ;
- विभिन्न प्रकार में फलन; तथा
- व्यापार और अर्थशास्त्र में फलनों का उपयौग

5.1 प्रस्तावना

फलन एक निवेश (या तर्क) को एक बहिर्वेश से संबंधित करता है। किसी फलन की व्याख्या करने में प्रस्तुत तीन मुख्य घटकों निवेश, संबंध और बहिर्वेश पर ध्यान दीजिए। उदाहरणार्थ, एक बहिर्वेश के उत्पादन के लिए, आपने एक निवेश का उपयोग किया है। ऐसा हो सकता है कि आपको एक बहिर्वेश प्राप्त हो, जिसका मान निवेश के मान का दुगुना हो। इसका अर्थ है कि निवेश और बहिर्वेश के बीच 2 से गुणा करने वाला एक सरल फलन है, अर्थात्

निवेश $\times$ 2 = बहिर्वेश है।

हम एक फलन को नामांकित करने के लिए, 'f' या कोई अन्य g जैसे अक्षर का प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, किसी फलन को पढ़ने के लिए, हम कहते हैं "x का f बराबर है x का वर्ग" और इस $f(x) = x^2$ के रूप में लिखते हैं। यहाँ निवेश का मान यदि 3 लें, तो बहिर्वेश 9 हो जाता है तथा हम इसे $f(3) = 9$ लिखतें हैं।

निवेश पर आश्रित बहिर्वेश के रूप में फलन का आकार अनेक संबंधों को आलेखों के रूप में निरूपित करने में उपयोगी रहता है। इस इकाई में, हम कुछ गणितीय फलनों के आलेखीय रूपों की चर्चा करेंगे।

5.2 फलन और उनके प्रकार

ऊपर देखी गई एक फलन की व्यापक धारणा के आधार पर, इसे औपचारिक रूप से परिभाषित किया जा सकता है।, कुछ महत्वपूर्ण फलन हैं; जिनके अर्थशास्त्र और व्यापार में अनुप्रयोग हैं। इस अनुच्छेद में हम इन पर विचार करेंगे।

5.2.1 फलन की परिभाषा

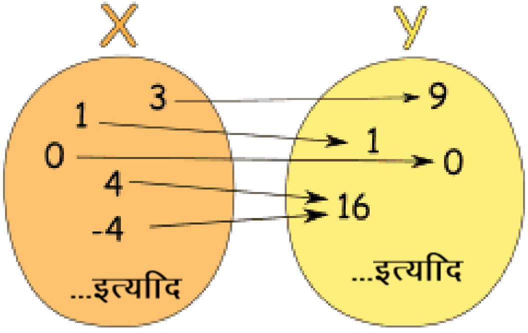
एक फलन (function) किसी समुच्चय के प्रत्येक अवयव को एक अन्य समुच्चय के ठीक एक अवयव से संबंधित करता है। ऊपर दिए हुए प्रकार से किसी फलन को परिभाषित करने में, हमें निम्नलिखित पर ध्यान देने की आवश्यकता है:

i) "प्रत्येक अवयव" का अर्थ एक समुच्चय, मान लीजिए X के हर एक अवयव से है, जो एक अन्य समुच्चय, मान लीजिए Y के किसी अवयव से संबंधित है;

ii) "ठीक एक" का अर्थ है कि फलन एक अकेले मान (single value) वाला है। अर्थात् $f(3) = 8$ या 9 सही नहीं है।

यदि काई संबंध इन दोनों नियमों का पालन नहीं करता है, तो वह एक फलन नहीं है, यद्यपि वह संबंध अभी भी है। ऐसी स्थिति में, दोनों समुच्चयों के अवयव केवल क्रमित युग्म (ordered pairs) होते हैं। ये क्रमित युग्म इसलिए कहलाते है; क्योंकि निवेश सदैव पहले आता है तथा बहिर्वेश बाद में।

उदाहरण 1: मान लीजिए संबंध $x \to x^2$ नीचे दी आकृति के अनुसार दिया हुआ है:



आकृति 5.1: x और y में संबंध

स्रोत : Math is Fun (इंटरनेट से लिया है)

ऊपर दिए संबंधं में, समुच्चय X में x के अवयव अंतर्विष्ट हैं तथा समुच्चय Y में x^2 के अवयव है। यह एक फलन हैं, क्योंकि

- X का प्रत्येक अवयव Y के अवयव से संबंधित है।
- X के किसी भी अवयव के दो या अधिक संबंध नहीं हैं।

5.2.2.1 प्राँत, सहप्राँत और परिसर

उपरोक्त उदाहरण में,

- समुच्चय X प्राँत (domain) कहलाता है;
- समुचच्य Y सहप्राँत (codomain) कहलाता है; तथा
- Y के उन अवयवों का समुच्चय जो X के अवयवों से जुड़ता है। एक फलन को उसके आलेख द्वारा अद्वितीय रूप से निरूपित किया जाता है।

(फलन द्वारा दिए गए वास्तव के मान) परिसर (range) कहलाता है। जो क्रमित युग्मों $(x, f(x))$ का समुच्चय होता है। जब प्राँत और सहप्राँत संख्याओं के समुच्चय हों, तो

प्रत्येक ऐसे युग्म को समतल में एक बिंदु के कार्तीय निर्देशांक समझा जा सकता है। व्यापक रूप में, ये बिंदु एक वक्र बनाते हैं; जो उस फलन का आलेख (graph) भी कहलाती है। यह फलन का एक उपयोगी निरूपण है, जिसका सामान्यतः प्रत्येक स्थान पर उपयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ, फलनों के आलेखों को सामान्यतः समाचार पत्रों के मूल्य सूचकांकों और स्टॉक बाजार सूचकांकों को दर्शाने के लिए उपयोग किया जाता है। कभी–कभी कोई संबंध या फलन ऊपर चर्चा किए गए पैटर्न की तरह प्रत्यक्ष रूप से प्रदर्शित नहीं होते हैं। अस्पष्ट फलनो (implicit functions) इस श्रेणी में आते हैं। आगे बढ़ने से पहले, हम इसे देखते हैं।

एक फलन **स्पष्ट (explicit)** कहलाता है जब वह दर्शाता है कि एक स्वतंत्र निवेश x से एक आश्रित बहिर्वेश y तक प्रत्यक्ष रूप से किस प्रकार पहुँचा जाता है।

उदाहरणार्थ, $y = x^3 - 5$ को लीजिए। देखिए कि यदि आपकों x ज्ञात है, तो आप y ज्ञात कर सकते हैं।

यही कारण है कि हम $y = f(x)$. लिखते हैं।

उदाहरण 2: $x^2 - 5xy + y^3 = 0$ हैं।

जैसा कि आप उपरोक्त समीकरण की स्थिति में देख सकते हैं कि x से प्रत्यक्ष रूप से y पर जाना यहाँ कठिन है।

अनेक फलनों के प्रकारों में से, हम निम्नलिखित फलनों की चर्चा करेंगे, जिनका सामान्यतः उपयोग किया जाता है:

- फलन
  - बीजीय
    - बहुपद
      - अचर
      - रैखिक
      - द्विघात
    - घात
      - परिमेय टुकड़ों अनुसार
  - अबीजीय
    - चरघातांक
    - लघुगगणकीय

5.2.2 फलनों के प्रकार : बीजीय

आगे आने वाली चर्चा महत्वपूर्ण फलनों का परिचय कराती है, जिन्हें अधिकतर समस्याएँ हल करने में उपयोग किया जाता है। जैसा कि ऊपर संक्षेप में बताया गया है, फलनों को बृहत रूप से दो समूहों में बाँटा जाता है। ये हैं: बीजीय $(\boldsymbol{algebraic})$ और अबीजीय $(\boldsymbol{transcedental})$।

आइए, तदनुसार इनको समझने का प्रयास करें।

फलनों का एक समूह होता है जो **बीजीय फलन** कहलाता है, जहाँ x और y में एक बहुपद के रूप में $p(x, f(x)) = 0$ कोई फलन $f(x)$ संतुष्ट करता है, जब कि बहुपद के गुणांक पूणांक होते हैं। इस प्रकार के फलन प्रारंभिक संक्रियाओं, जैसे प्लस (जोड़ने) $(plus)$, माइनस (घटाने) $(minus)$, गुणन और विभाजन की केवल एक परिभित संख्या के उपयोग से बनाए जा सकते हैं।

5.2.2.1 बहुपद फलन

चर x में एक बहुपद $(polynomial)$ एक फलन होता है, जिसे

$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ अचर हैं। हम x की सबसे अधिक घात वाले पद को (अर्थात् $a_n x^n$) को) अग्र या अगला (leading) पद कहते हैं तथा a_n को अगला गुणांक कहते हैं। बहुपद की घात (degree) अगले पद में x की घात होती है।

अर्थात् इस स्थिति में, बहुपद की घात n है। पुनः वे बहुपद जिनकी घात 0, 1 और 2 हैं क्रमशः अचर, रैखिक और द्विघात फलन हैं। साथ ही 3, 4 और 5 घातों वाले बहुपदों के लिए विशेष नाम त्रिघात (cubic), चतुर्थघात (quartic) और पंचमघात (quintic) फलन हैं।

घात $n > 5$ वाले बहुपद केवल n वीं घात वाले बहुपद कहलाते हैं।

नीचे बहुपदों के उदाहरणों को देखिएः

$$p_1(x) = 2x + 5$$

$$p_2(x) = 2x^3 - x + 5$$

$$p_3(x) = 2x^7 - 5x^3 + 5x^2$$

अचर फलनः एक अचर फलन एक ऐसा रैखिक फलन है, जिसमें प्राँत का कोई भी सदस्य लेने पर परिसर में कोई भी परिवर्तन नहीं होता है। अर्थात्, प्राँत में किन्हीं भी x_1 और x_2 के लिए $f(x_1) = f(x_2)$ होता है।

रैखिक फलनः रैखिक फलन वे फलन होते हैं, जिनके आलेख सरल रेखाएँ होते हैं। एक रैखिक फलन का रूप इस प्रकार का होता हैः

$y = f(x) = a + bx$ .... (1)

द्विघात फलनः एक द्विघात फलन $f(x) = ax^2 + bx + c$ के रूप का होता है, जहाँ a, b और c संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$.

घात फलनः एक घात फलन (power function) ऐसा फलन होता है, जिसे

$f(x) = kx^p$ के रूप में निरूपित किया जा सकता है, जहाँ k और p वास्तविक संख्याएँ है तथा k को गुणांक कहा जाता है। देखिए कि यह फलन एक चर आधार पर एक निश्चित घात लगा कर उसी प्रकार बनाया गया है, जैसे आप किसी बहुपद फलन का एक अकेला पद ज्ञात करते हैं।

नीचे दिए गए सभी फलन घात फलन हैंः

अचर और केवल x वाले तत्समक फलन घात फलन हैं; क्योंकि इन्हें $f(x) = x^0$ और $f(x) = x^1$ लिखा जा सकता है।

द्विघात और त्रिघात फलन पूर्ण संख्या घातों वाले घात फलन है; जैसे $f(x) = x^2$ और $f(x) = x^3$ हैं।

व्युत्क्रम और व्युत्क्रम वर्ग फलन ऋणात्मक पूर्णांकीय घातों वाले घात फलन हैं, क्योंकि इन्हें $f(x) = x^{-1}$ और $f(x) = x^{-2}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

वर्गमूल वाले घनमूल वाले फलन भिन्नात्मक (functional) घातों वाले घात फलन हैं, क्योंकि इन्हें $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ और $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

5.2.2.2 परिमेल फलन

एक परिमेय फलन को एक परिमेय भिन्न, अर्थात् एक बीजीय भिन्न द्वारा परिभाषित किया जाता है, जिसमें अंश ओर हर दोनों बहुपद होते हैं।

उदाहरण 3: फलन $R(x) = (-2x^5 + 4x^2 - 1) / x^9$ एक परिमेय (rational) फलन है, क्योंकि इसके अंश और हर बहुपद है। ध्यान दीजिए कि हर का मान शून्य नहीं होना चाहिए।

5.2.3.3 टुकड़ों अनुसार फलन

हमें ऐसे फलन भी प्राप्त हो सकते हैं जो निवेश मान पर आश्रित होते हुए विभिन्न प्रकार व्यवहार करते हैं। अर्थात् ऐसे फलन अंतरालों के एक अनुक्रम में परिभाषित होते हैं। नीचे दिया हुआ निरपेक्ष मान (absolute value) फलन टुकड़ों अनुसार फलन (piecewise function) का एक उदाहरण है।

उदाहरण 4:

$$|x| = \left\{\begin{matrix} -x, & x < 0 \\ 0\ , & x = 0 \\ x\ , & x > 0 \end{matrix}\right\} \text{के लिए}$$

हस प्रकार के फलन की सराहना करने के लिए, हम भारतीय आयकर की दर संरचना पर विचार कर सकते हैं। इसे नीचे दी हुई 2019–20 के लिए भारतीय आयकर दरों से देखा जा सकता है:

आयकर स्लैब	कर दर
₹ 2.5 लाख तक की आय	कोई कर नहीं
₹ 2.5 लाख से ऊपर तथा ₹ 5 लाख से कम आय	5%
₹ 5 लाख से ऊपर तथा ₹10 लाख से कम	₹ 12500 प्लस उस आय का 20% जो ₹ 5 लाख से अधिक है
₹ 10 लाख से ऊपर आय	₹ 12500 प्लस उस आय का 30% जो ₹ 10 लाख अधिक है

उपरोक्त सारणी में दी कर दरों को हम आय स्तर का एक फलन मानते हुए, एक टुकड़ों अनुसार फलन बना सकते हैं।

5.2.3 फलनों के प्रकार : अबीजीय

इस श्रेणी के फलनों को योग, व्यवकलन, गुणन, विभाजन, किसी घात को चढ़ाना तथा मूल निकालने जैसी बीजीय संक्रियाओं के एक परिभित संयोजन के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। इन प्रकारों के फलनो में लघुगणकीय (logarithmic) और चरघातांकी (exponential) फलन सम्मिलित हैं।

5.2.3.1 चरघातांकी फलन

यदि a कोई ऐसी संख्या है कि $a>0$ और $a \neq 1$ है, तो हमे एक चरघातांकी फलन $f(x) = a^x$ के रूप में प्राप्त होता है, जहाँ a आधार *(base)* कहलाता है तथा x कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है। ध्यान दीजिए कि उपरोक्त फलन में x घातांक में है तथा आधार एक निश्चित संख्या है। यह ठीक उसका विपरीत है, जो हमने बीजीय फलनों में देखा है। वहाँ आधार चर, अधिकांश स्थितियों में x तथा घातांक एक निश्चित संख्या थी। हम कुछ देर बाद ही कुछ चरघातांकी फलनों को देखेंगे। आगे बढ़ने से पहले, हमें a पर कुछ प्रतिबंध लगाने चाहिए। हम एक और शून्य को लेने से बचेंगे, क्योंकि तब फलन

$f(x) = 0^x = 0$ और $f(x) = 1^x = 1$ हो जाएगा।

ऐसे अचर फलनों में, अनेक ऐसे गुण नहीं होते, जो व्यापक चरघातांकी फलनों में होते हैं।

आगे, हम ऋणात्मक संख्याओं को भी नहीं लेते हैं। ऐसी संख्याओं के लेने से हमे फलन का मान सम्मिश्र (complex) संख्या के रूप में भी प्राप्त हो सकता है। उदाहरणार्थ, $a = -4$ लेने पर, फलन $f(x) = (-4)^x \Rightarrow f(1/2) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$

हो सकता है जो एक सम्मिश्र संख्या हैं। क्योंकि हम चाहते हैं कि फलन का मान निकालने पर केवल एक वास्तविक संख्या ही प्राप्त हो, इसलिए हम a को ऋणात्मक संख्या नहीं लेंगे।

ध्यान दीजिए कि एक फलन $f(x) = e^x$ लेने पर, जहाँ $e = 2.718281828459...$ "(ऑयलर संख्या) " है, हमें चरघातांकी फलन का प्राकृतिक वर्णन प्राप्त हो जाता है।

5.2.3.2 लघुगणकीय फलन

फलन $y = log_b x$, जहाँ $x, b > 0$ और $b \neq 1$ है "मूलभूत लघुगणकीय फलन प्रदान करता है, जिसे "y बराबर है x का log आधार b पर y पढ़ा जाता है या "y बराबर है log आधार b, x 00 का पढ़ा जाता है, उपरोक्त फलन $x = b^y$ के तुल्य है। ध्यान दीजिए कि यदि कोई आधार नहीं दर्शाया गया है, तो आधार को 10 समझा जाता है। साथ ही, इस ओर भी ध्यान दीजिए कि लघुगणकीय फलन का प्राँत सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है तथा इसका परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है।

लघुगणकीय फलनों के मान निकालते समय, प्रयुक्त होने आधार अधिकांशतः 10 और e होते हैं। log आधार 10, अर्थात् $\log_{10}$ को साधारण (common) लघुगणक के रूप में जाना जाता है तथा इसे log लिखा जाता है। किसी संख्या का लघुगणक

(logarithm) वह घातांक है, जो आधार पर लगाने पर वह संख्या प्रदान करता है। उदाहरणार्थ,

$\log_2 8 = 3$ है, क्योंकि $2^3 = 8$ है।

$\log_3 27 = 3$ है, क्योंकि $3^3 = 27$ है।

$\log_{10} 100 = 2$ है, क्योंकि $10^2 = 100$ है।

यदि log आधार $\log_e$ अर्थात् का प्रयोग होता है, तो यह प्राकृतिक लघुगणक (natural logarithm) कहलाता है तथा इसे l_n लिखा जाता है। चरघातांकी और लघुगणकीय दोनों फलनों को ऊपर देखने के बाद, इनके बीच में विद्यमान संबंध की ओर ध्यान देना उपयोगी रहेगा। अर्थात् एक लघुगणकीय फलन एक चरघातांकी फलन का प्रतिलोम होता है तथा इसका विलोम भी सत्य है। इस प्रकार a^x (एक चरघातांकी फलन) फलन $log_a(x)$ एक लघुगणकीय फलन) का प्रतिलोम है।

यदि m, n और a धनात्मक संख्याएँ है, तो लघुगणकीय फलनों के महत्वपूर्ण गुण ये हैं:

1. $\log(m.n) = \log m + \log n$; गुणनफल का लघुगणक लघुगणकों के योग के बराबर होता है।
2. $\log(m/n) = \log m - \log n$; भागफल का लघुगणक लघुगणकों के अंतर के बराबर होता हैं।
3. $\log(m^n) = n \log m$; किसी संख्या की घात का लघुगणक उस संख्या के लघुगणक का घातांक गुना होता है।
4. $\log_e(e^x) = x$ होता है।
5. $\log_e = 1$ होता है।
6. $\log_a 1 = 0$ है।
7. $\log_a a = 1$ है।

5.2.4 फलनों के प्रकार : प्रतिलोम और संयुक्त

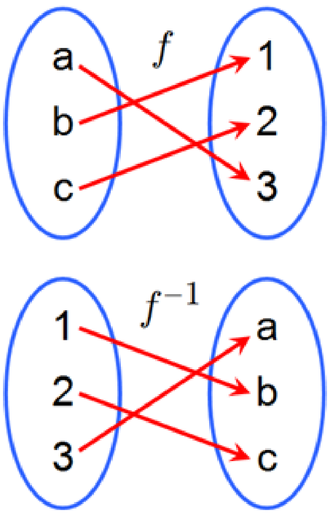
बीजीय और अबीजीय फलनों के अतिरिक्त, दो और प्रकार के फलनों, अर्थात् प्रतिलोम और सयुक्त फलनों के बारे में जानकारी प्राप्त करना भी उपयोगी रहेगा। ये फलन बीजीय और अबीजीय दोनों फलनों में देखने को मिल जाते हैं।

5.2.4.1 प्रतिलोम फलन

प्रतिलोम (inverse) फलनों को $f(x) = y$ के रूप में परिभाषित किया जाता है, यदि और केवल तभी यदि $g(y) = x$ हो। दूसरे शब्दों में, किसी फलन f का प्रतिलोम फलन केवल तभी होगा, जब उसके परिसर में प्रत्येक y के लिए, उसके प्राँत में x का केवल एक ही मान हो, जिससे $f(x) = y$ हो। यह प्रतिलोम फलन अद्वितीय होता है तथा इसे अधिकतर f^{-1} द्वारा व्यक्त करते हैं तथा "f प्रतिलोम" y कहते हैं।

उदाहरण 5: मान लीजिए f एक फलन है, जिसका प्राँत a, b और c तथा सहप्राँत 1,2 और 3 है (नीचे आकृति देखिए)। देखिए कि f का प्रतिलोम f^{-1} है। इसका

कारण यह है कि f में अवयव a का प्रतिचित्रण (map) 3 है तथा f^{-1} में 3 का प्रतिचित्रण a है। ऐसा ही अन्य अवयवों के लिए है।



आकृति 5.2: प्रतिलोम फलन

उदाहरण 6: फलन $f(x) = 5x - 7$ पर विचार कीजिए। इसका विपरीत करने का अर्थ है कि किसी बहिर्वेश मान, मान लीजिए, y से x पर वापिस आने की आवश्यकता है। यह फलन $g(y) = \frac{y+7}{5}$ {\displaystyle g(y)={\frac {y+7}{5}}.}द्वारा प्रदान किया जाता है।

उदाहरण 7: f(x) = 3x – 7 के लिए प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर : y = 3x – 7 लिखिए तथा x के लिए y के फलन के रूप में हल कीजिए।

अर्थात्, $x = \frac{y+7}{3}$ है।

उदाहरण 8: $f(x) = \frac{x}{x+1}$ के लिए प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर: मान लीजिए कि $y = x/(x+1)$ है। y के पदों में x के लिए

हल कीजिए। उपरोक्त से, हम प्राप्त करते हैं:

$yx + y = x$,जिससे $y = x(1-y)$

या, $x = \frac{y}{1-y}$ है।

इस प्रकार, $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ है।

उदाहरण 9: फलन $f(x) = e^{x-3}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

उत्तर: $y = e^{x-3}$ दिया है

दोनो पक्षों का ln लेने पर, हमें प्राप्त होता है:

$x - 3 = \ln y$

या $x = ln\, y + 3$

प्रतिलोम फलन ज्ञात करने के लिए, x को y में तथा y को x में बदलिए।

तब $f^{-1}(x) = y = ln\, x + 3$ है।

उदाहरण 10: $f(x) = 3\, ln(4\, x - 6) - 2$ द्वारा दिए जाने वाले फलन का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर: f को एक समीकरण के रूप में लिखिए तथा फिर लघुगणकीय रूप से चरघांताकी रूप में बदलिए। इस प्रकार,

$y = 3\, ln(4\, x - 6) - 2$,

जिससे $ln(4\, x - 6) = (y + 2) / 3$ प्राप्त होता है।

लघुगणकीय रूप से चरघांताकी रूप में बदलने पर, हम प्राप्त करते हैः

$4x - 6 = e^{\left(\frac{y+2}{3}\right)}$

x के लिए, हल करने पर प्राप्त होता हैः

$4x = e^{\left(\frac{y+2}{3}\right)} + 6$

तथा अंत में, $x = (1/4)e^{\left(\frac{y+2}{3}\right)} + 3/2$

प्रतिलोम फलन प्राप्त करने के लिए, x को y मे तथा y को x में बदलने पर, हमें प्राप्त होता हैः

$f^{-1}(x) = y = (1/4)e^{\left(\frac{x+2}{3}\right)} + 3/2$

5.2.4.2 संयुक्त फलन

संयुक्त फलन (composite function) का निहितार्थ है कि एक फलन का एक अन्य फलन के परिणामों पर अनुप्रयोग करना। अर्थात् f( ) के परिणाम को g( ) के माध्यम से भेजना और इसे $(g \circ f)(x)$, के रूप में लिखना, जिसका अर्थ $g(f(x))$ होता है इस प्रकार, यदि हमारे पास दो फलन $f(x)$ और $g(x)$ हैं, तो हम एक संयुक्त फलन $h(x) = f(g(x))$ को परिभाषित कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ, यदि $f(x) = x^3$ और $g(x) = 2x - 1$ है, तो

$h(x) = (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ है।

दूसरी ओर, यदि हम संयुक्त फलन $k(x) \equiv g(f(x))$, को परिभाषित करें, तो हम $k(x) = 2(x^3) - 1$ लिखते हैं। ध्यान दीजिए कि $h(x)$ और $g(x)$ अलग–अलग फलन हैं।

प्राकृतिक चरघातांकी और लघुगणकीय फलनों को ध्यान में रखते हुए, हम नीचे संयुक्त फलन के साथ इनका संबंध देख रहे हैंः

$f(x) = e^x$ दिया है तथा $g(x) = \ln x$, दिया है। तब,

$f(g(x)) = e^{\ln x} = x$ है तथा

$g(f(x)) = \ln (e^x) = x$ है।

परंतु प्रायः संयुक्त फलनों में क्रम का महत्व होता है। उदाहरणार्थ, फलनों $f(x) = 2x + 3$ और $g(x) = x^2$ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि $(g \circ f)(x) =$

$g(f(x))$है। इस प्रकार $(g \circ f)(x) = (2x+3)^2$ है। अब f और g का क्रम उलटा कर दीजिए। तब,

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2)$ है।

क्योंकि $f(x) = 2x + 3$ है, इसलिए $f(x^2) = 2x^2 + 3$ है।

f और g के क्रम बदलने पर, हमें अलग–अलग परिणाम प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 11:

$f(x) = 2x + 3$ और $g(x) = -x^2 + 5$ दिया है। $(f \circ g)(x)$

ज्ञात कीजिए

उत्तर: $g(x)$ के सूत्र को $f(x)$ में लगाने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(-x^2+5)\\ &= 2(-x^2+5)+3\\ &= -2x^2+10+3\\ &= -2x^2+13\end{aligned}$$

बोध प्रश्न क

1. फलन क्या होते हैं ?
2. प्राँत और परिसर में अंतर स्पष्ट कीजिए।
3. एक प्रतिलोम फलन का अर्थ बताइए।
4. एक संयुक्त फलन का क्या निहितार्थ है?
5. रैखिक फलनों से आप क्या समझते हैं ?
6. द्विधात फलनों से आप क्या समझते हैं ?
7. चरघातांकी और लघुगणकीय फलनों में अंतर स्पष्ट कीजिए।
8. साधारण लघुगणकीय और प्राकृतिक लघुगणकीय फलनों में क्या अंतर है?

5.3 फलन और कार्तीय निर्देशांक

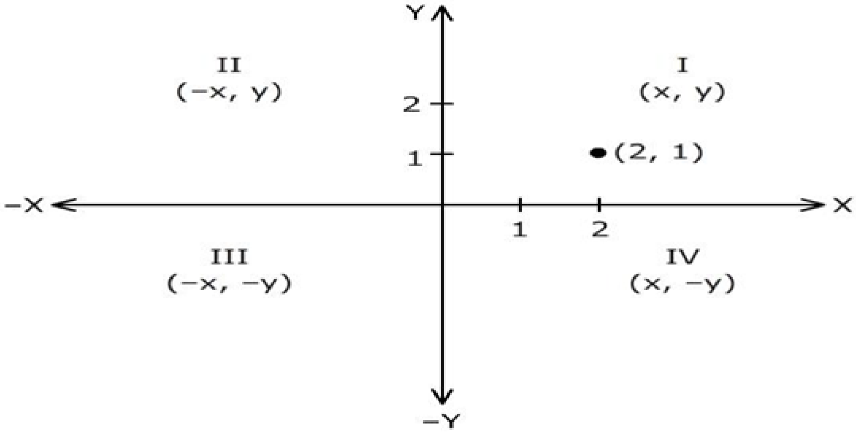
हम पहले ही देख चुके हैं कि फलन एक तकनीकी शब्द है जो चरों के बीच संबंधों को परिभाषित करने में प्रयुक्त होता है। कोई चर y चर x का फलन कहलाता है, यदि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक निश्चित मान हो।

उदाहरणार्थ, $y = 2x + 3$, जहाँ

x स्वतंत्र चर है और y आश्रित चर है, क्योंकि इसका मान x के मान पर आश्रित रहता है।

चरों के बीच फलनक (functional) संबंध को बेहतर रूप में समझने के लिए, आइए कार्तीय निर्देशांक पद्धति पर वापिस आ जाएँ, जो एक क्षैतिज रेखा और एक ऊर्धाधर रेखा से निर्मित होता है तथा ये दोनो रेखाएँ परस्पर, लंब होती हैं (आकृति 3 को

देखिए)। याद कीजिए कि ये रेखाएँ निर्देशांक अक्ष कहलाती हैं। वह बिन्दु जहाँ ये परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं मूलबिंदु (original) कहलाता है। क्षैतिज अक्ष या x- अक्ष से किसी बिदुं की दूरी y- निर्देशांक (कोटि) (orginate) कहलाती है। तथा y- अक्ष से उस बिदु की दूरी x- निर्देशक (भुज) (obscissa) कहलाती है। y- अक्ष के दाईं ओर x-निर्देशांक घनात्मक होते है तथा y अक्ष के बाईं और x निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं। x- अक्ष के ऊपर y – निर्देशांक धनात्मक होते हैं तथा उसके नीचे की ओर ऋणात्मक होते हैं।



आकृति 5.3 : कार्तीय निर्देशांक पद्धति

प्रत्येक चतुर्थश (quadrant) में निर्देशाकों के चिह्न आकृति में दर्शाए गए हैं। ध्यान दीजिए कि चतुर्थांशों को वामावर्त (anticlockwise) संख्याएँ निर्दिष्ट की गई हैं।

निर्देशांक पद्धति में प्रत्येक बिंदु को संख्याओं के एक क्रमित युग्म के साथ जोड़ा गया है, जो उसके निर्देशांक कहलाते हैं। ये निर्देशांक मूलबिदु के सापेक्ष बिंदु की अवस्थिति दर्शाते हैं। उदाहरणार्थ, बिंदु (2,1) x – अक्ष पर 2 इकाई और y – अक्ष पर 1 इकाई की मूलबिदु से मापी गई दूरियों के अनुसार है।

बोध प्रश्न ख

1. कार्तीय निर्देशांक पद्धति क्या है ?
2. निदेशांक पद्धति में आप प्रत्येक बिंदु के बारे किस प्रकार वर्णन करेंगे ?
3. किसी बिंदु को क्षैतिज अक्ष पर लेकर आप क्या माप पाएँगे ?

5.4 कुछ फलनों के आलेख

किसी फलन को $y = f(x)$ के रूप में लिख कर, हम प्रॉंत के अवयवों (x_i) को स्वतंत्र चर तथा परिसर के अवयवों (y_i) को आश्रित चर के रूप में लेते हैं। इससे इसके आलेख को खींचते समय x और y के मानों के रिकार्ड करने में सहायता मिलती है।

5.4.1 सरल रेखा के प्रकारों के फलनों का आलेखन

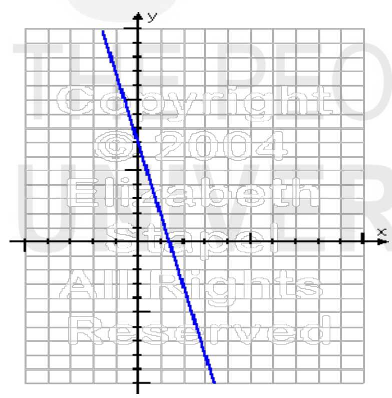
5.4.1.1 रैखिक फलन

किसी रैखिक फलन के आलेख को देखने के लिए, एक वस्तु के लिए उसके मूल्य (x) और बाजार मांग (y) के बीच संबध पर विचार कीजिए, जिसे प्रायः एक सरल रेखा से प्रदर्शित किया जाता है। इस संबंध के मूल्यांकन हेतु आलेख खींचने के लिए, एक सारणी तैयार करना सुविधाजनक रहता है जो t –चार्ट कहलाती है तथा इसमें प्रथम चरण के रूप में x और y के मान लिखे होते हैं। यदि कोई फलन $y = 7 - 5x$ के रूप का है, तो t –चार्ट नीचे दर्शाए अनुसार होगाः

सारणीः $y = 7 - 5x$ का t – चार्ट

x	$y = 7 - 5x$
–1	12
0	7
1	2
2	–3
3	–8

चार्ट के मानों के अनुसार बिंदुओं को आलेखित करने पर, हमें निम्नलिखित आलेख प्राप्त होता हैः



आकृति 5.4 : फलन $y = 7 - 5x$ का आलेख

स्रोतः इंटरनेट

इस आलेख का x- अंतः खंड *(intercept)* उस बिंदु पर है, जहाँ y शून्य है तथा y-अंतः खंड उस बिंदु पर है, जहाँ x शून्य है। उदाहरणार्थ, समीकरण $3x + 4y = 12$ के x और y अतः खंड ज्ञात करने के लिए इस प्रकार आगे बढ़िएः

x- अंतः खड ज्ञात करने के लिए $y=0$ रखिए और समीकरण को x के लिए हल कीजिए। अर्थात्,

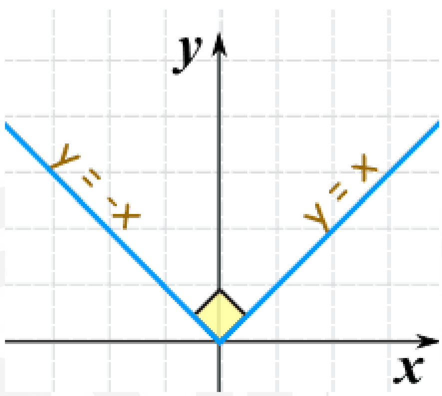
$3x + 4(0) = 12$ या $x = 12/3 = 4$

है। इसी प्रकार, y- अंतः खंड ज्ञात करने के लिए $x=0$ रखिए और समीकरण को y के लिए हल कीजिए। अर्थात्

$3(0) + 4y = 12$ या $y = 12/4 = 3$ है। इस प्रकार, x- अंतः खंड (4,0) है तथा y- अंत खंड (0,3) है।

5.4.1.2 निरपेक्ष मान फलन

निरपेक्ष मान फलन को $f(x) = |x|$ के रूप में दिया जाता है, जो यह सूचित करता है कि हमें किसी वास्तविक संख्या x के मापांक (modules) |x| पर विचार करने की आवश्यकता है। इसमें यह ध्यान रखा जाता है कि इसमें उसके चिह्न को छोडतें हुए ऋणेतर मान (non-negative value) ही लिया जाता है। अर्थात्, एक धनात्मक x के लिए $|x| = x$ होता है, एक ऋणात्मक $-x$ के लिए $|x| = -x$ होता हैं (इस स्थिति में $-x$ धनात्मक होता है।) तथा $|0| = 0$ होता है। इस प्रकार, 2 का निरपेक्ष मान 2 है तथा –2 का निरपेक्ष मान भी 2 है। ऐसे फलन का आलेख नीचे दर्शाए अनुसार होता है:



आकृति 5.5: निरपेक्ष मान फलन का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि $f(x) = |x - 2|$ द्वारा दिया जाने वाली कोई फलन f है। इसका $y-$ अंतः खंड $(0, f(0)) = (0, |-2|) = (0, 2)x$ द्वारा दिया जाता है तथा $x-$ अंतः खंड बिंदु (2,0) है, क्योंकि $|x - 2| = 0$ को हल करने पर हम $x = 2$ प्राप्त करते हैं। क्योंकि $x = 2$ के लिए $|x - 2|$ या तो धनात्मक है या शून्य है, इसलिए f का प्राँत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा f का परिसर अंतराल $[0, +\infty)$ द्वारा दिया जाता है।

5.4.1.3 पग फलन

एक पग फलन (step function) (या सोपान फलन) एक टुकड़ों अनुसार फलन होता है, जिसमें सभी अचर टुकड़े (pieces) अंतर्विष्ट होते हैं। ये अचर टुकडे इस फलन के आसन्न अंतरालों पर प्रेक्षित किए जाते हैं, जब वे एक अंतराल से अगले अंतराल तक मान बदलते हैं। एक पग फलन असंतत (discontinuous) (संतत नहीं) होता है। आप एक पग फलन के आलेख को अपने कागज पर से पेंसिल उठाए बिना खींच नही सकते हैं।

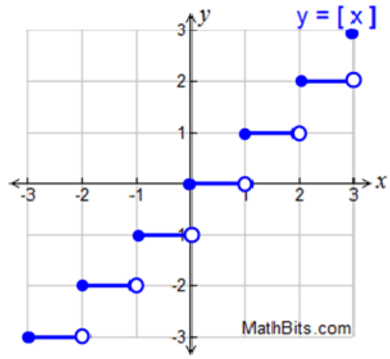
पग फलनों के अभिलक्षण हैं: आलेख पर विवृत वृत्त और/या संवृत वृत (विवृत = बिंदु आलेख पर नहीं; संवृत = बिंदु आलेख पर है);

- क्षैतिज टुकड़े

- असंतत (कागज से अपनी पेंसिल उठाए बिना खींचा नहीं जा सकता है।)
- एक फलन हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है।
- प्राँत : सभी वास्तविक संख्याएँ; परिसर सभी पूर्णांक; y– अंतः खंड $= 0$; x – अंतः खंड $= [0,1]$ है।

फलन

$f(x) = \begin{cases} -3; & x < 2 \\ 0; & -2 \le x \le 1 \\ 3; & x > 1 \end{cases}$ है। इसका आलेख नीचे दिया है:



आकृति 5.6: पग फलन का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

5.4.2 फलनों का आलेखन : वक्र प्रकार के

रैखिक फलनों के प्रकारों की तुलना में, उन फलनों की प्रकृति निर्धारित करने में जो वक्र बनाते हैं; अतिरिक्त जानकारियों की आवश्यकता हैं, जब आप सरल रेखा खीचते हं; तब इसके लिए केवल दो बिदुओं की आवश्यकता होती हैं यद्यपि आप सामान्यतः सुरक्षित पक्ष पर रहने के लिए, तीन या अधिक बिंदुओ को आलेखित करते हैं। परंतु द्विघात या त्रिघात फलनों की वक्रों को आलेखित करने के लिए तीन बिंदु निश्चित रूप से पर्याप्त नहीं होंगे।

5.4.2.1 द्विघात फलन

द्विघात फलन मांग, लागत, राजस्व और लाभ के वर्णन करने में सहायता करते हैं जिन्हें आप सूक्ष्मआर्थिक विश्लेषण का अध्ययन करते समय देखेंगे। द्विघात फलनों के आलेखन की व्यापक तकनीक वही है जो रैखिक समीकरणों के आलेखन में उपयोग की जाती है। परंतु क्योंकि द्विघात फलनों के आलेख रैखिक समीकरणों द्वारा जनित सरल रेखाओं के स्थान पर वक्र रेखाएँ (जिन्हें परवलय कहा जाता है) होती हैं: इसलिए इनके लिए कुछ अतिरिक्त जानकारियों की आवश्यकता होगी।

सबसे मूलतम द्विघात फलन $y = x^2$ है। हम इसका आलेख खींचने के लिए, निम्नलिखित T– चार्ट का उपयोग करेंगे:

सारणी: $y = x^2$ का T– चार्ट

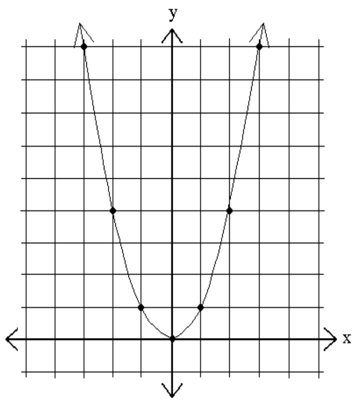
x	$y = x^2$
0	0
1	1
2	4

इस प्रयोग पर आधारित खींचा गया आलेख एक सरल रेखा प्रदान करेगा। इस प्रकार, यह आलेख दिए हुए फलन का सही प्रस्तुतिकरण नहीं है। हमें और अधिक बिंदुओं का लेने की आवश्यकता है। उपरोक्त सारणी और अधिक बिंदुओं के साथ विस्तृत करने पर, हम निम्नलिखित सारणी बनाते हैं:

सारणी: $y = x^2$ का T– चार्ट

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

इस सारणी से, हम निम्नलिखित आलेख खींचते हैं:



आकृति 5.7 : समीकरण $y = x^2$ का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

देखिए, यह आलेख एक परवलय (parabola) है।

ध्यान दीजिए कि परवलय की एक अचर प्रवणता (slope) नहीं होती है। वस्तुतः, जब $x = 0$ से प्रारंभ करते हुए, x में 1 की वृद्धि होती जाती है, तब y में 1,3,5,7....... की वद्धि होती जाती है। जब $x = 0$ से प्रारंभ हुए, x में 1 की कमी होती जाती है, तब y में पुनः 1,3,5,7............ की वृद्धि होती जाती है।

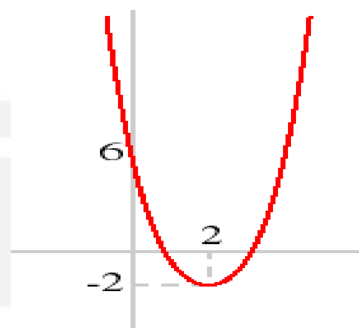
अब, $f(x) = ax^2 + bx + c$ के रूप के द्विघात फलन पर विचार कीजिए, जहाँ $a \neq 0$. ऐसे फलन का आलेख, a के चिह्न पर निर्भर करता हुआ, नीचे आकृति में दर्शाए दोनों व्यापक रूपों में से एक रूप ले लेता है:

$a > 0$ के साथ एक द्विघात फलन $\qquad$ $a < 0$ के साथ एक द्विघात फलन

आकृति 5.8: द्विघात फलन का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

उदाहरण के लिए, आइए फलन $y = 2x^2 - 8x + 6$ का आलेख खींचे। x^2 का गुणांक धनात्मक है। इसलिए यह आलेख $U -$ आकार का है। इस फलन का आलेख आकृति में खींचा गया है:



आकृति 5.9: फलन $y = 2x^2 + 8x + 6$ का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

शीर्ष का अभिकलन

एक व्यापक द्विघात व्यंजक $y = ax^2 + bx + c$ पर विचार कीजिए। इस समीकरण में वर्ग पूर्ण करने की प्रक्रिया से प्रारंभ करिए, ताकि

$$y = a[x^2 + bx/a + c/a] \text{ or}, y = a[(x + b/2a)^2 - (b/2a)^2 + c/a]$$

या हो। व्यंजक या $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c/a$ एक अचर है तथा यह x पर निर्भर नहीं करता है। इसलिए हमें इसे k से प्रतिस्थापित कर सकते हैं। इस प्रकार, हम

$y = a[(x + b/2a)^2 + k]$ लिखते हैं।

अब, इस पर निर्भर करते हुए कि a धनात्मक है या ऋणात्मक, y द्वारा दिए जाने वाले परवलय का अधिकतम या न्यूनतम होगा। क्योंकि a और k अचर हैं; इसलिए यह तभी होना चाहिए, जब $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ हो अत:, $x = -b/2a$ है।

जिसका तात्पर्य है कि जब यह सत्य होगा, तब फलन एक न्यूनतम या अधिकतम पर होगा।

क्योंकि ये परवलय एक ऊर्ध्वाधर के सापेक्ष सममित होते हैं इसलिए आइए इस रेखा को $x = k$ कहें। इसका अर्थ है कि यदि आलेख $x -$ अक्ष को काटता है, तो $ax^2 + bx + c = 0.$ के वास्तविक मूल होने के लिए, ये दोनों $x = k$ से समदूरस्था

होने चाहिए। अतः $k = 0$ को उस रेखाखंड का मध्य बिंदु होना चाहिए, जिसके अंत बिंदु द्विघात व्यंजक के शून्यकों, $(zeroes)$पर है। अर्थात् k इन शून्यकों का औसत होगा। द्विघात सूत्र से, इस द्विघात व्यंजक के दोनों शून्यक $\frac{-b\pm\sqrt{b^2}-4ac}{2a}$ हैं। अतः, इनका योग $\frac{-b}{a}$ तथा इनका औसत $k = -\frac{b}{2a}$ है। इसका अर्थ है कि शीर्ष $(\boldsymbol{vertex})$ का x –निर्देशांक $-\frac{b}{2a}$ है।

उदाहरण 12: परवलय $y = 3x^2 + x - 2$ का शीर्ष ज्ञात कीजिए तथा इसका आलेख भी खींचिए।

$h = \frac{-b}{2a} = -\frac{-(1)}{2 \times 3} = -\frac{1}{6}$ है।

उत्तर: शीर्ष ज्ञात करने के लिए, गुणाकों a, b और C पर दृष्टि डालिए।

शीर्ष के सूत्र से प्राप्त होता है:

$h = \frac{-b}{2a} = -\frac{-(1)}{2 \times 3} = -\frac{1}{6}$ है।

फिर $h = -1/6$ पर y का मान निकालने से k प्राप्त होता है।

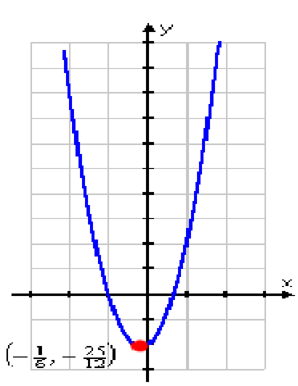
अतः,

$k = 3(-1/6)^2 + (-1/6) - 2 = 3/36 - 1/6 - 2 = 1/12 - 2/12 - 24/12 = -25/12$ है।

क्योंकि शीर्ष $(-\frac{1}{6}, -\frac{25}{12})$ पर है, इसलिए T- चार्ट को इस प्रकार तैयार किया जा सकता है:

x	$y = 3x^2 + x - 2$
-2	8
-1	0
0	-2
1	2
2	12

विशिष्ट शीर्ष के साथ आलेख को नीचे दर्शाए अनुसार खींचा जा सकता है:



आकृति 5.10 : $y = 3x^2 + x - 2$

स्रोत: इंटरनेट

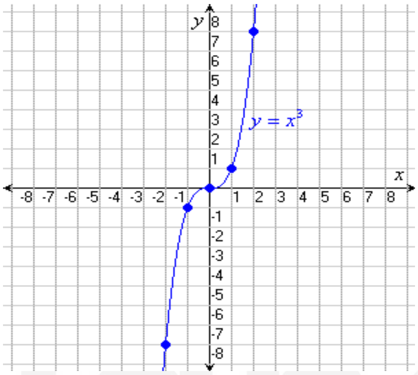
5.4.2.2 त्रिघात फलन

त्रिघात फलनों (cubic functions) का सामना, हमें सूक्ष्मआर्थिक विश्लेषण में कुल लागत की चर्चा करते समय करना पड़ता है।

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

के रूप में एक त्रिघात फलन पर विचार कीजिए। इसका आलेख नीचे दिए हुए अनुसार है:

'मूलभूत' त्रिघात फलन $f(x) = x^3$ होता है। इसका आलेख है:



आकृति 5.11: त्रिघात फलन का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

माल लीजिए कि कोई त्रिघात फलन $f(x) = x^3$ द्वारा दिया जाता है।

क) f के आलेख के x और y अंतः खंड ज्ञात कीजिए।

ख) f के प्रॉंत और परिसर ज्ञात कीजिए।

ग) f का आलेख खींचिए।

क) y अंतः $(0, f(0) = (0,0)$ खंड द्वारा दिया जाता है। x अंतः खंडों के x निर्देशांक $x^3 = 0$ के हल हैं। अंतः खंड बिंदु (0,0) पर है।

$f(x)$ का प्रॉंत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। क्योंकि x^3 का अग्र या अगला गुणांक धनात्मक है, इसलिए f का आलेख दाएँ पक्ष में ऊपर की ओर है तथा बाएँ पक्ष में नीचे की ओर है तथा इसीलिए f का परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(ग) मानों की सारणी है:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^3$	−8	−1	0	1	8

अब, इन मानों से आलेख खींचा जा सकता है।

5.4.3 फलनों का आलेखन : अनंतस्पर्शी प्रकार के

हम चरघातांकी वृद्धि मॉड्लों, जैसे जनसंख्या वृद्धि और चक्रवृद्धि ब्याज से परिचित हैं। इस प्रकार के व्यवहार प्रदर्शित करने वाले फलनों का उपयोग इन आलेखों को देखने में किया जाएगा।

5.4.3.1 वर्गमूल फलन

जैसा के नाम इंगित कर रहा है, हम एक चर x लेते हैं तथा इस फलन को $f(x) = \sqrt{x}$ के रूप में लिखते हैं।

क्योंकि f का प्राँत सभी धनात्मक संख्याओं और शून्य का समुच्चय है 'इसलिए हम मानों की सारणी नीचे दर्शाए अनुसार बना सकते है':

x	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	1	2	3	4

इनका आलेख खींचने पर निम्नलिखित आकृति प्राप्त होती है:

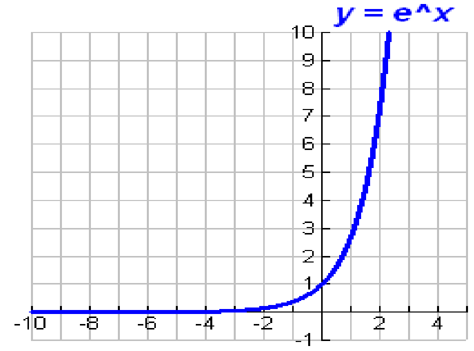
आकृति 5.12: वर्गमूल फलन का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

5.4.3.2 चरघातांकी फलन

$x \rightarrow e^x$ के रूप के प्राकृतिक चरघातांकी पर विचार कीजिए, जहाँ e ऑयलर संख्या (Euler number) है, जो लगभग 2.718281828 के बराबर एक अबीजीय संख्या है। क्योंकि x एक घातांक है और घातांक कोई भी वास्तविक संख्या हो सकता है, इसलिए इसका प्राँत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। परिसर इसके y - मान हैं। क्योंकि आलेख x - अक्ष को प्रतिच्छेद नहीं करता है और x - अक्ष के नीचे भी नहीं जाता है, इसलिए इसके y - मान न तो शून्य होंगे और न ही ऋणात्मक होंगे। इसका आलेख नीचे दिया गया है।

एक आलेख इस प्रकार खीचिए कि आलेख के किसी भी बिंदु (x,y) पर प्रवणता y, अर्थात् उस बिंदु के ऊर्ध्वाधर निर्देशांक के बराबर हो। ध्यान दीजिए कि आलेख पर बिंदु जितना ऊपर होता जाता है (जितना y का मान बड़ा होता जाता है), उतनी ही प्रवणता लम्बवत् होती जाती है। अतः, हम इस आलेख को बिंदु (x, y) =(0, 1) (जहां आलेख की प्रवणता 1 के बराबर है) से बनाना प्रारंभ करते हैं। इस प्रकार, जैसे–जैसे हम दाईं ओर को चलते है; आलेख ऊपर की ओर चलना प्रारंभ कर देता है। आप देखेंगे कि जैसे–जैसे आप बाईं से दाईं ओर को आलेख खींचते हैं; यह तीव्रता तथा और तीव्रता से ऊपर चढ़ता रहता है।



आकृति 5.13: चरघातांकी फलन का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

5.4.3.3 लघुगणकीय फलन

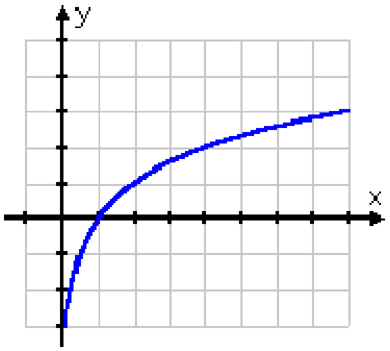
जैसे–जैसे चर में वृद्धि होती जाती है, लघुगणकीय फलन धीरे–धीरे धनात्मक अनंत (infinity) को ओर जाता रहता है, तथा चर के 0 की ओर अग्रसर होने पर यह धीरे–धीरे ऋणात्मक अनंत की ओर जाता रहता है। $y = log_b x$, जहां b कोई संख्या है ताकि $b > 0, b \neq 1$, और

$x > 0$ द्वारा दिए जाना वाला फलन लघुगणकीय फलन कहलाता है। इस फलन को b of x आधार b पढ़ा जाता हैं। इसका आलेख x, अक्ष को *(1,0)* पर काटता हैं जब $b > 0$ है, तब आलेख में वृद्धि होती है। (वर्धमान है) तथा $0< b< 1$ आलेख में कमी होती ह्रासमान है।)

लघुगणकीय फलन में प्राँत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय (शून्य कभी नहीं) है, जबकि परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। इसका आलेख y –अक्ष के साथ अनंतस्पर्शीय (asymptotic) होता है, अर्थात् y –अक्ष के बहुत तथा और बहुत निकट होता जाता है, परंतु न तो इसे स्पर्श करता है और न ही इसे काटता है। अब,

- प्राँत : $(0, \infty)$
- परिसर : $(-\infty, \infty)$
- x अंतः खंड : $(1, 0)$
- वर्धमान $(increasing)$

के साथ $y = log_b\, x, b > 1$ के आलेख को नीचे देखा जा सकता है :



आकृति 5.14 : लघुगणकीय फलन का आलेख

स्रोत: इंटरनेट

बोध प्रश्न ग

1. $y = (-5/3)x - 2$ का आलेख खींचिए।
2. ऐसे दो आलेखो की सूची दीजिए, जो वक्र के प्रकार के हैं।
3. किसी लघुगणकीय फलन के आलेख द्वारा लिए गए आकार का आप किस प्रकार वर्णन करेंगे ?
4. एक शीर्ष क्या होता है ?

5.5 व्यापार और अर्थशास्त्र से संबंधित फलन

हाल के वर्षों में, आर्थिक निर्णय लेना अधिक तथा और अधिक गणितीय आधारित होता जा रहा है सैकड़ों या यहाँ तक कि हजारों विभिन्न चरों पर आश्रित साँख्यिकी आँकड़ों के बड़े समूहों का सामना करते हुए, व्यापार विश्लेषक और अर्थशास्त्री इन आँकड़ों की व्याख्या करने कि क्या हो रहा है, विभिन्न नीति विकल्पों की प्रागुक्ति करने तथा बड़ी संख्या में विद्यमान संभावनाओं में से विवेकपूर्ण कार्य प्रक्रियाएँ चुनने में सहायता के लिए निरंतर गणितीय विधियों की ओर देख रहे हैं। इस अनुच्छेद में, कुछ फलनों की चर्चा की जाएगी जो व्यापार और अर्थशास्त्र में बहुत उपयोगी हैं।

5.5.1 माँग फलन

माँग मूल्य का एक फलन है। किसी माल के प्रत्येक मूल्य स्तर के लिए, मांगी गई एक संगत राशि है जिसकी ग्राहक माँग करेगा। यदि p प्रति इकाई मूल्य है तथा उस माल के लिए x माँग है, तो माँग फलन को $x= f(p)$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ x आश्रित चर है और p स्वतंत्र चर है। यहाँ, x और p धनात्मक हैं; क्योकि ऋणात्मक मूल्य और राशि अर्थहीन हैं। सामान्यतः मूल्य और माँग के बीच एक ऋणात्मक और रैखिक संबंध होता है।

5.5.2 आपूर्ति फलन

आपूर्ति मूल्य का एक फलन है। किसी माल के प्रत्येक मूल्य स्तर के लिए, निर्माता द्वारा एक संगत राशि आपूर्तित की जाती है। यदि किसी माल के लिए, p प्रति इकाई मूल्य है और x आपूर्ति है, तो आपूर्ति फलन $x= g(p)$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ x अश्रित चर है और p स्वतंत्र चर है। यहाँ x और p धनात्मक हैं, क्योंकि ऋणात्मक मूल्य और राशि अर्थहीन हैं। सामान्यतः मूल्य और आपूर्ति में एक धनात्मक और रैखिक संबंध होता है।

5.5.3 लागत फलन

कुल लागत निश्चित लागत (FC) और चर लागत (VC) के योग के बराबर होती है निश्चित लागत (fixed cost) सभी लागत का योग होती है, जो बहिर्वेश के स्तर से स्वतंतत्र होती है, जैसे किराया, स्थायी कर्मचारियेां के वेतन, इत्यादि। चर लागत बहिर्वेश पर आश्रित होती है। यह बहिर्वेश में वृद्धि के साथ बढ़ती है तथा इसका विलोम भी सही है। इसके उदाहरण कच्चा माल, अस्थायी कर्मचारियों के वेतन इत्यादि है। माल लीजिए कि C कुल लागत है। तब कुल लागत फलन को $C= C(x)$ के रूप में परिभाषित किया जाता हैं जहाँ x बहिर्वेश की कुल इकाइयाँ हैं।

5.5.4 राजस्व फलन

राजस्व फलन (Revenue function) वस्तु के मूल्य और बेचे गए बहिर्वेश के बीच संबंध दर्शाता है। यदि किसी बहिर्वेश की x इकाइयों को p प्रति इकाई के मूल्य पर बेचा जाता है। तो राजस्व फलन को R(x) = x p द्वारा दिया जाता हैं

5.5.5 लाभ फलन

लाभ फलन को अर्जित किए गए लाभ तथा निवेश और बहिर्वेश के मूल्यों द्वारा निगमित किया जाता है। यदि R(x) और C(x) क्रमशः कुल राजस्व और लागत फलन हैं, तो लाभ फलन P(x) = R(x) – C(X) होता है, जहाँ P(x) = लाभ है तथा x बहिर्वेश की इकाइयाँ हैं। वह बिंदु जहाँ बिक्री से राजस्व उत्पादन की लागत के बराबर हो, विच्छेद–सम बिंदु (break-even point) कहलाता है। अर्थात् न कोई लाभ और न कोई हानि बिंदु। दूसरे शब्दों में, लाभ शून्य के बराबर होता है। अर्थात् कुल राजस्व कुल लागत के बराबर है।

5.5.6 खपत फलन

यह प्रस्तावित किया जाता है कि खपत राष्ट्रीय आय का एक फलन है। यदि किसी अर्थव्यवस्था में C कुल खपत को व्यक्त करता है तथा बिंदु कुल राष्ट्रीय आय को व्यक्त करता है, तो C= f(Y) खपत फलन कहलाता है।

उदाहरण 13: कोई व्यापारी प्रति मास 2000 वस्तुएँ ₹10 प्रति वस्तु के मूल्य पर बेचता हैं यह आकलन किया गया है कि मूल्य में से प्रति वस्तु ₹ 0.25 घटाने पर मासिक बिक्री में 250 वस्तुओं की वृद्धि हो जाएगी। इस आकलन के संगत मांग फलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर: आकलने से, प्रारंभिक मूल्य ₹ 10 में से प्रत्येक ₹ 0.25 कमी से 250 इकाइयों की वृद्धि होती है। इसके निम्नलिखित समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया जाता है:

$X = 2000 + (\frac{10-p}{0.25})$

$= 1200 - 1000p$

या, $p = 12 - \frac{x}{1000}$ है।

बोध प्रश्न घ

1. एक मांग फलन क्या होता है ?
2. आप एक राजस्व फलन का वर्णन किस प्रकार करेंगे ?
3. आप एक खपत फलन को सूत्रित किस प्रकार करेंगे ?

5.6 सारांश

इस इकाई में, हमने आर्थिक और व्यापार प्रकरणों के अध्ययनों में प्रयुक्त होने वाले गणितीय फलनों को एक बृहत समझ के साथ प्रारंभ किया है, जो चरों के बीच संबंधों को परिभाषित करने में प्रयोग की जाती है। कोई चर y एक अन्य चर x का फलन कहलाता है, यदि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक निश्चित मान हो। फलनों के प्रकारों पर आकर, हमने इन्हें बीजीय (जिनमें साधारण संख्याएँ, चर तथा योग,

व्यवकलन गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ सम्मलिति हैं) तथा अबीजीय (जो बीजीय संक्रियाओं के परमित संयाजेन के रूप में व्यक्त नहीं किए जा सकते) प्रकारों में वर्गीकृत करने का प्रयास किया है। इसके बाद, हमने कुछ महत्वपूर्ण फलनों के आलेखों के बारे जानकारी प्राप्त की है। इस इकाई कें अंत में; मांग, आपूर्ति, लागत, राजस्व, लाभ और खपत के प्रकरणों में फलनों के अनुप्रयोगों की एक संक्षिप्त प्रारंभिक चर्चा गई है।

5.7 शब्दावली

बीजीयः व्यंजक या समीकरण जिनमें केवल योग, व्यवकलन, गुणन विभाजन ओर अचर परिमेय घातंकों के साथ घातांकीकरण का उपयोग करते हुए, एक परिमित संख्या वाले प्रतीकों (या चिह्नों) को सयोजित किया जाता है।

अनंतस्पर्शीः एक वक्र या एक रेखा जो निकटतर होती जाती है, परंतु प्रतिच्छेद नहीं करती है।

सहप्राँतः किसी फलन के सभी संभव बहिर्वेश मान।

प्राँतः स्वतंत्र चरों का समुच्चय, जिनके लिए कोई फलन या संबंध परिभाषित है।

क्रमित युग्मः दो अवयव, मान लीजिए, निवेश और बहिर्वेश (a,b), जिन्हें एक क्रम का पालन करना है, ताकि निवेश सदैव पहले आए तथा बहिर्वेश बाद में आए।

परवलयः एक वक्र जिस पर स्थित प्रत्येक बिंदु किसी निश्चित बिंदु और किसी निश्चित रेखा से बराबर दूरी पर रहता है।

परिसरः किसी फलन के सभी बहिर्वेश मान।

परिमेय संख्याः वह संख्या जिसे दो पूर्णाकों के अनुपात में व्यक्त किया जा सके।

वास्तविक संख्याः एक मान जो किसी संख्या रेखा के अनुदिश एक राशि निरूपित करता है।

अबीजीयः एक फलन जो अबीजीय है, अर्थात् जिसे बीजगणित के पदों में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

शीर्षः एक कोना या एक बिंदु जहाँ रेखाएँ मिलती हैं।

5.8 बोघ प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. फलन एक तकनीकी शब्द है, जो चरों के संबंधो को परिभाषित करने में प्रयुक्त किया जाता है।

2. किसी फलन में स्वतंत्र चर के सभी मानों का समुच्चय उस फलन का प्राँत कहलाता है तथा आश्रित चर के सभी मानों का समुच्चय उस फलन का परिसर कहलाता है।

3. किसी फलन f का एक प्रतिलोम फलन केवल तभी होता है, जब उसके परिसर के प्रत्येक y के लिए उसके प्राँत में x का केवल एक मान हो, जिसके लिए $f(x) = y$ है।

4. संयुक्त फलन का तात्पर्य एक फलन का अन्य फलन के परिणामों में अनुप्रयोग करना है।

5. रैखिक फलन उच्चतम घात 1 वाले फलन होते है, जिनके आलेख एक सरल रेखाएँ होती है।

6. उच्चतम घात 2 वाले फलन

7. लघुगणकीय और चरघातांकी फलन एक दूसरे के प्रतिलोम होते हैं।

8. आधार 10 वाले लघुगणक साधारण लघुगणक कहलाते हैं तथा प्राकृतिक आधार वाले लघुगुणक प्राकृतिक लघुगणक कहलाते हैं।

(ख)

1. वह पद्धति जो परस्पर दो लांबिक क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं से बनती है।

2. संख्याओं के क्रमित युग्मों द्वारा, जो निर्देशांक कहलाते हैं।

3. ऊर्ध्वाधर अक्ष या y - अक्ष से दूरी (भुज)।

(ग)

1. उपअनुच्छेद 5.4.1.1 पढ़ंने के बाद स्वयं करें।

2. द्विघात और त्रिघात फलन

3. जैसे–जैसे चर में वृद्धि होती है, लघुगणकीय फलन धीर–धीरे धनात्मक अनंत की ओर बढ़ता जाता है तथा जब चर 0 की ओर अग्रसर होता है, तब यह धीरे–धीरे ऋणात्मक अनंत की ओर जाता है।

(घ)

1. मांगी गई राशि और वस्तु के मूल्य के बीच संबंध। यह अभिगृहीत किया जाता है कि राशि की मांग मूल्य पर आश्रित (निर्भर करती) है।

2. अर्जित राजस्व बेची गई वस्तु के मूल्य पर निर्भर करता है।

3. खपत को आश्रित चर तथा आय को स्वतत्र चर लेकर।

4. ऐसे प्रत्येक परवलय की एक ऊर्ध्वाधर सममिति अक्ष होती है तथा एक घुमाव वाला बिंदु (turning point) होता है, जो शीर्ष कहलाता है।

5.9 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

1. कोई व्यापारी प्रति मास 2000 वस्तुएँ 10 रु प्रति वस्तु के मूल्य पर बेचता है। यह आकलन किया गया है कि मूल्य में प्रति वस्तु 0.25 रु. घटाने पर मासिक बिक्री में 250 वस्तुओं की वृद्धि की जाएगी। इस आकलन के सगंत मांग फलन ज्ञात कीजिए।

2. मान लीजिए कि किसी वस्तु को निर्मित करने की लागत रैखिक होने की जानकारी है। लागत को बहिर्वेश के एक फलन के रूप में ज्ञात कीजिए, यदि लागत 250 इकाइयों के लिए ₹ 4000 है तथा 350 इकाइयों के लिए ₹ 5000 है।

3. कोई गारमेंट निर्माता टी शर्टों एक नई किस्म के निर्मित करने की योजना बना रहा है। इसमें प्रारंभिक रूप से ₹1.5 लाख की एक निश्चित लागत तथा प्रत्येक शर्ट को निर्मित करने के लिए ₹150 की चर लागत संबद्ध है। यदि प्रत्येक शर्ट को ₹350 के बेचा जा सकता है, तो ज्ञात कीजिए:

   i) लागत फलन

   ii) राजस्व फलन

   iii) लाभ फलन और

   iv) विच्छेद –सम बिंदु

4. मान लीजिए कि उत्पाद की मांग 60 इकाई है जब उसका मूल्य ₹18 प्रति इकाई है तथा 40 इकाई है, जब उसका मूल्य ₹28 प्रति इकाई है। मांग फलन यह कल्पना करते हुए ज्ञात कीजिए कि वह रैखिक है।

5. यदि किसी वस्तु का इकाई मूल्य ₹5 है, तो उसकी दैनिक आपूर्ति 100 होगी। जब यह मूल्य बढ़ कर ₹10 हो जाता है, तब दैनिक आपूर्ति 200 पाई जाती है। आपूर्ति फलन यह कल्पना करने हुए ज्ञात कीजिए कि वह रैखिक है।

6. कोई कंपनी, इलेक्ट्रोनिक घडियाँ निर्मित करने के लिए एक छोटे निर्माण प्लांट को स्थापित करने का निर्णय लेती है। प्रारंभिक स्थापन के लिए कुल लागत (निश्चित लागत) ₹9 लाख है। अतिरिक्त लागत (अर्थात् चर लागत) प्रत्येक घड़ी को निर्मित करने के लिए ₹300 है। प्रत्येक घड़ी को ₹750 पर बेचा जाता है। पहले मास में 1500 घड़ियाँ निर्मित की गईं और बेची गईं।

   i) x घड़ियों को निर्मित करने के लिए कुल लागत हेतु, लागत फलन C(x) निर्धारित कीजिए।

   ii) x घड़ियों की बिक्री से प्राप्त कुल राजस्व के लिए, राजस्व फलन R(x) निर्धारित कीजिए।

   iii) x घड़ियों की बिक्री से प्राप्त लाभ के लिए, लाभ फलन P(x) निर्धारित कीजिए।

   iv) पहले मास में जब सभी 1500 घड़ियाँ बेच दी गईं थीं, तब कंपनी को क्या लाभ या हानि हुई ?

   v) विच्छेद – सम बिंदु ज्ञात कीजिए।

7. कोई निर्माता पहले मास में ₹ 5500 तथा दूसरे मास में ₹ 7000 अर्जित करता है। इन बिदुंओं को आलेखित करने पर, निर्माता यह प्रेक्षित करता है कि उन आँकड़ों के लिए एक रैखिक फलन बन सकता है।

   i) वह रैखिक फलन ज्ञात कीजिए, जो इन आँकड़ों से बन सकता है।

ii) अपने इस मॉड्ल के उपयोग से चौथे मास की अर्जित राशि की प्रागुक्ति कीजिए।

8. कोई सेल्समेन पहले सप्ताह में ₹ 380 अर्जित करता है, दूसरे सप्ताह में 660 रु तथा तीसरे सप्ताह में ₹ 860 अर्जित करता है। बिंदुओं (1,380), (2,660) और (3, 860) को आलेखित करने पर, सेल्समेन यह अनुभव करता है कि इन आँकड़ो के लिए एक द्विघात फलन बनाया जा सकता है।

   i) आँकड़ों के लिए बनाया जाने वाला द्विघात फलन ज्ञात कीजिए।

   ii) इस मॉड्ल को उपयोग करते हुए, चौथे सप्ताह में अर्जित की जाने वाली राशि की प्रागुक्ति कीजिए।

9. कोई फर्म एक नया उत्पाद लॉन्च (launch) करना चाहती है। वह यह प्रेक्षित करती है कि इस नए उत्पाद की निश्चित लागत ₹35000 है तथा चर लागत प्रति इकाई ₹500 है। इस नए उत्पाद का राजस्व फलन $5000x - 100x^2$ है। ज्ञात कीजिए:

   i) लाभ

   ii) विच्छेद–सम मान

   iii) x के वे मान जिनसे हानि होती है।

उत्तरः

1. p= 12- x/1000; x>2000

2. C (x)= 10x +1500

3. i)C (x)= 150000 +150x; ii)R(x) = 350x iii) P(x) =200x – 150000 iv) 750

4. p = 48 –(1/2) x

5. p = (1/20) x.

6. i) C(x) = 900000 + 300x

   ii) R(x) = 750x

   iii) 450x – 900000

   iv) P(1500) = - 225000

   v) x = 2000

7 (i) y = mx + c, लीजिए, जहाँ y अर्जित की गई राशि व्यक्त करता है, x मासों को व्यक्त करता है तथा m और c अचर हैं। दिए हुए आँकडों से,

$$5500 = m + c \qquad (\ldots 1)$$

$$7000 = 2m + c \qquad (\ldots 2)$$

इनको इल करके 1500 = m और c = 4000 प्राप्त कीजिए।

तब रैखिक समीकरण $y = 1500x + 4000$

iii) चौथे मास लिए, अर्जित राशि

$y = 1500 \times 4 + 4000$

$= 6000 + 4000 = 10000$ है।

8 (i) मान लीजिए द्विघात फलन $y= ax^2 + bx + c$ है,

जहाँ y अर्जित राशि व्यक्त करता है तथा x सप्ताहों को व्यक्त करता है।

उपरोक्त आँकड़ों से प्राप्त करते है:

$$380 = a.\ 1^2 + b.\ 1 + c$$

$$660 = a.\ 2^2 + b.\ 2 + c$$

$$860 = a.\ 3^2 + b.\ 3 + c$$

इनको हल करके $a= -40$, $b = 400$ और $c= 20$.

प्राप्त कीजिए।

अत; वाँछित फलन $y = -40\ x^2 + 400\ x + 20$ है।

ii) चौथे सप्ताह की अर्जित राशि

$y = -40 \times 16 + 400\ x\ 4 + 20 =$ ₹ 980 है।

9. (i) दिया हुआ $R(x) = 5000x - 100x^2$ (राजस्व फलन)

$C(x) = FC + VC$ (लागत फलन)

$= 35000 + 500x$

$P(x) = R(x) - C(x)$ (लाभ फलन) $= 5000x - 100x^2 - (35000 + 500x)$

$= -100x^2 + 4500x - 35000$

ii) विच्छेद –सम मानों के लिए, $P(x) = 0$

$P(x)= -100x^2 + 4500x - 35000 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 45x + 350 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x-35) = 0$$

$$\Rightarrow x= 10,35$$

iii) हानि देने वाले मानों के लिए $P(x)<0$ है।

$\Rightarrow\ -100x^2 + 4500x - 35000 < 0$

अर्थात् $(x-10)(x-35) < 0$

यह तभी संभव है, जब $x<10$ और $x>35$ है।

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

5.10 संदर्भ पुस्तकें

- Allen, R.G.D., "Mathematical Analysis for Economists", London: English Language Book Society and Macmillan, 1974.
- Bhardwaj, R.S.,"Mathematics for economics and Business", Delhi: Excel Books, 2005.
- Dowling, Edward,T. "Schaum's Outline Series: Theory and Problems of Mathematics for Economists", New York: McGraw Hill Book Company, 1986.
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Archibald, G.C., Richard G.Lipsey. "An Introduction to A mathematical Treatment of Economics", Delhi: All India Traveller Bookseller, 1984
- Yamane, Taro, "Mathematics for Economists: An Elementary Survey",New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited, 1970.
- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, Pearson Educational Asia, Delhi, 2002.

इकाई 6 सीमा और सांतत्य

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बादः

- किसी फलन की सीमा की संकल्पना को समझ पाएँगे तथा
- संतत फलन की संकल्पना को स्पष्ट कर पाएँगे।

6.1 प्रस्तावना

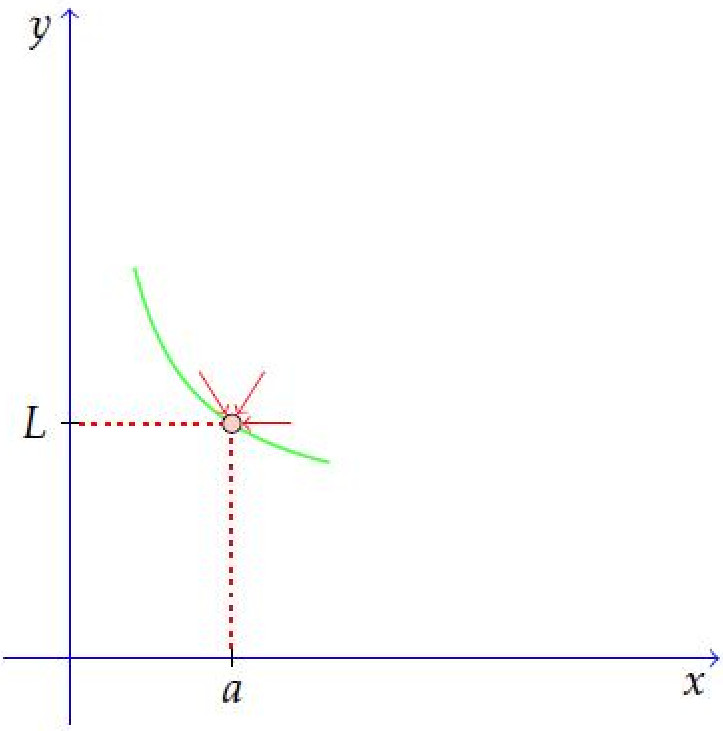
वर्तमान इकाई में दो मूलभूत संकल्पनाओं सीमा और सांतत्य की चर्चा की जाएगी, जो बृहत रूप से अवकल कैलकुलस में उपयोग की जाती हैं। हम इन दोनों प्रकरणों पर एक साथ विचार करेंगे, क्योंकि सीमा की संकल्पना सांतत्य की संकल्पना से निकटतम रूप से जुड़ी हुई है। बाद में, हम देखेंगे कि कोई फलन एक बिंदु पर संतत (continuous) होता है, यदि उस फलन की सीमा का उस बिंदु पर आस्तित्व हो तथा वह फलन के संगत मान के बराबर हो।

फलनों की सीमाओं की धारणा

जब हमने पिछली इकाई में फलनों के बारे में चर्चा की थी, तब हमने विशिष्ट बिंदुओं पर फलनों के मानों को देखने का प्रयास किया था। उदाहरणार्थ, हमारा सरोकार यह था कि $f(x)$ का मान $x=1$ पर (मान लीजिए) क्या है।

सीमा (limit) के पीछे धारणा यह है कि उस मान का विश्लेषण करना जिस ओर वह फलन है 'अग्रसर' कर रहा (approaching) है, जब निवेश एक विशिष्ट मान की ओर

'अग्रसर होता' है। इस धारणा की सराहना के लिए, निम्नलिखित आलेख 1 पर विचार कीजिए:



आकृति 6.1 : सीमा का सन्निकटन (approximation)

यह देखा जा सकता है कि जब x- अक्ष में x मान "a" की ओर अग्रसर होता है, तब y- अक्ष में फलन $f(x)$ "L" की ओर अग्रसर होता है। आइए बिंदु (a, L) पर छिद्र $(hole)$ की ओर ध्यान दें, जो एक छोटे वृत्त के रूप दिया गया है। इस क्षेत्र के इर्दगिर्द, हमें आवश्यक रूप से $x = a$ पर फलन f का मान ज्ञात नहीं है। अर्थात् हम फलन का यथार्थ $(exact)$ मान नहीं निकाल सकते हैं; परंतु यह देख सकते है कि जैसे–जैसे हम निकटतर तथा और निकटतर होते जाते हैं, तब यह क्या होना चाहिए। ऐसी स्थिति को $\lim_{x \to a} f(x) = a$ के रूप में व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 1: आइए एक फलन $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ को लें तथा इसे $x = 1$ के लिए हल करना का प्रयास करें। $\frac{x^2-1}{x-1}$ में मान $x = 1$ रखने पर, हमें $\frac{0}{0}$ प्राप्त हेाता है। प्राप्त हल में एक कठिनाई है। हमें यह मान ज्ञात नहीं क्योंकि $\frac{0}{0}$ अनिर्धार्य $(indeterminate)$ है। अतः, हमें उत्तर पर पहुँचने के लिए किसी अन्य विधि की आवश्यकता है। $x = 1$ पर कार्य करने के स्थान पर, हम निम्नलिखित विधि से निकटतर तथा और निकटर होते हुए 1 की ओर अग्रसर होने का प्रयास करते हैं:

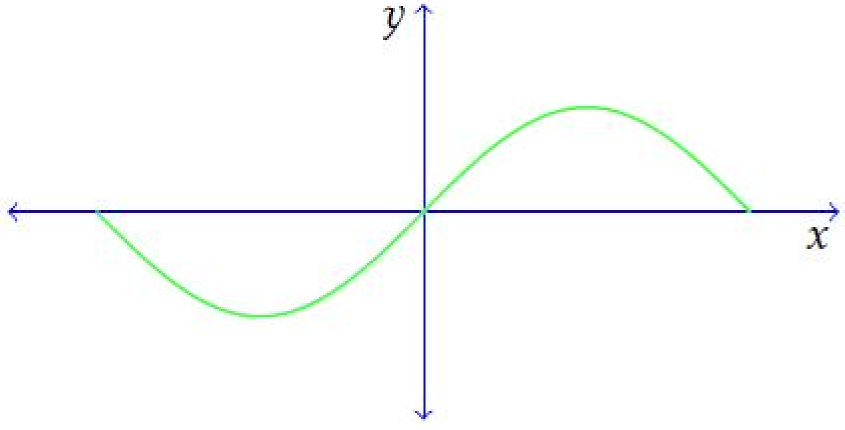
x	$\frac{x^2-1}{x-1}$
0.5	1.50000
0.9	1.90000
0.99	1.99000
0.999	1.99900

0.9999	1.99990
0.99999	1.99999

देखिए कि जैसे–जैसे 1 के x निकटतर होता जाता है, वैसे–वैसे $\frac{x^2-1}{x-1}$ का मान 2 के निकटतर होता जाता है। ऐसे परिणाम से एक रोचक स्थिति प्राप्त हो जाती है। जब x=1, है, तब हमें उत्तर पता नहीं है क्योंकि यह अनिर्धार्य है। परंतु अन्य विधि में हम देख सकेंगे कि यह 2 हाने जा रहा है। इसका तात्पर्य यह है कि हम उत्तर '2' देना चाहते हैं; परंतु ऐसा कर नहीं सकते हैं। इसके स्थान पर हम कहते हैं कि जब 1 की ओर x अग्रसर करता है, तब $\frac{(x^2-1)}{x-1}$की सीमा= 2 है। आवश्यक रूप से, हम जो कह रहे हैं वह इसकी उपेक्षा करके कह रहे हैं कि जब उस स्थान पर पहुँचेंगे तब क्या होगा। हम यह जानते हैं कि 1 के निकटतर तथा और निकटतर x के होने होने पर फलन 2 के निकटतर तथा और निकटतर आता जाता है।

संतत फलनों की धारणा

मौलिक रूप से हम कहते हैं कि कोई फलन संतत (*continuous*) होता है, यदि हम उसका आलेख कागज पर बिना पेंसिल उठाए खीच सकें। यहाँ एक उदाहरण है जो यह बताता है कि एक संतत फलन किस प्रकार का दिखता है, जो आलेख 2 में दिया गया है।



आकृति 6.2: संतत वक्र

यदि आलेख में दर्शाई उपरोक्त वक्र में कोई विच्छेद या भंग (break) हो, तो ऐसा फलन संतत नहीं होता है। सहजात्मक रूप में, एक संतत फलन यह प्रदर्शित करता है कि फलन के निवेश में छोटे परिवर्तन होने पर, परिणामस्वरूप बहुर्वेश में भी छोटे परिवर्तन होते हैं।

ऊपर परिचित कराई गई सीमा और सांतत्य की संकल्पनाओं की परिशुद्ध परिभाषाओं को देखने के लिए, हम पुनः वापिस आएँगे।

बोध प्रश्न क

1. किसी फलन की सीमा के पीछे सहजात्मक धारणा क्या है ?
2. आप किसी फलन की सीमा और संततय के बीच संबंध को किस प्रकार स्पष्ट करना चाहेगे ?

6.2 किसी फलन की सीमा

हम ऊपर प्रस्तावना अनुच्छेद में, देख चुके हैं कि जब कोई स्वतंत्र पर एक विशेष वास्तविक संख्या की ओर अग्रसर होता है, तब एक फलन का कोई सीमांत मान हो सकता है। यह सीमांत मान एक सीमा के रूप में जाना जाता है, जबकि इसका अस्तित्व हो। प्रतिकात्मक रूप में, इसे $\lim_{x \to c} f(x) = L$ लिखते हैं।

उपरोक्त समीकरण का यह तात्पर्य है कि जब c को ओर x अग्रसर होता है, तब $f(x)$ की सीमा L के बराबर है। यहाँ सन्निकट रूप से c के बराबर है (अर्थात् c से x छोटा हो सकता है या c से बड़ा हो सकता है, परंतु $x \neq c$ है) सीमा ज्ञात करने के लिए, हमें x के दो अलग–अलग मानों के लिए फलन के मान पर कार्य करने की आवश्यकता है। एक c से अधिक x के लिए (दक्षिण–पक्ष सीमा) तथा अन्य cसे कम x के लिए (वाम–पक्ष सीमा) तथा सत्यपित करना कि ये दोनों बराबर हैं या नहीं। किसी फलन की सीमा का आस्तित्व तभी और केवल तभी होगा, जब दोनों वाम–पक्ष (left-hand) और दक्षिण–पक्ष (Right-hand) सीमाएँ बराबर होंगी। अर्थात् यदि

$\lim_{x \to c+} f(x) = L$ और $\lim_{x \to c-} f(x) = L$ है, तो $\lim_{x \to c} f(x) = L$ है।

उदाहरण 2: x^2 की सीमा ज्ञात कीजिए, जब $x \to 2$ है।

हल: सीमा ज्ञात करने के लिए, x के कल्पित मानों तथा $f(x)$ के संगत मानों के साथ निम्नलिखित सारणी बनाई गई हैं:

जब $x < 2$,

x	1	1.4	1.7	1.8	1.9	1.99	1.995	1.999
f(x)	1	1.96	2.89	3.24	3.61	3.9601	3.98	3.996

जब $x > 2$,

x	3	2.6	2.4	2.2	2.1	2.01	2.005	2.001
f(x)	9	6.76	5.76	4.84	4.41	4.0401	4.02	4.004

उपरोक्त सारणियों से यह स्पष्ट है कि जब x सन्निकट रूप से 2 के बराबर है, तब $f(x)$ सन्निकट रूप से 4 के बराबर है। अर्थात्,

$\lim_{x \to 2-} x^2 = 4$ और $\lim_{x \to 2+} x^2 = 4$ है।

अतः $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ है।

उदाहरण 3: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ की सीमा ज्ञात कीजिए, जब $x \to 2$ है।

हल: जब $x<2$ है, तब $f(x)$ बराबर है:

x	1	1.4	1.7	1.8	1.9	1.99	1.995	1.999
f(x)	1	3.4	3.7	3.8	3.9	3.99	3.995	3.999

जब $x>2$, तब $f(x)$ बराबर है:

x	3	2.6	2.4	2.2	2.1	2.01	2.005	2.001
f(x)	5	4.6	4.4	4.2	2.1	4.01	4.005	4.001

उपरोक्त सारणियों से यह स्पष्ट है कि जब x सन्निकट रूप से 2 के बराबर है, तब $f(x)$ सन्निकट रूप से 4 के बराबर है। अर्थात्,

$\lim_{x\to 2-} f(x) = 4$ और $\lim_{x\to 2+} f(x) = 4$ है।

अतः,

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ है।

किसी दिए बिंदु पर, एक फलन के सीमांत मान ज्ञात करने में, उस बिंदु के अति निकट चर के मानों को रखने वाली यह विधि हो सकता है कि सदैव सुविधाजनक नहीं हो।

अतः, हमें x (स्वतंत्र चर) के एक परिमित राशि मान लीजिए, a की ओर प्रवृत्त $(tends)$ होने पर, किसी फलन की सीमाओं को परिकलित करने के लिए, अन्य विधियों की आवश्यकता है।

उदाहरण 4: $\lim_{x\to 3} f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ है।

हलः हम इसे प्रतिस्थापन की विधि द्वारा हल कर सकते हैं। इसके लिए, चरण इस प्रकार हैं:

1. हम x के निकट एक, मान लीजिए, $x = a + h$ लेते हैं, जहाँ h एक बहुत छोटी धनात्मक संख्या है।

   स्पष्टतः, जब $x \to 0$ तब $h \to 0$ हैं। $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, के लिए, हम $x = 3 + h$ लिखते है, जब $x \to 3$ तब $h \to 0$ है।

   2. $f(x) = f(a + h)$ को सरल कीजिए।

   अब $f(3+h) = \frac{(3+h)^2-9}{(3+h)-3}$

   $= \frac{9+h^2+6h-9}{h}$

   $= \frac{h^2+6h}{h}$

   $= h + 6$ है।

3. $h = 0$ रखने पर, $f(3+0) = f(3) = 6$ है।

   अतः, $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{h\to 0}(h+6) = 6$ है।

ऊपर सीमा को परिभाषित करते समय, हम सीमा के अस्तित्व के लिए एक प्रतिबंध को देख चुके हैं। जब हम कहते है कि सीमा का अस्तित्व नहीं है, तो इसका अर्थ है कि सीमा या तो अनंत है। या परिभाषित नहीं है। उस स्थिति में जब किसी फलन की सीमा अनंत की ओर प्रवृत्त होती है।; उसका मान स्वेच्छिक रूप से बड़ा होता हाता है। यदि वह किसी मान के निकटतर नहीं पहुँचती, तो सीमा का अस्तित्व नहीं होता।

यदि चर एक परिमित मान की ओर प्रवृत्त होता है तब फलन को किसी संख्या के निकटतर होते जाना चाहिए, जैसे–जैसे वह चर उस परिमित संख्या के निकटतर होता जाता है। पुनः यदि वह किसी मान के निकटतर नहीं पहुँच पाता है, तो सीमा का अस्तित्व नहीं होता। यह इस कारण भी हो सकता है कि वाम और दक्षिण–पक्ष सीमाएँ बराबर नहीं हों या इसलिए कि ये अनंत के बराबर हों।

6.2.1 सीमा के गुण

यदि c कोई अचर है तथा $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है, तो निम्नलिखित कथन सत्य हैं:

1. एक अचर की सीमा वह अचर ही होती है, अर्थात् $\lim_{x \to a} k = k$, जहाँ k कोई अचर है।
2. $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$ होती है।
3. सीमाओं के योग या अंतर की सीमा उन सीमाओं का योग या अंतर होती है। अर्थात्

   $\left[\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$ है।
4. एक गुणनफल की सीमा उन सीमाओं का गुणनुफल होती है। अर्थात्

   $\lim_{x \to a} [f(x). g(x)] = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x)$ है।
5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, जब कि, $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ हो।
6. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ है n के सभी धनात्मक पूर्णांकीय मानों के लिए।
7. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ है, n के सभी धनात्मक पूर्णांकीय मानों के लिए।
8. $\lim_{x \to a} \log[f(x)] = \log[\lim_{x \to a} f(x)]$ है।
9. $\lim_{x \to a} \exp[f(x)] = \exp[\lim_{x \to a} f(x)]$ है।

6.2.2 कुछ मानक सीमाएँ

1. $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, n$ धनात्मक पूर्णांक है।
2. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$ है।
3. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$ है। (जहाँ a>0)
4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ है।
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ है।

उदाहरण 5: निम्नलिखित सीमाओं के मान निकालिए:

1. $\lim_{x \to 2} 9$

2. $\lim_{x\to 2} 3x^2$

3. $\lim_{x\to 2}(5x^2 + 3x + 7)$

4. $\lim_{x\to 1}[(x^2+4)(3x-2)]$

5. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^3+9}$

हलः

1. $\lim_{x\to 2} 9 = 9$ है।

2. $\lim_{x\to 2} 3x^2 = 3, \lim_{x\to 2} x^2 = 3.\ (2)^2 = 3\times 4 = 12$ है।

3. $\lim_{x\to 2}(5x^2 + 3x + 7) = \lim_{x\to 2} 5x^2 + \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 7 = 5(2)^2 + 3(2) + 7 = 33$ है।

4. $\lim_{x\to 1}[(x^2+4)(3x-2)] = \lim_{x\to 1}(x^2+4).\lim_{x\to 1}(3x-2)$

   $= [\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 4].[\lim_{x\to 1} 3x - \lim_{x\to 1} 2] = (1 + 4)\ (3 – 2) = 5$ है।

5. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^3+9} = \frac{\lim_{x\to 1}(2x^2+x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^3+9)} = \frac{2+1-3}{1+9} = \frac{0}{10} = 0$

बोध प्रश्न ख

1. वाम–पक्ष और दक्षिण–पक्ष सीमाओं को स्पष्ट कीजिए।

2. क्या किसी फलन के सीमांत मान का अस्तित्व है, यदि वाम–पक्ष सीमा दक्षिण–पक्ष सीमा के बराबर नहीं है ?

3. $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$ क्या है ?

4. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ का मान क्या है ?

6.2.3 गुणनखंडन की विधि

मान लीजिए कि $f(x)$ और $g(x)$ दो फलन इस प्रकार हैं कि $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ है तथा हमें $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ज्ञात करना है। तब हमे एक $\frac{0}{0}$ रूप प्राप्त होता हैं, जो अर्थहीन है। ध्यान दीजिए कि $\frac{0}{0}$ को अनिर्धार्य रूप कहा जाता है। अन्य अनिर्धार्य रूप $\pm\infty/\pm\infty$ हैं।

इस प्रकार की सीमाओं को गुणनखंडन की विधि द्वारा हल किया जाता है।

एक उदाहरण $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x^2-6x+5}$ पर विचार कीजिए। यहाँ जब $x\to 5$ है, तब अंश और हर दोनों ही शून्य की ओर अग्रसर होते हैं। यह एक अनिर्धार्य रूप है। ऐसी स्थिति में, हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं:

1. $f(x)$ और $g(x)$ के गुणनखंड करके

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 5}\frac{(x+2)(x-5)}{(x-1)(x-5)}$$

प्राप्त कीजिए।

2. समीकरण को सरल कीजिए । $\lim_{x\to 5}\frac{(x+2)(x-5)}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x\to 5}\frac{(x+2)}{(x-1)}$ है।

3. x के मान रखिए। इससे प्राप्त होता है:

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{7}{4}$$

उदाहरण 6: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ का मान निकालिए।

यहाँ हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं:

चरण 1: वर्गमूल वाले व्यज का परिमेयीकरण कीजिए।

चरण 2 : सरल कीजिए।

चरण 3 : x का मान रख कर वाँछित परिणाम प्राप्त कीजिए।

हल: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ दिया है।

परिमेयीकरण करने पर,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}^2-\sqrt{1-x}^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

इसमें मान $x=0$, रखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$\lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{2} = 1$ है।

उदाहरण 7: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+1}{3x^3-2x+4}$

का मान निकालिए।

हल: जब ∞ की ओर x अग्रसर होता है, तब अंश और हर दोनों ∞ की ओर अग्रसर होते हैं। अत:, दिया हुआ फलन अनिर्धार्य रूप $\frac{\infty}{\infty}$ ले लेता है। परंतु हम इस भागफल के रूप को इस प्रकार बदल सकते हैं, ताकि यह निष्कर्ष निकाल सकें कि इस फलन की सीमा है या नहीं। यह कार्य हम अंश और हर दोनों को हर में प्रकट होने वाली x की उच्चतम घात से भाग देकर कर सकते हैं।

इस प्रकार, अंश और हर दोनों को x^3 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+1}{3x^3-2x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}$$

$= \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}}$

$= \frac{0+0+0}{3-0+0} = \frac{0}{3} = 0$ है।

उदाहरण 8: मांग फलन $p = \frac{a}{x+b}$ के लिए (जहाँ p मूल्य है, x मांगी गई राशि है तथा a और b अचर हैं), सीमा की संकल्पना का उपयोग करते हुए, दर्शाइए कि जब मूल्य में गिरावट आती है, तब मांग अपरिमित रूप से बड़ी राशि तक बढ़ जाती है। साथ ही, यह भी दर्शाइए कि जब राशि की मांग में वृद्धि होती है, तब राजस्व एक सीमांत मान तक पहुँच जाता है।

हल: $p = \frac{a}{x+b}$ दिया है।

समीकरण पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x = \frac{a}{p} - b$$

$\lim p \to 0$ रखने पर,

$\lim_{p\to 0} x = \lim_{p\to 0}[\frac{a}{p} - b] = \infty$ है।

अतः, जब मूल्य 0 की ओर अग्रसर होता है, तब मांग ∞ की ओर अग्रसर होती है।

अब, $TR = px = x[\frac{a}{x+b}] = \frac{ax}{x+b}$ है।

$\lim_{x\to\infty} TR = \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+b} = \lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\frac{b}{x}} = a$ है।

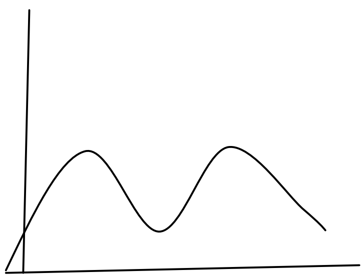
अत; जब राशि की मागं में वृद्धि होती है, TR एक सीमांत मान a पर पहुँचता है।

बोध प्रश्न ग

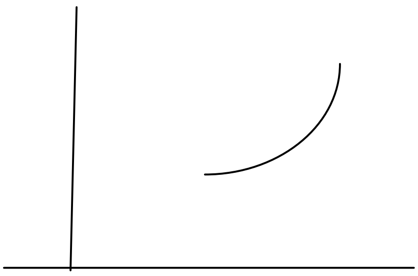
1. सीमा के अनिर्धार्य रूपो को स्पष्ट कीजिए।
2. जब n की ओर x अग्रसर होता है, तब एक अचर का सीमांत मान क्या होता है?
3. आप किसी फलन की सीमा ज्ञात करने के लिए, गुणनखंडन की विधि का उपयोग कब करना पसंद करेंगे ?

6.3 सांतत्य

ऊपर प्रस्तावना अनुच्छेद में, हम देख चुके हैं कि कोई फलन संतत कहा जाता है, यदि उस फलन के आलेख में कोई विच्छेद नहीं हो, अर्थात् उस आलेख को कागज पर से पेंसिल उठाए बिना खींचा जा सकता है। एक संतत फलन और एक अंसतत (discontinuous) फलन के आलेख नीचे दर्शाए गए हैं:



(क) संतत फलन



(ख) असंतत फलन

आकृति 6.3 : संतत और असंतत फलन

दूसरे शब्दों में, एक फलन संतत होता है, यदि स्वतंत्र चर में लघु (minor) परिवर्तनों से उस फलन के मानों में भी लघु परिवर्तन हो जाते हैं। गणितीय रूप से, $x = c$ पर कोई फलन f संतत कहा जाता है, यदि

i) वह फलन $x = c$ पर परिभाषित हो, तथा

ii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ हो, अर्थात् $\lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x)$ हो।

यदि $f(x)$ अपने **प्राँत** में x के प्रत्येक मान के लिए **संतत** है, तो वह उस पूरे अंतराल में संतत कहा जाता है।

एक फलन, जो किसी एक बिंदु पर संतत नहीं होता, तब यह कहा जाता है कि उस फलन की उस बिंदु पर **असंततता (discontinuity)** है।

कोई फलन f किसी अंतराल (a, b) पर संतत होता है, यदि वह उस अंतराल में प्रत्येक बिंदु पर संतत हो।

उदाहरण 9: $x = a$ पर फलन $f(x) = x - a$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

हलः

$x = a + h$,रखिए, ताकि जब $x \to a$, तब $h \to 0$ है। अब,

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h)$ तथा $x = a$ पर,

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = \lim_{h \to 0} ((a + h) - a)$$

$$= 0 \text{ है।}$$

साथ ही, $f(a) = a - a = 0$ है।

अतः, $f(a) = \lim_{h \to 0} f(a + h) = 0$ है।

इस प्रकार, $x = a$ पर $f(x)$ संतत है।

6.3.1 सांतत्य के गुण

1. $f(x) = a$ (अचर) सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।
2. $f(x) = x^n, n$ एक प्राकृत संख्या है, सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए संतत है।
3. बहुपद फलन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत होते हैं।
4. यदि $f(x)$ और $g(x)$ दो संतत फलन हैं, तो $f(x) \pm g(x)$ भी संतत होते हैं। अर्थात् दो संतत फलनों के योग और अंतर भी संतत होते हैं।
5. यदि $f(x)$ और $g(x)$ दो संतत फलन हैं, तो $f(x) \times g(x)$ भी संतत होता हैं। अर्थात्, दो संतत फलनों का गुणनफल भी संतत होता है।

6. यदि $f(x)$ और $g(x)$ दो संतत फलन हैं, तो $f(x)/g(x)$ भी संतत होता है (जबकि $g(x) \neq 0$ हो)। अर्थात्, दो संतत फलनों का भागफल भी संतत होता है।

उदाहरण 10: एक फलन $f(x)$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ यदि } -1 \leq x < 0 \\ x, \quad \text{ यदि } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x \text{ यदि } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

दर्शाइए कि वह $x = 0$ पर असंतत है तथा $x = 1$ पर संतत है।

हल: जब $x = 0$ है, तब हम प्राप्त करते हैं:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x+1) = 1$$

क्योंकि $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$ है, इसलिए $x = 0$ पर f संतत नहीं है।

जब $x = 1$, तब,

$f(1) = 1$ है।

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1} (2 - x) = 2 - 1 = 1$ है;

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} x = 1.=1$ है।

क्योंकि $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$ है, इसलिए

$x = 1$ पर f संतत है।

उदाहरण 11: फलन $\frac{2x^2+6x-5}{12x^2+x-20}$ की असंततता के बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ फलन उस बिंदु पर असंतत होगा, जिस पर हर शून्य के बराबर होगा। अर्थात्

$12x^2 + x - 20 = 0$

या, $12x^2 + 16x - 15x - 20 = 0$

या, $4x(3x + 4) - 5(3x + 4) = 0$

या, $(4x - 5)(3x + 4) = 0$ होगा। अत;

$x = \frac{5}{4}$ या, $-\frac{4}{3}$

अंसततता के बिंदु हैं।

उदाहरण 12: निम्नलिखित रूप में परिभाषित फलन f(x) के सांततत्य की x=0 पर जाँच कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \text{ पर} \\ 0 & x = 0 \text{ पर} \end{cases}$$

$= 0$

हलः R.H.L. $\lim_{h\to 0+} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{0+h}{1+e^{\frac{1}{h}}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}} = 0$

L.H.L. $\lim_{h\to 0-} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{0-h}{1+e^{-\frac{1}{h}}} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{1+e^{-\frac{1}{h}}} = 0$

साथ ही, $f(x) = 0$ है।

क्योंकि R.H.L. = L.H.L = 0 $= f(0)$ है, इसलिए दिया हुआ फलन $x = 0$ पर संतत है।

उदाहरण 13: कोई फलन $y = f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x-4}$ द्वारा परिभाषित है।

i) y की सीमा ज्ञात कीजिए, जब $x \to 4$ है।

ii) क्या फलन $x = 4$ पर संतत है ? क्यों ?

हलः दिया हुआ फलन $y = f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x-4}$ है।

i) $x \to 4$ पर सीमा का अनुप्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$\lim_{x\to 4} y = \lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+3)}{}$

$= 4 + 3 = 7$ है।

ii) $x = 4$ पर, इस फलन का मान इस प्रकार निकाला जाता है:

$y = f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x-4} = \frac{4^2 - 4 - 12}{4-4} = \frac{0}{0}$ (परिभाषित नहीं)

क्योंकि $x = 4$ फलन पर परिभाषित नहीं है, इसलिए यह फलन $x = 4$ पर संतत नहीं है।

उदाहरण 14: कोई दुकानदार 20 या कम वस्तुएँ खरीदने पर प्रत्येक वस्तु के लिए 25 रुपये लेता है। यदि वस्तुएँ अधिक खरीदी जाती हैं, तो वह कुछ छूट देता है। यदि 50 या कम वस्तुएँ खरीदी जाती हैं; तो वह प्रति वस्तु 1 रु. की छूट देता हैं तथा 50 से अधिक वस्तुएँ खरीदने पर प्रति वस्तु 2 रु. की छूट देता है। लागत फलन ज्ञात कीजिए। किन बिदुओं पर यह फलन संतत नहीं है ?

हलः मान लीजिए कि वस्तुओं की संख्या x है। तब, लागत फलन $C(x)$ इस प्रकार दर्शाया जाएगा:

$$C(x) = \begin{cases} 25x, & 1 \le x \le 20 \\ 24x, & 20 < x \le 50 \\ 23x, & x > 50 \end{cases}$$

x = 20,पर C(20) = 25 × 20 = 500

L.H.L = $\lim_{x\to 20^-} C(x) = \lim_{x\to 20^-} C(20) = \lim_{x\to 20^-} 25x = 25 \times 20 = 500$

(वाम–पक्ष सीमा)

R.H.L $= \lim_{x\to 20^+} C(x) = \lim_{x\to 20^+} 24x = 24\times 20 = 480$ (दक्षिण–पक्ष सीमा) क्योंकि, LHL $\neq$ RHL है इसलिए $x = 20$ पर फलन C(x) संतत नहीं है।

$x = 50$ पर, $C(50) = 24 \times 50 = 1200$

L.H.L$=\lim_{x\to 50^-} C(x) = \lim_{x\to 50^-} C(50) = \lim_{x\to 50^-} 24x = 50\times 24 = 1200$(वाम–पक्ष सीमा)

R.H.L $= \lim_{x\to 50+} C(x) = \lim_{x\to 50^+} 23x = 23\times 50 = 1150$ (दक्षिण–पक्ष सीमा)

क्योंकि LHL $\neq$ RHL है, इसलिए $x = 50$ पर फलन C(x) संतत नहीं है।

अतः, फलन $x = 20$ और $x = 50$पर असंतत है।

उदाहरण 15: कोई विद्युत कंपनी अपने ग्राहकों से सेवाओं के लिए निम्नलिखित प्रकार से राशि लेती है:

प्रथम 20 किलोवाट घंटे या कम पर ₹ 5 अगले 80 किलोवाट घंटों के लिए 25 पैसे प्रति किलावाट घंटा तथा 100 से ऊपर किलोवाट घंटों के लिए 10 पैसे प्रति किलोवाट घंटा। यदि x किलोवाट घंटों की संख्या है, तो कुल लागत C को x के फलन के रूप में व्यक्त कीजिए। साथ ही, $x = 20$ और $x = 100$ पर फलन C के सांतत्य की भी जाँच कीजिए।

हल: दिया है:

$$C(x) = \begin{cases} 5\,, \text{ यदि } x \le 20 \\ 5+\frac{1}{4}(x-20), \text{ यदि } 20 < x \le 100 \\ 25+\frac{1}{10}, x(x-100), \text{ यदि } x > 100 \end{cases}$$

$x = 20$ पर, $C(20) = 5$ है।

L.H.L $= \lim_{x\to 20-} C(x) = \lim_{x\to 20-} 5 = 5$

R.H.L $= \lim_{x\to 20+} C(x) = \lim_{x\to 20+} 5+\frac{1}{4}(x-20) = 5$

अतः, $\lim_{x\to 20} C(x) = 5 = C(20)$ है।

इसलिए, $x = 20$ पर फलन $C(x)$संतत है।

इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि $x = 100$ पर फलन C संतत है।

बोध प्रश्न घ

1. संतत और असंतत फलनों को स्पष्ट कीजिए।

2. क्या सभी वास्तविक संख्याओं के लिए बहुपद फलन संतत होते हैं ?

3. ऐसे फलन की रचना कीजिए, जो $x = 0$ पर असंतत हो, परंतु $x = 1$ पर संतत हो ?

6.4 सारांश

इस इकाई में, हम किसी फलन की सीमा और सांतत्य की संकल्पना से परिचित हुए हैं। हमनें सीखा है कि सीमा की सहज धारणा यह है कि उस मान का विश्लेषण

करना जिस ओर वह फलन 'अग्रसर हो रहा' है, जब निवेश एक विशिष्ट मान की ओर 'अग्रसर होता' है। दूसरी ओर, हम यह भी कहते हैं कि फलन संतत होता है, यदि हम उसका आलेख कागज पर बिना पेंसिल उठाए खींच सकें, अर्थात् एक संतत फलन होने के लिए, उसके आलेख में कोई विच्छेद नहीं होना चाहिए। इस अभिलक्षण के साथ एक संतत फलन यह प्रदर्शित करता है कि फलन के निवेश में लघु परिवर्तनों के परिणामस्वरूप बहिर्वेश में भी लघु परिवर्तन होते हैं। इनके साथ ही, हमें किसी फलन की सीमा के गुणों के बारे में भी बताया गया है।

किसी फलन की सीमा की औपचारिक परिभाषा की चर्चा करते समय, हमने सीखा था कि सीमांत मान तभी सीमा कहलाता है, जबकि उसका अस्तित्व भी हो। हमें इस संकल्पना को समझने के लिए किसी फलन की सीमा को दो विभिन्न पक्षो से ज्ञात करने की आवश्यकता हुई जिन्हें दक्षिण–पक्ष सीमा और वाम–पक्ष सीमा कहते हैं। इनको अभिकलित करने के बाद, हमें यह सत्यापन भी करने की आवश्यकता हुई कि ये दोनों सीमाएँ बराबर हैं या नहीं। क्योंकि किसी फलन की सीमा के आस्तिव के लिए, वाम–पक्ष और दक्षिण–पक्ष सीमाओं का बराबर होना आवश्यक है। हमने उस स्थिति में, जब फलन अनिर्धार्य रूप का हो जाता है, गुणनखंडन की विधि से सीमा ज्ञात करनी सीखी थी। सांतत्य

की संकल्पना पर आने पर, हमने देखा था कि $x = \mathrm{c}$ पर काई फलन f संतत कहा जाता है, यदि प्रतिबंध

i) फलन $x = \mathrm{c}$ पर परिभाषित हो, तथा

ii) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, हो, अर्थात् $\lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x)$ हो।

संतुष्ट होते हों। हमनें एक संतत फलन के गुणों को भी दर्शाया है।

6.5 शब्दावली

सांतत्यः एक फलन $f(x)$ **संतत** होता है, यदि उसका आलेख संतत हो। और अधिक औपचारिक रूप में, $x = a$ पर काई फलन संतत कहा जाता है, यदि $lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व हो, वह परिमित हो तथा $f(a)$ के बराबर हो।

अनिर्धार्य रूपः जिसकी सीमा केवल व्यक्तिगत फलनों की सीमाओं से नहीं निर्धारित की जा सकती।

सीमाः वह मान जिस ओर कोई फलन (अनुक्रम) अग्रसर होता है, जब निवेश किसी मान की ओर अग्रसर होता है।

गुणनखंडन की विधिः यह सीमाओं को ज्ञात करने की एक तकनीक है, जिसमें सार्व गुणनखंडों को काट दिया जाता है। यह सामान्यतः अनिर्धार्य रूपों को ऐसे रूपों में बदलने के कार्य आता है, जिनका प्रत्यक्ष रूप से मूल्यांकन हो जाता है।

प्रतिस्थापन की विधिः यह सीमाओं को निर्धारित करने की ऐसी विधि है, जिसमें उस मान को फलन में प्रतिस्थापित किया जाता है, जिस ओर स्वतंत्र चर अग्रसर होता है तथा परिणाम प्राप्त कर लिया जाता है।

प्राकृत संख्याएँः वे संख्याएँ जो गिनने में प्रयोग होती हैं।

वास्तिक संख्याः एक संतत राशि जो एक रेखा के अनुदिश एक दूरी निरूपित कर सकती है। इस प्रकार, वास्तविक संख्याओं में, पूर्णांक – 5 और भिन्न 4/3 जैसी सभी परिमेय संख्याएँ सम्मिलित होती हैं तथा $\sqrt{2}$ जैसी सभी अपरिमेय संख्याएँ सम्मिलित होती हैं।

वास्तविक मान फलनः वे फलन जिनके मान वास्तविक संख्याएँ हैं।

6.6 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. वह मान जिस ओर कोई फलन अग्रसर होता है, जब निवेश किसी मान की ओर अग्रसर होता है।

2. जब हम उस फलन के आलेख को कागज पर से पेंसिल उठाए बिना खींच सकें।

3. कोई फलन $f(x)$ बिंदु x_0 पर संतत होता है, यदि x_0 पर सीमा का अस्तित्व हो तथा यह $f(x_0)$ के बराबर हो।

(ख)

1. RHS सीमा के लिए, फलन का मान सीमा से ठीक बड़ा होता है, जबकि LHS सीमा के लिए, फलन का मान सीमा से ठीक छोटा होता है।

2. नहीं

3. यह किसी फलन की सीमा का एक गुण है।

4 1

(ग)

1. समीकरण का मान $\frac{0}{0}$ और $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का होता है।

2. अचर

3. फलनों की स्थितयों में, दो अनिर्धार्य रूप $\frac{0}{0}$ और $\frac{\infty}{\infty}$ हैं।

(घ)

1. एक फलन f अंतराल (a, b) पर संतत होता है, यदि वह उस अंतराल के प्रत्येक बिंदु पर संतत हो, अन्यथः असंतत ।

2. हाँ

3. उप–अनुच्छेद 6.3.1 में दी चर्चा को देखिए और उत्तर दीजिए।

6.7 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

1. निम्नलिखित फलनों की सीमाएँ ज्ञात कीजिएः

   क) $\lim_{x \to 0} 7$

   ख) $\lim\limits_{x \to 0} x$

ग) $\lim_{x\to 3}(3x+4)$

घ) $\lim_{x\to 1}(3x^4-2x^3+4x^2+5x-7)$

ड.) $\lim_{x\to 2}[(x^2+5)/(x-1)]$

च) $\lim_{x\to\infty}[\frac{2x^2-x+1}{3x^2+2x+5}]$

छ) $\lim_{x\to\infty}[\frac{2x^3+3x^2+5}{-5x^3+8x-17}]$

2. चर्चा कीजिए कि निम्नलिखित फलन संतत हैं या नहीं :

क) $\lim_{x\to 3}(2x^2-3x+5)$

ख) $\lim_{x\to 5}[(x^2-7)/(x+3)]$

3. चर्चा कीजिए कि निम्नलिखित के सांतत्य की $x=0$ पर जाँच कीजिए:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \text{ यदि } x\neq 0\\ 0, \text{ यदि } x=0\end{cases}$$

4. $y=f(x)=\frac{x^2-x-20}{x-5}$ दिया हुआ है।

क) $x\to 5$ होने पर y की सीमा ज्ञात कीजिए।

ख) क्या यह फलन $x=5$ पर संतत है ? क्यों ?

5. फलन f के सांतत्य की चर्चा कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}x+2, \text{ के लिए } x<1\\ 4x-1, \text{ के लिए } 1\le x\le 3\\ x^2+5, \text{ के लिए } x>3\end{cases}$$

उत्तरः

1. क) 7 ख) 0 ग) 13 घ) 3 ड.) 9 च) 2/3 छ) −2/5

2. क) संतत ख) संतत

3. संतत

4. क) 4 ख) नहीं, क्योंकि यह $x=5$ पर परिभाषित नहीं है।

5. $x=1$ पर संतत, $x=3$ पर असंतत

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

6.8 संदर्भ पुस्तकें

- Allen, R.G.D., "Mathematical Analysis for Economists", London, English Language Book Society and Macmillan, 1974.
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, Pearson Educational Asia, Delhi, 2002

इकाई 7 अवकलन की संकल्पना

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद,

- अवकलज की संकल्पना, उसके अर्थ अभिकलन तथा निर्वचन को समझ पाएँगे;
- अवकलजों को परिकलित करने के लिए विभिन्न नियमों को समझ पाएँगें; तथा
- अवकलन में लघुगणकों का उपयोग कर पाएँगें।

7.1 प्रस्तावना

किसी फलन के एक चर में अन्य चर के सापेक्ष, जिस पर वह आश्रित है, परिवर्तन की दर, उस फलन का अवकलज (derivative) कहलाती है। अवकलन (differentiation) वह प्रक्रिया है, जिससे हम किसी संतत फलन का अवकलज ज्ञात करते हैं। अवकलज किसी फलन के एक चर में अन्य चर (तर्क) में हुई लघु (small) वृद्धि के संगत हुई लघु वृद्धि का अनुपात होता है, जब कि दूसरा चर शून्य की ओर प्रवृत होता है।

7.2 प्रथम सिद्धांत द्वारा अवकलन

'प्रथम सिद्धांत' से किसी फलन के अवकलन से तात्पर्य यह है कि हम मूल परिभाषा से प्रारंभ करें तथा x के किसी मान पर किसी वक्र की प्रवणता के लिए एक व्यापक व्यंजक ज्ञात करने में बीजगणित का उपयोग करें। उपरोक्त धारणा की सराहना के लिए, हम इस संकल्पना की कुछ व्यापक धारणा से प्रारंभ करते हैं।

मान लीजिए कि $y = f(x)$ कोई फलन है, जो अंतराल (a, b). में परिभाषित है। मान लीजिए कि $x = c$ इस अंतराल के कोई बिंदु है, जिससे फलन का संगत मान $f(c)$ है मान लीजिए कि इसी अंतराल में $(c + h)$ एक अन्य बिंदु है जो c के दाईं या बाईं ओर इसके अनुसार स्थित है कि h धनात्मक है या ऋणात्मक है। तब फलन का संगत मान $f(c + h)$ है। तब स्वतंत्र चर x में परिवर्तन h के संगत आश्रित चर y में परिवर्तन $f(c + h) - f(c)$ है। इन दोनों परिवर्तनों के अनुपात $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ पर विचार कीजिए, जो h का एक फलन है तथा $h = 0$ के लिए परिभाषित नहीं है, जबकि C एक निश्चित $(fixed)$ बिंदु है।

परिभाषा: $y = f(x)$ पर एक फलन $x = c$ अवकलनीय होता है, यदि

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

का अस्तित्व हो तथा यह सीमा $x = c$ पर फलन $f(x)$ का अवकलज कहलाती है। इसे $f'(c)$ या $y_1(c)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

चरण:

1. दिए $f(x)$ को y के बराबर रखिए, अर्थात्

   $y = f(x)$ ---(1)

2. x में एक लघु राशि Δx की वृद्धि कीजिए, जिससे y में संगत वृद्धि Δy हो।

   $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ ---(2)

3. अतः (1) को (2) में से घटाने पर,

   $y + \Delta y - y = f(x + \Delta x) - f(x)$

   या, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ है।

4. दोनों पक्षों को Δx से भाग देने पर,

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ है।}$$

5. दोनों पक्षो में $\lim_{\Delta x \to 0}$ रखिए ताकि

   $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

LHS का व्यंजक अवकलज को निरूपित करता है, जो स्वतंत्र चर में हुए किसी परिवर्तन के संगत आश्रित चर में हुई तात्क्षणिक (Instantaneous) परिवर्तन की दर है। फलन अवकलनीय तभी होगा, जब सीमा का अस्तित्व हो तथा फलन उस बिंदु पर संतत भी होना चाहिए।

बोध प्रश्न क

1. किसी फलन का अवकलज क्या होता है ?
2. आप कब कहेंगे कि एक फलन अवकलनीय है ?
3. प्रथम सिद्धांत द्वारा अवकलन से आपका क्या तात्पर्य है?

7.3 अवकलन के नियम

इस अनुच्छेद में, हम विभिन्न प्रकार के फलनों के अवकलजों को ज्ञात करने के लिए, नियमों तथा उनके गुणों की चर्चा करेंगे। आवश्यक रूप से, हम गुणन नियम और घात नियम का अध्ययन करेंगे, जो अवकलन में संक्षिप्त विधियों के रूप में कार्य करते हैं। महत्वपूर्ण अवकलजों के अभिकलन के लिए नीचे आकृति को देखिए:

आकृति 7.1: अवकलजों के अभिकलन के लिए नियम

नियम 1 : अचर फलन नियम

किसी अचर का अवकलज शून्य होता है।

अर्थात्,यदि $y = f(x) = c$ है, तो

$\frac{dy}{dx} = 0$ होगा।

यदि y = अचर है तो किसी भी x के मान के लिए y में परिवर्तन नहीं होगा।

उदाहरण 1: निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए:

i) y = 8

ii) y = 6000c

iii) y = 5/6

हल: i) y = 8 है।

अतः, $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

ii) y = 6000c है।

अतः, $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

iii) y = 5/6

अतः $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

नियम 2 : घात फलन नियम

यदि x कोई वास्तविक संख्या है और $y = f(x) = x^n$ है, तो

$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$ होता है।

घात फलन का अवकलज = घात × गुणांक × चर $^{\text{घात}\ -1}$

उदाहरण 2: अवकलज ज्ञात कीजिए:

i) $y = x^{3/2}$

हल: $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{1/2}$ है।

ii) $y = x$

हल: $\frac{dy}{dx} = 1.x^{1-1} = 1$ है।

iii) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

हल: $y = x^{-1/2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ है।

iv) $y = 2x^6$

हल: $\frac{dy}{dx} = 2 \times 6x^{6-1}$

$= 12x^5$

v) $y = \frac{8}{3}.x^{2/3}$ है।

हल: $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3}.\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{16}{9}.x^{-1/3}$ है।

vi) $y = \frac{100}{\sqrt[3]{x}}$

हल: $y = 100.x^{-1/3}$

$\frac{dy}{dx} = 100x\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}$

$= -\frac{100}{3}x^{-4/3}$ है।

नियम 3 : रैखिक फलन नियम

रैखिक फलन $y = ax + b$ का अवकलज $= x$ के गणांक a के बराबर होता है।

यदि $y = ax + b$, है, तो $\frac{dy}{dx} = a\,x^0 + 0$

अर्थात् , $\frac{dy}{dx} = a$ है।

उदाहरण 3: यदि $y = 3x + 7$, है तो $dy/dx = 3 + 0$

अर्थात् ,$dy/dx = 3$ है।

किसी रैखिक फलन $y = ax + b$ का अवकलज $= x$ का गुणांक

नियम 4 : योग और अंतर के लिए नियम

यदि f और g दो अवकलनीय फलन हैं, तथा

$F(x) = f(x) \pm g(x)$ है, तो हमें प्राप्त होता है:

$$F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

दो फलनों के योग या अंतर का अवकलन उनके व्यक्तिगत अवकलजों के योग या अंतर के बराबर होता है।

उदाहरण 4:

i) $y = x^8 + x^{2/3}$

हल:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^8) + \frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}})$$

या, $\frac{dy}{dx} = 8.x^{8-1} + \frac{2}{3}.x^{\frac{2}{3}-1} = 8.x^7 + \frac{2}{3}.x^{-1/3}$

ii) $y = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 5$

हल:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^3) + \frac{d}{dx}(4x^2) - \frac{d}{dx}.5x + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 3.3\,x^{3-1} + 4.2\,x^{2-1} + 5\,x^{1-1} + 0$$

$$= 9x^2 + 8x - 5$$

iii) $y = \frac{x^3+1}{x}$

हल:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+1}{x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}.\left(\frac{x^3}{x}\right) + \frac{d}{dx}.\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}.\frac{1}{x}$$

$$= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^{-1})$$

$$= 2x - x^{-2}$$

$= 2x - \frac{1}{x^2}$ है।

नियम 5: गुणनफल नियम

एक गुणनफल $y = f(x).g(x)$ का अवकलज पहला फलन x दूसरे फलन का अवकलज + दूसरा फलन × पहले फलन का अवकलज होता है। अर्थात्

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x).\frac{d}{dx}[f(x)]$$

या,$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).\ [g'(x)] + g(x).\ [f'(x)]$ होता है।

उदाहरण 5:

i) y = $5x^4(3x - 7)$

हल:

$$\frac{d}{dx}[5x^4(3x-7)] = 5x^4.\frac{d}{dx}[3x-7] + (3x-7).\frac{d}{dx}[5x^4]$$

या, $\frac{dy}{dx} = 5x^4.3 + (3x-7).20x^3$

या, $\frac{dy}{dx}$ = $15x^4 + 60x^4 - 140x^3$ है।

या, $\frac{dy}{dx} = 75x^4 - 140x^3$ है।

ii) y= $(4x^3 - 5x + 7)(3x^4 - 2x^3 + 2)$

हल:

$$\frac{d}{dx}[(4x^3 - 5x + 7).(3x^4 - 2x^3 + 2)]$$

$$= (4x^3 - 5x + 7).\frac{d}{dx}[(3x^4 - 2x^3 + 2)] + (3x^4 - 2x^3 + 2)\frac{d}{dx}(4x^3 - 5x + 7)$$

या, $\frac{dy}{dx} = (4x - 5x + 7)(12x^3 - 6x^2) + (3x^4 - 2x^3 + 2)(12x^2 - 5)$

$= 84x^6 - 48x^5 - 75x^4 + 120x^3 - 18x^2 - 10$ है।

नियम 6: भागफल नियम

दिए हुए व्यंजक y= $\frac{f(x)}{g(x)}$ का अवकलज (जहाँ g(x)≠0 है)

$\frac{\text{हर} \times \text{अंश का अवकलज} - \text{अंश} \times \text{हर का अवकलज}}{\text{हर का वर्ग के बराबर होता है}}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\times\frac{d(f(x)}{dx} - f(x)\times\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$ होता है।

उदाहरण 6: निम्नलिखित के लिए, dy/dx ज्ञात कीजिए।

i) y= $\frac{2x+1}{x-1}$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)\frac{d}{dx}(2x+1) - (2x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$= \frac{(x-1)(2) - (2x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$ है।

ii) y = $\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^3-x^2+1) - (x^3-x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)(3x^2-2x) - (x^3-x^2+1)\,(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2} \text{ है।}$$

नियम 7 : श्रृंखला नियम

किसी फलन के फलन $y = f(x)$ जहाँ $u = g(x)$ है, का अवकलज (dy/dx) के सापेक्ष पहले फलन के अवकलज $\times$ x के सापेक्ष दूसरे फलन के अवकलज के बराबर होता है। अर्थात्,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \text{ है।}$$

उदाहरण 7: निम्नलिखित के लिए dy/dx ज्ञात कीजिए:

i) यदि $y = u^2$ और $u = 2x^3 + 5x + 1$ है।

हल :

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^2)$$

या, $\frac{dy}{du} = 2u$ है।

साथ ही, $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}.(2x^3 + 5x + 1)$

या, $\frac{du}{dx} = 6x^2 + 5$ है।

या, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 2u.\,(6x^2 + 5)$

$\frac{dy}{dx}$ में u का मान रखने पर,

$\frac{dy}{dx} = 2(2x^3 + 5x + 1).(6x^2 + 5)$ है।

ii) $y = 4u^3$ और $u = 12x^2 + 5$ है।

हल :

$dy/du = 12u^2$ और

$du/dx = 24x$ है।

अतः $dy/dx = 12u^2(24x)$

या, $dy/dx = 288xu^2$ है।

$\frac{dy}{dx}$ में u का मान रखने पर,

$dy/dx = 288x(12x^2+5)^2$ हुआ।

iii) $y = \sqrt{u}$ और $u = 5 + 7x + x^3$ है।

हल :

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^{\frac{1}{2}})$$

या, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}.u^{-\frac{1}{2}}$ है।

साथ ही, $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}.(5 + 7x + x^3)$ या $\frac{du}{dx} = 0 + 7 + 3x^2 = 3x^2 + 7$ है।

इस प्रकार, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ या $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2}.u^{-\frac{1}{2}}\right).(3x^2 + 7)$ है।

$\frac{dy}{dx}$ में u का मान रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2}.(5 + 7x + x^3)^{-\frac{1}{2}}\right).(3x^2 + 7)$$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2+7)}{2\sqrt{(5+7x+x^3)}}$ है।

नोटः श्रृंखला नियम (chain rule) विशेष कर उन राशियों के अवकलज ज्ञात करने में किया जाता है, जिनके ऊपर घात लगी होती है, जैसे $[f(x)]^n$ का अवकलज ज्ञात करने में। मान लीजिए कि $y = u^n$ और $u = f(x)$ है। श्रृंखला नियम के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = nu^{n-1}.f'(x)$$

अतः, $\frac{d}{dx}.[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1}.f'(x)$ है।

iv) $\frac{(2x+5)^4}{(5x-7)^4}$

हलः मान लीजिए कि

y $= \frac{(2x+5)^4}{(5x-7)^4}$ है। तब को $y = u^4$ रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $u = \frac{2x+5}{5x-7}$ है।

इस प्रकार, श्रृंखला नियम द्वारा,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

अब $\frac{dy}{du} = 4u^3$ है।

साथ ही, $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}.\left(\frac{2x+5}{5x-7}\right)$ है।

भागफल नियम के अनुप्रयोग से,

$$\frac{du}{dx} = \frac{(5x-7)(2) - (2x+5)(5)}{(5x-7)^2}$$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(10x-14) - (10x+25)}{(5x-7)^2} = \frac{-39}{(5x-7)^2}$ है।

इस प्रकार, $\frac{dy}{dx} = 4u^3 . \frac{-39}{(5x-7)^2}$

इसमें मे u का मान रखने पर,

$\frac{dy}{dx} = 4(\frac{2x+5}{5x-7})^3 . \frac{-39}{(5x-7)^2} = -156\ \frac{(2x+5)^3}{(5x-7)^5}$ है।

बोध प्रश्न ख

1. $\frac{d}{dx}(3x+5)$ ज्ञात कीजिए।
2. x^n का अवकलज अभिकलित कीजिए।
3. गुणनफल नियम क्या है ?
4. श्रृंखला नियम के उपयोग से $y = (3x+1)^2$ को अवकलित कीजिए।
5. अवकलन का भागफल नियम क्या है ?

7.4 मानक अवकलज

बीजीय फलनों के बाद, लघुगणकीय और चरघातांकी फलन ऐसे हैं, जिनका सामान्यतः अधिक प्रयोग किया जाता है। लघुगणकीय और चरघातांकी फलनों के अवकलज नीचे दिए जा रहे हैं:

i) **लघुगणकीय फलन का अवकलज**

यदि $y = \log x$ है।

तब $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ होता है।

(जब log का आधार बताया नहीं गया है, तक इसे e लिया जाता है।)

ii) **चरघातांकी फलन का अवकलज**

$y = e^x$ है, तो

$dy/dx = e^x$ होता है।

iii) **a^x का अवकलज** जहाँ a अचर है।

यदि $y = a^x$ है, तो

$dy/dx = a^x . \log_e a$ होता है।

नोटः $y = \log u$ और $y = e^u$ के अवकलजों को ज्ञात करने में श्रृंखला नियम भी उपयोगी रहता है, जहाँ x का u एक उपयुक्त फलन है तब हम श्रृंखला नियम के अनुप्रयोग द्वारा अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि

$y = \log u$ और $u = f(x)$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx} \text{ है}$$

यदि $y = e^u$, $u = f(x)$ है, तो

$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$ है।

उदाहरण 8: निम्नलिखित के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

i) $y = \log (5x^2 + 7)$

हल: यह फलन $y = \log u$ के रूप का है, जहाँ $u = 5x^2 + 7$ है।

इस प्रकार,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x^2+7} . \frac{d}{dx} (5x^2 + 7) = \frac{1}{5x^2+7} . (10x)$$

$$= \frac{10x}{5x^2+7} \text{ है।}$$

ii) $y = x^2 \log (3x + 7)$

हल: गुणनफल नियम के अनुप्रयोग से,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx} (3x+7) + \log(3x+7) \frac{d}{dx} (x^2)$$

या, $\frac{dy}{dx} = x^2 \left(\frac{1}{3x+7}\right)(3) + \log(3x+7).(2x) = \frac{3x^2}{3x+7} + 2x \log(3x + 7)$ है।

iii) $y = e^{5x^2+4x+8}$

हल: $\frac{dy}{dx} = e^{5x^2+4x+8} \frac{d}{dx} . (5x^2 + 4x + 8) = e^{5x^2+4x+8} (10x + 4)$ है।

iv) $y = \frac{\log x}{x^2}$

हल: भागफल नियम के अनुप्रयोग से,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 . \frac{d}{dx} . (\log x) - \log x . \frac{d}{dx} (x^2)}{x^4} = \frac{x^2 . \left(\frac{1}{x}\right) - \log x \, (2x)}{x^4} = \frac{x - 2x \log x}{x^4} = \frac{1 - 2 \log x}{x^3} \text{ है।}$$

v) $y = x^3 + 8^x + \log x$

हल: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^3) + \frac{d}{dx} (8^x) + \frac{d}{dx} (\log x) = 3x^2 + 8^x log e^8 + \frac{1}{x}$ है।

बोध प्रश्न ग

1. $g(t) = 5^t$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

2. $y = 3x^2 + 2e^x$ का अवकलज क्या है ?

3. $f(t) = \frac{1+5t}{\ln (t)}$ को अवकलित कीजिए।

7.5 अस्पष्ट फलनों को अवकलन

कोई संबंध $f(x,y) = 0$ दिया होने पर, x के पदों में y को व्यक्त करना संभव नहीं हो पाता है तथा इसके विपरीत y के पदों में x को व्यक्त करना भी संभव नहीं हो पाता है। तब, ऐसा संबंध एक अस्पष्ट फलन ($implicit \ function$) कहलाता है। ऐसी समीकरण से dy/dx ज्ञात करने के लिए, हम समीकरण के दोनों पक्षों को

अवकलित करते हैं तथा परिणामी समीकरण के दोनों पक्षो को अवकलित करते हैं तथा परिणामी समीकरण से dy/dx प्राप्त करते है। इस विधि को निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से बेहतर रूप से स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 9: निम्नलिखित के लिए, dy/dx ज्ञात कीजिए:

i) $x^3 + y^3 = xy$

हल: y को x का एक फलन मानते हुए, तथा दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करते हुए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(xy)$$

या, $3x^2 + 3y^2.\frac{dy}{dx} = x.\frac{dy}{dx} + y$

पुनर्व्यस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$3y^2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 3x^2$$

या, $(3y^2 - x)\frac{dy}{dx} = y - 3x^2$

इस प्रकार, $\frac{dy}{dx} = \frac{y-3x^2}{3y^2-x}$ हैं।

ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

हल: दोनो पक्षो को x के सापेक्ष (w.r.t.) अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$a.\frac{d}{dx}(x^2) + 2h\frac{d}{dx}(xy) + b\frac{d}{dx}(y^2) + 2g\frac{d}{dx}(x) + 2f\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(c) = \frac{d}{dx}0$$

या, $2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} + 0 = 0$

या, $\frac{dy}{dx}(2hx + 2by + 2f) + (2ax + 2hy + 2g) = 0$

या, $\frac{dy}{dx}(2hx + 2by + 2f) = -(2ax + 2hy + 2g)$

or, $\frac{dy}{dx} = \frac{-(2ax+2hy+2g)}{2hx+2by+2f} = -\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$ हैं।

iii) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

हल: समीकरण को पुनर्व्यवस्थित पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x^2(1 + y) = y^2(1 + x)$$

या, $x^2 + x^2y = y^2 + y^2x$

या, $x^2 - y^2 + x^2y - y^2x = 0$

या, (x-y) (x+y) + xy (x-y) = 0 (क्योंकि $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ हैं।)

या, (x - y)(x + y + xy) = 0

या, x+y+xy= 0(क्योंकि $x \neq y$ है, इसलिए $x-y \neq 0$ है।)

या, y(1+x) = –x

या, y = –x/(1+x) है।

दोनों पक्षों को अवकलित करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]$$

or, $\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+x).1-x.1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ है।

बोध प्रश्न घ

1. एक अस्पष्ट फलन को किस प्रकार अवकलित किया जाता है ?
2. यदि 3x+2y=4 दिया है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।
3. $\frac{dy}{dx}$ के ज्ञात करने की विधि स्पष्ट कीजिए, यदि $\frac{x}{y^3} = 1$ दिया है।

7.6 लघुगणकों के उपयोग से अवकलन

लघुगणकीय अवकलन की विधि $y = f(x)^{g(x)}$ के रूप के फलनों को अवकलित करने में उपयोग की जाती है। इस विधि में, हम समीकरण $y = f(x)^{g(x)}$ के दोनों के नियमों पक्षों पर प्राकृतिक log लेते हैं; जिससे $log\, y = log\,[f(x)^{g(x)}]$ प्राप्त होता है लघुगणकों के नियमों का उपयोग करते हुए, हम इस समीकरण $log\, y = log\,[f(x)^{g(x)}]$ को सरल करते हैं तथा फिर दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करते हैं। इसके बाद इसे $\frac{dy}{dx}$ के लिए हल करते हैं। इस विधि को ऐसे फलन को अवकलित करने के लिए भी उपयोग किया जा सकता है, जो अनेक फलनों के गुणनफल हों।

उदाहरण 10: dy/dx ज्ञात कीजिए:

i) $y = x^x$

हल: समीकरण $y = x^x$ के दोनों पक्षों पर log लेने पर, हम प्राप्त करते हैं:

log y =log [x^x]

logy= x log x

समीकरण के दोनों पक्षों को अवकलित करने पर,

> **नोट:** लघुगणकों के महत्वूपर्ण गुण
>
> 1. log (m.n) = log m + log n
> 2. log (m/n) = log m - log n
> 3. log (m^n) = n log m
> 4. log (e^x) = x
> 5. log e = 1

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\ \frac{d}{dx}\ (\log x) + \log x\ \frac{d}{dx}(x)$$

या, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \log x$

या, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \log x$

या, $\frac{dy}{dx} = y\ (\ 1 + \log x)$ है।

उपरोक्त में y का मान रखने पर, $\frac{dy}{dx} = x^x\ (\ 1 + \log x)$ है।

ii) $y = \frac{(x+1)^{10}\ (x+5)(x+6)}{(x+7)^2}$

हलः दी हुई समीकरण के दोनों पक्षों पर log लेने पर,

log $y = \log\left[\frac{(x+1)^{10}\ (x+5)(x+6)}{(x+7)^2}\right]$

या, log y = log $(x+1)^{10}$ + log (x+5) + log (x+6) – log $(x+7)^2$

या, log y =10 log (x+1) + log (x+5) + log (x+6) – 2 log (x+7)

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करेन पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x+1} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+6} - \frac{2}{x+7}$$

या, $\frac{dy}{dx} = y.\left[\frac{10}{x+1} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+6} - \frac{2}{x+7}\right]$

$=\left[\frac{(x+1)^{10}\ (x+5)(x+6)}{(x+7)^2}\right].\left[\frac{10}{x+1} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+6} - \frac{2}{x+7}\right]$ हैं।

iii) $x^y = y^x$

हलः दोनों पक्षों पर log लेने पर,

log x^y = log y^x

या, y log x = x log y

x के सापेक्ष दोनों पक्षों को अवकलित करने पर,

$$y.\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\ \frac{dy}{dx} = x.\frac{d}{dx}\ (logy) + logy\ \frac{d}{dx}\ (x)$$

या, $y.\frac{1}{x} + \log x\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y$

या, $\log x\frac{dy}{dx} - x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log y - \frac{y}{x}$

या, $\left[\log x - \frac{x}{y}\right]\frac{dy}{dx} = \log y - \frac{y}{x}$

या, $\frac{[y\log x - x]}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x\log y - y}{x}$

या, $\frac{dy}{dx} = \frac{x\log y - y}{ylog\ x - x}.\frac{y}{x}$ है।

iv) $y = (3x^2+5)^{1/x}$

हलः दोनों पक्षों पर log लेने पर,

$$\log y = \log (3x^2+5)^{1/x}$$

$$\log y = \frac{1}{x} \log (3x^2+5)$$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों को अवकलित करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{d}{dx}\log(3x^2 + 5) + \log(3x^2 + 5).\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

या, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.(6x) + \log(3x^2 + 5).(-x^{-2})$

या, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 6 - \frac{\log(3x^2+5)}{x^2}$

या, $\frac{dy}{dx} = y.\left[6 - \frac{\log(3x^2+5)}{x^2}\right]$

या, $\frac{dy}{dx} = \quad (3x^2 + 5^{\frac{1}{x}}\left[6 - \frac{\log(3x^2+5)}{x^2}\right]$ है।

बोध प्रश्न ङ

1. आप अवकलन में लघुगुणकों का उपयोग कब करना चाहेंगे ?

2. आप फलन $y = \frac{x^5}{(1-10x)\sqrt{x^2+2}}$ को अवकलित करने के लिए, किन चरणों का अनुसरण करेंगे ?

3. 10^x के प्राकृतिक लघुगणक को सरल कीजिए।

7.7 प्रतिलोम फलन का अवकलज

मान लीजिए x का कोई फलन $y = f(x)$ है तथा यह भी मान लीजिए कि हम इस समीकरण को x के लिए y के पदों मे हल कर सकते है। अतः, हम x को y के एक फलन के रूप में, $x = g(y)$ लिख सकते हैं। तब, $g(y)$ फलन $f(x)$ का प्रतिलोम फलन ($inverse\ function$) कहलाता है। यदि x पर $y = f(x)$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f'(x) \neq 0$ है, तो $x = g(y)$ भी y के संगत मान पर अवकलनीय होता है तथा $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ होता है।

उदाहरण 11:

निम्नलिखित से $\frac{dx}{dy}$ ज्ञात कीजिए:

i) $y = \frac{3x+2}{x+1}$

हलः y को x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(3) - (3x+2).1}{(x+1)^2}$$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2}$

अतः, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{\frac{1}{(x+1)^2}} = (x+1)^2$ है।

ii) $y = (x+2)^{1/2}$

हल: y को x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

या, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.(x+2)^{-\frac{1}{2}}.1$

या, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}}$

या, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(x+2)}}$

या, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = 2\sqrt{(x+2)}$ है।

बोध प्रश्न च

1. एक प्रतिलोम फलन क्या होता है ?
2. सिद्ध कीजिए कि x के सापेक्ष $y = f^{-1}(x)$ का अवकलज $\frac{1}{f'(y)}$ होता है ?
3. यदि x पर $y = f(x)$, एक अवकलनीय फलन है, ताकि $f'(x) \neq 0$ है तथा $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ है तो आप किस प्रकार के फलन के साथ कार्य कर रहे होते हैं ?

7.8 प्राचलिक फलनों का अवकलन

उप वक्रों को व्यक्त करने के लिए, हम प्राचलिक फलनों ($parametric\ functions$) का उपयोग करते हैं, जो एक अकेली समीकरण के रूप में नहीं लिखी जा सकती है। इस प्रक्रिया में, x और y को एक दूसरे के पदों परिभाषित करने के स्थान पर, हम इन दोनों को एक अन्य चर t (जो प्राचल कहलाता हैं) के पदों में परिभाषित करतें हैं। इस प्रकार, हम $x = f(t)$ और $y = g(t)$ प्राप्त करते हैं। फिर, इन फलनों को एक दूसरे से प्राचल द्वारा संबंधित किया जाता है। हम प्राचलिक फलनों को श्रृंखला नियम के उपयोग से अवकलित कर सकते हैं।

मान लीजिए कि $x = f(t)$ और $y = g(t)$ दो अवकलनीय फलन हैं जहाँ t एक प्राचल ($Parameter$) है। देखिए कि $\frac{dx}{dt}$ और $\frac{dy}{dt}$ दोनों का आस्तित्व है। अतः, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}$ है। जबकि $dx/dt \neq 0$ है।

उदाहरण 12 : निम्नलिखित के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

i) $y = t^3$, $x = t^2$

हल: क्योंकि $y = t^3$ है, इसलिए $\frac{dy}{dt} = 3t^2$ है।

पुनः, $x = t^2$ से हम $dx/dt = 2t$ प्राप्त करते हैं।

अतः $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt) = (3t^2)/2t = \frac{3}{2}\ t$ है।

ii) $x = (1-t)/(1+t)$ और $y = 2t^3 + 4^t$ है।

हल: $x = (1-t)/(1+t)$

$$\frac{dx}{dt} = [(1+t)(-1) - (1-t).1)]/(1+t)^2$$

$$dx/dt = (-2)/(1+t)^2$$

$$y = 2t^3 + 4^t$$

$$dy/dt = 6t^2 + 4^t\ log4$$

अतः,

$$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$$

या, $dy/dx = (6t^2 + 4^t\ log4)/((-2)/(1+t)^2)$

या, $\frac{dy}{dx} = \frac{(6t^2 + 4^t\ log4).(1+t)^2}{-2}$ है।

बोध प्रश्न छ

1. एक प्राचलिक फलन क्या होता है ?
2. प्राचलिक फलनों को किस प्रकार अवकलित किया जाता है ?
3. निम्नलिखित फलन को अवकलित कीजिए:

   $x = 2at^2$ और $y = 4at$

7.9 सारांश

इस इकाई में, हमने अवकलन की तकनीकों की चर्चा की है। किसी फलन के मानों की परिवर्तन की दर के रूप में उस फलन के अवकलज को अर्थ देकर प्रारंभ करते हुए, हम यह सीखते हैं कि अवकलज को dy/dx या $f'(x)$ या f_x के रूप के व्यक्त किया जा सकता हैं जब फलन $y = f(x)$ के लिए y को x सापेक्ष अवकलित किया जाता है। कुछ मूलभूत नियम है, जिनका उपयोग अनेक प्रकार के फलनों के अवकलजों को ज्ञात या अभिकलित करने में किया जा सकता है। यह नियम हैं: अचर फलन नियम, घात फलन नियम, रैखिक फलन नियम, फलन के अंतर के लिए नियम गुणनफल नियम, भागफल नियम, फलन के फलन के लिए नियम। आगे, हम लघुगुणक फलन के अवकलज (अर्थात् यदि $y = logx$, है, तो $dy/dx = 1/x$ है) तथा साथ ही चरघांताकी फलन के अवकलन ($y = e^x \Rightarrow dy\,/\,dx = e^x$) से भी परिचित हुए हैं। इस इकाई के अंतिम भागों में, हमने प्रतिलोम फलन और प्राचलिक फलनों के अवकलन का अध्ययन किया है। इस प्रक्रिया में, यह देखा गया है कि प्रतिलोम फलन की स्थिति में, यदि x पर $y = f(x)$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f'(x) \neq 0$, तो $x = g(y)$ संगत मान पर के संगत मान पर अवकलनीय होता है तथा $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ होता है। प्राचलिक फलनों के अवकलन पर विचार करते समय, हमने सीखा है कि यदि $x = f(t)$ और $y = g(t)$ प्राचल हैं t के साथ दो अवकलनीय फलन हैं, तो $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ होता है, जबकि $\frac{dx}{dt} \neq 0$ है।

7.10 शब्दावली

श्रृंखला नियमः फलनों के संयोजन के अवकलज को ज्ञात करने की एक विधि।

अवकलजः फलन की परिवर्तन की दर का मापन।

चरघातांकी फलनः $f(x) = a^x$ के रूप का फलन, जहाँ x चर है तथा a एक अचर है, जो फलन का आधार कहलाता है।

अस्पष्ट अवकलनः अस्पष्ट रूप से परिभाषित फलन या संबंध के अवकलज ज्ञात करने की विधि।

अस्पष्ट फलनः अस्पष्ट समीकरण द्वारा अस्पष्ट रूप से परिभाषित, अर्थात् एक चर को दूसरे से जोड़ कर बनाया फलन।

प्रतिलोम फलनः वह फलन जो दूसरे फलन को व्युत्क्रम कर देता है।

फलन की सीमाः किसी विशिष्ट बिंदु के समीप किसी फलन का विश्लेषण

लुघुगणकीय अवकलन : $y = x^{\sin x}$ जैसे फलनों के अवकलज ज्ञात करने के लिए एक विधि।

लघुगणक फलनः $y = \log_a x$ या $y = \ln x$ जैसा फलन। यह $y = a^x$ या $y = e^x$ जैसे चरणांतांकी फलन का प्रतिलोम होता है।

प्राचलिक फलन : समीकरणों का एक समुच्चय जो राशियों के एक समुच्चय को अनेक स्वतंत्र चरों के अस्पष्ट फलनों के रूप में व्यक्त करता है। ये चर प्राचल कहलाते हैं।

घात फलन : $y = f(x) = kx^n$ के रूप में लिखा जाने वाला फलन, जहाँ k और n वास्तविक संख्याएँ हैं।

घात नियम : किसी चर की घात के अवकलज को ज्ञात करने का नियम।

गुणनफल नियमः दो फलनों के गुणनफल के अवकलज के लिए सूत्र।

भागफल नियमः दो फलनों के भागफल के अवकलज के लिए सूत्र।

7.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. किसी फलन के एक चर में अन्य चर के सापेक्ष, जिस पर वह आश्रित है, परिवर्तन की दर।
2. फलन अवकलनीय तभी होता है जब सीमा का अस्तित्व हो तथा उस बिंदु पर फलन संतत हो।
3. किसी वक्र की प्रवणता के लिए, बीजगणित की सहायता से एक व्यापक व्यंजक ज्ञात करना।

(ख)

1. 3
2. nx^{n-1}
3. $y = f(x).g(x)$ लीजिए तथा पहला फलन का अवकलज + दूसरे फलन × पहले फलन का अवकलज के रूप से अवकलज ज्ञात कीजिए। दूसरे फलन

4. (3x+1) में बिना कुछ परिवर्तन के पहले वर्ग को अवकलज कीजिए। फिर (3x+1) को अवकलित कीजिए। आपको $\frac{dy}{dx} = 2(3x+1)^{2-1}.\frac{d}{dx}(3x+1) = 2(3x+1).(3) = 6(3x+1)$ प्राप्त होगा।

5. भागफल नियम एक औपचारिक नियम है, जो ऐसे फलनों को अवकलित करने में उपयोग होता है, जहाँ एक फलन को दूसरे फलन से भाग दिया जाता है। इस प्रकार,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x).\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

(ग)

1. $(ln5)5^t$

2. $6x + 2e^x$

3. $\frac{5\ln(t) - (1+5t)\left(\frac{1}{t}\right)}{[\ln(t)]^2}$

(घ)

1. समीकरणों के दोनो पक्षों को अवकलित कीजिए तथा परिणामी समीकरण से $\frac{dy}{dx}$ के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिए।

2. -3/2

3. पहले समीकरण y के लिए हल करके $y^3 = x$ प्राप्त कीजिए।

   तब, $y = x^{\frac{1}{3}}.\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(ङ)

1. जब हमे कुछ जटिल फलनों के अवकलज ज्ञात करने की आवश्यकता होती है, तब हम इन फलनों को लघुगणक के उपयोग से सरल कर सकते हैं।

2. दोनो पक्षों पर लघुगणक लीजिए तथा सरल करके

   $\ln y = ln(x^5) - ln(1-10x) - ln(\sqrt{x^2+2})$ ज्ञात कीजिए।

   फिर वही करिए जो आप अस्पष्ट फलनों के लिए करते हैं, जिससे $\frac{dy/dx}{y} = \frac{5}{x} + \frac{10}{1-10x} - \frac{x}{x^2+2}$ प्राप्त हो।

3. x

(च)

1 प्रतिलोम फलन वह फलन है, जो अन्य फलन को व्युत्क्रम कर देता है। अर्थात्, $f(x) = y$, यदि और केवल यदि $g(y) = x$ हो।

2 $x = f(y)$ लीजिए दोनों पक्षों को y के सापेक्ष अवकलित कीजिए, ताकि $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(f(y)$, अर्थात् $\frac{dx}{dy} = f'(y)$ या, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$.

3. प्रतिलोम फलन

(छ)

1. फलनों के एक ऐसे वर्ग का अस्तित्व है, जो एक अन्य चर t (जो प्राचल कहलाता है) के पदों में परिभाषित होते हैं।

2. श्रृंखला के नियम के माध्यम से

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$,

क्योंकि $\frac{dx}{dt} = 4at$, हैं। इसलिए, हमें $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4at}$ प्राप्त होता है। पुनः, $\frac{dy}{dt} = 4a$ है। अतः, $\frac{dy}{dx} = 4a \times \frac{1}{4at} = \frac{1}{t}$ है।

7.12 स्पपरख प्रश्न / अभ्यास

1. x के सापेक्ष अवकलित कीजिए:

i) $y = 3x^5$

ii) $y = x^3 + 3x$

iii) $f(x) = 7x^2 - 8x + 5$

iv) $f(x) = 8(10 - x^4)$

2.. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए:

i) $y = \frac{3x+2}{4x-5}$

ii) $y = \frac{x^5 - x^3 + 20}{x^2 + 10}$

iii) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

3. निम्नलिखित फलनों के dy/dx ज्ञात करने के लिए, श्रृंखना नियम का उपयोग कीजिए:

i) $y = 2u^2 - 7u$ और $u = 5x - x^3$

ii) $y = u^2$ और $u = \frac{x+1}{x-1}$

iii) $y = \log u$ और $u = \sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$

iv) $y = e^u$ और $u = x^6 - x^2 + 1$

4. निम्नलिखित फलनों का dy/dx ज्ञात कीजिए।

i) $\log x (\log x)$

ii) $\log x^3$

iii) $(\log x)^3$

iv) $\log(3x^2 + 2x - 5)$

v) log (xe^x)

vi) $(e^{3x} + 1)^4$

vii) 4^{2x^3+5x}

viii) $e^{x^2} \log x$

5. यदि $y = \log\left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ है।

6. यदि $y = \left[\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right]$ है। तो सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{x^2-1}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y$ है।

प्रश्नों के उत्तर

1. i) $15x^4$ ii) $3x^2 + 3$ iii) $14x - 8$ iv) $32x^3$

2. i) $23/(4x-5)^2$ ii) $\frac{3x^6 + 4x^4 - 30x^2 + 40x}{(x^2+10)^2}$ iii) $\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$

3. i) $(20x - 4x^3 - 7)(5 - 3x^2)$ ii) $\frac{-4(x+1)}{(x-1)^2}$ iii) $\frac{(x-1)}{2x(x+1)}$ iv) $(6x^5 - 2x)\, e^{x^6-x^2+1}$

4. i) $1/(x\log x)$ ii) $3/x$ iii) $\frac{3(\log x)^2}{x}$ iv) $\frac{6x+2}{3x^2+2x-5}$ v) $(x+1)/x$

   vi) $12e^{3x}(e^{3x+1})^3$

   vii) $\log 4\,(6x^2+5)\, 4^{2x^3+5x}$ viii) $e^{x^2}\left[\frac{1}{x} + 2x \log x\right]$

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

7.13 संदर्भ पुस्तकें

- Allen, R.G.D., “Mathematical Analysis for Economists”, London: English Language Book Society and Macmillan, 1974.
- Archibald, G.C., Richard G.Lipsey. “An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics”, Delhi: All India Traveller Bookseller, 1984
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Dowling, Edward,T. “Schaum’s Outline Series: Theory and Problems of Mathematics for Economists”, New York: McGraw Hill Book Company, 1986.
- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, Pearson Educational Asia, Delhi, 2002.
- Yamane, Taro, “Mathematics for Economists: An Elementary Survey”, New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited, 1970.

इकाई 8 फलनों के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित को समझ पाएँगेः

- उच्चतर कोटि के अवकलजों को समझ पाएँगें;
- उन अंतरालों को ज्ञात कर पाएँगे जिन पर कोई फलन वर्धमान है या ह्रासमान है; तथा
- फलन के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात कर पाएँगे।

8.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, हमने फलनों के अवकलजों के बारे में अध्ययन किया है। इस स्तर से और आगे जाने के लिए, वर्तमान इकाई में, किसी फलन के आलेख के चरम बिदुओं (extreme points) को ज्ञात करने के लिए, अवकलजों का उपयोग करने का प्रयास किया गया है। उदाहरणार्थ, हम यह दर्शाएँगे कि किस प्रकार अवकलज के चिह्न का उपयोग उन प्रश्नों को सुलझाने में किया जाता है, जो किसी फलन के आलेख के उन अंतरालों के बारे में होते हैं, जिनमें वह चढ़ता या गिरता हुआ होता है। इसका मुख्य अनुप्रयोग आलेखों पर उच्च या निम्न बिदुंओं की स्थितियाँ निर्धारित

करने में होता है। बाद में इन्हीं बिदुंओं का उपयोग उस फलन द्वारा प्राप्त किए जाने वाले अधिकतम या न्यूनतम मानों को निर्धारित करने में किया जाता है।

8.2 उच्चतर कोटि के अवकलज

यदि x का $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है, तो $f'(x)$ या $\frac{dy}{dx}$ फलन $y = f(x)$ का x के सापेक्ष प्रथम अवकलज (first order derivative) है। क्योंकि किसी फलन का अवकलज भी एक फलन होता है; इसलिए एक अन्य अवकलज भी ज्ञात किया जा सकता है। द्वितीय कोटि का अवकलज (second order derivative) या द्वितीय अवकलज फलन $f(x)$ के प्रथम अवकलज का अवकलज होता है। इसके लिए अन्य संकेतन हैं:

$\frac{d\,({}^{dy}/_{dx})}{dx}$ या, $\frac{d\,(f'(x))}{dx}$ या, $\frac{d^2y}{dx^2}$ या y_2 या $f''(x)$

क्योंकि $f''(x)$ भी एक फलन है, इसलिए इसके भी अवकलज को ज्ञात किया जा सकता है, जिसे $f'''(x)$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। उच्चतर कोटि के अवकलजों के लिए फलन के ऊपर संख्याएँ, इत्यादि लिखी जा सकती हैं, जैसे f^4 = चौथा अवकलज, इत्यादि।

उदाहरण 1: $f(x) = 5x^4 + 6x^3+2x+1$

$f(x) = 20x^3 + 18x^2 + 2$

$f''(x) = 60x^2 + 36x$

$f'''(x) = 120x^2 + 36$

उदाहरण 2: $y= 9x^4+ 7x^3+ 2x^2+ 5x + 7$ के

संभव कोटियों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल:

$y_1= dy/dx= 36x^3 + 21\,x^2+4x+5$

$y_2 = d^2y/dx^2 = 108x^2 + 42x + 4$

$y_3\, y_3 =d^3y / dx^3 = 216x + 42$

$y_4= d^4\, y / dx^4= 216$

$Y_5= d^5\, y / dx^5 = 0$

$y_6=d^6\, y / dx^6=0$

पाँचवीं तथा उससे उच्चतर कोटियों के अवकलज शून्य होंगे।

उदाहरण 3: यदि $y= \left(\frac{1}{x}\right)^x$ है, तो इसका द्वितीय कोटि अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः इसके दोनों पक्षों पर log लेने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\log y = x \log\frac{1}{x}$$

$$= x(\log 1 - \log x)$$

$$= -x\log x \quad (\text{क्योंकि } \log 1 = 0 \text{ होता है।})$$

x के सापेक्ष, दोनों पक्षों को अवकलित करने पर,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\left[x\left(\frac{1}{x}\right) + \log x \,.1\right]$$

$= -(1+ \log x)$

या, $\frac{dy}{dx} = -y.(1 + logx)$

पुनः, x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[y\left(\frac{1}{x}\right) + (1 + \log x)\,.\frac{dy}{dx}\right]$$

dy/dx का मान रखने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[y\left(\frac{1}{x}\right) + (1 + \log x)\,.(-y.(1 + logx))\right]$$

$$\text{या, } \frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{y}{x} - (1 + logx)^2\, y\right]$$

$$\text{या, } \frac{d^2y}{dx^2} = -y\left[\frac{1}{x} - (1 + logx)^2\right]$$

y का मान रखने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{1}{x} - (1 + logx)^2\right] \text{ है।}$$

विभिन्न कोटियों के अवकलजों का निर्वचन

फलन $y = f(x)$ का प्रथम अवकलज, अर्थात् $\frac{dy}{dx}$ चर x में हुए परिवर्तन के कारण, y में हुए परिवर्तन की दर का मापन करता है। यह किसी वक्र पर स्थित एक बिंदु पर उस वक्र की प्रवणता प्रदान करता है।

1) किसी बिदुं पर यदि प्रथम कोटि अवकलज धनात्मक है, अर्थात् $dy/dx > 0$, तो इसका तात्पर्य है कि x के मान में हुई एक लघु वद्धि के लिए, y में वृद्धि होती है।

2) किसी बिदुं पर यदि प्रथम कोटि अवकलज शून्य है, अर्थात् $dy/dx = 0$, है तो इसका तात्पर्य है कि x के मान में हुई एक लघु वृद्धि के लिए y में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

3) किसी बिदु पर प्रथम कोटि अवकलज ऋणात्मक है, अर्थात् $dy/dx < 0$ है तो x के मान में हुई एक लघु वृद्धि के लिए y में कमी होती है।

4) द्वितीय अवकलत d^2y/dx^2 प्रथम अवकलज dy/dx की परिवर्तन दा प्रदान करता है। अर्थात्, यदि

क) $d^2y/dx^2>0$ है, तो फलन की प्रवणता वर्धमान (बढती हुई) होती है।

ख) $d^2y/dx^2<0$ है, तो फलन की प्रवणता ह्रासमान (घटती हुई) होती है।

बोध प्रश्न क

1. किसी फलन के आलेख के चढ़ते हुए या गिरते हुए होने पर निर्वचन (या निष्कर्ष) निकालने के लिए, आप एक अवकलज में क्यो देखते हैं ?

2. जब निवेश में वृद्धि होने पर फलन के मान में कमी होती है, तब उसका आलेख कौन–सी वक्र दर्शाता है ?

3. किसी बिंदु पर एक वक्र की प्रवणता, फलन के किस कोटि के अवकलज से ज्ञात हो सकती है ?

4. आपको किसी फलन का द्वितीय कोटि अवकलज दिया है। ऐसी सूचना के आधार पर आप वक्र की प्रवणता पर क्या टिप्पणी कर सकते हैं ?

5. आपको किसी व्यापार के क्रियाकलाप का लाभ फलन दिया हुआ है तथा आपको लाभ की परिवर्तन दर पर सुझाव देने को कहा जाता है। आप क्या करेंगे ?

6. किसी फलन की वर्धमान (increasing) और ह्रासमान वक्रो पर अपना निर्वचन करने (निष्कर्ण निकालने) में अवकलजों के चिह्नों की एक सूची बनाइए।

8.3 वर्धमान और ह्रासमान फलन

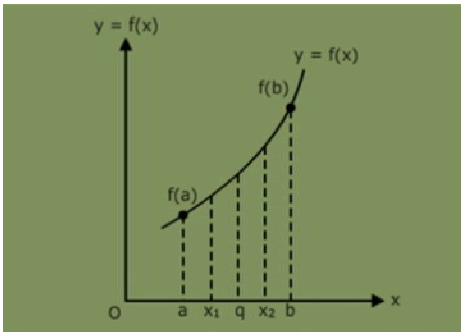
बृहत रूप से अगर कहें, तो कोई फलन मान लीजिए, $f(x)$ वर्धमान होता है, यदि x में वृद्धि होने पर y में वृद्धि हो (बाएँ से दाएँ देखने पर) तथा $f(x)$ ह्रासमान होता हैं, यदि x में वृद्धि होने पर y में कमी होती हो। किसी चर के परिवर्तन की दर निर्धारित करने कि लिए, इस प्रकार के फलन हमारे लिए रुचिकर होते हैं। उदाहरणार्थ, हम किसी कार की चाल या किसी देश की जनसंख्या वृद्धि (और कमी) की दर की जानकारी के बारे में रुचि रख सकते हैं।

8.3.1 वर्धमान फलन

कोई फलन $y = f(x)$ अंतराल $[a, b]$ में वर्धमान कहा जाता है, यदि a से b तक x में वृद्धि होने पर, y में वृद्धि होती है। अर्थात्,

यदि x_1 और x_2 $x_2 \in [a, b]$ और $x_2 \geq x_1$ है, तो $f(x_2) \geq f(x_1)$ होता है।

इस प्रकार, कोई फलन $[a, b]$ में एक वर्धमान फलन कहा जाता है, यदि इसका प्रथम कोटि अवकलज $[a, b]$ में x के सभी मानों के लिए शून्य से बड़ा होता है (अर्थात् $f'(x) > 0$ हो) यदि $f'(q) > 0$ हो, तो बिदुं $x = q$ पर वक्र में बाएँ से दाएँ तक वृद्धि होती है।

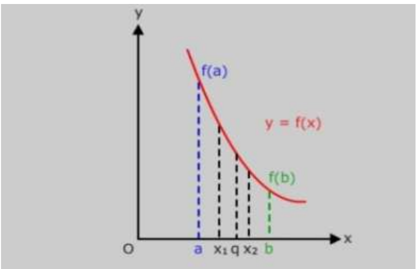


आकृति 8.1: वर्धमान फलन

8.3.2 ह्रासमान फलन

कोई फलन $y = f(x)$ अंतराल $[a, b]$ में ह्रासमान कहा जाता है, यदि $[a, b]$ में x में वृद्धि होने पर y में कार्य होती है तथा विलोमतः x में कमी होने पर y में वृद्धि होती है। अर्थात्, $f(x_2) \leq f(x_1)$ है, जब $x_2 \geq x_1$ है, तथा x_1 और $x_2 \in [a, b]$ है।

यदि अंतराल $[a, b]$ में x के सभी मानों के लिए प्रथम काटि अवकलज शून्य से छोटा है, अर्थात् $f'(x) < 0$ है, तो फलन $y = f(x)$ अंतराल $[a, b]$ में ह्रासमान होता है। अर्थात् यदि $f'(q) < 0$ है, तो बिंदु x = q पर वक्र $y = f(x)$ बाईं से दाईं ओर गिरती है।



आकृति 8.2 : नीचे की ओर जाती हुई वक्र

उदाहरण 4: दर्शाइए कि फलन $y = f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x - 1$ चर x के सभी मानों के लिए वर्धमान है।

हल:

$dy/dx = f'(x) = 9x^2 + 6x + 1$

$= (3x + 1)^2$

अतः, x के सभी मानों के लिए $\frac{dy}{dx} > 0$ है।

इस प्रकार, दिया हुआ फलन x के सभी मानों के लिए वर्धमान है।

उदाहरण 5: वे अंतराल ज्ञात कीजिए; जिनमें फलन $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 1$

i) वर्धमान है।

ii) ह्रासमान है।

हल:

$$dy/dx = f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$$

$= 6(x^2+3x+2)= 6(x+1)(x+2)$ है।

i) $f(x)$ के वर्धमान होने के लिए $f'(x)>0$ होना चाहिए।

अर्थात् $6(x+1)(x+2) > 0$ है।

यदि $x < -2$, है, तो $f'(x)= 6\ (-)\ (-)>0$ है, अर्थात् $f(x)$ वर्धमान है।

जब $x > -1$ है। तब $f'(x)= 6\ (+)\ (+)>0$ है।

अर्थात् $f(x)$ वर्धमान है। जब $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,\infty)$ है।

ii) यदि $f(x)$ ह्रासमान है, तो $f'(x)$ है।

अर्थात्, $6(x+1)(x+2)<0$ है।

यदि $-2<x<-1$ तब $f'(x)= 6\ (-)(+)<0$ $f(x)$ है। अर्थात् $f(x)$ ह्रासमान है; जब $x\in(-2,-1)$ है।

अतः $f(x)$ वर्धमान है, जब $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$ है और $f(x)$ ह्रासमान है, जब $x\in(-2,-1)$ है।

उदाहरण 6: x का मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए दिया हुआ फलन $f(x) =2x^2- 8x+80$ ह्रासमान है।

हल: किसी फलन के ह्रासमान होने के लिए, उसके प्रथम अवकलज $f'(x)$ को शून्य से कम होना चाहिए। अर्थात्

$f'(x) = 4x - 8 < 0$, उस फलन के ह्रासमान होने के लिए।

अतः, $4x -8 < 0$ या, $4x < 8$ या, $x<2$ है।

इस प्रकार, उपरोक्त फलन $x<2$ के लिए ह्रासमान है, $x>2$ के लिए वर्धमान है तथा $x=2$ पर इसका स्थिर (stationary) मान है।

उदाहरण 7: वह अंतराल ज्ञात कीजिए, जिसमें फलन

$f(x)= -2x^3 + 3x^2+12x - 1$

(i) वर्धमान है।

(ii) ह्रासमान है।

हल:

$f'(x) = -6x^2 +6x+12$

$= -6(x^2-x-2)=-6\ (x+1)\ (x-2)$ है।

i) $f(x)$ वर्धमान होने के लिए, $f'(x)>0$ है।

अर्थात् $-6(x+1)(x-2)>0$ है।

यदि $-1<x<2$, है, तब $f'(x)= (-)\ (+)\ (-)>0$ है। अर्थात् $f(x)$ वर्धमान है।

अतः, $f(x)$ वर्धमान है, जब $x\in(-1,2)$ है।

ii) $f(x)$ के ह्रासमान होने के लिए, $f'(x)<0$ है।

अर्थात्, $-6(x+1)(x-2)<0$ है।

यदि $x<-1$, तब $f'(x)= (-)\ (-)(-)<0$ है। अतः, $f(x)$ ह्रासमान है।

और यदि $x>2$ है। तब $f'(x)= (-)(+)(+) < 0$ है। अतः, $f(x)$ ह्रासमान है, जब $x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$ है।

इसलिए $f(x)$ वर्धमान है,जब $x\in(-1,2)$ और $f(x)$ ह्रासमान है, जब $x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$ है।

उदाहरण 8: वह अंतराल ज्ञात कीजिए, जिसमें फलन

$f(x) = x^4 - 2x^2$

i) वर्धमान है।

ii) ह्रासमान है।

हल: $f(x) = x^4 - 2x^2$

$\Rightarrow f'(x)= 4x^3 - 4x$

$= 4x(x^2-1)$

$= 4x(x-1)(x+1)$

i) $f(x)$ वर्धमान होने के लिए, $f'(x)$ शून्य से बड़ा होना चाहिए। अर्थात्

$f'(x) = 4x(x-1)(x+1)>0$

यदि $-1<x<0$ है, तो $f'(x)= 4\ (-)\ (-)(+)>0$ है। अतः, f वर्धमान है। साथ ही, यदि $x>1$, है, तब $f'(x)= 4(+)\ (+)\ (+)>0\Rightarrow f(x)$ वर्धमान है।

अतः, $f(x)$ वर्धमान है, यदि $x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$ है।

ii) $f(x)$ के ह्रासमान होने के लिए, $f'(x)<0$ है।

अर्थात्, $4x(x-1)(x+1)<0$ है।

यदि $-\infty<x<-1$, है, तो $f'(x)= 4(-)\ (-)(-)<0$ है। तथा यदि $0<x<1$ है। तो $f'(x) = 4(+)(-)(+) <0$ है।

अतः, $f(x)$ ह्रासमान है, जब $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ है। इस प्रकार, $f(x)$ वर्धमान है,जब $x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$ है तथा $f(x)$ ह्रासमान है, जब $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$. है।

उदाहरण 9: किसी फर्म का राजस्व फलन

$R = [8,00,000 + (x - 300)^2]$ द्वारा दिया जाता है।

x के वे मान निर्धारित कीजिए, जिनके लिए, कुल राजस्व फलन वर्धमान और ह्रासमान है।

हल:

$R'(x) = +2\,(x - 300)$

राजस्व फलन के वर्धमान होने के लिए, $R'(x) > 0$ होगा।

अर्थात्, $+\,2(x - 300) > 0$ है।

अतः, राजस्व फलन x के 300 से बड़े मान, अर्थात् $x > 300$ के लिए, वर्धमान है। राजस्व फलन के ह्रासमान होने के लिए $R'(x) < 0$ होगा।

अर्थात् $2(x - 300) < 0$ है।

जब $x=0$ है, तब $R'(x) < 0$

तथा $x - 300 < 0$ है।

अर्थात् $x < 300$ है।

अतः, राजस्व फलन $x = 0$ तथा 0 और 300 के बीच x के मानों के लिए, अर्थात् $0 \leq x \leq 300$ के लिए ह्रासमान है। इसका $x = 300$ पर स्थिर मान है।

बोध प्रश्न ख

1. यदि किसी फलन को अंतराल [a,b] में वर्धमान फलन कहा जाता है, तो इस दावे का सत्यापन करने के लिए, आप क्या करेंगे ?

2. कौन–सी कोटि का अवकलज किसी फलन (वक्र) की प्रवणता को स्पष्ट करता है?

3. प्रथम और द्वितीय कोटियों के अवकलजों पर प्राप्त हुए परिणामों के आधार पर पर एक ह्रासमान फलन को स्पष्ट कीजिए।

8.4 उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ

किसी फलन का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ उस फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान होता है, जो या तो एक दिए परिसर के अंदर (स्थानीय या सापेक्ष चरम) या उस फलन के संपूर्ण प्राँत पर परिभाषित होता है। उच्चिष्ठ का अर्थ उपरि परबिद्ध (upper bound) या अधिकतम संभव मान होता हैं किसी फलन का निरपेक्ष (absolute) उच्चिष्ठ उस फलन के परिसर में अंतर्विष्ट सबसे बड़ी संख्या है। अर्थात्, यदि फलन के प्राँत में सभी x के लिए, $f(a)$ या तो $f(x)$ से बड़ा है या उसके बराबर है, तो $f(a)$ निरपेक्ष उच्चिष्ठ (absolute maximum) होता है। दूसरी ओर निम्निष्ठ (*minimum*) का अर्थ है निम्न परिबद्ध (lower bound) या न्यूनतम संभव मान। किसी फलन का निरपेक्ष, निम्निष्ठ उस फलन के परिसर में अंतर्विष्ट सबसे छोटी संख्या है तथा यह उसके आलेख के निम्नतम बिंदु पर फलन के मान के संगत होती है। यदि $f(a)$ फलन के प्राँत में सभी x के लिए या तो $f(x)$ से छोटा है या उसके बराबर है, तो $f(a)$ निरपेक्ष निम्निष्ठ होता है।

8.4.1 स्थानीय चरमतमानों के लिए प्रथम अवकलज जाँच

i) $f'(x)$ ज्ञात कीजिए।

ii) फलन $f(x)$ के सभी क्रांतिक मानों $(critical\ values)$ को ज्ञात कीजिए, अर्थात् x के वे सभी मान जहाँ $f'(x)=0$ है।

iii) x का प्रत्येक क्रांतिक मान, मान लीजिए $x = a$ प्रथम अवकलज का चिह्न निर्धारित करता है। यदि प्रथम अवकलज $f'(x)$ का मान a से होकर जाते हुए x में वृद्धि होने पर, धनात्मक से ऋणात्मक हो जाता है, तो $x = a$ पर वह फलन एक स्थानीय $(local)$ उच्चिष्ठ प्राप्त कर लेता है। यदि a से होकर जाते हुए x में वृद्धि होने पर $f'(x)$ का मान ऋणात्मक से धनात्मक हो जाता है, तो वह फलन $x = a$ पर एक स्थानीय निम्निष्ठ प्राप्त कर लेता है।

iv) यदि a से होकर जाते हुए $f'(x)$ में वृद्धि होने पर $f'(x)$ के चिह्न में कोई परिवतन नहीं होता है, तो $x = a$ पर कोई स्थानीय चरमतम $(local\ extremum)$ नहीं होता है। ऐसा बिंदु नतिपरिवर्तन बिंदु $(pont\ of\ inflextion$ या $inflection)$ कहलाता है।

8.4.2 स्थानीय चरमतम मानों के लिए द्वितीय अवकलज जाँच

किसी फलन $f(x)$ के लिए कहा जाता है कि उसका एक

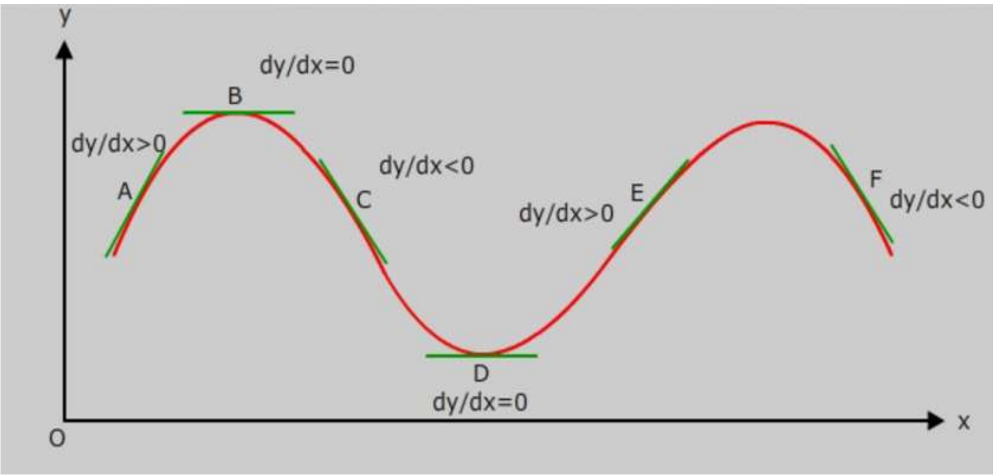
- एक क्रांतिक बिदु $x = a$ पर एक उच्चिनष्ठ है, यदि उस बिंदु पर $f'(x) = 0$ और $f''(x) < 0$ है।
- एक क्रांतिक बिदु $x = a$ पर एक निम्ननिष्ठ है, यदि उस बिंदु पर $f'(x) = 0$ और $f''(x) > 0$ है।

वह बिंदु, जहाँ $f''(a) = 0$ है तथा $f'''(a) \neq 0$ है, एक नतिपरिवर्तन बिंदु कहलाता है।

इस प्रकार,

एक सापेक्ष उच्चिष्ठ के लिए	एक सापेक्ष निन्निष्ठ के लिए
$\frac{dy}{dx} = 0$(प्रथम कोटि प्रतिबंध)	$\frac{dy}{dx} = 0$(प्रथम कोटि प्रतिबंध)
$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$(द्वितीय कोटि प्रतिबंध)	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$(द्वितीय कोटि प्रतिबंध)

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के बिंदु नीचे आरेख में दर्शाए गए हैं:



आकृति 8.3

एक फलन उन बिंदुओं पर वर्धमान होता है, जहाँ प्रथम अवकलज धनात्मक होता है, अर्थात् आरेख के बिंदुओं A और E पर। कोई फलन उन बिंदुओं पर ह्रसमान होता है, जहाँ प्रथम अवकलज ऋणात्मक होता है, अर्थात् आरेख के बिंदुओं C और F पर। उन बिंदुओं B और D पर, जहाँ फलन सापेक्ष उच्चिनष्ठ (relative maximum) या सापेक्ष निम्निष्ठ पर है, फलन के प्रथम अवकलज या वक्र की प्रवणता का मान शून्य के बराबर है। यह सापेक्ष उच्चिष्ट और सापेक्ष निम्निष्ठ दोनों के लिए आवश्यक प्रतिबंध है।

द्वितीय अवकलज सीमांत (या उपांत) फलन (marginal function) में परिवर्तन की दर का मापन करता है, यदि प्रथम अवकलज शून्य है, जो एक शून्य प्रवणता प्रदर्शित करता है, तथा इसी कारण फलन में एक पठार या एक सममतल भूमि या एक प्लॉटो (plateau) को प्रदर्शित करता है, जबकि द्वितीय अवकलज ऋणात्मक है। इसका अर्थ है कि वह फलन प्लॉटों से नीचे की ओर चल रहा है तथा उसे एक सापेक्ष उच्चिष्ठ पर होना चाहिए। यदि प्रथम अवकलज शून्य है और द्वितीय अवकलज धनात्मक है, तो इसका अर्थ है कि फलन एक घाटी (valley) से ऊपर की ओर चल रहा है तथा इस फलन का एक सापेक्ष निम्निष्ठ है। वह बिंदु जिस पर प्रथम अवकलज शून्य के बराबर है, क्रांतिक मान या स्थिर मान या चरम मान बिंदु कहलाता है। यदि द्वितीय अवकलज शून्य है, परंतु तृतीय अवकलज शून्य के बराबर नहीं है, तो यह क्रांतिक मान न तो उच्चिष्ठ होता है और न ही निम्निष्ठ होता है। यह एक नतिपरिवर्तन बिंदु होगा, जिस पर फलन अपनी परिवर्तन दर में बदलाव करता है। आकृति में बिंदु A एक नतिपरिवर्तन बिंदु है।

8.4.3 द्वितीय कोटि अवकलज से उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए चरण

I) फलन $f'(x) = 0$ का प्रथम अवकलज ज्ञात कीजिए, अर्थात् $f'(x)$ परिकलित कीजिए।

II) प्रथम अवकलज को शून्य के बराबर स्थापित कीजिए तथा समीकरण $f'(x) = 0$ के वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए। इससे स्वतंत्र चर $x = a$ के क्राँतिक बिंदु प्राप्त होते हैं।

III) फलन का द्वितीय अवकलज $f''(x)$ ज्ञात कीजिए।

IV) द्वितीय अवकलज में प्रत्येक क्राँतिक मान को प्रतिस्थपित कीजिए। क्रांतिक मानों के प्रतिस्थापन के बाद, द्वितीय अवकलज धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता हैं।

v) यदि $f''(a) = 0$, है और $f'''(x)$, तो फलन का तृतीय अवकलज $f'''(x)$ ज्ञात कीजिए। तृतीय अवकलज शून्य या शून्येतर हो सकता है। किसी फलन के अधिकतभीकरण या निम्नतभीकरण से संबंधित सूचना केवल किसी एक सम कोटि (even–ordered) के अवकलज से प्राप्त की जा सकती है, जबकि एक नतिपरिवर्तन बिंदु से संबंधित सूचना केवल किसी एक विषम कोटि (odd–ordered) के अवकलज से प्राप्त की जा सकती है।

उदाहरण 10: प्रथम अवकलज नियम द्वारा, फलन $f(x) = x^4 - 8x^3 - 22x^2 - 24x + 61$ के स्थानीय

उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ के सभी बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

हलः

$f(x) = x^4 - 8x^3 - 22x^2 - 24x + 61$ दिया है।

अतः, $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 - 44x - 24$

$= 4(x-1)(x-2)(x-3)$ है।

$f'(x)=0$ रखने पर,

$4(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ है। अतः,

या तो $x=1$ है, या $x=2$ या $x=3$ है।

यदि $x<1$ है, तो $f'(x) = 4\,(-)(-)(-)<0$ है।

यदि $1<x<2$ है, तो $f'(x) = 4\,(+)(-)(-)>0$ है।

यदि $2<x<3$ है, तो $f'(x) = 4\,(+)(+)(-)<0$ है।

यदि $x>3$ है, तो $f'(x) = 4\,(+)(+)(+)>0$ है।

जब $x=1$ है, तब x के मान में 1 से होकर जाने पर वृद्धि होने पर, $f'(x)$ का चिह्न

ऋणात्मक से घनात्मक में बदल जाता है। अतः, यहाँ $x=1$ पर एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

फलन $f(x)$ का संगत निम्नतम मान है।

$f(1) = 1-8+22-24+1 = -8$ है।

जब $x=2$ है, तब x के मान में 2 से हो कर जाने पर वृद्धि होने पर $f(x)$ चिह्न घनात्मक से ऋणात्मक में बदल जाता है। अतः, $x=2$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ है। फलन $f(x)$ का संगत

अधिकतम मान $f(2) = 16-64+88-48+1 = -7$ है। जब $x = 3x$ है, तब $f'(x)$ के मान में 3 से होकर जाने पर वृद्धि होने पर, $f(x)$ का चिह्न ऋणात्मक से धनात्मक में बदल जाता है। अतः, $x = 3$ पर स्थानीय निम्नतम है। फलन $f(x)$ का संगत न्यूनतम मान $f(3) = 81-216+198-72+1 = -8$ है।

उदाहरण 11: प्रथम अवकलज नियम के उपयोग द्वारा फलन

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 60$ दिया है।

के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्नष्ठ के सभी बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

हलः

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 60$, दिया है।

अतः, $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$

$= 6(x^2 - 5x + 6)$

$= 6(x-2)(x-3)$ है।

$f'(x)=0$ रखिए।

अर्थात् $6(x-2)(x-3)=0$ है।

अतः $f'(x)=0$ है। जब $x=2$ या $x=3$ है।

यदि $x<2$ है। तो $f'(x)= 6(-)(-)>0$;

यदि $2<x<3$ है। तो $f'(x)= 6(+)(-)<0$ है और

यदि $x>3$ है। तो $f'(x)= 6(+)(+)>0$ है।

क्योंकि 2 में से होकर जाने पर x के मान में वृद्धि होने पर $f'(x)$ का चिह्न + से – में बदल जाता है, इसलिए $x = 2$ स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है। इसी प्रकार, 3 में से होकर जाने पर x के मान में वृद्धि होने पर $f'(x)$ का चिह्न – से + बदल जाता है। अतः, $x = 3$ स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है।

उदाहरण 12: फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 60$ के उच्चिनष्ठ और निन्निष्ठ के सभी बिंदुओं को ज्ञात करने के लिए, द्वितीय कोटि अवकलज जाँच का उपयोग कीजिए।

हलः $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 60$ दिया है।

अतः, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$= 3(x^2 - 2x - 3)$

$= 3(x+1)(x-3)$ है।

$f'(x) = 0$ रखिए जिससे,

$3(x+1)(x-3) = 0$ है अतः,

या तो $x = -1$ या $x=3$ है।

इसलिए, $x = -1$ और $x=3$ फलन के क्राँतिक मान हैं।

$f''(x) = 6x - 6$ लीजिए।

जब $x = -1$, है, तब $f''(x) = f''(-1) = 6(-1) - 6 = -6 - 6 = -12$ है।

क्योंकि, $x = -1$ पर, $f''(x)<0$ है, इसलिए $x= -1$ पर फलन का उच्चिष्ठ है।

जब $x = 3$ है, तब $f''(x) = f''(x) = 6(3) - 6 = 18 - 6 = 12$ है।

क्योंकि $x = 3$ पर $f''(x) > 0$ है, इसलिए $x = 3$ पर फलन का निम्निष्ठ है।

उदाहरण 13: फलन $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 18$ के उच्चिष्ठ और निन्मिष्ठ के सभी बिंदुओं को ज्ञात करने के लिए, द्वितीय अवकलज जाँच का उपयोग कीजिए।

हल: $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 18$ दिया है।

$$\text{अतः, } f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

$$= 5x^2 (x^2 - 4x + 3)$$

$$= 5x^2 (x-1)(x-3) \text{ है।}$$

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$$5x^2 (x-1)(x-3) = 0 \text{ है।}$$

उपरोक्त समीकरण को हल करने पर, $x=0$, $x=1$ और $x=3$ प्राप्त होता है।

हमें $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$ प्राप्त है।

यदि $x=1$ है तो $f''(x) = -10<0$ है। अतः, $x=1$; पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ है।

यदि $x=3$,है, तो $f''(x) = 90>0$, है। अतः $x=3$ पर एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

यदि $x= 0$ है, तो $f''(x)=0$ है। यहाँ द्वितीय अवकलज जाँच फेल (असफल) हो जाती हैं।

अब, तृतीय अवकलज ज्ञात करने पर,

$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30$, अतः,

$f'''(0) = 30>0$ है।

क्योंकि तृतीय कोटि अवकलज एक विषम संख्या है, इसलिए $x=0$ पर इस फलन का न तो कोई उच्चिष्ठ और न ही कोई निन्मिष्ठ है। अतः, इस फलन का $x=0$ पर नतिपरिवर्तन बिंदु है।

उदाहरण 14: फलन $f(x) = (1-x)^2 e^x$ के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए। साथ ही, संगत अधिकतम और न्यूनतम मान भी ज्ञात कीजिए।

हल: $f(x) = (1-x)^2.e^x = (1- 2x + x^2)\, e^x$ है।

$$\text{अतः, } f'(x) = (1- 2x + x^2)\, e^x + e^x (-2 + 2x)$$

$$= (1- 2x + x^2 - 2 + 2x)\, e^x$$

$$= (x^2 - 1)\, e^x \text{ है।}$$

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$(x^2 - 1)\, e^x = 0$, है,

जिससे $x = \pm 1$ है। (क्योंकि $e^x \neq 0$ है)

$f''(x) = e^x\,2x + (x^2 - 1)\,e^x$

$= e^x(x^2 + 2x - 1)$

यदि $x = +1$, है, तो $f''(x) = e(1 + 2 - 1) = 2e > 0$ है।

अतः $x = 1$ पर, एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

संगत न्यूनतम मान $f(1) = (1-1)^2\, e^1 = 0$ है।

यदि $x = -1$, है, तो $f''(x) = e^{-1}(1 - 2 - 1) = -2e^{-1} < 0$.

अतः, $x = -1$ पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ है। $f(x)$ में $x = -1$ रखने पर, संगत अधिकतम मान

$$f(-1) = (1+1)^2\, e^{-1} = 4/e \text{ है।}$$

बोध प्रश्न ग

1. आप किसी फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ से क्या समझते हैं ?
2. किसी फलन के निरपेक्ष निम्निष्ठ का अर्थ स्पष्ट कीजिए।
3. स्थानीय चरम मानों के लिए, एक प्रथम अवकलज जाँच करने के लिए, आप किन चरणों का अनुसरण करेंगे ?
4. एक नतिपरिवर्तन बिंदु का अर्थ कीजिए।
5. किसी फलन का एक स्थिर बिंदु क्या होता है ?
6. द्वितीय कोटि अवकलज के उपयोग से, आप किसी फलन के चरम मानों, उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ को निर्धारित करने के लिए, किस प्रकार की योजना का प्रस्ताव देंगे ?
7. किसी फलन के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ को ज्ञात करते समय, क्राँतिक मान किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं ?

8.5 सारांश

इस इकाई में, हमने किसी वक्र के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ बिदुंओ को ज्ञात करने में किसी फलन के अवकलज का अनुप्रयोग किया है। इसी प्रक्रिया में, हमें उच्चतर कोटि के अवकलजों के प्रस्तुतिकरण तथा इनमें से कुछ के निर्वचन के बारे अध्ययन किया है। उदाहरणार्थ, यह देखा गया है कि किसी फलन का प्रथम कोटि अवकलज एक चर की परिवर्तन–दर प्रदर्शित करता है, जिससे किसी बिंदु पर उसकी संगत वक्र की प्रवणता प्राप्त होती है। दूसरी ओर, द्वितीय अवकलज प्रवणता की परिवर्तन–दर के बारे में सूचना प्रदान करता है। अधिक महत्वपूर्ण बात यह है कि प्रथम और साथ ही द्वितीय कोटि अवकलजों के धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न के आधार पर वर्धमान या ह्रासमान प्रवणता ज्ञात हो जाती है।

अवकलजों के चिह्नों को वर्धमान और ह्रासमान वक्रों को जानने में भी प्रयुक्त किया जा सकता है। जहाँ अंतराल $[a, b]$ में कोई फलन वर्धमान फलन कहा जाता है, यदि

उसका प्रथम कोटि अवकलज अंतराल $[a, b]$ में x के सभी मानों के लिए शून्य से अधिक (अर्थात् $(f'(x) > 0)$ हो, वहीं यह ह्रासमान होता है, यदि उसी अंतराल में x के सभी मानों के लिए, प्रथम कोटि अवकलज शून्य से कम हो, अर्थात् $(f'(x) > 0)$ हो, यदि प्रथम अवकलज शून्य के बराबर है, तो हमें एक स्थिर बिंदु प्राप्त होता है, जो प्रदिर्शित करता है कि वक्र न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है। हमने एक फल्न के उच्चिष्ठ और निम्नष्ठ का अध्ययन उस फलन से सबसे बड़े और सबसे छोटे मान के रूप में किया है, जो उस फलन के या तो एक दिए हुए परिसर में या उसके संपूर्ण प्राँत में परिभाषित होता है। जब इन मानों को एक दिए हुए परिसर में लिया जाता है, तब हम स्थानीय या सापेक्ष उच्चिम्निष्ठ या निम्निष्ठ प्राप्त करते हैं, जबकि फलन के संपूर्ण प्राँत को लेने पर हम सार्वत्रिक ($global$) या निरपेक्ष चरम मानों तक पहुँच जाते हैं।

सापेक्ष उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मानों को अभिकलित करने के लिए, हमने प्रथम और द्वितीय अवकलज जाँचों को सीखा है, जहाँ आकलन प्रथम और द्वितीय कोटि अवकलजों के चिह्नों के आधार पर किया जाता है।

इसके अतिरिक्त हमें नतिपरिवर्तन बिंदुओं से भी परिचित कराया गया है, जहाँ प्रथम और द्वितीय कोटि के अवकलजों के चिह्नों के अनुसार वक्रता ($curvature$) का चिह्न बदलता है। इस इकाई के अंतिम भाग में), द्वितीय कोटि के अवकलज की सहायता से उच्चिष्ठ/निन्निष्ठ को अभिकलित करने के वाँछित चरणों की चर्चा की गई है।

8.6 शब्दावली

निरपेक्ष (सार्वत्रिक) निम्निष्ठ या उच्चिष्ठः किसी फलन के संपूर्ण प्राँत में उस फलन का सबसे छोटा या सबसे बड़ा मान।

स्थानीय (सापेक्ष) निम्निष्ठ या उच्चिष्ठः एक दिए हुए परिसर में, उस फलन का सबसे छोटा या सबसे बड़ा मान।

नतिपरिवर्तन बिंदुः वक्र पर स्थित एक बिंदु जिस पर वक्रता का चिह्न बदलता है।

राजस्वः वह आय जो एक निर्माता अपने सामान्य क्रियाकलापों में अर्जित करता है, प्रायः माल के बेचने तथा सेवाओं से।

प्रवणताः किसी वक्र की प्रवणता एक संख्या है, जो उस वक्र की लंबवत्ता (steepness) की व्याख्या करती है।

स्थिर बिंदु : वह बिंदु जहाँ फलन का बढ़ना या घटना समाप्त हो जाता है।

8.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. अवकलज का चिह्न
2. एक ह्रासमान वक्र
3. प्रथम कोटि अवकलज

4. एक प्रवणता की परिवर्तन–दर

5. फलन का प्रथम अवकलज प्राप्त करें।

6. वर्तमान इकाई के अनुच्छे 8.2 को पढ़ें और उत्तर दें।

(ख)

1. ज्ञात कीजिए कि प्रथम कोटि अवकलज शून्य से अधिक है। (अर्थात् $(f'(x) > 0$ है। अंतराल $x[a,b]$ के सभी मानों के लिए।

2. द्वितीय कोटि अवकलज

3. उप अनुच्छेद 8.3.2 की जाँच कीजिए।

(ग)

1. किसी फलन के एक दिए हुए परिसर या संपूर्ण प्राँत में परिभाषित उस फलन का सबसें बड़ा (अधिकतम) तथा सबसे छोटा (न्यूनतम) मान

2. परिभाषित परिसर में न्यूनतम संख्या है तथा यह फलन के आलेख के निम्नतम बिंदु के संगत मान के बराबर होती है।

3. उपअनुच्छेद 8.4.1 पढ़िए और उत्तर दीजिए।

4. वह बिंदु जिस पर फलन अपनी परिवर्तन–दर में बदलाव करता है।

5. एक चर वाले एक अवकलनीय फलन में, उस फलन के आलेख पर स्थित एक बिंदु, जब फलन का अवकलज शून्य है। अनौपचारिक रूप से यह वह बिंदु है, जहाँ फलन का बढ़ना या घटना समाप्त हो जाता है।

6. उप अनुच्छेद 8.4.2 पढ़िए और उत्तर दीजिए।

7. उप अनुच्छेद 8.4.3 की जाँच कीजिए।

8. एक क्रॉंतिक बिंदु किसी फलन के प्राँत के अभ्यंतर में स्थित होता है, जिस पर $f'(x) = 0$ होता या f' का अस्तित्व नहीं होता है।

8.8 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

1. निम्नलिखित के द्वितीय कोटि अवकलज ज्ञात कीजिएः

   i) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

   ii) $y = AL^a$

2. यदि $y = e^x + \log x$, है, तो सिद्ध कीजिए $y_3 = e^x + 2/x^3$ है।

3. यदि $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $2\, y_1 y_3 = 3y_2^2$ है।

4. यदि $y = 5x^4 + 9x^3 - 8x - 100$ है, तो दर्शाइए $y_5 = 0$ है।

5. वे अंतराल ज्ञात कीजिए, जिन पर निम्नलिखित फलन वर्धमान या ह्रासमान हैं:

   i) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 2$

ii) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

iii) $f(x) = (x+1)^3 (x-3)^3$

iv) $f(x) = x^2 e^x$

6. निम्नलिखित फलनों की उच्चिष्ठ और निम्नष्ठ मानों के लिए जाँच कीजिए:

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$

7. जाँच कीजिए: कि फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ का

i) उच्चिष्ठ है। ii) निम्निष्ठ है। iii) न तो उच्चिष्ठ है और न ही निम्नष्ठ है।

8. द्वितीय अवकलज जाँच के उपयोग द्वारा दर्शाइए कि फलन

$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7)$ का न तो कोई उच्चिष्ठ है और न ही कोई निम्निष्ठ है।

9. दर्शाइए कि $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 5$ का न तो कोई उच्चिष्ठ है और न ही कोई निम्निष्ठ है।

10. दर्शाइए कि x=e पर, फलन $f(x) = \frac{\log x}{x}$ का एक उच्चिष्ठ मान है।

उत्तर:

1. i) $30x^2 - 30x + 7$ ii) $Aa(a-1)L^{a-2}$

5. i) $(-\infty, -2)$ और $(6,\infty)$ पर वर्धमान; $(-2,6)$ पर ह्रासमान

ii) $(-\infty,2)$ और $(3,\infty)$ पर वर्धमान; $(2,3)$ पर ह्रासमान

iii) $(1,\infty)$ पर वर्धमान;, $(-\infty,1)$ पर ह्रासमान

iv) $(-\infty, -2)$ और $(0, \infty)$ पर वर्धमान; $(-2,0)$ पर ह्रासमान

6. i) x=1 पर स्थानीय उच्चिष्ठ, मान, 0, x=0 पर नतिपरिवर्तन ह्रासमान

ii) x= −1/2 पर स्थानीय उच्चिष्ठ, मान 81/16, x=2 पर स्थानीय निम्निष्ठ,

मान =10, x=0 पर नतिपरिवर्तन बिंदु

7. iii) न तो उच्चिष्ठ है और न ही निम्निष्ठ है।

नोट: इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

8.9 संदर्भ पुस्तकें

- Allen, R.G.D., "Mathematical Analysis for Economists", London: English Language Book Society and Macmillan, 1974.
- Bhardwaj, R.S.,"Mathematics for Economics and Business", Delhi: Excel Books, 2005.
- Dowling, Edward,T. "Schaum's Outline Series: Theory and Problems of Mathematics for Economists", New York: McGraw Hill Book Company, 1986.
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Archibald, G.C., Richard G.Lipsey. "An Introduction to A Mathematical Treatment of Economics", Delhi: All India Traveller Bookseller, 1984
- Yamane, Taro, "Mathematics for Economists: An Elementary Survey", New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited, 1970.
- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, Pearson Educational Asia, Delhi, 2002.

इकाई 9 अवकलजों के अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित को समझ पाएँगेः

- मांग और साथ ही आपूर्ति की प्रत्यास्थता; लागत और राजस्व फलनों; लाभ के अधिकतमीकरण में अवकलजों के अनुप्रयोग; तथा
- अधिकतम – न्यूनतम की समस्याओं में अवकलजों का महत्व।

9.1 प्रस्तावना

पिछली दो इकाइयों में, हमने अवकलन की तकनीकों तथा एक फलन के चरम मानों के बारे में चर्चा की है। इस इकाई में, हम अवकलन तकनीकों को सर्वोत्कृष्ट (चुने हुए) व्यापारिक और आर्थिक प्रकरणों में अनुप्रयोग के लिए विस्तृत करेंगे। मूलरूप से, यहाँ एक प्रयास किया गया है कि परिवर्तन की दर तथा साथ ही परिवर्तन की दर में

परिवर्तन को समझने में अवकलजों का उपयोग करना सीखा जाए, जो सीमांत विश्लेषण (marginal analysis) और साथ ही व्यापार अध्ययनों के लिए अति महत्वूपर्ण हैं।

9.2 मांग फलन और आपूर्ति फलन

सूक्ष्म आर्थिक विश्लेषण में, यह कल्पना की जाती है कि मांग और आपूर्ति मूल्य के फलन होते हैं। जहाँ किसी राशि की मांग उसके मूल्य से व्युत्क्रमानुपात रूप से (inversely) संबंधित होती है, वहीं आपूर्ति की स्थिति में वह मूल्य से प्रत्यक्ष रूप से या अनुक्रमानुपात रूप से संबंधित होती है। ऐसी साध्य के कारण, हमें एक नीचे की ओर वाली प्रवणता की मांग वक्र और एक ऊपर की ओर वाली प्रवणता की आपूर्ति वक्र प्राप्त होती है। सरलता के लिए, हम किसी माल या सेवा के लिए, मांग और आपूर्ति वक्र की एक रैखिक फलन के रूप में प्रायः कल्पना करते हैं; यद्यपि अन्य अरैखिक प्रकारों पर भी विचार किया जाता है। इसके परिणामस्वरूप मांग और आपूर्ति वक्रों की प्रवणताएँ क्रमशः ऋणात्मक और धनात्मक होती हैं। इन परिणामों के निगमन (deriving) की प्रक्रिया को देखने के लिए, आइए अवकलजों का उपयोग करें।

हम जानते हैं कि कोई रैखिक समीकरण $y = mx + c$ के रूप की होती है, जहाँ m रेखा की प्रवणता है तथा इसका y अंतः खंड c है। हम किसी मांग फलन का मॉडल $q = -ap + b$ के रूप में (या प्रतिलोम फलन का मॉडल $p = -aq + b$ के रूप में) बना सकते हैं जहाँ p और q क्रमशः मूल्य और राशि निरूपित करते हैं। इस प्रकार की रचना में, मूल्य को क्षैतिज (x) अक्ष के अनुदिश तथा राशि को ऊर्ध्वाधर (y) अक्ष के अनुदिश लेते हैं, क्योंकि हम सोचते है कि मांगी गई या आपूर्तित की गई राशि मूल्य का एक फलन हैं प्रतिलोम मांग फलन की स्थिति में, हम राशि को क्षैतिज अक्ष के अनुदिश तथा मूल्य को ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश लेते हैं। आप इस रूप का उपयोग तब देखेंगे, जब हम सीमांत राजस्व के निगमन पर आएँगे।

एक सामान्य मांग वक्र की स्थिति में, जिसकी प्रवणता नीचे की ओर होती है, प्रवणता ऋणात्मक होती है। इसी प्रकार, एक आपूर्ति वक्र का मॉडल एक रैखिक समीकरण $q = cp + d$ के रूप में बनाया जाता है, जहाँ c धनात्मक चिह्न के साथ आपूर्ति वक्र की प्रवणता है।

9.2.1 मांग वक्र की प्रवणता

मंग वक्र की समीकरण $q = -ap + b$ की स्थिति में, p के सापेक्ष (w.r.t.) p को अवकलित करने पर हम, $\frac{dq}{dp} = -a$ प्राप्त करते हैं। यहाँ प्रवणता $-a$ है तथा यह मूल्य में हुए परिवर्तन के कारण मांगी गई राशि में हुई परिवर्तन – दर को प्रदान करती है। देखिए कि नीचे की ओर वाली प्रवणता की मांग वक्र को ऋणात्मक प्रवणता से निरूपित किया गया है। इस विशेषता के तीन कारण हो सकते हैं; जो ये हैं:

प्रतिस्थापन प्रभावः मूल्य के गिरने या चढ़ने के अनुसार, ग्राहक अधिक या कम खरीदने में अन्य माल को प्रतिस्थापित करेगा।

आय प्रभावः जब मूल्य गिरेंगें या चढेंगे; वास्तविक आय में वृद्धि या कमी होगी।

घटती हुई उपयोगिता का नियमः कम मूल्य पर, ग्राहक अधिक खपत करने को तैयार हो जाते हैं, क्योंकि मूल्य की तुलना करते हुए उन्हें उस माल के खपत से संतुष्टि मिलती है।

9.2.2 आपूर्ति वक्र की प्रवणता

उपरोक्त समीकरण $q = cp + d$ पर विचार करने तथा को q को p के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें आपूर्ति वक्र की प्रवणता प्राप्त होती है। अतः, $\frac{dq}{dp} = c$ आपूर्ति वक्र की प्रवणता है तथा यह धनात्मक है, जो आपर्ति राशि और मूल्य के बीच एक धनात्मक संबंध प्रदर्शित करती है। इसके कारण यह हो सकते हैं:

1. **लाभ का अभिप्रायः** मांग में वृद्धि के करण मूल्यों के बढ़ने पर व्यापारियों को अपने बहिर्वेश में वृद्धि करने पर अधिक लाभ मिल सकता है।
2. **उत्पादन और लागतः** बहिर्वेश में प्रसार करने पर, फर्म की उत्पादन लागत में वृद्धि होगी। इसके परिणामस्वरूप, उत्पादन की इन अतिरिक्त लागतों को पूरा करने के लिए, एक उच्चतर मूल्य की आवश्यकता होगी।
3. **नये प्रवेष करने वाले व्यापारियों के लिए प्रोत्साहनः** उच्चतर मूल्यों से बाजार में प्रवेश करने वाले नए व्यापारियों को प्रोत्साहन मिलेगा, जिससे कुल आपूर्ति में वृद्धि होगी।

बोध प्रश्न क

1. सामान्य मालों के लिए, आपूर्ति वक्र की प्रवणता धनात्मक क्यों होती है ?
2. मांग वक्र की एक ऋणात्मक प्रवणता के लिए, आप किन कारणों को लिखेंगे ?
3. यदि आप एक प्रतिलोम मांग फलन पर विचार करते हैं, तो आप उस मांग फलन को किस विधि से लिखना चाहेंगे?

9.3 प्रत्यास्थता : मांग और आपूर्ति फलन

प्रत्यास्थता (eleasticity) हमें किसी फलन के स्वतंत्र चर में हुए परिवर्तन के कारण उसके आश्रित चर में आए प्रभावों (परिवर्तनों) के बारे में बताती है। इसे निरपेक्ष परिवर्तनों के स्थान पर प्रतिशत परिवर्तनों के पदों में मापा जाता है। उदाहरणार्थ, पहले एक चर x में प्रतिशत परिवर्तन पर विचार करते हैं तथा लिखते हैं:

$$x \text{ में प्रतिश ात परितर्वन} = \frac{\text{चर में } x \text{ परिवर्तन}}{x \text{ का प्रारंभिक मान}}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि X में परिवर्तन ΔX है। यदि X में परिवर्तन X से $X + \Delta X$ X तक होता है, तो X में आनुपातिक परिवर्तन $\frac{\Delta X}{X}$ है।

संख्यात्मक मानों के पदों में देखने पर, हम कहेंगे कि X का मान 20 से परिवर्तित होकर 30 हो जाता है। अतः, X मे अनुपातिक परिवर्तन $= \frac{30-20}{20} = 0.5$ है। इससे X में प्रतिशत परिवर्तन 50% है।

यदि हम प्रत्यास्थता से अपना सरोकार रखें तो हम कहते है X के सापेक्ष Y की प्रत्यास्थता। साथ ही, हमें Y में हुए प्रतिशत परिवर्तन का X में हुए प्रतिशत परिवर्तन के साथ अनुपात निकालने की आवश्यकता होती है। अर्थात्,

$$X \text{ के सापेक्ष की प्रत्य स्थता} = \frac{\text{Y में प्रतिश ात परिवर्तन}}{\text{X में प्रतिश ात परिवर्तन}}$$

कभी–कभी प्रत्यास्थता को ऋणात्मक चिह्न, के साथ परिभाषित किया जाता है, जबकि अन्य स्थानों पर निरपेक्ष मानों में परिभाषित किया जाता है। सुविधा के लिए, आइए प्रतिशत परिवर्तनों की प्रकृति पर बल देने के लिए, चिह्न वाली प्रत्यास्थता पर अपना ध्यान रखें। जब कोई प्रत्यास्थता ऋणात्मक, मान लीजिए, –1 से अधिक है, तो इससे सूचित होता है कि X में कोई प्रतिशत वृद्धि होने पर Y में एक अधिक संगत प्रतिशत कमी होती है। ऐसी स्थिति में, हम कहेंगे कि चर Y चर X के सापेक्ष प्रत्यास्थ $(elastic)$ है।

–1 और 0 के बीच की प्रत्यास्थता यह सूचित करती है कि X में कोई प्रतिशत वृद्धि होने पर, y में एक छोटी $(smaller)$ संगत प्रतिशत कमी होती है। अतः चर Y चर X के सापेक्ष अप्रत्यासस्थ X है। यदि प्रत्यास्थता –1 है, तो X में कोई प्रतिशत वृद्धि होने पर Y में उतनो ही (सर्वसम) प्रतिशत कमी होती हैं। ऐसी स्थिति में चर X के सापेक्ष चर y को इकाई – प्रत्यास्थ $(unit - elastic)$ कहा जाता है।

9.3.1 मांग की मूल्य प्रत्यास्थता

अर्थशास्त्र और व्यापार अध्ययन में, सामान्यतः सबसे अधिक उपयोग में आने वाली प्रत्यास्थता मांग की मूल्य प्रत्यास्थता (PED), अर्थात् मूल्य के सापेक्ष मांग की प्रत्यास्थता है। ऐसी संकल्पना किसी उत्पाद (वस्तु) के मूल्य में परिवर्तनों के होने पर, उस उत्पाद के लिए ग्राहक मांग $(consumer\ demand)$ के प्रभाव को खोजने में हमारी सहायता करती है। यदि कॉफी के एक कप के मूल्य में वृद्धि की जाती है, तो उसकी बिकने वाली राशि पर इसका प्रभाव पड़ेगा। इस बात को समझने के लिए, मान लीजिए कि 2016 में नेस्ले (nestle) कॉफी का मूल्य 4.95 रु. से 5.00 रु कर दिया था। ऐसे परिवर्तन के कारण कॉफी की मांग 440 इकाई प्रति दिन से घट कर 438 इकाई प्रति दिन रह गई। मूल्य P में प्रतिशत परिवर्तन हैः

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{5.00 \ - 4.95}{4.95} = 0.01$$

अर्थात् यह लगभग 1% है मांग Q में प्रतिशत परिवर्तन हैः

$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{438-440}{440} = -0.0045$ या लगभग -0.45% है।

अर्थात्, मूल्य में 1% की वृद्धि होने पर, कॉफी की मांग की राशि में 0.45% कमी होती है। इस प्रकार, मांग की मूल्य प्रत्यास्थता हैः

$$E = \frac{\text{Q में प्रतिश ात परिवर्तन}}{\text{P में प्रतिश ात परिवर्तन}} = \frac{-0.045}{0.01} = -0.45$$

यह परिणाम दर्शात है, कि मूल्य में 1% की वृद्धि से कॉफी की संगत मांग में 0.45% की कमी होती है। दूसरी ओर, हम यह भी कह सकते हैं कि मूल्य में 1% की कमी होने पर, संगत मांग में 0.45% की वृद्धि होती है। मांग और मूल्य के संबंध को एक

फलनक (functional) रूप में लेने पर, मांग फलन के अवकलज का उपयोग मांग की मूल्य प्रत्यास्थता के परिकलन में कर सकते हैं।, यदि हम यह लिखते हैं कि मूल्य P में परिवर्तन ΔP है तथा मांग Q में संगत परिवर्तन ΔQ है, तो मूल्य और मांग में संगत प्रतिशत परिवर्तन क्रमशः $\frac{\Delta P}{P}$ और $\frac{\Delta Q}{Q}$ हैं। प्रतयास्थता की परिभाषा से, हमें प्राप्त होता हैः

$$E_d = \frac{\text{Q में प्रतिश त परिवर्तन}}{\text{P में प्रतिश त परिवर्तन}}$$

$$= \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta Q}{Q} . \frac{P}{\Delta P} = \frac{P}{Q} \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

इस ओर ध्यान दिया जा सकता है कि $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$, मूल्य P के सापेक्ष मांग Q की औसत परिवर्तन – दर निरूपित करता है। यदि हम यह कल्पना करें कि मूल्य में परिवर्तन बहुत कम है, तो हम औसत परिवर्तन – दर को तात्क्षणिक परिवर्तन–दर, अर्थात् $\frac{dQ}{dP}$ से प्रतिस्थापित कर सकते हैं।

मान लीजिए कि मांग फलन $Q = f(P)$ है। तब, मांग की मूल्य प्रत्यास्थता E_d निम्नलिखित से प्राप्त होती हैः

$$E_d = \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$$

विशिष्ट रूप से हम मांग वक्र के किसी बिंदु (p_0, q_0) पर मांग की बिंदु $(point)$मूल्य प्रत्यास्थता को भी $PED = (dq/dp)\,(p_0/q_0)$ के रूप में प्रभिाषित कर सकते हैं।

उदाहरण 1: मान लीजिए कि मांग वक्र $q = -5p + 30$ है। तब, $\frac{dq}{dp} = -5$ है। यदि कोई बिदुं $(p_{0,} q_{0,}) = (1,25)$ मांग वक्र पर स्थित है, तो (1,25) पर हम PED किस प्रकार अभिकलित करते हैं ? सूत्र का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैंः

PED = (-5)(1/25) = -1/5 = -0.20

आगे, यदि कोई बिंदु p=3 और q =15 मांग वक्र पर स्थित है, तो

बिदु (3,15) पर PED = (-5)(3/15) = -1 है। यदि कोई बिंदु p=5 और q=5 मांग वक्र पर स्थित है, तो (5,15) पर PED = (-5)(5/5) = -5 है।

इस प्रकार, कैलकुलस की सहायता से हम देखतें हैं कि एक सरल रेखा मांग वक्र के प्रत्येक बिंदु के लिए, PED में परिवर्तन होता है।

सरल गणितीय संबंध पर ध्यान दीजिएः

$$\frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}} = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q} = (1/\text{प्रवणता}) \times \frac{P}{Q}$$

उदाहरण 2: मांग की बिंदु मूल्य प्रत्यास्थता को ज्ञात करने के लिए, आइए मांग फलन के निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें:

$$Q = 15{,}000 - 50P$$

इस मांग वक्र के दिए रहने पर, हमें दो विभिन्न मूल्यों P = 100 और P = 10 पर मांग की मूल्य प्रत्यास्थता को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

अतः, मांग फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए, जब Q को P के एक फलन के रूप में व्यक्त किया गया है। क्योंकि मूल्य (P) में प्रत्येक बार 1 की वृद्धि होने पर राशि (Q) में 50 की कमी होती है, इसलिए हमें $(\Delta Q/\Delta P)= -50$ प्राप्त होता है।

प्रत्येक मूल्य स्तर पर, मांगी गई राशि ज्ञात करने के लिए, हम मूल्य राशि संयोजनों (100:10000), (10:14500) पर विचार करते हैं।

तब, मांग की बिंदु प्रत्यास्थता से प्राप्त होता हैः

$E_d = -50(100/10000) = -.5$
$E_d = -50(10/14500) = -0.34$

प्राप्त परिणाम यह दर्शाते हैं कि दोनो प्रत्यास्थताएँ ऋणात्मक हैं। इसका तात्पर्य एक नीचे की ओर जाने वाली प्रवणता मांग संबंध है। साथ ही, ये सापेक्षतः अधिक प्रत्यास्थ हैं।

Log फलनों के उपयोग से प्रत्यास्थता निगमन

यहाँ प्रत्यास्थता के लिए, एक अन्य व्यंजक है जो कभी–कभी उपयोगी रहता है। यह पाया गया है कि प्रत्यास्थता को $\frac{d\,lnQ}{dlnP}$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

इसकी उपपत्ति में श्रंखला नियम का बार–बार उपयोग संबद्ध रहता है। हम इस ओर ध्यान देते हुए प्रारंभ करते हैं कि

$$\frac{d\,lnQ}{dlnP} = \frac{d\,lnQ}{dQ}.\frac{dQ}{dlnP}$$

$$= \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dlnP} \qquad (1)$$

हम इस ओर भी ध्यान देते हैं कि $\frac{d\,Q}{dP} = \frac{dQ}{dlnP}.\frac{d\,lnP}{dP} = \frac{dQ}{dlnP}.\frac{1}{P}$ है।

$$\Rightarrow \frac{d\,Q}{dlnP} = P\frac{dQ}{dP}. \text{ है।}$$

इसे समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d\,lnQ}{dlnP} = \frac{1}{Q}.\frac{d\,Q}{dP}P = E_d$$

9.3.2 मांग की आय प्रत्यास्थता

मांग की आय प्रत्यास्थता (YED) या मापन करती है कि किसी ग्राहक की आय में परिवर्तन एक विशिष्ट उत्पाद की मांग पर क्या प्रभाव डालती है। यह किसी राशि की मांग (Y). में हुए आनुपातिक परिवतन के कारण, हुए आनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप मं परिभाषित की जाती है। सामान्य माल की स्थिति में, यह आय और मांग में एक धनात्मक (सकारात्मक) संबंध होता है और इसी कारण मांग की आय प्रत्यास्थता का चिह्न धनात्मक होता है। इस प्रकार, हम परिभाषित करते हैं:

$$E_y = \frac{\text{मांग में आनुपातिक परिवर्तन}}{\text{आय में आनुपातिक परिवर्तन}}$$

$$= \frac{\Delta Q/Q}{\Delta Y/Y}$$

$$= \frac{Y}{Q}.\frac{\Delta Q}{\Delta Y}$$

आय में तात्क्षणिक परिवर्तन की स्थिति में, $E_y = \frac{Y}{Q}.\frac{dQ}{dY}$ होता है।

उदाहरण 3: यदि $x=4y^2$ है, जहाँ x किसी माल की मांगी गई राशि है तथा y ग्राहक की आय है, तो मांग की आय प्रत्यास्थता ज्ञात कीजिए।

हलः मांग फलन $x = 4y^2$ दिया रहने पर;

$$E_y = \frac{dx}{dy}.\frac{y}{x} \text{ है।}$$

अब, $\frac{dx}{dy} = 4.2\,y = 8y$ है।

अतः,

$$E_y = 8y.\frac{y}{4y^2} = 2$$

किसी विशिष्ट उत्पाद की मांग की आय प्रत्यास्थता जितनी अधिक होगी उतना ही अधिक वह ग्राहक की आय के परिवर्तन पर अधिक प्रभाव डालेगी।

अब, हम विभिन्न उत्पादों के लिए मांग की आय प्रत्यास्थता का मापन, उन्हें घटिया माल और सामान्य माल के रूप में वर्गीकरण द्वारा, कर सकते हैं।

सामान्य माल

किसी उत्पाद के लिए YED , उसके वर्ग के आधार पर, अर्थात् इस आधार पर कि वह घटिया माल या सामान्य माल है, प्रत्यास्थ या अप्रत्यास्थ हो सकती है। यदि YED शून्य से अधिक है, तो वह उत्पाद आय–प्रत्यास्थ होता है। सामान्य माल की YED धनात्मक होती है। अर्थात् जब ग्राहक की आय में वृद्धि होती है, तब उस माल की मांग में भी वृद्धि होती है।

घटिया माल

किसी माल को घटिया इसलिए कहा जाता है, क्योंकि इससे बेहतर माल विकल्पों के रूप में उपलब्ध होते हैं। ऐसे मालों की आय प्रत्यास्थता ऋणात्मक होती है, अर्थात् YED शून्य से कम होती है। यदि ग्राहकों की आय में वृद्धि होती है, तो उनको ऐसे मालों की मांग कम होती है।

नोटः यदि मांग की आय प्रत्यास्थता ऋणात्मक है, तो माल घटिया होता है।

9.3.3 आपूर्ति की प्रत्यास्थता (Es)

इसे आपूर्तित की गई राशि में आनुपातिक परिवर्तन और मूल्य में हुए आनुपतिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है।

$$E_s = \frac{\text{आपूर्ति में आनुपातिक परिवर्तन}}{\text{मूल्य में आनुपातिक परिवर्तन}}$$

$$= (-)\ (\Delta Q_s/Q_s)/(\Delta P/P)$$

$$= (-)\ \frac{P}{Q_s}\frac{\Delta Q_s}{\Delta P} \text{ या } = \frac{P}{Qs}\frac{dQ_s}{dP} \text{ है।}$$

यदि कोई आपूर्ति वक्र $q = 2p + 20$ के रूप में दी है, तो $dq/dp = 2$ है। यदि कोई बिंदु $p = 1$ और $q = 22$ इस आपूर्ति वक्र पर स्थित है, तो PES (1,22) पर = (2)(1/22) = 1/11 है यदि कोई बिंदु $p = 5$ और $q = 30$ इस आपूर्ति वक्र पर स्थित है, तो (5,30) पर PES = (2)(5/30) = 1/3 है।

उदाहरण 4: आपूर्ति फलन $x=5+2p^2$ के लिए p=2 पर आपूर्ति की प्रत्यास्थता ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई वक्र $x=5+2p^2$ को p के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dx}{dp} = 4p \text{ है। इस प्रकार,}$$

$$E_s = \frac{p}{x}.\frac{dx}{dp} = \frac{p}{5+2p^2}.4p$$

$$= \frac{4p^2}{5+2p^2} \text{ है।}$$

जब p=2 है, तब, $E_s = (4 \times 4)/(5+8) = \frac{16}{13}$ है।

9.3.4 मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता

मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता किसी उत्पाद की मांग पर एक अन्य संबंधित उत्पाद के मूल्य में परिवर्तन होने के कारण पड़ने पर प्रभाव होती है। शब्द 'संबंधित' उत्पाद पर ध्यान दीजिए। ध्यान दीजिए कि असंबधित उत्पादों की मांग की प्रत्यास्थता शून्य होती है। उदाहरणार्थ, काले चने के मूल्य में वृद्धि होने पर आइसक्रीम की मांग पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

हम मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता का मापन एक उत्पाद मांग में हुए प्रतिशत परिवर्तन को एक उत्पाद के मूल्य में हुए प्रतिशत परिवर्तन से भाग देकर कर सकते है। इस प्रकार,

$$\textit{मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता} = \frac{\text{उत्पाद A के लिए मांग में \% परिवर्तन}}{\text{उत्पाद B के लिए मांग में \% परिवर्तन}}$$

या, $(dQ\,/\,dP') \times (P'/Q)$, जहाँ Q= मांगी गई राशि है, तथा $P' = \mathrm{Q}$ से सबंधित उत्पाद का मूल्य है।

इस ओर ध्यान देना उपयोगी है कि मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता इस पर निर्भर करती है कि वह संबंधित उत्पाद एक स्थानापन्न (substitute) है या एक पूरक (complement) है (नीचे देखिए)।

स्थानापन्न और पूरक उत्पाद

जैसा कि पहले ही बताया जा चुका है, क्रॉस प्रत्यास्थता संबंधित उत्पादों के सापेक्ष मांग पर प्रभाव का मापन करती है। साथ ही, ये संबंधित उत्पाद या तो स्थानापन्न या फिर पूरक उत्पाद हो सकते हैं। आइए इन दोनों के बीच के अंतर को समझें।

स्थानापन्न उत्पाद

स्थानापन्न उत्पादों की स्थित में, एक उत्पाद के मूल्य में वृद्धि होने पर, प्रतिस्पर्धी उत्पाद की मांग में वृद्धि हो जाती है। उदाहरणार्थ, पेट्रोल के मूल्य के कोई वृद्धि होने पर ग्राहक को ड़ीजल ओर जाने पड़ेगा और इसलिए ड़ीजल की मांग में वृद्धि हो जाएगी। इस प्रकार, दो स्थानापन्न मालों की क्रॉस मूल्य प्रत्यास्थता सदैव धनात्मक होती है।

पूरक उत्पाद

पूरक उत्पादों की स्थित में, दो या अधिक मालों की मांग साथ–साथ चलती है। उदाहरणार्थ, कॉफी की फलियों (beans) और कॉफी पेपर फिल्टरों (कागज की छलनियों) (proper filters) की मांगों पर विचार कीजिए। यदि कॉफी के मूल्य में वृद्धि होगी, तो फिल्टरों की मांग में कमी हो जाएगी, क्योंकि कॉफी की मांग कम हो जाएगी। दो पूरक उत्पादों के लिए, मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता सदैव ऋणात्मक होती है।

उदाहरण 5: हमें Q की मांग समीकरण $Q = 2000 - 4P + 5ln(P')$ दी हुई है। इस मांग की क्रॉस मूल्य प्रत्यास्थता ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dQ}{dP^1} = \frac{5}{P^1}$$

P' के सापेक्ष अवकलित कीजिए तथा प्राप्त कीजिए:

मांग की क्रॉस–मूल्य प्रत्यास्थता $=\left(\frac{5}{P^1}\right) \times \left(\frac{P'}{2000-40+5ln(P')}\right)$ मांग की क्रॉस–मूल्य प्रत्यास्थता को $P = 5$ और $P' = 10$ पर ज्ञात करने के लिए, इन मानों को मांग की क्रॉस–मूल्य प्रत्यास्थता समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए। इस प्रकार,

मांग की क्रॉस–मूल्य प्रत्यास्थता

इसी प्रकार, मांग की क्रॉस–मूल्य प्रत्यास्थता

= (5/P') × (P'/(2000 -4P + 5ln(P'))
= (5/10) × (10/(2000 - 20 + 5ln(10))

= 0.5 × (10 / 2000 - 20 + 11.51)(क्योंकि यह $ln(10) = 2.302585$ है)

= 0.5 × (10 / 1991.51)
= 0.5 × 0.002008
= 0.001004 है।

इस प्रकार, मांग की क्रॉस–मूल्य प्रत्यास्थता 0.001004 है। क्योंकि यह 0 से अधिक है, इसलिए ये माल स्थानापन्न है।

बोध प्रश्न ख

1. मांग या आपूर्ति की प्रत्यास्थता में निहित धारणा को स्पष्ट कीजिए।
2. आप क्यों कहेंगे कि दो पूरक उत्पादों के लिए, मांग की क्रॉस–प्रत्यास्थता सदैव ऋणात्मक होती है ?
3. आप मांग की आय प्रत्यास्थता के आधार पर घटिया माल की पहचान किस प्रकार करते हैं ?

4. मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता क्या होती है ?

5. आप $y = f(x)$ के प्रत्यास्थ, अप्रत्यास्थ और इकाई प्रत्यास्थ लक्षण का किस प्रकार निर्वचन करेंगे ?

6. आपूर्ति की मूल्य प्रत्यास्थता क्या है ?

9.4 औसत और सीमांत लागत

इस अनुच्छेद में, हक बहिर्वेश उत्पादन की लागत की चर्चा करेंगे तथा विभिन्न संबंधित संकल्पनाओं के हलों को ज्ञात करने के लिए, अवकलजों के अनुप्रयोग करने की प्रक्रिया को देखेंगे। आइए निम्नलिखित लागत संकल्पनाओं से प्रारंभ करें।

1. **कुल लागतः** कुल लागत दो घटकों निश्चित लागत और चर लागत का योग होती है। प्रतीकात्मक रूप में, TC= FC+ VC होती है, जहाँ TC= कुल लागत, FC= निश्चित लागत तथा VC= चर लागत है।

2. **निश्चित लागत :** यह लागत सभी स्तरों के बहिर्वेश के लिए अचर होती है (अर्थात् उत्पादित राशि से स्वतंत्र होती है।) उदाहरणार्थ, मशीनरी की लागत या फेक्ट्री के भवन का किराया इसी श्रेणी में आते हैं।

3. **चर लागतः** बहिर्वेश के स्तर के साथ यह लागत विचरण करती है या बदलती रहती है। कच्चे माल की लागत चर लागत का एक भाग होती है।

कुल लागत दी हुई होने पर, हम निम्नलिखित का निगमन कर सकते हैं:

औसत लागतः जिसे प्रति इकाई उत्पादन की लागत के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा $AC = \frac{TC}{q}$ के रूप में लिखा जाता है। जहाँ q बहिर्वेश की q इकाइयाँ हैं।

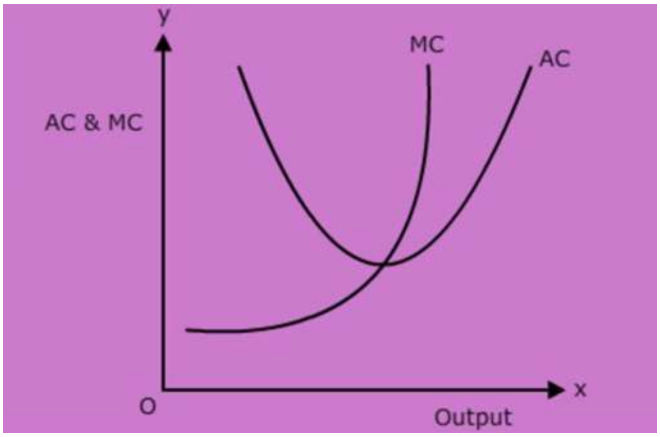
सीमांत लागतः जो कुल लागत में परिवर्तन की दर है, जब उत्पादन q इकाई हुआ है तथा इसे

$MC = \frac{d(TC)}{dq}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है।

AC और MC और के बीच संबंध

AC और MC के बीच संबंध को नीचे दिए हुए आरेख की सहायता से स्पष्ट किया जा सकता है।

$\frac{d(AC)}{dx} < 0$	$\frac{d}{dx}(AC) = 0$	$\frac{d}{dx}(AC) > 0$
$\Rightarrow \frac{1}{x}(MC - AC) < 0$	$\Rightarrow \frac{1}{x}(MC - AC) = 0$	$\frac{1}{x}(MC - AC) > 0$
or $(MC - AC) < 0$	$\Rightarrow MC - AC = 0$	or $MC > AC$
or $MC < AC$	$\Rightarrow MC = AC$	
(जब AC की प्रवणता नीचे की ओर है, AC की नीचे MC है)	(जब AC अपने न्यूनतम को प्राप्त कर लेती है, AC को MC प्रतिच्छेद करती है।	(जब की AC प्रवणता ऊपर की ओर है, के AC ऊपर MC है।



उदाहरण 6:

यदि $TC = 2q^2 + 8q + 60$ है, तो $q = 3$, 3 पर AC और MC को परिकलित कीजिए तथा परिणाम का निर्वचन कीजिए।

हल: $TC = 2q^2 + 8q + 60$ दिया है।

अतः ,$AC = \frac{TC}{q}$

$$= \frac{2q^2 + 8q + 60}{q}$$

$$= 2q + 8 + \frac{60}{q} \text{ है।}$$

$$MC = \frac{d(TC)}{dq}$$

$$= \frac{d(2q^2 + 8q + 60)}{dq}$$

$$= 4q + 8 \text{ है।}$$

जब $q = 3$, तब $MC = 4x3 + 8 = 20$ है।

निर्वचन : इसका अर्थ है कि जब उत्पादन में तीसरी इकाई से चौथी इकाई तक 1 इकाई की वृद्धि होती है, तब कुल लागत लगभग 20रु. बढ़ जाती है।

उदाहरण 7: किसी फर्म की कुल लागत $C(x) = 0.005\,x^3 - 0.002\,x^2 - 30\,x + 5000$ है। जहाँ x बहिर्वेश है। ज्ञात कीजिए:

i) निश्चित लागत

ii) चर लागत

iii) औसत लागत

iv) औसत चर लागत

v) सीमांत लागत

vi) सीमांत लागत, जब उत्पादन 50 इकाई है। परिणामों का निर्वचन कीजिए।

vii) 51वीं इकाई के उत्पादन की वास्तविक लागत

viii) x के सापेक्ष सीमांत लागत में परिवर्तन – दर

ix) सीमांत औसत लागत

हल:

$C(x) = 0.005x^3 - 0.002\ x^2 - 30x + 5000$ दिया है। हमें ज्ञात करना है:

i) x=0 रखने पर निश्चित लागत (बहिर्वेश) = 0 हैं।

हम FC = 5000 प्राप्त करते हैं।

ii) VC= TC – FC

$= 0.005x^3 - 0.002\ x^2 - 30x + 5000 - 5000$

$= 0.005x^3 - 0.002\ x^2 - 30x$

iii) $AC = TC/x = \frac{0.005x^3 - 0.002\ x^2 - 30x + 5000}{x} = 0.005x^2 - 0.002\ x - 30 + \frac{5000}{x}$

iv) औसत चर लागत = AVC= VC/x

$= \frac{0.005x^3 - 0.002\ x^2 - 30x}{x}$

$= 0.005x^2 - 0.002\ x - 30$

v) $MC = \frac{d(TC)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(0.005x^3 - 0.002\ x^2 - 30x + 5000\right) = 0.015\ x^2 - 0.004x - 30.$

vi) जब x= 50 है, तब $MC = 0.015\ (50)^2 - 0.004(50) - 30 = 7.3$

निर्वचन: इसका अर्थ है कि जब उत्पादन में 50वीं से 51 वीं इकाई तक 1 इकाई की वृद्धि होती है, तब कुल लागत में लगभग □ 7.30 की वृद्धि होती है।

vii) $C(51) = 0.005(51)^3 - 0.002\ (51)^2 - 30(51) + 5000 = 4128.05$ है।

$C(50) = 0.005(50)^3 - 0.002\ (50)^2 - 30(50) + 5000 = 4120$ है।

अतः, 51वीं इकाई उत्पादन की वास्तविक लागत

$= C(51) - C(50) = 4128.05 - 4120 = 8.05$ है।

viii) MC में परिवर्तन – दर$= \frac{d(MC)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(0.015x - 0.004\ x - 30\right)$

$= 0.030\ x - 0.004$

ix) सीमांत औसत लागत $= \frac{d(AC)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(0.005x^2 - 0.002\ x - 30 + \frac{5000}{x}\right)$

$= 0.010\ x - 0.002 - \frac{5000}{x^2}$

उदाहरण 8: सिद्ध कीजिए कि $TC = ax^3 + bx^2 + cx + d$ के लिए औसत लागत वक्र की प्रवणता $\frac{1}{x}(MC - AC)$ होती है।

हल: $TC = ax^3 + bx^2 + cx + d$ दिया है।

$AC = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x} = ax^2 + bx + c + d/x$

अतः, AC की प्रवणता $= \frac{d(AC)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}\right)$

$= 2ax + b - d/x^2$ है।

साथ ही, $MC = \frac{d(TC)}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

$= 3ax^2 + 2bx + c$ है।

अब, $\frac{1}{x}(MC - AC) = \frac{1}{x}\left(3ax^2 + 2bx + c - ax^2 - bx - c - \frac{d}{x}\right)$

$= \frac{1}{x}\left(2ax^2 + bx - \frac{d}{x}\right)$

$= 2ax + b - d/x^2$

$=$ AC की प्रवणता है।

अतः, सिद्ध हुआ।

बोध प्रश्न ग

1. जब AC न्यूनतम है, तो MC का मान किसके बराबर होता है ?
2. जब कोई फर्म शून्य बहिर्वेश उत्पादित करती है, तो उस फर्म द्वारा व्यय की गई लागत का नाम बताइए।
3. उत्पादन की कुल लागत के घटक क्या–क्या है ?

9.5 राजस्व फलन

एक राजस्व फलन (revenue function) राजस्व और बहिर्वेश के बीच संबंध को प्रदर्शित करता है। ध्यान दीजिए कि राजस्व मूल्य (p) और बहिर्वेश (q) अर्थात् उत्पाद का मूल्य तथा उसकी बेची गई राशि (मात्रा) कर गुणनफल होता है। यह कहना आवश्यक नहीं है। कि यदि किसी माल के मूल्य में वद्धि होती है, तो उसकी बेची गई राशि में कमी होती है। अतः राजस्व में वृद्धि या कमी हो सकती है। इसे देखने के लिए, आइए कुल राजस्व $(TR) = pq = pf(q)$ लिखें जहाँ p माल का प्रति इकाई मूल्य है तथा q उस वस्तु की बेची गई कुल इकाइयाँ हैं।

यदि हम राजस्व और बहिर्वेश में संबंध की प्रकृति को देखना चाहते है, तो हमे मांग की मूल्य प्रत्यास्थता की जाँच करनी होगी। निस्संदेह, मूल्य प्रत्यास्थता तथा राजस्व परिवर्तन में एक बहुत उपयोगी संबंध है। इस अंतदृष्टि की जाँच करने के लिए, आइए कुल राजस्व को $TR = pq$ के रूप में व्यक्त किया जाए।

यदि हम मूल्य परिवर्तन को $p + \Delta p$ मान लें तथा राशि परिवर्तन को $q + \Delta q$ माने लें तो प्राप्त राजस्व हो जाएगाः

$$R = (p + \Delta p)(q + \Delta q)$$

$$= pq + q\Delta p + p\Delta q + \Delta p\Delta q$$

TR को R में से घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\Delta TR = q\Delta p + p\Delta q + \Delta p\Delta q$$

Δp और Δq के छोटे (लघु) मानों के लिए, हम अंतिम पद को छोड़ सकते हैं तथा राजस्व को $\Delta TR = q\Delta p + p\Delta q$ के रूप में प्राप्त करते हैं।

मूल्य में प्रति इकाई परिवर्तन से, राजस्व की परिवतर्न–दर

$\frac{\Delta TR}{\Delta p} = q + p\frac{\Delta q}{\Delta p}$ है।

इस प्रकार, जब मूल्य में वृद्धि होती है, तब राजस्व में वृद्धि होती है, यदि मांग की प्रत्यास्थता निरपेक्ष मान में 1 से कम है। इसी प्रकार, जब मूल्य में वृद्धि होती है, तब राजस्व में कमी होती है, यदि मांग की प्रत्यास्थता निरपेक्ष मान में 1 से अधिक होती है।

इसे देखने के लिए, हम $\frac{\Delta R}{\Delta p}$ के सूत्र पर वापिस आते हैं तथा इस रूप मे पुनर्व्यवस्थित करते हैं:

$$\frac{\Delta TR}{\Delta p} = q + p\frac{\Delta q}{\Delta p}$$

$$= q\left[1 + \frac{p}{q}.\frac{\Delta q}{\Delta p}\right]$$

$$= q[1 + E_d]$$

क्योंकि मांग प्रत्यास्थता को ऋणात्मक कहा जाता है, इसलिए हम इस व्यंजक को $q[1 - [((E_d)]$ के रूप में लिखते हैं।

इस सूत्रण में, यह देखना सरल है कि मूल्य में परिवर्तन होने पर राजस्व पर क्या प्रभाव पड़ता है: यदि प्रत्यास्थता का निरपेक्ष मान 1 से अधिक है, तो $\frac{\Delta TR}{\Delta p}$ को ऋणात्मक होना चाहिए तथा विलोमतः यदि प्रत्यास्थता का निरपेक्ष मान 1 से हम है $\frac{\Delta TR}{\Delta p}$ को धनात्मक होना चाहिए। सहजानात्मक रूप से, यदि मांग पर मूल्य का बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है, अर्थात् वह बहुत अधिक प्रत्यास्थता वाली है, तो मूल्य में वृद्धि से मांग में इतनी कमी हो सकती है कि राजस्व गिर जाएगा। यदि मांग पर मूल्य का लगभग कोई प्रभाव नहीं पड़ता है, अर्थात् उसमें अप्रत्यास्थता है, तो मूल्य में वृद्धि होने पर मांग पर अधिक प्रभाव नहीं पड़ेगा तथा समग्र राजस्व में वृद्धि होगी। –1 की प्रत्यास्थता को एक विभाजन रेखा लेते हुए, हम कह सकते हैं कि ऐसी स्थिति में यदि मूल्य में 1 प्रतिशत की वृद्धि होती है, तो राशि में 1 प्रतिशत की कमी होगी। अतः, समग्र राजस्व में कोई परिवर्तन नही होगा तथा हमें एक इकाई प्रत्यास्थता प्राप्त होगी।

9.5.1 AR, MR और मांग की मूल्य प्रत्यास्थता में संबंध

हम राजस्व और मूल्य प्रत्यास्थता पर उपरोक्त परिणाम को आगे इसके सीमांत और औसत राजस्व के सबंध के लिए विस्तृत कर सकते हैं। इस दिशा में कार्य करने के लिए, आईए पहले इन पदों को परिभाषित कर लें।

औसत राजस्व **AR** प्रति इकाई राजस्व होता है तथा इसे

$\mathrm{AR} = \frac{\mathrm{TR}}{\mathrm{q}} = \frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{q}} = p$ के रूप में अभिकलित किया जा सकता है।

सीमांत राजस्व (MR) बहिर्वेश की अतिरिक्त इकाई को बेचने के परिणामस्वरूप कुल राजस्व में हुआ परिवर्तन होता है। इस प्रकार,

$MR = \frac{d(TR)}{dq}$ होता है।

प्रत्यास्थता और सीमांत राजस्व

हम ऊपर देख चुके हें कि मूल्य और राशि में हुए छोटे परिवतनों के लिए, राजस्व में परिवर्तन इस प्रकार दर्शाया जाता हैः

$$\frac{\Delta TR}{\Delta p} = q + p\frac{\Delta q}{\Delta p}$$

$$\text{या, } \Delta TR = q\Delta p + p\,\Delta q$$

दोनों पक्षों को Δq से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैंः

$$\frac{\Delta TR}{\Delta q} = q\frac{\Delta p}{\Delta q} + p\frac{\Delta q}{\Delta q}$$

या $MR = \frac{\Delta TR}{\Delta q} = p + q\frac{\Delta p}{\Delta q}$

या $MR = p\left[1 + \frac{q}{p}\frac{\Delta p}{\Delta q}\right]$

यह स्मरण करते हुए कि हम MR और E_d में एक संबंध निर्गमित करने का प्रयास कर रहे हैं, आइए $MR = p\left[1 + \frac{q}{p}\frac{\Delta p}{\Delta q}\right]$ के दूसरे पद में कुछ सुधार करने का संकल्प लें। बृहत रूप से यह E_d के प्रतिलोम जैसे लगता है। अतः, हम $MR = p\left[1 + \frac{1}{E_d}\right]$ लिख सकते हैं। क्योंकि हम E_d को एक ऋणात्मक चिह्न लगा कर लिखते आए हैं, हम यहाँ भी E_d को निरपेक्ष पदों में लिख कर $MR = p\Big[1 -$ $1Ed$ लिखते हैं। ऐसे परिणाम के निर्वचन में, हम कह सकते हैं कि यदि मांग की प्रत्यास्थता –1 है, तो सीमांत राजस्व शून्य है, अर्थात् बहिर्वेश में वृद्धि होने पर राजस्व में कोई परिवर्तन नहीं होता है। यदि मांग अप्रत्यास्थ है तो $|E_d|$ संख्या 1 छोटा होता है, जिसका अर्थ है कि 1 से $\frac{1}{|E_d|}$ अधिक है। इस प्रकार, $1 - \frac{1}{|E_d|}$ ऋणात्मक है। अतः बहिर्वेश में वृद्धि होने पर राजस्व में कमी होगी।

प्रत्यास्थता, औसत राजस्व और सीमांत राजस्व

प्रत्यास्थता, औसत राजस्व और सीमांत राजस्व के बीच में संबंध देखने के लिए, हम केवल $MR = p\left[1 - \frac{1}{|E_d|}\right]$ के साथ कार्य करते हैं। इसके दाएँ को केवल $(\frac{q}{q})$ से गुणा करके प्राप्त कीजिएः

$$MMR = \left(\frac{q}{q}\right)p\left[1 - \frac{1}{|E_d|}\right] = \frac{pq}{q}\left[1 - \frac{1}{|E_d|}\right]$$

$$= \frac{TR}{q}\left[1 - \frac{1}{|E_d|}\right]$$

$$= AR\left[1 - \frac{1}{|E_d|}\right]$$

$$\text{या, } MR - AR = \left[-\frac{AR}{|E_d|}\right]$$

$$\text{या, } -MR + AR = \left[\frac{AR}{|E_d|}\right]$$

$$\text{या, } \frac{AR-MR}{AR} = \frac{1}{|E_d|}$$

$$\text{या, } \frac{AR}{AR-MR} = |E_d| \text{ है।}$$

9.5.2 राजस्व का अधिकतमीकरण

ऊपर देखा गया है कि कुल राजस्व पर मूल्य विचरण (variations) का प्रभाव पड़ता है। एकाधिकार के साथ वाले किसी बाजार ढांचे में निर्माता मूल्य पर नियंत्रण रखता है। यह परिशुद्ध प्रतिस्पर्धा के विपरीत है, जहाँ मूल्य अचर रहता है तथा बहिर्वेश से स्वतंत्र रहता है। ऐसी स्थिति में, मूल्य AR और MR यथार्थ रूप से समान रहते हैं। आइए एक एकाधिकार बाजार के अंतर्गत राजस्व अधिकतमीकरण के मुद्दे को देखें।

उदाहरण 9: 10 रुपए प्रति इकाई के चालू (या वर्तमान) मूल्य वाली एक संपूर्ण प्रतिवर्धित फर्म का कुल राजस्व और सीमांत राजस्व ज्ञात कीजिए।

हलः P= 10 दिया है।

यदि बाजार में q इकाइयाँ बेची जाती हैं; तो

$$TR = p.q = 10q \text{ है।}$$

$$\text{तथा } AR = \frac{TR}{q} = 10$$

$$MR = \frac{d(TR)}{dq} = 10 \text{ है।}$$

अतः, $P = AR = MR = 10$ है, जो अचर है।

एकाधिकार के अंतर्गत, मूल्य फर्म द्वारा निर्धारित किया जाता है तथा इसे बाजार पर नहीं छोडा जाता है। बहिर्वेश के किसी स्तर पर कुल राजस्व अधिकतम होगा, जहाँ कुल राजस्व फलन का प्रथम कोटि अवकलज शून्य है तथा द्वितीय कोटि अवकलज शून्य से कम होगा, अर्थात्

$TR'(q) = 0$ (अर्थात् $MR = 0$) और $TR''(q) < 0$ होगा।

उदाहरण 10: यदि किसी फर्म का मांग फलन $p = 5000 - 20x - x^2$ दिया है, तो TR और MR ज्ञात कीजिए तथा फर्म की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।

हलः

$p = AR = 5000 - 20x - x^2$ दिया है।

$$TR = p.x$$

$$= (5000 - 20x - x^2)\, x$$

$$= 5000x - 20x^2 - x^3$$

$$MR = \frac{d(TR)}{dx} = \frac{d}{dx}(5000x - 20x^2 - x^3)$$

$$= 5000 - 40x - 3x^2$$

क्योंकि AR$\neq$MR है, इसलिए यह फर्म एकाधिकार फर्म है।

उदाहरण 11: दर्शाइए कि p = 5 पर $E_d = \frac{AR}{AR-MR}$ है, जहाँ मांग फलन p = 50 – 3x द्वारा दिया जाता है।

हल: p = 50 – 3x है।

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dp}{dx} = -3 \text{ है।}$$

इनके व्युत्क्रम लेने पर,

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{3} \text{ है।}$$

$$E_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{50-3x}{x}.\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{50-3x}{3x} \text{ है।}$$

यदि p= 5 है, तो x

$$5 = 50 - 3x$$

$$x = 45/3 = 15 \text{ है।}$$

x का मान E_d में रखने पर,

$$E_d = \frac{50-3\times15}{3\times15} = \frac{50-45}{45} = \frac{1}{9} \text{ है।}$$

$$AR = TR/x = p.\,x / x = p = 50 - 3x$$

जब $x = 15$ है, तब

AR= 50 – 3×15 = 50- 45= 5 है।

$$MR = \frac{d(TR)}{dx} = 50 - 6x \text{ है।}$$

जब x =15 है, तब

$$MR = 50 - 6\times15 = 50 - 90 = -40$$

$$\text{अतः } \frac{AR}{AR-MR} = \frac{5}{5-(-40)} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9} = E_d \text{ है।}$$

अतः, सिद्ध हो गया।

बोध प्रश्न घ

1. एक राजस्व फलन क्या होता है ?
2. MR, AR और मांग की मूल्य प्रत्यास्थता के बीच संबंध बताइए।
3. मूल्य प्रत्यास्थता राजस्व परिवर्तन की दर से किस प्रकार संबंधित है ?
4. किसी बाजार ढाँचे के अंतर्गत एक फर्म में राजस्व अधिकतमीकरण का कोई महत्व नहीं है। क्यों ?

9.6 लाभ का अधिकतमीकरण

आर्थिक सिद्धांत सामान्यतः किसी फर्म के व्यवहार का अध्ययन करते समय लाभ अधिकतमीकरण अभिधारणा का प्रयोग उसी प्रकार करता है, जिस प्रकार वह व्यक्तिगत ग्राहकों के लिए उपयोगिता अधिकतमीकरण अभिधारणा का प्रयोग करता है। यह अभिगम उस फर्म के लिए एक सरल तर्कसंगत उद्देश्य की आवश्यकता को संतुष्ट करने के लिए अपनाई जाती है।

लाभ–अधिकतम करने वाली फर्म निवेशों और बहिर्वेशों दोनों को इस प्रकार चुनती है कि कुल राजस्व और कुल लागत के बीच अंतर, अर्थात् $\pi = R(q) - C(q)$ अधिकतम रहे।

वह फर्म अपने नियंत्रण के अंतर्गत चरों को इस प्रकार समावेशित करेगी कि वह आगे लाभ में वृद्धि नहीं होने दे। इस प्रकार वह फर्म निवेश या बहिर्वेश की प्रत्येक इकाई पर उसके लाभ पर होने वाले प्रभाव पर दृष्टि रखती है।

$\times$

आइए राजस्व को $R(q) = p(q) \times q$ के रूप में परिभाषित करें, जहाँ R और p चर q के फलन हैं। ध्यान दीजिए कि हम प्रतिलोम मांग फलन $p(q)$ को ले रहे हैं, जो राजस्व फलन प्राप्त करने के लिए, मूल्य को राशि के फलन के रूप प्रदर्शित कर रहा है। जैसा कि हम नीचे देखेंगे, इससे MR की तीव्रता से परिकलित करने में सहायता मिलती है, जिसकी आवश्यकता फर्मों के लिए लाभ अधिकतमीकरण प्रतिबंध प्राप्त करने में होती है, जहाँ वे किसी भी बाजार ढाँचे की हों।

लाभ फलन को कुल राजस्व और कुल लागत के फलन के रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$\pi = \pi(q) = TR(q) - TC(q)$, अर्थात्

$\pi = p(q) \times q - C(q)$

लाभ को अधिकतम करने के लिए, दोनों पक्षों को अवकलित कर प्राप्त कीजिए:

$$\frac{d\pi}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq}$$

$$\Rightarrow MR = MC$$

ऐसी समिका **प्रथम कोटि प्रतिबंध** निर्दिष्ट करती है तथा इसमें हमें लाभ अधिकतमीकरण के द्वितीय कोटि प्रतिबंध को जोड़ने की आवश्यकता है। अतः, हमें

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$$

होने की आवश्यकता हैं।

अर्थात्, इष्टतम (optimal) राशि (q*) पर सीमांत लाभ में, कमी होनी चाहिए। MR और MC के पदों में हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$$

$TR''(q) - TC''(q) < 0,$

या, $TR''(q) < TC''(q),$

या, $(MR)' < (MC)',$

जिसका अर्थ है कि सीमांत राजस्व की प्रवणता वक्र की प्रवणता से, लाभ अधिकतमीकरण बहिर्वेश पर, कम होनी चाहिए।

उदाहरण 12: किसी फर्म की कुल लागत $C=\frac{1}{3}x^3 - 6x^2+40x+15$ है। यदि मूल्य 20 रुपये प्रति इकाई पर निश्चित है, तो संतुलन बहिर्वेश ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है :

मूल्य (p) = 20

राजस्व (TR) = px

इस प्रकार, राजस्व = R(x) = 20x है।

लाभ = $\pi(x) = TR(x) - TC(x)$

$$= 20x - (\tfrac{1}{3}x^3 - 6x^2+40x+15)$$

$$= 20x - \tfrac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 40x - 15$$

$$= -\tfrac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 20x - 15$$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\pi'(x) = - x^2 +12x - 20$$

अधिकतमीकरण के लिए, $\pi'(x)= 0$

अर्थात, $- x^2 +12x - 20 =0$

या, $x(x-10) +2(x-10) =0$

या, $(x-10)(x-2) =0$

अतः, या तो $x= 10$ या $x = 2$ है।

x के सापेक्ष लाभ फलन का द्वितीय कोटि अवकलज परिकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$\pi''(x) = -2x +12$

जब $x=10$ है, तब

$\pi''(10) = -2(10) +12$

$= -20 + 12= -8<0$ है।

जब $x=2$

$\pi''(2) = -2(2) + 12 = 8 > 0$ है।

क्योंकि द्वितीय कोटि अवकलज $x = 10$ पर शून्य से कम है, इसलिए

लाभ अधिकतमक होगा, जब फर्म बहिर्वेश की 10 इकाइयाँ उत्पादित करेगी।

उदाहरण 13: किसी एकाधिकारी के मांग और लागत फलन क्रमशः $C = 20 + 2x + 3x^2$ और $p = 50 - x$ ओर है। वह बहिर्वेश स्तर और मूल्य ज्ञात कीजिए जिन पर लाभ का अधिकतमीकरण होता है।

हल: राजस्व है। $(TR) = px = x(50 - x^2) = 50x - x^2$

लाभ $(\pi) = TR - TC$

$$= 50x - x^2 - 20 - 2x - 3x^2$$

$$= 48x - 4x^2 - 20 \text{ है।}$$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$d\pi/dx = \pi' = 48 - 8x = 0,$$

जिससे $x = 48/8 = 6$

द्वितीय कोटि अवकलज परिकलित करने पर,

$$\pi'' = -8 < 0 \text{ है।}$$

अतः, $x = 6$ पर लाभ अधिकतम है तथा संतुलन मूल्य

$$P = 50 - x = 50 - 6 = 44 \text{ है।}$$

अतः, संतुलन बहिर्वेश 6 इकाई है तथा संतुलन मूल्य 44 है।

उदाहरण 14:

कोई स्टीरियो (stereo) निर्माता निर्धारित करता है कि एक नए स्टीरियो की x इकाइयों को बेचने के लिए, मूल्य प्रति इकाई (रुपयों में) $p(x) = 1000 - x$ होना चाहिए। वह निर्माता यह भी निर्धारित करता है कि x इकाइयों को निर्मित करने की कुल लागत

$C(x) = 3000 + 20x$ द्वारा दी जाती है।

क) कुल राजस्व $R(x)$ ज्ञात कीजिए।

ख) कुल लाभ $P(x)$ ज्ञात कीजिए।

ग) निर्माता को कितनी इकाइयाँ निर्मित करके बेचनी चाहिए ताकि लाभ अधिकतम हो ?

घ) अधिकतम लाभ क्या है ?

ड.) प्रति इकाई कितना मूल्य लेना चाहिए ताकि यह लाभ अधिकतम हो ?

हलः

क) राजस्व = राशि × मूल्य

$\Rightarrow R(x) = x \times p$

$\Rightarrow R(x) = x(1000 - x)$

$\Rightarrow R(x) = 1000x - x^2$

ख) लाभ कुल राजस्व – कुल लागत

$\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$

$\Rightarrow P(x) = 1000x - x^2 - (3000 + 20x)$

$\Rightarrow P(x) = -x^2 + 980x - 3000$

ग) अतः,

$P'(x) = -2x + 980 = 0$

$\Rightarrow -2x = -980$

$\Rightarrow x = 490$ है।

क्योंकि यहाँ केवल एक ही क्राँतिक मान है, इसलिए यह निर्धारित करने के लिए कि वह एक अधिकतम देता है या न्यूंनतम, हम द्वितीय अवकलज का उपयोग कर सकते हैं।

$P''(x) = -2$ है।

क्योंकि $P''(x)$ ऋणात्मक है, इसलिए $x = 490$ एक अधिकतम मान प्रदान करता है।,

इस प्रकार, लाभ अधिकतम होगा, जब 490 इकाई को निर्मित करके बेचा जाएगा।

घ) अधिकतम लाभ है:

$P(490) = -(490)2 + 980(490) - 3000$

$P(490) = 237{,}100$ है।

इस प्रकार, स्टोरियो निर्माता 2,37,100 का अधिकतम लाभ प्राप्त करता है, जब वह 490 इकाइयों निर्मित करके बेचता है।

ड.) इस अधिकतम लाभ को प्राप्त करने के लिए, मूल्य प्रति इकाई

$= p(490) = 1000 - 490$

या $p(490) = 510$ है।

बोध प्रश्न ड

1. आप किसी फर्म का लाभ किस प्रकार ज्ञात करते हैं ?

2. लाभ अधिकतमीकरण के लिए कि दो प्रतिबंधो को संतुष्ट होना आवश्यक है।

3. लाभ अधिकतमीकरण के द्वितीय कोटि प्रतिबंध का निर्वचन कीजिए।

9.7 सारांश

यह इकाई आर्थिक और व्यापारिक अध्ययनों में अवकलजों के अनुप्रयोगो के साथ कार्य करती है। इस उद्देश्य के लिए, इस इकाई में कुछ चुने हुए प्रकरणों का अध्ययन किया गया है, जिनका बार–बार उपयोग किया जाता है। प्रारंभ में, प्रथम कोटि के अवकलज का उपयोग किया जाता है। प्रारंभ में, प्रथम काटि के अवकलज का उपयोग करते हुए, नीचे की ओर प्रवणता वाली मांग वक्र की ऋणात्मक प्रवणता को तथा ऊपर की ओर प्रवणता वाली आपूर्ति वक्र की धनात्मक प्रवणता को दर्शाया गया है।

हमने मांग तथा साथ ही आपूर्ति फलनों की प्रत्यास्थता का निगमन करना सीखा है। इस संकल्पना का परिचय कराते हुए, यह कहा गया हे कि प्रत्यास्थता किसी फलन के स्वतंत्र चर में हुए परिवर्तन के कारण आश्रित चर में हुए प्रभाव को दर्शाती है। हमने मूल्य और राशि में लघु परिवर्तनों के साथ $E_d = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$ के रूप में मांग की मूल्य प्रत्यास्थता के निगमन को देखा है। प्रत्यास्थता के लिए log फलनों के पदों में एक अन्य व्यंजक को स्पष्ट किया गया है।

यह बताते हुए कि मांग की आय प्रत्यास्थता ग्राहक की आय में हुए परितर्वतन के कारण किसी विशिष्ट उत्पाद की मांग पर हुए प्रभाव का मापन करती है, हमें यह भी बताया गया है कि प्रत्यास्थता की यह श्रेणी हमें सामान्य माल (धनात्मक प्रत्यास्थता) और घटिया माल (ऋणात्मक प्रत्यास्थता) की पहिचान करने में सहायता करती है।

हमें मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता से भी परिचित कराया गया है, जिसे किसी उत्पाद की मांग पर एक अन्य संबंधित उत्पाद के मूल्य में हुए परिवर्तन के कारण पड़ने वाले प्रभाव के रूप में परिभाषित किया गया हैं। इस धारणा का उपयोग स्थानापन्न माल (धनात्मक क्रॉस प्रत्यास्थता) की प्रत्यास्थता तथा पूरक माल ऋणात्मक क्रॉस प्रत्यास्थता) की प्रत्यास्थता के बारे में जानने में हमारी सहायता करता हैं इस अनुच्छेद के अंतिम भाग में, आपूर्ति प्रत्यास्थता की चर्चा की गई है। आपूर्ति राशि में आनुपातिक परिवर्तन का उसके मूल्य में आनुपातिक परिवर्तन के साथ अनुपात का अवकलज का उपयोग करते हुए प्रदर्शित किया गया है। विभिन्न श्रेणियों की लागतों के हल ज्ञात करने के लिए, अवकलजों के अनुप्रयोग करने की प्रक्रिया को सम्मिलित किया गया है। अवकलन का उपयोग करते हुए, औसत ओर सीमांत लागतों में संबंध निर्गमित किया गया है। राजस्व फलन के साथ कार्य करने का प्रयास किया गया है, जो राजस्व की परिवर्तन–दर को अवकलज की तकनीक तथा सीमांत राजस्व, औसत राजस्व और निर्दिष्ट मांग की प्रत्यास्थता के बीच संबंध से निर्गमित किया गया है।

इस इकाई के अंतिम भाग में, लाभ अधिकतमीकरण के प्रथम और द्वितीय कोटि प्रतिबंधों को ज्ञात करनें के लिए, अवकलजों के अनुप्रयोंगो की चर्चा की गई है। हमने प्रथम कोटि प्रतिबंध में सीमांत राजस्व और सीमांत राजस्व की प्रवणता में परिवर्तन–दर जिसे द्वितीय कोटि प्रतिबंध को संतुष्ट करने के लिए सीमांत लागत की प्रवणता की परिवर्तन दर से कम होना चाहिए, के निगमन को स्पष्ट किया गया है।

9.8 शब्दावली

पूरक मालः ऐसा माल, जिसकी मांग में एक संबंधित माल के मूल्य में कमी होने पर वृद्धि होती है।

बहिर्वेश की लागतः उत्पादन में वृद्धि होने पर लागत में वृद्धि।

मांग की प्रत्यास्थताः किसी माल की मांग में, अन्य आर्थिक चरों, जैसे, मूल्य और आय में हुए परिवर्तनों के कारण, संवेदनशीलता। इसे मांगी गई राशि के प्रतिशत परिवर्तन को अन्य आर्थिक चर के प्रतिशत परिवर्तन से भाग देकर परिकलित किया जाता है।

संतुलनः इस स्थिति, जिसमें आपूर्ति और मांग सुमेलित होती हैं तथा मूल्य स्थिर रहता है।

निश्चित लागतः वह लागत जो बहिर्वेश के सभी स्तरों के लिए अचर रहती है।

प्रतिलोम मांग फलनः ऐसा मांग फलन जो मूल्य को मांगी गई राशि के एक फलन के रूप देखता है।

एकाधिकारः एक ही विक्रेता वाला बाजार, जो एक अद्वितीय उत्पाद को बेचता है तथा अत्याधिक सामान्य लाभ अर्जित करता है।

संपूर्ण प्रतिस्पर्धाः खरीदारों और बेचने वाले की एक बड़ी संख्या वाला बाजार, बेचने वाले सजातीय उत्पाद बेचतें हैं तथा सामान्य लाभ अर्जित करते हैं। इस बाजार में प्रवेश और निर्गम स्वतंत्र होता है।

आपूर्ति की मूल्य प्रत्यास्थताः किसी माल या सेवा की आपूर्ति पर उसके बाजार मूल्य में हुए परिवर्तन के कारण प्रभाव।

लाभः कुल राजस्व और कुल लागत में अंतर।

कुल राजस्वः मूल्य/मांग और बहिर्वेश का गुणनफल

चर लागतः वह लागत जो बहिर्वेश स्तर के साथ विचरण करती (बदलती) है।

9.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. उप–अनुच्छेद 9.2.2 पढ़िए और उत्तर दीजिए।
2. घटती उपयोगिता का नियम, आय और प्रतिस्थापनों के प्रभाव

(ख)

1. प्रत्यास्थता हमें किसी फलन के स्वतंत्र चर में हुए परिवर्तनों के कारण उसके आश्रित चर में आए प्रभावों (परिवर्तनों) के बारे में बताती है।
2. पूरक मालों की आवश्यकता के कारण जो मांग को संतुष्ट करने के लिए साथ–साथ चलते हैं।
3. मांग की आय प्रत्यास्थता शून्य से कम होगी।

4. मांग की क्रॉस प्रत्यास्थता किसी उत्पाद की मांग में, एक अन्य संबंधित उत्पाद के मूल्य में परिवर्तन के कारण, हुआ प्रभाव होती है।

5. प्रत्यास्थः > 1 अप्रत्यास्थः -1 और 0 के बीच;

   इकाई प्रत्यास्थ : = -1

6. आपूर्तित राशि में आनुपातिक परिवर्तन का उसके मूल्य में आनुपातिक परिवर्तन के साथ अनुपात

(ग)

1. AC = MC
2. निश्चित लागत
3. निश्चित लागत और चर लागत

(घ)

1. ऐसा फलन जो राजस्व और बहिर्वेश में संबंध प्रतिर्शित करता है।
2. $E\text{d} = \frac{\text{AR}}{\text{AR}-\text{MR}}$.
3. $\frac{\Delta TR}{\Delta q} = p\left[1 - \frac{1}{|E_d|}\right]$
4. संपूर्ण प्रतिस्पर्धा के अंदर संचालित होने वाली फर्म 1 यहाँ,

   P = AR = MR की इष्टतम स्थिति होती है।

(ड.)

1. कुल राजस्व और कुल लागत का अंतर लेकर

   MR = MC का प्रथम कोटि प्रतिबंध तथा $(MR)' < (MC)'$

2. का द्वितीय कोटि प्रतिबंध

3. सीमांत राजस्व की प्रवणता को लाभ अधिकतमीकरण बहिर्वेश पर MC की प्रवणता से कम होना चाहिए।

9.10 स्वपरख प्रश्न / उत्तर

1. किसी वस्तु के लिए मांग फलन p= 20 – 2x द्वारा दिया जाता है। कुल राजस्व ज्ञात कीजिए। x=3 पर औसत राजस्व और सीमांत राजस्व को परिकलित कीजिए तथा परिणामों का निर्वचन कीजिए। वह बहिर्वेश स्तर कीजिए, जिस पर कुल राजस्व अधिकतम है तथा साथ ही अधिकतम राजस्व भी ज्ञात कीजिए। क्या x=3 पर सीमांत राजस्व बढ़ रहा है ?

2. कोई निर्माता पाता है कि उसके उत्पाद के लिए वार्षिक एकसमान मांग 40,000 इकाइयाँ हैं। किसी उत्पादन कार्य के स्थापन की लागत □ 200 है तथा माल–सूची में एक इकाई के निर्मित करने की लागत □ 1 वार्षिक है। उस आर्थिक समूह माप को ज्ञात कीजिए, जिससे कुल लागत न्यूनतम होनी चाहिए।

3. कोई फर्म कुल लागत C= ($\frac{x^3}{10}$– $5x^2$ +10x+5) पर x इकाइयाँ निर्मित करती है। किस बहिर्वेश स्तर पर सीमांत लागत और औसत चर लागत क्रमशः अपने न्यूनतम पर पहुँचेंगी ?

4. किसी फर्म के कुल राजस्व (R) और कुल लागत (C) फलन क्रमशः $R= 30x - x^2$ और $C=20 + 4x$ है, जहाँ x बहिर्वेश है। वह बहिर्वेश ज्ञात कीजिए, जिससे लाभ का अधिकतमीकरण होता है। साथ ही, अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

5. यदि $f(x) = ax^2 + bx +c$ है तो दर्शाइए कि आपूर्ति संबंध रैखिक है। दर्शाइए कि यदि कुल लागतों को ढाँकना है (सम्मिलित किया जाना है), तो p को $b +2\sqrt{ac}$ से अधिक होना चाहिए, परंतु यदि केवल चर लागतों को ही ढाँकना है, तो p को केवल b से अधिक होने की आवश्यकता है।

6. आय y के एक फलन के रूप में मांग q को $30q = 10 +3y$ द्वारा दिया जाता है। मांग की आय प्रत्यास्थना के लिए एक व्यंजक प्राप्त कीजिए तथा उसका y = □ 250 रु पर मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि MR= 100 और बहिर्वेश के सापेक्ष मांग की प्रत्यास्थता 3 है, तो AR ज्ञात कीजिए।

8. x के किस मान के लिए, एक दिए हुए मांग फलन $p = 4 – 3q^2$ के लिए मांग की प्रत्यास्थता ऐकिक (इकाई) (unity) हो जाती है।

9. उस मांग वक्र के लिए, जिसकी अनंत प्रत्यास्थता है, सीमांत राजस्व क्या है ?

मांग की प्रत्यास्थता ज्ञात कीजिए, जब मांग वक्र $p = 50/(x +3)$ है।

10. कुल लागत फलन $C = x^3 –6x^2+15x+10$ दिया हुआ है।

सीमांत लागत फलन ज्ञात कीजिए। किस बहिर्वेश पर MC एक वर्धमान फलन होगा ?

11. यदि किसी उत्पाद x की इकाइयों को बनाने की कुल निर्माण लागत

$y = 20x + 5000$ है, तो

क) प्रति इकाई चर लागत क्या है ?

ख) निश्चित लागत क्या है ?

ग) 4000 इकाइयों को बनाने की कुल लागत क्या है ?

घ) 2000 इकाइयों को निर्मित करने की सीमांत लागत क्या है ?

12. किसी कंपनी के लाभ फलन को $P = f(x) = x – 0.00001x^2$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जहाँ x बेची गई इकाइयों की संख्या है। इष्टतम बिक्री आयतन ज्ञात कीजिए तथा उस आयतन पर अपेक्षित लाभ की राशि भी ज्ञात कीजिए।

13. मूल्य प्रत्यास्थता से क्या तात्पर्य है ? अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए।

14. कोई कोर्न फ्लेक्स (corn flakes) उद्योग अपने उत्पाद का मूल्य □ 100 से 75 घटाने का निर्णय लेता है। कंपनी को प्रत्याशा है कि कोर्न फलेक्स की बिक्री 10000 इकाई प्रति मास से बढ़ कर 20000 इकाई प्राप्त मास हो जाएगी। मांग की मूल्य प्रत्यास्थता को परिकलित कीजए तथा उस पर टिप्पणी कीजिए।

15. कोई मांग फलन के $x = 50 - 5p$ रूप में दिया हुआ है। पर मांग की मूल्य प्रत्यास्थता अभिकलित कीजिए।

16. यदि मांग वक्र $x = \frac{9}{\sqrt{p}}$ है, तो दशाईए कि मांग की मूल्य प्रत्यास्थता अचर है तथा -1/2 के बराबर है।

प्रश्नों के उत्तर

1. $x = 5$, TR=50, हाँ
2. 4000
3. 50/3; 25
4. $x = 13$, □149
5. संकेत p=MC; p≥ न्यूनतम AC; p≥ न्यूनतम AVC
6. 75/76
7. 150
8. 2/3
9. MR=AR
10. –x/(x+3)
11. हमें लागत–बहिर्वेश समीकरण $y = 20x + 5000$ प्राप्त है। हम जानते हैं कि यदि उत्पाद में वृद्धि होती है, तो प्रत्यक्ष अनुपात (अनुक्रमानुपात) में केवल कुल चर लागत में वृद्धि होगी, परंतु निश्चित लागत कुल लागत में सदैव अपरिवर्तित रहेगी। अतः y में 1 इकाई की वृद्धि के सापेक्ष y का अवकलज प्रति इकाई चर लागत प्रदान करेगा।

    क) प्रति इकाई चर लागत = $\frac{d}{dx}$((लागत – बहिर्वेश समीकरण)=

    $\frac{d}{dx}(20x + 5000) = 20$ है। प्रति इकाई चर लागत 20 है।

    ख) कुल निश्चित लागत तब भी अपरिवर्तित रहेगी, जब हम एक भी इकाई का उत्पादन नहीं करते हैं। यदि हम कोई भी इकाई उत्पादित नहीं करते हैं, तो चर लागत कुछ नहीं होगी तथा निश्चित लागत ही कुल लागत होगी। अतः, यदि हम लागत–बहिर्वेश समीकरण में x=0 रखें तो हमें निश्चित लागत प्राप्त होगी।

    निश्चित लागत = $y = [20.(0) + 5{,}000] = 5000$ हैं।

    ग) यदि लागत –बहिर्वेश समीकरण में, हम x=4000 रखें, तो हमे 4000 इकाइयों के उत्पादन की कुल लागत प्राप्त हो जाएगी।

    4000 इकाइयों के उत्पादन की कुल लागत $= y = 20(4000) + 5000 = 85000$ है।

घ) हम जानते हैं कि nवीं इकाई की सीमांत लागत = $TC_n – TC_{n–1}$ होती है। 2000वीं इकाई की सीमांत लागत =2000 इकाइयों की TC – (2000–1) इकाइयों की TC = [20(2000) + 5000] – [20 (1999), + 5000] = [45,000 – 44,980] = 20 है।

12. इष्टतम बिक्री आयतन के लिए, आवश्यक प्रतिबंध है कि लाभ फलन के प्रथम अवकलज को शून्य के बराबर होना चाहिए तथा द्वितीय अवकलज को ऋणात्मक होना चाहिए, जहाँ लाभ फलन $P = x – 0.00001x^2$ है।

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}(x - 0.00001x^2) \text{ है।}$$

सीमांत लाभ = 1 – 0.00002x है।

अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए, अब हम सीमांत लाभ = 0 करते हैं।

अतः, 1 – 0.00002x = 0

या, 0.00002x = 1 है।

अतः, $x = \frac{1}{0.00002} = 50,000$ इकाईयां है।

लाभ फलन की द्वितीय अवकलज

$$\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(1 - 0.00002x\right) = -0.0002 \text{ है।}$$

अब, x के मान को लाभ फलन में रखने पर, हम अधिकतम लाभ

$P = x – 0.00001x^2$

= 50,000– 0.00001(50,000)/2 =50,000 –0.00001(2500000000)प्राप्त करते हैं।

MR को प्रत्येक अतिरिक्त इकाई की बिक्री के लिए कुल राजस्व में हुए परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया जाता है। यह 50000 – 25000 = 25000 है।

कंपनी का इष्टतम बहिर्वेश x की 50000 इकाइयाँ होगा तथा इस आयतन पर अधिकतम लाभ 25000 होगा।

मांग की मूल्य प्रत्यास्थता को मांगी गई राशि में आनुपातिक परिवर्तन का मूल्य में परिवर्तन के साथ अनुपात के ऋणात्मक के रूप में परिभाषित किया जाता है, अर्थात्

$$E_d = \frac{\text{मांग में आनुपातिक परिवर्तन}}{\text{मूल्य में आनुपातिक परिवर्तन}}$$

$$= (-)\frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$$

$$= (-)\frac{P}{Q}\frac{\Delta Q}{\Delta P} \text{ या } =(-)\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP} \text{ है।}$$

माँग की मूल्य प्रत्यास्थता के लिए, हम संगत सूत्र का उपयोग करेंगे।

14. सर्वप्रथम, हमें मांगी गई राशि में प्रतिशत परिवर्तन तथा मूल्य में प्रतिशत परिवर्तन को परिकलित करने की आवश्यकता है। अतः,

मूल्य में % परिवर्तन= (□ 75–100)/(□ 100) = –25%

मांग में % परिवर्तन = (20,000–10,000)/(10,000) = 100%

अतः, मांग की मूल्य प्रत्यास्थता = 100%/–25% = –4 है।

इसका अर्थ है कि मांग सापेक्षितः प्रत्यास्थ है।

15. दिया हुआ मांग फलन $Q = 50 - 5p$ है।

P के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$\frac{dQ}{dP} = -5$

अतः, मांग की प्रत्यास्थता है:

$$E_d = (-)\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$$

$$= (-)\frac{P}{50-5P}\cdot\frac{-5}{1} = \frac{P}{10-P}$$

जब p=5 है, तब $E_d = \frac{5}{10-5} = \frac{5}{5} = 1$ हैं।

16. दी हुई मांग वक्र है:

$$x = \frac{9}{\sqrt{p}} = 9\,p^{-1/2}$$

अतः, $\frac{dx}{dp} = -\frac{9}{2}p^{-\frac{3}{2}}$

अतः, $E_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{p}{x}\cdot -\frac{9}{2}p^{-\frac{3}{2}} = \frac{9p^{-\frac{1}{2}}}{2x}$ हैं।

$$= \frac{9p^{-\frac{1}{2}}}{2\times 9p^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$ है, जो अचर है।

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

9.11 संदर्भ पुस्तकें

- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, Pearson Educational Asia, Delhi, 2002.
- Dowling, Edward,T. "Schaum's Outline Series: Theory and Problems of Mathematics for Economists", New York: McGraw Hill Book Company, 1986.
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Varian , Hal R., Intermediate Microeconomics: A Modern Approach, Springer (India) Pvt. Ltd. India, 2010

इकाई 10 ब्याज दर

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद,

- ब्याज की संकल्पना को समझ पाएँगे;
- साधारण ब्याज को परिभाषित कर पाएँगे तथा साधारण ब्याज को परिकलित कर पाएँगे;
- चक्रवृद्धि ब्याज को परिभाषित कर पाएँगे तथा चक्रवृद्धि ब्याज को परिकलित कर पाएँगे;
- संतत संयोजि परिकलन कर पाएँगे; तथा
- बदलती हुई चक्रवृद्धि ब्याज दरों का परिकलन कर पाएँगे।

10.1 प्रस्तावना

इस इकाई में, हम विभिन्न प्रकार की ब्याज दरों के बारे में अध्ययन करेंगे तथा ब्याज को परिकलित करने की विधियों का अध्ययन करेंगे। इस उद्देश्य के लिए, हम साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पनाओं पर उनके अभिकलनों के साथ चर्चा करेंगे।

10.2 ब्याज की संकल्पना और उसका अर्थ

धनराशि को एक संस्था द्वारा दूसरी संस्था को उधार दिया जा सकता है या एक संस्था द्वारा दूसरी संस्था से उधार लिया जा सकता है। किसी धनराशि का किसी विशेष समय काल तक उपयोग करने के लिए भुगतान किया गया मूल्य ब्याज (Interest) कहलाता है। इसे उधार लेने वाले के लिए व्यय तथा उधार देने वाले के

लिए आय माना जाता है। उधार ली गई या उधार दी गई राशि मूलधन (principal) कहलाती है। ब्याज वार्षिक, अर्धवार्षिक, त्रैमासिक या मासिक देय हो सकता है।

ब्याज की धारणा धनराशि के समय के अनुसार मूल्य, अर्थात् समय मूल्य (time value) पर आधारित है। इसका अर्थ है कि वर्तमान समय–बिंदु पर उपलब्ध धनराशि का भविष्य समय–बिदु पर उपलब्ध उतनी ही धनराशि की तुलना में अधिक मूल्य है। आज का एक रुपया कल के एक रुपए के बराबर नहीं है। अतः, वास्तव में ब्याज वह धनराशि है जो उधार ली गई राशि के लिए उधार देने वाले को मुआवजे के रूप में इसलिए दी जाती है कि उसे उस धनराशि को उपयोग करने का अवसर नहीं मिला तथा इसलिए भी कि उसने धन उधार देने में विभिन्न जोखिमों, जैसे धनराशि वापिस नहीं मिलने का जोखिम, को सहन करने का प्रयास किया।

10.3 साधारण ब्याज

साधारण ब्याज (simple interest) वह ब्याज है जो उधार ली गई प्रारभिंक धनराशि पर परिकलित किया जाता है। इस प्रकार, अभिकलन की संपूर्ण अवधि में, ब्याज मूलधन पर ही परिकलित किया जाता है। ब्याज की दरें प्रायः प्रतिशत के रूप में व्यक्त की जाती हैं।

साधारण ब्याज के परिकलन के लिए सूत्रः

साधारण ब्याज = मूलधन × दर ×समय

$I = P \times r \times t$

I= ब्याज, वह धनराशि जो आप उधार लेने के लिए देते हैं या वह धनराशि जो आप अपनी जमा राशि पर अर्जित करते हैं।

P = मूलधन, जो प्रांरभिक धनराशि है।

t = समय काल जिसके लिए धनराशि उधार ली गई है /जमा की गई है।

r = ब्याज की दर, जो उधार लेने के लिए दी जाती है या धनराशि जमा करने के लिए अर्जित की जाती है तथा जो प्रतिशत के रूप में प्रायः व्यक्त की जाती है।

मिश्रधन (amount) परिकलित करनाः

मिश्रधन (A) = P + I

= P + (P × r × t), अर्थात् P (1 + rt)

[मिश्रधन वह राशि है, जो समय अवधि के अंत में देय होती है।]

उदाहरण 1 : एक नई कार खरीदने के लिए, रमेश ने 3 वर्ष के लिए 5,00,000; 8% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से उधार लिए। वह कितना ब्याज अदा करेगा ?

हलः

यहाँ, $P = 5,00,000$, $r = 8/100 = 0.08$, $t = 3$ वर्ष, $I = ?$ है।

सूत्र $I = P \times r \times t$ का उपयोग करने पर,

साधारण ब्याज $(I) = 500000 \times 0.08 \times 3$

$= ₹1,20,000$

अतः, रमेश कार ऋण (loan) के लिए ₹120000 ब्याज के रूप में देगा।

उदाहरण 2: आदित्य ने 150000 किसी बैंक में 9.8% वार्षिक ब्याज की दर पर जमा कराए। उसको 5 वर्ष के बाद मिलने वाला ब्याज ज्ञात कीजिए। साथ ही, वह मिश्रधन भी ज्ञात कीजिए जो उसे मिलेगा।

हल: यहाँ, ,$P = 1{,}50{,}000$, $r = 0.098$, $t = 5$, I=?, A =? है।

क्योंकि $I=P\times r\times t$ है, इसलिए

I= 150000 × 0.098 × 5 = ₹73,500 है।

अतः, आदित्य को ब्याज के रूप में ₹73500 है।

मिश्रधन $= P + I$

या A= 150000 + 73500 = ₹2,23,500.

अतः, आदित्य को ₹73,500 रु ब्याज के रूप में तथा ₹223500 मिश्रधन के रूप में मिलेंगे।

नोटः हम मिश्रधन को सूत्र $A = P\ (1+ rt)$ के उपयोग से भी परिकलित कर सकते है।

A = 150000 [1 + (0.098×5)]

या, A = ₹2,23,500

उदाहरण 3: हिमांशी रमा को ₹45000 उधार देती है। वह समय ज्ञात कीजिए जिसमें इसका ब्याज 11% वार्षिक साधारण ब्याज की दर ₹9900 हो जाएगा।

हल: यहाँ, $I = 9900$,$P = 45000$,$r = 0.11$,t =? है।

$I= P\times r\times t$ से हम प्राप्त करते हैं:

$t = I/Pr$

या, t = 9900/ (45000) (0.11)

= 2 वर्ष

उदाहरण 4: कितने वर्षों में कोई धनराशि 5% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से स्वयं की दुगुनी हो जाएगी ?

हल: मिश्रधन = 2 × मूलधन

$r = 0.05$ दिया है। t= ? है।

$A = P + P\times r\times t$ से,

$A = P\ (1 + rt)$

प्रश्न के अनुसार $2P = P\ [1 + t(0.05)]$

या, $2 = 1 + t\ (0.05)$

या, $t = 1/0.05$

या, t =20 है।

अतः, कोई धनराशि 5% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 20 वर्षों में स्वयं की दुगुनी हो जाएगी।

उदाहरण 5: ₹1,20,000 की एक धनराशि 2 वर्षों के लिए साधारण ब्याज पर उधार दी गई है। साहूकार (lender) को कुल मिलाकर ₹153600 प्राप्त हुए। ब्याज की दर प्रति वर्ष (p.a.) ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ ,$P = 120000, A = 153600, t = 2, r = ?$ है।

$A = P(1 + rt)$ है।

अर्थात् $153600 = 120000 (1 + 2r)$

या, $153600 = 120000 + 240000\,r$

या, $240000r = 153600 - 120000$

या, $r = 33600/240000$

या, $r = 0.14$ अर्थात् 14% है।

अतः, वाँछित ब्याज की दर 14% p.a. है।

उदाहरण 6: वह मूलधन ज्ञात कीजिए, जिस पर 20 वर्षो में 5% साधारण ब्याज की दर से 500.50 रु. ब्याज प्राप्त होगा।

हल: यहाँ $I = 500.50, t = 2, r = 0.05, P = ?$ है।

$I = P \times r \times t$ से हम प्राप्त करते हैं:

$I = 500.50$

$500.50 = P \times 0.05 \times 2$

या, $500.50 = 0.10P$

या, $P = 5005$ है।

अतः, वाँछित मूलधन □ 5005 है।

उदाहरण 7: कितने समय में 17000रु. की धनराशि 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 22100 रु. हो जाएगी ?

हल:

$P = 17000, A = 22100, r = 0.10, t = ?$ है।

अतः, $22100 = 17000\,[1 + t\,(0.10)]$

$22100 = 17000 + 1700\,t$

या, $1700\,t = 5100$

या, $t = \frac{5100}{1700} = 3$ वर्ष है।

बोध प्रश्न क

1. ब्याज का भुगतान क्यों किया जाता है ?

2. ₹10000 पर $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ₹2200 ब्याज प्राप्त करने में कितना समय लगेगा ?

3. कोई धनराशि साधारण ब्याज पर 3 वर्षो में ₹1120 तथा 5 वर्षो में ₹1200 हो जाती है। मूलधन तथा वार्षिक ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

10.4 चक्रवृद्धि ब्याज

एक अन्य प्रकार का ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज (compound interest) होता है। चक्रवृद्धि ब्याज न केवल प्रारंभिक मूलधन पर परिकलित किया जाता है, बल्कि पिछली अवधियों में हुए संचित ब्याज पर भी परिकलित किया जाता है। दूसरे शब्दों में, चक्रवृद्धि ब्याज, ब्याज और मूलधन दोनों पर परिकलित किया जाता है। इसीलिए, चक्रवृद्धि ब्याज की कभी–कभी 'ब्याज पर ब्याज' के रूप में भी व्याख्या की जाती है।

उदाहरणार्थ, यदि ₹5000 की धनराशि 5% वार्षिक ब्याज की दर से 1 वर्ष के अंत में मिश्रधन ₹5000 + ₹250 होगा। 1वर्ष के अंत में मिश्रधन ₹5000 + ₹250 = ₹5250 है यदि यह राशि 5% वार्षिक ब्याज पर एक अन्य वर्ष के लिए उधार दी जाती है, तो ब्याज को प्रारंभिक ₹5000 के स्थान पर ₹5,250 पर परिकलत किया जाएगा। अतः, दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन ₹5,250 + (5250 × 0.05 × 1)= ₹5250 + ₹262.5 = ₹ 5512.5. होगा। ध्यान दीजिए की साधारण ब्याज से कुल मिश्रधन 5000 + (5000 × 0.05 × 2) = 5,000+ 500 = ₹5,500 प्राप्त होगा। अतिरिक्त धनराशि ₹12.50 पहले वर्ष के ब्याज ₹250 पर 5% वार्षिक से एक वर्ष का ब्याज है।

चक्रवृद्धि ब्याज से संबंधित कुछ संकल्पनाएँ

चक्रवृद्धि ब्याज: यह संयोजित मिश्रधन (compound amount) तथा प्रारभिक मूलधन का अंतर होता है।

संयोजन अवधि: दो क्रमागत समय–बिंदुओ के बीच की अवधि जिन पर ब्याज संयोजित किया जाता है।

संयोजित मिश्रधन: अंतिम अवधि के अंत में देय कुल राशि।

संयोजित होने की बारंबारता: यह सूचित करता है कि एक वर्ष में ब्याज कितनी बार संयोजित (compound) किया जाता है।

चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित करने के लिए सूत्र

$\boldsymbol{A = P(1+i)^n}$,

जहाँ $i = r/k = \dfrac{\text{ब्याज की दर}}{\text{प्रति वर्ष संयोजन अवधियों की संख्या}}$

तथा $n = k \times t$ (= प्रतिवर्ष संयोजन अवधियों की संख्या ×वर्षों की संख्या) है।

***A*:** t अवधियों के अंत में मिश्रधन

***P*:** मूलधन, जो प्रांरभिक धन राशि है।

***r*:** वार्षिक ब्याज की दर

***k*:** प्रति वर्ष संयोजन अवधियों की संख्या

***t*:** समय वर्षो में

***n*:** संयोजन रूपांतरण अवधियों की कुल संख्या

***i*:** प्रति वर्ष संयोजन अवधि ब्याज की दर

उदाहरणार्थ, यदि वार्षिक ब्याज की दर 10% है तथा ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है, तो एक वर्ष में 4 रूपांतरण अवधियाँ (संयोजित अवधियाँ) हैं।

इस प्रकार, $i = \frac{0.10}{4} = 0.025$ है। यदि वार्षिक ब्याज की दर 24ः है तथा ब्याज मासिक संयोजित होता है, तो एक वर्ष में 12 रूपांतरण (सयोजन) अवधियाँ (conversion periods) हैं। अतः, $i = \frac{0.24}{12} = 0.02$ है।

नोटः $(1 + i)^n$ का मान चक्रवृद्धि ब्याज सारणी का उपयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

चक्रवृद्धि ब्याज के लिए कुछ सूत्र

चक्रवृद्धि ब्याज को वार्षिक, अर्धवार्षिक, त्रैमासिक, मासिक सतत रूप (continuously) से परिकलित किया जा सकता है। विभिन्न स्थितियों के लिए सूत्र नीचे दिए गए है।

समय	मिश्रधन
वार्षिक	$A = P\,(1+i)^n$, जहाँ $i = r$ और $n = t$ है।
अर्धवार्षिक	$A = P\,(1+i)^n$, जहाँ $i = r/2$ और $n = 2t$ है।
त्रैमासिक	$A = P\,(1+i\,)^n$, जहाँ $i = r/4$ और $n = 4t$ है।
मासिक	$A = P\,(1+i)^n$, जहाँ $i = r/12$ और $n = 12t$ है।

चक्रवृद्धि ब्याज (सभी स्थितियों में) $I = A–P$ है।

उदाहरण 8ः कोई बैंक 8% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज देता है। योगी ने इस बैंक में 4 वर्ष के लिए ₹5000 रु जमा किए। योगी द्वारा प्राप्त किए जाने वाला ब्याज ज्ञात कीजिए।

हलः

यहाँ $P = 5000, n = 4, i = 0.05, A = ?$ है।

हमें प्राप्त हैः $A = P\,(1 + i)^n$

अतः, $A = 5000\,(1+ 0.05)^4$

या, $A = 5000\,(1.215506)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, $A =$ ₹6077.53.

अतः, $I = 6077.53 - 5000$

या, $I =$ ₹1077.53

अर्थात् योगी को बैंक से ₹1077.53 ब्याज के रूप में मिलेंगें।

उदाहरण 9: मेहक ने किसी वित्तीय खाते में ₹50,000 जमा किए, जो 8% वार्षिक ब्याज देता है, जब कि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। उसके वित्तीय खाते में 10 वर्ष बाद कितनी राशि होगी ?

हल: यहाँ

यहाँ, $P = 50000$, $i = 0.08$, $t = 10$, $A =?$ है।

क्योंकि $A = P(1 + i)^n$ है, इसलिए

$A = 50000\ (1 + 0.08)^{10}$

या, $A = 50000\ (2.158925)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, $A = 1,07,946.25$

महक को वित्तीय खाते में 10 वर्ष बाद ₹107946.25 होंगे।

उदाहरण 10: ₹ 8000 पर 5 वर्ष के लिए 6% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज संयोजित होता है:

(i) अर्धवार्षिक (ii) मासिक

हल:

यहाँ, $P = 8000$, $t = 5$, $r = 0.06$, $A =?$ है।

$A = P(1 + r/k)^{kt}$ होता है।

i) $A = 8000(1+0.06/2)^{2\times5}$

या, $A = 8000(1+ 0.03)^{10}$

या, $A = 8000\ (1.343916)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, ₹10751.33

हम प्राप्त करते है $I = 10751.33 - 8000$

या, $I =$ ₹ 751.33

ii) $A = 8000(1+0.06/12)^{12\times5}$

अर्थात् $A = 8000(1+ 0.005)^{60}$

या, $A = 8000\ (1.348850)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, $A =$ ₹10790.80 है।

या, $I = 10790.8 - 8000$

या, $I =$ ₹2790.80 है।

उदाहरण 11: यदि ₹86400 की धनराशि को 8% वार्षिक ब्याज की दर पर निवेशित किया जाता है, जबकि ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है, तो उस राशि को ₹ 206500 के रूप में संचित होने में कितना समय लगेगा।

हलः

यहाँ, $P = 86{,}400, r = 0.08, A = 2{,}06{,}500.60,\ t = ?$ है।

क्योंकि $A = P\,(1 + r/k)^{kt}$ होता है, इसलिए

$206500.60 = 86400\,(1 + 0.08/4)^n$ है।

या, $206500.60/86400 = (1.02)^n$

या, $(1.02)^n = 2.39005$ है।

या, $n\log(1.02) = \log 2.390056$

या, $n(0.0086) = 0.378408$

या, $n = 0.378408/0.0086$

= 44 तिमाही या 11 वर्ष

अतः, वाँछित समय 11 वर्ष है।

उदाहरण 12: यदि ब्याज 6% वार्षिक की दर से प्रति वर्ष संयोजित होता है, तो किसी मूलधन के दुगुने होने में कितना समय लगेगा ?

हलः

यहाँ $P = P, A = 2P, r = 0.06, n = ?$ है।

क्योंकि $A = P\,(1 + r)^n$, इसलिए

$2P = P(1 + 0.06)^n$ है।

या, $2 = (1.06)^n$

या, $\log 2 = n\log 1.06$

या, $n = \log 2/ \log 1.06 = 0.3010/0.0253$ है।

या, $n = 11.9$ वर्ष लगभग है।

उदाहरण 13: कृष्णा द्वारा कोई धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा की गई, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है। 2 वर्षों के अंत में मिश्रधन ₹5000 है तथा 3 वर्षों के अंत में यह ₹5200 है जमा की गई राशि तथा ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हलः

यहाँ $A(1) = 5000,\ n = 2$ और $A(2) = 5200, n = 3, P = ?, r = ?$

अब, $A = P\,(1 + r)^n$ है।

अतः, $5000 = P\,(1 + r)^2$ … समीकरण (i)

और $5200 = P(1 + r)^3$ … समीकरण (ii)

(ii) से (i) भाग देने पर,

$5200/5000 = P(1 + r)^3 / P(1 + r)^2$

या, $(1 + r) = 5200/5000$

या, $r = 5200/5000 - 1$ है।

या, $r = 1.04 - 1 = 0.04$.

अर्थात्, वाँछित ब्याज की दर 4% है।

अब समीकरण (i) से $P = 5000/(1 + 0.04)^2$

या, $P = 5000/(1.04)^2$

या, $\log P = \log 5000 - 2\log(1.04)$

$= 3.69897 - 2(0.170) = 3.69897 - .0340 = 3.66497$

या, $P = \text{antilog}(3.66497)$

= ₹4,623 (लगभग) है।

उदाहरण 14: विद्या के बचत खातें में इस समय ₹2654.39 की धनराशि है। वार्षिक ब्याज की दर 3% है, जबकि ब्याज प्रति मास संयोजित होता है। दो वर्ष पहले उसके द्वारा जमा कराया गया प्रारंभिक मूलधन ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ, $A = 2654.39$, $r = 3\%$, $t = 2$, $P = ?$

क्योंकि $i = 3\%/12 = 0.0025$ है तथा $n = 2 \times 12 = 24$ है, इसलिए

$A = P(1+i)^n$ से हम प्राप्त करते है:

$2654.39 = P(1 + 0.0025)^{24}$

या, $2654.39 = P(1.061757)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, $P = 2654.39/1.061757$

या, $P =$ ₹2500

10.5 चक्रवृद्धि ब्याज दर की विशिष्ट स्थितियाँ

सतत संयोजन

पिछले अनुच्छेद में, हमने विभिन्न स्थितियों की चर्चा की थी, जहाँ ब्याज मासिक, त्रैमासिक, अर्धवार्षिक संयाजित होता था। परंतु यदि ब्याज प्रति दिन या प्रति घंटे संयोजित हो, तो क्या होगा? जब रूपांतरण अवधि बहुत हो जाती है, तब प्रति वर्ष रूपांतरण (संयोजन) अवधियों की संख्या सतत संयोजन (रूपांतरण) (continuous compounding) की स्थिति कहलाती है। ऐसी स्थितियों में ब्याज को परिकलित करके

मूलधन में प्रत्येक अति सूक्ष्म समय अवधि, जैसे प्रति घंटा या प्रति मिनट के बाद जोड़ा जाता है।

सतत संयोजन के लिए सूत्र

$A = Pe^{rt}$

A = t अवधियों के बाद मिश्रधन

P = मूलधन, जो प्रारंभिक धनराशि होती है

r = वार्षिक ब्याज की दर

t = समय काल वर्षो में

बदलती हुई दरों पर सयोजन

हमने उन स्थितियों की चर्चा की है, जब ब्याज की दर संपूर्ण समय अवधि के लिए अचर रहती है। परंतु वास्तविक जीवन में ब्याज दर समय–समय पर बदल भी सकती है। उदाहरणार्थ, रश्मि अपनी एक सहेली को 2 वर्ष के लिए 5% वार्षिक ब्याज की दर पर कुछ धनराशि उधार देती है। उसकी सहेली 2 वर्ष बाद वह धनराशि नहीं चुका पाती है। रश्मि ऋण की अवधि को 2 और वर्षों के लिए बढ़ा देती है, परंतु अब ब्याज की दर 7% वार्षिक है। अतः, अब उसको अंतिम प्राप्त होने वाला मिश्रधन प्रारंभिक मूलधन तथा $(1 + i)^n$ या e^{rt} (प्रत्येक गुणक के लिए i और n या r और t के उचित मानों के साथ) के दो गुणकों के गुणनफल के बराबर होगा।

उदाहरण 15: यदि कोई व्यापारी □ 50000 की धनराशि 5% वार्षिक ब्याज की दर पर निवेशित करता है, जब ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है, तो परिकलित कीजिए कि 5 वर्षों बाद उसके खाते में कितनी धनराशि होगी।

हलः

यहाँ $P = 50000$, $r = 0.05$, $t = 5$, $A = ?$ है।

क्योंकि $A = Pe^{rt}$ है, इसलिए हम प्राप्त करते हैं:

$A = 50000\ e^{(0.05\times5)}$

या, $A = 50000\ (1.2840)$

या, $A =$ ₹64,200.

उदाहरण 16: किसी धनराशि पर 3% वार्षिक ब्याज की दर से 8 वर्षों के साधारण और चक्रवृद्धि खातों का अंतर ₹267.70 है। वह मूलधन राशि ज्ञात कीजिए।

हलः

यहाँ , $r = 0.03, t = 8$, C.I.– S.I. = ₹267.70 है।

मान लीजिए कि मूलधन 'x' है।

₹ x पर 3% वर्षिक की दर से 8 वर्ष का साधारण ब्याज

$= x \times 8 \times 0.03 = 0.24x$ है।

[चक्रवृद्धि ब्याज $= x\,(1+0.03)^8 - x$]=$(1.03)^8\, x = 1.266770\, x - x$

प्रश्न के अनुसार $0.266770\, x - 0.24\, x = 267.70$ है।

अतः, $0.0266\, x = 267.70$ है।

या, $x = \dfrac{267.70}{0.2667}$ है।

या, ₹10000 है।

उदाहरण 17: वह धनराशि ज्ञात कीजिए, जो 2% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 9 वर्षों में ₹ 16000 हो जाएगी, जबकि ब्याज अर्धवर्षिक संयोजित होता है।

हलः

यहाँ, $A = 16000,\ t = 9,\ r = 0.02,\ P = ?$ है।

अतः, $i = 0.02/2 = 0.01$ और

$n = 2 \times 9 = 18$ है।

$A = P\,(1+i)^n$ से हम $16000 = P\,(1+0.01)^{18}$ प्राप्त करते हैं।

या, $P = 16000/(1.01)^{18}$

या, $P = 16000/\ 1.19614748$

अर्थात् $P =$ ₹13376.28 है।

उदाहरण 18: यदि ब्याज 5% वार्षिक की दर से सतत रूप से संयोजित होता है, तो कोई मूलधन कितने समय में स्वयं का दुगुना हो जाएगा ?

हलः

यहाँ $P = P, A = 2P,\ r = 0.05,\ t = ?$ है।

क्योंकि $A = Pe^{rt}$ है, इसलिए

$2P = P\, e^{0.05t}$ है।

या, $e^{0.05t} = 2$ है।

$0.05\, t \log e = 2$ है।

या, $0.05\,(0.4343)t = 0.301$ (क्योंकि $\log e = 0.4343$ है।)

या, $t = 0.301/0.021715$

या, $t = 13.86$ वर्ष $= 14$ वर्ष (लगभग) है।

उदाहरण 19: यदि ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है, तो किस वार्षिक ब्याज की दर पर ₹ 3000 का 25 वर्ष में मिश्रधन ₹300000 हो जाएगा ?

हलः

यहाँ $P = 3{,}000, A = 300000,\ t = 25,\ r = ?$ है।

क्योंकि $A = Pe^{rt}$ है, इसलिए हमें प्राप्त है:

$300000 = 3000\, e^{25r}$ हमे प्राप्त है।

या, $e^{25r} = 300000/3000 = 100$

या, $25\, r \log e = \log 100$

या, $25\, r\,(0.4343)\log 2$($\log e = 0.4343$ है)

या, $r = 2/10.8575$

या, $r = 0.1842044$

या, $r = 18.42\ \%$ (लगभग) है।

उदाहरण 20: श्री अरविंद ने एक बैंक के बचत खाते में 3 वर्ष के लिए ₹20,000 जमा किए। बैंक पहले वर्ष में 6% वार्षिक की दर से अर्धवार्षिक संयोजित ब्याज देता है, दूसरे वर्ष में 12% वार्षिक की दर से त्रैमासिक संयोजित ब्याज देता है। तथा तीसरे वर्ष में 13% वार्षिक की दर से सतत् संयोजित ब्याज देता हैं इस बैंक खाते में 3 वर्षों बाद मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हलः

यहाँ, $P = 20000$, $A = ?$ है।

3 वर्षों के बाद मिश्रधन $= 20000\ (1 + 0.06/2)^2\ (1 + 0.12/4)^4 (e^{0.13})$ है।

अतः, $A = 20000\ (1.03)^2\ (1.03)^4\ (e^{0.13})$

या, $A = 20000\ (1.03)^6\ (e^{0.13})$

या, $A = 20000\ (1.19405)\ (1.13882)$ (e^x मान सारणी के उपयोग से)

या, $A =$ ₹27196.16. है।

बोध प्रश्न ख

1. रिक्त स्थानों को भरिएः

   i) दो क्रमागत समय बिदुंओं, जिन पर ब्याज परिकलित किया जाता है, के बीच की समय अवधि .... कहलाती है। (संयोजन की बारंबारता/ संयोजन अवधि)

   ii) जब प्रति वर्ष संयोजनो की संख्या में अपरिमित रूप से बड़ी वृद्धि होती है, तब यह स्थिति .... की होती है। (सतत संयोजन / बदलती हुई दरों पर संयोजन)

   iii) संचित ब्याज पर ब्याज .... कहलाता है (साधारण ब्याज / चक्रवृद्धि ब्याज)।

2. निम्नलिखित स्थितियों में चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात कीजिएः

   i) 10% वार्षिक की दर पर ₹1000 पाँच वर्षो के लिए जमा किए गए।

   ii) 6% वार्षिक की दर पर 4 वर्षों के लिए ₹2000 जमा किए गए, जबकि ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है; तथा

   iii) 5% वार्षिक की दर पर 8 वर्षों के लिए ₹1800 जमा किए गए, जबकि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है।

3. दीपक ने अपने बैंक खाते में 5 वर्षों के लिए 12% वार्षिक साधारण ब्याज की दर पर ₹100 जमा किए। यदि यही राशि इतने ही वर्षों के लिए 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा कराई गई होती, तो उसे कितना ब्याज अधिक प्राप्त होता ?

4. कितने समय में ₹1000 की धनराशि ₹5000 हो जाएगी, यदि इस राशि को 7% वार्षिक ब्याज की दर पर निवेश किया जाता है, जबकि ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है ?

10.6 सारांश

इस इकाई में, ब्याज की दो मूलभूत संकल्पनाओं साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज की चर्चा की गई है। एक सहज धारणा कि यह उधार देने वाले को उधार लेने वाले द्वारा किया हुआ भुगतान है, यह प्रेक्षित किया गया है कि प्रांरभिक निवेश तथा भविष्य के समय बिंदु पर संचित हुई राशि का अंतर इस ब्याज की राशि को दर्शाएगा। जहाँ साधारण ब्याज केवल प्रांरभिक मूलधन पर दिया जाता है। (संचित ब्याज पर नहीं), वहीं चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में यह परिकलन न केवल मूलधन पर होता है, अपितु पिछली अवधियों में हुए संचित ब्याजो पर भी होता है। संयोजन की दो विशिष्ट स्थितियों–सतत संयोजन और बदलती हुई दरों पर संयोजन को स्पष्ट किया गया है।

10.7 शब्दावली

चक्रवृद्धि ब्याजः यह मूलधन तथा साथ ही देय ब्याज पर भी लिया जाता है।

सतत रूप से संयोजित ब्याजः यह मूलधन पर ब्याज है, जो सतत रूप से संयोजित होता रहता है, जिससे हम संयोजन अवधियों की एक अनंत संख्या तक पहुँच जाते हैं।

ब्याजः यह उपयोग की गई धनराशि के लिए एक भुगतान होता है। यह उधार ली गई धनराशि पर दिया जाता है। तथा उधार दी गई धनराशि पर लिया जाता है।

साधारण ब्याजः वह केवल मूलधन पर लिया जाने वाला ब्याज होता है।

धनराशि (मुद्रा) का समय मानः वर्तमान समय में उपलब्ध धनराशि का भविष्य में उपलब्ध इतनी ही धनराशि की तुलना में अधिक मूल्य है।

प्रतीकों की सूची

आपकी अध्ययन सामग्री में विभिन्न सूत्रों को लिखने में प्रयुक्त प्रतीकों का बृहत रूप से उपयोग किया जाता है। नीचे दी सूची में विभिन्न शब्दों के अंतर्गत प्रथम प्रतीक हैं। अनेक पाठय पुस्तकों ने इनसे भिन्न प्रतीक दिए हैं। सामान्यतः अधिकतर रूप से उपयोग जाने वाले प्रतीक भी इस सूची में दिए गए हैं। जब भी आप कोई पुस्तक पढ़ें, तब यह महत्वपूर्ण है कि आप विभिन्न प्रतीकों के अर्थ को स्पष्ट रूप से समझें, जो उस पुस्तक में दिए गए हैं। विभिन्न सूत्रों के लिखने के लिए, आप जिन प्रतीकों के समूह का उपयोग करना चाहें कर सकते हैं। परंतु ऐसा करने से पहले उनके अर्थ को स्पष्ट करना आवश्यक और वाँछनीय है।

t अवधियों के बाद मिश्रधन	A, S, A_n
वर्षिक ब्याज की दर	r, i
ब्याज	I
प्रति संयोजन अवधि ब्याज की दर	i

प्रति वर्ष संयोजन अवधियों की संख्या	k, m
मूलधन जो प्रारंभिक धनराशि होती है	P, A_0
वर्षों में समय कालः	t
संयोजन (रूपांतरण) अवधियों की संख्या	n

10.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. उधार देने वाले (साहूकार) की धनराशि के उपयोग करने के लिए शुल्क
2. 4 वर्ष
3. ₹1000, 4% वार्षिक

(ख)

1. (i) सयोंजन अवधि (ii) सतत संयोजन (iii) चक्रवृद्धि ब्याज
2. (i) ₹1610.50 (ii) 2537.97 (iii) ₹2672.10
3. ₹162
4. 23 वर्ष (लगभग)

10.9 स्पपरख प्रश्न/अभ्यास

1. उदाहरणों की सहायता से साधारण और चक्रवृद्धि ब्याजों में अतंर बताइए।
2. सतत सयोजंन क्या होता है ? एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट कीजिए।
3. 8 मास के लिए उधार ली गई राशि ₹12000 पर साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए। साधारण ब्याज की वार्षिक दर 9% है।

   (उत्तरः ₹720)

4. मोनिका ने ₹5000 के एक ऋण पर ₹675 ब्याज का भुगतान किया। ब्याज की दर 9% वार्षिक साधारण ब्याज थी। ऋण का समय काल ज्ञात कीजिए।

   (उत्तरः 1.5 वर्ष)

5. यदि ₹700 की धनराशि 15 वर्ष के लिए 7% वार्षिक ब्याज की दर पर उधार दी जाए, तो मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि अर्धवर्षिक संयोजित किया जाता है।

   (उत्तरः ₹1964.76 उत्तर ₹1264.75)

6. मोहन अपने बैंक खाते में ₹600 जमा कराता है। वह अपने खाते में ₹900 संचित करना चाहता है। ज्ञात कीजिए कि 8% वार्षिक ब्याज की दर पर, इस राशि को संचित करने में कितना समय लगेगा, जबकि ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है।

   (उत्तरः 5.12 वर्ष)

7. यदि तीन वर्षों के लिए निवेश किया जाता है, तो निम्नलिखित में से किस निवेश से अधिकतम मिश्रधन प्राप्त होगा ?

   क) 6% वार्षिक की दर से ₹5000, ब्याज वार्षिक संयोजित;

   ख) 5% वार्षिक की दर से ₹5125, ब्याज वार्षिक संयोजित;

   ग) 6.5% वार्षिक की दर से ₹4950, ब्याज वार्षिक संयोजित;

   इसलिए, स्थिति (ग) में अधिकतम मिश्रधन है।)

   (उत्तरः (क) ₹5978.09, (ख) ₹5954.40, (ग) ₹5979.35,)

8. यदि ब्याज की वार्षिक दर 14% मासिक संयोजि है, तो एक मूलधन P स्वयं का दुगुना होने में कितना समय लेगेगा ?

   (उत्तर 4.98 वर्ष)

9. कोई बैंक 5% वार्षिक ब्याज सतत संयोजित देता है। 6 वर्षों के लिए ₹ 400 जमा कराए गए हैं। 6 वर्षों के बाद मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

   (उत्तरः ₹5399.44)

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

10.10 संदर्भ पुस्तकें

- Ayres, Frank Jr. *Theory and Problems of Mathematics of Finance.* Schaum's Outlines Series. McGraw Hill Publishing Co., New York, 1963.
- Mizrahi and Sullivan, John. *Mathematics for Businesss and Social Sciences.* Wiley and Sons., New Jersey, 1987.
- Singh, J.K.,*Business Mathematics.* Himalaya Publishing House., New Delhi,2010.
- Prasad, Bindra. and Mittal, P.K.,*Fundamentals of Business Mathematics.* Har Anand Publications., New Delhi, 2007.

परिशिष्ट : चक्रवृद्धि ब्याज सारणी पर मिश्रधन

n	0.25%	0.50%	0.75%	1.00%	1.25%	1.50%	2.00%
1	1.002500	1.005000	1.007500	1.010000	1.012500	1.015000	1.020000
2	1.005006	1.010025	1.015056	1.020100	1.025156	1.030225	1.040400
3	1.007519	1.015075	1.022669	1.030301	1.037971	1.045678	1.061208
4	1.010038	1.020151	1.030339	1.040604	1.050945	1.061364	1.082432
5	1.012563	1.025251	1.038067	1.051010	1.064082	1.077284	1.104081
6	1.015094	1.030378	1.045852	1.061520	1.077383	1.093443	1.126162
7	1.017632	1.035529	1.053696	1.072135	1.090850	1.109845	1.148686
8	1.020176	1.040707	1.061599	1.082857	1.104486	1.126493	1.171659
9	1.022726	1.045911	1.069561	1.093685	1.118292	1.143390	1.195093
10	1.025283	1.051140	1.077583	1.104622	1.132271	1.160541	1.218994
11	1.027846	1.056396	1.085664	1.115668	1.146424	1.177949	1.243374
12	1.030416	1.061678	1.093807	1.126825	1.160755	1.195618	1.268242
13	1.032992	1.066986	1.102010	1.138093	1.175264	1.213552	1.293607
14	1.035574	1.072321	1.110276	1.149474	1.189955	1.231756	1.319479
15	1.038163	1.077683	1.118603	1.160969	1.204829	1.250232	1.345868
16	1.040759	1.083071	1.126992	1.172579	1.219890	1.268986	1.372786
17	1.043361	1.088487	1.135445	1.184304	1.235138	1.288020	1.400241
18	1.045969	1.093929	1.143960	1.196147	1.250577	1.307341	1.428246
19	1.048584	1.099399	1.152540	1.208109	1.266210	1.326951	1.456811
20	1.051206	1.104896	1.161184	1.220190	1.282037	1.346855	1.485947
21	1.053834	1.110420	1.169893	1.232392	1.298063	1.367058	1.515666
22	1.056468	1.115972	1.178667	1.244716	1.314288	1.387564	1.545980
23	1.059109	1.121552	1.187507	1.257163	1.330717	1.408377	1.576899
24	1.061757	1.127160	1.196414	1.269735	1.347351	1.429503	1.608437
25	1.064411	1.132796	1.205387	1.282432	1.364193	1.450945	1.640606
26	1.067072	1.138460	1.214427	1.295256	1.381245	1.472710	1.673418
27	1.069740	1.144152	1.223535	1.308209	1.398511	1.494800	1.706886
28	1.072414	1.149873	1.232712	1.321291	1.415992	1.517222	1.741024
29	1.075096	1.155622	1.241957	1.334504	1.433692	1.539981	1.775845
30	1.077783	1.161400	1.251272	1.347849	1.451613	1.563080	1.811362
31	1.080478	1.167207	1.260656	1.361327	1.469759	1.586526	1.847589
32	1.083179	1.173043	1.270111	1.374941	1.488131	1.610324	1.884541
33	1.085887	1.178908	1.279637	1.388690	1.506732	1.634479	1.922231

34	1.088602	1.184803	1.289234	1.402577	1.525566	1.658996	1.960676
35	1.091323	1.190727	1.298904	1.416603	1.544636	1.683881	1.999890
36	1.094051	1.196681	1.308645	1.430769	1.563944	1.709140	2.039887
37	1.096787	1.202664	1.318460	1.445076	1.583493	1.734777	2.080685
38	1.099528	1.208677	1.328349	1.459527	1.603287	1.760798	2.122299
39	1.102277	1.214721	1.338311	1.474123	1.623328	1.787210	2.164745
40	1.105033	1.220794	1.348349	1.488864	1.643619	1.814018	2.208040
41	1.107796	1.226898	1.358461	1.503752	1.664165	1.841229	2.252200
42	1.110565	1.233033	1.368650	1.518790	1.684967	1.868847	2.297244
43	1.113341	1.239198	1.378915	1.533978	1.706029	1.896880	2.343189
44	1.116125	1.245394	1.389256	1.549318	1.727354	1.925333	2.390053
45	1.118915	1.251621	1.399676	1.564811	1.748946	1.954213	2.437854
46	1.121712	1.257879	1.410173	1.580459	1.770808	1.983526	2.486611
47	1.124517	1.264168	1.420750	1.596263	1.792943	2.013279	2.536344
48	1.127328	1.270489	1.431405	1.612226	1.815355	2.043478	2.587070
49	1.130146	1.276842	1.442141	1.628348	1.838047	2.074130	2.638812
50	1.132972	1.283226	1.452957	1.644632	1.861022	2.105242	2.691588
51	1.135804	1.289642	1.463854	1.661078	1.884285	2.136821	2.745420
52	1.138644	1.296090	1.474833	1.677689	1.907839	2.168873	2.800328
53	1.141490	1.302571	1.485894	1.694466	1.931687	2.201406	2.856335
54	1.144344	1.309083	1.497038	1.711410	1.955833	2.234428	2.913461
55	1.147205	1.315629	1.508266	1.728525	1.980281	2.267944	2.971731
56	1.150073	1.322207	1.519578	1.745810	2.005034	2.301963	3.031165
57	1.152948	1.328818	1.530975	1.763268	2.030097	2.336493	3.091789
58	1.155830	1.335462	1.542457	1.780901	2.055473	2.371540	3.153624
59	1.158720	1.342139	1.554026	1.798710	2.081167	2.407113	3.216697
60	1.161617	1.348850	1.565681	1.816697	2.107181	2.443220	3.281031
61	1.164521	1.355594	1.577424	1.834864	2.133521	2.479868	3.346651
62	1.167432	1.362372	1.589254	1.853212	2.160190	2.517066	3.413584
63	1.170351	1.369184	1.601174	1.871744	2.187193	2.554822	3.481856
64	1.173277	1.376030	1.613183	1.890462	2.214532	2.593144	3.551493
65	1.176210	1.382910	1.625281	1.909366	2.242214	2.632042	3.622523
66	1.179150	1.389825	1.637471	1.928460	2.270242	2.671522	3.694974
67	1.182098	1.396774	1.649752	1.947745	2.298620	2.711595	3.768873
68	1.185053	1.403758	1.662125	1.967222	2.327353	2.752269	3.844251

69	1.188016	1.410777	1.674591	1.986894	2.356444	2.793553	3.921136
70	1.190986	1.417831	1.687151	2.006763	2.385900	2.835456	3.999558
71	1.193964	1.424920	1.699804	2.026831	2.415724	2.877988	4.079549
72	1.196948	1.432044	1.712553	2.047099	2.445920	2.921158	4.161140
73	1.199941	1.439204	1.725397	2.067570	2.476494	2.964975	4.244363
74	1.202941	1.446401	1.738337	2.088246	2.507450	3.009450	4.329250
75	1.205948	1.453633	1.751375	2.109128	2.538794	3.054592	4.415835
76	1.208963	1.460901	1.764510	2.130220	2.570529	3.100411	4.504152
77	1.211985	1.468205	1.777744	2.151522	2.602660	3.146917	4.594235
78	1.215015	1.475546	1.791077	2.173037	2.635193	3.194120	4.686120
79	1.218053	1.482924	1.804510	2.194768	2.668133	3.242032	4.779842
80	1.221098	1.490339	1.818044	2.216715	2.701485	3.290663	4.875439

n	3.00%	4.00%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%
1	1.030000	1.040000	1.050000	1.060000	1.070000	1.080000
2	1.060900	1.081600	1.102500	1.123600	1.144900	1.166400
3	1.092727	1.124864	1.157625	1.191016	1.225043	1.259712
4	1.125509	1.169859	1.215506	1.262477	1.310796	1.360489
5	1.159274	1.216653	1.276282	1.338226	1.402552	1.469328
6	1.194052	1.265319	1.340096	1.418519	1.500730	1.586874
7	1.229874	1.315932	1.407100	1.503630	1.605781	1.713824
8	1.266770	1.368569	1.477455	1.593848	1.718186	1.850930
9	1.304773	1.423312	1.551328	1.689479	1.838459	1.999005
10	1.343916	1.480244	1.628895	1.790848	1.967151	2.158925
11	1.384234	1.539454	1.710339	1.898299	2.104852	2.331639
12	1.425761	1.601032	1.795856	2.012196	2.252192	2.518170
13	1.468534	1.665074	1.885649	2.132928	2.409845	2.719624
14	1.512590	1.731676	1.979932	2.260904	2.578534	2.937194
15	1.557967	1.800944	2.078928	2.396558	2.759032	3.172169
16	1.604706	1.872981	2.182875	2.540352	2.952164	3.425943
17	1.652848	1.947900	2.292018	2.692773	3.158815	3.700018
18	1.702433	2.025817	2.406619	2.854339	3.379932	3.996019
19	1.753506	2.106849	2.526950	3.025600	3.616528	4.315701
20	1.806111	2.191123	2.653298	3.207135	3.869684	4.660957
21	1.860295	2.278768	2.785963	3.399564	4.140562	5.033834
22	1.916103	2.369919	2.925261	3.603537	4.430402	5.436540
23	1.973587	2.464716	3.071524	3.819750	4.740530	5.871464
24	2.032794	2.563304	3.225100	4.048935	5.072367	6.341181
25	2.093778	2.665836	3.386355	4.291871	5.427433	6.848475
26	2.156591	2.772470	3.555673	4.549383	5.807353	7.396353
27	2.221289	2.883369	3.733456	4.822346	6.213868	7.988061
28	2.287928	2.998703	3.920129	5.111687	6.648838	8.627106
29	2.356566	3.118651	4.116136	5.418388	7.114257	9.317275
30	2.427262	3.243398	4.321942	5.743491	7.612255	10.062657
31	2.500080	3.373133	4.538039	6.088101	8.145113	10.867669
32	2.575083	3.508059	4.764941	6.453387	8.715271	11.737083
33	2.652335	3.648381	5.003189	6.840590	9.325340	12.676050
34	2.731905	3.794316	5.253348	7.251025	9.978114	13.690134
35	2.813862	3.946089	5.516015	7.686087	10.676581	14.785344
36	2.898278	4.103933	5.791816	8.147252	11.423942	15.968172
37	2.985227	4.268090	6.081407	8.636087	12.223618	17.245626
38	3.074783	4.438813	6.385477	9.154252	13.079271	18.625276

39	3.167027	4.616366	6.704751	9.703507	13.994820	20.115298
40	3.262038	4.801021	7.039989	10.285718	14.974458	21.724521
41	3.359899	4.993061	7.391988	10.902861	16.022670	23.462483
42	3.460696	5.192784	7.761588	11.557033	17.144257	25.339482
43	3.564517	5.400495	8.149667	12.250455	18.344355	27.366640
44	3.671452	5.616515	8.557150	12.985482	19.628460	29.555972
45	3.781596	5.841176	8.985008	13.764611	21.002452	31.920449
46	3.895044	6.074823	9.434258	14.590487	22.472623	34.474085
47	4.011895	6.317816	9.905971	15.465917	24.045707	37.232012
48	4.132252	6.570528	10.401270	16.393872	25.728907	40.210573
49	4.256219	6.833349	10.921333	17.377504	27.529930	43.427419
50	4.383906	7.106683	11.467400	18.420154	29.457025	46.901613
51	4.515423	7.390951	12.040770	19.525364	31.519017	50.653742
52	4.650886	7.686589	12.642808	20.696885	33.725348	54.706041
53	4.790412	7.994052	13.274949	21.938698	36.086122	59.082524
54	4.934125	8.313814	13.938696	23.255020	38.612151	63.809126
55	5.082149	8.646367	14.635631	24.650322	41.315001	68.913856
56	5.234613	8.992222	15.367412	26.129341	44.207052	74.426965
57	5.391651	9.351910	16.135783	27.697101	47.301545	80.381122
58	5.553401	9.725987	16.942572	29.358927	50.612653	86.811612
59	5.720003	10.115026	17.789701	31.120463	54.155539	93.756540
60	5.891603	10.519627	18.679186	32.987691	57.946427	101.257064
61	6.068351	10.940413	19.613145	34.966952	62.002677	109.357629
62	6.250402	11.378029	20.593802	37.064969	66.342864	118.106239
63	6.437914	11.833150	21.623493	39.288868	70.986865	127.554738
64	6.631051	12.306476	22.704667	41.646200	75.955945	137.759117
65	6.829983	12.798735	23.839901	44.144972	81.272861	148.779847
66	7.034882	13.310685	25.031896	46.793670	86.961962	160.682234
67	7.245929	13.843112	26.283490	49.601290	93.049299	173.536813
68	7.463307	14.396836	27.597665	52.577368	99.562750	187.419758
69	7.687206	14.972710	28.977548	55.732010	106.532142	202.413339
70	7.917822	15.571618	30.426426	59.075930	113.989392	218.606406
71	8.155357	16.194483	31.947747	62.620486	121.968650	236.094918
72	8.400017	16.842262	33.545134	66.377715	130.506455	254.982512
73	8.652018	17.515953	35.222391	70.360378	139.641907	275.381113
74	8.911578	18.216591	36.983510	74.582001	149.416840	297.411602
75	9.178926	18.945255	38.832686	79.056921	159.876019	321.204530
76	9.454293	19.703065	40.774320	83.800336	171.067341	346.900892
77	9.737922	20.491187	42.813036	88.828356	183.042055	374.652964
78	10.030060	21.310835	44.953688	94.158058	195.854998	404.625201
79	10.330962	22.163268	47.201372	99.807541	209.564848	436.995217
80	10.640891	23.049799	49.561441	105.795993	224.234388	471.954834

Appendix: e^x and e^{-x} value table

x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000
0.01	1.0101	0.99005
0.02	1.0202	0.98020
0.03	1.0305	0.97045
0.04	1.0408	0.96079
0.05	1.0513	0.95123
0.06	1.0618	0.94176
0.07	1.0725	0.93239
0.08	1.0833	0.92312
0.09	1.0942	0.91393
0.10	1.1052	0.90484
0.11	1.1163	0.89583
0.12	1.1275	0.88692
0.13	1.1388	0.87810
0.14	1.1503	0.86936
0.15	1.1618	0.86071
0.16	1.1735	0.85214
0.17	1.1853	0.84366
0.18	1.1972	0.83527
0.19	1.2092	0.82696
0.20	1.2214	0.81873
0.21	1.2337	0.81058
0.22	1.2461	0.80252
0.23	1.2586	0.79453
0.24	1.2712	0.78663
0.25	1.2840	0.77880
0.26	1.2969	0.77105

0.27	1.3100	0.76338
0.28	1.3231	0.75578
0.29	1.3364	0.74826
0.30	1.3499	0.74082
0.31	1.3634	0.73345
0.32	1.3771	0.72615
0.33	1.3910	0.71892
0.34	1.4049	0.71177
0.35	1.4191	0.70469
0.36	1.4333	0.69768
0.37	1.4477	0.69073
0.38	1.4623	0.68386
0.39	1.4770	0.67706
0.40	1.4918	0.67032

इकाई 11 यौगिकीकरण एवं बट्टा

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद,

- ब्याज की अंकित और प्रभावी दरों की संकल्पना को समझ पाएँगे;
- ब्याज की अकित और प्रभावी दरों के बीच के अंतरसंबंध को स्पष्ट कर पाएँगे;
- वर्तमान मूल्य की संकल्पना को समझ पाएँगे; तथा उसका परिकलन कर पाएँगे;
- मूल्य की समीकरण का उपयोग कर पाएँगे;
- बट्टे की संकल्पना; तथा
- विभिन्न प्रकार के बट्टों का परिकलन कर पाएँगे।

11.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, हमने ब्याज की संकल्पना का परिचय कराया या तथा साधारण और चक्रवृद्धि ब्याजों के अभिकलन की विधियों की चर्चा की थी। वर्तमान इकाई में कुछ और प्रकरणों को सम्मिलित किया जा रहा है, जो ब्याज के अध्ययन में उपयोगी होते है।

प्रायः हम भुगतान करके ऐसी ब्याज दर पर पहुँचते हैं जो बताई गई दर से भिन्न होती है। ऐसा दृश्य हमारे सम्मुख इसलिए आ जाता है, क्योंकि ब्याज की अंकित दर (nominal rate) ब्याज की प्रभावी दर (effective rate) से भिन्न हो सकती है। पिछली इकाई में, हमने अध्ययन किया था कि ब्याज को यद्यपि वार्षिक प्रतिशत के

रूप में बताया गया है, परंतु इसे एक वर्ष में एक से अधिक बार संयोजित किया जा सकता है। परंतु यदि हम यह जानना चाहते हैं कि क्या अर्धवार्षिक संयोजित 5% वार्षिक ब्याज की दर त्रैमासिक संयोजित 5% वार्षिक ब्याज की दर से अधिक है या कम, तो क्या करना होगा ? ब्याज की प्रभावी दर का परिकलन ऐसे विभिन्न वैकल्पिक अवसरों के तुलना करने में सुविधाजनक रहता है। यह इकाई वर्तमान मूल्य तथा मूल्य के समीकरण की भी व्याख्या करती है। बट्टा देने, जो संयोजन की संकल्पना की विपरीत संकल्पना है, का परिचय दिया गया है तथा इसके विभिन्न प्रकारों को स्पष्ट किया गया है। किसी वर्तमान धनराशि के भविष्य के मूल्य को ज्ञात करने के लिए संयोजन का उपयोग किया जाता है, जबकि बट्टा देने का उपयोग भविष्य में प्राप्त होने वाली राशि के उस मूल्य को ज्ञात करने में होता है, जो उससे पूर्व तिथि पर प्राप्त जाता है।

11.2 ब्याज की अंकित और प्रभावी दरें

कोई ब्याज की दर केवल समय के संदर्भ में ही अर्थपूर्ण होती है। व्यापक रूप में, इसे प्रति वर्ष दर समझा जाता है, जिसे अंकित ब्याज दर कहा जा सकता है। वर्ष के अतिरिक्त, समय की अन्य अवधियों के लिए जैसे मास, सप्ताह या दिन, ब्याज दर को प्रभावी ब्याज दर कहा जाता है। प्रारंभ करने के लिए, याद कीजिए कि चक्रवृद्धि ब्याज किस प्रकार कार्य करता है। मान लीजिए कि किसी धनराशि A को वार्षिक ब्याज दर i पर निवेशित किया जाता है तथा ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। एक वर्ष के बाद, मिश्रधन $A + iA = A(1 + i)$ होगा तथा यह राशि अब दूसरे वर्ष में अर्जित करेगी। इस प्रकार, n वर्षों के बाद मिश्रधन $A(1 + i)^n$ हो जाएगा। गुणक $(1 + i)^n$ **संचितन या संचय गुणक** (accumulation factor) कहलाता है। यदि ब्याज दैनिक संयोजित होता है, तो इन्ही n वर्षो के लिए मिश्रधन $A(1+\frac{i}{365})^{365n}$ होगा। यह स्थिति **अंकित वार्षिक ब्याज की दर** की है।

प्रभावी वार्षिक ब्याज की दर वह धनराशि है, जो वर्ष के प्रारंभ में एक इकाई राशि को निवेशित करने पर उस वर्ष में अर्जित की जाती है, जब अर्जित धनराशि की वर्ष के अंत में भुगतान किया जाता है। दैनिक संयोजन के उदाहरण में प्रभावी वार्षिक ब्याज की दर $(1+\frac{i}{365})^{365} - 1$ है। यह वह ब्याज दर है, जो वार्षिक संयोजन करने पर उतनी ही धनराशि प्रदान करेगी। जब समय अवधि निर्दिष्ट नहीं की गई हो, तब अंकित और प्रभावी ब्याज दरों को वार्षिक दरें ही माना जाता है।

उदाहरण 1: ब्याज दर 5% p.a., त्रैमासिक संयोजित के संगत प्रभावी ब्याज की दर क्या है ? यहाँ हल करने वाली समीकरण $(1 + 0.05/4)^4 = 1 + i$, है, जहाँ i प्रभावी ब्याज दर है।

दो भिन्न–भिन्न अंकित वार्षिक ब्याज दरों वाली दो विभिन्न निवेश योजनाएँ, वस्तुतः **समतुल्य (equivalent)** हो सकती हैं; अर्थात् उनके भविष्य में किसी निश्चित तिथि पर बराबर मूल्य हो सकते हैं।

प्रभावी ब्याज की दर के परिकलन के लिए सूत्रः

$$R = (1 + i)^k - 1\,;\mathbf{k}]\,(1 + r/k)^k - 1,$$ जहाँ

R: प्रभावी ब्याज की दर

***r*:** वार्षिक ब्याज की दर

***k*:** एक वर्ष में संयोजन या रूपांतरण अवधियों की संख्या

***i*:** प्रति रूपांतरण अवधि ब्याज की दर

नोटः उस स्थिति में, जब अंकित ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है, तो प्रभावी दर के लिए सूत्र $\boldsymbol{R = e^{r} - 1}$ हो जाएगा।

उदाहरण 2: वह प्रभावी दर ज्ञात कीजिए, जो अंकित दर 24% संयोजित मासिक के समतुल्य है।

हलः

यहाँ , $k = 12$, $r = 0.24$, R=? है।

$i = 0.24/12$ है।

$R = (1 + r/k)^k - 1$

$= (1 + 0.24/12)^{12} - 1$

$= (1.02)^{12} - 1$

$=1.268241-1$

$= 0.268241$

$= 26.82\ \%$

अतः समतुल्य प्रभावी दर 26.82% है।

उदाहरण 3: वह प्रभावी दर ज्ञात कीजिए, जो अंकित पर 12% त्रैमासिक, संयोजित के समतुल्य है।

हलः

यहाँ, $k = 4$, $r = 0.12$, R=? है।

$i = 0.12/4$ है।

$R = (1 + r/k)^k - 1$

$= (1 + 0.12/4)^4 - 1$

$=(1.03)^4 - 1$

$=1.255088 - 1$

$=12.55\ \%$

अतः, समतुल्य प्रभावी दर 12.55% है।

उदाहरण 4: वह चक्रवृद्धि ब्याज दर ज्ञात कीजिए, जो सतत रूप से संयोजित होने पर 6% प्रभावी दर के समतुल्य है।

हलः

यहाँ R=0.06, e^r=? है।

$R = e^r - 1$ है।

$0.06 = e^r - 1$

अतः $e^r = 1.06$

या, $r \log e = \log (1.06)$

या, $r (0.4343) = 0.0253$

या, $r = 0.0253 / 0.4343$

$= 0.05825$ or, 5.82%

अतः, वाँछित ब्याज की दर 5.82% है।

उदाहरण 5: एक स्थानीय डाक घर प्रति 100 रुपए पर 5 रुपए प्रति तिमाही ब्याज लेता है, जिसका भुगतान अग्रिम रूप से करना होता है। प्रभावी वार्षिक ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हलः क्योंकि ब्याज अग्रिम रूप से लिया जाता है, इसलिए इस योजना को प्रति तिमाही 95 रुपए पर 5 रुपए के रूप में समझा जा सकता है।

यहाँ, $i = 5/95$, $k = 4$, R=? है।

अब, $R = (1 + i)^k - 1$

$= (1 + 5/95)^4 - 1$

$= (1 + 0.053)^4 - 1$

$= (1.053)^4 - 1$

$= 1.2295 - 1$

$= 22.95$ %.

अतः, प्रभावी ब्याज की दर 22.95% वार्षिक है।

उदाहरण 6: राधेश्याम एक मोटरसाइकिल खरीदने के लिए ऋण लेना चाहता है। उसका बैंक 8% वार्षिक ब्याज, अर्धवार्षिक संयोजित लेता है।एक पड़ोस का साहूकार 7.9% वार्षिक ब्याज, मासिक संयोजित लेता है। किस स्थिति में वह कम ब्याज का भुगतान करेगा ?

हलः हम दोनों स्थितियों के लिए, प्रभावी दरों की तुलना करेंगे।

$R = (1 + i)^k - 1$ या, $(1 + r/k)^k - 1$

स्थिति A:

$r = 0.08$, $k = 2$, R =? है।

$R = (1 + 0.08/2)^2 - 1$

$=(1.04)^2 - 1$

$= 1.081600 - 1$

$= 8.16\%$ है।

स्थिति B:

$r = 0.079$, $k = 12$, $R = ?$

$R = (1 + 0.079/12)^{12} - 1$

$=(1.00658)^{12} - 1$

$= 1.081924 - 1$

$= 8.19\%$ (लगभग)

बैंक की प्रभावी ब्याज की दर कम है तथा इस प्रकार साहूकार की तुलना में वह कम प्रभावी दर पर ब्याज लेता है।

उदाहरण 7: अनिता 30 वर्षों के लिए □ 7500 रु जमा करना चाहती है। उसके पास दो विकल्प हैं: विकल्प A – 10% वार्षिक, अर्धवार्षिक संयोजित तथा विकल्प B –9. 5% वार्षिक, सतत संयोजित। अनिता को कौन सा विकल्प चुनना चाहिए ?

हल: हम दोनों विकल्पों के लिए प्रभावी दरों को परिकलित करेंगे।

$R = (1 + \mathrm{i})^{k} - 1$ या, $(1 + r/k)^{k} - 1$

विकल्प (A): $r = 0.1$, $k = 2$, $R = ?$

$R = (1 + 0.1/2)^2 - 1$

$=(1.05)^2 - 1$

$= 1.1025 - 1$

$= 0.1025$ अर्थात्, 10.25% है।

विकल्प B:

$\mathrm{e}^r = 0.095$, $R = ?$ है।

$R = \mathrm{e}^r - 1$

$= \mathrm{e}^{0.095} - 1$

$= 1.0997 - 1$

$= 0.0997$, अर्थात् 9.97% है।

अतः, अनिता को विकल्प A चुनना चहिए।

अंकित ब्याज दरों की तुलना नहीं की जा सकती है, जब तक कि उनकी संयोजन अवधियाँ एक ही (समान) न हों। प्रभावी ब्याज की दर, वह वार्षिक ब्याज की दर है, जो एक वर्ष में केवल एक बार संयोजित करता है। प्रभावी दर का साधारण ब्याज से कोई भ्रम नहीं होना चाहिए। जब रूपांतरण अवधि एक वर्ष होती है, तब प्रभावी ब्याज

की दर और अंकित ब्याज की दर समान होती हैं। अतः, जब संयोजन वार्षिक होता है, तब दोनों दरें बराबर होती हैं। परंतु यदि संयोजन एक वर्ष में एक से अधिक बार किया जाएगा, तो प्रभावी ब्याज की दर अंकित ब्याज की दर से भिन्न होगी। उदाहरणार्थ, यदि ब्याज की दर 15% वार्षिक है तथा ब्याज वार्षिक संयोजन होता है, तो इस स्थिति में, अंकित दर 15% है तथा प्रभावी दर भी 15% है। परंतु यदि संयोजन एक वर्ष में एक से अधिक बार किया जाएगा, तो प्रभावी ब्याज की दर 15% से अधिक होगी। जितना ब्याज का संयोजन अधिक होगा, प्रभावी ब्याज की दर उतनी अधिक होती जाएगी।

उस अंकित ब्याज की दर को, जिसमें ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है, तथा वह एक दी हुई प्रभावी ब्याज की दर के बराबर होती है, **ब्याज का बल (force of interest)** कहा जाता है।

उदाहरणार्थ, यदि ब्याज एक वर्ष में n बार संयोजित होता है, तो t वर्ष बाद, मिश्रधन

$$\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

द्वारा प्राप्त होता है।

यदि $n \to \infty$ हो, तो उपरोक्त व्यंजक e^{it} हो जाता है। यह ब्याज के तात्क्षणिक संयोजन की धारणा की स्थिति है। इस संदर्भ में, तात्क्षणिक संयोजित दर को δ द्वारा व्यक्त कीजिए, जो ब्याज दर i के समतुल्य है। यहाँ δ ब्याज का बल कहलाता है।

उदाहरण 8: दर्शाइए कि $\delta = \ln(1 + i)$ होता है।

$e^{\delta} = e^{\ln(1+i)} = (1+i)$ लेने पर,

$\delta = \ln(1 + i)$ है।

उदाहरण 9: ब्याज का बल ज्ञात कीजिए, जो 5% के समतुल्य है, जबकि ब्याज दैनिक संयोजित होता है।

यहाँ, $e^{\delta} = (1 + 0.05/365)^{365}$ है, जिससे $\delta = 0.4999$ है।

अतः, एक रफ (rough) सन्निकटन के रूप में, जब संयोजन दैनिक होता है, ब्याज का बल वही है जो अंकित ब्याज की दर है।

नोटः अंकित दर को वार्षिक प्रतिशतता दर भी कहते हैं तथा प्रभावी दर को वार्षिक प्रतिशता प्राप्ति (annual percentage yield) भी कहते हैं

बोध प्रश्न क

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** :

   i) अंकित ब्याज की दर सदैव प्रभावी ब्याज की दर से कम या उसके बराबर होती है।

   ii) चक्रवृद्धि बट्टे के लिए सूत्र वही होता है, जो चक्रवृद्धि ब्याज के लिए सूत्र होता है।

   iii) ब्याज का बल वार्षिक संयोजित प्रभावी ब्याज की दर होती है।

iv) मूल्य की समीकरण का उपयोग समय के एक केन्द्रीय बिंदु पर बाध्यिताओं या अनुग्रहों (obligations) के मानो के बराबर करने में किया जाता है।

2. कोष्ठकों में दिए, उपयुक्त शब्दों से रिक्त स्थानों को भरिएः

i) जब रूपांतरण अवधि .... होती है, तब प्रभावी दर वही होती है, जो अंकित दर होती है। (वर्ष, सतत)

ii) वैकल्पिक निवेश अवसरों की बीच तुलना करने के लिए................... अच्छी है। (अंकित दर, प्रभावी दर)

iii) अंकित दर को............................ भी कहते हैं। (वार्षिक प्रतिशतता प्राप्ति, वार्षिक प्रतिशतता दर)

3. बैंक A अंकित ब्याज की दर 10% अर्धवार्षिक संयोजित देता है। बैंक B अंकित ब्याज की दर 10.5%, त्रैमासिक संयोजित देता है। कौन–सा बैंक बेहतर प्रभावी ब्याज की दर प्रदान कर रहा है ?

4. कौन सी अंकित दर, एक प्रभावी ब्याज की दर 8% देगी, यदि संयोजन

(क) अर्धवार्षिक (ख) त्रैमासिक और (ग) मासिक होता है ?

5. ब्याज का बल क्या है ?

11.3 वर्तमान मूल्य

वर्तमान मूल्य यह व्याख्या करता है कि एक भावी धनराशि (future sum of money) का आज क्या मूल्य होगा। इस अंतर्निहित धारणा को देखने के लिए, मान लीजिए कि उद्देश्य यह है कि आज से n वर्षों बाद एक धनराशि A प्राप्त की जाए। यदि ब्याज की दर i है, तो कितनी राशि जमा की जाए कि वह लक्ष्य पूरा हो जाए ? देखिए कि इसके लिए वाँछित धनराशि $(1+i)^{-n}$ है। ऐसी राशि को A का **वर्तमान मूल्य (present value)** कहते हैं।

गुणन $(1+i)^{-n}$ बट्टा गुणक (discount factor कहलाता है।

उदाहरण 10: मान लीजिए कि वार्षिक ब्याज की दर 5% है। अब से 10 वर्षों बाद देय ₹2000 रु के भुगतान का वर्तमान मूल्य क्या है ?

वर्तमान मूल्य $\text{Rs.}\,2000(1+0.05)^{-10} = Rs.\,1227.83$ है।

यह उदाहरण निम्नलिखित धारणा प्रदर्शित करता हैः

यदि आपको आज ₹1227.87 प्राप्त करने या अब से 10 वर्षों बाद ₹2000 करने के विकल्प दिए जाएँ, तो आपको इन दोनों विकल्पों के बीच तटस्थ रहना चाहिए। इस प्रकार, 5% वार्षिक ब्याज दर की कल्पना के अंतर्गत 10 वर्षों बाद किए जाने वाले ₹2000 के भुगतान को आज के ₹1227.87 के भुगतान से प्रतिस्थापित किया जा सकता है।

सूत्रः

या

$$P = A(1+i)^{-n}\ ;\ \mathbf{k}, A(1+r/k)^{-tk}$$

P = मूलधन राशि

A= भविष्य के समय बिंदु पर मिश्रधन राशि

***r*:** वार्षिक ब्याज की दर

k: प्रति वर्ष संयोजन अवधियों की संख्या

t: समय काल वर्षों में

***i*:** प्रति रूपांतरण अवधि ब्याज की दर

n = संयोजन अवधियों की संख्या

[**नोटः** $(1+i)^{-n}$ **या** , $(1+r/k)^{-tk}$ को बट्टा गुणक के रूप में जाना जाता है। यह n अवधियों के बाद ब्याज की दर i प्रति अवधि से देय 1 के वर्तमान मूल्य को निरूपित करता है।]

वर्तमान मूल्यः सतत संयोजन

सूत्र

$$P = Ae^{-rt}$$

P = मूलधन राशि

A= भविष्य के समय बिंदु पर मिश्रधन राशि

***r*:** वार्षिक ब्याज की दर

t: समय काल वर्षों में

उदाहरण 11 : 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर 2 वर्षों के बाद देय ₹1000 की धनराशि का वर्तमान मूल्य क्या है, यदि ब्याज

(क) वार्षिक, (ख) अर्धवार्षिक दिया जाता है ?

हलः

क) यहाँ $A = 1{,}000, i = 0.05, n = 2, P = ?$ है।

$P = A(1+i)^{-n}$

$= 1000\,(1+0.05)^{-2}$

$= 1000\,(1.05)^{-2}$

$= 1000\,(0.907029)$

$=$ ₹907.03

अतः वर्तमान मूल्य 907.03 है।

ख) यहाँ $A = 1000, i = 0.05/2 = 0.025, n = 2\times2$, P = ? है।

$P = A(1+i)^{-n}$

$=1000\,(1+0.025)^{-2\times2}$

$= 1000\,(1.025)^{-4}$

$= 1000(0.905950)$

$=$ ₹906 है।

अतः, वर्तमान मूल्य 906 है।

नोटः $(1.05)^{-2}$ और $(1.025)^{-4}$ के मान कैलकुलेटर या वर्तमान मूल्य सारणी के उपयोग से परिकलित किए जा सकते हैं।

उदाहरण 12: मोनिका किसी बैंक में धनराशिष जमा करती है, जो 16% वार्षिक की दर पर ब्याज देता है, जो त्रैमासिक संयोजित होता है। यदि वह अपने खाते में 5 वर्षों के बाद ₹15000 की राशि जमा होना चाहती है, तो वह आज कितनी राशि बैंक में जमा कराए ?

हलः

यहाँ , $A = 15000$, $i = 0.16/4 = 0.04$, $n = 5 \times 4$, $P = ?$ है।

$P = A\,(1 + i)^{-n}$

$= 15000\,(1 + 0.04)^{-20}$

$= 15000\,(1.04)^{-20}$

$= 15000(0.456386)$ (वर्तमान मूल्य सारणी के उपयोग से)

$=$ ₹6845.80 है।

अतः, मोनिका को आज अपने खाते में ₹6845.80 जमा कराने चाहिए।

उदाहरण 13: 3 वर्षों के बाद देय ₹100 की राशि का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए। वार्षिक ब्याज की दर 5% सतत रूप से संयोजित है।

हलः $A = 100$, $t = 3$, $r = 0.05$ $P = ?$ है।

$P = Ae^{-rt}$

$= 100\ e^{-(0.05)(3)}$

$= 100\ e^{-0.15}$

$= 100\ (0.86071)$ (e^{-x} मूल्य सारणी से)

$= 86.07$

अतः वर्तमान मूल्य 86द्07 रु है।

उदाहरण 14: राहुल ने एक पुरस्कार जीता है। उसे दो विकल्प दिए जाते हैंः या तो आज ₹8000 प्राप्त कर ले या फिर 2 वर्षों के बाद ₹10000 प्राप्त करे ले। बाजार में वार्षिक ब्याज दर 12% है तथा ब्याज मासिक संयोजित किया जाता है। राहुल को कौन–सा विकल्प चुनना चाहिए ?

हलः

विकल्प (A): 8000

विकल्प (B): यहाँ, $A = 10000, n = 2 \times 12 = 24, r = 0.12, i = 0.12/12 = 0.01$, P =? है।

$P = 10000\ (1 + 0.01)^{-24}$

$= 10000\ (1.01)^{-24}$

$= 10000\ (0.787566)$ (वर्तमान मूल्य सारणी के उपयोग से)

= ₹7,875.66–(विकल्प B का मूल्य)

अतः, राहुल को विकल्प A चुनना चाहिए।

उदाहरण 15: अब से 3 वर्षों बाद देय ₹4500 की राशि का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए। ब्याज 6% वार्षिक की दर से सतत रूप से संयोजित होता है।

हल: यहाँ $A = 4500, t = 3, r = 0.06, P$ =? है।

$P = Ae^{-r \times t}$

$= 4500\ e^{-0.06 \times 3}$

$= 4500\ e^{-0.18}$

$= 4500\ (0.83527)$ (e^{-x} मूल्य सारणी के उपयोग से)

= ₹3758.72

अतः, वर्तमान मूल्य ₹3758.72 है।

बोध प्रश्न ख

1. पद वर्तमान मूल्य से आपका क्या तात्पर्य है ?
2. अब से 6 वर्षों बाद देय ₹5000 की राशि का वर्तमान मूल्य क्या है ? वार्षिकि ब्याज की दर 8% त्रैमासिक संयोजित है।

3- तरूण को अब से 3 मास बाद किसी निवेश के ₹1000 प्राप्त होने वाले हैं। इस प्राप्त होने वाली राशि का वर्तमान मूल्य क्या होगा, यदि सतत संयोजन ब्याज की दर 16% वार्षिक है ?

11.4 मूल्य की समीकरण

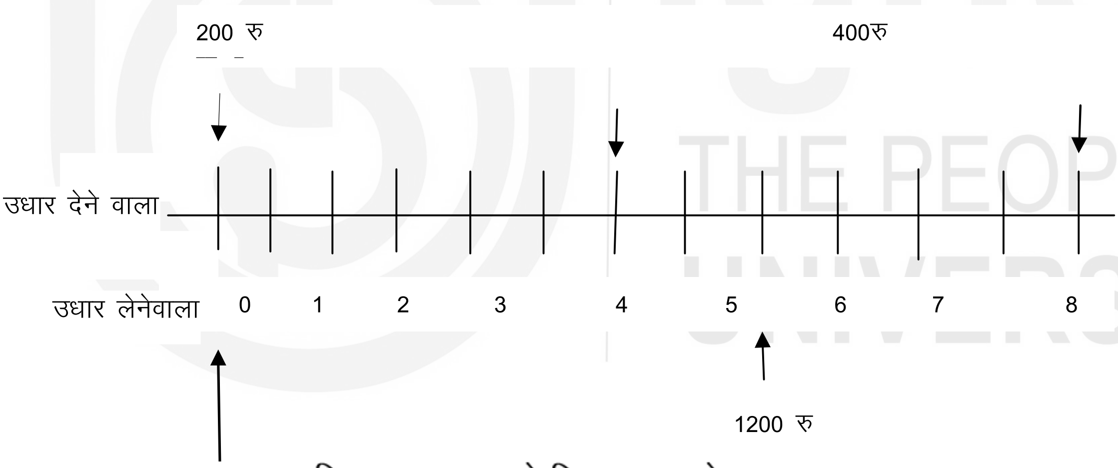
हम देख चुके हैं, कि ब्याज के परिकलनों में, किसी समय बिंदु पर किसी धनराशि का मूल्य उस समय लंबाई पर निर्भर करता है, जितने समय पहले उस धनराशि का भुगतान किया गया था या उस समय पर निर्भर करता है, जो भविष्य में उसके भुगतान किए जाने तक व्यतीत होगा। यह सिद्धांत प्रायः धनराशि (या मुद्रा) का समय मूल्य (time value) कहलाता है। हम यह कल्पना करते हैं कि यह सिद्धांत केवल ब्याज के प्रभाव को अस्वीकार करता है तथा मुद्रास्फूर्ति (inflation) के प्रभाव को सम्मिलित नहीं करता है। मुद्रास्फूर्ति समय अनुसार धन (मुद्रा) की खरीद शक्ति को घटा (कम कर) देती है। अतः, निवेशकर्ता मुद्रास्फूर्ति से हुई क्षतिपूर्ति के लिए, उच्चतर दर पर धनराशि प्राप्त होने की प्रत्याशा रखते हैं। उपरोक्त सिद्धांत के फलस्वरूप, विभिन्न समय बिदुंओं पर देय विभिन्न धनराशियों की तुलना नहीं की जा सकती, जब

तक कि सभी राशियों को एक सार्व तिथि तक, जो तुलना तिथि/केन्द्र तिथि/मूल्यांकन तिथि कहलाती है, संचित या बट्टागत नहीं कर ली जाती। वह समीकरण, जो प्रत्येक भुगतान को तुलना तिथि (comparison date) तक संचित (accumulates) या बट्टागत (discount) करती है, **मूल्य की समीकरण (equation of value)** कहलाती है।

समय आरेख (time diagram) मूल्य की समीकरण को हल करने में सहायक होता है। ध्यान दीजिए कि एक समय आरेख एक–विमीय (one dimension) आरेख है, जहाँ केवल समय ही चर है। एक समय रेखा पर विभिन्न निधियों या फंडों (funds) के साथ सहयोजित की जा सकने वाली धनराशि के मूल्यों को दर्शाया जा सकता है। ध्यान दीजिए कि एक समय आरेख हल का एक औपचारिक भाग नहीं होता है। परंतु, यह हल के चित्रीयकरण में बहुत सहायक हो सकता है।

उदाहरण 16: 10 वर्षों के अंत में किए जाने वाले ₹1200 के भुगतान के बदले में, एक साहूकार ₹200 तुरंत, 6 वर्षों के बाद 400 तथा 15 वर्ष के अत मे अंतिम राशि देने के लिए सहमत हो जाता है। 15 वर्षों में अंत के किए जाने वाले इस भुगतान की राशि ज्ञात कीजिए, यदि अंकित वार्षिक ब्याज की दर 9% अर्धवार्षिक संयोजित है।

उत्तर: तुलना करने की तिथि को $t = 0$ चुना जाता है। समय आरेख नीचे आकृति 11.1 में दिया गया है।



आकृति 11.1: भुगतान के लिए समय आरेख

मूल्य की समीकरण

$$200 + 400(1 + 0.045)^{-12} + X(1 + 0.045)^{-30} = 1200(1 + 0.045)^{-20}$$ हैं।

X के लिए, इस समीकरण को हल करने पर, हम X 231.11 (लगभग) प्राप्त करते हैं।

मूल्य के समीकरण की समस्याओं को हल करने के लिए, हमें आवश्यकता है:

1. एक केन्द्र तिथि (focal date) चुनने की;
2. बताए गए ब्याज का उपयोग करते हुए, इस केन्द्र तिथि पर सभी बाध्यताओं के मान परिकलित करने की;
3. मूल्य की समीकरण को स्थापित करके उसे हल करने की।

उदाहरण 17: आप पर एक ऋण है, जिसका भुगतान एक मास बाद ₹1800, दो मास बाद ₹1600 तथा तीन मास बाद ₹1000 अदा कर किया जाना है। वह अकेला भुगतान ज्ञात कीजिए, जो आज इस ऋण को संपूर्ण रूप से चुका देगा। साधारण ब्याज की वार्षिक दर 5.76% है।

हलः केन्द्र बिदुं : आज

पुरानी बाध्यता	केन्द्र बिंदु पर मूल्य	नई बाध्यता	केन्द्र बिंदु पर मूल्य
1 मास बाद ₹1800	$1800(1+0.0575\times1/12)^{-1}$	x आज	x
2 मास बाद ₹1600	$1600(1+ 0.0575 \times 2/12)^{-1}$		
3 मास बाद ₹1000	$1000\ (1+ 0.0575\times 3/12)^{-1}$		

मूल्य की समीकरण को स्थापित करना

$x = 1800(1 + 0.0575 \times 1/12)^{-1} + 1600(1+ 0.0575\times 2/12)^{-1} +$

$1000\ (1+ 0.0575\times 3/12)^{-1}$

$= 1791.58 + 1584.94 + 981.45$

$= 4357.97$

अतः, संपूर्ण ऋण चुकाने के लिए आपको आज ₹4357.97 रु का भुगतान करना पड़ेगा।

उदाहरण 18: सीता पर दो ऋण देय हैः ₹800, का एक ऋण चार मास बाद देय है, तथा ₹1000 का एक अन्य ऋण नौ मास बाद देय है। वह 6 मास के अंत में इन दोनों ऋणों को एक अकेले भुगतान के साथ निपटा देना चाहती है। साधारण ब्याज की दर 6% वार्षिक है। इस भुगतान की राशि को निम्नलिखित का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए।

क) वर्तमान तिथि को केन्द्र तिथि लेकर

ख) निपटारे की तिथि को केन्द्र तिथि लेकर

हलः मान लीजिए कि भुगतान की राशि x है।

क) केन्द्र बिंदु : वर्तमान तिथि

पुरानी बाध्यता	केन्द्र बिंदु पर मूल्य	नई बाध्यता	केन्द्र बिदुं पर मूल्य
4 मास बाद ₹800	$800(1 + 0.06 \times 4/12)^{-1}$	6 मास बाद x	$x\ (1+ 0.06 \times 6/12)^{-1}$
9 मास बाद ₹1000	$1000(1 + 0.06 \times 9/12)^{-1}$		

मूल्य की समीकरण को स्थापित करनाः

$800(1 + 0.06 \times 4/12)^{-1} + 1000(1+0.06\times 9/12)^{-1} = x\ (1+ 0.06 \times 6/12)^{-1}$

$784.31 + 956.94 = 0.97087\,x$

या, $x = 1741.25/0.97087$

$= 1793.49$ है।

अतः, दोनों ऋणों का निपटारा करने के लिए, आज 1793.49 की राशि अदा करनी पड़ेगी।

ख) केन्द्र बिदु : 6 मास

पुरानी बाध्यता	केन्द्र बिदुं पर मूल्य	नई बाध्यता	केन्द्र बिदुं पर मूल्य
4 मास बाद ₹800	$800(1+0.06 \times 2/12)^1$	6 मास बाद x	x
9 मास बाद ₹1000	$1000(1+0.06 \times 3/12)^{-1}$		

मूल्य की समीकरण को स्थापित करना:

$800(1 + 0.06 \times 2/12)^1 + 1000(1+0.06 \times 3/12)^{-1} = x$

$808 + 985.22 = x$

या, $x = 1793.22$

अतः, 6 मास के बाद दोनों ऋणों का निपटारा करने के लिए, भुगतान की वाँछित राशि ₹1793.22 है।

उदाहरण 19: विद्या के ऊपर 2000 रु को एक ऋण है जो 12 वर्षों के बाद देय है। एक मुश्त भुगतान करने के स्थान पर, वह ₹500 अभी 6 वर्ष के बाद ₹500 तथा 12 वर्ष बाद अंतिम भुगतान करना चाहती है। यदि प्रभावी ब्याज की दर 2% वार्षिक है, तो ऋण को चुकाने के लिए, उसका अंतिम भुगतान कितना होना चाहिए ?

हल : मान लीजिए कि ऋण के प्रति विद्या के अंतिम भुगतान की राशि x है। केन्द्र बिंदु 12 वर्ष है।

परिकलन सारणी :

पुरानी बाध्यता	केन्द्र बिंदु पर मूल्य	नई बाध्यता	केन्द्र बिंदु पर मूल्य
₹2000	$2000\ (1 + 0.02)$	₹500 अभी	$500\ (1 + 0.02)^{12}$
		6 वर्ष के बाद ₹500	$500\ (1 + 0.02)^{6}$
		12 वर्ष के बाद ₹x	x

मूल्य की समीकरण हो जाती है:

$500\ (1 + 0.02)^{12} + 500(1 + 0.02)^6 + x = 2000\ (1 + 0.02)^{12}$

या, $500\ (1.02)^{12} + 500(1.02)^6 + x = 2000\ (1.02)^{12}$

या, 500 (1.268242)+ 500(1.126162)+x = 2000 (1.26842)

या, 634.121 + 563.081 + x = 2536.484

या, x = ₹1339.282 है।

अतः, विद्या को ऋण का निपटारा करने के लिए 1339.28 का भुगतान करना चाहिए।

उदाहरण 20: सतनाम ने किसी साहूकार से ₹1500 उधार लिए। उसने 6 मास बाद ₹4000 का भुगतान किया तथा एक वर्ष के बाद ₹6000 का भुगतान किया। अपने ऋण का निपटारा करने के लिए, उस दो वर्ष बाद कितना भुगतान करना चाहिए ? ब्याज की दर 18% है, जो सतत रूप से संयोजित होती है।

हल: माना सतनाम द्वारा किया जाने वाला अंतिम भुगतान x है। केन्द्र बिंदु वर्तमान तिथि, अर्थात् 0 है।

मूल्य की समीकरण है:

$15000 = 4000\ e^{-0.09} + 6000\ e^{-0.18} + x\ e^{-0.36}$

या, 15000 = 4000 (0.91393) + 6000 (0.83527)+ x (0.69768)

(e^{-x} मूल्य सारणी के उपयोग से)

या, 15000 = 3655.72 + 5011.62 + 0.69768 x

या, 0.69768 x = 6332.66

या, x = ₹9,076.74 है।

अतः, सतनाम को अपने ऋण का निपटारा करने के लिए ₹9076.43 रु का भुगतान करना चाहिए।

बोध प्रश्न ग

1. मूल्य की समीकरण से आपका क्या तात्पर्य है ?
2. समय आरेख का अर्थ बताइए।
3. केन्द्र तिथि का अर्थ लिखिए।

11.5 बट्टा

बट्टा देना संयोजित करने की विपरीत क्रिया है। जब हम किसी राशि या बाध्यता के भावी (भविष्य के) मान को जानते हैं, तब हम किसी पूर्व तिथि (earlier date) पर उसका मान ज्ञात करने के लिए बट्टे की दर (discount date) को अनुप्रयोग करते हैं। अतः, बट्टा देना समय से पीछे की ओर चलना है।

11.5.1 बट्टों के प्रकार

साधारण बट्टा

कभी–कभी ब्याज, वित्तीय सौदों के प्रारंभ में ही अदा कर दिया या काट लिया जाता है। ऐसा ब्याज साधारण बट्टा (simple discount) कहलाता है। उदाहणार्थ, अनुज एक साहूकार के पास गया तथा उससे 2000 ऋण देने के लिए कहा। साहूकार उसे ऋण देने के लिए सहमत हो जाता है और उसे ₹1700 देता है तथा कहता है कि

₹300 की राशि 15% ब्याज (2000 × 0.15 = 300) है। अब, अनुज को साहूकार को केवल ₹2000 वापिस करने है। साधारण बट्टा साधारण ब्याज से भिन्न होता है, क्योंकि साधारण ब्याज मूलधन का एक प्रतिशत होता है, जबकि साधारण बट्टा परिपक्व राशि (maturity value) का एक प्रतिशत होता है।

नोट: साधारण बट्टे का एक अन्य नाम बैंक बट्टा है।

साधारण बट्टे के लिए सूत्र

$\boldsymbol{D = A \times d \times t}$, जहाँ

$\boldsymbol{D}$ = बट्टे की राशि

$\boldsymbol{A}$ = $\boldsymbol{t}$ अवधियों के बाद मिश्रधन

$\boldsymbol{d}$ = बट्टा प्रतिशत

$\boldsymbol{t}$ = समय अवधि

किसी बट्टे की दर पर वर्तमान मूल्य के लिए सूत्र

$\boldsymbol{P = A(1 - d)^n}$, जहाँ

बट्टा

$\boldsymbol{P}$ = धनराशि का वर्तमान मूल्य

$\boldsymbol{A}$ = $\boldsymbol{n}$ अवधियों के बाद मिश्रधन

$\boldsymbol{d}$ = प्रति अवधि बट्टे की दर

$\boldsymbol{n}$ = समय अवधियों की संख्या

बट्टा$(D) = A - P$

बट्टे की अंकित दर तथा बट्टे की प्रभावी दर

बट्टे की अंकित दर और बट्टे की प्रभावी दर की संकल्पनाएँ उसी प्रकार होती हैं, जैसी संयोजन की स्थिति में थीं। बट्टे की बताई हुई दर, जबकि बट्टे को एक वर्ष में एक से अधिक बार बदला जाता (converted) है, बट्टे की अंकित दर कहलाता है। दूसरी ओर, बट्टे की प्रभावी दर सदैव बट्टे की अंकित दर से कम होती है।

सतत रूप से बदलने वाली तथा एक दी हुई बट्टे की प्रभावी दर के समतुल्य बट्टे की अंकित दर, बट्टे का बल (force of discount) कहलाती है। बट्टे की अंकित दर का मूल्य मूलधन राशि या परिपक्व राशि पर नहीं निर्भर करता है।

बट्टे की अंकित दर तथा बट्टे की प्रभावी दर के बीच में संबंध

$\boldsymbol{D_e = 1 - e^{-d}}$, द्वारा दिया जाता है, जहाँ

D_e = बट्टे की प्रभावी दर

d = बट्टे की अंकित दर है।

चक्रवृद्धि बट्टा

चक्रवृद्धि बट्टा (compound discount) चक्रवृद्धि ब्याज का प्रतिलोम है तथा इसका उपयोग किसी राशि के भावी मूल्य का एक पूर्व तिथि पर मूल्य निकालने के लिए किया जाता है।

चक्रवृद्धि बट्टे के लिए सूत्र

$\boldsymbol{P = A(1+i)^{-n}}$, जहाँ

$\boldsymbol{P}$ = धनराशि का वर्तमान मूल्य है

$\boldsymbol{A} = n$ अवधियों के बाद मिश्रधन

$\boldsymbol{i}$ = प्रति अवधि ब्याज की दर

$\boldsymbol{n}$ = समय अवधियों की संख्या

सतत बट्टा

सतत बट्टे (continuous discount) का उपयोग किसी संपदा या किसी बाध्यता का वर्तमान मूल्य ज्ञात करने में किया जाता है, जिसका मूल्य किसी भावी (future) समय पर ज्ञात हो तथा ब्याज सतत रूप से संयोजित हो। सतत रूप से बट्टा देने की संकल्पना के भावी और अग्रिम ठेकों के मूल्यांकनों में बृहत रूप से अनुप्रयोग हैं।

सतत बट्टे के लिए सूत्रः

$\boldsymbol{P = Ae^{-i\times n}}$, जहाँ

$\boldsymbol{P}$ = धनराशि का वर्तमान मूल्य है

$\boldsymbol{A} = n$ अवधियों के बाद मिश्रधन

$\boldsymbol{i}$ = प्रति अवधि ब्याज की दर

$\boldsymbol{n}$ = समय अवधियों की संख्या

उदाहरण 21: 2 वर्षों के बाद देय 5000 की धनराशि का 4% बट्टे की दर पर वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए, जबकि यह त्रैमासिक संयोजित होता है।

हलः

यहाँ,

$A = 5000, n = 2 \times 4, d = 0.04/4 = 0.01, P = ?$ है।

$P = A(1-d)^n$

$= 5000(1-0.01)^8$

$= 5000(0.99)^8$

$= 5000(0.9227446)$

$= 4613.72$

अतः, वर्तमान मूल्य 4613.72 है।

उदाहरण 22: बट्टे की प्रभावी दर ज्ञात कीजिए, जब बट्टे की अंकित दर 10% सतत रूप से संयोजित है।

हल:

यहाँ

$d = 0.10, D_e = ?$ है।

$D_e = 1 - e^{-d}$

$= 1 - e^{-0.10}$

$= 1 - 0.90484$ (e^{-x} मूल्य सारणी के उपयोग से)

$= 0.09516$ अर्थात्, 9.52% है।

अतः, वाँछित बट्टे की प्रभावी दर 9.52% है।

उदाहरण 23: आज से 3 वर्षो बाद देय 4500 की धनराशि का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए। ब्याज 6% की दर से सतत् रूप से संयोजित होता है।

हल: यहाँ $A = 4500, n=3, i = 0.06, P=?$ है।

$P = Ae^{-i\times n}$

$= 4500\ e^{-0.06\times 3}$

$= 4500\ e^{-0.18}$

$= 4500\ (0.83527)$ (e^{-x} मूल्य सारणी के उपयोग से)

= ₹3758.72 है।

अतः, वर्तमान मूल्य ₹3758.72 है।

बोध प्रश्न घ

1. बट्टे की प्रभावी दर तथा ब्याज की प्रभावी दर में अंतर स्पष्ट कीजिए।
2. बट्टे की अंकित दर और बट्टे की प्रभावी दर में क्या संबंध है ?
3. आप सतत बट्टे का उपयोग कब करेंगे ?

11.6 सारांश

इस इकाई में, हमने अंकित और प्रभावी ब्याज दरों, वर्तमान मूल्य, मूल्य की समीकरण तथा बट्टों की चर्चा की है, जिनका उपयोग ब्याज दर अभिकलनों के समय किया जाता हैं। इस प्रक्रिया में हमने सीखा है कि अंकित ब्याज दर वार्षिक प्रतिशत दर होती है, जबकि प्रभावी वार्षिक ब्याज की दर वह धनराशि है जो वर्ष के प्रारंभ में एक इकाई राशि को निवेशित करने पर उस वर्ष के समय काल में अर्जित की जाएगी। वर्तमान मूल्य की धारणा का उपयोग किसी भावी धनराशि का एक दी हुई ब्याज दर पर उसका चालू मूल्य ज्ञात करने में किया जाता है। हम देख चुके हैं कि मूल्य की समीकरण का उपयोग समय के एक केन्द्र बिंदु पर बाध्यताओं के मूल्यों के बराबर

करने में किया जाता है। हमने यह भी सीखा है कि बट्टा देने की प्रक्रिया संयोजन की प्रक्रिया की विपरीत प्रक्रिया है।

11.7 शब्दावली

बट्टा गुणकः प्रति अवधि i ब्याज की दर पर n अवधियों के बाद देय 3 रु का वर्तमान मूल्य

बट्टा दरः किसी दी हुई समय अवधि पर किसी धनराशि के भावी मूल्य का उस समय अवधि से पूर्व मूल्य ज्ञात करने के लिए उपयोग की जाने वाली ब्याज दर।

बट्टे की प्रभावी दरः वार्षिक बट्टे की दर, जो वर्ष में केवल एक बार संयोजित हो।

मूल्य की समीकरणः मूल्य की समीकरण केन्द्र बिंदु पर विभिन्न बाध्यताओं को बराबर करती है। केन्द्र तिथि पर ऋण का मूल्य = भुगतानों का मूल्य होता है।

समय का केन्द्र बिंदुः एक सार्व तिथि, जो सभी धनराशियों की तुलना करने के लिए, विभिन्न समय बिंदुओं पर भुगतान की जानी वाली विभिन्न धनराशियों के लिए निश्चित की जाती है।

बट्टे की अंकित दरः बताई गई बट्टे की दर, जब बट्टे को एक वर्ष में एक से अधिक बार बदली जाता है।

वर्तमान मूल्यः एक दी हुई ब्याज दर पर भावी धनराशि या बाध्यता का चालू मूल्य।

प्रतीकों की सूची

आपकी अध्ययन सामग्री में विभिन्न सूत्रों को लिखने में प्रयुक्त प्रतीक वे हैं, जो बृहत रूप उपयोग किए जाते हैं। नीचे दी हुई सूची में, ये विभिन्न शब्दों के अंतर्गत प्रथम प्रतीकों के रूप में दिए हैं। अनेक पाठ्य पुस्तकों में इन प्रतीकों से भिन्न प्रतीक दिए गए हैं। नीचे दी हुई सूची में सामान्यतः अधिकांश उपयोग किए जाने वाले प्रतीक दिए गए हैं। जब भी आप कोई पुस्तक पढ़ते हैं, तब यह महत्वपूर्ण है कि आप प्रयुक्त किए गए प्रतीकों को स्पष्ट रूप से समझ लें। विभिन्न सूत्रों को लिखने के लिए आप जिस प्रतीकों के समुच्चय का उपयोग करना चाहें कर सकते हैं। परंतु प्रत्येक स्थिति में यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि इन प्रतीकों का क्या अर्थ है।

t अवधियों के अंत में मिश्रधन	A, S, A_n
वार्षिक ब्याज की दर	r, R
बट्टे की राशि	D
प्रति अवधि बट्टा दर	d
ब्याज की प्रभावी दर	R, r^{eff}, r_E, f
प्रभावी बट्टा दर	D_e
प्रति रूपांतरण अवधि ब्याज दर	i
प्रति वर्ष संयोजन अवधियों की संख्या	k, m
समय अवधियों की संख्या	n
मूलधन राशि, राशि का वर्तमान मूल्य	P, A_0
समय काल वर्षों में	t

11.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य
2. (i) वर्ष (ii) प्रभावी दर (iii) वार्षिक प्रतिशतता दर
3. बैंक A – 10.25% बैंक B – 10.92%
4. (क) 7.85% (ख) 7.77% (ग) 7.72%
5. सतत रूप से संयोजित ब्याज की अंकित दर तथा एक दी हुए ब्याज की प्रभावी दर के समतुल्य

(ख)

1. किसी भावी धनराशी का आज का मूल्य है।
2. ₹3108.60
3. ₹9607

(ग)

1. वह समीकरण जो प्रत्येक भुगतान को तुलना तिथि तक संचित या बट्टागत करती है।
2. एक–विमीय आरेख, जिसमें समय ही एक मात्र चर है तथा यह एक अकेली निर्देशक अक्ष पर दर्शाया जाता है। समय–अक्ष पर स्थित बिंदुओं द्वारा विभिन्न विधियों के साथ सहयोजित की जा सकने वाली धनराशियों के मूल्यों को दर्शाया जाता है।
3. एक सार्व तिथि जिस तक, सभी संचित या बट्टागत राशियों की तुलना के लिए, विभिन्न समय बिंदुंओ पर भुगतान की जानी विभिन्न वाली धनराशियों को निश्चित किया जाता है।

(घ)

1. बट्टे की प्रभावी दर, जिसे d द्वारा व्यक्त किया जाता है, उस ब्याज का मापक है, जो अवधि के प्रारंभ में ही दिया जाता है। यह ब्याज की प्रभावी दर के विपरीत है, जो उस ब्याज का मापक है, जो अवधि के अंत में दिया जाता है।
2. वह बट्टे की दर, जब बट्टे को एक वर्ष में एक से अधिक बार बदला जाता है, बट्टे की अंकित दर कही जाती है। बट्टे की प्रभावी दर बट्टे की वार्षिक दर है, जो एक वर्ष में केवल एक बार बदलती है।
3. किसी संपदा का वर्तमान मूल्य ज्ञात करने के लिए, जिसका मूल्य किसी भावी समय पर ज्ञात हो और ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है।

11.9 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

1. ब्याज की अंकित दर और ब्याज की प्रभावी दर में अंतर स्पष्ट कीजिए।

2. संयोजित करना बट्टा देने से किस प्रकार भिन्न है ? एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट कीजिए।

3. किसी बचत खाते पर ब्याज 23% वार्षिक तथा प्रति मास संयोजित बताया जाता है। इस बचत खाते के लिए वार्षिक प्रभावी ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

   [**उत्तर:** 25.86%]

4. वार्षिक प्रभावी ब्याज दर ज्ञात कीजिए, यदि 9% की अंकित ब्याज दर को

   क) मासिक संयोजित किया जाता है।

   ख) त्रैमासिक संयोजित किया जाता है।

   ग) वार्षिक संयोजित किया जाता है।

   [**उत्तर:** (क) 9.381% (ख) 9.308% (ग) 9% (घ) अर्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।]

5. ₹1300 की एक जमा राशि पर 3 वर्षो में ₹339.45 रु ब्याज अर्जित होता है। यदि ब्याज मासिक संयोजित होता है, तो प्रभावी ब्याज की दर क्या है ?

   [**उत्तर:** 8.04%]

6. सलौनी आज कोई धनराशि अपने खाते में जमा कराती है। जो वार्षिक रूप से संयोजित 5% ब्याज अर्जित करती है। यदि खातें में 6 वर्षो के बाद 5000 की राशि जमा होने का लक्ष्य है, तो वह अपने खाते में आज कितनी राशि जमा कराए ?

   [**उत्तर:** ₹3731.08]

7. सागर को आज ₹500 देय तथा अब से चार मास बाद ₹750 का भुगतान करना है। इसके स्थान पर वह 3 मास बाद ₹600 देकर तथा आज से 7 मास बाद अंतिम भुगतान करके इस ऋण का निपटारा करना चाहता है। वार्षिक ब्याज की दर 7% है। अब से सात मासों को एक केन्द्र बिंदु का उपयोग करते हुए, उसके द्वारा दिए जाने वाला अंतिम भुगतान ज्ञात कीजिए।

   [**उत्तर:** ₹669.55]

8. किसी आई टी कंपनी के बाँडों का मूल्य 10 वर्षों बाद 10000 हो जाएगा। किसी निवेशक को 6.5% वार्षिक ब्याज अर्जित करने के लिए, आज कितना भुगतान करना चाहिए ?

   [**उत्तर:** ₹5327.26]

9. 3 वर्षो बाद देय राशि ₹3000 पर वार्षिक 6% बट्टे की दर पर बट्टा ज्ञात कीजिए, जबकि बट्टा अर्धवार्षिक बदलता हैं।

नोट: इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

11.10 संदर्भ पुस्तकें

- Ayres, Frank Jr.,*Theory and Problems of Mathematics of Finance.* Schaum's Outlines Series, McGraw Hill Publishing Co., New York, 1963.
- Mizrahi and Sullivan, John,*Mathematics for Business and Social Sciences.* Wiley and Sons., New York, 1977.
- Williams, W.E., and Reed, J.H. *Fundamentals of Business Mathematics*., Iowa 2014.
- Singh, J.K. *Business Mathematics.* Himalaya Publishing House., New Delhi, 2018.
- Prasad, Bindra, and Mittal, P.K. *Fundamentals of Business Mathematics.* Har Anand Publications., New Delhi, 2007.

परिशिष्ट: e^x और e^{-x} की सारणी

x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000
0.01	1.0101	0.99005
0.02	1.0202	0.98020
0.03	1.0305	0.97045
0.04	1.0408	0.96079
0.05	1.0513	0.95123
0.06	1.0618	0.94176
0.07	1.0725	0.93239
0.08	1.0833	0.92312
0.09	1.0942	0.91393
0.10	1.1052	0.90484
0.11	1.1163	0.89583
0.12	1.1275	0.88692
0.13	1.1388	0.87810
0.14	1.1503	0.86936
0.15	1.1618	0.86071
0.16	1.1735	0.85214
0.17	1.1853	0.84366
0.18	1.1972	0.83527
0.19	1.2092	0.82696
0.20	1.2214	0.81873
0.21	1.2337	0.81058
0.22	1.2461	0.80252
0.23	1.2586	0.79453
0.24	1.2712	0.78663
0.25	1.2840	0.77880
0.26	1.2969	0.77105
0.27	1.3100	0.76338
0.28	1.3231	0.75578
0.29	1.3364	0.74826
0.30	1.3499	0.74082
0.31	1.3634	0.73345
0.32	1.3771	0.72615
0.33	1.3910	0.71892
0.34	1.4049	0.71177
0.35	1.4191	0.70469
0.36	1.4333	0.69768
0.37	1.4477	0.69073
0.38	1.4623	0.68386
0.39	1.4770	0.67706
0.40	1.4918	0.67032

Appendix: e^x and e^{-x} value table

x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000
0.01	1.0101	0.99005
0.02	1.0202	0.98020
0.03	1.0305	0.97045
0.04	1.0408	0.96079
0.05	1.0513	0.95123
0.06	1.0618	0.94176
0.07	1.0725	0.93239
0.08	1.0833	0.92312
0.09	1.0942	0.91393
0.10	1.1052	0.90484
0.11	1.1163	0.89583
0.12	1.1275	0.88692
0.13	1.1388	0.87810
0.14	1.1503	0.86936
0.15	1.1618	0.86071
0.16	1.1735	0.85214
0.17	1.1853	0.84366
0.18	1.1972	0.83527
0.19	1.2092	0.82696
0.20	1.2214	0.81873
0.21	1.2337	0.81058
0.22	1.2461	0.80252
0.23	1.2586	0.79453
0.24	1.2712	0.78663
0.25	1.2840	0.77880
0.26	1.2969	0.77105
0.27	1.3100	0.76338
0.28	1.3231	0.75578
0.29	1.3364	0.74826
0.30	1.3499	0.74082
0.31	1.3634	0.73345
0.32	1.3771	0.72615
0.33	1.3910	0.71892
0.34	1.4049	0.71177

0.35	1.4191	0.70469
0.36	1.4333	0.69768
0.37	1.4477	0.69073
0.38	1.4623	0.68386
0.39	1.4770	0.67706
0.40	1.4918	0.67032