इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
प्रबंध अध्ययन विद्यापीठ

BCOC - 134
व्यावसायिक गणित और सांख्यिकी

भाग ब व्यावसायिक सांख्यिकी

एकचर विश्लेषण

द्विचर विश्लेषण

काल पर आधारित आंकड़ों का विश्लेषण

कार्यक्रम निर्माण समिति – बी.कॉम (सी.बी.सी एस.)

प्रो. मधु त्यागी
पूर्व निदेशक, प्रबंध विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. आर. पी. हुडा
पूर्व कुलपति, एम. डी.
विश्वविद्यालय, रोहतक

प्रो. बी आर अनन्थन
पूर्व कुलपूति, रानी चेन्नम्मां
विश्वविद्यालय, बेलगाँव, कर्नाटक

प्रो. आई वी. त्रिवेदी
पूर्व कुलपति
एम. एल. सुखाडिया
विश्वविद्यालय, उदयपुर राजस्थान

प्रो. पुरुषोतम राव (सेवानिवृत्त)
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
उस्मानिया, विश्वविद्यालय,हैदराबाद

प्रो. डी. पी. एस वर्मा (सेवानिवृत्त)
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. के. वी. भानुमर्ति (सेवानिवृत्त)
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. देवब्रत्ता मित्रा
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
उत्तर बंगाल, विश्वविद्यालाय,डार्जिलिंग

प्रो. खुर्शीद अहमद भट
डीन, वाणिज्य एवं प्रबंधन संकाय,
कश्मीर विश्वविद्यालय, श्रीनगर

प्रो. कविता शर्मा
डिपार्टमेंट ऑफ कामर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. आर. के. ग्रोवर (सेवानिवृत्त)
प्रबंध विद्यापीठ, इग्नू

संकाय सदस्य
एस. ओ. एम. एस. इग्नू

प्रो. एन. वी. नरसिम्हम
प्रो. नवल किशोर
प्रो. एम. एस. सेनम राजू
प्रो. सुनील कुमार
डॉ. सुबोध केशरवानी
डॉ. रश्मी बंसल
डॉ. मधुलिका पी. सरकार
डॉ. अनुप्रिया पाण्डेय

पाठ्यक्रम डिजाइन एवं पाठ्यक्रम निर्माण दल

प्रो. मधु त्यागी
पूर्व निदेशक, प्रबंध विद्यापीठ,
इग्नू, नई दिल्ली

डॉ. एच. के. डांगी
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
(इकाई 10 से 11 व्यवसाय गणित)

डॉ. विद्यया रतन
श्री राम कॉलेज ऑफ कॉमर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. ब्रह्म भट्ट
स्कूल ऑफ कॉमर्स
गुजरात विश्वविद्यालय, अहमदाबाद

प्रो. एम. एस. सेनम राजू
एसओएमएस, इग्नू, नई दिल्ली
(इकाई 15 से 18)

प्रो. जी. पी. सिंह (सेवानिवृत्त)
सोहराष्ट्र विश्वविद्यालय, गुजरात
(इकाई 1 से 4 व्यवसाय गणित)

डॉ. सरबजीत कौर,
दायल सिंह कॉलेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
(इकाई 5 से 9 व्यवसाय गणित)

डॉ. ओ.पी. गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सी.आर. कोठारी
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

प्रो. (श्रीमती) सरला अचुथान
गुजरात विश्वविद्यालय, अहमदाबाद

संकाय सदस्य
एस. ओ. एम. एस. इग्नू
प्रो. एन. वी. नरसिम्हम
प्रो. नवल किशोर
प्रो. एम. एस. सेनम राजू
प्रो. सुनील कुमार
डॉ. सुबोध केशरवानी
डॉ. रशमी बंसल
डॉ. मधुलिका पी. सरकार
डॉ. अनुप्रिया पाण्डेय

संपादक एवं पाठ्यक्रम समन्वयक
प्रो. एम. एस. सेनम राजू, इग्नू
डॉ. अनुप्रिया पाण्डेय, इग्नू

विषय संशोधन (भाग अ)
प्रो. गोपीनाथ प्रधान (सेवानिवृत्त)
एसओएसएस, इग्नू , नई दिल्ली

अनुवाद

अनुवाद (भाग अ)
डॉ. महेन्द्र शंकर, (सेवानिवृत्त)
एन सी आर टी, दिल्ली
भाग ब
ईसीओ-07 एवं ईसीओ-03
से लिया गया है।

अनुवाद (भाग ब)
प्रो. आई.वी. त्रिवेदी, एम.एल सुखाड़िया
विश्वविद्यालय, उदयपुर, राजस्थान
डॉ. सुमन मिश्रा
एम.जी. कॉलेज, उदयपुर, राजस्थान
श्री आर.टी. पाण्डेय
पुष्पांजली, नई दिल्ली

डॉ. अनुप्रिया पाण्डेय
एस.ओ.एम.एस., इग्नू, नई दिल्ली
श्री के.के. खन्ना
ज़किर हुसैन कॉलेज, नई दिल्ली

सामग्री निर्माण

श्री वाई. एन. शर्मा
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी., इग्नू, नई दिल्ली

श्री सुधीर कुमार
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी., इग्नू, नई दिल्ली

जनवरी, 2020

ISBN : 978-93-89969-00-9

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के बारे में विश्वविद्यालय कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली से अधिक जानकारी प्राप्त की जा सकती है।
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से कुलसचिव, सामग्री निर्माण एवं वितरण विभाग द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित
लेज़र कम्पोज़र : टेसा मीडिया एण्ड कम्प्यूटर्स, सी–206, शाहीन बाग, जामिया नगर, नई दिल्ली
मुद्रक : पी. स्क्वायर सॉल्यूशन्स, एच-25, साईट-बी, इण्डस्ट्रीयल एरिया, मथुरा

पाठ्यक्रम (कोर्स) प्रस्तावना

च्वाइस बेस्ड क्रेडिट सिस्टम स्कीम के अर्न्तगत यह कोर्स बी कॉम कार्यक्रम का एक अनिवार्य कोर्स है। इस कोर्स का मुख्य उद्देश्य विधार्थियों को गणितीय एवं सांख्यिकी तकनीकों से अवगत कराना है, जिससे उन्हें व्यवसाय में किये जाने वाले निर्णयन में सुविधा हो। इस कोर्स (पाठ्यक्रम) में दो प्रमुख भाग हैं। **भाग – अ व्यावसायिक गणित है।** इस भाग में कुल 11 इकाइयाँ हैं। **भाग ब व्यावसायिक सांख्यिकी है।** इस भाग में कुल 7 (इकाई 12 – 18) इकाइयाँ हैं।

भाग ब व्यावसायिक सांख्यिकी

इस भाग में कुल सात इकाइयाँ हैं। इन इकाइयों की संक्षिप्त व्याख्या निम्नलिखित है।

एकचर विश्लेषण

इकाई 12 : सांख्यिकी की प्रस्तावना में सांख्यिकीय विधियों के अर्थ परिभाषा, कार्य, महत्व, कार्यक्षेत्र एवं परिसीमाओं की व्याख्या की गयी है।

इकाई 13: केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप में केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ एवं इसे ज्ञात करने की विभिन्न विधियाँ जैसे समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य, माध्यिका, विभाजन मान और भूयिष्ठिक। इस इकाई में इन विधियों की संगणना कैसे की जाये, इसकी व्याख्या की गयी है। इसके अतिरिक्त इन विधियों की गुण, उपयोगिता एवं परिसीमाओं की भी व्याख्या की गयी है।

इकाई 14: अपकिरण की माप में अपकिरण की माप की आवश्यकता की चर्चा की गयी है। इसमें अपकिरण का अर्थ, उसकी संगणना एवं उपयोगों की भी चर्चा की गयी है। इसके अतिरिक्त इसमें अपकिरण के मापों जैसे विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन, मानक विचलन एवं विचरण गुणांक की चर्चा भी की गई है।

द्विचर विश्लेषण

इकाई 15 : सरल रेखीय सहसंबंध में सहसंबंध की अवधारणा, उसकी संगणना और उसके गुण तथा परिसीमाओं की व्याख्या की गयी है।

इकाई 16: सरल रैखीय प्रतीपगमन में प्रतीपगमन की आवश्यकता इसकी संगणना एवं उपयोग की व्याख्या की गयी है।

काल पर आधारित आंकड़ों का विश्लेषण

इकाई 17: सूचकांक में इसके अर्थ अवधारणा उपयोग की चर्चा की गयी है। इसके अतिरिक्त इस इकाई में सूचकांकों के निर्माण की विधियों व उनके इससे संबंधित समस्याओं की भी व्याख्या की गयी है।

इकाई 18: काल श्रेणी विश्लेषण में इसके अवधारणा, प्रमुख घटक की व्याख्या के साथ–साथ, पिछले आकड़ों के आधार पर पूर्वानुमान कर ट्रेण्ड की व्याख्या भी की गयी है।

इकाई 12 सांख्यिकी का अर्थ तथा क्षेत्र

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़कर आप इस योग्य हो सकेंगे कि:

- सांख्यिकी शब्द की परिभाषा बता सकें;
- विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में अंतर कर सकें;
- सांख्यिकी के विभिन्न कार्यों का वर्णन कर सकें;
- विभिन्न क्षेत्रों में सांख्यिकीय विधियों का महत्व स्पष्ट कर सकें;
- सांख्यिकी विधियों की परिसीमाओं को समझ सकें;
- सांख्यिकी में अविश्वास के कारणों को स्पष्ट कर सकें;
- व्यवसाय में सांख्यिकी के उपयोग और महत्व को स्पष्ट कर सकें।

12.1 प्रस्तावना

अब तक हमने खंड 1, 2 और 3 में व्यवसायिक गणित पर चर्चा की है, जो एक वाणिज्यिक संगठन में लेखाकंन बिक्रि पूर्वानुमान, वित्तीय विश्लेषण, विपणन इत्यादि में बहुत उपयोगी है, संगठन के उचित कामकाज के लिए प्रत्येक प्रबंधकीय स्तर पर

निर्णय लिए जाते है, जो आगे लाभ प्रदता की ओर ले जाते है। प्रभावी निर्णय लेने के लिए, आकड़े एक ध्वनि आधार प्रदान करते है।

सांख्यिकी (Statistics) कोई नई विधा नहीं है, वरन् यह इतनी ही प्राचीन है जितनी मानवीय क्रियाएँ। परंतु इस की उपयोगिता का क्षेत्र लगातार बढ़ता जा रहा है। प्राचीन समय में इसे "शासन–कला का विज्ञान" समझा जाता था तथा राज्य की प्रशासनिक क्रिया का उपोत्पाद समझा जाने के कारण इस का क्षेत्र सीमित था। उस समय में सरकार, प्रशासनिक उद्देश्य से, जनसंख्या, जन्म–मृत्यु आदि के अभिलेख रखती थी। वास्तव में आंग्ल भाषा के शब्द "स्टेटिस्टिक्स" (Statistics) की उत्पति लैटिन भाषा के शब्द 'स्टेटस' (status) या इटालवी शब्द "स्टेटिस्टा" (statista) अथवा जर्मन शब्द "स्टेटिस्टिक" (Statistik) से हुई है, जिन सभी का अर्थ "राजनीतिक राज्य" (Political State) है। आज सांख्यिकी विधियों का कृषि, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, व्यवसाय–प्रबन्ध आदि भिन्न–भिन्न क्षेत्रों में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है। इस इकाई में आप सांख्यिकी की परिभाषा, विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में अंतर, सांख्यिकी के कार्यों, सांख्यिकी के महत्व तथा परिसीमाओं तथा सांख्यिकी पर अविश्वास का अध्ययन करेंगे।

12.2 सांख्यिकी का अर्थ

हम हर समय सांख्यिकी की बात करते है, उदाहरण के तौर पर;

- पिछले साल से मुद्रास्फीति की दर 20% बढ़ गई है।
- पिछले वर्ष की तुलना में अपराध दर में 5% कमी आई है।

उपरोक्त सभी कथन सांख्यिकीय निष्कर्ष हैं। ये सांख्यिकीय कथन पाठकों को समझानें के लिए बहुत सुविधाजनक प्रकार के संचार (communication) हैं और उस क्षेत्र से संबंधित विशिष्ट नीतियों को बनाने में भी मदद करते है।

"सांख्यिकी" शब्द का प्रयोग विभिन्न प्रकार से किया जाता है । यदा–कदा तथ्यों के संख्या संबंधी विवरणों या आँकड़ों (data) का उल्लेख करने के लिए बहुवचन के रूप में इसका प्रयोग किया जाता है। दूसरी ओर इस शब्द का प्रयोग एकवचन में गणित, अर्थशास्त्र आदि जैसे विषय के अध्ययन के रूप में भी प्रयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ, जब हम यह कहते हैं कि हमारे देश से संबंधित कुछ "सांख्यिकी" इस प्रकार हैं – भारत में प्रति 1,000 पुरुषों के लिए स्त्रियों की जनसंख्या 940 (census 2011)है, अथवा सामयिक मूल्यों पर आधारित प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय उत्पाद 1950–51 में 246 रु० से बढ़कर 1985–86 में 2,596 रु० हो गया है–तब हम सांख्यिकी शब्द का उपयोग बहुवचन अर्थ में (अर्थात् समंकों या आँकड़ों के अर्थ में) करते हैं। उक्त संख्याओं में व्यक्त विवरण को तैयार करने के लिए हमारे लिए उन विधियों तथा तकनीकों की जानकारी होना आवश्यक है जो ऑकड़ों के संकलन, संघटन, प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण तथा अर्थनिर्णय में प्रयोग की जाती हैं। इन विधियों तथा तकनीकों का अध्ययन सांख्यिकी विज्ञान कहलाता है। इस संदर्भ में सांख्यिकी शब्द का प्रयोग एकवचन में है। इस अभिप्राय में सांख्यिकी का अर्थ है सांख्यिकीय विधियाँ या सांख्यिकी–विज्ञान। आइए, इन दोनों अर्थों का विस्तार से अध्ययन किया जाए।

12.2.1 बहुवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी की परिभाषा

बहुवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी का आशय उन आकड़ों से है जो दिए गए परिस्थिति अथवा घटना से संबंधित हो। यह गुणात्मक अथवा परिमाणात्मक हो सकते हैं।

गुणात्मक आँकड़े: अंखडित चर से संबंधित संख्यात्मक अवलोकनों को दर्शाते है। अंखडित चर वह होते है जो रेखां खंड के किसी दो बिन्दुओं के बीच के मूल्य को ग्रहण कर लेते है। सभी विशेषताएँ जैसे कि वजन लम्बाई, उचाँई घनत्व, वेग तापमान और जैसे सभी अंखडित चर है। दूसरी ओर, खंडित ऑकड़े उन मूल्यों को दर्शाते है जो खंडित चर द्वारा ग्रहण किए जाते है। खंडित चर निर्धारित मूल्यों आमतौर पर पूर्णाकों (integers) जैसे 1, 2, 3 द्वारा दर्शाए जाते है। यह गिनती के आँकड़े होते है जो कि किसी विशेषता को धारण या न धारण करने वाले मदों की गिनती करके एकत्रित किए जाते है। उदाहरण के लिए, किसी हवाई अड्डे पर आने वाली उड़ानों की संख्या, या बिक्री के लिए प्राप्त किए गए माल में खराब वस्तुओं की संख्या।

परिमाणात्मक आँकड़े: नाममात्र या रैंक किए हो सकते हैं। नाममात्र आँकड़े कुछ मदों की संख्या को किसी गुण विशेषता के आधार पर दो या दो से अधिक श्रेणी में वर्गीकृत करने से उत्पन्न होते हैं। उदाहरण के लिए छात्रों को लिंग के आधार पर वर्गीकरण (पुरुष, तथा स्त्री) या शिक्षा के स्तर पर वर्गीकरण (मैट्रीक्यूलेट, अंडरग्रेजुएट तथा पोस्टग्रेजुएट)। यह ऑकड़े भी गिनती के ऑकड़े होते है। दूसरी ओर, रैंक किए हुए ऑकड़े, किसी प्रतियोगी परीक्षा, प्रतियोगिता या इंटरव्यू में प्रदर्शन के स्तर पर रैंक प्रदान करने का परिणाम हैं। उदाहरण के लिए इंटरव्यू में आने वाले प्रत्याशियों को उनके प्रदर्शन के आधार पर पूर्णाकों में (1 से n तक) रैंक प्रदान किया जा सकता है। दिए गए रैंको को किसी चर के अंखडित मूल्यों की तरह देखा जा सकता है। जो कि अवलोकन के अर्न्तगत कोई भी गुण विशेषता हो सकती ह।

अलग–अलग लेखकों ने सांख्यिकी को अलग–अलग प्रकार से परिभाषित किया है। वेबस्टर (webster) के अनुसार "समंक किसी राज्य में रहने वाले व्यक्तियों की स्थिति से संबंधित वर्गीकृत तथ्य हैं – विशेष रूप से वे तथ्य जिनको अंकों के रूप में अथवा किसी भी सारिणी या वर्गित पद्धति द्वारा प्रस्तुत किया गया हो।'' बाउले (Bowlay) के अनुसार, ''किसी अनुसंधान से संबंधित अंकों में व्यक्त किये गये उन तत्वों. के. विवरण को समंक या आँकड़े कहते हैं जिन्हें एक–दूसरे की तुलना में रखा जा सकता है।'' यूल तथा केण्डाल' (Yule and Kendall) के अनुसार, "समंकों से तात्पर्य उन संख्यात्मक तथ्यों से है जो पर्याप्त सीमा तक अनेक प्रकार के कारणों से प्रभावित होते हैं।'' उक्त परिभाषाएँ बहुत संकीर्ण हैं क्योंकि ये सांख्यिकी के क्षेत्र को उन्हीं तथ्यों तथा संख्याओं तक सीमित करती हैं जो राज्य में रहने वाले व्यक्तियों की दशाओं से संबंधित हों और या फिर समंकों की कुछ विशिष्ट विशेषताएँ हों।

सांख्यिको की अधिक व्यापक परिभाषा होरेस सेक्रिस्ट (Horace Sacrist) ने दी थी। उनके अनुसार सांख्यिकी से तात्पर्य "तथ्यों के उस समूह से है जो अनेक कारणों से पर्याप्त मात्रा में प्रभावित होते हैं, जिन्हें अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिनकी गणना या अनुमान परिशुद्धता के एक उचित स्तर के अनुसार की जाती है, जिन्हें पूर्वनिश्चित उद्देश्य के लिए एक व्यवस्थित ढंग से संग्रह किया जाता है, तथा जिन्हें एक–दूसरे के तुलनात्मक रूप में रखा जाता है।'' यह परिभाषा व्यापक है तथा उन समस्त विशेषताओं का उल्लेख करती है जो संख्यात्मक तथ्यों (समंक) में होनी चाहिए ताकि

वे सांख्यिकी कहला सकें । आइए, अब हम इन विशेषताओं की एक–एक करके विवेचना करें।

क) **समंक तथ्यों के समूह होने चाहिएः** अकेली तथा असंबंधित संख्याएँ आँकड़े नहीं होतीं। उन्हें किसी विशेष अनुसंधान क्षेत्र से संबंधित तथ्यों के समूह का भाग होना आवश्यक है। उदाहरणार्थ, राम की मासिक आय 2,000 रु० है। यह एक सांख्यिकीय विवरण या समंक नहीं है । तथापि, यह कथन कि राम, मोहन तथा सोहन की मासिक आय क्रमशः 2,000 रु०, 2,500 रु० तथा 3,000 रु० है, सांख्यिकीय समंक हैं।

ख) **समंक अनेक कारणों द्वारा प्रभावित होते हैंः** किसी समस्या/तथ्यों पर अनेक कारणों का प्रभाव पड़ताहै। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु पर किया जाने वाला घरेलू व्यय अनेक कारणों जैसे, आय, रूचि, शिक्षा आदि द्वारा प्रभावित होता है। इसी प्रकार, गेहूँ की उत्पादन मात्रा मिट्टी, बीज, वर्षा, तापमान आदि अनेक कारणों पर निर्भर करती है। इन तथ्यों से संबंधित आँकड़े। समंक कहलाते हैं । परंतु यदि हम एक से दस तक अंक तथा उनके वर्ग एक कागज पर लिख दें तो, एक से अधिक संख्याएँ होने पर भी उन्हें समंक नहीं कहा जा सकता। ये संख्याएँ अनेक कारणों द्वारा प्रभावित नहीं होती।

ग) **समंकों को संख्या में व्यक्त किया जाना चाहिएः** केवल संख्याओं में व्यक्त तथ्य–विवरण ही समंक कहलाते हैं । लक्षणों का गुणात्मक वर्णन जैसे, सुन्दरता, आँखों का रंग आदि प्रत्यक्ष रूप से मापे नहींजा सकते। इसलिए सामान्यतया, वे समंक नहीं कहलाते । इन लक्षणों को संख्यात्मक रूप देकर ही समंक बनाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक विद्यालय में हम काले, नीले या भूरे रंग की आँख वालीलड़कियों की संख्या गिन सकते हैं।

घ) **समंक यथोचित परिशुद्धता के मानदण्ड के अनुसार प्रमाणित अथवा अनुमानित किये जाते हैंः** समंकों का प्रगणन या तो आगणन द्वारा किया जाता है या अनुमान द्वारा । परंतु यथोचित शुद्धता का मानदण्ड बनाए रखना अनिवार्य है। शुद्धता का स्तर अनुसंधान की प्रकृति तथा उस के उद्देश्य पर निर्भर करता है । कल्पना करें कि आप एक विद्यालय के प्रधानाचार्य के नाते बी.काम. में प्रवेश पाने वाले छात्रों के परिणाम निष्पादन के औसत स्तर को जानना चाहते हैं। इसके लिए आप को उन विद्यार्थियों के उच्चमाध्यमिक स्तर पर प्राप्त किए गये अंक अवश्य संकलित करने चाहिए। यह दो प्रकार से किया जा सकता है। पहले, आप विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों की सूची तैयार कर उस की औसत ज्ञात कर सकते हैं। अन्यथा, यदि किसी कारण पूर्ण संगणना संभव नहीं है तो आप प्रतिदर्श (Sample) का चुनाव कर सकते हैं। प्रतिदर्श के आधार पर आप बाद में सभी विद्यार्थियों के परिणाम निष्पादनऔसत स्तर का अनुमान लगा सकते हैं। इस प्रकार, समंक संगणना द्वारा अथवा अनुमान द्वारा प्राप्त किए जा सकते हैं। आइए, एक अन्य उदाहरण द्वारा यथोचित/परिशुद्धता के मानदण्ड के अभिप्राय को समझें। यदि आप भारत के कुल खाद्यान्न उत्पादन का अनुमान, लाख टनों में, लगा रहे हैं, तो आप की उचित इकाई (या परिशुद्धता का स्तर) लाख टनों में होगी। परंतु, यदि आप स्वर्ण का कुल उत्पादन बतला रहे हैं तो आपकी उचित इकाई किलोग्राम हो सकती है। इस प्रकार परिशुद्धता का स्तर अनुसंधान की प्रकृति तथा उसके उद्देश्य पर निर्भर करता है।

ड.) **समंकों का संग्रह पूर्व–निर्धारित उद्देश्य के लिए व्यवस्थित ढंग से किया जाना चाहिएः** समंकों का . संग्रह व्यवस्थित ढंग से होना चाहिए । अव्यवस्थित ढंग से संग्रहीत समंकों से उद्देश्य सिद्ध नहीं होगा। समंकों के संग्रहण का उद्देश्य पूर्वनिर्धारित तथा स्पष्ट व निश्चित होना चाहिए। अनुसंधान का उद्देश्य स्पष्ट न होने पर या तो हम बहुत से अनावश्यक समंक कर लेंगे अथवा आवश्यक आँकडें छोड़ देंगे।

च) **समंकों को एक–दूसरे से संबंधित रूप में रखा जाना चाहिएः** समंक कहे जाने के लिए संख्याओं में व्यक्त तथ्य तुलना के योग्य होने चाहिए। उदाहरणार्थ, किसी विशेष वर्ष में किसी वस्तु के उत्पादन तथा निर्यात संबंधी आँकड़े परस्पर संबंधित हैं । साथ–साथ लिखे जाने पर ही वे समंक हैं। परंतु यदि आपके पास तीन संख्याएँ हैं, जैसे – (1)1986 में भारत में चावल का उत्पादन, (2) 1987 में संयुक्त राज्य अमेरिका में जन्मे बच्चों की संख्या तथा (3)1988 में इंग्लैण्ड में पंजीकृत गाड़ियों की संख्या । तब उक्त संख्याएँ तथ्य भले ही हों, परंतु इकट्ठा रखने पर भी वे समंक नहीं कही जा सकती क्योंकि इन संख्याओं का परस्पर कोई संबंध नहीं है।

अतः यह स्पष्ट है कि सभी समंक तथ्यों के संख्यात्मक विवरण हैं परंतु तथ्यों के सभी संख्यात्मक विवरण समंक नहीं होते। उपरोक्त विशेषताओं के उपस्थित होने पर ही उन्हें समंक कहा जा सकता है।

12.2.2 एकवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी की परिभाषा

विवेकपूर्ण निर्णय के लिए संख्यात्मक सूचनाओं को संकलित, संगठित, प्रस्तुत, विश्लेषित तथा निर्वचित किया जाना चाहिए। ऐसा करने के लिए हमें ऐसी विधियों की आवश्यकता होती है जो इस कार्य में हमारी सहायता कर सकें। अतः एकवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी शब्द से तात्पर्यः विधियों के उस समूह से है जिसे समंकों के संग्रहण, विश्लेषण तथा निर्वधन या अर्थनिर्णय के लिए प्रयोग किया जाता है। इस संदर्भ में भी अलग–अलग लेखकों ने सांख्यिकी की परिभाषा अलग–अलग की है। आइए, अब हम इन में से कुछ परिभाषाओं का वर्णन करें।

उदाहरणार्थ, बाउले ने कई परिभाषाएँ दी हैं । परन्तु उन में से कोई परिभाषा भी व्यापक नहीं कही जा सकती। वास्तव में इन परिभाषाओं से हमें सांख्यिकी विज्ञान की प्रगति का आभास होता है। बाउले की कुछ परिभाषाएँ इस प्रकार हैः

i) सांख्यिकी को गणना का विज्ञान कहा जा सकता है।

ii) सांख्यिकी को अनुपातों का विज्ञान कहा जा सकता है।

iii) सांख्यिकी वह विज्ञान है जो सामाजिक व्यवस्था को सम्पूर्ण मानकर, उसके सभी रूपों का मापन करता है।

क्रॉक्सटन तथा कॉउडन (Croxton and Cowden) ने सांख्यिकी की सरल तथा संक्षिप्त परिभाषा दी है। उनके अनुसार, "सांख्यिकी को संख्यात्मक समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।"

सेलिगमेन (Seligman) द्वारा दी गई.परिभाषा भी इतनी ही सरल परंतु व्यापक है। उनके अनुसार, "सांख्यिकी वह विज्ञान है जिसका संबंध समंकों के संकलन, वर्गीकरण,

प्रस्तुतीकरण, तुलना तथा निर्वचन की रीतियों से है जिनको किसी अनुसंधान–क्षेत्र पर कुछ प्रकाश डालने के लिए एकत्रित किया गया हो''।

उपरोक्त पिछली दोनों परिभाषाएँ काफी सारगर्मित तथा व्यापक हैं तथा सांख्यिकी विधियों के क्षेत्र को स्पष्ट करती है। सांख्यिकी विज्ञान हमें (1) समंकों के संकलन, (2) समंकों के वर्गीकरण तथा सारणीयन, (3) समंकों के प्रस्तुतीकरण, (4) समंकों के विश्लेषण तथा (5) समंकों के निर्वचन की विधियों तथा तकनीकों की शिक्षा देता है।

उपरोक्त विवेचन से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सांख्यिकी शब्द या तो बहुवचन अर्थ में प्रयोग होता है, जहाँ उसका तात्पर्य समंकों या आँकड़ों से है, अथवा एकवचन अर्थ में प्रयोग किया जाता है जहाँ इसका अर्थ अनिश्चितता की स्थिति में बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय लेने के लिए प्रयुक्त विधियों के रूप में किया जाता है।

12.3 विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी (Descriptive and Inferential Statistics)

एक विषय के रूप में सांख्यिकी बहुत व्यापक है। इसमें विभिन्न प्रकार की समस्या की स्थिति में बड़े पैमाने पर आँकड़ो को सभांलने के तरीके शामिल है। आपको विदित है, एकवचन में प्रयोग होने पर, सांख्यिकी शब्द से तात्पर्य उन विधियों तथा सिद्धांतों से है जो किसी अनुसंधान–क्षेत्र से संबंधित समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन में प्रयोग किए जाते हैं। ये विधियाँ तथा तकनीकें इतनी विविध हैं कि सांख्यिकीविद् प्रायः इन्हें दो वर्गों में बांटते हैं: (1) विवरणात्मक सांख्यिकी तथा (2) निष्कर्षात्मक सांख्यिकी।

विवरणात्मक सांख्यिकी (Descriptive Statistics): से तात्पर्य उन विभिन्न मापों से है जो समंकों की विशेषताओं के विवरण प्रस्तुत करने के लिए प्रयोग किए जाते हैं। इन मापों में केन्द्रीय प्रकृति के माप, विचलन के माप आदि शामिल हैं। रेखाचित्रों, सारणियों तथा चित्रों द्वारा समंकों का निरूपण भी विवरणात्मक सांख्यिकी में सम्मिलित है। उदाहरणार्थ, यदि बी.काम. के विद्यार्थियों की संख्या 100 है और आप इन विद्यार्थियों के औसत अंक ज्ञात करते हैं, तो आप यहाँ विवरणात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे . हैं। इसी प्रकार, जब आप उसी कक्षा से प्रतिदर्श (Sample) द्वारा चुने 25 विद्यार्थियों के औसत अंक ज्ञात कर रहे हैं परंतु आप सम्पूर्ण कक्षा के लिए कोई सामान्यीकरण करने का प्रयास नहीं कर रहे, तो भी . आप विवरणात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे हैं।

निष्कर्षात्मक सांख्यिकी (Inferential Statistics): से तात्पर्य निदर्श समंकों के लक्षणों के आधार पर समग्र समंकों (population data) के संबंध में प्रामाणिक निष्कर्ष निकालने की सांख्यिकीय प्रक्रिया से है। सांख्यिकी में समग्र (population) शब्द से तात्पर्य जनगणना से न हो कर किसी अध्ययन क्षेत्र से संबंधित सभी इकाइयों से है। उपरोक्त उदाहरण में यदि प्राध्यापक प्रतिदर्श औसत अंकों के आधार पर – कक्षा के सभी विद्यार्थियों के औसत अंकों का अनुमान लगाने का निर्णय ले तो हम कहेंगे कि वह निष्कर्षात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे हैं। यह बात ध्यान देने योग्य है कि हम अधिकतर निदर्श समंकों के आधार पर ही समग्र समंकों के लक्षणों को समझने का प्रयास करते हैं। निदर्श निष्कर्षों के आधार पर समग्र के संबंध में ज्ञात निष्कर्षों में कुछ

विभ्रम अथवा असंगति होना स्वाभाविक है । सम्भाव्यता सिद्धांत (probability theory) के आधार पर ऐसे विभ्रम का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है। .

बोध प्रश्न क

1. क्या निम्नलिखित वक्तव्य सांख्यिकी समंक हैं?

   i) एक फैक्ट्री के 100 श्रमिकों की साप्ताहिक मजदूरी।

   ii) राम का कद 6 फुट है।

   iii) मोहन का वजन 70 किलोग्राम है, सोहन का कद 6.2 फुट है तथा राम की मासिक आय 1,500 है।

   iv) गत 10 वर्षों में कंपनी की बिक्री ।

2 निम्नलिखित वक्तव्यों पर एक पंक्ति में टिप्पणी लिखिए।

   i) वेसटर तथा सेक्रिस्ट ने विवरणात्मक सांख्यिकी की परिभाषा दी है।

   ii) यूल एवं केण्डाल द्वारा दी गई परिभाषा सेक्रिस्ट द्वारा दी गई परिभाषा में निहित हैं।

   iii) सांख्यिकी के अंतर्गत गुणात्मक समंकों का अध्ययन नहीं किया जाता।

   iv) सांख्यिकीय विधियाँ केवल समंकों के संकलन तथा विश्लेषण से संबंधित हैं।

12.4 सांख्यिकी के कार्य

आप ने सांख्यिकी के अर्थ तथा परिभाषा का अध्ययन किया है। आप ने विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी के अंतर को भी समझा है। आइए, अब हम सांख्यिकी के कुछ महत्वपूर्ण कार्यों की परिचर्चा करें।

1. **तथ्यों को सही रूप में प्रस्तुत करना:** सांख्यिकीय विधियाँ सामान्य कथनों को संक्षिप्त तथा निश्चित रूप में प्रस्तुत करती हैं। उदाहरणार्थ, आप कह सकते हैं कि भारत में कपास की औसत पैदावार 180 किलोग्राम प्रति हेक्टेयर है। यह कथन अधिक संक्षिप्त तथा प्रत्यायक है बजाय यह कहने के कि भारत में कपास की औसत उपज बहुत कम है।

2. **वृहत तथा जटिल समंकों को सरल बनाना:** सांख्यिकीय विधियाँ वृहत तथा जटिल समंकों को बोधगम्य बनाने के लिए उन्हें सरल बनाती हैं। अपरिष्कृत समंक प्रायः दुरूह तथा अबोधगम्य होते हैं। जब तक उन्हें किसी सामान्य लक्षणों के आधार पर वर्गीकृत न किया जाय तब तक उनके लक्षणों को समझना मुश्किल है। उदाहरणार्थ, आपको एक कारखाने में काम करने वाले 1000 श्रमिकों की साप्ताहिक मजदूरी दी गई है। आप के लिए उन समंकों से कोई निष्कर्ष निकालना तब तक असम्भव होगा जब तक उन्हें वर्गीकृत कर संक्षिप्त रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत न किया जाए: .

साप्ताहिक मजदूरी (रु)	श्रमिकों की संख्या
600 से कम	100
600—700	200
700—800	400
800—900	200
900 से अधिक	100
योग =	**1000**

3. **तुलना करने हेतु तकनीक प्रदान करना:** सांख्यिकी का प्राथमिक उद्देश्य समय अथवा अन्तराल में नवमित्त समस्याओं के तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना है। उदाहरणार्थ, राष्ट्रीय आय का आगणन निरूद्देश्य नहीं किया जाता, परंतु यह जानने के लिए किया जाता है कि एक समय—अंतराल में जनता का जीवन—स्तर सुधर रहा है अथवा नहीं । उदाहरणार्थ, 2017 की तुलना में 2018 में भारत में प्रति—व्यक्ति आय 10% बढ़ी है। इस सूचना के आधार पर हम 2019 में एक भारतीय के जीवन—स्तर पर कुछ प्रकाश डाल सकते हैं ।

4. **विभिन्न क्षेत्रों में नीति बनाना:** सांख्यिकीय विधियाँ सामाजिक, आर्थिक तथा व्यावसायिक क्षेत्रों में नीति—निर्धारण में सहायक होती हैं । उदाहरणार्थ, जन्म—मरण के सांख्यिकीय समंकों के आधार पर राज्य सरकार परिवार नियोजन कार्यक्रम चलाने में सफल होती है। इसी प्रकार, उपभोक्ता—मूल्य—सूचकांकों के आधार पर राज्य सरकार अपने कर्मचारियों को महंगाई—भत्ता प्रदान करती है।

5. **विभिन्न तथ्यों के बीच संबंधों का अध्ययन करना:** सांख्यिकीय माप जैसे कि सह—संबंध तथा प्रतीपगमन विभिन्न चलों में परस्पर संबंध ज्ञात करने के लिए प्रयोग किए जाते हैं । निष्कर्ष तथा निर्णय पर पहुँचने के लिए इस प्रकार के परस्पर संबंध महत्वपूर्ण हैं । उदाहरणार्थ, आप किसी वस्तु की माँग तथा उसके मूल्यों में परस्पर संबंध पाते हैं । सामान्यतः यदि किसी वस्तु का मूल्य बढ़ता है, तो उस वस्तु की माँग घटने की सम्भावना रहती है।

6. **भविष्य के मूल्यों का पूर्वानुमान करना:** कुछ सांख्यिकी विधियों का उपयोग चल के भविष्य के मूल्यों का पूर्वानुमान करने के लिए किया जाता है। पिछले दस वर्षों के विक्रय आँकड़ों के आधार पर एक विपणन—प्रबन्धक अपने उत्पाद की अगले वर्ष की सम्भावित माँग का अनुमान लगा सकता है।.

7. **अनिश्चितता को मापना:** सम्भावित नियम की सहायता से आप किसी घटना के घटने की सम्भावना का पता लगा सकते हैं । निर्णय लेने में सम्भावित अवधारणाएँ काफी उपयोगी होती हैं । उदाहरणार्थ, यदि आप बी.काम. परीक्षा में अपने उत्तीर्ण होने की संभावना जानने के इच्छुक हैं तो आप पिछले दस वर्षों के उत्तीर्ण—प्रतिशत का अध्ययन करके इसका अनुमान लगा सकते हैं।

8. **प्राक्कल्पना (hypothesis) की सत्यता की जाँच करना:** प्राक्कल्पना की सत्यता की जाँच करने तथा नये सिद्धांतों के प्रतिपादन में सांख्यिकीय विधियाँ अत्यधिक उपयोगी होती हैं। उदाहरणार्थ, एक कम्पनी मलेरिया नियंत्रण के लिए निर्मित एक नई दवाई की प्रभावकारिता को जानना चाहती है। वह एक सांख्यिकीय तकनीक का उपयोग कर इसे ज्ञात कर सकती है जिसको वर्ग परीक्षा (Chic- Square Test) कहते हैं।

9. **प्रामाणिक निष्कर्ष निकालना:** अवलोकित तथ्यों तथा प्रतिदर्श समंक के आधार पर समग्र की। विशेषताओं के संबंध में अनुमान लगाने के लिए भी सांख्यिकीय विधियाँ उपयोगी होती हैं।

12.5 सांख्यिकी का महत्व

प्राचीन काल में सांख्यिकी केवल शासन – कला के विज्ञान के रूप में ही प्रयोग की जाती थी। प्रशासानेक कार्यों के लिए राज्य द्वारा जनसंख्या, जीवन एवं मृत्यु आदि विविध कार्यों संबंधी आँकड़े एकत्रित किए जाते थे । तथापि, हाल के वर्षों में, सांख्यिकी का क्षेत्र बढ़ गया है तथा सामाजिक तथा आर्थिक समस्याएँ भी इस के कार्यक्षेत्र में शामिल हो गई हैं। सांख्यिकीय तकनीकों में हुए विकास ने भी इसके क्षेत्र को विस्तृत कर दिया है । सांख्यिकी अब राज्य–प्रशासन का अंग मात्र ही न होकर आज लगभग सभी विज्ञानों जैसे–सामाजिक, भौतिक तथा प्राकृतिक को परिवेष्टित करती है । वास्तव में आज सांख्यिकी का प्रयोग : विभिन्न क्षेत्रों, जैसे–कृषि, व्यवसाय एवं उद्योग, समाजशास्त्र, अर्थशास्त्र, जीवांकिकी (biometry) आद्रि में किया जाता है। अतः आजकल सांख्यिकी का उपयोग मानवीय क्रिया के प्रत्येक क्षेत्र में किया जाता है।

सांख्यिकी एवं राज्य

प्राचीन काल में राज्य–प्रशासन का कार्य केवल कानून और व्यवस्था बनाये रखने तक सीमित था। राज्य (सैनिक तथा राजस्व नीति निर्माण के उद्देश्य से) मानवशक्ति, अपराधों, आय तथा धन आदि संबंधी आँकड़े एकत्रित करते थे। परंतु कल्याणकारी राज्य की परिकल्पना के प्रादुर्भाव के साथ राज्य की भूमिका में भी विस्तार हुआ है । अतः समस्त विश्व में आर्थिक तथा अन्य नीतियाँ बनाने के लिए सरकारों द्वारा मूल्यों, उत्पादन, उपभोग, आय एवं व्यय आदि संबंधी सांख्यिकीय आंकड़ों का प्रयोग पर्याप्त मात्रा में किया जाता है। अपनी जनता का जीवन–स्तर ऊँचा करने के लिए, भारत जैसे विकासशील देश नियोजित आर्थिक

विकास की नीति अपना रहे हैं। इस उद्देश्य के लिए राज्य को अपने निर्णयों के लिए सांख्यिकीय आँकड़ों के सही तथा विश्वसनीय विश्लेषण को आधार बनाना चाहिए । उदाहरणार्थ, पंचवर्षीय योजनाओं का निर्माण करते समय विभिन्न नीतियों का निर्धारण करने के लिए सरकार को देश में कच्चे माल, पूँजीगत वस्तुओं तथा वित्तीय साधनों की उपलब्धता तथा आयु, लिंग, आय आदि के गुणों के आधार पर जनसंख्या के वितरण का ज्ञान होना चाहिए।

अर्थशास्त्र में सांख्यिकी

विभिन्न आर्थिक समस्याओं जैसे, उत्पादन, उपभोग, वितरण आदि के समाधान में सांख्यिकीय विश्लेषण अत्यधिक उपयोगी है। उदाहरणार्थ, उपभोग संबंधी समंकों के विश्लेषण से समाज के विभिन्न वर्गों द्वारा विभिन्न वस्तुओं के उपभोग के प्रारूप का ज्ञान हो सकता है। विभिन्न आर्थिक नीतियों के निर्धारण के लिए मूल्य, मजदूरी, उपभोग, बचत तथा विनियोग, आदि संबंधी समंक महत्वपूर्ण है । इसी प्रकार, आय की विषमता कम करने संबंधी नीति बनाने के लिए राष्ट्रीय आय एवं सम्पत्ति पर आँकड़े उपयोगी हैं। अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के उपयोग के परिणाम स्वरूप अनेक आर्थिक सिद्धांत, जैसे ऐंजिल का उपभोग का नियम, आय–वितरण का नियम आदि बने हैं । आर्थिक नियोजन में सूचकांक, समय सारणी विश्लेषण, .

प्रतिगमन विश्लेषण आदि सांख्यिकीय तकनीकें महत्वपूर्ण हैं । उदाहरणार्थ, मजदूरों को महगाई–भत्ता या बोनस देने के लिए उपभोक्ता मूल्य निर्देशांक का उपयोग किया जाता है । समय सारिणी विश्लेषण द्वारा माँग का पूर्वानुमान किया जा सकता है। अनेक आर्थिक परिकल्पनाओं के सत्यापन के लिए सांख्यिकीय । समंकों का अधिकाधिक उपयोग किया जाने लगा है।

व्यवसाय तथा प्रबंध में सांख्यिकी

आकार विस्तार तथा बढ़ती हुई प्रतियोगिता के परिणामस्वरूप आधुनिक व्यावसायिक उद्यम की क्रियाएँ अधिक जटिल तथा अभियाचन करने वाली होती जा रही हैं। विशाल उद्यमों में स्वामित्व तथा प्रबन्ध के पृथक्करण के परिणामस्वरूप पेशेवर प्रबन्ध का उद्भव हुआ है। प्रबंधकीय निर्णय लेने की सफलता बहुत कुछ सही तथा सामयिक सूचनाओं पर निर्भर करती है जो सांख्यिकीय समंकों से प्राप्त होती है । अतः व्यवसाय तथा उद्योग की विभिन्न क्रियाओं जैसे, विक्रय, क्रय, उत्पादन, विपणन, वित्त आदि में सांख्यिकीय ममंकों का उपयोग दिन–प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है। सांख्यिकीय विधियाँ अब विपणि खोज, उत्पाद अनुसंधान, विनियोजन नीतियों, निर्मित वस्तुओं की गुणवत्ता, अर्थिक पूर्वानुमान, अंकेक्षण तथा अनेक दूसरे क्षेत्रों में अधिकाधिक अपनायी जा रही है। प्रबन्धकों के समक्ष सभी समस्याओं में एक बात समान रहती है कि उन्हें अनिश्चितताओं की दशा में निर्णय लेने पड़ते हैं । इस प्रकार की परिस्थितियों से निपटने के लिए सांख्यिकीय विधियाँ तकनीकें प्रदान करती हैं। अतः वालिस तथा रॉबर्टस् का कथन, कि अनिश्चितता की दशा में विवेकपूर्ण निर्णय लेने के लिए उपयोग किये जाने वाले विधि–समूह को सांख्यिकी कहते हैं'', आश्चर्यजनक नहीं है। .

बोध प्रश्न ख

1. सांख्यिकी के कार्य बताइए।
2. निम्नलिखित वक्तव्यों पर एक पंक्ति में संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
   i) सांख्यिकी केवल जटिलताओं को सरलता प्रदान करने का कार्य करती है।
   ii) सांख्यिकी अन्य विज्ञानों के नियमों के सत्यापन में सहायता प्रदान करती है।
   iii) भविष्य में घटनाक्रम की अनिश्चितता के कारण, उनके अध्ययन में सांख्यिकी मुश्किल से ही सहायता प्रदान कर सकती है।
   iv) सांख्यिकी के अभाव में नियोजन की कल्पना नहीं की जा सकती।
   v) एक बड़े संस्थान में एक कार्मिक अधिकारी सांख्यिकी के ज्ञान के बिना एक व्यावहारिक कार्मिक योजना तैयार कर सकता है।

12.6 सांख्यिकी की परिसीमाएँ

हमने सांख्यिकी के महत्व तथा कार्यों का विवेचन किया है। अब हम सांख्यिकी की परिसीमाओं के विषय में परिचर्चा करेंगे। सांख्यिकीय विधियों की निम्नलिखित कुछ परिसीमाएँ हैं जिनको इन विधियों का उपयोग करते समय ध्यान में रखना चाहिए।

1. **सांख्यिकी केवल संख्यात्मक विशिष्टताओं पर विचार करती है।** सांख्यिकी संख्याओं में व्यक्त तथ्यों से संबंध रखती है। अतः वे तथ्य तथा समस्याएँ जो संख्याओं में व्यक्त नहीं की जा सकती, सांख्यिकी के क्षेत्र में नहीं आतीं। सुन्दरता, आँखों का रंग, बुद्धि आदि गुणात्मक लक्षण हैं, अतः प्रत्यक्ष रूप में इनका अध्ययन नहीं किया जा सकता । इन लक्षणों का अध्ययन केवल परोक्ष रूप से, विशिष्ट अंक निर्धारित करने के पश्चात् इन्हें संख्याओं में व्यक्त करके ही किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक व्यक्ति समूह के बौद्धिक स्तर का अध्ययन ''बौद्धिक–स्तर–भागफल'' (Intelligence Quotients-IQs) का प्रयोग करके ही किया जा सकता है।

2. **सांख्यिकी व्यक्तिगत इकाइयों का अध्ययन नहीं करती:** सांख्यिकी का संबंध तथ्यों के समूह से होने के कारण, एक अकेली तथा पृथक संख्या सांख्यिकी नहीं समझी जा सकती। उदाहरणार्थ, सांख्यिकी के दृष्टिकोण से एक व्यक्ति का कद महत्वपूर्ण नहीं, परंतु एक व्यक्ति–समूह का औसत कद महत्वपूर्ण है। इस संदर्भ में आप सेक्रिस्ट द्वारा दी गई परिभाषा पुनः स्मरण कर सकते हैं।

3. **सांख्यिकीय नियम यथातथ्य नहीं होते:** सांख्यिकी के नियम प्राकृतिक विज्ञान के नियमों के समान यथातथ्य नहीं होते। वे कुछ परिस्थितियों में ही सत्य होते हैं तथा उन के सत्य होने के लिए हमेशा कोई आकस्मिक कारण जुड़ा रहता है। अतः उन पर आधारित निष्कर्ष केवल लगभग समीपवर्ती रहते । हैं तथा एकदम सही एवं यथातथ्य नहीं होते। उनका सार्वभौमिक उपयोग नहीं किया जा सकता। भौतिकी तथा रसायनशास्त्र जैसे शुद्ध विज्ञानों के नियम प्रयोग में सार्वभौमिक होते हैं। .

4. **सांख्यिकीय परिमाण एवं निष्कर्ष औसत रूप में सत्य होते हैं:** सांख्यिकीय विधियाँ किसी तथ्य तथा समस्या का औसत आचरण ही स्पष्ट करती हैं। अतः एक कम्पनी के कर्मचारियों की औसत आय किसी व्यक्ति विशेष की आय को स्पष्ट नहीं करेगी। अतः सांख्यिकीय परिणाम किसी समस्या या . तथ्य के सामान्य मूल्यांकन का अध्ययन करने में ही उपयोगी हैं। सांख्यिकीय विधि किसी समस्या के अध्ययन की विभिन्न विधियों में से एक है। एक समस्या का अध्ययन अनेक विधियों द्वारा किया जा सकता है।

5. **सांख्यिकीय विधि केवल उन विधियों में से एक है।** सभी परिस्थितियों में सांख्यिकीय विधियाँ सर्वोत्तम समाधान या उत्तर प्रदान नहीं करतीं । प्रायः यह आवश्यक होता है कि एक समस्या का अध्ययन उसके सामाजिक परिवेश, जैसे – संस्कृति, धर्म आदि के संदर्भ में किया जाता है। अतः सांख्यिकीय निष्कर्षों को अन्य प्रमाणों द्वारा अनुपूरित करने की आवश्यकता पड़ती है।

6. **सांख्यिकी का दुरुपयोग भी हो सकता है।** विभिन्न सांख्यिकीय विधियों की अपनी परिसीमाएँ होती हैं। यदि उनका सावधानी से प्रयोग न किया जाए तो उनसे गलत परिणाम निकल सकते हैं। अतः सांख्यिकी की परिसीमाओं में से एक यह है कि गलत हाथों में इसका दुरुपयोग हो सकता है। यह दुरुपयोग आकस्मिक एवम् ऐच्छिक दोनों ही हो सकता है। अनेक सरकारी एजेंसियाँ तथा शोध संस्थान अपने दृष्टिकोण को सिद्ध करने के लिए सांख्यिकीय आँकड़ों के मिथ्या रूप प्रस्तुत करने के लिए लालायित हो जाते हैं। उदाहरणार्थ, यदि

आपको यह बताया जाए कि एक विशेष वर्ष में स्त्री चालकों द्वारा शहर में कार दुर्घटनाओं की संख्या 10 थी, तथा पुरूष चालकों द्वारा यह संख्या 40 थी तब इस सूचना के आधार पर आप इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि स्त्रियाँ सुरक्षित वाहन चालक हैं। यदि आप यह निष्कर्ष निकालते हैं, तो आप इस सूचना का गलत अर्थ लगा रहे हैं। सही निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए आपके लिए दोनों प्रकार के वाहन चालकों की कुल संख्या का ज्ञान होना आवश्यक है।

12.7 सांख्यिकी पर अविश्वास (Distrust of Statistics)

सांख्यिकी विज्ञान की उपयोगिता तथा महत्व होने के बावजूद इसे अविश्वास की नजर से देखा जाता है। प्रायः इसे ऐसे व्यक्तियों द्वारा बदनाम किया जाता है जो इसके वास्तविक उद्देश्य और परिसीमाओं को नहीं ...जानते हैं। प्रायः हमें निम्न प्रकार के कथन सुनने को मिलते हैं, "झूठ की तीन श्रेणियाँ होती हैं – झूठ, : सफेद झूठ तथा सांख्यिकी।'', ''सांख्यिकी कुछ भी सिद्ध कर सकती है।'', ''सांख्यिकी कुछ भी सिद्ध नहीं कर सकती''। ''सांख्यिकी सबसे प्रथम श्रेणी का झूठ है'' । ये कथन सांख्यिकी में अविश्वास की अभिव्यक्ति हैं। सांख्यिकी में अविश्वास से हमारा तात्पर्य सांख्यिकी समंकों, सांख्यिकीय विधियों तथा ज्ञात किए गये निष्कर्षों में हमारे विश्वास की कमी से है। आप यह प्रश्न पूछ सकते हैं कि सांख्यिकी में अविश्वास क्यों होता है? सांख्यिकी में अविश्वास के कुछ महत्वपूर्ण कारण निम्नलिखित हैं:

1. संख्याओं पर आधारित तर्क अधिक विश्वासोत्पादक होते हैं। परंतु व्यक्ति विशेष की इच्छानुसार संख्याओं में हेर–फेर किया जा सकता है। किसी विशेष दृष्टिकोण को सिद्ध करने के लिए, कभी–कभी तर्कों की गलत आँकड़ों द्वारा पुष्टि की जाती है।

2. भले ही सही संख्याओं का प्रयोग किया गया हो, वे अधूरी हो सकती हैं तथा उन्हें पाठक को भ्रमित करने के उद्देश्य से एक विशेष प्रकार से प्रस्तुत किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, साफ मौसम के दिनों की अपेक्षा कोहरे के मौसम के दिनों में यातायात दुर्घटनाएँ कम पाई जाती हैं। इससे यह निष्कर्ष लगाया जा सकता है कि कोहरे के मौसम में वाहन चलाना अधिक सुरक्षित है। यह निष्कर्ष गलत है। सही निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए हमें दोनों प्रकार के मौसम में यातायात की तीव्रता के, अन्तर को ध्यान में रखना होगा।

3. सांख्यिकीय आँकड़ों को देखकर उसकी गुण कोटि का पता नहीं लगा सकते। कभी–कभी अनजाने में भी अधूरे या अशुद्ध आँकड़ों का प्रयोग किया जाता है जिससे गलत निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

4. सांख्यिकीय विधियों की अपनी अलग परिसीमाएँ हैं। अतः अनुसंधानकर्ता को उनका सावधानी से प्रयोग करना चाहिए। परंतु कभी–कभी सांख्यिकीय विधियाँ उन व्यक्तियों के द्वारा प्रयोग की जाती हैं जिन्हें उनका कोई भी ज्ञान नहीं होता या फिर बहुत कम ज्ञान होता है । परिणामस्वरूप, सही तथा पूर्ण समंक होने पर भी गलत विधियाँ अपनाने के कारण गलत निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। यह सांख्यिकीय विधियों का दोष नहीं है, परंतु उन व्यक्तियों का है जो इनका उपयोग करते हैं।

एक उदाहरण लेकर हम इस विषय का उपसंहार कर सकते हैं। माना कि एक बच्चा चाकू से अपना हाथ काट लेता है। उस बच्चे के संरक्षक चाकू को दोष देना प्रारंभ करते हैं । यहाँ दोष चाकू का नहीं है बल्कि बच्चे का है जो चाकू का दुरुपयोग करता है। यह ध्यान देने योग्य बात है कि सांख्यिकी न तो कुछ सिद्ध करती है और न ही किसी बात को असत्य प्रमाणित करती है। सांख्यिकी तो केवल मात्र एक साधन (अर्थात् निष्कर्ष पर पहुँचने की विधि) है, जिसका सावधानीपूर्वक प्रयोग किया जाना चाहिए तथा केवल उन्हीं व्यक्तियों द्वारा किया जाना चाहिए जिन्हें इस विषय का ज्ञान हो।

12.8 चरों के आधार पर वर्गीकरण (Classification According to Variables)

आंकड़ों की उन अनुमान्य विशेषताओं को, जिन्हें संख्यात्मक रूप में प्रकट किया जा सके, चर कहते हैं। मजदूरी, आयु, ऊँचाई, भार, अंक, दूरी आदि, चरों के उदाहरण हैं। जैसा कि आप जानते हैं ये सब चर परिमाणात्मक रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं। वर्गीकरण के इस रूप में, आंकड़ों को आवृत्ति बंटन के रूप में दिखाया जाता है। आवृत्ति बंटन एक ऐसा सारणिक प्रस्तुतीकरण है जो सामान्यतः आंकड़ों को वर्गों में व्यवस्थित करता है तथा इन वर्गों में से प्रत्येक में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या (आवृत्ति) को दिखाता है। अनुप्रयुक्त चरों की संख्या के आधार पर आवृत्ति बंटन के तीन वर्ग होते हैं : (1) एकचर (uni-variate) आवृत्ति बंटन, (2) द्विचर (bi-variate) आवृत्ति बंटन, तथा (3) बहुचर (multi-variate) आवृत्ति बंटन।

1. **एकचर आवृत्ति बंटनः** एकचर वाले आवृत्ति बंटन को एकचर आवृत्ति बंटन कहा जाता है। उदाहरण के लिए एक कक्षा के विद्यार्थियों को उनके द्वारा प्राप्त अंकों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है।

2. **द्विचर आवृत्ति बंटनः** दो चरों वाले आवृत्ति बंटन को द्विचर आवृत्ति बंटन कहते हैं। यदि एक आवृत्ति बंटन दो चरों, जैसे, सांख्यिकी में प्राप्त अंक तथा आयु को दर्शाता है तो उसे द्विचर आवृत्ति बंटन कहते हैं।

12.9 सारांश

सांख्यिकी शब्द का उपयोग या तो बहुवचन के अभिप्राय में किया जा सकता है और या एकवचन के अभिप्राय में । बहुवचन में सांख्यिकी शब्द का अर्थ तथ्यों के संख्यात्मक विवरण या आँकड़ों या समंकों से है। सांख्यिकी कहलाने के लिए संख्यात्मक समंकों में निम्नलिखित लक्षण होने चाहिएः (1) ये तथ्यों के समूह होने चाहिए, (2) ये संख्यात्मक तथ्य समूह या आँकड़े अनेक कारणों द्वारा प्रभावित होने चाहिए, (3) ये संख्याओं में व्यक्त किए जाने चाहिए, (4) उनका आगणन या आकलन उचित–स्तर की परिशुद्धता को ध्यान में रखकर किया जाना चाहिए, (5) समंकों को पूर्वनिर्धारित उद्देश्य के लिए उचित ढंग से एकत्रित किया जाना चाहिए तथा (6) आँकड़ों को परस्पर संबंधित रूप में प्रस्तुत किया जाना चाहिए । एकवचन में जब सांख्यिकी शब्द का प्रयोग किया जाता है तो इस का तात्पर्य उस ज्ञान–समूह से है जिसमें (1) संमकों के संकलन, (2) समंकों के वर्गीकरण तथा सारणीयन, (3) समंकों के प्रस्तुतीकरण, (4) समंकों के विश्लेषण, तथा (5) समंकों के निर्वचन करने संबंधी निधियाँ तथा तकनीकें समझाई जाती हैं।

सांख्यिकीय विधियाँ (1) विवरणात्मक सांख्यिकी, तथा (2) निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में विभाजित की जा सकती हैं। सांख्यिकीय विधियाँ (1)तथ्यों को सही रूप में प्रस्तुत करने, (2) जटिल तथा दुःसाध्य समंकों को सरल बनाने), (3) तुलना करने हेतु तकनीक प्रदान करने, (4) विभिन्न क्षेत्रों में नीति–निर्धारण करने, (5) विभिन्न तथ्यों के परस्पर संबंध को ज्ञात करने, (6) भविष्य का पूर्वानुमान लगाने, (7) घटना की अनिश्चितता को मापने, (8) सांख्यिकीय परिकल्पना का सत्यापन करने, तथा (9) प्रामाणिक निष्कर्ष ज्ञात करने में सहायक होती हैं।

सांख्यिकीय विधियाँ विभिन्न क्षेत्रों जैसे – राज्य प्रशासन, प्रबन्ध अर्थशास्त्र, व्यवसाय प्रबन्ध आदि में उपयोगी होती हैं। आज के व्यवसाय के प्रबन्ध करने की जटिलताओं में उत्तरोत्तर वृद्धि के परिणामस्वरुप निर्णय लेने की प्रक्रिया में सांख्यिकी विधियाँ बहुत उपयोगी तथा सुविधाजनक साबित हो रही हैं। फिर भी सांख्यिकीय प्रसाधनों या विधियों के प्रयोग की कुछ परिसीमाएँ हैं । सांख्यिकी न तो गुणात्मक तथ्यों का अध्ययन करती है और न ही व्यक्तिगत इकाइयों का । सांख्यिकीय नियम यथातथ्य नहीं होते और उनका दुरुपयोग किया जा सकता है, विशेष रूप से जो सांख्यिकीय विधियों से अनभिज्ञ हैं, के द्वारा उनके अंधाधुंध प्रयोग के परिणामस्वरुप लोगों का इस पर से विश्वास उठ गया है।

12.9 शब्दावली

समंक या आँकड़े: एक या अधिक चरों के मापों का सकंलन।

विवरणात्मक सांख्यिकी: आँकड़ों के लक्षणों के संक्षिप्तीकरण तथा वर्णन करने की विधि तथा तकनीक।

निष्कर्षात्मक सांख्यिकी: ऐसी विधियाँ जो अवलोकित समंक समूह (Observed data) अर्थात् निदर्शन के आधार पर वृहत समंक समूह या समग्र (Unobserved data or population) के लक्षणों के संबंध में निष्कर्ष ज्ञात करने में सहायक होती हैं।

सांख्यिकीय समंक या आँकड़ें: संख्यात्मक या मात्रात्मक रूप में प्रस्तुत सूचना को सांख्यिकीय समंक या आँकड़ा कहा जाता है। तथ्यों के सभी संख्यात्मक विवरण सांख्यिकी नहीं हैं परंतु सभी सांख्यिकीय समंक तथ्यों के संख्यात्मक विवरण हैं । समंक कहे जाने के लिए संख्यात्मक विवरणों में कुछ लक्षण होने आवश्यक है।

सांख्यिकीय विधियाँ: विधियों तथा सिद्धांतों का एक ऐसा समूह जो संख्यात्मक संमकों के.संकलन, संक्षिप्तीकरण, वर्णन, विश्लेषण तथा विवेचन में सहायक होता है।

सांख्यिकी: बहुवचन में प्रयोग किए जाने पर इस शब्द का तात्पर्य तथ्यों या समंकों के संख्यात्मक विवरण से है। एकवचन में प्रयोग किए जाने पर इसका तात्पर्य विधियों के उस समूह से है जो समंकों का संकलन, विश्लेषण तथा विवेचन करने के साधन प्रदान करती हैं। .

12.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 1. i) हाँ ii) नहीं iii) नहीं iv) हाँ

2. i) नहीं। उनकी परिभाषा आँकड़ों से संबंधित है।

ii) हाँ

iii) हाँ। प्रत्यक्ष रूप से नहीं, उनके परिमाणन के पश्चात् ।

iv) नहीं । कुछ अन्य पहल भी हैं।

v) हाँ

vi) नहीं । वे निदर्शन से प्राप्त निष्कर्षों से समग्र संबंधी परिणाम ज्ञात करने की विधियाँ हैं।

ख 2. i) नहीं । कुछ अन्य कार्य भी हैं।

ii)) हाँ । संबद्ध समंक (आँकड़े) संकलित करके।

iii) नहीं। सम्भाविता सिद्धांत तथा पूर्वानुमान की विधियाँ सहायक होती हैं।

iv) हाँ। बहुत से समंकों (आँकड़ों) की आवश्यकता होती है।

v) नहीं। सांख्यिकीय विधियों का उपयोग किया जाएगा।

12.12 स्वपरख प्रश्न

1. सांख्यिकी का ज्ञान होना क्यों आवश्यक है ?

2. ''सांख्यिकी तथ्यों का संख्यात्मक विवरण है, परंतु संख्याओं में व्यक्त सभी तथ्य सांख्यिकी नहीं कहलाते'', विवेचना कीजिए।

3. सांख्यिकी से आप क्या समझते है ? इसका अर्थशास्त्र तथा व्यवसाय में क्या महत्व है ?

4. सांख्यिकी की परिभाषा कीजिए तथा सांख्यिकी के विभिन्न कार्यों की विवेचना कीजिए।

5. सांख्यिकी के महत्व की विवेचना कीजिए तथा सांख्यिकी की परिसीमाओं को स्पष्ट कीजिए।

6. सांख्यिकी के अविश्वास से आप क्या समझते हैं? क्या सांख्यिकी विज्ञान इसके लिए जिम्मेदार है?

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए हैं।

इकाई 13 केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो जाएँगे कि आपः

- केन्द्रीय प्रवृत्ति की संकल्पना को समझ सकें;
- यह मूल्यांकन कर सकें कि माध्यों के परिकलन का क्या उद्देश्य है;
- एक आदर्श माध्य के गुणों की व्याख्या कर सकें;
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए समान्तर माध्य गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य, माध्यिका, विभाजन मान तथा भूष्ठिक की परिभाषा तथा उनका परिकलन कर सकें;
- समांतर माध्य के विशेष गुणों तथा गुण–सीमाओं की व्याख्या कर सकें;
- दिए गए उद्देश्य के लिए उपयुक्त माध्य की पहचान कर सकें।

13.1 प्रस्तावना

हमने चर्चा की है कि एक वाणिज्य छात्र के रूप में साख्यिकीय का अध्ययन करना क्यों आवश्यक एवं उचित है। सांख्यिकीय का मतलब उन समंक अथवा संख्यात्मक आंकड़ो से है जो दिए गए स्थिति या घटना से संबंधित हो। जीवन को आसान बनाने के लिए हमें आंकड़ो को उचित तरीके से प्रस्तुत करना चाहिए तथा विशेषताओं, व्यवहार और उपचार को समझना चाहिए। यदि संमकों के विशेषताओं को ठीक से समझना है तो समंको को संक्षेप में प्रस्तुत करना और उनका विश्लेषण करना आवश्यक है। इस दिशा में पहला कदम माध्यों का परिकलन करना है। जहाँ एक मूल्य प्राप्त करके सम्पूर्ण समंकों को दर्शाया जा सके जो सम्पूर्ण संमकों का एक विहंगम दृश्य देता है।

इस इकाई में आप माध्यों के परिकलन का उद्देश्य, आदर्श माध्य के आवश्यक गुण तथा माध्यों के विभिन्न मापों को अध्ययन करेंगें। आप आगे विस्तार से माध्यों के मापों जैसे समांतर माध्य, भारित समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य, माध्यिका, विभाजन मानों (चतुर्थक, दशमक तथा शतमक) तथा भूयिष्ठक के परिकलनों, विशेषताओं, गुणों तथा सीमाओं को जानेगें।

13.2 केन्द्रीय प्रवृत्ति की संकल्पना (Concept of Central Tendency)

एक आवृत्ति बंटन का विश्लेषण करने के लिए उपयोग किये जाने वाले विभिन्न सांख्यिकीय मापों का सही गुण–दोष विवेचन करने के लिए यह जान लेना आवश्यक है कि अधिकतर सांख्यिकीय बंटनों के कुछ सामान्य लक्षण होते हैं। यदि हम एक चर के न्यूनतम मूल्य से उसके अधिकतम मूल्य की ओर चलें, तो प्रत्येक क्रमिक अवस्था में पदों की संख्या तब तक बढ़ती जाती है जब तक कि हम एक अधिकतम मूल्य तक

नहीं पहुँचते, तत्पश्चात जैसे–जैसे हम आगे बढ़ते हैं, वे घटती जाती हैं। सांख्यिकीय समंक जो इस सामान्य प्रतिरूप का अनुसरण करते हैं, एक चर से दूसरे चर तक निम्नलिखित तीन प्रकार से भिन्न हो सकते हैं:

1) वे एक दूसरे से चरों के उन मूल्यों के संबंध में भिन्न हो सकते हैं जिनके चारों ओर अधिकतर मदों का झुंड होता है (अर्थात–माध्य)।

2) वे उस विस्तार के विषय में भिन्न हो सकते हैं जिस तक मद व्यासृत (dispersed) हैं अर्थात् अपकिरण(dispersion)।

3) वे किसी मानक बंटन, जिसे प्रसामान्य बंटन (normal distribution) कहा जाता है, से विचलन की सीमा के विषय में भिन्न हो सकते हैं अर्थात् विषमता (skewness) तथा कुकुदता (kurtosis)।

तदनुसार इन तीन प्रकार की विशेषताओं का अध्ययन करने के लिए सांख्यिकीय मापों के तीन कलक हैं। इस समय हम केवल मापों के प्रथम कुलक का ही अध्ययन करेंगे जिन्हें **माध्य या केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप या स्थिति के माप** कहा जाता है। हम माप के अन्य दूसरे कलक (अर्थात अपकिरण) का अध्ययन इस पाठ्यक्रम के अन्य खण्ड में करेंगे।

बंटन के सामान्य प्रतिरूप में समंकों में हम एक ऐसा मूल्य पहचान सकते हैं जिसके चारों ओर समंकों के बहुत से अन्य मद संकेन्द्रित हों। यह एक ऐसा मूल्य होता है जो समस्त मूल्यों के सीमान्तर के मध्य भाग में कहीं स्थित होता है। चूंकि समंकों का यह प्रतिरूपी मद समंकों के मध्य भाग की ओर हो सकता है, अतः इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति के नाम से जाना जाता है।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के कुछ परिभाषाओं को देखते हैं। क्लार्क ने इसे परिभाषित किया है, 'माध्य सम्पूर्ण संख्याओं को प्रस्तुत करने के लिए एक संख्या को प्राप्त करने का प्रयास है।' क्राक्सटन एवं काउडेन ने परिभाषित किया है, 'माध्य मूल्य सम्पूर्ण समंको के विस्तार के अन्तर्गत वह एक मूल्य है जो श्रेणी के सम्पूर्ण मूल्यों को दर्शाने के लिए प्रयोग किया जाता है। चूंकि माध्य कहीं समंको के विस्तार के अन्तर्गत होता, यह केन्द्रीय मूल्य का माप कहलाता है।'

उपरोक्त परिभाषाएँ हमें बताती हैं कि मध्य अथवा केन्द्रीय मूल्य एक मूल्य है जो सम्पूर्ण जटिल समंको को दर्शाते हैं। अतः, केन्द्रीय मूल्य कहीं दिए गए समंको के उच्चतम मूल्य तथा न्यूनतम मूल्य के बीच आते हैं। इस प्रकार, दिए गए समंको का माध्य अक्सर केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में संदर्भित किए जाते हैं।

13.3 माध्यों के उद्देश्य

आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति की संकल्पना का अध्ययन कर लिया है। आइये, अब हम माध्यों अथवा केन्द्रीय प्रवृत्ति के परिकलन के उद्देश्यों का विवेचन करें। माध्यों के प्रमुख उद्देश्य निम्नलिखित हैं।

1) **एक ऐसा अकेला मूल्य प्रदान करना जो पूर्ण समकों की विशेषताओं की व्याख्या करता है:** एक माध्य समंकों के जटिल समूह का एक अकेले प्रतिनिधि मूल्य में परिवर्तित कर देता है, जिससे इसकी तफसील में खोये बिना हम समंकों की मुख्य विशेषताओं को समझ सकते हैं। इस प्रकार हजारों–लाखों मूल्यों को

केवल एक मूल्य द्वारा निरूपित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक बड़ी फैक्टरी के प्रत्येक श्रमिक के मासिक वेतन को याद रखना प्रायः असंभव है। किन्तु यदि सारे श्रमिकों के कुल वेतन को श्रमिकों की संख्या से विभाजित करके औसत वेतन निकाल लिया जाए, तो हम जान सकते हैं कि औसतरूप में श्रमिक को कितना वेतन मिल रहा है।

2) **तुलना में सहायक होनाः** विशाल असाधित समंकों के दो कुलकों की तुलना करना सुगम नहीं है। किंतु दो भिन्न समंक कलकों की तुलना उनके माध्य निकालकर सुगमतापूर्वक की जा सकती है। तुलना एक समय बिन्दु पर अथवा एक समय की अवधि में की जा सकती है। उदाहरणार्थ दो व्यावसायिक फर्मों ''अ'' तथा ''ब'' की चालू वर्ष की बिक्री की तुलना उनकी औसत बिक्री की तुलना करके की जा सकती है। इस इकाई की चालू वर्ष की बिक्री तथा इसी इकाई की पिछले वर्ष की बिक्री की तुलना पिछले वर्ष तथा चालू वर्ष की बिक्री का औसत निकाल कर की जा सकती है। किन्तु, दो समंक कुलकों के औसत की तुलना करने के लिए औसत की संगणना की समान विधि अपनाई जानी चाहिए। उदाहरणार्थ, एक इलाके के लोगों की समांतर माध्य आय की दूसरे इलाके के लोगों की मध्यिका आय से तुलना करना युक्तिसंगत नहीं है।

3) **सांख्यिकीय अनुमान में सहायक होनाः** समष्टि के अज्ञात मापों अथवा "प्राचलों'' (parametes) के विषय में अनुमान लगाने के लिए हम प्रतिदर्श से परिकलित मूल्यों पर निर्भर करते हैं। इस प्रक्रिया को सांख्यिकीय अनुमिति (statistical inference) कहा जाता है। एक प्रतिदर्श से प्राप्त माध्य समष्टि के माध्य का प्राकलन करने में सहायक होता है।

4) **निर्णय लेने की प्रक्रिया में सहायक होनाः** माध्य संगणना प्रबंधकों को निर्णय लेने में सहायता प्रदान करने के लिए की जाती है। यह प्रायः एक संयंत्र का सामान्य उत्पादन, प्रतिनिधि बिक्री–परिमाण, कुल उत्पादिता सूचकांक (over all productivity index), मूल्य सूचकांक आदि के विषय में जानने में रुचि रखते हैं। ये सब एक माध्य के अभिधान हैं।

13.4 एक आदर्श माध्य के आवश्यक गुण

जैसा कि प्रसिद्ध सांख्यिकीविदों, मूल तथा कैन्डॉल ने सुझाव दिया है, एक आदर्श माध्य में निम्नलिखित विशेषताएँ होनी चाहिए:

1) **समझने में सरल तथा संगणना करने में सुगमः** माध्य निकालना सरल होना चाहिए तथा इसकी संगणना सुगम होनी चाहिए।

2) **स्पष्ट रूप से परिभाषितः** एक माध्य किसी गणितीय सूत्र द्वारा स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए ताकि विभिन्न व्यक्तियों द्वारा, जो उसकी संगणना करने का प्रयत्न करते हैं, एक ही उत्तर निकाल सकें। इसे संगणना करने वाले व्यक्ति के व्यक्तिगत पक्षपात या पूर्वग्रह पर आधारित नहीं होना चाहिए।

3) **समंकों के समस्त मदों पर आधारितः** माध्य निकालने के लिए समंक कलक की प्रत्येक मद सम्मिलित की जानी चाहिए। कोई भी मद छोड़ी नहीं जानी चाहिए अन्यथा माध्य का मूल्य बदल सकता है।

4) **न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों से अनुचित रूप से प्रभावित नहीं होना चाहिए:** एक अकेला चरम मूल्य, जैसे कि एक अधिकतम मूल्य या एक न्यूनतम मूल्य माध्य को अनुचित रूप से प्रभावित कर सकता है। एक बहुत छोटी मद माध्य के मूल्य को कम कर सकती है, तथा एक बहुत बड़ी मद बड़ी सीमा तक इसके मूल्य को बढ़ा सकती है। यदि कोई माध्य एक चरम मूल्य के सम्मिलन अथवा अपवर्जन से परिवर्तित हो जाता है, तो वह उस समंक कुलक का वास्तविक प्रतिनिधि मूल्य नहीं है।

5) **बीजगणितीय विवेचन संभव :** एक माध्य का और अधिक बीजगणितीय विवेचन संभव होना चाहिए। इससे इसकी उपयोगिता बढ़ेगी। उदाहरणार्थ, यदि हमें तीन एक समान समंक कुलकों के माध्य दिए गए हों,तो उन तीनों समंकों कुलकों का संयुक्त माध्य निकालना संभव होना चाहिए।

6) **प्रतिदर्शी स्थिरता:** माध्य की एक समान प्रतिदर्शी स्थिरता होनी चाहिए। इसका अर्थ यह है कि यदि हम समष्टि से विभिन्न प्रतिदर्श लें, तो किसी भी प्रतिदर्श का माध्य लगभग वही होना चाहिए जो अन्य प्रतिदर्शों का है।

13.4.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप

माध्यों अथवा केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप निम्नलिखित हैं :

1. **गणितीय माध्य (Mathematical Averages)**

   i) समांतर माध्य (Arithmetic Mean)

   ii) गुणोत्तर माध्य (GeometricMean)

   iii) हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

   ये सारे माप साधारण अथवा भारित हो सकते हैं।

2. **स्थिति के माध्य (Averages of Position)**

   i) मध्यिका (Median)

   ii) विभाजन मान (Partition Values) – चतुर्थक (Quartiles), दशमक(Decilines) शतमक (Percentiles)

   iii) भूयिष्ठक (Mode)

13.5 समांतर माध्य (Arithmetic Average)

समांतर माध्य को समान्यतः माध्य के नाम से जाना जाता है। यह केंद्रीय प्रवृत्ति का एक माप है क्योंकि समंकों की अन्य संख्याएँ इसके चारों ओर एकत्र होती हैं। समांतर माध्य निकालने के लिए दिए गए समंक कुलक के समस्त प्रेक्षणों के मूल्यों के योग को उस कुलक के प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित किया जाता है। वाणिज्य, प्रबंध, अर्थशास्त्र, वित्त, उत्पादन आदि विषयों में उपयोग किया जाने वाला यह सर्वसामान्य माध्य है। समांतर माध्य को **साधारण समांतर माध्य** भी कहा जाता है।

13.5.1 समांतर माध्य की संगणना (परिकलन)

जैसा कि आप जानते हैं, संकलन के पश्चात् समंकों को उनकी समानताओं और साम्यताओं के आधार पर विभिन्न वर्गों में व्यवस्थित करके वर्गीकृत किया जाता है। समांतर माध्य की संगणना अवर्गीकृत या असमाहित समंकों (असाधित समंकों) तथा वर्गीकृत या समाहित समंकों, दोनों के लिए की जा सकती है। किन्तु दोनों प्रकार के समंकों की संगणना की विधियाँ भिन्न होती हैं। आइए, अब हम अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत समकों के लिए समांतर माध्य की संगणना की विधियों को समझें। सामान्यतः **समांतर माध्यकों को, जिसे 'x' दण्ड' (bar) पढ़ा जाता है, $\overline{X}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। .**

अवर्गीकृत समंक (Ungrouped Data)

विधि 1: जब समंक अवर्गीकृत हों, अर्थात् जब आवृत्ति बंटन न किया गया हो, तो समांतर माध्य की संगणना बहुत सरल होती है। इसके लिए केवल प्रेक्षणों के सारे मूल्यों को जोड़कर, उनके योगफल को प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित कर दिया जाता है। इसकी व्याख्या और अभिव्यक्ति एक सूत्र के रूप में निम्न प्रकार से की जा सकती है।

$$\overline{X} = \frac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots\ldots + \mathrm{X}_\mathrm{n}}{n}$$

जहाँ $\overline{X}$ (x दण्ड) x_n, चर का समांतर माध्य है, $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$,चर के विभिन्न मूल्य हैं, तथा n प्रेक्षणों की कुल संख्या है।

इस सूत्र का सरलीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है :

$$\overline{X} = \frac{\sum \mathrm{X}}{n}$$

जहाँ $\sum$: (जिसे सिग्मा पढ़ा जाता है) एक ग्रीक प्रतीक है जो x के समस्त मूल्यों के योग को सूचित करता है।

$\sum x$ अवलोक के मूल्यों का योग है; n अवलोकनों की संख्या है।

संगणना (परिकलन) के चरण:

1) **दिए गए अवलोकनों के मूल्यों का योग निकाले** ($\sum x$); 2) सम्पूर्ण अवलोकन संख्या ज्ञात करें (n) ; 3) सूत्र का प्रयोग करें।

उदाहरण 1: एक किराना स्टोर पाँच भिन्न उत्पाद बेचता है। इन उत्पादों में से प्रत्येक की बिक्री पर प्रति इकाई लाभ नीचे दिया गया है। औसत लाभ ज्ञात कीजिए।

उत्पाद 1 – 4 रु.

उत्पाद 2 – 9 रु.

उत्पाद 3 – 6 रु.

उत्पाद 4 – 2 रु.

उत्पाद 5 – 9 रु.

हल: औसत लाभ निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है:

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$= \frac{4+9+6+2+9}{5}$$

$$= \frac{30}{5}$$

= 6 रूपये

विधि 2: जब दिए गए समंकों में प्रेक्षणों के मूल्य अत्यधिक हो अथवा भिन्नों में हों, तब इस विधि को अपनाया जा सकता है। यह विधि इस तथ्य पर आधारित है कि एक श्रेणी के व्यक्तिगत प्रेक्षणों के उनके माध्य से विचलनों का बीजगणितीय योग (Algebric sum) सदा शून्य होता है। उदाहरणार्थ 8, 14, 16, 12 और 20 का समांतर माध्य 14 है। इनमें से प्रत्येक मद का समांतर माध्य से अंतर –6,0, +2, –2,+6 होगा, तथा इनका योग शून्य है : यह सदा सत्य है। **इस विधि द्वारा समांतर माध्य की संगणना के लिए निम्न चरण हैं :**

i) कोई कल्पित समांतर माध्य A (Assumed Mean) लीजिए जिससे मदों का विचलन ज्ञात किया जाए। ii) प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (x) का इस कल्पित माध्य से विचलन अर्थात d=x-A का परिकलन कीजिए। iii) समस्त विचलनों का योग कीजिए जिसे $\sum d$ (सिग्मा d) कहा जाता है। iv) निम्नलिखित सूत्र द्वारा समांतर माध्य का परिकलन कीजिए।

$$\overline{X} = A + \frac{\sum d}{n}$$

जहाँ, $\overline{X}$ = x चर का समांतर माध्य

A = कल्पित समांतर माध्य

$\sum d$ = प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य के कल्पित माध्य से विचलनों का योगफल

n = प्रेक्षणों की संख्या

उदाहरण 2: 10 विक्रेताओं द्वारा स्कूटरों की मासिक बिक्री नीचे प्रस्तुत की गई है। प्रतिमास औसत बिक्री परिकलित कीजिए।

विक्रेता :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बिक्री :	23	8	14	31	6	28	11	27	32	46

हलः **समान्तर माध्य की संगणना**

Dealer	Sales (x)	d = x – A
1	23	– 2
2	8	– 17
3	14	– 11
4	31	– 6
5	6	– 19
6	28	3

7	11	– 14
8	27	2
9	32	7
10	46	21
n = 10		∑d = – 24

Assumed mean A = 25

$\sum d = -24$

$n = 10$

$$\overline{X} = A + \frac{\sum d}{n}$$

$$= 25 + \frac{-24}{10} = 25 - 2.4$$

$$= \overline{X} = 22.6$$

स्कूटरों की औसत बिक्री = 22.6

वर्गीकृत समंक (Grouped Data)

चरों को विच्छिन्न चरों तथा अविच्छिन्न चरों के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है। अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को असतत बंटन (discrete distribution) तथा अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को सतत बंटन कहा जाता है। इन दो प्रकार के बंटनों के लिए समांतर माध्य का परिकलन करने की विधियाँ भिन्न हैं। आइए, अब इन विधियों का अध्ययन करें।

असतत श्रेणियों के लिए समान्तर माध्य (Arithmatic Mean for Discrete Series)

विधि 1: इसे प्रत्यक्ष विधि भी कहते है। इस विधि के अंतर्गत समूहित समंकों का समान्तर माध्य निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है :

$$\overline{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n}$$

जहाँ x_1, x_2, x_3 आदि क्रमशः वर्ग 1, 2, 3 आदि के चरों के मूल्य को बताते हैं। इसी प्रकार f_1, f_2, f_3, आदि क्रमशः वर्ग 1, 2, 3 आदि की आवृत्ति को निर्देशित करते हैं। f_1x_1 प्रथम वर्ग की आवृत्ति f_1 तथा उस वर्ग में चर के मूल्य (x_1) गुणनफल को बताते हैं। f_2x_2, f_3x_3.... $f_n\,x_n$ भी इसी अर्थ को सूचित करते हैं। इसी प्रकार $\sum f, f_1$ से f_n तक का योगफल है। इसे n से भी प्रदर्शित करते है।

इस सूत्र को सरल बनाया जा सकता है: $\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ or $\frac{\sum fx}{n}$

जहाँ f = आवृत्ति X चरों का मान है

संगणना (परिकलन) के चरण:

1) प्रत्येक स्तम्भ के आवृत्ति को उनके चरों के मूल्यों से गुणा करके कुल योग ज्ञात करें ∑fx;

2) आवृत्ति का कुल योग ($\sum f$ अथवा n) ज्ञात करें; 3) सूत्र का प्रयोग करें।

विधि 2 : इसे लघु विधि भी कहते हैं, जब दिए गए आवृत्ति बंटन में वर्गों की संख्या बड़ी होती है, तब इस विधि को अधिमान्यता दी जाती है। इस विधि में भी लगभग वही क्रियाविधि अपनाई जाती है जैसी कि अवर्गीकृत समंकों के लिए अपनाई जाती है। इस विधि में निम्नलिखित पग चरण हैं।

i) एक कल्पित समांतर माध्य (A) लीजिए। ii) इस कल्पित समांतर माध्य से x चर के विचलन ज्ञात कीजिए तथा उसे $d = x - A$ द्वारा प्रदर्शित कीजिए। किसी भी मूल्य को कल्पित समांतर माध्य के रूप में लिया जा सकता है, किन्तु दिए गए बंटन में बीचों बीच स्थित वर्ग में x चर के मूल्य को चुना जाना चाहिए। iii) विचलनों (d) को उनसे संबंधित वर्ग आवृत्तियों (f) से गुणा करके तथा उनका योग करके $\sum fd$ प्राप्त कीजिए। iv) कुल आवृत्तियों का योग ($\sum f$ अथवा n) ज्ञात कीजिये; v) समांतर माध्य ($\bar{x}$) निकालने के लिए सूत्र का प्रयोग कीजिये। इस विधि के अंतर्गत समांतर माध्य का परिकलन निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है।

$$\overline{X} = \text{A} + \frac{\sum fd}{\sum f} \ or\ \overline{X} = A + \frac{\sum \text{fx}}{\text{n}}$$; जहाँ A = कल्पित समांतर माध्य।

$\sum f$ = मदों की कुल संख्या जिसे 'n' द्वारा भी निदर्शित किया जा सकता है।

$\sum fd$ विचलनों ($d = x - A$) को उनसे संबंधित वर्ग आवृत्तियों से गुणा करके प्राप्त गुणनफल का कुल योग।

आइए अब हम एक उदाहरण (उदाहरण 3) लेकर अध्ययन करें कि इन दोनों विधियों के अंतर्गत समांतर माध्य का परिकलन किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 3: दोनों विधियों का उपयोग करते हुए निम्न समंकों का समांतर माध्य परिकलित कीजिए:

अंक:	10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियों की संख्या:	8	21	23	17 .	15	9	5	2

हल:

समांतर माध्य का परिकलन

अंक x	विद्यार्थियों की संख्या f	d = x – 40	fd	fx
10	8	– 30	– 240	80
20	21	– 20	– 420	420
30	23	– 10	– 230	690
40	17	0	0	680
50	15	10	150	750
60	9	20	180	360
70	5	30	150	350
80	2	40	80	160
Total	**∑f = 100**		**∑fd = –330**	**∑fx = 3,670**

इस स्थिति में काल्पनिक समांतर माध्य (A) 40 है।

विधि 1: $\overline{X} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{3,670}{100} = 36.70 \text{ marks}$

विधि 2: $\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{n} = 40 + \frac{-330}{100} = 40 - 3.30 = 36.70 \text{ marks}$

सतत श्रेणी के लिए समान्तर माध्य (Arithmetic Mean for Continuous Series)

सतत श्रेणियों के लिए (अर्थात् जब समंकों का वर्गीकरण वर्गान्तरों के अनुसार किया गया हो), समान्तर माध्य निम्नलिखित विधियों द्वारा परिकलित किया जा सकता है।

विधि 1: इस विधिको प्रत्यक्ष कहते है। जब समंक वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकृत किए जाते हैं, तो आपको समस्त मदों के मूल्य ज्ञात नहीं होते। आप केवल यह जानते हैं कि विभिन्न समूहों से संबंधित मद अपने–अपने वर्गान्तरों में बिखरे हुए हैं। अतः कुल मूल्य का परिकलन करने के लिए आप यह मान लेते हैं कि एक वर्गान्तर की समान मदें उस समूह में एक समान बिखरी हुई हैं। इसका तात्पर्य यह है कि परिकलन के लिए आप. यह मान सकते हैं, कि एक समूह से सम्बन्धित मदों के मूल्य उस समूह के मध्य बिन्दु के बराबर है। सतत श्रेणी की स्थिति में, वर्गान्तरों को बदलने के लिए विभिन्न वर्गान्तरों के मध्य बिन्दुओं की संगणना की जाती है। ऐसा किये जाने के बाद सतत श्रेणी तथा असतत श्रेणी में कोई अन्तर नहीं रह जाता। इस अवस्था के बाद समांतर माध्य की संगणना की विधि वही है जैसी कि असतत श्रेणी की स्थिति में उपयोग की जाती है। असतत श्रेणी की स्थिति में उपयोग की जाने वाली दो विधियाँ यहाँ भी उपयोग की जा सकती हैं। किन्तु समावेशी वर्गान्तरों तथा अपवर्जी वर्गान्तरों दोनों के लिए उपयोग की जाने वाली विधियाँ एक समान होंगी। इस विधि के अन्तर्गत समान्तर माध्य निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके प्राप्त किया जाता है।

$$\overline{X} = \frac{\sum fm}{\sum f} \; or \; \overline{X} = \frac{\sum fm}{n}$$

जहाँ m एक वर्ग का मध्य मूल्य है। $\overline{X}$ समांतर माध्य है; और f आवृत्ति है।

परिकलन के चरण: इस विधि के अनुसार पहले प्रत्येक वर्ग के मध्यमूल्य तथा उसकी आवृत्ति, का गुणनफल निकालिये, तथा फिर उन गुणनफलों का योग करके $\sum fm$ ज्ञात कीजिये, तथा इसे आवृत्ति के योग ($\sum f$) से भाग दीजिये।

विधि 2 : इसे लघु विधि भी कहते हैं। d प्राप्त करने की विधि में थोड़ा परिवर्तन करके वही सूत्र जिसका उपयोग असतत श्रेणी के लिए किया गया था, यहाँ भी उपयोग किया जा सकता है। यहाँ कल्पित समान्तर माध्य से मध्यमूल्यों के विचलन (अर्थात $d = m - A$) ज्ञात किये जाते हैं।

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \; or \; \overline{x} = A + \frac{\sum fd}{n}$$

जहाँ $\overline{X}$ कल्पित माध्य है; f आवृत्ति है d विचलन है।

परिकलन के चरण:

1) प्रत्येक वर्गान्तर (m) की मध्य बिन्दु ज्ञात करें; 2) किसी एक मध्य बिन्दु को कल्पित माध्य मान लें (लगभग बीच के कल्पित माध्य मानना चाहिए); 3) प्रत्येक

मध्य बिन्दु से कल्पित माध्य घटायें (m –A) = d. 4) आवृत्ति का कुल योग अर्थात् $\sum f$ अथवा n ज्ञात करें; 5) सूत्र का प्रयोग करें।

विधि 3 : पद विचलन विधि (Step-deviation method): यदि कल्पित समांतर माध्य से विचलनों का कोई उभयनिष्ठ गुणक (Common factor) हैं, तो विचलनों के आकार को इस उभयनिष्ठ गुणक (c) से भाग देकर और छोटा किया जा सकता है। इन पद विचलनों का d^1 अर्थात् $d^1 = (m - A) \div c$ द्वारा निदर्शित किया जाता है। फिर समान्तर माध्य निम्न प्रकार से निकाला जाता

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd^1}{\sum f} \times c \ or \ \overline{X} = A + \frac{\sum fd^1}{n} \times c$$

जहाँ $\overline{X}$ काल्पित माध्य है; f आवृत्ति है $d^1 = (m - A)$ है; $\sum f$ कुल आवृत्तियों का योग है (n)।

टिप्पणी: यदि सारे वर्गान्तर बराबर हैं, तो वर्गान्तर उभयनिष्ठ गुणक होगा।

परिकलन के चरण

1) प्रत्येक वर्गान्तर का मध्य बिन्दु ज्ञात करें (m) और उनकें से कल्पित माध्य (A) निकालें

2) प्रत्येक मध्य बिन्दु से कल्पित माध्य को घटाकर d ज्ञात करें (d = (m –A))

3) उभयनिष्ठ गुणक (c) ज्ञात करें तथा उपर्युक्त निकाले गए d को उभयनिष्ठ गुणक से भाग देकर d^1 ज्ञात करें $\left(d^1 = \frac{d}{c}\right)$;

4) d^1 को उनके सामने की आवृत्तियों से गुणा करें तथा उसका कुल योग निकालें $\sum fd^1$.

5) आवृत्तियों का कुल योग $\sum f$ अथवा n ज्ञात करें।

6) पद विचलन विधि का सूत्र प्रयोग करें।

उदाहरण 4 : एक कम्पनी के 50 विक्रेताओं की साप्ताहिक बिक्री नीचे दी गई है। प्रत्यक्ष विधि, लघु विधि तथा पद–विचलन विधि अपनाते हुए समान्तर माध्य का परिकलन कीजिये।

कुल बिक्री (रु.000)		0-5	5-10	10-25	25-50
विक्रेताओं की संख्याः	:	3	6	25	10

हलः

समान्तर माध्य का परिकलन

साप्ताहिक बिक्री Rs. '000s	विक्रेताओं की संख्या (f)	मध्य बिन्दु (m)	विचलन (m-17.5) (d)	पदविचलन $d^1 = \frac{m-17.5}{5}$	fm	fd	fd^1
0-5	3	2.5	– 15	– 3	7.5	– 45	– 9
5-10	12	7.5	– 10	– 2	90.0	– 125	– 24
10-25	25	17.5	0	0	437.5	0	0
25-50	10	37.5	20	4	375.0	200	40
Total	**$\sum f = 50$**				**$\sum fm = 910$**	**$\sum fd = 35$**	**$\sum fd^1 = 7$**

विचलन स्तम्भ से साफ पता चलता है कि कल्पित समांतर माध्य (A)17.5 है, तथा उभयनिष्ठ गुणक (c) 5 है।

विधि 1:

$\overline{X} = \frac{\sum fm}{n}$; $\sum fm = 910, n = 50$

$$\overline{X} = \frac{910}{50} = 18.2$$

बिक्रियों का माध्य 18.2 रु. हजार प्रति सप्ताह है।

विधि 2:

उपरोक्त उदाहरण में (उदाहरण 4) यह स्पष्ट है कि कल्पित साध्य 17.5 है।

अब,

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd^1}{n}$$

$A = 17.5, \sum fd = 35, n = 50$

$$\overline{X} = 17.5 + \frac{35}{50} = 18.2$$

विधि 3: यह उभयनिष्ठ गुणक (Common factor c) 5 हैं।

अब, $\overline{X} = A + \frac{\sum fd^1}{n} \times c$

$$\overline{X} = 17.5 + \frac{7}{50} \times 5$$

$$= 17.5 + 0.7 = 18.2$$

बिक्री का समान्तर माध्य 18.2 हजार रुपये प्रति सप्ताह है।

उपरोक्त उदाहरण से यह स्पष्ट है कि समांतर माध्य की तीनों विधियों से एक ही उत्तर प्राप्त होता है, पद विचलन विधि में न्यूनतम गणना की आवश्यकता होती है हालांकि विधि 1 सबसे सरल है। यदि आवृत्तियाँ वृहत है और साथ ही उनके मध्य बिन्दु भी वृहत है तो ऐसी स्थिति में विधि 3 सबसे उपयुक्त होगी।

उदाहरण 5: नीचे दिए गए समंकों से याम्टो मशीन (क) के कर्मचारियों द्वारा किये गए काम के घण्टों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिये।

काम के घण्टे	कर्मचारियों की संख्या
36.0 - 37.8	6
37.8 - 39.6	7
39.6 - 41.4	24
41.4 - 43.2	7
43.2 - 45.0	2
45.0 - 46.8	4
Total	**50**

हल: सबसे पहले समस्त वर्गों का मध्य मूल्य (m) निकालिये तथा कल्पित समान्तर माध्य 'A' (अर्थात 42.3) से उनका विचलन ज्ञात कीजिये। उभयनिष्ठ गुणांक 'c' 1.8 है जो कि विभिन्न समूहों के वर्गान्तर के बराबर है।

समान्तर माध्य का परिकलन

काम किये गए घण्टे	m	f	m −A (m − 42.5)	$d^1 = (m-A)/C$ $d^1 = \frac{m - 42.3}{1.8}$	fd^1
36.0 - 37.8	36.9	6	– 5.4	– 3	– 18
37.8 - 39.6	38.7	7	– 3.6	– 2	– 14
39.6 - 41.4	40.5	24	– 1.8	– 1	– 24
41.4 - 43.2	42.3	7	0	0	0
43.2 - 45.0	44.1	2	+ 1.8	1	2
45.0 - 46.8	45.9	4	+ 3.6	2	8
Total		$\sum f = 50$			$\sum fd^1 = 46$

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd^1}{n} \times c$$

$$\overline{X} = 42.3 + \frac{-46}{50} \times 1.8 \quad = 42.3 + (-0.92) \times 1.8 \quad = 42.3 - 1.656 = 40.644$$

किये गए काम के घण्टों का समान्तर माध्य 40.644 घण्टे हैं। आप देख सकते हैं कि जब सारे वर्गान्तर एक बराबर हैं, तो मूल्य 1, 2, 3........ तथा −1 (−2) −3............ आदि होंगे। किन्तु जब वर्गान्तर एक बराबर नहीं होते तो d^1 मूल्यों का क्रमिक संख्याओं में होना आवश्यक नहीं है। ऐसी स्थिति में यह आवश्यक होता है कि स्तम्भ m−A बनाया जाए और फिर 'c' से भाग दिया जाए किन्तु जब सारे वर्गान्तर एक

बराबर हों, तो m–A स्तम्भ को लिखने से बचा जा सकता है, तथा सीधे ही d, मूल्यों को लिखा जा सकता है।

यहाँ यह ध्यान देने की बात है कि अगर वर्गान्तर समावेशी है तो उन्हें अपवर्जी वर्गान्तर में परिवर्तित करने की आवश्यकता निम्नलिखित के गणना में नही हैं: समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य। क्योंकि इनके मध्य बिन्दु समान रहते है, लेकिन माध्यिका और भूयिष्ठक की गणना में समावेशी वर्गान्तर को अपवर्जी में परिवर्तित करने की आवश्यकता होती है।

बोध प्रश्न क

1) i) यदि कल्पित माध्य 12 से लिये गए 6 पदों के विचलन का योग –6 है, तो उनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

ii) सतत श्रेणी के समूहित समंकों के समान्तर माध्य की संगणना के लिये प्रयोग किये जाने वाले सूत्रों को लिखिए।

iii) जब भी सम्भव हो पद–विचलन विधि को अधिमान्यता दी जानी चाहिये। क्यों ?

iv) यदि किसी दिये गए समंक कुलक के लिए $\overline{x} = 33, \sum fd^1 = -20, \sum f = 100$, तथा c = 10, तो कल्पित समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

v) समूहित समंकों से समान्तर माध्य की संगणना करते समय हम कौन सी बड़ी मान्यता करते हैं ?

2) एक नगर में बारह परिवारों की मासिक आय नीचे दी गई है। समान्तर माध्य का परिकलन कीजिये।

परिवार :	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
मासिक आय (रुपयों में)	:	280	180	96	98	104	75	80	84	100	75	600	200

3) बारह क्रमिक मासों में एक मशीन के परिचालक द्वारा उत्पादित अस्वीकृत इकाइयों की संख्या 82, 74, 65, 67, 62, 73, 68, 63, 65, 62, 69, और 66 थी। बताइये कि :

i) अस्वीकृत इकाइयों की औसत संख्या क्या थी ?

ii) इस माध्य से विचलनों का योग क्या है ?

4) वैकल्पिक विधियों का उपयोग करके निम्नलिखित समंकों का समान्तर माध्य परिकलित कीजिये।

श्रमिकों की साप्ताहिक मजदूरी (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या
100-105	200
105-110	210
110-115	230

115-120	320
120-125	350
125-130	320
130-135	410
135-140	320
140-145	280
145-150	210
150-155	160
155-160	90

5) निम्नलिखित आवृत्ति बंटन का पद विचलन विधि द्वारा समांतर माध्य ज्ञात कीजिये।

वर्गान्तर :	15 — 25,	25 —35,	35 — 45,	45 — 55,	55—65,	65 —75
आवृत्तिः	4	11	19	14	8	2

13.5.2 भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

आपने विभिन्न प्रकार के समंक कुलकों के लिए. समांतर माध्य की संगणना करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन कर लिया है। इन सभी विधियों में हमने यह माना है कि दिये गए समंक कुलक की सारी मदों का महत्व बराबर है। किन्तु प्रत्येक परिस्थिति में ऐसा होना आवश्यक नहीं है। व्यावहारिक परिस्थितियों मे कम मदें दूसरी मदों की अपेक्षा अधिक महत्वपूर्ण होती हैं। उदाहरणार्थ किसी वर्ग का निर्वाह सूचकांक (cost of living index) बनाते समय उनके द्वारा उपभोग की जाने वाली वस्तुओं का महत्व अलग–अलग हो सकता है। ऐसी वस्तुओं के मूल्यों का साधारण समांतर माध्य उनके जीवन–यापन के पैटर्न का यथार्थ चित्र प्रस्तुत नही कर सकेगा। ऐसी परिस्थितियों में विभिन्न वस्तुओ के भार नियत किये जाते हैं, तथा एक भारित समांतर माध्य निकाला जाता है। एक कारखाने में जहाँ निर्माण लागत निकालनी हो, वहाँ एक भारित समान्तर माध्य अधिक उपयुक्त है

संगणना (परिकलन):

भारित समान्तर माध्य की संगणना का सूत्र निम्नलिखित हैः

$$\overline{X}w = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

जहाँ $\overline{X}$ भारित समांतर माध्य है; $\sum wx$ भारो (w) और उनके चरों (x) के गुणनफल का कुल योग है; $\sum w$ भारो का कुल योग है।

चरणः 1) यदि भार न दिए गए हो तो स्थिति के अनुसार यादृच्छिक भार प्रदान करें; 2) भारों (w) को उनके चरों (x) से गुणा करें तथा उनका कुल योग $\sum wx$ ज्ञात करें; 3) भारो का कुल योग ($\sum w$) ज्ञात करें; 4) सूत्र का प्रयोग करें।

भारित समांतर माध्य की संगणना में मुख्य कठिनाई भारों के चुनाव से संबंधित है। ये भार वास्तविक अथवा अनुमानित हो सकते हैं। यदि वास्तविक भार उपलब्ध हों तो उनका उपयोग किया जाना चाहिए। यदि उपलब्ध नहीं हैं तो परिस्थिति के अनुसार कुछ या यादृच्छिक (arbitary) भार नियत किए जा सकते हैं।

उदाहरण 6: वस्तुओं, अ, ब और स के मूल्यों में क्रमशः 40%, 60% तथा 90% वृद्धि हुई है। वस्तु अ वस्तु स से 6 गुणा अधिक महत्वपूर्ण है तथा वस्तु ब वस्तु स से तीन गुणा अधिक महत्वपूर्ण है। इन तीनों वस्तुओं के औसत मूल्यों में कितनी वृद्धि हुई है ?

हलः चूँकि मूल्यों में औसत वृद्धि का निश्चय करना है. अतः मूल्यों में वृद्धि की संख्याओं को x के रूप में दिखाया गया है। अ, ब, स का सापेक्ष महत्व 6 : 3 : 1 है। अतः इन संख्याओं को भार 'w' के रूप में लिया जाएगा।

वस्तु	**मूल्यों में प्रतिशत वृद्धि (x)**	भार **(w)**	**wx**
A	40	6	240
B	60	3	180
C	90	1	90
Total		**$\sum w = 10$**	**$\sum wx = 510$**

भारित समांतर माध्य

$$= \frac{\sum wx}{\sum w}$$

$$= \frac{510}{10} = 51\%$$

मूल्यों में प्रतिशत वृद्धि 51%

यह देखा जा सकता है कि संगणना के उद्देश्य के लिए मदों के भारों को उसी प्रकार प्रयुक्त किया जाता है जैसे की आवृत्तियों को किया जाता है। किन्तु वास्तव में भार आवृत्ति नहीं होते। आवृत्ति का अर्थ समंकों में एक मद को होने वाली पुनरावृत्ति की संख्या है, जबकि भार केवल विभिन्न मदों के सापेक्ष महत्व को बताते हैं। भार वास्तव में, समंकों में केवल एक बार ही पाये जाते हैं।

भारित समान्तर माध्य को भारित माध्य (weighted average) भी कहा जाता है। जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि सांख्यिकी में माध्य शब्द केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य मापों, जैसे गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के लिये उपयोग किया जाता है। अतः व्यापक दृष्टि से भारित गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य भी सम्मिलित है।

साधारण समान्तर माध्य से तुलना : माध्य साधारण समान्तर माध्य से भिन्न है। क्योंकि इसमें हम भारों का प्रयोग करते हैं। भारित साधारण माध्य के बीच परस्पर सबंध निम्न प्रकार से हैं।

1. यदि सारे मदों को बराबर का महत्व दिया जाए तो भारित माध्य साधारण माध्य के बराबर होगा।

2. यदि बड़ी मदों को बड़े भार तथा छोटी मदों को छोटे भार दिए जाएँ तो भारित माध्य साधारण माध्य से अधिक होगा।

3. यदि बड़ी मदों को छोटे भार तथा छोटी मदों को बड़े भार दिए जाएँ तो भारित माध्य साधारण माध्य से कम होगा।

उदाहरण 7: इस परस्पर संबंध को भलीभाँति समझने के लिए कुछ उदाहरण लिए जा सकते हैं। आइए, उदाहरण 6 को एक बार फिर लें। इस बार हम भारों के निम्नलिखित दो कुलकों को लेकर मूल्यों में औसत वृद्धि ज्ञात करें।

अ :ब :स	1 : 3 : 6	के समान	कुलक w_1
अ :ब :स	10 : 10 : 10	के समान	कुलक w_2

हलः **भारित समान्तर माध्य का परिकलन**

वस्तु	प्रतिशत वृद्धि x	प्रथम कुलक के लिए		द्वितीय कुलक के लिए	
		w_1	xw_1	w_2	xw_2
A	40	1	40	10	400
B	60	3	180	10	600
C	90	6	540	10	900
योग	$\sum x = 190$	$\sum w_1 = 10$	$\sum xw_1 = 760$	$\sum w_2 = 30$	$\sum xw_2 = 1900$

1) प्रथम कुलक के लिए $= \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{760}{10} = 76\%$

2) द्वितीय कुलक के लिए$= \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{1900}{10} = 63.3\%$

3) समान्तर माध्य $= \frac{\sum x}{n} = \frac{190}{3} = 63.3\%$

यदि हम ध्यानपूर्वक परिणामों की तुलना करें, तो हमें निम्नलिखित बातें पता चलेंगी।

i) भार कुलक 2 के अंतर्गत, सारी वस्तुओं को समान भार दिए गए हैं। यहाँ भारित माध्य (63.3) साधारण माध्य (63.3) के बराबर है।

ii) भार कुलक 1 के अंतर्गत, बड़े मूल्य 90 को बड़ा भार 6 तथा छोटी मद 40 को छोटा भार 1 दिया गया है। यहाँ भारित माध्य (76) साधारण माध्य (63.3) से अधिक है।

iii) भारों के मूल्य कुलक के अंतर्गत (उदाहरण 6 देखें) बड़े मूल्य 90 को छोटा भार 1 तथा छोटे मूल्य 40 को बड़ा भार 6 दिया गया था। उस स्थिति में भारित माध्य (51) साधारण माध्य (63.3) से कम था।

भारित माध्य के ये तीन गुण (जो कि हर प्रकार के भारित माध्य के लिए सत्य हैं) निम्नलिखित तथ्य की ओर संकेत करते हैं। भारित माध्य न केवल मदों का माध्य है वरन् यह दो वस्तुओं का माध्य देता है : (i) मदों का औसत, तथा (ii) मद भारण (weight) के पैटर्न से किस प्रकार प्रभावित होते हैं। अतः जब मद असमान महत्व के हों, तो उचित औसत ज्ञात करने के लिए भारित माध्य का परिकलन अनिवार्य है।

13.5.3 भारित समान्तर माध्य के उपयोग

भारित समान्तर माध्य निम्नलिखित अवस्थाओं में मुख्यतः उपयोगी हैं। :

1. जब दिए गए मद असमान महत्व के हों।
2. जब उन प्रतिशतताओं का औसत निकालना हो जो हर (denominater) में मदों की भिन्न संख्या लेकर संगणित किए गए हों।
3. जब सांख्यिकीय मापों, जैसे बहुत से समूहों के माध्यों, को संयोजित करना हो।

भारित समांतर माध्य का उपयोग निम्नलिखित परिस्थितियों में विशेष रूप से किया जाता है।

1. सूचकांकों के निर्माण में।
2. मानकित जन्म तथा मृत्यु दरों की संगणना में।
3. जहाँ मशीनों की क्षमता भिन्न हो, वहाँ प्रति मशीन उत्पादन ज्ञात करने के लिए।
4. एक फैक्टरी के कुशल, अर्धकुशल तथा अकुशल श्रमिकों की औसत मजदूरी का निश्चय करने में।

13.5.4 समान्तर माध्य के विशेष गुण (Properties of Mean)

आपने समान्तर माध्य के अर्थ तथा उसकी संगणना की विधियों का अध्ययन कर लिया है। आपने यह भी अध्ययन कर लिया है कि एक भारित समान्तर माध्य साधारण समान्तर माध्य से किस प्रकार भिन्न हैं। आइये, अब हम समान्तर माध्य के मुख्य गुणों का अध्ययन करें।

1) अलग–अलग मदों के समान्तर माध्य से विचलनों का योग सदा शून्य होता है, अर्थात, $\sum (x - \overline{X}) = 0$. इसकी व्याख्या निम्न उदाहरण में की गई है।

x	$(x - \overline{X})$
5	– 1
6	0
7	1
9	3
3	– 3
30	$\sum (x - \overline{X}) = 0$

$\overline{X} = \sum x/\text{n} = 30/5 = 6$

इस उदाहरण में आप देखेंगे कि धनात्मक विचलनों का योग ऋणात्मक विचलनों के योग के बराबर है। इसीलिए समान्तर माध्य को गुरुत्व का केन्द्र (centre of gravity) भी कहा जाता है। यह सब प्रकार के समंकों के लिए सत्य है चाहे वे वर्गान्तरों सहित हों अथवा वर्गान्तरों के बिना।

2) समान्तर माध्य से विचलनों के योग का वर्ग न्यूनतम होता है, अर्थात् यह सदा किसी अन्य मूल्य से लिए गए विचलनों के योग से कम होता है। अन्य शब्दों में

$\sum(x-\overline{X})^2$ सदा न्यूनतम होता है। ऊपर दिये गये उदाहरण को लेकर हम इस तथ्य की जाँच कर सकते हैं।

समान्तर माध्य से विचलनों का वर्ग (x = 6)			किसी अन्य मूल्य जैसे 5 से विचलनों का वर्ग		
x	$(x-\overline{X})$	$(x-\overline{X})^2$	X	(x– 5)	$(x-5)^2$
5	– 1	1	5	– 1	0
6	0	0	6	0	1
7	1	1	7	1	4
9	3	9	9	3	16
3	– 3	9	3	– 3	4
		20			25

इससे स्पष्ट है कि $\sum(\overline{X}-x)^2 < \sum(\overline{X}-5)^2$

3) यदि मदों की संख्या तथा समान्तर माध्य दोनों ज्ञात हों, तो मदों का योग समान्तर माध्य को मदों की संख्या से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है।

अर्थात $\sum x = n\overline{X}$ जहाँ n मदों की संख्या है।

इस गुण का बड़ा व्यावहारिक महत्व है। उदाहरण लिए यदि हम यह जानते हैं कि एक फैक्टरी में श्रमिकों की संख्या 100 है तथा उनकी मासिक औसत मजदूरी 400 रुपये है तो हम सुगमतापूर्वक उस फैक्टरी द्वारा दी जाने वाली कुल मासिक मजदूरी को ज्ञात कर सकते है जो कि 400 × 100 = 40,000 रुपये होगी।

4) यदि हम किसी ऐसे एक प्रेक्षण को सम्मिलित कर लें या निकाल दें जो कि माध्य के बराबर है, तो समांतर माध्य पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

5) यदि चर के प्रत्येक मूल्य को किसी स्थिरांक (c) द्वारा बढ़ा या घटा दिया जाए, तो समांतर माध्य भी द्वारा बढ़ या घट जाता है। इसी प्रकार जब 'x' चर के मूल्यों को एक स्थिरांक, मान लो k द्वारा गुणा किया जाता है, तो समांतर माध्य भी उसी संख्या k से गुणित हो जाता है।

उदाहरणार्थ, पिछले उदाहरण को लीजिये, प्रत्येक प्रेक्षण में 2 जमा कीजिए तथा उनमें से प्रत्येक को 3 से गुणा कीजिये। अब नया माध्य (मूल समान्तर माध्य + 2) × 3 = (6 + 2) × 3 = 24 होगा। आइये, इसकी जांच करें:

x	***x*+2**	**3(*x*+2)**
5	7	21
6	8	24
7	9	27
9	11	33
3	5	15
30	**40**	**120**

X का समान्तर माध्य $= \frac{30}{5} = 6$

$X + 2$ का समान्तर माध्य $= \frac{40}{5} = 8 = 6 + 2$ अर्थात् पुराना समान्तर माध्य+ 2

3 $(X + 2)$ का समान्तर माध्य $\frac{120}{5} = 24$ या 8×3 या $(6 + 2) \times 3$ अर्थात् (पुराना माध्य . + 2) ×3

6) यदि हमें दो या अधिक सम्बन्धित समूहों के समान्तर माध्य तथा मदों की संख्या ज्ञात हो तो हम भिन्न विधि द्वारा इन समूहों का संयुक्त समान्तर माध्य ज्ञात कर सकते हैं ।

$$\overline{X}_c = \frac{n_1 \overline{X}_1 + n_2 \overline{X}_2}{(n_1 + n_2)}$$

यहाँ $\overline{X}_1$, तथा $\overline{X_2}$, क्रमशः समूह 1 और समूह 2 के समांतर माध्य है, तथा n_1, n_2, क्रमशः समूह 1 व समूह 2 में मदों की संख्या है।

उदाहरणार्थ, जनवरी से अगस्त के बीच की अवधि में एक वस्तु के उत्पादन का समांतर माध्य 400 टन प्रतिमास है, तथा सितम्बर से दिसम्बर के बीच की अवधि के लिए उत्पादन का समान्तर माध्य 430 टन प्रतिमास है। अब हम पूरे वर्ष के लिए औसत उत्पादन की संगणना निम्न प्रकार से कर सकते हैं:

$\overline{X}_1 = 400;$

$\overline{X}_2 = 430;$

$n_1 = 8$ (जनवरी से अगस्त तक = 8 मास)

$n_2 = 4$ (सितम्बर से दिसम्बर तक = 4 मास)

पूरे वर्ष के लिए औसत,

$$\overline{X}_c = \frac{n_1 \overline{X}_1 + n_2 \overline{X}_2}{(n_1 + n_2)}$$

$$= \frac{8 \times 400 + 4 \times 430}{8 + 4} = \frac{4920}{12}$$

= 410 टन प्रति मास

इस सूत्र के पीछे निम्नलिखित तर्क हैं : $n_1 \overline{X}_1$, प्रथम समूह से संबंधित समस्त मदों का कुल मूल्य है, तथा $n_2 \overline{X}_2$, दूसरे समूह से संबंधित समस्त मदों का कुल मूल्य है। अतः $n_1 \overline{X}_1 + n_2 \overline{X}_2$ दोनों समूहों से मदों के कुलों का योग है। दूसरे शब्दों में, संयुक्त विभिन्न समूहों के माध्यों का भारित माध्य है। प्रत्येक समूह में मदों की संख्या को भार माना गया है।

बोध प्रश्न ख

1) भारित समान्तर माध्य तथा साधारण समान्तर माध्य की तुलना कीजिए।

2) नीचे दिये गये समंकों के मूल्यों का साधारण समांतर माध्य तथा भारित समान्तर माध्य परिकलित कीजिये तथा बताइये कि दोनों के बीच अन्तर के क्या कारण है।

प्रति टन मूल्य (रुपयों में):	45.60	40.70	42.75
क्रय किये गए टन:	135.00	40.00	25.00

3) दो महाविद्यालयों अ और ब के परिणामों से बताइये कि उनमें से कौन–सा श्रेष्ठतर है।

परीक्षा का नाम	**महाविद्यालय अ**		**महाविद्यालय ब**	
	परीक्षा दी	**उत्तीर्ण हुए**	**परीक्षा दी**	**उत्तीर्ण हुए**
एम. ए.	30	25	100	80
एम–कॉम	50	45	120	95
बी.ए.	200	150	100	70
बी. कॉम	120	75	80	50
योग	400	295	400	295

4) एक विधाचीन अ, ब और स विषयों में लिखित तथा मौखिक परीक्षा में अंक निम्न प्रकार से हैं। लिखित (75 अंकों में से) मौखिक (25 अंकों में से)

विषय	अ	ब	स
लिखित (75 अंकों में से)	43	32	29
मौखिक (25 अंकों में से)	15	12	18

मौखिक परीक्षा में अंकों की प्रतिशतताओं को भार मानते हुए लिखित परीक्षाओं के माध्य अंक ज्ञात कीजिये :

13.5.5 समान्तर माध्य के गुण तथा सीमाएँ

गुण:

1. इसे समझना सरल है तथा इसकी संगणना करना सुगम है। यह सबसे व्यापक रूप से प्रयोग किया जाने वाला संक्षिप्त माप है।

2. यह स्पष्ट रूप से परिभाषित होता है।

3. यह कुल समंक कुलक का एक अकेली प्रतिनिधि संख्या के रूप में कार्य करता है।

4. यह समंकों की समस्त मदों पर आधारित होता है। यह श्रेणी में अपनी स्थिति पर निर्भर नहीं करता।

5. इसका और अधिक गणितीय विवेचन किया जा सकता है।

6. यह और अधिक सांख्यिकीय विश्लेषण में उपयोगी होता है। इसका उपयोग अन्य सांख्यिकीय मापों, जैसे मानक विचलन (standard deviation), विचरण गुणांक (coefficient of variation), वैषम्य गुणांक (coefficient of skewness) आदि, की संगणना में किया जाता है।

7. इसे गुरुत्व के केन्द्र–संतुलन का एक बिन्दु भी माना जाता है।

8. विभिन्न प्रतिचयन विधियों के लिए, प्रतिदर्श माध्य समष्टि के माध्य का एक पक्षपातहीन अनुमान है।

सीमाएँ:

1. यह चरम मूल्यों से अत्यधिक प्रभावित होता है। समंकों में बहुत छोटे या बहुत बड़े मूल्य समान्तर माध्य के मूल्य को अत्यधिक प्रभावित करते हैं। अतः एक ऐसे बंटन के लिए, जिसमें छोटे या बड़े मूल्यों पर केन्द्रीकरण हो, समान्तर माध्य प्रतिनिधि संख्या बताने के लिये एक उपयुक्त माध्य नहीं होगा ।

2. खुले सिरे वाले बंटन के लिए, समान्तर माध्य की संगणना परिशुद्धता के साथ नहीं की जा सकती।

   उदाहरणार्थ, एक आय के बंटन के लिए, जिसका प्रारंभ "500 से कम'' वर्ग से तथा अन्त ''5000 से ऊपर'' के वर्ग से होता है, दोनों चरमों के मूल्यों के विषय में कल्पना किये बिना समांतर माध्य की संगणना नहीं की जा सकती। परिणामस्वरूप विभ्रम उत्पन्न हो सकता है।

3. समान्तर माध्य सुन्दरता, ईमानदारी, बुद्धि आदि जैसे साक्षात् विषयों (Phenomena) के अध्ययन के लिए उपयोगी नहीं है।

4. एक पर्याप्त प्रसामान्य (छतर की आकृति वाले) बंटन के लिए समान्तर माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक अच्छा माप है। किन्तु U आकृति वाले बंटन के लिए (जिसमें प्रारंभ में अधिक, मध्य में कम तथा पुनः अन्त में अधिक आवृत्ति होती है, पह स्थिति का एक ऐसा बिन्दु होने में मुश्किल से सफल हो पाता है जिसके चारों ओर अन्य अलग–अलग मूल्य केन्द्रित होते हैं।

5. समान्तर माध्य का अपना निजी अस्तित्व नहीं होता। उदाहरणार्थ इस कथन का कि भारतीय परिवार में बच्चों की औसत संख्या 4.8 है, यह अर्थ नहीं है कि एक भी परिवार में बच्चों की संख्या 4.8 है। न ही कभी कोई बतख दो निशानों की औसत से जिनमें से एक उससे एक गज आगे तथा दूसरा उससे एक गज पीछे लगा है, मारी गई है।

6 असजातीय (non-homogenous) समंकों के लिए, समान्तर माध्य भ्रामक परिणाम दे सकता है। उदाहरणार्थ, पिछले पांच वर्षों में दो व्यावसायिक इकाइयों अ और ब की बिक्री (लाख रुपयों में) निम्न प्रकार से हुई

अः	30	25	20	15	10 .
बः	10	15	20	25	30

यहाँ यह स्पष्ट है कि दोनों इकाइयों की औसत बिक्री बिल्कुल समान है। परन्तु इकाई 'ब' उन्नति कर रहीं है इकाई 'अ' में गिरावट आ रही है।

13.6 गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य

अभी तक हमने समांतर माध्य के बारे में पढ़ा जो एक प्रकार का गणितीय माध्य है। अब आप दो और प्रकार के माध्यों का अध्ययन करेंगे – गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य।

13.6.1 गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) का संगणना (परिकलन)

उन परिस्थितियों में, जहाँ हमें ऐसी राशियों से व्यवहार करना पड़े जो एक काल अवधि में परिवर्तनशील हों, हमारी अभिरुचि यह ज्ञात करने में हो सकती है, कि उस राशि की माध्य परिवर्तन–दर क्या है ? ऐसी परिस्थितियों में सरल समांतर माध्य उपयुक्त नहीं होता और हमें गुणोत्तर माध्य की सहायता लेनी पड़ती है।

संगणना (परिकलन)

अन्य माध्यों की भांति, गुणोत्तर माध्य की प्रक्रिया भी, अवर्गीकृत समकों और वर्गीकृत समंकों के लिए भिन्न होती है। आइये, इन विधियों का अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक

यदि समंक श्रेणी में केवल दो मद हों, तो उन दो मदों के गुणनफल का वर्गमूल ही, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। यदि तीन मद हों तो इन तीन मदों के गुणनफल का घनमूल, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। यदि श्रेणी में, n मद हों तो इन n मदों के गणनफल का n वाँ मूल्य, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। आइये, इसे प्रतीकों में, बताएँ:

गुणोत्तर माध्य = Geometric Mean = $\sqrt[n]{X_1, X_2 \ldots \ldots . . X_n}$

जहाँ X_1, X_2, X_n श्रेणी के n मदों को सूचित करते हैं। उदाहरण के लिए, मान लीजिए, तीन सख्याएँ हैं, 4; 8; और 16, तो इन तीन संख्याओं का गुणोत्तर माध्य होगा:

G.M. = $\sqrt[3]{4 \times 8 \times 16} = \sqrt[3]{518} = 8$

इस प्रकार गुणोत्तर माध्य एक ऐसा माध्य है जो मदों के गुणनफल पर आधारित है। जब मदों की संख्या तीन या तीन से अधिक हो, तो उनका गुणनफल ज्ञात करना और उसका मूल निकालना कठिन हो जाता है। इसलिए, लघुगणकों के प्रयोग से, परिकलन गणनाओं को सरल कर सकते हैं। प्रक्रिया निम्नानुसार है :

1. चर के विभिन्न मानों के लघुगणक (logartithm) ज्ञात कीजिए और उनका योगफल लीजिए

$$\sum \log X_1$$

2. इस योगफल को, मदों की संख्या, n द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई संख्याओं को गुणोत्तर माध्य प्रदान करता है। प्रतीकों में, इसे निम्नानुसार प्रकट करेंगे :

$$\text{Log G.M.} = \frac{\log X_1 + \log X_2 + \ldots \ldots \ldots . . \log X_n}{n} = \frac{\sum \log X}{n}$$

Therefore, G.M.= $Antilog\ \frac{\sum \log X}{n}$

उदाहरण के लिए, चार संख्याओं, 20, 65, 83 और 135 के गुणोत्तर माध्य को इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

G.M. = $Antilog \frac{\log 20 + \log 65 + \log 83 + \log 135}{4}$

$$= Antilog\frac{1.3010+1.8129+1.9191+2.1303}{4} = Antilog\ 1.7908$$

G.M. = 61.77

उदाहरण 8: पूर्व वर्ष की तुलना में, 2016 में ऊपरी खर्च में, 32% की वृद्धि हुई, 2017 में 40% की और 2018 में 50% की। इन तीन वर्षों में, ऊपरी खर्च की माध्य वृद्धि दर को परिकलित कीजिए।

हलः

ऊपरी खर्च में वृद्धि, 2016, 2017 और 2018) में क्रमशः 32%, 40% और 50% हुई। इससे अभिप्राय है कि क्रमागत रूप में, ऊपरी खर्च, पूर्व वर्ष का 132% , 140% और 150% हो जाता है। अतः तीन वर्षों के पश्चात्

अंतिम ऊपरी खर्च मूल स्तर का $\frac{132 \times 140 \times 150}{100 \times 100}$

प्रतिशत होगा। क्योंकि से संख्याएँ (ऊपरी खर्च) गुणात्मक प्रकृति की है, इसलिए, इनका माध्य गुणोत्तर माध्य ही होगी।

X_1 = 132, X_2= 140, X_3= 150 and n = 3

Now, G.M. Antilog $= \frac{\sum \log X}{n} = Antilog\frac{\log 132+\log 140+\log 150}{3}$

$$= Antilog\frac{2.12.06 + 2.1461 + 2.1761}{3}$$

$$= Antilog\frac{6.4428}{3}$$

$$= Antilog\ 2.1476$$

G.M = 140.5

इस प्रकार, औसतन ऊपरि खर्चे, पूर्व वर्ष का 140.5% हो जाते हैं। अतः उपरि खर्च में माध्य वृद्धि दर 40.5% (140.5–100) है।

वर्गीकृत समंक

अवर्गीकृत समकों के गुणोत्तर माध्य का परिकलन, कैसे करते हैं, यह आपने जान लिया है। अब हमें वर्गीकृत समकों के लिए, प्रक्रिया की विवेचना करनी चाहिए। जैसा कि आप जानते हैं, वर्गीकृत समंक एक असतत् श्रेणी या सतत् श्रेणी के रूप में हो सकते हैं। इन दो प्रकार की श्रेणियों के लिए, हमें भिन्न प्रक्रियाएँ अपनानी होगी।

असतत् श्रेणीः यदि समंक वर्गीकृत हों, अर्थात् एक आवृत्ति बंटन के रूप हों, तो गुणोत्तर माध्य का परिकलन निम्नानुसार करते हैं।

G.M. = $\sqrt[n]{X_1^{f_1} X_2^{f_2} \ldots \ldots . X_n^{f_n}}$

जहाँ $X_1, X_2 \ldots \ldots . . X_n$, चर x के भिन्न मान है और क्रमशः $f_1, f_2 \ldots \ldots . . f_n$ उनकी आवृतित्याँ है और $n = f_1, f_2 \ldots \ldots . . f_n = \sum f$

log G.M. = $\frac{1}{n}(f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + \ldots . . f_n \log X_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sum f \log x}{n}\right)$

अथवा

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\sum f \log x}{n}\right)$$

गुणोत्तर माध्य का परिकलन करने की विधिः

1) चर के विभिन्न मानों के लघुगणक ज्ञात कीजिए ($\sum$log x;); 2 अब इन logx को उनकी आवृत्ति से गुणा करके $\sum$flog x ज्ञात कीजिए; 3) आवृत्तियो का कुल योग (n अथवा $\sum$f) ज्ञात कीजिए; 4) सूत्र का प्रयोग कीजिए।

उदाहरण 9: निम्नलिखित आंबटनों के लिए गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

अंकः	5	15	25	35	45
छात्रों की संख्याः	5	7	15	25	8

हलः **गुणोत्तर माध्य की गणना**

अंक (x)	छात्रों की संख्या (f)	log x	f logx
5	5	0.6990	3.4950
15	7	1.1761	8.2327
25	15	1.3979	20.9685
35	25	1.5441	38.6025
45	8	1.6532	13.2256
	n = 60		**$\sum$f logx = 84.5243**

$$\text{G.M.} = \text{Anti log}\left(\frac{\sum f \log x}{n}\right)$$

$$= \text{Anti log}\left(\frac{84.5243}{60}\right) = \text{Anti log } 1.4087$$

G.M. =25.63 अंक

सतत् श्रेणी : गुणोत्तर माध्य के उपरोक्त सूत्र में केवल इतना संशोधन करना होगा कि x के स्थान पर m लेंगे, जहाँ m, वर्ग के मध्य बिंदु (मान) को सूचित करता है।

यहाँ $\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\sum f \log m}{n}\right)$

दोनों ही स्थितियों में जिस प्रक्रिया का अनुसरण करते हैं, वह निम्नानुसार है :

1. चर x के दिए गए मानों या, सतत् श्रेणी की स्थिति में, मध्य मानों (m) के लघुगणक मान ज्ञात कीजिए।

2. इन लघुगणक मानों को संगत आवृत्तियों द्वारा गुणा कीजिए, और इन गुणनफलों का योगफल $\sum f \log x$ या $\sum f \log m$ यथास्थिति, प्राप्त कीजिए।

3. इस योगफल को, कुल आवृत्ति n = $\sum$f से भाजित कीजिए और इस प्रकार प्राप्त संख्या का प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजियें।

उदाहरण 10: निम्न आंकड़ों के लिए, गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

मदों का मान	आवृत्ति
7.5-10.5	5
10.5-13.5	9
13.5 - 16.5	19
16.5 - 19.5	23
19.5 - 22.5	7
22.5 - 25.5	4
25.5 - 28.5	1

हलः **गुणोत्तर माध्य का परिकलन**

वर्ग अंतराल	मध्य बिंदु (m)	Log.m	f	flog.m
7.5—10.5	9	0.9542	5	4.7710
10.5—13.5	12	1.0797	9	9.71 28
13.5—16.5	I5	1.1761	19	22.3459
16.5—19.5	18	1.2553	23	28.8719
19.5—22.5	21	1.3222	7	9.2554
22.5—25.5	24	1.3802	4	5.5208
25.5—28.5	27	1.4314	1	1.4314
			n=68	$\sum f \log.m = 81.9092$

G.M. $= \text{Antilog}\left(\frac{\sum f \log m}{n}\right)$

$= \text{Antilog}\left(\frac{81.9092}{68}\right) = \text{Antilog } 1.2045$

G.M. =16.02

औसत परिवर्तन दर के परिकलन के लिए गुणोत्तर माध्य का प्रयोग

अनेक बार हमारी अभिरुचि, किसी चर x के मान में, समयगत परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए, उसकी औसत परिवर्तन दर प्रतिकाल इकाई ज्ञात करने में होती है। जैसे, जनसंख्या में वार्षिक वृद्धि दर, (किसी फर्म के) लाभ में औसत वार्षिक वृद्धि दर, इत्यादि। ऐसी दरों के परिकलन की प्रक्रिया माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया के सदृश ही है।

एक दी गई श्रेणी के लिए, मान लीजिए, P_0चर का प्रारम्भिक मान (काल अवधि के आरम्भ का मान) और P_n चर का अंतिम मान (काल अवधि के अंत का मान) है। अब औसत वृद्धि दर (r) का परिकलन, जिस चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के प्रयोग से करते हैं।

$P_n = P_0 \, (1 + r)^n$,

जहां n काल अवधियों की संख्या है।

$\therefore (1+r)^n = \frac{P_n}{P_0}$

$$(1+r) = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}}$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$$

उदाहरण 11: एक देश की आबादी वर्ष 2000 में 30 करोड़ थी। वर्ष 2018 में यह 52 करोड़ को गई। प्रतिशत वार्षिक वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

हलः

यहाँ $P_0 = 30$: P_n is 52 और n = 18. माल लीजिए 'r' औसत वार्षिक दर है।

अब, $1 + r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}}$

$= \sqrt[18]{\frac{52}{30}}$

लघुगणकों के प्रयोग से

$$\log(1+r) = \frac{\log 52 - log\ 30}{18}$$

$$1 + r = Antilog\left(\frac{2.7160 - 2.477}{18}\right)$$

$$= Antilog\left(\frac{0.2389}{18}\right) = Antilog\ 0.0133 = 1.031$$

$$r = 1.031 - 1 = 0.031$$

अतः प्रतिशत औसत वार्षिक वृद्धि दर $= 100 \times 0.031 = 3.1\%$

भारित गुणोत्तर माध्य

भारित समांतर माध्य के सृदश हम भारित गुणोत्तर माध्य भी ज्ञात कर सकते है। परिकलन प्रक्रिया निम्नानुसार हैः

भारित गुणोत्तर माध्य $= \sqrt[\Sigma w]{X_{1.}^{w1}, X_2^{w2} \ldots\ldots. X_n^{wn}}$

जहाँ $X_1, X_2 \ldots\ldots.. X_n$ चर के मान है और $W_1, W_2 \ldots\ldots.. W_n$ संगत भार है।

लघुगणक लेने पर

$$\log \text{WGM} = \frac{W_1 \log X_1, + W_2 \log X_2 + \ldots.. W_n \log X_n}{\Sigma W}$$

या, $\log \text{WGM} = \frac{\Sigma W \log X}{\Sigma W}$

या, $\quad \text{WGM} = \text{Antilog}\left[\frac{\sum W \log X}{\sum W}\right]$

संगणना (परिकलन) के चरण:

1. $\sum X$ का लघुगणक ज्ञात कीजिए
2. उपरोक्त लघुगणक को उनके भारों के साथ गुणा कीजिये ($W\sum x$) और कुल योग ($\sum W log x$), ज्ञात कीजिये।
3. कुल भार ज्ञात कीजिये ($\sum$W)।
4. सूत्र का प्रयोग कीजिये।

उदाहरण 12: निम्न सूचना से भारित गुणोत्तर माध्य का परिकलन कीजिए।

वर्ग	सूचकांक	भार
भोजन	300	40
ईधन	200	10
कपड़ा	250	10
मकान किराया	150	15

हल:

वर्ग	सूचकांक	भार	Logx	W.Log x
भोजन	300	40	2.4771	99.084
ईधन	200	10	2.3010	23.01
कपड़ा	250	10	2.3979	23.979
मकान किराया	150	15	2.1761	32.6415
		$\sum$W=75		**$\sum$Wlogx = 178.7145**

भारित गुणोत्तर माध्य (WGM) $= \text{Antilog}\left[\frac{\sum W \log X}{\sum W}\right]$

$= \text{Antilog}\left[\frac{178.7145}{75}\right]$

$= \text{Antilog } 2.3829 = 241.50$

अतः दिए हुए सूचकांको का भारित गुणोत्तर माध्य =241.50

13.6.1.1 गुणोत्तर माध्य के विशेष गुण

गुणोत्तर माध्य निम्न महत्वपूर्ण विशेष गुण (properties) हैं :

1. एक दी गई श्रेणी में, यदि प्रत्येक मद के स्थान पर, श्रेणी का गुणोत्तर माध्य प्रतिस्थापित किया जाए तो मदों का गुणनफल अपरिवर्तित रहता है। उदाहरण के लिए, मदों 4, 8, और 16 का गुणोत्तर माध्य 8 है

$$4 \times 8 \times 16 = 8 \times 8 \times 8 = 512$$

2. गुणोत्तर माध्य का मान स्वयं से, प्रेक्षणों के अनुपाती विचलनों को संतुलन प्रदान करता है। दूसरे शब्दों में यदि a और b दो धन संख्याएँ हों तो उनका गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$, अब इससे, मदों के अनुपाती विचलनों a/G और G/b. पर विचार कीजिए। स्पष्ट है कि :

$$\left(\frac{a}{G}\right) \cdot \left(\frac{b}{G}\right) = \frac{ab}{G^2} = 1$$

अर्थात् a/G और G/b संतुलित हैं, प्रत्येक, दूसरे के, व्युत्क्रम के समान है। उदाहरण के लिए, 4 और 16 का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{4 \times 16} = 8$ है। अनुपात 4/8 और 16/8 का गुणनफल है या 4/8 और 16/8 बराबर है।

3. इसका बीजगणितीय प्रतिपादन किया जा सकता है। यदि दो या दो से अधिक समूहों के गुणोत्तर माध्य दिए गए हो, तो संयुक्त समूह का गुणोत्तर माध्य निम्नानुसार ज्ञात कर सकते हैं :

$$\text{संयुक्त G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{N_1 \log GM_1 + N_2 \log GM_2 + \ldots\ldots N_n \log GM_n}{N_1 + N_2 + \ldots\ldots N_n}\right]$$

जहां

GM_1 = पहले समूह का गुणोत्तर माध्य

GM_2= दूसरे समूह का गुणोत्तर माध्य

GM_n= n वें समूह का गुणोत्तर माध्य

उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक समूह में 100 मदें हैं और उनका गुणोत्तर माध्य 50 है। और दूसरे समूह में 200 मदें हैं और उनका गुणोत्तर माध्य 40 है। तो दोनों समूहों का संयुक्त गुणोत्तर माध्य होगा:

$$\text{संयुक्त G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{100 \log 50 + 200 \log 40}{100 + 200}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{100 \times 1.6990 + 200 \times 1.6021}{300}\right]$$

$$= \text{Antilog } 1.6344 = 43.09$$

4. समांतर माध्य की अपेक्षा, गुणोत्तर माध्य, बड़े मदों से कम प्रभावित होता है। कई बार, इसे शब्दों में इस प्रकार प्रकट करते हैं कि गुणोत्तर माध्य का छोटे मदों की ओर झुकाव होता है, जब कि समांतर माध्य का बड़े मदों की ओर झुकाव होता है। उदाहरण के लिए, पाँच मदों 2,3,5, 10 और 100 पर विचार कीजिए।

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{2+3+5+10+100}{5} = 24$$

$$\text{गुणोत्तर माध्य} = \text{Antilog}\left[\frac{\log 2+\log 3+\log 5+\log 10+\log 100}{5}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{0.3010+0.4771+0.6990+1.0000+2.0000}{5}\right]$$

$$= \text{Antilog } 0.8954$$

= 7.86 लगभग।

ध्यान दीजिए कि समातरं माध्य 24 है, जो कि गुणोत्तर माध्य 7.86 से, पर्याप्त रूप में बड़ा है। अतः गुणोत्तर माध्य की अभिनति, छोटे मदों की ओर खींचे जाने की है, जब कि समांतर माध्य की अभिनति बड़े मदों की ओर खींचे जाने की है।

13.6.1.2 उपयोग तथा सीमाएँ

उपयोग

1 अनुपातों और प्रतिशतताओं के परिकलन के लिए, गुणोत्तर माध्य सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है।

2 क्योंकि गुणोत्तर माध्य का छोटे मानों की ओर झुकाव होता है, इसलिए यह विशेषकर ऐसी घटनाओं के लिए उपयोगी है, जहाँ निम्नतर मानों के लिए एक सीमा हो, परंतु उच्चतर मानों के लिए ऐसी कोई सीमा न हो। उदाहरण के लिए, मूल्य, शून्य से कम नहीं हो सकता।

3 सूचकांकों की संरचना में, गुणोत्तर माध्य को ही सर्वोत्तम माध्य माना जाता है। यह विशेष कर, फिशर के आदर्श सूत्र के विकास में प्रयुक्त होता है जो काल–विपर्यय परीक्षा (time reversal test) और तत्व विपर्यय परीक्षा (factor reversal test) दोनों को संतुष्ट करता है। इन संकल्पनाओं का अध्ययन, इस पाठ्यक्रम के विषय क्षेत्र से बाहर है।

4 जब छोटे मदों को बड़े भार और बड़े मदों को छोटे भार, निर्दिष्ट करना अभीष्ट हो तो समांतर माध्य की अपेक्षा, यह अधिक उपयुक्त माध्य है।

सीमाएँ

1 यदि श्रेणी का एक मद भी शून्य हो तो गुणोत्तर माध्य शून्य होता है। अतः उस स्थिति में, इसका परिकलन नहीं कर सकते। उदाहरण के लिए, तीन मदों 0, 10 और 100 का गुणोत्तर माध्य होगा

$$\sqrt[3]{0 \times 10 \times 100}$$

2 यदि कोई मद ऋणात्मक हो तो गुणोत्तर माध्य का अस्तित्व नहीं होता।

3 परिकलन प्रक्रिया कठिन है, विशेष कर जब मद बहुत बड़े हों।

4 इसका छोटे मानों के लिए झुकाव, ऐसी परिस्थितियों में इसके प्रयोग में बाधा है, जहाँ असमानताओं को मुख्य रूप से दिखाना अभीष्ट हो जैसा कि आय बंटन की स्थिति में।

बोध प्रश्न ग

1) NSC VI में लगाया गया धन, 6 वर्ष में दोगुना हो जाता है। प्रतिशत वार्षिक वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

2) एक परीक्षा में, 70 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक (अधिकतम अंक 75 में से) नीचे दिए गए हैं। गुणोत्तर माध्य परिकलित कीजिए। और समांतर माध्य से इसकी तुलना कीजिए।

अंक:	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
विद्यार्थियों की संख्या	12	15	25	10	6	2

3) एक द्रव्य के मूल्य में, 1978 – 1979 में 5% वृद्धि हुई, 1979–80 में, 8% वृद्धि हुई और 1980–81 में 77% वृद्धि हुई। 1978 से 1981 तक औसत वार्षिक वृद्धि 26% हुई बताते हैं, न कि 30% । इस कथन की जाँच कीजिए।

4) कल्पना की गई है कि एक मशीन के मान में पहले वर्ष 40% की कमी हुई, दूसरे में 25% की और आगामी तीन वर्षों में 10% वार्षिक की कमी हुई। प्रत्येक प्रतिशतता, ह्रासित मान पर परिकलित की गई है। इन पांच वर्षों के लिए औसत वार्षिक ह्मस दर क्या है?

13.6.2 हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) का परिकलन

जैसा कि आप जानते हैं समंक प्रायः विभिन्न रूपों में होते हैं। दिए गए समंकों के लिए, केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के प्रयोग की उपयुक्तता का निर्णय, बहुत अधिक इस बात पर निर्भर हैं कि समंक किस प्रकार से दिए गए हैं। उदाहरण के लिए, यदि कल समय नियत हो और गति प्रति समय इकाई दी गई हो, तो औसत गति ज्ञात करने के लिए, हरात्मक माध्य, एक अधिक उपयुक्त माप है। मान लीजिए, समंक प्रति घंटे उत्पादित वस्तुओं के रूप में दिए हैं और हमारी अभिरुचि, औसत समय प्रति इकाई ज्ञात करने में है, तो हरात्मक माध्य ही उचित होगा।

परिकलन

हरात्मक माध्य परिकलन की विधियाँ, अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंकों के लिए भिन्न हैं। आइये, इन विधियों का पृथक्–पृथक् अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक यदि $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$, चर X के n मान हों तो उनके हरात्मक माध्य (HM) का परिकलन निम्नानुसार करते हैं:

$$\text{हरात्मक माध्य} = \frac{n}{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\ldots+\frac{1}{X_n}} = \frac{n}{\Sigma\frac{1}{X}}$$

$$\text{हरात्मक माध्य} = \frac{n}{\Sigma\frac{1}{X}} \text{ or H.M.}$$

उसे पुनः लिखते हुए

$$\text{हरात्मक माध्य } \frac{n}{\Sigma\frac{1}{X}} \text{ अथवा हरात्मक माध्य} = \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{\Sigma\frac{1}{X}}{n}\right]$$

व्युत्क्रम (n मानों $(X_1, X_2 .. X_n)$.के व्युत्क्रमों का समांतर माध्य)

अतः **हरात्मक माध्य, व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है।**

व्यक्तिगत श्रेणी में पहले हमें अवलोकनों के मान का व्युतक्रम ज्ञात करना चाहिए फिर उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करना चाहिए। मान का व्युतक्रम ज्ञात करने के लिए इस इकाई के अंत में दिए गए व्यतुक्रम सारणी को देखें।

उदाहरण के लिए, दो मानों 12 और 15 के हरात्मक माध्य को निम्नानुसार परिकलित करेंगे :

$$\text{H.M.} = \frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{15}} = \frac{2}{\frac{5+4}{60}} = \frac{120}{9} = 13.34$$

उदाहरण 13: एक मोटरगाड़ी वाले ने तीन दिन, 480 किमी प्रतिदिन, यात्रा की। उसने, पहले दिन 48 किमी प्रतिघंटे की गति से 10 घंटे यात्रा की, दूसरे दिन, 40 किमी प्रतिघंटे की गति से 12 घंटे यात्रा की, और तीसरे दिन 32 कि.मी. प्रतिघंटे की गति से 15 घंटे यात्रा की। उसकी औसत गति प्रतिघंटा ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ प्रतिदिन तय की गई दूरी एक समान है, परंतु समय तथा गति परिवर्ती हैं। हमें, औसत चाल ज्ञात करना अभीष्ट है। इसलिए हरात्मक माध्य ही उपयुक्त माध्य है।

$$\text{H.M.} = \frac{3}{\frac{1}{48}+\frac{1}{40}+\frac{1}{32}} = \frac{3}{\frac{37}{480}} = \frac{3\times480}{37} = 39 \text{ किमी प्रति घंटे (लगभग)}$$

यहां, हरात्मक माध्य कैसे उपयुक्त हैं ? इसकी जाँच, सरलता से इस प्रकार कर सकते हैं। तीन दिन में तय की गई कुल दूरी $= 480 + 480 + 480 = 3 \times 480$ कि.मी. दूरी तय करने में व्यय किया गया समय $= 10 + 12 + 15 = 37$ घंटे औसत गति प्रतिघंटा $= \frac{3\times480}{37} = 39$ कि.मी. प्रति घंटे (लगभग)

अब आप देख सकते हैं कि इस तार्किक विधि द्वारा प्राप्त परिणाम, हरात्मक माध्य के बराबर हैं। अतः गतियों का औसत निकालते समय यदि कुल दूरी एक समान हो और समय परिवर्ती हो तो हरात्मक माध्य ही एक उपयुक्त माध्य है।

वर्गीकृत समक

जैसा कि आप को ज्ञात है, वर्गीकृत समंक दो प्रकार के होते हैं: (1) असतत श्रेणी और (2) सतत श्रेणी। आइये, इन दो प्रकार के समंक कुलकों के लिए, हरात्मक माध्य परिकलित करने की विधियों का अध्ययन करें।

असतत श्रेणी: एक असतत श्रेणी के लिए, हरात्मक माध्य निम्नानुसार परिकलित करते हैं,

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\sum f(\text{x का व्युत्क्रम})}$$

$$= \frac{n}{\Sigma f \frac{1}{X}}$$

$$= \text{व्युत्क्रम } \frac{\Sigma f \frac{1}{X}}{n}$$

जहाँ प्रतीकों के, उनके सामान्य अर्थ हैं। आप जिस प्रक्रिया का अनुसरण करेंगे, वह इस प्रकार है:

1 चर x के विभिन्न मानों के व्युत्क्रम कीजिए।

2 व्युत्क्रमों को उनकी संगत आवृत्तियों से गुणा कीजिए और कुल गुणनफल, अर्थात् $\Sigma f \frac{1}{X}$ ज्ञात कीजिए।

3 कुल आवृत्ति n को $\Sigma f \frac{1}{X}$ से भाजित कीजिए।

उदाहरण 14: एक व्यक्ति ने 10 कि.ग्रा. वस्तु A, 2 कि.ग्रा. प्रति रुपये की दर से कि.ग्रा. B, वस्तु 5 कि.ग्रा. प्रति रुपये` की दर और 30 कि.ग्रा. C, 10 कि.ग्रा. प्रति रुपये की दर से खरीदा। औसत दर किलोग्रामों में ज्ञात कीजिए।

हलः हमें, औसत दर ज्ञात करना अभीष्ट है। अतः आइये, जिन मदों का औसत निकालना है उन्हें x द्वारा सूचित करें । खरीदी गई राशियाँ आवृत्तियों के सदृश हैं। अतः इन्हें f द्वारा सूचित करें। अब हरात्मक माध्य को निम्नानुसार परिकलित करेंगे।

वस्तु	मूल्य (कि.ग्रा. प्रति रुपये) (x)	खरीदी गई मात्रा	$\frac{1}{X}$	$f\,\frac{1}{X}$
A	2	10	0.5	5.0
B	5	20	0.2	4.0
C	10	30	0.1	3.0
कुल		$N = \Sigma f = 60$		$\Sigma f\,\frac{1}{X} = 12.0$

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma f \frac{1}{X}} = \frac{60}{12.0} = 5.0$$

अतः औसत मूल्य 5 कि.ग्रा. प्रति रु. है।

टिप्पणीः सम्भव है आप पूछे कि इस उदाहरण में, हमने हरात्मक माध्य का परिकलन क्यों किया ? औसत मूल्य ज्ञात करने के लिए, आपको व्यय किया गया कुल धन तथा क्रय की गई कुल मात्रा (कि.ग्रा. में) की आवश्यकता है।

स्तम्भ 1/x में, 1 कि.ग्रा. वस्तु का मूल्य, रुपयों में दिया गया है, और स्तम्भ में, खरीदी गई मात्रा कि.ग्रा. में दी गई है। अतः स्तम्भ $f\,\frac{1}{X}$. में, मात्रा खिरीदने के लिए, व्यय किया गया धन दिया गया है। अब Σf या n, कुल मात्रा (किग्रा में) को प्रकट करता है, जिस पर कुल धन $\Sigma f\,\frac{1}{X}$ व्यय किया गया। अतः अभीष्ट माध्य है, $\frac{n}{\Sigma f \frac{1}{X}}$ जो हरात्मक माध्य के, अभिन्न है।

इस उदाहरण में भी ध्यान दीजिए कि, मात्रा इकाइयों में व्यक्त मूल्यों का औसत करते समय, उपयुक्त माध्य, हरात्मक माध्य ही है।

सामान्य रूप में, हम कह सकते हैं कि जिन मदों का औसत निकालना हो, उनका संयुक्त प्रभाव ज्ञात करने लिए यदि उनके व्युत्क्रमों का प्रयोग होता है, तो हरात्मक माध्य ज्ञात करना ही औसत ज्ञात करने की यथार्थ विधि है।

संतत श्रेणीः सतत श्रेणी के लिए हरात्मक माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया ठीक वही है जो असतत श्रेणी के लिए बताई गई है। एक मात्र अंतर यह है कि सतत श्रेणी की स्थिति में, हम x के स्थान पर विभिन्न वर्गों के मध्यमान (m) का व्युत्क्रम लेते हैं। फिर उन्हें, उनकी संगत वर्ग आवृत्तियों से गुणा करते हैं, और कुल गुणनफल अर्थात $\Sigma f\,\frac{1}{m}$ ज्ञात करते हैं। फिर कुल आवृतित $\frac{n}{\Sigma f.m}$ को, कुल गुणनफल से भाजित करते है।

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma f.m}$$

$$= \text{व्युत्क्रम}\left(\frac{\Sigma f \frac{1}{m}}{n}\right)$$

उदाहरण 15: निम्न सूचना के लिए, हरात्मक माध्य परिकलित कीजिए।

वर्ग अंतराल	f
0-10	5
10-20	8
20-30	10
30-40	12
40-50	7
50-60	6
60-70	3

हलः

वर्ग अंतराल	f	मध्यमान (m)	1/m	$f.\frac{1}{m}$
0-10	5	05	0.2	1.0
10-20	8	15	0.067	0.536
20-30	10	25	0.04	0.40
30-40	12	35	0.029	0.348
40-50	7	45	0.022	0.154
50-60	6	55	0.018	0.108
60-70	3	65	0.15	0.045
	51			$\Sigma f.\frac{1}{m} = 2.591$

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma f.\frac{1}{m}} = \frac{51}{2.591} = 19.68$$

भारित हरात्मक माध्य

ऐसी परिस्थितियाँ भी होती हैं, जहाँ हमें, सरल हरात्मक माध्य की बजाय भारित हरात्मक माध्य के परिकलन की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, कल्पना कीजिए कि एक व्यक्ति पहला 10 किमी., 4 किमी. प्रति की चाल से, आगामी 5 किमी. 3 किमी. प्रति घंटे की चाल से और तब 4 कि.मी. 2 कि.मी. प्रति घंटे की चाल से चलता है। उसकी औसत चाल ज्ञात करना अभीष्ट है। तीनों चरणों में, पृथक्–पृथक् जो किमी. दूरी वह चलता है, उसे भार मानेंगे। अब निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे।

भारित H.M. $= \frac{\Sigma w}{\Sigma \frac{w}{X}}$

जहां w भार को सूचित करता है।

भारित H.M. = व्युत्क्रम $\left(\frac{\Sigma \frac{w}{X}}{\Sigma w}\right)$

उपरोक्त उदाहरण में

x :	4	3	2
w:	10	5	4

भारित H.M. = $\frac{10+5+4}{\frac{10}{4}+\frac{5}{3}+\frac{4}{2}} = \frac{19}{2.5+1.67+2} = \frac{19}{6.17} = 3.08$ कि.मी. प्रतिघंटा

इस उदाहरण में, भारित हरात्मक माध्य ही उपयुक्त विधि है। साधारण अंक गणितीय विधि से, औसत चाल ज्ञात करके हम इस कथन का सत्यापन कर सकते हैं।

चरण	दूरी (कि.मी.)	चाल (किमी. प्रति घंटा)	समय जो लगा(घंटे)		
पहला	10	4	10/4	=	2.50
दूसरा	5	3	5/3	=	1.67
तीसरा	4	2	4/2	=	2.00
कुल	**19**				**6.17**

औसत चाल = 19/6.17 = 3.08 किमी प्रतिघंटा दोनों परिणाम यथार्थतः समान हैं । अतः जब ऐसे मदों हरात्मक माध्य ज्ञात करना हो, जिनका सापेक्ष महत्व भी भिन्न हो, तो हमें भारित हरात्मक माध्य परिकलि करना चाहिए।

उदाहरण 16: श्री राकेश 6 कि.मी. की दूरी पर स्थित एक गांव की, यात्रा पर निकले। उन्होंने अपनी कार में 40 कि.मी. प्रति घंटे की गति से यात्रा की। 4 कि.मी. चलने के पश्चात कार ने चलना बंद कर दिया। तब उन्होंने एक रिक्शा 10 किमी प्रति घंटे की गति से यात्रा की। 1.5 कि.मी. की यात्रा करने के पश्चात उसने रिक्शा छोड़ दी और शेष दूरी, पैदल 4 कि.मी. प्रति घंटा की गति से तय की। उसकी औसत गति प्रति घंटा ज्ञात कीजिए और परिणाम की जाँच कीजिए।

हलः यहाँ गति (x) के मान हैं : $X_1 = 40$, $X_2 = 10$; $X_3 = 4$ तय की गई दूरियाँ हैं, क्रमशः $w_1 = 4, w_2 = 1.5$ और $w_3 = 0$

$$\therefore \text{ भारित H.M. } = \frac{\Sigma w}{\frac{\Sigma w}{X}} = \frac{4+1.5+0.5}{\frac{1}{40}\times 4+\frac{1}{10}\times 1.5+\frac{1}{4}\times 0.5} = \frac{6}{0.1+0.15+0.125} = \frac{6}{0.375} = 16$$

इसलिए, राकेश की औसत गति 16 कि.मी. प्रति घंटा है। आइये, इसकी जाँच, यात्रा में लगे कुल समय को परिकलित करके करें।

यात्रा के साधन	दूरी (कि.मी.)	गति (किमी प्रति घं.),	समय जो लगा (मिनट)
कार	4	40	6
रिक्शा	1.5	10	9
पैदल	0.5	4	7.5
कुल	**6**		**22.5**

उसने कुल 6 कि.मी. की दूरी 22.5 मिन्टों में तय की। अतः 60 मिन्ट में वह दूरी तय करेगा 16 कि.मी. (अर्थात् . 6 x 60/ 22.5)।

13.6.2.1 हरात्मक माध्य के विशेष गुण

1. यदि चर के प्रत्येक मान के लिए, (श्रेणी का) हरात्मक माध्य प्रतिस्थापित किया जाए तो चर के मानों के व्युत्क्रमों का योगफल अपरिवर्तित रहता है।

2. हरात्मक माध्य, व्यक्तिगत प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है।

3. समांतर माध्य और गुणोत्तर माध्य के सदृश, यह भी बीजगणितीय, प्रतिपादन के योग्य है।

4. तीनों माध्यों, अर्थात् समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य में, हरात्मक माध्य न्यूनतम होता है। अर्थात $AM \geq GM \geq HM$.

इस तथ्य को निदर्शित करने के लिए, आइये पांच मदों 2, 3, 5, 10, और 100 का हरात्मक माध्य ज्ञात करें और इसकी तुलना, गुणोत्तर माध्य और समांतर माध्य से करें।

$$\text{H.M.} = \frac{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}} = \frac{5}{0.50+0.33+0.20+0.10+0.01} = \frac{5}{1.14} = 4.39$$

समातर माध्य, 24 है और गुणोत्तर माध्य, 7.86 है। इससे स्पष्ट होता है कि AM > GM > HM। इस गुणधर्म को दूसरे शब्दों में, इस प्रकार भी प्रकट कर सकते हैं कि हरात्मक माध्य का छोटे मानों की ओर झुकाव होता है।

टिप्पणी : जब दिए गए सभी मदों के मान यथार्थतः समान हो, तो केवल तभी AM = GM = HM.ऐसी स्थिति में, माध्यिका और बहुलक भी, इस सार्वमान के बराबर होंगे।

13.6.2.2 उपयोग तथा सीमाएँ

उपयोग

1) ऐसी दरों और अनुपातों के लिए, जो गति, समय और दूरी से सम्बद्ध हों, हरात्मक माध्य का प्रयोग, औसत चाल ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

2) ऐसी दरों और अनुपातों के लिए, जो मूल्य और मात्रा से सम्बद्ध हो, यदि व्यय किया गया कुल धन नियत हो और इकाइयाँ प्रति रुपया ही हों, तो हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। समान्यतः यदि मदों का संयुक्त प्रभाव ज्ञात करने के लिए, उनके व्युत्क्रमों का प्रयोग किया जाता है, तो उनका औसत ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं।

3) यदि दिए गए समंक कुलक में, कुछ बड़े मान हों, तो व्युत्क्रमों का प्रयोग करने से, बड़े मानों का प्रभाव कम हो जाता है। ऐसी स्थितियों में, हरात्मक माध्य का प्रयोग करना चाहिए।

4) जब चर के छोटे मानों को अधिक महत्व और बड़े मानों को कम महत्व देना अभीष्ट हो तो हरात्मक माध्य के प्रयोग की सिफारिश की जाती है।

सीमाएँ

1) इसका परिकलन करना कठिन है और इसको समझना भी कठिन है।

2) यदि एक या एक से अधिक मद शून्य हों तो इसका परिकलन नहीं किया जा सकता। वास्तव में, ऐसी स्थिति में, HM का मान शून्य होगा, चाहे अन्य मदों के मान कुछ भी हों।

उदाहरण के लिए, 0, 10 और 100 का हरात्मक होगाः

$$\frac{3}{\frac{1}{0}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}} = \frac{3}{\infty+0.10+0.01} = \frac{3}{\infty} = 0$$

3) न्यूनतम मद को, अधिकतम महत्व देना सदैव एक वांछनीय लक्षण नहीं है, और आर्थिक आंकड़ों के विश्लेषण में, इसके प्रयोग का सीमित अवसर है।

हरात्मक माध्य तथा समांतर माध्य की तुलना

ऐसी दरों और अनुपातों का, जो गति, समय और दूरी, या दर, राशि, और व्यय किए गए कुल धन इत्यादि से सम्बद्ध हों, माध्य ज्ञात करने के लिए, समांतर माध्य और हरात्मक माध्य में से चयन करना, इतना सरल नहीं होता। कुछ परिस्थितियों में, यथार्थ परिणाम प्राप्त करने के लिए हरात्मक माध्य, अधिक उपयुक्त प्रतीत होता है, जबकि अन्य परिस्थितियों में, समांतर माध्य ही अधिक उपयुक्त पाया जाता है। यह चयन, प्रायः समंकों की प्रकृति पर निर्भर होता है। इस तथ्य पर आधारित, उचित चयन के लिए सामान्य संदर्शक नियम दिये जा सकते हैं।

1) ऐसी दरों और अनुपातों के लिए, जो गति, समय और दूरी से सम्बद्ध हों, यदि कुल दूरी दी गई हो, तो हरात्मक माध्य ही वरीय होता है। परंतु, यदि कुल समय दिया हो, तो समांतर माध्य अधिक उपयुक्त होता है। सामान्यतः यदि दिए गए अनुपात, रूप : x इकाइयाँ, प्रति y हों, तो हरात्मक माध्य प्रयोग करें, जब के मान दिए हों और समांतर माध्य प्रयोग करें जब y के मान दिए हों। आइये, एक उदाहरण द्वारा इसे और अच्छी तरह समझे।

उदाहरण 17: एक व्यक्ति, 100 कि.मी. की दूरी, कार से, 30 कि.मी. प्रति घंटा की औसत गति से तय करता है, फिर वह वापसी यात्रा 20 कि.मी. प्रति घंटा की औसत गति से तय करता है। कुल यात्रा में, औसत गति प्रति घंटा ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ गति कि–मी. प्रति घंटे में दी गई है और तय की गई कुल दूरी चर है, (अर्थात् 100 कि.मी. प्रत्येक ओर) अतः भारित हरात्मक माध्य, समान भारों, प्रत्येक 100 के सत्य या सरल हरात्मक माध्य ही, एक उपयुक्त माध्य होगा।

$$\text{H.M.} = \frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} = \frac{2}{\frac{3+2}{60}} = \frac{2\times 60}{5} = 24$$ कि.मी. प्रति घंटा

आइये, अब उपरोक्त सूचना में थोड़ा संशोधन करें। अब मान लीजिए कि दोनों ओर की कुल यात्रा के लिए, वह आधा समय 30 कि.मी. प्रति घंटा की गति से जाता है और शेष आधा समय, 20 कि.मी. प्रति घंटा की गति से जाता है। क्योंकि यात्रा के समय दिए गए हैं, अतः समांतर माध्य का प्रयोग करना उचित होगा। और क्योंकि दी गई काल अवधियाँ समान हैं, इसलिए सरल समांतर माध्य ही उपयुक्त होगा।

समांतर माध्य $= = \frac{30+20}{2} = 25$ किमी प्रति घंटा

आप अब जाँच कर सकते हैं कि समांतर माध्य ही यथार्थ माध्य है या नहीं। वह (कुल मात्रा) 200 कि.मी. की दूरी, समातर माध्य गति 25 कि.मी. प्रति घंटा की गति से 8 घंटे में तय कर सकता है। यदि वह, आधे समय (अर्थात् 4 घंटे), 30 किलोमीटर प्रति घंटा की गति से चले और शेष आधे समय, 20 किमी प्रति घंटा की गति से तो वह ठीक 200 कि.मी. प्रति घंटा ही चलेगा। अतः इस स्थिति में, यथार्थ औसत गति, समांतर माध्य ही होगी।

2 इनमें एक अन्य भेद यह है कि जहाँ समांतर माध्य, चरम मानों से प्रभावित होता है, वहाँ हरात्मक माध्य का झुकाव छोटे मानों के प्रति अधिक होता है। इसलिए, एक असम बंटन के लिए, समांतर माध्य का प्रयोग नहीं कर सकते, तथा आर्थिक समंकों के विश्लेषण के लिए, हरात्मक माध्य का प्रयोग नहीं कर सकते ।

बोध प्रश्न घ

1) हरात्मक माध्य किसे कहते हैं ?

2) विदयार्थियों के एक समूह के मासिक व्यय के आंकड़े नीचे दिए गए हैं। हरात्मक भाध्य परिकलित

कीजिएः 125, 75, 10, 130, 45, 500, 150, 80, 65, 100

3) निम्न समंकों के लिए, हरात्मक माध्य परिकलित कीजिएः

मदों के आमाप	:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	:	5	10	7	3	2

4) एक निवेशक, प्रतिमास एक कम्पनी के रु. 1200 मूल्य के शेयर खरीदता है। पहले पाँच महीनों में उसने ये शेयर, 10 रु., 12 रु., 15 रू., 20 और 24 रु. प्रति शेयर की दरों से खरीदे औसत दर प्रति शेयर ज्ञात कीजिए।

5) एक व्यक्ति ने, अपने मूल निवास स्थान पहुँचने के लिए, पहले 1200 कि.मी. की यात्रा, रेलगाडी से 80 किमी प्रति घंटा की औसत गति से की, फिर 20 किमी. की यात्रा बस से, 40 कि.मी. प्रति घंटा की औसत गति से की, और अंत में, 6 कि.मी. की यात्रा, साइकिल से, 8 कि.मी. प्रति घंटा की औसत गति से की। सारी यात्रा के लिए, उनकी औसत गति क्या है?

13.7 माध्यिका

माध्यिका भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक माप है। समांतर माध्य के विपरीत, माध्यिका, आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित श्रेणी में एक नियत स्थिति के प्रेक्षण पर आधारित होती है। इसलिए, इसे एक स्थैतिक माध्य (positional average) कहते हैं। सभी प्रेक्षणों के परिमाणों से इसका कोई सम्बंध नहीं होता, जैसा कि समांतर माध्य की स्थिति में होता है। सरल शब्दों में, माध्यिका चर के सर्वाधिक मध्यगत मान को निर्दिष्ट करती हैं, जब उन्हें (प्रेक्षण मानों को) परिमाण के क्रम में रखा जाए। श्रेणी में माध्यिका की स्थिति ऐसी होती है कि इसके प्रत्येक मद की संख्या समान होती है। **एक दी गई श्रेणी की माध्यिका चर का वह मान होती है, जो श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित कर दें। यह श्रेणी का सर्वाधिक केन्द्रीय बिंदु होता है,**

जहाँ आधे मद, इस मान के ऊपर होते हैं और शेष आधे, इस मान के नीचे होते हैं। आवृत्ति वक्र की स्थिति में, माध्यिका चर का वह मान होती है जो क्षेत्रफल को दो समान भागों में विभाजित कर दे। माध्यिका को प्रायः प्रतीक M_d द्वारा सूचित करते है। कैनर ने माध्यिका को इस प्रकार परिभाषित किया है कि माध्यिका चर का वह मान है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है, एक भाग में सभी अधिकतम मानों तथा दूसरे भाग में सभी न्यूनतम मानों का समावेश होता हैं।

13.7.1 माध्यिका का परिकलन

अवर्गीकृत आंकड़ों और वर्गीकृत आंकड़ों, दोनों ही के लिए, माध्यिका का परिकलन किया जा सकता है। परंतु, विधियाँ भिन्न हैं। आइये, वर्गीकृत और अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए, माध्यिका के परिकलन की विधियों का पृथक–पृथक् अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक

आंकड़ों को अरोही क्रम या अवरोही क्रम में रखने के पश्चात, माध्यिका को, $\frac{N+1}{2}$ वें मद के मान के रूप में, परिकलित किया जाता है, जहां N मदों की कुल संख्या को सूचित करता है।

1 **जब N विषम हो:** जब प्रेक्षणों की संख्या एक विषम संख्या हो तो माध्यिका (M_d) का सूत्र है :

$\frac{N+1}{2}$ मद का मान, जहाँ N–प्रेक्षणों की संख्या है। उदाहरण के लिए, श्रेणी 6, 7, 4, 8, 11, 5, 3, 9, 10 पर विचार कीजिए। यहां प्रेक्षणो की संख्या 9 है। जो कि एक विषम संख्या है। अतः. $\frac{N+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$ वें मद का मान ही, माध्यिका होगी। इससे अभिप्राय है कि जब श्रेणी को आरोही क्रम में या अवरोही क्रम में रखा जाए, तो पांचवें मद का मान, दी गई श्रेणी की माध्यिका होगी। अब हम, आंकड़ों को आरोही क्रम में रख सकते हैं और फिर पांचवें मद को अभिज्ञात कर सकते हैं। क्रम में रखी गई श्रेणी है : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और पांचवें मद का मान 7 है। अतः माध्यिका (M_d); 7 है।

2. **जब N सम हो :** जब प्रेक्षणों की संख्या (N) एक सम संख्या हो तो $\frac{N+1}{2}$ का मान एक भिन्न से सम्बद्ध होगा। ऐसी स्थिति में, दो मध्यगत मदों के मानों के समांतर माध्यं को ही, माध्यिका मानते हैं। उदाहरण के लिए, श्रेणी : 6, 11, 3, 16, 20, 32, 41, 36 पर विचार कीजिए। इस श्रेणी में, प्रेक्षणों की संख्या 8 है, जो कि एक सम संख्या है। $\frac{N+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4.5$ यह मान, भिन्न 0.5 से सम्बद्ध है। ध्यान दीजिए कि ऐसा कोई पद नहीं है जिसकी क्रम संख्या 4.5 हो। अतः आपको, चौथे और पांचवें मदों के मानों के समांतर माध्य को ही माध्यिका मानना होगा।

यह स्थिति उन सभी श्रेणियों में प्रस्तुत होगी जहां N, एक सम संख्या हो । अब हम, दी गई श्रेणी को, आरोही क्रम में, निम्नानुसार रखते हैं :

3, 6, 11, 16, 20, 32, 36, 41

क्रम में रखी गई इस श्रेणी में, चौथे और पांचवें मदों के मानों का समांतर माध्य ही माध्यिका होगा। इस श्रेणी में, चौथे और पांचवें मदों के मान क्रमशः 16 और 20 है। अतः माध्यिका (M_d) 18 (अर्थात् $\frac{16+20}{2}$) है। N के एक सम संख्या होने की स्थिति में भी, हम $\frac{N+1}{2}$ वें मद के मान को, माध्यिका ले सकते हैं, परंतु इस प्रयोजन के लिए, हमें $\frac{N+1}{2}$ के मान में, भिन्न 0.5 की समुचित रूप से व्याख्या करनी होगी। ऊपर दिए गए उदाहरण में, 4.5 वें मद के मान को ज्ञात करना अभीष्ट है। लोक सम्मति से, हम 4.5 वें मद के मान को ज्ञात करने के लिए चौथे मद के मान में, चौथे और पांचवें मदों के मानों के अंतर का आधा जोड़ देते. हैं । दी गई श्रेणी को आरोही क्रम में रखने पर, चौथे मद का मान 16 है और पाँचवे मद का मान 20 है। अतः माध्यिका (M_d) 18 अर्थात् 16f $\frac{1}{2}(20 - 16)$ है। यह मान वही है जो पहले प्राप्त हुआ था। अतः अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए, चाहे N, एक विषम संख्या हो या सम संख्या हो, $\frac{N+1}{2}$ वें मद के मान को ही माध्यिका परिभाषित कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि जब N एक सम संख्या है, तो दो माध्यिका पदों के मानों के समांतर माध्य के रूप में, माध्यिका परिकलित करना, सरल है। परंतु ऊपर दिखाई गई विधि के अनुसार, मद की भिन्नात्मक क्रम संख्या की व्याख्या करना अन्य विभाजन मानों के परिकलन में बड़ा ही उपयोगी सिद्ध होता है। आप, इन विभाजन मानों के बारे में बाद में, इसी इकाई में अध्ययन करेंगे। इसके अतिरिक्त, यह सूत्र, वर्गीकृत आकड़ों की माध्यिका, व्यापक रूप में परिभाषित करने में, हमारी सहायता करता है।

वर्गीकृत समंक

जैसा कि आपको ज्ञात है, जब समंक एक आवृत्ति बंटन के रूप में हों, तो प्रेक्षण चर के मान, एक असतत श्रेणी या एकं सतत श्रेणी का रूप ले लेते हैं। इन दो प्रकार के आवृत्ति बंटनों के लिए, माध्यिका परिकलन करने की विधियाँ भिन्न हैं। आइये इन विधियों का अलग–अलग अध्ययन करें।

असतत श्रेणी (Discrete Series): इस स्थिति में माध्यिका का परिकलन करने के लिए निम्न चरणों को अपनाए।

1) इस स्थिति में, पहले समंकों (x) को आरोही क्रम में या अवरोही क्रम में रखिये।

2) संचयी आवृत्तियाँ (cf) ज्ञात कीजिए।

3) सूत्र का प्रयोग करें $M_d = \frac{n+1}{2}$th item

4) अब संचयी आवृत्ति में $\frac{n+1}{2}$th item मान पता करें तथा इस संचयी आवृत्ति के चर के मान ज्ञात करें।

5) चर का यह मान माध्यिका का मान हैं।

आइये इस प्रक्रिया को एक उदाहरण द्वारा समझें।

उदाहरण 18: निम्न आंकड़ों के लिए, माध्यिका अंक ज्ञात कीजिए:

अंक:	40 15 25 5 30 35 10 50 45 20
विद्यार्थियों की संख्या :	9 75 72 20 45 39 43 6 8 76

हल: आंकड़ों को, फिर से, अंकों के परिमाण के आरोही क्रम में लिखिए। फिर, निम्न प्रकार से संचयी आवृत्ति सारणी बनाइए।

अंक:	5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
विद्यार्थियों की संख्या :	20 43 75 76 72 45 39 43 8 76

संचयी आवृत्तियों का परिवलन

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी आवृत्ति (c.f.)
5	20	30
10	43	63
15	75	138
20	76	214
25	72	286
30	45	331
35	39	370
40	9	379
45	5	387
50	6	393

यहाँ, $n = 393$

माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ वें मद $= \frac{393+1}{2}$ वें मद $= 197$ वें मद का मान।

अब 197 वाँ मद, संचयी आवृत्ति 214 वाले वर्ग में स्थित है। इस वर्ग में चर का मान 20 अतः माध्यिका अंक 20 है।

सतत श्रेणी (Continuous Series): सतत श्रेणी के आवृत्ति बंटन की स्थिति में, विभिन्न मदों के यथार्थ मान ज्ञात नहीं होते। अतः किसी मद विशेष का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता। हम केवल इतना कर सकते हैं कि चर का वह मान ज्ञात कर लें, जिसके ऊपर या नीचे आधे पद हो । अतः, माध्यिका वर्ग का निर्धारण करने के लिए, $\frac{N+1}{2}$ के स्थान पर N/2 का प्रयोग करते हैं, और शेष प्रक्रिया ठीक उसी प्रकार है, जैसी कि असतत श्रेणी की स्थिति में अपनाई गई। थी। माध्यिका वर्ग निर्धारित करने के पश्चात, चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा, निम्न तीन विधियों में से किसी एक को अपना कर, निर्धारित किया जा सकता है।

विधि 1 : जब संचयी आवृत्ति का परिकलन निम्नतर मानों की ओर (less than) विधि से किया गया हो।

$$M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

C = माध्यिका वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = माध्यिका वर्ग की (साधारण) आवृत्ति

i = माध्यिका वर्ग का वर्ग–अंतराल,

$\frac{N}{2}$ = अवलोकनो की आधी संख्या, इसे 'm' से भी दर्शाया जाता है।

इस सूत्र को इस प्रकार भी दर्शाया जा सकता है।

$$M_d = l + \frac{u-l}{f} \times (m - c)$$

जहाँ l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

U = माध्यिका वर्ग की उपरि सीमा

f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति

m = $\frac{N}{2}$ = वा मद;

C = माध्यिका वर्ग के पूर्वगाामी वर्ग की संचयी आवृत्ति

सतत श्रेणी समंको के माध्यिका के परिकलन के चरण:

1) यदि वर्गान्तर समावेशी है तो उन्हें अपवर्जी में बदलना चाहिए अथवा केवल माध्यिका वर्ग को बदला भी जा सकता है। यह प्रक्रिया इस इकाई में बाद में बताई जाएगी। असमान वर्गों को समान वर्गों मे बदलना आवश्यक नहीं है।

2) निम्न संचयी आवृत्ति (cf) का परिकलन करें।

3) $\frac{N}{2}$ वे मद को ज्ञात करें तथा यह पता करें की वह संचयी प्रवृत्ति में कहाँ पाया जाता है तथा फिर उस संचयी आवृत्ति के सामने के वर्ग को ज्ञात करें।

4) अंतर्वेशन द्वारा निम्न तीन विधियों में से किसी का प्रयोग करके माध्यिका का मान निर्धारित किया जा सकता है।

विधि 2: पहली विधि में प्रयुक्त सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि संचयी आवृत्तियों का परिकलन, निम्नतर मानों की ओर से किया गया है। यदि, संचयी आवृत्तियों का परिकलन, उच्चतर मानों की ओर से किया जाए, तो उपरोक्त सूत्र में तनिक संशोधन कर, निम्न सूत्र प्राप्त कर सकते हैं :

$$M_d = U + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

जहाँ U = माध्यिका वर्ग की उपरि सीमा

C = माध्यिका वर्ग के अगले (उच्चतर) वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = माध्यिका वर्ग की (साधारण) आवृत्ति

i = माध्यिका वर्ग का अंतराल आमाप

ये दोनों विधियाँ ठीक एक ही परिणाम देती हैं। इन सभी विधियों में, मानी गई धारणाएँ और माध्यिका के मान को अंतर्वेशन द्वारा प्राप्त करने का तर्क प्रायः एक जैसे हैं। आइये, अब विधि के सूत्र के लिए अपनाई गई धारणाओं की व्याख्या करें।

यदि मदों की गणना, निम्न मानों की ओर से आरम्भ करें तो माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा तक, c मदों की गणना सम्पन्न कर सकेंगे। परंतु माध्यिक बिंदु तक पहुँचने के लिए, N/2 मदों की गणना करनी होगी। इसलिए, माध्यिका वर्ग के अंतर्गत $\frac{N}{2} - C$ मदों को भी करना होगा। माध्यिका वर्ग के, आमाप वाले, इस वर्ग अंतराल में, f मद बिखरे हुए हैं। अब हम यह मानते हैं कि ये सभी f मद, वर्ग अंतराल के विस्तार पर, एक समान बंटे हुए हैं। अतः $\frac{N}{2} - C$ मदों को माध्यिका वर्ग के अंतर्गत करने के लिए, निम्न सीमा 1 से आगे की ओर, $\frac{i}{f} \times \left(\frac{N}{2} - C\right)$ की दूरी तय करनी हागी। अतः माध्यिका $M_d = l + \frac{i}{f} \times \left(\frac{N}{2} - C\right)$

माध्यिका और माध्य के लिए, की गई धारणाओं के अंतर पर ध्यान दीजिए। माध्यिका की स्थिति में, कल्पना की गई है कि एक वर्ग अंतराल में, मद एक समान फैले हुए हैं, जब कि समांतर माध्य की स्थिति में, यह कल्पना की जाती है कि एक वर्ग अंतराल में, सभी मदों के मानों में से प्रत्येक उस वर्ग अंतराल के मध्य बिंदु के बराबर है।

उदाहरण 19: एक विभागीय भंडार के प्रबंधक ने, 200 लेनदारी खातों पर जो अपचारी थे, सूचना संकलित की। प्रत्येक खाते के लिए, उसने, नियत तारीख के पश्चात् बीते गए दिनों की संख्या नोट की। तब उसने, निम्न आवृत्ति बंटन में दिखाई गई विधि के अनुसार, समंकों को वर्गीकृत किया। माध्यिका ज्ञात कीजिए।

नियत तारीख के पश्चात् बीत गए दिनों की संख्या	खातों की संख्या
30-44	40
45-59	45
60-74	40
75-89	25
90-104	25
105-119	20
120-134	5

हलः

नियत तारीख के पश्चात् बीत गए दिनों की संख्या	खातों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति (cf) निम्नतर मानों की ओर से	संचयी आवृत्ति (cf) उच्चतर मानों की ओर से
30-44	40	40	200
45-59	45	85	160

60-74	40	125	115
75-89	25	150	75
90-104	25	175	50
105-119	20	195	25
120-134	5	200	5

यहाँ N/2 = 200/2 = 100; इससे अभिप्राय है कि माध्यिका के नीचे 100 मद हैं। इसलिए माध्यिका वर्ग 60–74 में हैं। अब हमे समावेशी वर्गान्तरों का अपवर्जी वर्गान्तरों में परिवर्तित करना होगा। इसके लिये वर्गान्तर की निम्नतर सीमा में से .5 घटा देते है। और उपरि सीमा में .5 जोड़ देते है। वर्गान्तर 60–74 जो कि समावेशी है, का अपवर्जी वर्गान्तर 59.5–74.5 होगा।

अब माध्यिका वर्ग की यथार्थ सीमाएँ, 59.5 – 74.5 हैं। अब पहली विधि के प्रयोग से, माध्यिका का परिकलन कीजिए।

$$M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

जहाँ, l = 59.5; c= 85; f = 40; i = 15; N = 200.

$$M_d = 59.5 + \frac{100-85}{40} \times 15$$

$$= 59.5 + (15/40) \times 15$$

$$= 59.5 + 225/40$$

$$= 59.5 + 2.625 = 65.125$$

माध्यिका = 65.1 दिन।

विधि 1 में बताए गए वैकल्पिक सूत्र से भी हम माध्यिका का परिकलन कर सकते हैं।

$$M_d = l + \frac{U-l}{f} \times (m - c)$$

जहाँ, l = 59.5; u = 74.5; f = 40; N/2 = 200/2 = 100; C = 85

$$M_d = 59.5 + \frac{74.5-59.5}{40} \times (100 - 85)$$

$$= 59.5 + (15/40) \times 15$$

$$= 65.125$$

माध्यिका = 65.1 दिन।

आइये अब, दूसरी विधि का प्रयोग कर माध्यिका का परिकलन करें।

$$M_d = U + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

जहाँ, u = 74.5; f = 40; c=75; i = 15; N = 200

$$\therefore M_d = 74.5 + \frac{\frac{200}{2} - 75}{40} \times 15$$

= 74.5 – (25/40) × 15

= 74.5 – 375/40

= 74.5 – 9.375 = 65.125

माध्यिका = 65.1 दिन।

ध्यान दीजिए कि दोनों विधियों में से प्रत्येक विधि वही परिणाम देती है।

उदाहरण 20: निम्न आय बंटन के लिए, माध्यिका आय ज्ञात कीजिए।

मासिक आय (रुपयों में)	कुटुम्बों की संख्या
Below 100	50
100-200	500
200-300	555
300-500	100
500-800	3
800 and above	2

हल:

मासिक आय (रुपयों में)	कुटुम्बों की संख्या	संचयी आवृत्ति (cf)
Below 100	50	50
100-200	500	550
200-300	555	1,105
300-500	100	1,205
500-800	3	1,208
800 and above	2	1,210

माध्यिका के नीचे N/2 मद हैं। इसका अर्थ है कि माध्यिका के नीचे $1210/2 = 605$ मद हैं। इसलिए, माध्यिका वर्ग $200 - 300$ में है। अब निम्न अंतर्वेशन सूत्र का प्रयोग करेंगे:

$$M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

l = 200; c= 550; f = 555; i = 100; N = 1,210.

$$M_d = 200 + \frac{605-550}{555} \times 100$$

= 200 + (55/555) × 100

= 200 + 9.91

= 209.91

अतः माध्यिका मासिक आय 209.91 रु. है।

ध्यान दीजिए कि इस उदाहरण में, वर्ग अंतराल असमान आमापों के हैं, और समंक विवृतमुखी हैं। इसका, माध्यिका के परिकलन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि सूत्र में प्रयुक्त, एकमात्र वर्ग अंतराल का आमाप 'i' माध्यिका वर्ग का है।

उदाहरण 21: निम्न आंकड़ों से, माध्यिका मजदूरी निर्धारित कीजिए।

मजदूरी से (अधिक (रु.))	कामगारों की संख्या
20	58
40	54
60	48
80	38
100	22
120	10
140	3
160	0

हलः **माध्यिका का परिकलन**

मजदूरी (से अधिक (रु.))	कामगारों की संख्या संचयी आवृत्ति	साधारण आवृत्ति f (ऊपर की संख्या को उसके नीचे की संख्या से घटाना है।)
20	58	58–54 = 4
40	54	54–48 = 6
60	48	48–38 = 10
80	38	38–22 = 16
100	22	22–10 = 12
120	10	10–3 = 7
140	3	3–0 = 0
160	0	0

इस उदाहरण में, संचयी आवृत्ति दी गई है। अतः हमने साधारण आवृत्ति का परिकलन किया। अब, माध्यिका के ऊपर N/2 मद, अर्थात् 58/2 = 29 मद हैं । अतः माध्यिका "80" से अधिक वर्ग में है अर्थात वर्ग 80–100 में। अब, हम माध्यिका का परिकलन, निम्न सूत्र के प्रयोग से करते हैं:

$$M_d = U + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

जहाँ $u = 100$; c=22; $f = 16$; i = 20

$$M_d = 100 + \frac{29-22}{16} \times 20$$

$$= 100 - (7/16) \times 20$$

$$= 100 - 8.75 = 91.25$$

माध्यिका मजदूरी 91.25

अपूर्ण आवृत्ति को ज्ञात करना: माध्यिका के मान तथा अवलोकनों की कुल संख्या की सहायता से अपूर्ण आवृत्ति का ज्ञात करना संभव है। आइए निम्न उदाहरण को देखते है।

उदाहरण 22: आपको निम्न अपूर्ण आवृत्ति बंटन दिया गया है। यह ज्ञात है कि कुल आवृत्ति 1000 है और माध्यिका 413.11 है।

मदो का मान	आवृत्ति
300—325	5
325—350	17
350—375	80
375—400	—
400—425	326
425—450	—
450—475	88
475—500	9

हल: मान लीजिए कि वर्ग 375 – 400 की आवृत्ति (F) है। अब, वर्ग 425 – 450 की आवृत्ति, 1000 – (525 – F) = 475 – F' हो जाती है। (525, दी गई आवृत्तियों का जोड़ है।)

मदों का मान	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
300-325	5	5
325-350	17	22
350-375	80	102
375-400	F	102 + F
400-425	326	425 +F
425-450	425 - F	903
450-475	88	991
475-500	9	1000

क्योंकि माध्यिका 413.11 दिया गया है, इसलिए माध्यिका अवश्य ही वर्ग 400—425 में होगी:

अब, $M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$

जहाँ

l = 400; f = 326; c= 102; i = 25; M_d = 413.11.

$$413.11 = 400 + \frac{500-102-F}{326} \times 25$$

$$413.11 - 400 = \frac{398-F}{326} \times 25$$

13.11 × 326 = (398-F) × 25

4,273.86 = 9,950 – 25F

25 F = 5,676.14

F = 227.04

क्योंकि आवृत्ति सदैव पूर्णांकीय होती है, इसलिए F= 227 वर्ग 375– 400 की आवृत्ति है, और 248 वर्ग 475–227 की आवृत्ति है।

13.7.2 माध्यिका के विशेष गुण (Properties)

आपने, माध्यिका परिकलित करने की विधियों का अध्ययन कर लिया है। अब आइये, माध्यिका के गुणधर्मों की विवेचना करें।

1. माध्यिका का एक महत्वपूर्ण गुण यह है कि विभिन्न मानों के माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का योगफल, न्यूनतम होता है, अर्थात $\sum|x-M_d|$ न्यूनतम होता है, इस गुणधर्म के कारण, बहुत सी व्यावहारिक परिस्थितियों में, माध्यिका का प्रयोग ही उचित होता है। उदाहरण के लिए मदों 5, 7, 8, 9, 21 पर विचार कीजिए । यहाँ, माध्यिका $\frac{(N+1)}{2}$ वें मद का मान, अर्थात् माध्यिका 8 है। **आइये, निरपेक्ष विचलनों का परिकलन करे, (1) माध्यिका से, (2) किसी अन्य मान जैसे, 7 से, और (3) समांतर माध्य,** $\left(i.e., \frac{5+7+8+9+21}{5}\right) = 10$

मद X	$\lvert x-M_d \rvert$ $\lvert x-8 \rvert$	$\lvert x-7 \rvert$	$\lvert x-\bar{X} \rvert$ $\lvert x-10 \rvert$
5	3	2	5
7	1	0	3
8	0	1	2
9	1	2	1
21	13	14	11
कुल	**18**	**19**	**22**

यदि आप ऊपर की सारणी का, ध्यान से अध्ययन करें तो आप देखेंगे कि न्यूनतम योग 18 है, जो कि माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का जोड़ है।

2. यह सीमांत मदों (अर्थात् चरम मानों) से प्रभावित नहीं होता। परंतु निस्संदेह ही मदों की संख्या, इसे प्रभावित करती है।

3. विवृत मुखी (खुले सिरे वाले) बंटन के लिए तो, माध्यिका सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है। उदाहरण के लिए, क्योंकि आय बंटन एक विवृत मुखी बंटन होता है, माध्यिका आय, बंटन का श्रेष्ठतर प्रतिनिधि मान होगा।

4. गुणात्मक सूचनाओं के लिए, सम्भवतः माध्यिका ही, केन्द्रीय प्रवृत्ति का एकमात्र उपयुक्त माप है।

   उदाहरण के लिए, हम एक प्रत्यर्थी से कह सकते हैं कि वह एक निगम प्रतिमा के अपने मूल्याँकन को गतिशील, प्रतिष्ठित, (व्यवसाय की दृष्टि से) सहयोग देने वाला, सफल और प्रत्याहरित (पूँजी कतूंद) के रूप में महत्व के आधार पर क्रमबद्ध करे। मान लीजिए वह उन्हें, ठीक उसी प्रकार क्रमबद्ध करता है, जैसा कि ऊपर दिया गया है, तो, इन पाँच क्रमबद्ध मानों की माध्यिका होगी, (व्यवसाय की दृष्टि से) सहयोग देने वाला।

5. माध्यिका को, एक लेखाचित्र द्वारा भी स्थापित (या निर्धारित) किया जा सकता है।

6. माध्यिका का परिकलन करना सरल है, और इसे स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है। कुछ स्थितियों में तो, इसे निरीक्षण मात्र से प्राप्त कर सकते हैं।

13.7.3 माध्यिका के गुण तथा सीमाएँ

आपने माध्यिका के अर्थ, उसके परिकलन की विधियों और गुणधर्मों का अध्ययन किया है। आइये, अब माध्यिका के गुणों (योग में और उसकी परिसीमाओं) की विवेचना करें।

गुण

1. एक विवृतमुखी बंटन, जैसे आय बंटन के लिए, माध्यिका एक श्रेष्ठतर प्रतिनिधि मान है।

2. क्योंकि माध्यिका चरम मानों द्वारा विकृत नहीं होता, जबकि माध्य उनसे विकृत होता है, इसलिए कुछ स्थितियों में, माध्य की अपेक्षा, माध्यिका अधिमान्य होता है।

3. गुणात्मक घटनाओं का अध्ययन करने के लिए, माध्यिका सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है।

4. क्योंकि माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का योगफल न्यूनतम होता है, इसलिए उन स्थितियों में जहाँ भौगोलिक दूरी को न्यनतम करना हो, माध्यिका अधिमान्य है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि भारत के पाँच विभिन्न नगरों से, पाँच उच्च अधिकारियों का एक सम्मेलन है। वह नगर, जो माध्यिका दूरी पर स्थित हो, सम्मेलन के लिए अधिक उपयुक्त स्थान होगा।

5. जब केवल एक या दो टायर खरीदने हों, तो यह निश्चय करते समय कि कौन सी छाप का टायर खरीदा जाए, अधिकतम माध्यिका.दूरी चलने वाली छाप ही अधिमान्य होगी। इसी प्रकार एक कपड़े धोने की मशीन खरीदते समय, एक अधिकतर माध्य जीवन वाली मशीन की अपेक्षा, अधिकतर माध्यिका जीवन वाली मशीन अधिमान्य होगी।

सीमाएँ

1. माध्यिका उच्च बीजगणितीय प्रतिपादन के अक्षम्य है। इसका अभिप्राय यह है कि दो या दो से अधिक समूहों की संयुक्त माध्यिका ज्ञात नहीं कर सकते जब तक कि उन समूहों के सभी मद ज्ञात न हों।

2. कभी–कभी इसे एक अचेतन माप कहा जाता है, क्योंकि यह श्रेणी के सभी मदों पर आधारित नहीं होती।

3. समांतर माध्य की अपेक्षा, यह प्रतिचयन उच्चावचनों से, अधिक प्रभावित होती है।

4. माध्यिका का परिकलन सूत्र, एक प्रकार से, अंतर्वेशन की एक विधि है, जो इस मान्यता पर आधारित है कि माध्यिका वर्ग के सभी मद, उस वर्ग अंतराल में, एक समान बंटे हुए हैं, परंतु यह मान्यता बहुत सत्य नहीं है।

5. माध्यिका द्वारा मन पर डाला गया प्रभाव, मायावी और धोखा देने वाला हो सकता है, क्योंकि इसका मान, केवल मात्र माध्य–गत प्रेक्षण) द्वारा निर्धारित होता है। उदाहरण के लिए, प्रत्येक लाटरी में, एक टिकट द्वारा जीता गया माध्यिका इनाम सदैव शून्य होता है जबकि सारे टिकटों को ध्यान में रखा जाए। (50 से अधिक टिकटों द्वारा कोई भी इनाम न जीता जाएगा) इनाम का यह माध्यिका मान, लॉटरी द्वारा प्रस्तुत इनामों के विश्लेषण में कोई सहायता नहीं करता, क्योंकि प्रस्तुत कुल इनामों में से पहला इनाम ही रुचि का विषय हो सकता है।

बोध प्रश्न ड.

1. निम्न समंग कुलकों के लिए, माध्यिका ज्ञात कीजिए।

   क) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

   ख) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10

2. सतत बंटन की स्थिति में, जब संचयी आवृत्तियाँ उच्च मान की ओर से परिकलित की जाएँ, तो माध्यिका परिकलन का सूत्र लिखिए।

3. एक निर्दिष्ट आवृत्ति बंटन में, यदि वर्ग अंतरालों की चौड़ाइयाँ असमान हों, तो माध्यिका परिकलित करने के लिए, किस वर्ग अंतराल का प्रयोग करोगे ?

4.. विद्यार्थियों के एक समूह की ऊँचाइयाँ नीचे दी गई है। माध्यिका ज्ञात कीजिए।

   61, 62, 62, 63, 61, 63, 64, 64, 60, 65, 63, 64, 65, 66, 64

   अब मान लीजिए, विद्यार्थियों के एक अन्य समूह का, जिनकी ऊँचाइयाँ 60, 66, 59, 68, 67 और 70 इंच है, पहले समूह में समाविष्ट कर दी जाती है। संयुक्त समूह की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

5. अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों के निम्न आवृत्ति बंटन के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए।

अंक :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	5
विद्यार्थियों की संख्या :	20	43	75	76	72	45	39	9	8	6

6 एक नए प्रकार के, 100 प्रकाश बल्बों की जीवन (घंटों में) संबंधी सूचना निम्नानुसार है । माध्यिका जीवन ज्ञात कीजिए।

जीवन (घंटों में)	असफलों की संख्या
1—50	2
51—100	8
101—150	15
151—200	20
201—250	25
251—300	20
301—350	10

13.8 विभाजन मान (Partition Values)

जैसा कि आप जानते हैं, जब सभी मदों को परिमाण के क्रम में रखा जाए, तो माध्यिका, चर का मध्य मान होती है। इस प्रकार, माध्यिका, श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित करती है। अंतः इसे एक **स्थैतिक माध्य** कहते हैं। वास्तव में ऐसे अन्य स्थैतिक माप भी हैं जो श्रेणी को, समान भागों की, अधिक बड़ी संख्या में, विभाजित करते हैं, जैसे चार समान भागों, या 10 समान भागों में या 100 समान भागों में। ऐसे मापों को, व्यापक रूप में, **विभाजन मान** कहते हैं। अधिक प्रयोग में आने वाले, तीन विभाजन मान हैं, (1) चतुर्थक, (2) दशमक और (3) शतमक । निस्संदेह ये अकेन्द्रीय स्थिति–निर्धारण के माप हैं। आइये, अब इनके बारे में एक–एक करके, अध्ययन करें।

13.8.1 चतुर्थक (Quartiles)

चर के उन मानों को, जो श्रेणी या बंटन को, 4 समान भागों में विभाजित करें, **चतुर्थक** कहते हैं। क्योंकि समंकों को 4 समान भागों में विभाजित करने के लिए, तीन बिंदु आवश्यक हैं, इसलिए तीन चतुर्थक होते हैं। जिन्हें Q_1 Q_2 और Q_3 द्वारा सूचित करते हैं।

पहला चतुर्थक (Q_1) जिसे **निम्न चतुर्थक** भी कहते हैं, चर का वह मान है, जिसके नीचे 25 प्रतिशत प्रेक्षण और जिसके ऊपर 75 प्रतिशत प्रेक्षण हों।

दूसरा चतुर्थक (Q_2), चर का वह मान है, जो बंटन को दो समान भागों में बाँट दे। इसका अभिप्राय यह है कि इसके ऊपर 50% प्रेक्षण और नीचे 50% प्रेक्षण होते हैं। इसलिए Q_2 और माध्यिका समरूप हैं।

तीसरा चतुर्थक (Q_3), जिसे उपरि चतुर्थक भी कहते हैं, चर का वह मान है, जिसके नीचे 754 प्रतिशत प्रेक्षण और जिसके ऊपर 25% प्रेक्षण हों, स्पष्ट है कि

$Q_1 < Q_2 < Q_3$

चतुर्थकों का परिकलन

i) **असतत श्रेणी**

जब आंकड़ों को आरोही क्रम में रखा जाए, तो

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ वें मद का मान

$Q_2 = \frac{2(N+1)}{4}$ वें मद का मान

$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ वें मद का मान

ii) सतत श्रेणी

$$Q_j = l + \frac{J\left(\frac{N}{4}\right) - c}{f} \times i \quad J = 1, 2, 3 \text{ ; (विभाजन मान)}$$

जहाँ, l = चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा

C = चतुर्थक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = चतुर्थक वर्ग की साधारण आवृत्ति

i = चतुर्थक वर्ग का वर्गान्तर

13.8.2 दशमक (Deciles)

चर के उन मानों को जो श्रेणी के बंटन को दस समान भागों में बांट दें, **दशमक** कहते हैं। प्रत्येक भाग में कल–प्रेक्षणों के 10% प्रेक्षण होते हैं। स्पष्टतः ऐसे 9 मान होंगे, जिन्हें D_1, D_2 ..... D_9 द्वारा सूचित करते हैं । इन्हें कहते हैं : पहला दशमक, दूसरा दशमक इत्यादि । पाँचवाँ दशमक (D_5) माध्यिका ही होता है। .

i) असतत श्रेणी

$D_j = j\frac{N+1}{10}$ वें मद का मान, J = 1 to 9 (विभाजन मान)

ii) सतत श्रेणी

$$D_j = \text{size of } l + \frac{J\left(\frac{N}{10}\right) - c}{f} \times i \quad J = 1 \text{ to } 9$$

जहाँ C = j^th दशमक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति, और अन्य प्रतीकों, का वही सामान्य अर्थ है।

13.8.3 शतमक (Percentiles)

चर के उन मानों को, जो एक निर्दिष्ट श्रेणी या बंटन को 100 समान भागों में विभाजित कर दें, **शतमक** कहते है। प्रत्येक शतमक भाग में , कुल प्रेक्षणों के एक प्रतिशत होते हैं। शतमक $\boldsymbol{P_j}$ चर का वह मान है, जिसके नीचे, कुल–प्रेक्षणों के ठीक J% होते हैं। उदाहरण के लिए

P_{10} : चर का वह मान, जिस तक (या जिसके नीचे) कुल प्रेक्षणों के ठीक 10% प्रेक्षण होते हैं। यह D के अभिन्न होता है।

P_{20} = चर का वह मान जिस तक (या जिसके नीचे) कुल प्रेक्षणों के ठीक 20% प्रेक्षण होते हैं।

P_{25}= चर का वह मान जिस तक (या जिसके नीचे) कुल प्रेक्षणों के ठीक 25%प्रेक्षण होते हैं। यह Q_1के समरूप है।

P_{50} = चर का वह मान जिस तक (या जिसके नीचे कुल प्रेक्षणों के ठीक 50% होते हैं। यह D_5 या Q_2 के समरूप है।

इसी प्रकार , $P_{75} = Q_3$

शतमकों का परिकलन

i) **असतत श्रेणी**

$P_j = j\frac{N+1}{100}$ वे मद का मान $J = 1, 2, \dots\dots\dots..99$

उदाहरण : $P_{45} = 45\left(\frac{N+1}{100}\right)$वें का मान

ii) **सतत श्रेणी**

$$P_j = l + \frac{J\left(\frac{N}{100}\right)-c}{f} \times i \qquad J = 1, 2, \dots\dots\dots..99$$

जहाँ c= j वें शतमक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति, और शेष प्रतीकों का वही सामान्य अर्थ है।

आइये विभाजन मानों का परिकलन करना, दो उदाहरणों द्वारा समझ लें।

उदाहरण 23: एक कक्षा परीक्षा में, 16 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक (अधिकतम अंक 20) निम्नानुसार हैं :

2, 3, 6, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 14, 15, 16, 18, 19

Q_1, P_{35}, और D_9 ज्ञात कीजिए।

हल: प्राप्त अंक पहल ही आरोही क्रम में रखे हुए है।

$Q_1 = \frac{(N+1)}{4}$ वें मंद का मान

$= \frac{16+1}{4}$ वें मंद का मान $= 4\frac{1}{4}$ वें मंद का मान

Q_1 = (चौथे मंद का मान) + $\frac{1}{4}$ (5वें मंद का मान – 4 वें मंद का मान)

$= 7 + \frac{1}{4} - (10 - 7)$

$= 7 + \frac{3}{4}$

$= 7.75$

P_{35} = Size of $\frac{35(N+1)}{100}$ वें मंद का मान

$= \frac{35\ (16+1)}{100}$th item $= 5\frac{95}{100}$ वें मंद का मान

P_{35} = 5 वें मंद का मान + $\frac{95}{100}$ (6 वें मंद का मान – 5 वें मंद का मान)

$= 10 + \frac{95}{100}(10 - 10) = 10 + 0 = 10$

$D_9 = \frac{9(N+1)}{10}$ वें मंद का मान $= 15\frac{3}{10}$ वें मंद का मान

D_9 $= 15$ वें मंद का मान $+ \frac{3}{10}$ (16वें मंद का मान $-$ 15 वें मंद का मान)

$$= 18 + \frac{3}{10}(19 - 18) = 18 + 0.3 = 18.3$$

ध्यान दीजिए कि किसी भी विद्यार्थी के प्राप्तांक 7.75 या 18.3 अंक नहीं हैं। जब चयनीय मद की क्रम संख्या भिन्नात्मक हो तो ऐसे कल्पित मान प्राप्त हो सकते हैं। यदि निर्दिष्ट समंक एक सतत श्रेणी हों, और असतत श्रेणी न हो तो ऐसे मानों की व्याख्या वैध होगी।

उदाहरण 24: निम्न सारणी में, अहमदाबाद नगर के 600 कुटुम्बों की मासिक आय का बंटन दिया गया है।

मासिक आय (रु. में)	कुटुम्बों की संख्या
75 से कम	69
75- 150	167
150-225	207
225-300	65
300-375	58
375-450	24
450 और अधिक	10

क) $D_2, D_5, P_{25}, P_{75}, Q_3$ और माध्यिका ज्ञात कीजिए।

ख) प्रेक्षित कुटुम्बों में से केन्द्रीय 50% की आय की सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

ग) परिणामों की व्याख्या कीजिए।

हल:

मासिक आय (रु. में)	कुटुम्बों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति (cf)
75से कम	69	69
75- 150	167	236
150-225	207	443
225-300	65	508
300-375	58	566
375-450	24	590
450 और अधिक	10	600

क) i) D_2 के नीचे 2N/10 मद होते है। इसका अर्थ है कि $2 \times 600/10 = 120$ मद D_2 के नीचे है।

अतः वर्ग 75–150 में है।

अतः $D_2 = l + \frac{\frac{2N}{10} - C}{f} \times i$

$= 75 + \frac{120-69}{167} \times 75 = 75 + \frac{51}{167} \times 75$

$= 75 + 22.9 = 97.90$ $\quad D_2 = 97.90$ रु

ii) D_5 के नीचे 5N/10 मद होते है। इसका अर्थ है कि 5 × 600/10 = 300 मद D_5 के नीचे है।

अतः वर्ग 150–225 में है।

अतः $D_5 = l + \frac{\frac{5N}{10} - C}{f} \times i$

$= 150 + \frac{300-236}{207} \times 75 = 150 + \frac{64}{207} \times 75$

$= 150 + 23.19 = 173.19$ $\quad D_5 = 173.19$ रु

iii) P_{25} के नीचे 25N/100 मद होते है। इसका अर्थ है कि 25 × 600/100 =150 मद P_{25} के नीचे है।

अतः वर्ग 75-150 में है।

अतः, $P_{25} = l + \frac{\frac{25N}{100} - C}{f} \times i$

$= 75 + \frac{150-69}{167} \times 75 = 75 + \frac{81}{167} \times 75$

$= 75 + 36.38 = 111.38$ $\quad P_{25} = 111.38$ रु

iv) P_{75} के नीचे 75N/100 मद होते है। इसका अर्थ है कि 75 × 600/100 = 450 मद P_{75} के नीचे है।

अतः P_{75} वर्ग 225-300 में है।

अतः, $P_{75} = l + \frac{\frac{75N}{100} - C}{f} \times i$

$= 225 + \frac{450-443}{65} \times 75$

$= 225 + 8.077 = 233.077$ $\quad P_{75} = 233.078$ रु

v) Q_3 के नीचे 3N/4 मद होते है। इसका अर्थ है कि 3 × 600/4 = 450 मद Q_3 के नीचे है। P_{75}के नीचे भी 450 मद है। अतः Q_3 और P_{75}समरूप है।

Q_3= 233.08 रु

vi) माध्यिका (M_d) के नीचे N/2 मद होते है। इसका अर्थ है कि 600/2 = 300 मद M_d के नीचे है अतः वर्ग 150-225 में स्थित है।

अतः, $M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$

$= 150 + \frac{300-236}{207} \times 75 = 150 + \frac{64}{207} \times 75$

$= 150 + 23.19 = 173.19$

अतः माध्यिका $= 173.19$ रु

ध्यान दीजिए कि M_d और D_5 समरूप है। इसलिए सीधे भी हम लिख सकते है कि

$M_d = D_5 = 173.19$

ख) केन्द्रीय 50% प्रेक्षण अंतराल Q_1 से Q_3 तक में होंगे, क्योंकि Q_1 के नीचे 25% मद हैं। और Q_3

ऊपर 25% मद हैं।

यहाँ $Q_1 = P_{25} = 111.38$ रु. और

$Q_3 = P_{75} = 233.08$ रु.

अतः प्रेक्षित कुटुम्बों के 50% की आय की सीमाएँ हैं, 111.28 रु. और 233.08 रु.

ग) **व्याख्या**

i) $D_2 = 97.99$ रु.

अतः 20% कुटुम्बों की आय, रु. 97.90 या इससे कम है और 80% की आय 97.90 रु. या इससे अधिक है।

ii) $D_5 = 173.19$ रु.

अतः 50% कुटुम्बों की आय 173.19 रु. या इससे कम है और 50% कुटुम्बों की आय, 173.19 रु. या इससे अधिक है।

क्योंकि माध्यिका M_d, और D_5 समरूप होते हैं, अतः दोनों की एक ही व्याख्या है।

iii) $P_{25} = 111.38$ रु.

अतः 25% कुटुम्बों की मासिक आय 111.38 रु. या इससे कम है, और 75% कुटुम्बों की मासिक आय 111.38 रु. या इससे अधिक है।

iv) $P_{75} = 233.08$ रु.

अतः 75% कुटुम्बों की मासिक आय, 233.08 रु. या इससे कम है और 25% कुटुम्बों की मासिक आय 233.08 रु. या इससे अधिक है। क्योंकि Q_3 और P_{75} समरूप होते हैं, अतः दोनों की एक ही व्याख्या है।

बोध प्रश्न च

1) विभाजन मानों की परिभाषा लिखिए। सांख्यिकी में प्रयुक्त होने वाले विभिन्न विभाजन मानों के नाम लिखिए।

2) विभिन्न विभाजन मानों को ज्ञात करने के लिए, उनके सूत्र लिखिए।

3) 500 विद्यार्थियों के एक समूह के लिए 100 अंकों में से प्राप्त अंकों के बारे में निम्न सूचना उपलब्ध है।

4) उपरोक्त आंकड़ों से $Q_1, Q_3, D_4, P_{63,} P_{90}$ ज्ञात कीजिये। यह भी बताइये कि कितने विद्यार्थियों ने 12 अंकों से कम अंक और कितने विद्यार्थियों ने 95 अंकों से अधिक अंक प्राप्त किये है।

अंक	छात्रों की संख्या
0-12	40
12-23	85
23-38	75
38-45	50
45-60	65
60-73	60
73-83	75
83-95	35
95-100	15

13.9 भूयिष्ठक

भूयिष्ठक भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक माप है। भूयिष्ठक चर का वह मान है, जो दिए गए समंक समूह में, सर्वाधिक बार दोहराया गया हो। अंग्रेजी में, भूयिष्ठक का पर्याय शब्द हैं, ″मोड (Mode)'', स्वयं जिसकी उत्पत्ति फ्रांसिसी भाषा के शब्द ″ला मोडे (--la mode)'' से हुई है, जिसका अर्थ है, ''फैशन''। अतः भूयिष्ठक, सर्वाधिक सामान्य या सर्वाधिक लोकाचार के अनुरूप मान होता है।

बहुधा, भूयिष्ठक चर का वह मान माना जाता है, जो सर्वाधिक बार आए। परंतु, यह सभी आवृत्ति बंटनों के लिए यथार्थतः सत्य नहीं है। वस्तुतः भूयिष्ठक चर का वह मान है, जिसके इर्द–गिर्द, अन्य मदें, सर्वाधिक तीव्रता के साथ, संकेन्द्रित होने का प्रयत्न करें। यह, एक मान पर और उसके गिर्द, आवृत्ति संकेन्द्रण के केन्द्र को प्रकट करता है। यह, समांतर माध्य के सदृश, गुरुत्व केन्द्र नहीं है। यह तो, माध्यिका के सदृश, एक स्थैतिक मान है। **इसे प्रायः प्रतीक 'M_0,' द्वारा सूचित किया जाता है।**

उदाहरण के लिए, एक जूता बेचने वाले दुकानदार को लीजिये। उसकी अभिरुचि यह ज्ञात करने में है कि जूता के वे कौन से आमाप हैं, जिनकी सामान्य रूप में सर्वाधिक मांग हैं। इस स्थिति पर ध्यान दीजिए। समांतर माध्य एक ऐसा आमाप हो सकता है, जो किसी व्यक्ति को भी ठीक न बैठे। बंटन में असमता के कारण, हो सकता है कि माध्यिका भी एक प्रतिनिधि आमाप न दे सके। भयिष्ठक ही, एक ऐसा माप है, जो एक सन्निकट आमाप के चयन में हमारी सहायता कर सकता है, और जिसके लिए आर्डर दिया जा.सकता है।

13.9.1 भूयिष्ठक का परिकलन

वर्गीकृत समंकों और अवर्गीकृत समंकों के लिए, भूयिष्ठक परिकलन की विधियां भिन्न हैं। आइये, अब इन विधियों का पृथक–पृथक अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंकः अवर्गीकृत समंकों के लिए, निरीक्षण मात्र से ही भूयिष्ठक ज्ञात कर सकते हैं। चर के उस मान को, जो दिये गए समंकों में सर्वाधिक बार उपस्थित हो, भूयिष्ठक मानते हैं।

उदाहरण के लिए, 10 लड़कों की आयु (वर्षों में निम्नानुसार है : 5, 6, 4, 10, 7, 6, 9, 2, 8,6 यहाँ संख्या 6 तीन बार (अर्थात् सर्वाधिक बार) आई है। अतः भूयिष्ठक आयु है, 6 वर्ष ।

कुछ स्थितियों में इस प्रकार भूयिष्ठक विद्यमान नहीं होता। उदाहरण के लिए निम्न समंक समूह पर विचार कीजिए : 5, 10, 15, 20, 25, 30 इस स्थिति में कोई भूयिष्ठक नहीं है, क्योंकि कोई भी संख्या दोहरायी नहीं है।

कुछ स्थितियों में एक से अधिक भूयिष्ठक हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, एक टाइपिस्ट ने 10 पृष्ठ टाइप किए और प्रति पृष्ठ अशुद्धियों की संख्या निम्नानुसार हैं : 5, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 4 इस स्थिति में, संख्याएं 2 और 1, दोनों ही समान बार उपस्थित होती हैं। अतः इस श्रेणी में, **दो भूयिष्ठक** हैं : 2 और 1। इसी प्रकार, एक बटन **त्रि–भूयिष्ठक या बहु भूयिष्ठक** भी हो सकता है। ऐसे बंटनों के लिए, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में, भूयिष्ठक की कोई सार्थकता नहीं है। अवर्गीकृत समंकों के लिए, बहुलक का बहुत सीमित उपयोग है।

वर्गीकृत संमकः सतत बंटन ओर असतत बंटन के लिए भूयिष्ठक परिकलन की विधियां भिन्न हैं। आइये, अब इन विधियों का विस्तार से अध्ययन करें।

असतत श्रेणी असतत बंटन अर्थात् जब श्रेणी के व्यक्तिगत मदों के मान ज्ञात हों, के लिए, भयिष्ठक का निर्धारण निरीक्षण मात्र से ही कर सकते हैं। निरीक्षण द्वारा, आप चर का वह मान ज्ञात कर सकते हैं, जिसके गिर्द मदें सर्वाधिक तीव्रता से संकेन्द्रित हों। उदाहरण के लिए, निम्न आवृत्ति बंटन का अध्ययन कीजिएः

मदों का मान :	20	21	22	23	24	25
आवृत्तिः	15	20	25	45	30	22

इस आवृत्ति बंटन में, मान 23 की आवृत्ति सर्वाधिक है। इसका अभिप्राय है कि इस मान के गिर्द, मदों का संकेन्द्रण सर्वाधिक है। अतः भूयिष्ठक 23 है। इस प्रकार की प्रत्येक श्रेणी में, भूयिष्ठक ज्ञात करना सरल है। परंतु, कठिनाई वहां आ जाती है जब पास के दो या दो से अधिक वर्गों में, संकेन्द्रण प्रायः समान हो; अर्थात् अधिकतम आवृत्ति और उसके पूर्ववर्ती आवृत्ति या अनुवर्ती आवृत्ति में अंतर कम हो। ऐसी स्थिति में बहुलक निर्धारित करने के लिए, **समूहन और विश्लेषण** की आवश्यकता होती है।

समूहन सारणी (Grouping Table): समूहन सारणी में छः स्तम्भ होते हैं। इनकी व्याख्या निम्नानुसार

स्तम्भ 1 : यह स्तम्भ सारणियों का है। प्रत्येक वर्ग के सम्मुख, इस स्तंभ में, उसकी आवृत्ति लिखी होती है। अधिकतम आवृत्ति को अंकित कर देते हैं या एक वृत्त द्वारा घेर देते हैं।

स्तम्भ 2 : इस स्तम्भ में, दो–दो आवृत्तियों का समूहन करते हैं। उनके (अर्थात् समूहों के) जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित कर देते हैं या एक वृत्त द्वारा घेर देते हैं।

स्तम्भ 3: ऊपर से पहली आवृत्ति को छोड़ कर, शेष आवृत्तियों का, दो–दो का समूहन करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित कर देते हैं।

स्तम्भ 4 : ऊपर की ओर से, तीन–तीन आवृत्तियों का समूहन करते हैं। उनके जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित कर देते हैं।

स्तम्भ 5 : ऊपर से, पहली आवृत्ति को छोड़ कर, शेष आवृत्तियों का तीन–तीन का समूहन करते हैं। उनके जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम अंकित करते हैं।

स्तम्भ 6 : उपर से पहली दो आवृत्तियों का छोड़कर, शेष आवृत्तियों का, तीन–तीन का समूहन करते हैं। उनके जोड़ करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित करते हैं।

विश्लेषण सारणी (Analysis Table): समूहन सारणी बनाने के पश्चात, एक विश्लेषण सारणी बनानी होती है। यह सारणी दुहरे रूप में होती है : (1) लम्ब रूप में (अर्थात् अनुशीर्षक) समूहन सारणी में प्रयुक्त स्तम्भ संख्याएं (क्रम संख्याएं) होती हैं। (2) क्षैतिज रूप में, (अर्थात् उपशीर्षक) विचर के मान (या वर्ग) लेते हैं। अब आप समूहन सारणी को लीजिए, जिसके प्रत्येक स्तम्भ में, अधितम आवृत्ति जोड़ को अंकित किया गया है।

अब इन वृत्तों द्वारा घेरी गई आवृत्तियों को बारी–बारी से, उनके विचर मानों के साथ लीजिए। विश्लेषण सारणी में, इन मानों के नीचे (अर्थात् स्तम्भ में) और सम्बद्ध स्तम्भों की पंक्तियों में, मिलान दंडिकाएं रख देते है। विश्लेषण सारणी के प्रत्येक स्तम्भ में, मिलान दंडिकाओं की कुल संख्या को, (उसी स्तम्भ में और अंतिम पंक्ति में लिख देते हैं। इन संख्याओं में, अधिकतम को अंकित करते हैं। इस अधिकतम संख्या के संगत चर का मान ही, भूयिष्ठक या भूयिष्ठक वर्ग प्रदान करता है। आइये, एक उदाहरण द्वारा, समूहन और विश्लेषण सारणियों को बनाने की प्रक्रिया का अध्ययन करें।

उदाहरण 25: विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों के बारे में, निम्न सूचना से, भूयिष्ठक अंक ज्ञात कीजिए।

अंक:	:	55	60	61	62	63	64	65	66	68	70
विद्यार्थियों की संख्या:	:	4	6	5	10	20	22	24	6	2	1

हल: जैसा कि हम यहां देखते हैं, अधिकतम आवृत्ति (अर्थात् 24) और उसके पूर्ववर्ती दो आवृत्तियों (अर्थात् 22 और 20) में अंतर बहुत कम है। अधिकतम आवृत्ति की अनुवर्ती आवृत्ति (अर्थात् 6) भी, बहुत छोटी है। अतः भूयिष्ठक वर्ग का निर्धारण करने के लिए, समूहन करने की आवश्यकता है।

समूहन सारणी

अंक	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2	स्तम्भ 3	स्तम्भ 4	स्तम्भ 5	स्तम्भ 6
55	4	10				
60	6		11	15		
61	5	15			21	
62	10		30			35
63	20	42		52		
64	22		46		66	
65	24	30				52
66	6		8	32		
68	2	3			9	
70	1					

विश्लेषण सारणी

Col. No.	Marks									
	55	60	61	62	63	64	65	66	68	70
1							I			
2					I	I				
3						I	I			
4				I	I	I				
5					I	I	I			
6						I	I	I		
जोड़				1	3	5	4	1		

विश्लेषण सारणी में, अधिकतम जोड़ 5 है। इसके संगत मद 64 है। अतः भूयिष्ठक (M_o) 64 है। ध्यान दीजिए कि दिए गए आवृत्ति बंटन में अधिकतम आवृत्ति 65 की है। जबकि समूहन और विश्लेषण सारणियों द्वारा प्रकट होता है कि मदों का संकेद्रण 64 के गिर्द है। अतः भूयिष्ठक का शुद्ध मान 64 है।

सतत श्रेणी: सतत श्रेणी (अर्थात् वर्ग–अंतरालों में वर्गीकृत समकों) की स्थिति में, जबकि सभी वर्ग–अंतरालों के आमाप समान हों, भूयिष्ठक परिकलन के दो मुख्य चरण हैं।

चरण 1: समूहन सारणी और विश्लेषण सारणी बनाकर ठीक उसी प्रकार भूयिष्ठक वर्ग निर्धारित करें जैसे कि असतत श्रेणी के लिए किया जाता है।

चरण 2 : भूयिष्ठक वर्ग का ठीक निर्धारण करने के पश्चात, भूयिष्ठक (M_o) को, अंतर्वेशन द्वारा, निम्न में से किसी एक सूत्र के प्रयोग से प्राप्त करते हैं:

सूत्रः कः $M_o = l \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$

जहाँ l = भूयिष्ठक वर्ग की निम्न सीमा

i = भूयिष्ठक बहुलक वर्ग का वर्गान्तर

Δ_1 = $\lfloor f_1 - f_0 \rfloor$

Δ_2 = $[f_1 - f_2]$

f_1 = भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति

f_0 = भूयिष्ठक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की आवृत्ति

f_2 = भूयिष्ठक वर्ग के अनुवर्ती वर्ग की आवृत्ति।

Δ_1 तथा Δ_2 का मान उपरोक्त सूत्र में रखने से यह इस प्रकार भी दर्शाया जा सकता है–

i) $M_o = l + \frac{f_1 - f_2}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times i$

ii) $M_o = l + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

टिप्पणीः यदि $(2f_1 - f_0 - f_2)$का मान शून्य हो, तो सूत्र निरर्थक हो जाता है। यदि अंश या हर में से कोई एक ऋणात्मक हो तो सूत्र द्वारा प्राप्त परिणाम वैध नहीं होता। ऐसी स्थिति में, सूत्र को निम्न रूप में लिखते हैं :

सूत्रः खः भूयिष्ठक वर्ग की उपरि सीमा का प्रयोग कर के भी, भूयिष्ठक का परिकलन कर सकते हैं .

$$M_o = l + \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times i$$

सूत्रः गः यदि भूयिष्ठक वर्ग, अधिकतम आवृत्ति के वर्ग से भिन्न हो तो निम्न सूत्र अधिक उपयुक्त है :

$$M_o = l + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$$

टिप्पणियाँः

1. यदि आवृत्ति बंटन का पहला वर्ग ही, भूयिष्ठक वर्ग हो तो f_0, का मान शून्य लेते हैं। यदि आवृत्ति बंटन का अंतिम वर्ग, भूयिष्ठक वर्ग हो तो f_2 का मान शून्य लेते हैं।

2. ये सूत्र केवल समान अंतरालों वाले आवृत्ति बंटनों के लिए ही वैध होते हैं। ऐसा क्यों ? कारण सरल है, यदि आमाप 10 और 20 के दो वर्ग अंतरालों की आवृत्तियां क्रमशः 15 और 18 हो, तो साधारण तुल प्रकट होता है कि आवृत्ति 18, आवृत्ति 15 से अधिक है। परंतु, भूयिष्ठक का संबंध तो मदों के संकेन्द्रण से है। पहले वर्ग का संकेन्द्रण दर है। 15/10 या 1.5 मद वर्ग की प्रति इकाई लंबाई जबकि दुसरे वर्ग का संकेन्द्रण दर है, 18/20 या 0.9 मदें वर्ग की प्रति इकाई लम्बाई। अतः भूयिष्ठक आदत निर्धारित करने की दृष्टि से, आमाप 20 के वर्ग अंतराल की आवृत्ति 18 आमाप 10 के वर्ग अंतराल व आवृत्ति 15, की तुलना में,

कम है। अतः समान वर्ग अंतरालों की स्थिति में ही, आवृत्तियों की तुलना सीधे कर सकना सम्भव है।

3 ऐसे आवृत्ति बटनों की स्थिति में, जहाँ वर्ग अंतराल समान न हों, पहले वर्ग अंतरालों को संयुक्त या विभाजित कर समान बना लेते हैं। इसके लिए कल्पना करते हैं कि मदें एक समान बंटी हुई हैं। इसके पश्चात् सामान्य सूत्रों का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 26: निम्न आवृत्ति बंटन के लिए, बहुलक परिकलित कीजिए।

प्रदत्त मासिक किराया (रु.)	किराया देने वाले कटुम्बों की संख्या
20-40	6
40-60	9
60-80	11
80-100	14
100-120	20
120-140	15
140-160	15
160-180	8
180-200	7
	100

हल: निरीक्षण द्वारा जान पड़ता है कि बहुलक वर्ग, 100–120 है। परंतु, आइये समूहन और विश्लेषण द्वारा, इसकी जाँच करें।

समूहन सारणी

मासिक किराया (रु.)	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2	स्तम्भ 3	स्तम्भ 4	स्तम्भ 5	स्तम्भ 6
20-40	6	15				
40-60	9		20	26	34	
60-80	11	25				
80-100	14		34			45
100-120	20	35		49		
120-140	15		25		45	
140-160	10	18				33
160-180	8		15	25		
180-200	7					

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	मासिक किराया (रु.) 20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
1					I				
2					I	I	I		
3				I	I				
4				I	I	I	I		
5					I	I	I	I	
6			I	I	I				
जोड			I	3	6	3	3	1	

क्योंकि अधिकतम जोड़ 6 है, इसलिए भूयिष्ठक वर्ग है, 100–120, अब निम्न सूत्र के प्रयोग से

$$M_o = l + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$= 100 + \frac{20-14}{2(20) - 14 - 15} \times 20$$

$$= 100 + \frac{6}{11} \times 20$$

$$= 100 + 10.91 = 110.91$$

∴ भूयिष्ठक मासिक किराया है, रु. 110.91

उदाहरण 27: निम्न आँकड़ों से भूयिष्ठक का परिकलन कीजिए:

मदों का मान	आवृत्ति
0-9	3
10-19	4
20-29	8
30-39	7
40-49	6
50-59	3

हलः निरीक्षण द्वारा भूयिष्ठक निर्धारित करना कठिन है, हमें समूहन करना होगा।

समूहन सारणी

वर्ग	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2	स्तम्भ 3	स्तम्भ 4	स्तम्भ 5	स्तम्भ 6
0-9	3	7		15		
10-19	4		12		19	
20-29	8	15				21
30-39	7		13	16		
40-49	6	9				
50-59	3					

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	अंक					
	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
1			I			
2			I	I		
3				I	I	
4				I	I	
5			I	I		
6			I	I	I	
जोड़			4	5	3	

विश्लेषण सारणी से स्पष्ट है कि वर्ग 30—39, भूयिष्ठक वर्ग है। परंतु अधिकतम आवृत्ति वर्ग 20—29 में है। अतः भूयिष्ठक के लिए अधिक उपयुक्त सूत्र है।

$$M_o = l + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$$

$$= 29.5 + \frac{6}{8+6} \times 10$$

$$= 29.5 + \frac{60}{14}$$

$$= 29.5 + 4.29 = 33.79$$

अतः भूयिष्ठक 33.8 है।

ध्यान दीजिए कि यदि आप निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे, तो परिमाण भिन्न होगा :

$$M_o = l + \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times i$$

$$= 29.5 + \frac{|7-8|}{|7-8| + |7-6|} \times 10$$

$$= 29.5 + \frac{1}{1+1} \times 10$$

$$= 29.5 + 10/2 = 34.5$$

यदि आप सूत्र $M_o = l + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$, का प्रयोग करें, तो हर का मान शून्य हो जाता है और अंश का मान ऋण होगा। इसलिए, यह सूत्र प्रयोज्य नहीं है। यह ध्यान देना भी महत्वपूर्ण है, कि समांतर माध्य और माध्यिका के असदृश भूयिष्ठक परिकलन की विभिन्न विधियों से, विभिन्न परिणाम प्राप्त हो सकते है।

निष्कोण समंक (Smooth Data): यदि एक आवृत्ति बंटन में, आवृत्ति सामान्य रूप से, बिना आकस्मिक परिवर्तनों के, वर्धमान या ह्रासमान हो तो ऐसे आवृत्ति बंटन को निष्कोण आवृत्ति बंटन या निष्कोण समंक कहते हैं। ऐसे समंकों के लिए, भूयिष्ठक का निर्धारण, उपरोक्त किसी भी सूत्र का प्रयोग किए बिना, सरलता से किया जा सकता है। इसके परिकलन में, बड़ी सरल क्रियाओं (गणनाओं) की आवश्यकता होती है।

निष्कोण समकों का भूयिष्ठक परिकलित करने के नियम इस प्रकार हैं. यदि $f_0 = f_2$, अर्थात् भूयिष्ठक वर्ग के पास के वर्गों की आवृत्तियां, समान हों, तो भूयिष्ठक वर्ग अंतराल की दोनों सीमाओं का मध्य बिंदु ही, भूयिष्ठक होता है। निम्न उदाहरण का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें:

मान (x):	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
आवृत्ति (1):	1	6	15	20	15	6	1

क्योंकि अधिकतम आवृत्ति 20 है, इसलिए भूयिष्ठक वर्ग, 30–40 है। क्योंकि अधिकतम आवृत्ति के पास की दोनों आवृत्तियां समान (अर्थात् 15), इसलिए भूयिष्ठक, 30 और 40 का समांतर माध्य है,

$$M_o = \frac{30+40}{2} = 35$$

आप जांच कर सकते हैं कि इस सूत्र द्वारा प्राप्त परिणाम उस परिणाम के अभिन्न है, जो वर्गीकृत आंकड़ों के लिए बताए गए, अन्य सूत्रों से प्राप्त होता है। जब भी $f_0 = f_2$ और f_0 और $f_2 < f_1$ प्रत्येक f_1 से कम हो, तो सदा ऐसा होगा, अर्थात्

$$M_o = \frac{lf_0 + uf_2}{f_0 + f_2}.$$

उदाहरण के लिए, निम्न बंटन पर विचार कीजिए।

मानः (x)	:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
आवृत्ति (f):	:	500	610	740	748	745	690	500

यहाँ अधिकतम आवृत्ति (f_1) 745 है और इसके संगत भूयिष्ठक वर्ग, 30–40 है। पास की दो आवृत्तियां हैं, 740 (f_0) ओर 745 (f_2) जो बराबर नहीं हैं, परंतु उनके f_1 से अंतर अधिक नहीं है। भूयिष्ठक वर्ग, 30–40 है, अर्थात् l = 30 और u= 40

$$\therefore\ M_o = \frac{30+740+40+745}{740+745}$$

$$= \frac{52{,}000}{1{,}485}$$

$$= 35.02$$

इस विधि द्वारा प्राप्त परिणाम, सदैव वही होगा जो कि सूत्र $M_o = l + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i.$ के प्रयोग से प्राप्त होता है। आप इसका सत्यापन कर सकते हैं।

उदाहरण 28: निम्न आंकड़ों के लिए भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए :

आयु (वर्षों में):	:	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
व्यक्तियों की संख्या :	:	50	70	80	180	150	120	70	50

हलः अधिकतम आवृत्ति, वर्ग 35–40 में हैं। परंतु आवृत्ति का संकेन्द्रण, वर्ग 40–45 के गिर्द प्रतीत होता है। अतः भूयिष्ठक वर्ग ज्ञात करने के लिए समूहन करेंगे। .

समूहन सारणी

आयु	स्तंभ 1	स्तंभ 2	स्तंभ 3	स्तंभ 4	स्तंभ 5	स्तंभ 6
20-25	50	120				
25-30	70		150	200		
30-35	80	260			330	
35-40	180		330			410
40-45	150	270		450		
45-50	120		190		340	
50-55	70	120				240
55-60	50					

जैसा कि हम देखते हैं, वर्ग 40–50, स्तम्भों 2, 3, 4, 5, और 6 में, (अर्थात 6 स्तम्भों में से 5 में) अधिकतम आवृत्ति जोड़ में, भागीदार है। परंतु वर्ग 35–40 केवल 4 आवृत्ति जोड़ों में भागीदार है। विश्लेषण सारणी से आप इसका सत्यापन कर सकते हैं।

$$M_o = l + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$M_o = 40 + \frac{150-180}{2\times150 - 180 - 150} \times 5 = 40 + \frac{-30}{0} \times 5$$

परंतु क्योंकि $2f_1 - f_0 - f_2 = 2 \times 150 - 180 - 120 = 0$

इसलिए, इस विधि से M_0, ज्ञात नहीं कर सकते । अतः हम निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$M_o = l + \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times i$$

$$= 40 + \frac{|150-180|}{|150-180| + |180-120|} \times 5$$

$$= 40 + \frac{30}{30 + 60} \times 5$$

$$= 40 + \frac{5}{3}$$

$$= 40 + 1.67 = 41.67$$

∴ : भूयिष्ठक आयु = 41.67 वर्ष

उदाहरण 29: निम्न सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए:

मदों का मान	आवृत्ति
40-49	7
50-59	9
60-69	10
70-79	6
80-89	13
90-99	10
100-109	12
110-119	7

हल: निरीक्षण द्वारा, भूयिष्ठक वर्ग स्पष्ट नहीं होता। अतः समूहन और विश्लेषण का प्रयोग करेंगे।

समूहन सारणी

मदों का मान	स्तम्भ1	स्तम्भ 2	स्तम्भ 3	स्तम्भ 4	स्तम्भ 5	स्तम्भ 6
40-49	7	16				
50-59	9		19	26		
60-69	10	16			25	
70-79	6		19			29
80-89	13	23		29		
90-99	10		22		35	
100-109	12	19				29
110-119	7					

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	अंक					
	60-69	70-79	80-89	90-99	100-109	110-119
1			I			
2			I	I		
3				I	I	
4		I	I	I		
5			I	I	I	
6	I	I	I	I	I	I
जोड़	1	2	5	5	3	1

विश्लेषण सारणी में, अधिकतम जोड़, 5, दो बार आता है। अतः भूयिष्ठक सुपरिभाषित नहीं है। अतः इसके मान का निर्धारण, आनुभाविक सूत्र $M_0 = 3\ M_d - 2\ \bar{x}$ के प्रयोग से करेंगे।

आप स्वयं यह जांच कर सकते हैं कि इस बंटन के लिए, माध्यिका = 83.84, और $\bar{x}$ = 80.14

$M_o = 3M_d - 2\bar{X}$.

Median = 83.84 and $\bar{X}$ = 80.14.

$\therefore M_o = 3\ (83.84) - 2(80.14)$.

$= 251.52 - 168.28$

$= 91.24$

∴Mode = 91.24.

बोध प्रश्न छ

1. भूयिष्ठक की परिभाषा लिखिए।
2. भूयिष्ठक परिकलन के लिए विभिन्न सूत्र लिखिए।
3. समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक में, आनुभाविक संबंध क्या है ?
4. एक आवृत्ति बंटन के लिए, माध्य 26.8 है, और माध्यिका 27.9 है। भूयिष्ठक का मान ज्ञात कीजिए।
5. निम्नलिखित दिए गए आकड़ो से माध्य, माध्यिका एवं भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए।

X	:	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
F	:	6	9	11	14	12	15	10	8	7

13.9.2 भूयिष्ठक के गुण तथा सीमाएं

गुणः

1. कुछ परिथितियों में, भूयिष्ठक एकमात्र उपयुक्त माध्य है, जैसे, गारमेंटस् का भूयिष्ठक आमाप, जूतों का भूयिष्ठक आमाप, भूयिष्ठक मजदूरी, बैंक के जमाकर्ता खातों में भूयिष्ठक शेष जमा राशि, इत्यादि ।
2. यह गुणात्मक घटनाओं का वर्णन करने के लिए प्रयुक्त होता है। उदाहरण के लिए, कल्पना कीजिए कि एक प्रिटिंग प्रेस, पांच छाप निकालता है, जिनका मूल्यांकन हम इस प्रकार करते हैं : अधिक तीव्र, तीव्र, तीव्र, अस्पष्ट और तीव्रय तो भूयिष्ठक मान होगा, तीव्र।
3. उपभोक्ता–उत्पाद की वरीयता के लिए, भूयिष्ठक वरीयता ही, मानी जाती है (स्वीकार की जाती है)। एक रेस्तरां का मालिक, जिसने एक मिठाई में विशेषज्ञता प्राप्त की है, अपने समान्य ग्राहकों की बहुलक वरीयता जानना चाह सकता है।

4. एक वैषम्य युक्त बंटन की स्थिति में, भूयिष्ठक अधिकतम संकेन्द्रण बिंदु का संकेतक होता है।
5. बाजार अनुसंधान में, इसका प्रयोग बड़ा ही लाभप्रद है।
6. यदि एक या एक से अधिक वर्ग विघृत–मुखी हों, तो भी भूयिष्ठक का प्रयोग कर सकते हैं।

सीमाएंः

1. बहुधा, बंटन के लिए, कोई भूयिष्ठक मान विद्यमान ही नहीं होता। और जब एक से अधिक भूयिष्ठक होते हैं, तो यह एक निरर्थक माप सिद्ध होता है।
2. यह उच्चतर बीजगणितीय प्रतिपादन के अयोग्य है।
3. यह एक कुपरिभाषित माप है। अतः विभिन्न सूत्रों के प्रयोग से, कुछ भिन्न परिणाम ही प्राप्त होते हैं।
4. यह समंकों के सभी पदों पर आधारित नहीं होता।
5. वर्ग अंतरालों के आमाप का, भूयिष्ठक के मान पर, सार्थक रूप से प्रभाव पड़ता है।
6. यद्यपि भूयिष्ठक चर का वह मान होता है, जो सर्वाधिक बार उपस्थित होता है, परंतु इसकी आवृत्ति, कुल आवृत्तियों के अधिकांश को निरूपित नहीं करती।

13.9.3 कुछ उदाहरण

उदाहरण 30: यदि भूयिष्ठक 15.3 हो और माध्यिका 14.2 हो, तो समांतर माध्य का मान आकलित कीजिए।

हल: समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक में, आनुभविक संबंध है :

$M_o = 3M_d - 2\overline{X}$

M_o, और M_d के मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$15.3 = 3 \times 14.2 - 2\overline{X}$$

$$2\overline{X} = 42.6 - 15.3$$

$$2\overline{X} = 27.3$$

$$\overline{X} = 13.65$$

उदाहरण 31: M_o, M_d और $\overline{X}$ में आनुभविक संबंध की सहायता से दिखाइए कि

i) $M_d = M_o + \frac{2}{3}(\overline{X} - M_o)$

ii) $\overline{X} = M_d + \frac{1}{3}(M_d - M_o)$

हल: समान्तर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक में आनुभविक संबंध है:

$$M_o = 3M_d - 2\overline{X}$$

i) $M_o - 2\overline{X} = 3M_d$

$$\frac{1}{2}(M_o - 2\overline{X}) = 3M_d$$

$$\frac{1}{2}(M_o - 2\overline{X}) = 3M_d$$

$$M_d = \frac{1}{3}M_o + \frac{2}{3}\overline{X}$$

$$= M_o - \frac{2}{3}M_o + \frac{2}{3}\overline{X}$$

$$= M_o + \frac{2}{3}(M_o - \overline{X})$$

$$= M_o + \frac{2}{3}(\overline{X} - M_o)$$

$$\therefore M_d = M_o + \frac{2}{3}(\overline{X} - M_o)$$

$$Median = Mode + \frac{2}{3}(\text{Mean} - Mode)$$

ii) $M_o - 2\overline{X} = 3M_d$

$$2\overline{X} = 3M_d - M_o$$

$$\overline{X} = \frac{3}{2}M_d - \frac{1}{2}M_o$$

$$= M_d + \frac{1}{2}(M_d - M_o)$$

$$Mean = Median + \frac{1}{2}(Median - Mode)$$

उदाहरण 32: निम्न सारणी में, एक फर्म के कर्मचारियों की छूटी हुई आवृत्ति निकालिए

आयु (वर्षों में) :	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
कर्मचारियों की संख्या :	5	-	18	9	6

हल: मान लीजिए छूटी हुई आवृत्ति 'F' है। क्योंकि भूयिष्ठक 32 है, इसलिए भूयिष्ठक वर्ग, 30–35 है।

अब $M_o = l + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

जहां $l = 30$, $f_0 = F$, $f_1 = 18$, $f_2 = 9$, i = 5 and $M_0 = 32$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$$32 = 30 + \frac{18 - F}{2 \times 18 - F - 9} \times 5$$

$$2 = \frac{18 - F}{27 - F} \times 5$$

$$54 - 2F = 90 - 5F$$

$$3F = 36$$

$$F = 12$$

∴ अतः छूटी हुई आवृत्ति 12 है।.

उदाहरण 33: निम्न आंकड़ों से, भूयिष्ठक परिकलित कीजिए :

लाभ (लाख रुपयों में)	:	0-5	5-10	10-20	30-40	40-50
कम्पनियों की संख्या	:	4	6	15	18	20

हलः यहां वर्ग अंतराल समान नहीं है। ऐसी स्थिति में दो विधियों का प्रयोग कर सकते हैं : (1) आंकड़ों को फिर से, मान वर्ग अंतरालों वाले बंटन के रूप में लिखिए, (2) आनुभविक संबंध का प्रयोग कीजिए।

पहले दो वर्गों को, मिलाने से, वर्ग अंतराल 0 – 10 प्राप्त करेंगे। अगले दो वर्ग अंतराल पहले ही, आमाप 10 के हैं। अंतिम वर्ग अंतराल आमाप 20 का है। इसे दो वर्ग अंतरालों, अर्थात् 20 – 40 और 40–50 में विभाजित कर सकते हैं। यह मान कर कि आवृत्तियां एक समान बंटी हुई हैं, इन दोनों वर्गों में से प्रत्येक की आवृत्ति 10 होगी। अतः दिए गए समकों को फिर से निम्न रूप में लिख सकते हैं:

लाभ (लाखों में)	:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
कम्पनियों की संख्या :	:	10	15	18	10	10

स्पष्ट है कि भूयिष्ठक वर्ग, 20–30 है।

अब भूयिष्ठक $= = l + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

और के l, f_0, f_1, f_2, i मान प्रतिस्थापित करने पर

$$M_0 = 20 + \frac{18-15}{2 \times 18 - 15 - 10} \times 10$$

$$= 20 + \frac{3}{11} \times 10$$

$$= 20 + 2.7 = 22.7$$

∴ अतः लाभ का भूयिष्ठक 22.7 लाख रु. है।

भूयिष्ठक $= 3 \times 23.6 - 2 \times 24.3$

$$= 70.8 - 48.6$$

$$= 22.2$$

उदाहरण 34: मान लीजिए आप एक परिवहन कम्पनी के मैनेजर हैं। आप कम्पनी के लिए, 100 टायर खरीदना चाहते हैं, जो A उत्पादक से या उत्पादक B से खरीदने हैं। दोनों प्रकार के टायरों का प्रति टायर मुल्य समान है। इन दो प्रकार के टायरों द्वारा जीवन काल में तय की गई औसत दूरी के बारे में निम्न सूचना उपलब्ध है।

उत्पादक	जीवन काल में तय की गई औसत दूरी	
	समांतर माध्य (कि.मी)	भूयिष्ठक (कि.मी.)
A	35,000	32,000
B	32,000	35,000

1. आप कौन से प्रकार के टायर खरीदोगे ?

2. यदि आपको अपनी कार के लिए केवल एक टायर खरीदना हो, तो क्या आपका निर्णय वही होगा जो (1) में किया गया है ?

हल 1: समांतर माध्य × (मदों की संख्या)

= मदों का कुल मान

अतः यदि आप उत्पादक A के टायर खरीदें, तो सभी 100 टायरों द्वारा तय की जाने वाली दूरी 100× 35,000 = 35,00,000 कि.मी. होगी। परंतु यदि आप, उत्पादक B के टायर खरीदें तो सभी 100 टायरों द्वारा तय की जाने वाली दूरी 100× 32,000 = 32,00,000 कि.मी. होगी।

2. जब आप केवल एक टायर खरीद रहे हों, तो यह आवश्यक नहीं कि खरीदा गया टायर समांतर माध्य के समान ही दूरी तय करेगा। इसके विपरीत, यह बहत सम्भव है, कि टायर भूयिष्ठक के समान दूरी तय कर ले। क्योंकि भूयिष्ठक वह मान है जिसके निकट, मदों का अधिकतम संकेद्रण होता है। क्योंकि उत्पादक B के टायर की स्थिति में भूयिष्ठक अधिकतर है, इसलिए, प्रस्तुत स्थिति में आपके लिए उत्पादक B का टायर ही वरीय होगा।

ध्यान दीजिए कि जब आप एक बड़ी संख्या में टायर खरीदते हैं तो कुछ टायर, समांतर माध्य दूरी के बराबर दुरी तय कर सकेंगे, तो अन्य, उससे अधिक या कम। यदि टायरों का चयन यादृच्छिक रूप से किया जाए, तो चयन किये गए टायरों द्वारा तय की गई दूरियों का समांतर माध्य, उत्पादक द्वारा दावा किए गए समांतर माध्य दूरी के प्रायः समान होगा। अतः स्थिति (1) में, यह निर्धारित करने के लिए कि कौन से प्रकार के टायर की खरीद से अधिकतर सेवा प्राप्त होगी, समांतर माध्य का प्रयोग किया गया था।

13.10 उपयुक्त माध्य का चुनाव

इकाई 11 से प्रारम्भ कर हमने विभिन्न प्रकार के माध्यों, अर्थात समांतर माध्य, भूयिष्ठक, माध्यिका, गुणोत्तर माध्य, इत्यादि का अध्ययन किया है। हमने, इन माध्यों में से प्रत्येक के गुणों, दोषों और विशिष्ट उपयोगों का पृथक–पृथक् अध्ययन किया है। अब हमें यह ज्ञात होना चाहिए कि एक दिए गए प्रयोजन के लिए, एक उपयुक्त माध्य का चुनाव कैसे करें। केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक श्रेष्ठ माप के आवश्यक गुणों के दृष्टिकोण से जाँच करें तो समांतर माध्य ही सर्वोत्तम माध्य प्रतीत होता है, क्योंकि इसमें ये गुण सर्वाधिक संख्या में हैं। परंतु एक दी गई परिस्थिति के लिए उपयुक्त माध्य का चुनाव करना, एक समस्या प्रस्तुत कर देता है। यदि निर्णय उपयुक्त नहीं है, तो परिणाम अधिक विश्वसनीय नहीं होंगे। एक अनुपयुक्त माध्य का प्रयोग करने पर, जो

तुलनात्मक दृश्य उभर कर आता है, वह यथार्थ से कहीं दूर होगा। इसलिए, एक माध्य का चुनाव करते समय, आपको निम्न पहलुओं को ध्यान में रखना चाहिए:

1. **प्रयोजन:** किसी माध्य का चुनाव उस प्रयोजन के अनुकूल होना चाहिए, जिसकी पूर्ति के लिए, उस माध्य को अभिकल्पित किया गया है। यदि प्रयोजन, श्रेणी के सभी मदों को समान महत्व देना हो, तो समांतर माध्य एक उचित माध्य होगा। यदि प्रयोजन, सामान्यतम या सर्वाधिक प्रचलित मद ज्ञात करने का हो तो भूयिष्ठक एक उपयुक्त माध्य होगा। यदि प्रयोजन, एक निर्दिष्ट सापेक्ष स्थिति के मद को स्थापित करना हो, तो माध्यिका इस प्रयोजन को पूरा कर सकेगी। जब बड़े मदों की अपेक्षा, छोटे मदों को अधिक महत्व देना तो हो गुणोत्तर माध्य का चुनाव करना होगा। यदि छोटे मानों को, पर्याप्त रूप में अधिक महत्व देना हो, तो हरात्मक माध्य का प्रयोग करना चाहिए।

2. **समंक कुलक की प्रकृति और रूप** : यदि बंटन वैषम्य युक्त हों, तो बहुलक या माध्यिका अधिमान्य होगा। विवृत मुखी बंटन के लिए भी, भूयिष्ठक या माध्यिका अधिक उपयुक्त होगी। J रूप के या व्युत्क्रम J रूप के बंटन में, अर्थात् ऐसे बंटन में जो सममिति से बहुत अधिक विचलित हो, माध्यिका ही, सर्वाधिक महत्वपूर्ण माध्य है। इसके दो उदाहरण हैं, मूल्य बंटन और आय बंटन। यदि समंक समता से फैले हों, और उनमें बहुत अधिक विचरण न हो, तो समांतर माध्य, एक उपयुक्त माध्य होगा। इसका एक उदाहरण है, औसत उत्पादन लागत । जब अनुपातों या प्रतिशतताओं की औसत निकालनी हो तो गुणोत्तर माध्य ही सर्वाधिक उपयुक्त माप है। ऐसे समंक कुलक के लिए, जिसमें, एक चर के मानों की तुलना, एक अन्य चर से की जाए, जिसका मान नियत हो, तो हरात्मक माध्य सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है। इसके उदाहरण हैं : परिवर्ती गति जब दूरी नियत हो, और परिवर्ती दर (अर्थात् राशि प्रति रु.) जब कुल राशि नियत हो, इत्यादि।

3. **बीजगणितीय प्रतिपादन के लिए वश्यता** : यदि एक माध्य पर, आगे बीजगणितीय प्रतिपादन अभीष्ट हो, तो समांतर माध्य को ही सर्वोत्तम मानते हैं, क्योंकि इसका बहुत अधिक प्रयोग होता है।

4. **गुणात्मक घटनाएँ:** ऐसे लक्षणों के लिए, जो गुणात्मक प्रकृति के हों, जैसे ईमानदारी, सौंदर्य. प्रज्ञा, इत्यादि, माध्यिका ही एक उपयुक्त माध्य प्रतीत होती है।

5. **विशेष प्रयोजन:** काल श्रेणी के विश्लेषण में उपनति का परिकलन करने के लिए, चल माध्य सर्वाधिक उपयुक्त माध्य होगा।

यद्यपि उपरोक्त विचार, एक उपयुक्त माध्य का चुनाव करने में, एक संदर्शक नियम की भूमिका निभाते हैं, फिर भी बहुत सी परिस्थितियों में, यह निर्णय स्वेच्छ होता है। यदि परिकल्पना (Hypothesis) को सिद्ध करने के लिए माध्य के उच्चतर मान की आवश्यकता हो, तो हम ऐसे माध्य का चुनाव करने के लिए प्रलोभित होते हैं, जो उच्चतर मान प्रदान करे। क्योंकि हम, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप का चुनाव अपनी रुचि के अनुसार कर सकते हैं, इसलिए ऐसे माध्य के चुनाव की संभावना है, जो वही परिणाम प्रदान करे, जो हमें अभीष्ट हों। परंतु, जब माध्य का प्रयोग, असतर्कता और अक्षमता से किया जाए, तो इसमें प्रयोक्ता का ही दोष होता है, उपकरण का नहीं।

13.11 सारांश

समंकों की मुख्य विशेषताएँ एक अकेली संख्या द्वारा जिसे "औसत'' या ''माध्य'' कहा जाता है, निरूपित की जाती है । यह स्थिति का एक ऐसा बिन्दु होता है जिसके चारों ओर व्यक्तिगत मूल्य एकत्र होते हैं। एक आदर्श माध्य में कुछ गुण होने चाहिए, जैसे इसके परिकलन की सुगमता, इसकी परिभाषा की स्पष्टता, इसका समस्त मदों पर आधारित होना, इसका चरम मूल्यों द्वारा अप्रभावित रहना, और इसका अधिक बीजगणितीय विवेचन के योग्य होना, तथा इसमें प्रतिदर्शी स्थिरता होना । एक माध्य समस्त समंकों का एक विहंगम दृश्य प्रस्तुत करता है, तुलना में सहायक होता है तथा सांख्यिकीय अनुमान में उपयोगी होता है। अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत समंकों का साधारण माध्य ज्ञात करने के लिए आसान सूत्र हैं। जब समंक कुलक में मूल्य असमान महत्व के होते हैं, तब भारित समांतर माध्य एक सच्चा प्रतिनिधि माध्य होगा।

केन्द्रीय प्रवृति के कुछ अन्य माप भी हैं, जैसे, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य, जिनका प्रयोग विशिष्ट परिस्थितियों में करते हैं। अनुपातों और प्रतिशतताओं के माध्यम के लिए गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हैं। यदि एक श्रेणी में n मद हों, तो उसका गुणोत्तर माध्य, इन मदों के गुणनफल का nवाँ मूल होता है। जब मदों की संख्या अधिक हो, तो परिकलन को सुगम बनाने के लिए, गुणोत्तर माध्य का लघुगणक लेते हैं। अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंकों दोनों के लिए, तथा असतत और सतत श्रेणियों के लिए भी, विभिन्न सूत्रों के प्रयोग से, गुणोत्तर माध्य का परिकलन कर सकते हैं।

किसी दी गई काल अवधि में, एक चर के मान में औसत वृद्धि दर परिकलित करने के लिए, गुणोत्तर माध्य का बहुत अधिक प्रयोग होता है। भारित गुणोत्तर माध्य का परिकलन भी कर सकते हैं, जिसका प्रयोग सूचकांकों की संरचना में किया जाता है। गुणोत्तर माध्य के कुछ ऐसे गणितीय विशेष गुण हैं। जो अनुपातों और प्रतिशतताओं का औसत निकालने में, इसके प्रयोग को अधिक महत्वपूर्ण बना देते हैं, ऐसे समंक कुलकों के लिए, जिनमें एक चर के मानों की तलना, नियत मान के एक अन्य चर से की जाए, हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, गति, समय और दूरी से सम्बद्ध अनुपातों और प्रतिशतताओं का औसत जानने के लिए, हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। यह व्यक्तिगत प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है। इसका परिकलन, अवर्गीकृत और वर्गीकृत समंकों तथा असतत और सतत श्रेणियों के लिए कर सकते हैं। भारित गुणोत्तर माध्य के सदृश, भारित हरात्मक माध्य का परिकलन भी कर सकते हैं।

माध्यिका, एक स्थैतिक माध्य है। यह चर के सर्वाधिक मध्य मान को निर्दिष्ट करती है। इसके नीचे आधे मद और इसके ऊपर आधे मद स्थित होते हैं। अवर्गीकृत और वर्गीकृत समंकों के लिए, माध्यिका परिकलन करने के विभिन्न सूत्र हैं । इसी प्रकार, वर्गीकृत समकों के लिए, असतत श्रेणियों और सतत श्रेणियों की स्थितियों में, भिन्न सूत्र हैं।

माध्यिका के सदृश, कुछ अन्य स्थैतिक माप भी हैं, जिन्हें विभाजन मान कहते हैं और जो श्रेणी को अधिक संख्या के समान भागों में विभाजित करते हैं। ये हैं : (1) चतुर्थक, (2) दशमक और (3) शतमक। चतुर्थक, चर के तीन ऐसे मान हैं जो श्रेणी को चार समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक भाग में कुल प्रेक्षणों के 25% प्रेक्षण होते हैं।

दशमक, चर के वे नौ ऐसे मान हैं जो श्रेणी को दस समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक ऐसे भाग में, कुल प्रेक्षणों के 10 प्रेक्षण होते हैं। शतमक, चर के वे मान हैं जो श्रेणी को 100 समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक ऐसे भाग में कुल प्रेक्षणों के 1% प्रेक्षण होते हैं।

भूयिष्ठक चर का वह मान होता है, जिसके गिर्द अन्य मदें सर्वाधिक तीव्रता से संकेन्दित होने का प्रयत्न करती है। अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंकों, दोनों ही के लिए, इसका परिकलन किया जा सकता है। परंतु, अवर्गीकृत समंको के लिए इसका उपयोग सामित है। असतत बटन के लिए, भूविष्ठक चर का वह मान होता है जिसके गिर्द, मदें बड़ी तीव्रता से संकेन्द्रित हों। यदि अधिकतम आवृत्ति के वर्ग के समीप के दो या दो से अधिक वर्गों में, प्रायः मान संकेन्द्रण हो, तो भूयिष्ठक निर्धारित करना कठिन होता है। ऐसी स्थितियों में भूयिष्ठक वर्ग निर्धारित करने के लिए समूहन और विश्लेषण सारणियां बनाते हैं। सतत बंटन के लिए, भूयिष्ठक वर्ग निर्धारित करने के पश्चात् भूयिष्ठक का परिकलन, विभिन्न अंतर्वेशन सूत्रों द्वारा किया जाता है।

एक उपयुक्त माध्य का निर्णय उस प्रयोजन पर निर्भर करता है जिसकी पूर्ति के लिए वह माध्य अभिकल्पित है, जैसे समंक समूह की प्रकृति और रूप; इसका आगे बीजगणितीय विश्लेषण के लिए आवश्यक होना इत्यादि। परन्तु, केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का प्रयोग बड़ी सर्तकता और क्षमता से करना चाहिए।

13.12 शब्दावली

केन्द्रीय प्रवृत्तिः एक अकेला मूल्य जिसकी कही केन्द्र में तथा समस्त मूल्यों के सीमान्तर में होने की प्रवृत्ति होती है।

चरम मूल्यः वे मद जो समंकों के अन्य मदो से बहुत बड़े या बहुत छोटे हो। वे माध्य को अनावश्यक रूप से प्रभावित करते है।

माध्यिकाः चर का वह मान जो श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित कर दे।

विश्लेषण सारणी : वह सारणी जो भूयिष्ठक के निर्धारण में हमारी सहायता करती है और जो विभिन्न स्तम्भों में उपस्थित अधिकतम आवृत्ति को प्रदर्शित करती है।

आनुभविक संबंध : वह संबंध, जो सामान्य वैषम्य वाले बंटन में, विभिन्न माध्यों में होता है, अर्थात् $M_0 = 3M_d = 2\bar{x}$

बहुलक : चर का वह मान जिसके गिर्द अन्य मदें, सर्वाधिक तीव्रता से संकेन्द्रित होने का प्रयत्न करती हैं।

स्थिति का मापः एक माप, जो कि स्थिति का ऐसा बिन्दु होता है जिसके चारों ओर समंक कुलक के अन्य व्यक्तिगत मूल्य एकत्रित हों।

भारित समान्तर माध्यः एक ऐसा माध्य जिसके घटक मदों के लिए उनके सापेक्ष महत्व के अनुसार भार नियत किए जाते हैं।

स्थैतिक माध्यः एक ऐसा माध्य जो परिणाम क्रम में रखी गई श्रेणी की एक विशेष स्थिति में प्रेक्षण के मान पर आधारित हो।

चतुर्थक: चर के वे मान जो एक दी गई श्रेणी का बंटन को चार समान भागों में विभाजित कर दें।

दशमक: विचर के वे मान जो दी गई श्रेणी या बंटन को दस समान भागों में विभाजित कर दें।

शतमक: विचर के वह मान जो दी गयी श्रेणी या बंटन को 100 समान भागों में विभाजित कर दें।

विभाजन मान: चर के वे मान जो बंटन को एक नियत संख्या को समान भागों में विभाजित कर दें।

माध्य: दिए गए संमकों कुलक में समस्त प्रेक्षणों के मूल्यों के योग को प्रेक्षणों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होने वाले मूल्य।

गुणोत्तर माध्य: यदि श्रेणी में n मद हों तो उनका गुणोत्तर माध्य, उनके गुणनफल का nवाँ मूल होता है।

हरात्मक माध्य: व्यक्तिगत प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य के व्युत्क्रम को, उनका हरात्मक माध्य कहते हैं।

द्वि–भूयिष्ठक बंटन: आंकड़ों का एक ऐसा आवृत्ति बंटन, जिसमें, दो मान, शेष मानों की अपेक्षा, अधिक बार आएं।

समूहन सारणी: छः स्तम्भों वाली वह सारणी जो भूयिष्ठक वर्ग के निर्धारण के लिए प्रयोग की जाती है।

13.13 बोध प्रश्नों के उत्तर

क) 1) (i) 11

(ii) $\bar{x} = \frac{\sum fm}{\sum f}, \bar{x} = \frac{A+\sum fd}{n}, \bar{x} = \frac{A+\sum fd}{n} \times c$

(iii) यह परिकलनों को न्यूनतम करता है.

(iv) A = 35

(v) एक वर्ग में प्रत्येक मूल्य उस वर्ग के मध्य बिन्दु के बराबर है।

2) 164.33 रुपये

3) (i) 68 (ii) 0

4) दोनों विधियों द्वारा 128 रु. 33 पैसे

5) 40.2

ख) 2) साधारण समान्तर माध्य = 42.92, भारित माध्य = 44.23

3) दोनों 73.7% के बराबर हैं।

4) 34.47

ग) 1) 12.3% लगभग

2) GM = 25.3 अंक, AM = 28.4 अंक,

4) 29%

घ) 2) HM = 50.55

3) 13

4) 14.63 रु

5) 75.45 कि. मी. प्रति घंटा

ङ) 1 (क) 16, (ख) 0.18

2 $M_d = l + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times i$

3 माध्यिका वर्ग के वर्ग अंतराल का प्रयोग करेंगे।

4 पहला समूह : 63, संयुक्त समूह, 64

5 20

6 210.5

च) 3) Q_1= 23, Q_3= 73, D_4= 38, P_{63}= 60, P_{90}= 83. तथा 8% छात्रों ने 12 से कम अंक प्राप्त किए है। 3% छात्रों ने 95 से ज्यादा अंक प्राप्त किए है।

छ) 4) 30.1

5) $\bar{X}$ = 110, माध्यिका = 110, भूयिष्ठक = 110.9

13.14 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

क) प्रश्न

1) केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक अच्छे माप के गुणों की व्याख्या कीजिए।

2) समान्तर माध्य के गुण तथा परिसीमाएँ बताइए।

3) भारित माध्य क्या है ? किन परिस्थितियों में भारित माध्य साधारण माध्य से अधिमान्य है।

4) समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य के सापेक्ष गुणों और परिसीमाओं को दिखाने के लिए, उनकी तुलना कीजिए।

5) आप, केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक उपयुक्त माप का निर्णय, कैसे करते हो ?

6) माध्यिका किसे कहते हैं। इसके गुणों और परिसीमाओं की व्याख्या कीजिए।

7) माध्यिका परिकलन की विधियों की व्याख्या कीजिए।

8) समांतर माध्य और माध्यिका की, माध्य मापों के रूप में तुलना कीजिए।

9) चतुर्थकों, दशमकों और शतमकों में समानता और अंतर को स्पष्ट कीजिए।

10) समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक सभी समंको के एक विशिष्ट गुण को निरूपित करने का प्रयत्न करते हैं। परंतु प्रत्येक अपने ढंग से विवेचन कीजिये।

11) भूयिष्ठिक किसे कहते है ? एक माध्य माप के रूप में इसके गुणों (लाभों) और सीमाओं की व्याख्या कीजिये।

अभ्यास

1) दो नगरों में कुशल और अकुशल श्रमिकों की संख्या तथा उनकी औसत प्रति घंटा मजदूरी नीचे दी गई है। प्रत्येक नगर के लिए औसत प्रति घंटा मजदूरी ज्ञात कीजिए।

श्रमिक	संख्या	मम्बुई प्रति घंटा मजदूरी (रु. में)	संख्या	कलकत्ता संख्या प्रति घंटा मजदूरी (रु. में)
कुशल	150	1.80	350	1.75
अकुशल	850	1.30	650	1.25

(उत्तर : 1 रु. 38 पैसे, तथा 1 रु. 43 पैसे)

2) एक विनियोक्ता प्रति मास एक कंपनी के 120 रुपये के अंश खरीदता है। पहले पाँच मास में उसने क्रमशः 10 रु., 12 रु, 15 रु., 20 रु. तथा 24 रु. प्रति अंश के हिसाब से अंश खरीदे। पाँच मास बाद उसके पास अंशों का औसत मूल्य क्या है ?
(उत्तर 14.63 रुपये) ।

3) एक फैक्टरी में जो दो पालियों में चलती है, कुल 100 श्रमिक हैं। श्रमिकों को दी जाने वाली औसत मजदूरी 38 रु. प्रतिदिन है। पहली पाली में 60 श्रमिक काम करते हैं, तथा उनकी औसत मजदूरी 40 रु. प्रतिदिन है। बाकी 40 श्रमिकों की, जो कि दूसरी पाली में काम करते हैं औसत मजदूरी क्या है ?

(उत्तर : 35 रुपये)

4) 50 मदों का समान्तर माध्य 28.5 पाया गया। बाद में पता चला कि एक मद 39 अधिक ले ली गई थी। 49 मदों का परिशुद्ध माध्य ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 28.3)

5) निम्न सारिणी विभिन्न व्यापार श्रेणियों में श्रमिकों की संख्या दर्शाती है, जिन्होंने एक सप्ताह में सोमवार से शुक्रवार तक प्रतिदिन अलग–अलग घंटा तक काम किया। I,II, III, IV, V ओर वर्ग के श्रमिकों का प्रति घंटा वेतन क्रमशः 0.97 रुः, 0.77 रु, 1.01 रुः, 0.67 रु. तथा 0.75 रु. सप्ताह के लिए

सारी श्रेणियों की प्रति श्रमिक प्रति घंटा औसत मजदूरी का परिकलन कीजिए।

श्रेणी	सोमवार (7 घंटे)	मंगलवार (6 घंटे)	बुधवार (5 घंटे)	बृहस्पतिवार (4 घंटे)	शुक्रवार (5 घंटे)
I	30	20	25	15	30
II	25	25	30	20	20
III	30	25	30	25	30
IV	20	20	20	20	25
V	25	20	25	15	21

(**संकेतः** प्रत्येक श्रेणी के अंतर्गत कुल घंटे ज्ञात कीजिए तथा इसे भार के रूप में लीजिए) (**उत्तरः** 0.84 रुपये प्रति घंटा)

6) एक राज्य प्राधिकरण ने दो तहसीलों में परिवारों की आयु लगाया जो नीचे दिया गया है। माध्य का परिकलन कीजिए।

i) क्षेत्र ''अ'' के लिए

ii) क्षेत्र ''ब'' के लिए

ii) एक साथ दोनों क्षेत्रों के लिए।

	परिवारों की प्रतिमतता	
अनुमानित आयु (वर्षों में)	क्षेत्र अ	क्षेत्र ब
0—20	16	13
20—40	37	35
40— 80	35	46
80—100	12	6

(उत्तरः क्षेत्र अ = 58.45, क्षेत्र ब = 58.48, सामूहिक क्षेत्र = 58.47)

7) यदि 20 वर्ष में, आबादी दुगनी हो गई है। तो क्या यह कहना ठीक होगा कि वृद्धि दर 5% वार्षिक रही है।

(उत्तरः नहीं 1.035)

8) एक फैक्टरी के उत्पादन की वार्षिक वृद्धि दर, पिछले पांच वर्षों में, क्रमशः 5. 0, 7.5, 5.0, 2.5 और 10 प्रतिशत रही है। इस अवधि के लिए उत्पादन का वार्षिक प्रतिशत चक्रवृद्धि दर क्या होगी ? (उत्तरः 5.9% वार्षिक)

9) मदों का गुणोत्तर माध्य 3 है और 12 मदों का गुणोत्तर माध्य, 11 है। सभी 20 मदों का गुणोत्तर माध्य क्या होगा।

(उत्तर : 6.54)

10) निम्न आंकड़ों के लिए, हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए:

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

(2) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 1/9.

(उत्तर : (i) 3.184 (2) 4.505)

11) आप एक यात्रा करते हैं, जिसमें आपको, 900 कि.मी. रेलगाडी से, 60 कि.मी. प्रतिघंटा की औसत गति से 3000 कि.मी. नाव से 25 कि.मी. प्रतिघंटा की औसत गति से, 4000 कि.मी. वायुयान से 350 कि.मी. प्रति घंटा की औसत गति से और अंततः 15 किमी टैक्सी से 25 किमी प्रति घंटा की औसत गति से, यात्रा करनी पड़ी। सारी दुरी के लिए, औसत गति ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 31.6 किमी प्रति घंटा)

12) यूनिवर्सिटी लाइब्रेरी के काउंटर से, 10 विभिन्न दिनों में, जारी की गई पुस्तकों की संख्या इस प्रकार है :

180, 96, 75, 70, 80, 102, 100, 94, 75, 400

इन आंकड़ों के प्रतिनिधि रूप में, कौन सा माध्य सर्वोत्तम होगा। इसे परिकलित कीजिए।
(उत्तर : माध्यिका 97.5)

13) ऑटोवाहन दुर्घटना बीमे के दावों के बारे में, सूचना नीचे दी गई है। माध्यिका ज्ञात कीजिए।

दावे की राशि (रु.)	आवृत्ति
150 से कम	52
150– 199.99	108
200– 249.99	230
250 – 299.99	528
300 – 349.99	663
350 – 399.99	816
400–449.99	993
450–499.99	825
500 और अधिक	650

(उत्तर : लगभग 402 रु.)

14) निम्न आंकड़ों के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए, जब कि माध्य 45.5 हो।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
70–80	10
60–70	10
50–60	20

40—50	....
30—40	12
20—10	7
10—20	8
0—10	5

(उत्तर : 50)

15) 500 विद्यार्थियों के एक समूह के लिए, 100 अंकों में से प्राप्त अंकों के बारे में, निम्न सूचना उपलब्ध है:

8% विद्यार्थियों ने 12 अंकों से कम अंक प्राप्त किए। 3% विद्यार्थियों ने 95 अंकों से अधिक अंक प्राप्त किए। समंकों को वर्गान्तरों में सारणीबद्ध कीजिये।

अंक	0—12	12—23	23—38	38—45	45—60
विद्यार्थियों की संख्या	40	85	75	50	65

अंक	60.73	73.83	83.95	95—100
विद्यार्थियों की संख्या	60	75	35	15

16) अनुप्रस्थित आवृत्तियों को ज्ञात कीजिए, यदि माध्यिका 25 हो।

मासिक व्यय (रु.)	आवृत्ति
0—10	14
10—20	..
20—30	27
30—40	..
40—50	15

(उत्तर : 23, 21)

17) एक लाण्डरी दो विभिन्न छापों की कपड़े धोने की मशीनों का प्रयोग करती है। पूर्व अनुभव के आधार पर निम्न परिणाम अभिलिखित किए गए हैं :

छाप	माध्यिका जीवन	माध्य जीवन
A	6500 घंटे	6000 घंटे
B	6000 घंटे	6500 घंटे

यदि दोनों छापों के मूल्य समान हों तो किस छाप को खरीदना चाहिए ?

18) दिए गए संमको से Q_1, P_{30}, D_8 का परिकलन कीजिए।

पहनी गई कॉल की माप:	14"	14.5"	15:	15.5"	16"
छात्रों की संख्या :	20	37	43	26	14

(उत्तर: Q_1 = 14.5", P_{30} = 14.5", D_8= 15.5")

19) निम्न आंकडों से लेखाचित्र द्वारा D_6 माध्यिकां P_{20}, Q_1 तथा Q_3 ज्ञात कीजिए। सूत्र का प्रयोग करकें इन्हें सत्यापित कीजिए।

दैनिक मजदूरी	श्रमिक
10 से कम	
10-20	25
20-30	40
30-40	70
40-50	90
50-60	40
60-70	20
Above 70	

(उत्तर.: D_6= 44.4, माध्यिका = 41.1, P_{20} = 27.5, Q, = 30.7; Q_3 = 49.4)

20) पहले प्रसव पर विवाहित स्त्रियों की भुयिष्ठक आयु ज्ञात कीजिए:

आयु (वर्षों में)	:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
संख्या (स्त्रियों की)	:	37	162	343	390	256	433	161	355	65	85	49	49	40

(उत्तर.: 18 वर्ष)

21) एक फैक्टरी में, मजदूरी बंटन के बारे में, निम्न सूचना से भूयिष्ठक मजदूरी निर्धारित कीजिए:

साप्ताहिक मजदूरी (रु.)	कर्मचारियों की संख्या
0-20	8
40-60	12
60-80	20
80-100	30
100-120	40
120-140	35
140-160	18
160-180	7
180-200	5

(उत्तर: रु 133.33)

22) निम्न सारणी में, गत मास में, अमर फारमेस्यूटिकल पर, की गई बिक्री मांगों की सापेक्ष आवृत्ति बंटन का वर्णन है। मांगों की भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए।

बिक्री मांगों की संख्या	:	0	1	2	3	4	5 या अधिक
सापेक्ष आवृत्ति	:	0.21	0.18	0.38	0.19	0.03	0.01

(उत्तरः 2 बिक्री मांगे)

23) निम्न समकों के लिए भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए :

वर्ग	:	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृत्ति	:	24	42	56	66	108	130	154

(उत्तरः 71.34)

24) यदि बंटन के लिए, समांतर माध्य 27.9 हो और भूयिष्ठक 25.2 हो, तो माध्यिका आकलित कीजिए। यदि कोई कल्पना की गई हो तो उन्हें लिखिए।

(उत्तरः 27)

25) निम्न बटनों के लिए भूयिष्ठक मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग	:	10-20	20-30	20-24	24-30	30-50	50-52	52-60
आवृत्ति	:	4	9	6	9	52	2	8

(उत्तर : 40)

नोटः ये प्रश्न और अभ्यास, इकाई को श्रेष्ठतर समझने में आपकी सहायता करेंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परंतु, अपने उत्तर विश्वविद्यालय को मत भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

संख्या का लघु मान ज्ञात करना

किसी संख्या के लघु मान Log को ज्ञात करने की प्रक्रिया के तीन प्रमुख चरण है। ये हैः (1) पूर्णाश ज्ञात करना, (2) अपूर्णाश ज्ञात करना और (3) प्रतिलघुगणक ज्ञात करना। आइये अब हन तीन चरणों पर विस्तार से विचार करें।

1) **पूर्णाश (Characteristics) ज्ञात करनाः** पहले चरण में हम पूर्णाश ज्ञात करते है। जैसा कि पहले बताया गया था, यदि संख्या में अंकों की गिनती, 1 से अधिक हो, तो पूर्णाश, संख्या में दशमिक बिन्दु के बाई ओर के अंकों की संख्या से एक कम होगा। उदाहरण कि लिए Log 4.1542 का पूर्णाश 2 है क्योंकि संख्या में दशमिक बिन्दु के बाई ओर अंकों की संख्या 3 है। इसी प्रकार, Log 17.23 का पूर्णाश 1 है और Log 7.23 का पूर्णाश 0 है।

   उन संख्या की स्थिति में, जो 1 से छोटी हो, पूर्णाश ऋण होता है, और परिमाण में दशमिक बिन्दु के पश्चात् और पहले सार्थक अंक से पूर्व, शून्यों की संख्या से अधिक है। इस प्रकार, Log 0.98 का पूर्णाशा –1 होगा, Log 0.098 का पूर्णाश –2, और Log 0.00908 का पूर्णाश –3 होगा, इत्यादि।

2) **अपूर्णांश (Mantissa) ज्ञात करना:** किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए, हम लघुगणक सारणियों का प्रयोग करते हैं। लघुगणक सारणियाँ इस इकाई के अंत में दी गई है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए, Log 3451 का अपूर्णांश अभीष्ट है। पहले हम, लघुगणक सारणी में, 34 (अर्थात् संख्या के पहले दो अंकों से बनी संख्या) की पंक्ति में, और 5 (अर्थात् संख्या के तीसरे अंक के स्तम्भ में देखते हैं। इनके प्रतिच्छेद पर, अपूर्णाश 5378 पाते हैं। अब इसी पक्ति में, माध्य अंतरों के स्तंभ 1 (संख्या में, चौथा अंक) में देखते हैं, तो मान 1 प्राप्त करते हैं। इस 1 का 5378 में योग करें तो 5379 प्राप्त होता है। अतः Log 3451 का अपूर्णाश 0.5379 है। आप पहले ही ज्ञात कर चुके है कि Log 3451 का पूर्णाश 3 है अतः Log 3451 = 3.5379

ध्यान दीजिए कि अपूर्णाश सदैव धन होता है और संख्या में दशमिक बिन्दु के स्थानांतरण का इस पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। अर्थात् संख्याओं 245, 2.45, 24. 5, 0.245, 0.0245, 0.00245 और 0.000245 में से प्रत्येक के लघुगणक का अपूर्णाश एक समान होगा। लघुगणक सारणी देखने पर, यह ज्ञात किया जा सकता है कि Log 245 का अपूर्णाश 0.3892 है। संख्या के लघुगणक के पूर्णाश का निश्चय, स्वयं उस संख्या के अंकों को देख कर किया जा सकता है, और अपूर्णाश को, संख्या के पहले चार सार्थक अंकों द्वारा, सारणी से प्राप्त किया जा सकता है। निम्न सारणी का अवलोकन कीजिए और देखिए कि किस प्रकार, अपूर्णाश में परिवर्तन के बिना, पूर्णाश में परिवर्तन होता है।

संख्या	लघुगणक का मान
2450.0	3.3892
245.0	2.3892
24.5	1.3892
2.45	0.3892
0.245	$\bar{1}.3892$
0.0245	$\bar{2}.3892$
0.00245	$\bar{3}.3892$

टिप्पणी: कुछ लघुगणक मानों में, आप पूर्णाश के ऊपर एक दण्डिका पाते है। पूर्णाश के ऊपर दण्डिका लगाने से अभिप्राय है, कि वह भाग जिस पर दण्डिका है, ऋण है और अपूर्णाश (दशमलव भाग) धन है।

3) **प्रति लघुगणक (Antilogarithms) ज्ञात करना:** जैसा कि आप को ज्ञात है, लघुगणक सारिणियाँ किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णाश मान प्रदान करती है। जब कि प्रति लघुगणक सारिणियाँ संख्या का मान प्रदान करती है जिसका लघुगणक मान दिया गया हो। मान लीजिए, उपरोक्त उदाहरण में लघुगणक मान 3.3892 ज्ञात है। अब हमारी, अभिरूचि उस (संगत) यथार्थ संख्या ज्ञात करने में है, जिसका लघुगणक मान 3.3892 है, अर्थात् संख्या 2450। हम कहेंगें कि 3.3892 का प्रति लघुगणक 2450 है, या प्रतिकों में, anti log 3.3892 = 2450। आइये अब देखे कि किस प्रकार, प्रति लघुगणक सारणी से, यह प्रति लघु मान ज्ञात किया जा सकता है। 3.3892 का प्रति

लघुगणक ज्ञात करने के लिए पहले केवल अपूर्णाश भाग, अर्थात् .3892 पर विचार कीजिए। प्रति लघु सारणी में, .38 की पंक्ति और 9 के स्तम्भ में देखिए। आप संख्या 2449 पाएगें। अब माध्य अंतरों के स्तम्भ 2 में और उसी पंक्ति में देखिए। तो आप मान 1 प्राप्त करेंगे। इस मान 1 को, 2449 में योग करने पर, आप प्रति लघु मान के अंक 2450 ज्ञात करते है। अब केवल दशमिक बिन्दु की स्थिति के बारे में निश्चय करना है। लघु मान 3.3892 में पूर्णाश 3 है। अतः पूर्वचर्चित नियमों के अनुसार, प्रति लघुगणक संख्या में, (दशमिक बिन्दु से बाई ओर) अंक होने चाहिए। अतः चार अंकों के पश्चात् दशमिक बिन्दु लगा दीजिए। इसका अर्थ है, कि 2,450.0 ही मूल संख्या है। $\log \bar{2}.3892$ की संगत, संख्या प्राप्त करने के लिए, सारणी से प्राप्त लघु मान में संख्याएँ पहली स्थिति के अनुसार ही होंगी। केवल दशमिक बिन्दु की स्थिति बदल जाएगी, जिस का निश्चय पूर्णाश की सहायता के किया जाएगा। इस स्थिति में पूर्णाश $\bar{2}$ है। इसलिए, पूर्वचर्चित नियमों के अनुसार, प्रति लघु 1 से छोटा होगा और उससे दशमिक बिन्दु के पश्चात् और पहले सार्थक अंक से पहले एक शून्य हागा। इस प्रकार, $\text{anti}\log \bar{2}.3892 = 0.0245$।

कुछ संदर्भ पुस्तकें

एन. के. कक्कर एवं एन. डी. वोहरा : सांख्यिकी (नई दिल्ली : एवं चन्द एंड कम्पनी लि., 1990) अध्याय 1

सत्य प्रकाश गुप्ताः सांख्यिकी के सिद्धांत (नई दिल्ली : सुल्तान चन्द एंड संस, 1990) अध्याय 1, 2

LOGARITHMS

79

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											Mean Differences.								
10	00000	00432	00860	01284	01703						42	85	127	170	212	254	297	339	381
						02119	02531	02938	03342	03743	40	81	121	162	202	242	283	323	364
11	04139	04532	04922	05308	05690						37	77	116	191	193	232	270	309	348
						06070	06446	06819	07188	07555	37	74	111	148	185	222	259	296	333
12	07918	08279	08636	08991	09342						36	71	106	142	177	213	248	284	319
						09691	10037	10380	10721	11059	34	68	102	136	170	204	238	272	307
13	11394	11727	12057	12385	12710						33	66	98	131	164	197	229	262	295
						13033	13354	13672	13988	14301	32	63	95	126	158	190	221	253	284
14	14613	14922	15229	15534	15836						30	61	91	122	152	183	213	244	274
						16137	16435	16732	17026	17319	29	59	88	118	147	177	206	236	265
15	17609	17898	18184	18469	18752						28	57	85	114	142	171	199	228	256
						19033	19312	19590	19866	20140	28	55	83	110	138	165	193	221	248
16	20412	20683	20952	21219	21484						27	53	80	107	134	160	187	214	240
						21748	22011	22272	22531	22789	27	52	78	104	130	156	182	208	233
17	23045	23300	23553	23805	24055						26	50	76	101	126	151	176	201	227
						24304	24551	24797	25042	25285	25	49	73	98	122	147	174	196	220
18	25527	25768	26007	26245	26482						24	48	71	95	119	143	167	190	214
						26717	26951	27184	27476	27646	23	46	69	93	116	139	162	185	208
19	27875	28103	28330	28556	28780						23	45	68	90	113	135	158	180	203
						29003	29226	29447	29667	29885	22	44	66	88	110	132	154	176	198
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	43	64	85	106	127	148	170	190
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	41	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	20	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	35	53	71	89	106	124	142	159
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	107	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	41	55	69	83	97	110	124
32	50515	50650	50786	50920	51054	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	85	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	53	63	74	84	95
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	74	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	36	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	63	72	81
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	62	70	79

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	50	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	63	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	44	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	58	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	36	43	50	57	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	41	48	55	62
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	20	27	34	41	48	54	61
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	38	45	51	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	12	19	25	31	37	43	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	19	25	31	37	43	50	56
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	31	37	43	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	17	23	29	35	41	46	52
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	41	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	6	11	17	22	28	33	39	44	50
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90848	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	42	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	27	32	37	42	48
83	91908	91960	92012	92064	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	20	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	26	31	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	28	33	38	42
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	18	23	28	32	38	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	42
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99697	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	31	35	39

81

											Mean Differences.								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	10000	10023	10046	10069	10093	10116	10139	10162	10186	10209	2	5	7	9	12	14	16	19	21
.01	10233	10257	10280	10304	10328	10351	10375	10399	10423	10447	2	5	7	10	12	14	17	19	21
.02	10471	10495	10520	10544	10568	10593	10617	10641	10666	10691	2	5	7	10	12	15	17	20	22
.03	10715	10740	10765	10789	10814	10839	10864	10889	10914	10940	3	5	8	10	13	15	18	20	23
.04	10965	10990	11015	11041	11066	11092	11117	11143	11169	11194	3	5	8	10	13	15	18	20	23
.05	11220	11246	11272	11298	11324	11350	11376	11402	11429	11455	3	5	8	11	13	16	18	21	24
.06	11482	11508	11535	11561	11588	11614	11641	11668	11695	11722	3	5	8	11	13	16	19	21	24
.07	11749	11776	11803	11830	11858	11885	11912	11940	11967	11995	3	5	8	11	14	16	19	22	25
.08	12023	12050	12078	12106	12134	12162	12190	12218	12246	12274	3	6	8	11	14	17	20	22	25
.09	12303	12331	12359	12388	12417	12445	12474	12503	12531	12560	3	6	9	11	14	17	20	23	26
.10	12589	12618	12647	12677	12706	12735	12764	12794	12823	12853	3	6	9	12	15	18	21	24	26
.11	12882	12912	12942	12972	13002	13032	13062	13092	13122	13152	3	6	9	12	15	18	21	24	27
.12	13183	13213	13243	13274	13305	13335	13366	13397	13428	13459	3	6	9	12	15	18	21	25	28
.13	13490	13521	13552	13583	13614	13646	13677	13709	13740	13772	3	6	9	13	16	19	22	25	28
.14	13804	13836	13868	13900	13932	13964	13996	14028	14060	14093	3	6	10	13	16	19	22	26	29
.15	14125	14158	14191	14223	14256	14289	14322	14355	14388	14421	3	7	10	13	16	20	23	26	30
.16	14454	14488	14521	14555	14588	14622	14655	14689	14723	14757	3	7	10	13	17	20	24	27	30
.17	14791	14825	14859	14894	14928	14962	14997	15031	15066	15101	3	7	10	14	17	21	24	28	31
.18	15136	15171	15205	15241	15276	15311	15346	15382	15417	15453	4	7	11	14	18	21	25	28	32
.19	15488	15524	15560	15596	15631	15668	15704	15740	15776	15812	4	7	11	14	18	22	25	29	32
.20	15849	15885	15922	15959	15996	16032	16069	16106	16144	16181	4	7	11	15	18	22	26	30	33
.21	16218	16255	16293	16331	16368	16406	16444	16482	16520	16558	4	8	11	15	19	23	26	30	34
.22	16596	16634	16672	16711	16749	16788	16827	16866	16904	16943	4	8	12	15	19	23	27	31	35
.23	16982	17022	17061	17100	17140	17179	17219	17258	17298	17338	4	8	12	16	20	24	28	32	36
.24	17378	17418	17458	17498	17539	17579	17620	17660	17701	17742	4	8	12	16	20	24	28	32	36
.25	17783	17824	17865	17906	17947	17989	18030	18072	18113	18155	4	8	12	17	21	25	29	33	37
.26	18197	18239	18281	18323	18365	18408	18450	18493	18535	18578	4	8	13	17	21	25	30	34	38
.27	18621	18664	18707	18750	18793	18836	18880	18923	18967	19011	4	9	13	17	22	26	30	35	39
.28	19055	19099	19143	19187	19231	19275	19320	19364	19409	19454	4	9	13	18	22	26	31	35	40
.29	19498	19543	19588	19634	19679	19724	19770	19815	19861	19907	5	9	14	18	23	27	32	36	41
.30	19953	19999	20045	20091	20137	20184	20230	20277	20324	20370	5	9	14	19	23	28	32	37	42
.31	20417	20464	20512	20559	20606	20654	20701	20749	20797	20845	5	10	14	19	24	29	33	38	43
.32	20893	20941	20989	21038	21086	21135	21184	21232	21281	21330	5	10	15	19	24	29	34	39	44
.33	21380	21429	21478	21528	21577	21627	21677	21727	21777	21827	5	10	15	20	25	30	35	40	45
.34	21878	21928	21979	22029	22080	22131	22182	22233	22284	22336	5	10	15	20	25	31	36	41	46
.35	22387	22439	22491	22542	22594	22646	22699	22751	22803	22856	5	10	16	21	26	31	37	42	47
.36	22909	22961	23014	23067	23121	23174	23227	23281	23336	23388	5	11	16	21	27	32	37	43	48
.37	23442	23496	23550	23605	23659	23714	23768	23823	23878	23933	5	11	16	22	27	33	38	44	49
.38	23988	24044	24099	24155	24210	24266	24322	24378	24434	24491	6	11	17	22	28	34	39	45	50
.39	24547	24604	24660	24717	24774	24831	24889	24946	25003	25061	6	11	17	23	29	34	40	46	51
.40	25119	25177	25236	25293	25351	25410	25468	25527	25586	25645	6	12	18	23	29	35	41	47	53
.41	25704	25763	25823	25882	25942	26002	26062	26122	26182	26242	6	12	18	24	30	36	42	48	54
.42	26303	26363	26424	26485	26546	26607	26669	26730	26792	26853	6	12	18	24	31	37	43	49	55
.43	26915	26977	27040	27102	27164	27227	27290	27353	27416	27479	6	13	19	25	31	38	44	50	56
.44	27542	27606	27669	27733	27797	27861	27925	27990	28054	28119	6	13	19	26	32	39	45	51	58
.45	28184	28249	28314	28379	28445	28510	28576	28642	28708	28774	7	13	20	26	33	39	46	52	59
.46	28840	28997	28973	29040	29107	29174	29242	29309	29376	29444	7	13	20	27	34	40	47	54	60
.47	29512	29580	29648	29717	29785	29854	29923	29992	30061	30130	7	14	21	28	34	41	48	55	62
.48	30200	30269	30339	30409	30479	30549	30620	30690	30761	30832	7	14	21	28	35	42	49	56	63
.49	30903	30974	31046	31117	31189	30261	31333	31405	31477	31550	7	14	22	29	36	43	50	58	65

ANTILOGARITHMS

82

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	31623	31696	31769	31842	31916	31989	32063	32137	32211	32285	7	15	22	29	37	44	52	59	66
.51	32359	32434	32509	32584	32659	32735	32809	32885	32961	33037	8	15	23	30	38	45	53	60	68
.52	33113	33189	33266	33343	33420	33497	33574	33651	33729	33806	8	15	23	31	39	46	54	62	69
.53	33884	33963	34041	34119	34198	34277	34356	34435	34514	34594	8	16	24	32	40	47	55	63	71
.54	34674	34754	34834	34914	34995	35075	35156	35237	35318	35400	8	16	24	32	40	48	56	65	73
.55	35481	35563	35645	35727	35810	35892	35975	36058	36141	36224	8	16	25	33	41	50	58	66	74
.56	36208	36392	36475	36559	36644	36728	36813	36898	36983	37068	8	17	25	34	42	51	59	68	76
.57	37154	37239	37325	37411	37497	37584	37670	37757	37844	37931	9	17	26	35	43	52	61	69	78
.58	38019	38107	38194	38282	38371	38459	38548	38637	38726	38815	9	18	27	35	44	53	62	71	80
.59	38905	38994	39084	39174	39264	39355	39446	39537	39628	39719	9	18	27	36	45	54	63	72	82
.60	39811	39902	39994	40087	40179	40272	40365	40458	40551	40644	9	19	28	37	46	56	65	74	83
.61	40738	40832	40926	41020	41115	41210	41305	41400	41495	41591	9	19	28	38	47	57	66	76	85
.62	41687	41783	41879	41976	42073	42170	42267	42364	42462	42560	10	19	29	39	49	58	68	78	87
.63	42658	42756	42855	42954	43053	43152	43251	43351	43451	43551	10	20	30	40	50	60	70	80	89
.64	43652	43752	43853	43954	44055	44157	44259	44361	44463	44566	10	20	30	41	51	61	71	81	91
.65	44668	44771	44875	44978	45082	45186	45290	45394	45499	45604	10	21	31	42	52	62	73	83	94
.66	45709	45814	45920	46026	46132	46238	46345	46452	46559	46666	11	21	32	43	53	64	75	85	96
.67	46774	46881	46989	47098	47206	47315	47424	47534	47643	47753	11	22	33	44	54	65	76	87	98
.68	47863	47973	48084	48195	48306	48417	48529	48641	48753	48865	11	22	33	45	56	67	78	89	100
.69	48978	49091	49204	49317	49431	49545	49659	49774	49888	50003	11	23	34	46	57	68	80	91	103
.70	50119	50234	50350	50466	50582	50699	50816	50933	51050	51168	12	23	35	47	58	70	82	93	105
.71	51286	51404	51523	51642	51761	51880	52000	52119	52240	52360	12	24	36	48	60	72	84	96	108
.72	52481	52602	52723	52845	52966	53088	53211	53333	53456	53580	12	24	37	49	61	73	85	98	110
.73	53703	53827	53951	54075	54200	54325	54450	54576	54702	54828	13	25	38	50	63	75	88	100	113
.74	54954	55081	55208	55336	55463	55590	55719	55847	55976	56105	13	26	38	51	64	77	90	102	115
.75	56234	56364	56494	56624	56754	56885	57016	57148	57280	57412	13	26	39	52	66	79	92	105	118
.76	57544	57677	57810	57943	58076	58210	58345	58479	58614	58749	13	27	40	54	67	80	94	107	121
.77	58884	59020	59156	59293	59429	59566	59704	59841	59979	60117	14	27	41	55	69	82	96	110	123
.78	60256	60395	60534	60674	60814	60954	61094	61235	61376	61518	14	28	42	56	70	84	98	112	126
.79	61659	61802	61944	62087	62230	62373	62517	62661	62806	62951	14	29	43	58	72	86	101	115	130
.80	63096	63241	63387	63533	63680	63826	63973	64121	64269	64417	15	29	44	59	74	88	103	118	132
.81	64565	64714	64863	65013	65163	65313	65464	65615	65766	65917	15	30	45	60	75	90	105	120	135
.82	66069	66222	66374	66527	66681	66834	66988	67143	67298	67453	15	31	46	62	77	92	108	123	139
.83	67608	67764	67920	68077	68234	68391	68549	68707	68865	69024	16	32	47	63	79	95	110	126	145
.84	69183	69343	69503	69663	69823	69984	70146	70307	70469	70632	16	32	48	64	81	97	113	129	145
.85	70795	70958	71121	71285	71450	71614	71779	71945	72111	72277	17	33	50	66	83	99	116	132	149
.86	72444	72611	72778	72946	73114	73282	73451	73621	73790	73961	17	34	51	68	85	101	118	135	152
.87	74131	74302	74473	74645	74817	74989	75162	75336	75509	75683	17	35	52	69	87	104	121	138	156
.88	75858	76033	76208	76384	76560	76736	76913	77090	77268	77446	18	35	53	71	89	107	125	142	159
.89	77625	77804	77983	78163	78343	78524	78705	78886	79068	79250	18	36	54	72	91	109	127	145	163
.90	79433	79616	79799	79983	80168	80353	80538	80724	80910	81096	19	37	56	74	93	111	130	148	167
.91	81283	81470	81658	81846	82035	82224	82414	82604	82794	82985	19	38	57	76	95	113	132	151	170
.92	83176	83368	83560	83753	83946	84140	84333	84528	84723	84918	19	39	58	78	97	116	136	155	175
.93	85114	85310	85507	85704	85901	86099	86298	86497	86696	86896	20	40	60	79	99	119	139	158	178
.94	87096	87297	87498	87700	87902	88105	88308	88512	88716	88920	20	41	61	81	102	122	142	162	183
.95	89125	89331	89536	89743	89950	90157	90365	90573	90782	90991	21	42	62	83	104	125	146	166	187
.96	91201	91411	91622	91833	92045	92257	92470	92683	92897	93111	21	42	64	85	106	127	149	170	191
.97	93325	93541	93756	93972	94189	94406	94624	94842	95060	95280	22	43	65	87	109	130	152	174	195
.98	95499	95719	95940	96161	96383	96605	96828	97051	97275	97499	22	44	67	89	111	133	155	178	200
.99	97724	97949	98175	98401	98628	98855	99083	99312	99541	99770	23	46	68	91	114	137	160	182	205

RECIPROCALS OF NUMBERS. FROM 1 TO 10

[Numbers in difference columns to be subtracted, not added.]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	1·000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174									
1·1	·9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403									
1·2	·8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7813	7752									
1·3	·7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194									
1·4	·7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711	5	10	14	19	24	29	33	38	43
1·5	·6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289	4	8	13	17	21	25	29	33	38
1·6	·6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917	4	7	11	15	18	22	26	29	33
1·7	·5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587	3	6	10	13	16	20	23	26	29
1·8	·5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1·9	·5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2·0	·5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785	2	5	7	10	12	14	17	19	21
2·1	·4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	2	4	7	9	11	13	15	17	20
2·2	·4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2·3	·4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2·4	·4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2·5	·4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2·6	·3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717	1	3	4	6	7	8	10	11	13
2·7	·3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2·8	·3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2·9	·3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3·0	·3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236	1	2	3	4	5	6	7	9	10
3·1	·3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·2	·3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·3	·3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3·4	·2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3·5	·2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3·6	·2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3·7	·2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3·8	·2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3·9	·2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4·0	·2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4·1	·2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4·2	·2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4·3	·2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·4	·2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·5	·2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·6	·2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·7	·2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·8	·2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·9	·2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·0	·2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	197[illegible]	[illegible]969	1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·1	·1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5·2	·1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5·3	·1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·4	·1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3

RECIPROCALS OF NUMBERS. FROM 1 TO 10

[Numbers in difference columns to be subtracted, not added.] 84

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1 2 3	4 5 6	7 8 9
5·5	·1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789	0 1 1	1 2 2	2 3 3
5·6	·1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757	0 1 1	1 2 2	2 3 3
5·7	·1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727	0 1 1	1 1 2	2 2 3
5·8	·1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698	0 1 1	1 1 2	2 2 3
5·9	·1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669	0 1 1	1 1 2	2 2 3
6·0	·1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642	0 1 1	1 1 2	2 2 3
6·1	·1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616	0 1 1	1 1 2	2 2 2
6·2	·1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590	0 1 1	1 1 2	2 2 2
6·3	·1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·4	·1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·5	·1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·6	·1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·7	·1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·8	·1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·9	·1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431	0 0 1	1 1 1	2 2 2
7·0	·1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·1	·1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·2	·1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·3	·1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·4	·1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·5	·1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·6	·1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·7	·1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284	0 0 0	1 1 1	1 1 1
7·8	·1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267	0 0 0	1 1 1	1 1 1
7·9	·1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·0	·1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·1	·1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·2	·1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·3	·1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·4	·1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·5	·1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·6	·1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·7	·1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·8	·1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·9	·1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·0	·1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·1	·1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1090	1089	1088	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·2	·1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·3	·1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·4	·1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·5	·1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·6	·1042	1041	1039	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·7	·1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·8	·1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·9	·1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	0 0 0	0 0 1	1 1 1

इकाई 14 अपकिरण की माप

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप

- अपकिरण की संकल्पना और उसे मापने के महत्व की व्याख्या कर सकेंगे;
- विचरण की निरपेक्ष और सापेक्ष मापों के भेद कर सकेंगे;
- विभिन्न प्रकार के समकों के लिए अपकिरण की कुछ मापों, जैसे विस्तार, चतुर्थक विचलन और माध्य विचलन को परिकलित कर सकेंगे;
- विभिन्न परिस्थितियों में अपकिरण की उपयुक्त माप के प्रयोग का निर्णय ले सकेंगे।
- मानक विचलन का मापन कर सकेंगे और परिभाषित कर सकेंगे तथा इसके गुणों और सीमाओं को बता सकेंगे;
- विभिन्न प्रकार के डेटा के लिए भिन्नता और भिन्नता कें गुणांक को परिभाषित कर सकेंगे और उसका मापन कर सकेंगें;
- अपकिरण के विभिन्न उपायों की तुलना और उचित परिस्थितियों में उनका प्रयोग सकेंगें;

14.1 प्रस्तावना

इकाई 13 में आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापों का अध्ययन किया है। पढें गए इकाई में, संपूर्ण ऑकडे को दर्शाने के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति केवल एक मूल्य देते हैं। परंतु समंकों का विश्लेषण करने के लिए, केवल केन्द्रीय प्रवृत्ति ही पर्याप्त नहीं है। समंकों के अधिक सार्थक विश्लेषण के लिए, अपकिरण अर्थात् समंकों के विस्तार या केन्द्रीय वृत्ति से मदों के विचलन की मात्रा का अध्ययन करना भी आवश्यक है। इस इकाई में, आप, अपकिरण के अर्थ और उसके महत्व का अध्ययन करेंगे। आप अपकिरण की तीन मापों अर्थात् विस्तार, चतुर्थक विचलन और माध्य विचलन के बारे में भी विस्तार से पढ़ेगें।

14.2 अपकिरण की संकल्पना

अपकिरण की माप को समझने के लिये आइये पहले कुछ परिभाषाओं को देखते हैं।

– स्पीगेल के अनुसार, संख्यात्मक ऑकडों का किसी औसत मूल्य के पास, जिस सीमा तक बिखराव (फैलाव) है उसे ऑकड़ों का विचरण या अपकिरण कहते है।

– सीमसेन और काफ्ता के अनुसार, किसी श्रृखंला (श्रेणी) में संख्याओं के समूह का उसके औसत के पास बिखराव के मापन को विचरण की माप या अपकिरण की माप कहते है।

– बूक्र और डीक के अनुसार किसी चर के उसके केन्द्रीय मान के आसपास के बिखराव की सीमा अपकिरण है।

'अपकिरण' (dispersion) शब्द का प्रयोग समंकों की विषमांगता की मात्रा को प्रकट करने के लिए किया जाता है। यह समंकों का एक महत्त्वपूर्ण लक्षण है, जो प्रेक्षणों की परस्पर विविधता की मात्रा को निर्दिष्ट करता है। अपकिरण की माप केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर व्यक्तिगत मानों के विस्तार या बिखराव का वर्णन करता है। अपकिरण की संकल्पना को स्पष्टतः समझने के लिए उदाहरण 1 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 1: तीन विभिन्न फर्मों की दैनिक बिक्री (रुपयों में)

फर्म A	फर्म B	फर्म C
60,000	62,500	51,000
60,000	60,000	32,000
60,000	52,250	22,000
60,000	56,500	18,000
60,000	60,500	27,000
60,000	68,250	2,10,000
$\overline{X}_A = 60{,}000$	$\overline{X}_B = 60{,}000$	$\overline{X}_C = 60{,}000$

क्योंकि तीनों फर्मों A, B और C की, औसत दैनिक बिक्री, अभिन्न हैं, यह निष्कर्ष निकालने की संभावना हो सकती है कि दैनिक बिक्री के ये तीनों बंटन एक जैसे हैं। परंतु ध्यान दीजिए कि प्रत्येक फर्म की बिक्री का विचरण (variation) प्रत्येक अन्य फर्म की बिक्री के विचरण से भिन्न है। फर्म A की स्थिति में सभी दिनों में बिक्री

समान है। फर्म B की स्थिति में दैनिक बिक्री में कुछ विचरण है। परंतु फर्म C की स्थिति में विचरण की मात्रा बहुत अधिक है। यहाँ यद्यपि तीनों समंक कुलकों (data sets) के समांतर माध्य अभिन्न हैं, फिर भी मदों के बिखराव के विचार से वे भिन्न हैं। अतः विभिन्न समंक कुलकों के समान केन्द्रीय माप होते हुए भी वे मदों के विस्तार या बिखराव, अर्थात् अपकिरण के विचार से विभिन्न हो सकते हैं।

अपकिरण शब्द की व्याख्या एक अन्य अभिप्राय से भी कर सकते हैं। जब समंकों के सभी मद केन्द्रीय प्रवृत्ति के समान न हों तो प्रत्येक मद का केन्द्रीय प्रवृत्ति से अंतर (विचलन) एक निश्चित राशि होगा। अपकिरण यह निर्दिष्ट करता है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों का औसत अंतर कितना है। ध्यान दीजिए कि फर्म B की स्थिति में व्यक्तिगत मदों की माध्य बिक्री (अर्थात् 60,000) से विचलन फर्म C के विचलनों की अपेक्षा बहुत कम हैं, इससे अभिप्राय है कि फर्म C की तुलना में फर्म B का माध्य बिक्री से विचलनों का औसत बहुत कम है। दूसरे शब्दों में फर्म C की तुलना में फर्म B की दैनिक बिक्री का अपकिरण बहुत कम है।

14.3 अपकिरण मापने का महत्व

विचरण (अपकिरण) की मापों का परिकलन निम्न प्रयोजनों से किया जाता है :

1. विचरण (अपकिरण) मापन, यह निर्दिष्ट करके कि माध्य किस सीमा तक सभी समंकों का प्रतिनिधित्व करता है, माध्य की विश्वसनीयता को निर्धारित करता है। पहले चर्चा किए गए उदाहरण 1 में फर्म A की स्थिति में माध्य दैनिक बिक्री 60,000 रु. है, जो कि दैनिक बिक्री समंकों का आदर्श प्रतिनिधि है। फर्म B कि स्थिति में विचरण बहुत कम है, क्योंकि माध्य दैनिक विक्री विभिन्न दिनों की बिक्री के आंकड़ों के सर्वथा निकट है। इसलिए इस स्थिति में माध्य दैनिक बिक्री को विभिन्न दिनों के बिक्री आंकड़ों का प्रतिनिधि मान सकते हैं। किंतु फर्म C की स्थिति में व्यक्तिगत आंकड़ों का विचरण बहुत अधिक है, इसलिए माध्य मान 60,000 रु. को सभी उच्च और निम्न आंकड़ों का, जैसे 2,10,000 रु. और 10,000 रु. का, प्रतिनिधि नहीं मान सकते।

2. अपकिरण की माप दो या दो से अधिक बंटनों की, विचरण के विचार से, तुलना करने में सहायक होती हैं।

3. विचरण मापन का एक अन्य प्रयोजन विचरण की प्रकृति और उसके कारण को ज्ञात करना है ताकि स्वयं विचरण पर नियंत्रण किया जा सके।

4. विचरण मापन अन्य सांख्यिकीय मापों, जैसे सहसम्बंध (correlation) प्रतिपगमन या समाश्रयण (regression), सांख्यिकीय अनुमान (inference) इत्यादि के प्रयोग को सुगम बना देना है।

14.4 अपकिरण के अच्छे माप की विशेषताएँ

जैसा कि आप जानते हैं, अपकिरण की माप मदों के उनके अपने माध्य से विचलनों का माध्य होती है, अर्थात् यह एक दूसरी कोटि का माध्य होता है। अतः इसमें वे सभी विशेषताएँ होनी चाहिए जो माध्य के एक अच्छी माप से अपेक्षित हैं। यूले और केण्डाल के अनुसार अपकिरण की एक अच्छी माप की विशेषताएँ निम्नलिखित है।

1. सांख्यिकीय मापों का प्रयोग एक साधारण व्यक्ति द्वारा भी किया जाता है। इसलिए जटिल परिभाषाएँ और परिकलन विधियाँ वांछनीय नहीं हैं। यह समझने में सुगम तथा परिकलन में सरल होना चाहिए।

2. यह दृढ़ता से परिभाषित होना चाहिए ताकि एक ही समंक समूह के लिए सभी विधियाँ अभिन्न परिणाम प्रदान करें। विभिन्न विधियाँ विभिन्न परिणाम प्रदान करें यह उचित नहीं है।

3. यह सभी मदों पर आधारित होना चाहिए। यदि यह सभी मदों पर आधारित होगा तो इसके द्वारा प्रस्तुत परिणाम एक श्रेष्ठतर प्रतिनिधि मान होगा। अतः अपकिरण की एक अच्छी माप को समस्त समंकों पर आधारित होना चाहिए।

4. यह और अधिक बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होना चाहिए। इससे अभिप्राय यह है कि दो परिणामों को संयुक्त करना, अशुद्ध प्रविष्टियों के लिए, परिणाम को समंजित करना, छूटे हुए मानों को आकलित करना आदि सभी मदों के यथार्थ मानों के ज्ञात न होने पर भी सम्भव होना चाहिए।

5. इसमें प्रतिचयन स्थिरता (sampling stability) होनी चाहिए। इससे यह अभिप्राय है कि प्रतिदर्श से प्राप्त परिणामों और समष्टि से प्राप्त संगत परिणामों का माध्य अंतर न्यूनतम होना चाहिए। यदि अपकिरण की किसी माप में यह विशेषता हो तो वह सर्वोत्तम माप होगा।

6. यह चरम मानों (extreme items) से अत्यधिक प्रभावित नहीं होना चाहिए। बहुधा चरम मान समंकों के यथार्थ प्रतिनिधि नहीं होते। अतः उनकी उपस्थिति से परिकलन पर अत्यधिक प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए।

यह सूची अपकिरण के एक अच्छे माप की अपेक्षित विशेषताओं की पूर्ण सूची नहीं है। परंतु अपकिरण की एक अच्छे माप के ये सर्वाधिक महत्वपूर्ण लक्षण हैं।

14.5 अपकिरण की निरपेक्ष और सापेक्ष माप

अपकिरण की उस माप को जो समंकों की मूल इकाई के पदों में प्रकट किया जाए **निरपेक्ष माप** कहते हैं। .उदाहरण के लिए पहले चर्चा किये गए उदाहरण 1 में फर्म B की दैनिक बिक्री का विचरण 52,250 रु. से 68,250 रु. तक है। इसलिए समंकों का विस्तार 68,250 रु. – 52,250 रु. या 16,000 रु. की कोटि का है। यह बिक्री के विस्तार की निरपेक्ष माप है। यदि दो या दो से अधिक बंटन या श्रेणियाँ विभिन्न इकाइयों में व्यक्त हों तो उनके विचरण की तुलना के लिए समंकों की इकाइयों में व्यक्त ऐसे निरपेक्ष माप उपयुक्त नहीं होते। इसके विपरीत अपकिरण के **सापेक्ष भाप** अनुपात या प्रतिशतता के रूप में प्राप्त किए जाते हैं। इसलिए प्रत्येक सापेक्ष माप समंकों की माप–इकाई से स्वतंत्र एक संख्या होती है। सापेक्ष अपकिरण की माप अपकिरण के एक निरपेक्ष माप का किसी उपयुक्त माध्य से या समकों के एक चुने हुए मद से अनुपात होती है। इसीलिए इसे अपकिरण गुणांक भी कहते हैं। उदाहरण के लिए पहले चर्चा किए गए उदाहरण 1 में यदि बिक्री विस्तार, 16,000 रु. को बिक्री माध्य 60,000 रु. के अनुपात के रूप में प्रकट करें अर्थात् 16,000 ⁄ 60,000 रूप में, तो यह बिक्री विस्तार का एक सापेक्ष माप बन जाता है। यह मान एक शब्द संख्या है, और इसमें कोई विशिष्ट माप इकाई नहीं होती। इसी प्रकार, विस्तार 16,000 रु. को, दो चरम मानों के योग के अनुपात के रूप में (अर्थात 16000 ⁄ 52250 ÷ 68250 के

रूप में) भी, प्रकट कर सकते हैं। यह भी बिक्री विस्तार का एक सापेक्ष माप प्रदान करता है।

कुछ परिस्थितियों में, यद्यपि समंक एक समान इकाइयों में व्यक्त हैं, तथापि निरपेक्ष मापों द्वारा, उनके विचरण की तुलना निरर्थक होती है। दिल्ली से बम्बई की दूरी मापने में, 1 कि.मी. (1,00,00 से.मी.) के विचरण की कोई सार्थकता नहीं है। परंतु 1.40 मीटर के एक कपड़े के टुकड़े की लम्बाई मापने में, 10 से.मी. के विचरण की बहुत अधिक सार्थकता है। अतः जब भी दो समंक समूहों में विचरण की तुलना करनी अभीष्ट हो तो यह तुलना सदैव सापेक्ष माप के पदों में की जाती है।

बोध प्रश्न क

1 अपकिरण का क्या अर्थ है ?

2 निरपेक्ष मापों और सापेक्ष मापों में भेद स्पष्ट कीजिए।

14.6 अपकिरण की माप

प्रायः प्रयुक्त होने वाले निरपेक्ष अपकिरण (absolute dispersion) के मापः

1. **समकों के चुने हुए मदों पर आधारित**

   i) विस्तार (Range): समस्त आंकड़ो का विस्त्तार

   ii) अंतर चतुर्थक विस्तार (Inter Quartile Range) मध्य के 50% समंकों का विस्तार। सामान्यतः इसके स्थान पर चतुर्थक विचलन का अधिक प्रयोग करते हैं जो अंतर–चतुर्थक विस्तार का आधा होता है।

2. **समंकों के सभी मदों पर आधारित**

   i) माध्य विचलन (Mean Deviation): केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी निर्दिष्ट माप से निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य।

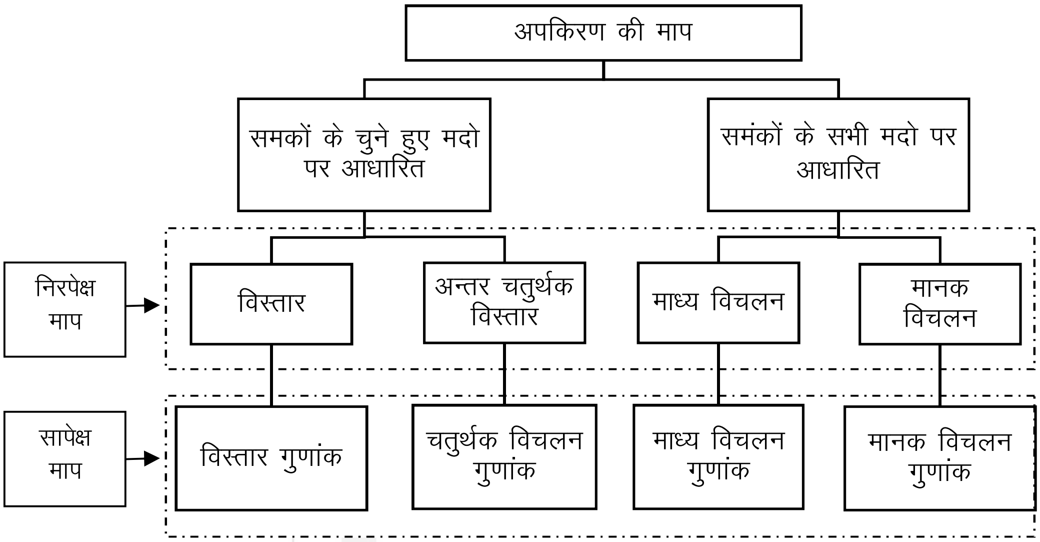
   ii) मानक विचलन (Standard Deviation): या समांतर माध्य से विचलन–वर्ग –माध्य–मूल।

3. **आरेखीय विधिः** लारेंज वक्र (Lorenz Curve): इस पाठ्यक्रम में हम लारेंज वक्र पर चर्चा नहीं करेंगे।

अपकिरण के निरपेक्ष मापों के संगत अपकिरण के सापेक्ष माप इस प्रकार हैं:

अपकिरण के निरपेक्ष माप	**अपकिरण के सापेक्ष माप**
1. विस्तार	विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)
2. चतुर्थक विचलन	चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation)
3. माध्य विचलन	माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of Mean Deviation)
4. मानक विचलन	मानक विचलन गुणांक (Coefficient of Standard Deviation)

मानक विचलन गुणाक को प्रतिशत रूप में प्रकट करने पर, उसे विचरण गुणांक (Coefficient Variation) कहते हैं। अपकिरण के विभिन्न मापों को चित्र 14.1 में दर्शाया गया है।



चित्र 14.1 अपकिरण की माप

14.6.1 विस्तार (Range)

एक समंक कुलक के उच्चतम (संख्यात्मक रूप में अधिकतम मान) और निम्नतम (संख्यात्मक रूप में न्यूनतम) मान के अंतर को विस्तार कहते हैं।

इस प्रकार, विस्तार = $X_{max} - X_{min}$

जहां X_{max} = उच्चतम मान, X_{min} निम्नतम मान

उदाहरण 1: जिसकी चर्चा हम पहले कर चुके हैं, तीनों फर्मों के दैनिक बिक्री आंकड़ों पर विचार कीजिए और विस्तार परिकलित कीजिए।

फर्म A के लिए, विस्तार = 60,000 − 60,000 = 0

फर्म B के लिए, विस्तार = 68250 − 52,250 = 16,000

फर्म C के लिए, विस्तार = 2,10,000 − 18,000 = 1,92,000

विस्तार के मान का स्पष्टीकरण बहुत सरल है। इस उदाहरण में फर्म A की स्थिति में, दैनिक बिक्री का विचरण शून्य है। फर्म B की स्थिति में विचरण कम है और फर्म C की स्थिति में, विचरण बहुत अधिक है। वर्गीकृत समंकों के लिए, उच्चतम वर्ग की ऊपरि सीमा और न्यूनतम वर्ग की निम्न सीमा के अंतर को सन्निकटतः विस्तार परिभाषित करते हैं।

विस्तार के संगत सापेक्ष माप को विस्तार गुणांक कहते हैं, जिसे प्राप्त करने के लिए विस्तार को चरम मानों के योग के अनुपात के रूप में व्यक्त करते हैं। यहाँ हम विस्तार को माध्य के अनुपात के रूप व्यक्त नहीं करते क्योंकि विस्तार माध्य पर आश्रित नहीं होता। यह आंकड़ों के केवल दो चुने हुए मदों से ही संबंधित होता है। अतः विस्तार गुणांक को निम्नानुसार परिभाषित किया जाता है :

विस्तार गुणांक $= \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}}$

उदाहरण 2 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और विस्तार के परिकलन से सम्बद्ध प्रक्रिया को समझिए ।

उदाहरण 2: निम्न आंकड़ों से विस्तार गुणांक का परिकलन कीजिए :

बिक्री (लाख रुपयों में)	दिनों की संख्या
30 - 40	12
40 - 50	18
50 - 60	20
60 - 70	19
70 - 80	13
80 - 90	8

हलः

$$\text{विस्तार} = X_{max} - X_{min}$$
$$= 90 - 30$$
$$= 60$$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{min} + X_{max}}$$
$$= \frac{90-30}{90+30}$$
$$= \frac{60}{120}$$
$$= 0.5.$$

विस्तार का परिकलन बहुत ही सरल है और इससे आंकड़ों के विचरण के बारे में कुछ अनुमान मिल जाता है। क्योंकि विस्तार के परिकलन में केवल दो चरम मानों का ही प्रयोग होता है, इसलिए यह विचरण का एक अशोधित (Crude) माप है।

प्रयोज्यताः विस्तार की संकल्पना का सांख्यिकीय गुण नियंत्रण में बहुत अधिक प्रयोग होता है। शेयर, डिबेंचर और कृषि उत्पादों जैसी उन वस्तुओं के विचरण के अध्ययन में विस्तार बड़ा सहायक होता है जो मूल्य परिवर्तनों के लिए बड़े ही सुग्राही हैं। मौसम के पूर्व अनुमान के लिए विस्तार एक अच्छा सूचक है ।

14.6.2 चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

पहले और तीसरे चतुर्थकों के अंतर के आधे को **चतुर्थक विचलन** परिभाषित करते हैं। चतुर्थकों के परिकलन की विधियों का अध्ययन आप पहले ही इकाई 13 में कर चुके हैं।

चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_1 - Q_3}{2}$

जहां Q_1, पहला चतुर्थक है और Q_3, तीसरा चतुर्थक। क्योंकि Q_1 और Q_3 का अंतर दोनों चतुर्थकों के बीच की दूरी को निरूपित करता है, इसलिए इस अंतर को अंतर

चतुर्थक विस्तार भी कह सकते हैं, तथा चतुर्थक विचलन को अर्द्ध अंतर–चतुर्थक विस्तार कह सकते हैं।

चतुर्थक विचलन (OD) दो सम्बद्ध चतुर्थकों पर आश्रित है और उच्चतम 25% तथा निम्नतम 25% प्रेक्षणों की उपेक्षा करता है, इसलिए यह चरम मानों से निष्प्रभावित है। विचलन का एक अन्य गुण यह है कि यह विचरण की एक मात्र ऐसी माप है, जिसे विवृत मुखी (open-end) बंटन के लिए प्रयोग कर सकते हैं । चतुर्थक विचलन की मुख्य सीमा यह है कि यह सभी प्रेक्षणों के मानों पर आधारित नहीं होता। यह केवल मध्य के 50% प्रेक्षणों पर आधारित होता है।

चतुर्थक विचलन पर आधारित, अपकिरण के सापेक्ष माप को **चतुर्थक विचलन गुणांक** कहते हैं। चतुर्थक विचलन गुणांक को निम्नानुसार परिभाषित करते हैं :

चतुर्थक विचलन गुणांक (Q.D.) = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

ऐसा इसलिए है कि ये दो चतुर्थक, आंकड़ों के दो चुने हुए मद भी हैं, और इनका आंकड़ों के माध्य से कोई सम्बंध नहीं है। निम्न उदाहरण का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए, इससे आप चतुर्थक विचलन के परिकलन की प्रक्रिया को समझ सकेंगे।

अवर्गीकृत ऑकड़े (व्यक्तिगत अवलोकन) (Ungouped Data Individual Observation)

उदाहरण 3: निम्नलिखित ऑकड़े जो सात छात्रों के अकों से संबंधित है, का प्रयोग करके चतुर्थक विचलन का मूल्य एवं गुणांक ज्ञात कीजिए।

अंक : 40 10 26 32 15 49 25

हलः जैसा हमने इकाई (13 चतुर्थक) में चर्चा कि है हमें चरों के मूल्य को आरोही या अवरोही में व्यवस्थित करना होता है। यहाँ अंकों को आरोही (ascending) क्रम में व्यवस्थित किया गया है:

अंक : 10 15 25 26 32 40 49

Q_1= size of $\frac{N+1}{4}$ th observation = size of $\frac{7+1}{4}$ = 2^{nd} observation

The size of 2^{nd} observation = 15 marks; Q_1= 15.

Q_3= size of $3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th}$ observation = size of $3\left(\frac{7+1}{4}\right)$ = 6^{th} observation

The size of 6^{th} observation = 40 marks; Q_3= 40.

चतुर्थक विचलन (Q.D) = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{40-15}{2}$ = 12.5 अकं

Q.D का गुणांक = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{40-15}{40+15}$= 0.45

उदाहरण 4: निम्न आंकड़ों से, चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक परिकलित कीजिए

भार (कि.ग्रा. में) :	60	61	62	63	65	70	75	80
कामगारों की संख्या:	1	3	5	7	10	3	1	1

हल: चतुर्थक विचलन और उसके गुणांक का परिकलन

Weight in Kgs	Frequency	Cumulative Frequency
60	1	1
61	3	4
62	5	9
63	7	16
65	10	26
70	3	29
75	1	30
80	1	31 = n

$Q_1 = \text{size of} \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} =$ या 8 वें प्रेक्षण का मान

= 62 कि.ग्रा. (क्योंकि 8 वाँ प्रेक्षण इसी वर्ग में आता है।

$Q_3 = \text{size of } 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th}$ या 24 वें प्रेक्षण का मान

= 65 कि.ग्रा. (क्योंकि 24 वाँ प्रेक्षण इसी वर्ग में आता है।

= चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{65-62}{2} = 1.5$ kgs.

= चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{65-62}{65+62} = \frac{3}{127}$

$= 0.024$

सतत वितरण (Continuous Distribution)

उदाहरण 5: निम्न आंकड़ों से, अर्ध–अंतर चतुर्थक विस्तार और इसका गुणांक परिकलित कीजिए :

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
विद्यार्थियों की संख्या	11	18	25	28	30	33	22	15	22

हल: चतुर्थक विचलन परिकलित करने के लिए हमें पहले चतुर्थक और तीसरे चतुर्थक के मान अभीष्ट हैं, जो निम्न सारणी से प्राप्त कर सकते हैं:

अंक	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)
0-10	11	11
10-20	18	29
20-30	25	54
30-40	28	82
40-50	30	112
50-60	33	145
60-70	22	167
70-80	15	182
80-90	22	204

Q_1 के नीचे $\frac{N}{4}$ प्रेक्षण अर्थात $\frac{204}{4} = 51$ प्रेक्षण है।

इसलिए यह वर्ग 20–30 के अंतर्गत है।

$$Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times i$$

जहां l = चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा

c = चतुर्थक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = चतुर्थक वर्ग की साधारण आवृत्ति

i = चतुर्थक वर्ग अंतराल का आमाप

$$Q_1 = 20 + \frac{51-29}{25} \times 10$$

$$= 28.8.$$

Q_3 के नीचे $\left(\frac{3n}{4}\right)$ th प्रेक्षण अर्थात $3 \times \frac{204}{4} = 153$ th प्रेक्षण है। अतः Q_3 वर्ग 60–70 के अंतर्गत है।

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times i$$

$$Q_3 = 60 + \frac{153-145}{22} \times 10$$

$$= 63.64$$

अर्थ अंतर–चतुर्थक विस्तार या चतुर्थक विचलन :

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{63.64 - 25.8}{2} = \frac{34.84}{2}$$

= 17.42 अंक

चतुर्थक विचलन के संगत, अपकिरण के सापेक्ष माप, चतुर्थक विचलन, गुणांक का परिकलन निम्नानुसार करेंगे :

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{63.64-28.8}{63.64+28.8}$

= 0.37 marks

उदाहरण 6: निम्न आंकड़ों के लिए अपकिरण की एक उपयुक्त माप परिकलित कीजिए।

मासिक व्यय (रु.)	कुटुम्बों की संख्या
Below 850	12
850-900	16
900-950	39
950-1,000	56
1,000-1,050	62
1,050-1,100	75
1,100-1,150	30
1,150 and above	10

हल: क्योंकि आवृत्ति बंटन के विवृत मुखी वर्ग हैं, इसलिए, चतुर्थक विचलन, अपकिरण का सर्वाधिक उपयुक्त माप होगा।

मासिक व्यय (रु.)	कुटुम्बों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति (cf)
Below 850	12	12
850—900	16	28
900—950	39	67
950—1000	56	123
1000—1050	62	185
1050—1100	75	260
1100—1150	30	290
1,150 and above	10	300
	N = 300	

Q_1 $\frac{N}{4}$ के नीचे प्रेक्षण i.e., $\frac{300}{4} = 75$ th प्रेक्षण है इसलिए Q_1 वर्ग 950-1,000 के अंतर्गत है।

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times i$$

$$= 950 + \frac{\frac{300}{4} - 67}{56} \times 50$$

$$= 957.14 \text{ रुपये}$$

Q_3 के नीचे $\frac{3N}{4}$ th प्रेक्षण अर्थात i.e., $\frac{3 \times 300}{4} = 225$ th प्रेक्षण है इसलिए Q_3 वर्ग 1050—1100 के अंतर्गत है।

$$Q_3 = 1 + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times i$$

$$= 1{,}050 + \frac{225 - 185}{75} \times 50$$

= Rs. 1,076.67

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{1{,}076.67 - 957.14}{2}$$

= Rs.59.760 रुपये

बोध प्रश्न ख

1 अपकिरण के निरपेक्ष और सापेक्ष मापों में भेद स्पष्ट कीजिए।

2 चतुर्थक विचलन की परिभाषा लिखिए।

3 विस्तार और विस्तार गुणांक में भेद स्पष्ट कीजिए।

4 अस्पताल के आपात कक्ष में प्रतिदिन उपचार किए गए रोगियों की संख्या से सम्बंधित निम्न आंकड़ों के लिए विस्तार और चतुर्थक विचलन परिकलित कीजिए

45, 50, 36, 59, 28, 42, 55, 57, 33, 35, 40, 50

5 निम्न आंकड़ों के लिए विस्तार, चतुर्थक विचलन और सम्बंधित गुणांकों को परिकलित कीजिए :

आमाप	5—7	8—10	11—13	14—16	17—19
आवृत्ति	14	24	38	20	4

14.6.3 माध्य विचलन (Mean Deviation)

जैसा कि आपको ज्ञात है, अपकिरण के एक आदर्श माप के लक्षणों में से एक यह है कि वह दिए गए समंक तुलक के सभी प्रेक्षणों पर आधारित हो। इस दृष्टि से, विस्तार और चतुर्थक विचलन आदर्श माप नहीं है क्योंकि ये समंकों के सभी प्रेक्षणों पर आधारित नहीं होते। परंतु इस अर्थ में, माध्य (या औसत) विचलन एक आदर्श माप है क्योंकि यह समंकों के सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है। इस माप को निर्दिष्ट आंकड़ों के माध्य से व्यक्तिगत मदों के निरपेक्ष विचलनों के समांतर माध्य के रूप में परिकलित करते हैं। माध्य विचलन के परिकलन में जिस माध्य का बहुधा प्रयोग करते हैं, वह हैं समांतर—माध्य या माध्यिका, यद्यपि कभी—कभी बहुलक (mode) का प्रयोग भी कर लेते हैं। निरपेक्ष विचलनों से अभिप्राय है कि विचलनों के यथार्थ चिन्हों की उपेक्षा कर उन्हें धनात्मक ही मान लेते हैं। अतः इन विचलनों को $|D|$ (जिसे मॉड्यूल D भी बोला जाता है) द्वारा दर्शाया जाता है। अतः $|D|$ का तात्पर्य उन विचलनों से होता है जो माध्य से उनके चिन्हों को हटा कर लिया जाता है। अतः इसे माध्य निरपेक्ष विचलन (mean absoloute deviation) भी कहते है। **माध्य विचलन का एक आवश्यक गुण यह है कि जब विचलन माध्यिका से लिए जाते है तब इनका मान सबसे कम होता है अर्थात् माध्यिका से माध्य विचलन सबसे न्यूनतम होता है।**

माध्य विचलन से संबंधित सापेक्ष माप को माध्य विचलन का गुणांक भी कहते है; माध्य विचलन का गुणांक (Coefficient of Mean Deviation) ज्ञात करने के लिये माध्य विचलन को किसी मध्य मान (जो कि माध्य विचलन ज्ञात करने के लिये प्रयोग की गयी हो) से भाजित करते है। अतः यदि माध्य विचलन का परिकलन माध्यिका से ज्ञात किया गया हो तो माध्य विचलन का गुणांक ज्ञात करने के लिये माध्य विचलन को माध्यिका से विभाजित करेंगें।

माध्य विचलन का गुणांक (माध्यिका से) $= \frac{\text{M.D.about Median}}{\text{Median}}$

उसी प्रकार माध्य विचलन का गुणांक (माध्य से) $= \frac{\text{M.D.about } \bar{X}}{\bar{X}}$

आपको यह बात ध्यान रखनी चाहिये कि वर्गीकृत और अवर्गीकृत आंकड़ों से माध्य विचलन का परिकलन करने की विधि अलग–अलग है परंतु माध्य विचलन के गुणांक के परिकलन की विधि समान है।

$\bar{X}$ माध्य विचलन, सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है, और इसलिए समंक कुलक के प्रत्येक मद के विचरण को उचित आदर देता है। परंतु चिन्हों की उपेक्षा करने की प्रथा और विचलनों के निरपेक्ष मान लेने के कारण, माध्य विचलन पर बीजगणितीय प्रतिपादन कठिन हो जाता है। यद्यपि माध्य विचलन विचरण का एक अच्छा माप है, फिर भी इसका उपयोग सीमित है। यदि हमें केवल कुछ समंक कुलकों के विचरणों को मापना और उनकी तुलना करना अभीष्ट हो तो माध्य विचलन का प्रयोग कर सकते हैं। माध्य विचलन की संकल्पना को अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, निम्न उदाहरणों का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

माध्य विचलन का परिकलन – अवर्गीकृत आंकड़े

सूत्र $M_d = \frac{\sum|D|}{n}$

जहाँ $\sum|D| =$ माध्य से विचलनों का योग है ($\pm$ चिन्हों का अंदेखा करके)

n =अवलोकनों की संख्या

परिकलन की विधि

1. केन्द्रीय मान (माध्य, माध्यिका, भूयिष्ठिक) का परिकलन करें।
2. चरण 1 में चुने गये केन्द्रीय मान से अवलोकनों (प्रेक्षण) से निर्पेक्ष विचरण ज्ञात ($|D|$) करे तथा इसका योग ($\sum|D|$) निकालें
3. अवलोकनों का कुल योग (n) ज्ञात करें
4. सूत्र का प्रयोग करें

उदाहरण 7 : निम्न मानों का माध्यिका (median) से माध्य विचलन (mean deviation) परिकलित कीजिए:

18, 25, 63, 29, 59, 72, 17, 25, 105, 87

हल: माध्य $(\bar{X}) = \frac{\sum X}{n} = \frac{500}{10} = 50$

क्योंकि प्रेक्षणों की संख्या 10 है, जो कि एक सम संख्या है, इसलिए प्रेक्षणों को क्रमबद्ध करने के उपरांत, दो मध्यस्थतम प्रेक्षणों का समांतर माध्य ही माध्यिका होगी।

17, 18, 25, 25, 29, 59, 63, 72,87, 105

माध्यिका $(M_d) = 1/2\ (29 + 59) = 44$

भूयिष्ठिक $(M_0) = 25$, चूंकि यह सबसे अधिक बार आया हैं।

माध्यिका से माध्य विचलन

X	माध्य से विचलन (50) |D|	माध्यिका से विचलन (44) |D|	भूष्यिठक से माध्य विचलन (25) |D|
18	32	26	7
25	25	19	0
63	13	19	38
59	9	15	34
29	21	15	4
72	22	28	47
17	33	27	8
25	25	19	0
105	55	61	80
87	37	43	62
N = 10	∑|D| = 272	∑|D| = 272	∑|D| = 280

माध्य से माध्य विचलन $= \frac{\sum|D|}{n}$

$= \frac{272}{10} = 27.2$

माध्य विचलन का गुणांक $= \frac{M.D.}{\overline{X}} = \frac{27.2}{50} = 0.544$

माध्यिका से माध्य विचलन $= \frac{\sum|D|}{n} = \frac{272}{10} = 27.2$

माध्य विचलन का गुणांक $= \frac{M.D.}{Median} = \frac{27.2}{44} = 0.62$

M.D. about mode $= \frac{\sum|D|}{n} = \frac{280}{10} = 28$

माध्य विचलन का गुणांक $= \frac{M.D.}{M_o} = \frac{28}{25} = 1.12$

माध्य विचलन की संगणना – वर्गीकृत आंकड़े (खण्डित श्रेणी)

M.D. $= \frac{\sum f|D|}{n}$

जहाँ, $\sum f|D|$ उत्पादों का योग है, जोकि निरपेक्ष विचलन (बिना $\pm$ चिन्हों के) और उनके आवृत्ति को गुणा करने पर मिलेगी।

N = मदों की संख्या अथवा सम्पूर्ण आवृत्ति

परिकलन की विधि

1) औसत अथवा मध्य मान ($\overline{X}$ or M_d or M_o) का परिकलन करें;

2) औसत अथवा मध्य मानों से मदों का विचलन ज्ञात करें (संकेतों (±) को अनदेखा करते हुए);

3) इन विचलनों को उनकी आवृत्ति से गुणा करके उनका सम्पूर्ण योग ($\sum f|D|$) ज्ञात करें;

4) सम्पूर्ण अवृत्ति ज्ञात करें (n);

5) सूत्र का प्रयोग करें।

उदाहरण 8: माध्य एवं माध्यिका के माध्य विचलन तथा उनकें गुणांक को ज्ञात कीजिए।

अंक	:	20	30	40	50	60	70
छात्रों की संख्या	:	8	12	20	10	6	4

हल: $\overline{X}$ तथा M_d से माध्य विचलन का परिकलन

अंक X	छात्रों की संख्या f	fx	संचयी आवृत्ति (c.f.)	माध्य (41) से विचलन |D|	f|D|	माध्यिका (40) से विचलन |D|	f|D|
20	8	160	8	21	168	20	160
30	12	360	20	11	132	10	120
40	20	800	40	1	20	0	0
50	10	500	50	9	90	10	100
60	6	360	56	19	114	20	120
70	4	280	60	29	116	30	120
	N=60	∑fx=2,240			∑f|D|=640		∑fd=620

माध्य $(\overline{X}) = \frac{\sum fx}{n} = \frac{2,240}{60} = 41$ अंक

माध्यिका $(M_d) = \text{Size of} \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}$ item

$= \left(\frac{60+1}{2}\right) = 30.5^{th}$ item

संचयी आवृत्ति के 40^{th} item में 30.5^{th} item पाया जा रहा है, जिसके सामने का मूल्य 40 अंक है।

अतः माध्यिका = 40 अंक है।

माध्य का माध्य विचलन $= \frac{\sum f|D|}{n} = \frac{640}{60} = 10.67$ अंक

माध्य विचलन का गुणांक (माध्य से) $= \frac{M.D.}{Mean} = \frac{10.67}{41} = 0.26$

माध्यिका का माध्य विचलन $= \frac{\sum f|D|}{n} = \frac{620}{60} = 10.33$ अंक

माध्य विचलन का गुणांक (माध्यिका के) $= \frac{M.D.}{Median} = \frac{10.33}{40} = 0.26$

यहाँ, आप देख सकते है, जैसा हमने चर्चा किया था माध्यिका का माध्य विचलन सबसे कम होता है।

उदाहरण 9: एक कम्पनी की दैनिक बिक्री संबंधी निम्न वर्गीकृत आंकड़ों के लिए, समांतर माध्य से माध्य विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए:

बिक्री (000 रु.)	कम्पनियों की संख्या
40–50	5
50–60	15
60–70	25
70–80	30
80–90	20
90–100	5

हल: माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए, निम्न सारणी की संरचना कीजिए।

बिक्री (000 रु.)	माध्य बिन्दु (X)	कम्पनियों की संख्या (f)	fx	$\|X-\bar{X}\|$ i.e., $\|x-71\|$	$f(X-\bar{X})$
40–50	45	5	225	26	130
50–60	55	15	825	16	240
60–70	65	25	1625	6	150
70–80	75	30	2250	4	120
80–90	85	20	1700	14	280
90–100	95	5	475	24	120
		n=100	**∑fx=7100**		**∑f|D|=1,040**

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{7,100}{100} = 71$$

समांतर माध्य से माध्य विचलन $=\frac{1}{n}\sum f(X-\bar{X})$ या $\frac{\sum f|D|}{n}$

$= \frac{1\times1040}{100} = 10.40$ हजार रुपये

माध्य विचलन गुणांक $=\bar{X}$ से माध्य विचलन $\left(\frac{MD}{\bar{X}}\right)$

$$= \frac{10.40}{71} = 0.146$$

उदाहरण 10: एक एजेंट के द्वारा बीमा किए गए 80 जीवन बीमा निगम की बीमा पालिसी धारकों का आवृत्ति बंटन नीचे दिया गया है। माध्यिका से माध्य विचलन गुणांक परिकलित कीजिए:

आयु वर्ग (वर्षों में)	आवृत्ति
16–20	8
21–25	15
26–30	13
31–35	20
36–40	11
41–45	7
46–50	3
51–55	2
56–60	1

हल: माध्यिका से माध्य विचलन का परिकलन

आयु वर्ग (वर्षों में)	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (C.f.)	वर्ग मध्य बिंदु (M)	$\|X-M_d\|$ i.e., $\|X-31.5\|$ $\|D\|$	$f\|X-M_d\|$ $f\|D\|$
16–20	8	8	18	13.5	108.0
21–25	15	23	23	8.5	127.5
26–30	13	36	28	3.5	45..5
31–35	20	56	33	6.5	30.0
36–40	11	67	38	11.5	71.5
41–45	7	74	43	16.5	80.5
46–50	3	77	48	21.5	49.5
51–55	2	79	53	13.5	43.0
56–60	1	80	58	26.5	26.5
कुल (योग)	N=80				$\sum f\|D\| = 582.0$

माध्यिका के नीचे N/2 या 40 प्रेक्षण है। इसलिए माध्यिका वर्ग 31–35 या 30.5–35.5 (यथार्थ सीमाओं) के पदों के अंतर्गत है।

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{\frac{N}{2}-c}{f} \times i$$

$$= 30.5 + \frac{40-36}{20} \times 5 = 31$$

$$M_d \text{ से माध्य विचलन} = \sum f \frac{M-M_d}{\sum f} = \frac{582}{80} = 7.275 \text{ वर्ष}$$

$$M_d \text{ से माध्य विचलन गुणांक} = \frac{M_d \text{ से माध्य विचलन}}{M_d}$$

$$= \frac{7.275}{31.5} = 0.23$$

14.6.4 मानक विचलन (Standard Deviation)

जैसा कि पहले विवेचन किया गया है, माध्य विचलन का परिकलन करते समय हम केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के ऋणात्मक चिन्हों की अवहेलना कर देते है। ऐसा इसलिये है कि अपकिरण में हम केवल यह जानना चाहते है कि औसतन मदें केन्द्रीय प्रवृत्ति से कितनी विचलित है, तथा इस तथ्य पर विचार नहीं करते कि वे केन्द्रीय प्रवृत्ति से कम है अथवा अधिक हैं। परिकलन के अंतर्गत आए चिन्हों की इस प्रकार अवहेलना करने से माप की कुछ परिसीमाएँ उत्पन्न हो जाती हैं। चिन्हों की अवहेलना करने का एक गणितीय हल उनका वर्गफल निकालना है। चूंकि किसी ऋणात्मक मद का वर्गफल धनात्मक हो जाता है, अतः अपकिरण की एक नई माप परिभाषित होती है। जिसमें विचलनों को पहले वर्गीकृत किया जाता है। (चिन्हों की अवहेलना करने के लिए) तथा फिर उनका औसत निकाला जाता है। इस प्रकार प्राप्त मूल्य विचलनों के वर्गो का माध्य प्रदान करता है न कि प्रत्यक्ष रूप से विचलनों का। अतः अंत में इस मूल्य का वर्गमूल निकाला जाता है। अतः इस प्रकार प्राप्त परिणाम विचलनों का अप्रत्यक्ष औसत प्रदान करता है। चूँकि यह माप केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदो के विचलनों के वर्गो के माध्य का वर्गमूल प्राप्त करके परिकलित किया जाता है, अतः इसे मूल माध्य वर्ग विचलन (Root Mean Square Deviation) भी कहा जाता है। माध्य विचलन की भाँति, मूल माध्य वर्ग विचलन भी समांतर माध्य, माध्यिका या बहुलक को मदों के मूल्यों में से घटाकर परिकलित किया जा सकता है। हर प्रकार के समंकों में, इन तीनों मूल्यो में से संमातर माध्य से लिया गया मूल माध्य वर्ग विचलन न्यूनतम होता है। अतः इसे **मानक विचलन** कहा जाता है।

इस प्रकार मानक विचलन को विचरण के स्थिति वर्ग मूल के रूप में परिभाषित किया जाता है। इस अवधारणा को कार्ल पिर्यसन ने 1893 में दिया। अपकिरण की माप के लिए यह ज्यादातर उपयोग में लाया जाता है। यह विधि पहले की विधियों के दोषों से मुक्त है इसलिए यह ज्यादा महप्वपूर्ण है। मानक विचलन को साधारणतः ग्रीक अक्षर σ (इसे सिगमा भी पढ़ते है) से दर्शाया जाता है। चलिए अब हम मानक विचलन के अर्थ इसके परिकलन की विधि, गुण एवं दोषों की चर्चा करते हैं।

मानक विचलन की संगणनाः

वर्गीकृत एवं अवर्गीकृत वितरणों के लिए मानक विचलन को ज्ञात करने की दो विधियाँ है–

(1) प्रत्यक्ष विधि तथा (2) लघु विधि।

आइये हम इन दोनों विधियों का अध्ययन करते हैं–

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method): इस विधि में मानक विचलन की संगणना या परिकलन वितरण के असली समांतर माध्य (actual mean) से मदों के विचलन को लेकर करते हैं।

लघु विधि (Short Cut Method): इस विधि में मानक विचलन की संगणना/ परिकलन कल्पित माध्य (assumed mean) से मदो के विचलन को लेकर की जाती है।

जब मदों एवं उनकी संख्या अधिक हो अथवा समांतर माध्य अंशों में हो तब उपरोक्त दोनों विधियों से, लघु विधि उपयुक्त होता है। यदि माध्य अंश मूल्य के साथ हो, तब

विचलन एवं उनके वर्ग को ज्ञात करना और मानक विचलन की संगणना करना समय लेने वाली प्रक्रिया है।

आइए, इन सूत्रों का अध्ययन करते हैं, तथा कुछ उदाहरणों से प्रत्यक्ष तथा लघु विधि की प्रक्रिया एवं वर्गीकृत तथा अवर्गीकृत वितरण के अंतर्गत मानक विचलन की संगणना को समझते है।

अवर्गीकृत आंकडे (व्यक्तिगत विरतण):

प्रत्यक्ष विधि: Formula: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$

जहाँ, σ = मानक विचलन; $\sum d^2 =$ असली माध्य से वर्ग विचलन का योग है; n = मदो की संख्या

प्रत्यक्ष विधि द्वारा मान विचलन की संगणना करने की विधि:

1) आंकड़ो के समांतर माध्य की सगंणना कीजिए;

2) समांतर माध्य से प्रत्येक को घटाकर $(X - \overline{X})$ विचलन ज्ञात कीजिए इसे 'd' से दर्शाइए;

3) विचलनों का वर्ग निकालिए (d^2) तथा योग ज्ञात कीजिए $(\sum d^2)$

4) मदों की संख्या ज्ञात कीजिए एवं सूत्र का प्रयोग कीजिए।

लघु विधि सूत्र:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

जहाँ σ = मानक विचलन $\sum d^2 =$ कल्पित माध्य से विचलनों के वर्गो का योग है;$\sum d =$ कल्पित माध्य से विचलनों के वर्गो का योग है; n = मदों की संख्या

लघु विधि द्वारा मानक विचलन की संगणना करने की विधि :

1) दिए गए आंकडों में से एक मूल्य को कल्पित माध्य मान ले तथा कल्पित माध्य से विचलन की संगणना करें (X – कल्पित माध्य)। इन विचलनों को d से दर्शाए एवं योग ज्ञात करें $\sum d$;

2) विचलनों का वर्ग (d^2) निकाले एवं योग $(\sum d^2)$; ज्ञात करें

3) मदों की संख्या लें एवं सूत्र का प्रयोग करें।

उदाहरण 11 को सावधानी पूर्वक पढ़े तथा प्रत्यक्ष एवं लघु विधि से मानक विचलन ज्ञात करने की प्रक्रिया को समझें।

उदाहरण 11: निम्न श्रेणी के लिए प्रत्यक्ष विधि द्वारा तथा लघु विधि द्वारा मानक विचलन का परिकलन कीजिये। 32 को कल्पित माध्य के रूप में प्रयोग करें।

क्रम संख्या :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आमाप :	20	22	27	30	31	32	35	45	40	48

हलः

प्रत्यक्ष विधिः मानक विचलन का परिकलन

क्रम संख्या	**X**	**$(X - \overline{X})$ d**	**$(X - \overline{X})^2$ d^2**
1	20	-13	169
2	22	-11	121
3	27	- 6	36
4	30	-3	9
5	31	-2	4
6	32	-1	1
7	35	2	4
8	40	7	49
9	45	12	144
10	48	15	225
n = 10	$\sum X = 330$		$\sum d^2 = 762$

अब, $\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{330}{10} = 33$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{762}{10}} = \sqrt{76.2} = \text{Rs. } 8.73$$

लघु विधिः मानक विचलन का परिकलन

S.No. of workers	**Wages (Rs.) X**	**d = X-32**	**d^2**
1	20	-12	144
2	22	-10	100
3	27	- 5	25
4	30	-2	4
5	31	-1	1
6	32	0	0
7	35	3	9
8	40	8	64
9	45	13	169
10	48	16	256
n = 10		$\sum d = 10$	$\sum d^2 = 772$

अब, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{772}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2} = \sqrt{77.2 - 1}$$

$$= \sqrt{76.2} = \text{Rs. } 8.73$$

ध्यान दीजिये कि दोनों विधियों द्वारा प्राप्त परिणाम अभिन्न हैं। यह भी ध्यान रखिये कि आप कल्पित माध्य चाहे कोई भी चुनें; परिणाम एक जैसे ही आयेंगे। इसका परिक्षण करने के लिये आपको यह सुझाव दिया जाता है कि 21 अथवा 35 को कल्पित माध्य मानते हुए मानक विचलन की गणना करें।

वर्गीकृत आंकड़े – खंडित वितरण

प्रत्यक्ष विधि सूत्रः $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

जहाँ $\sum fd^2$ उत्पादों का योग है, जोकि असली माध्य से विचलनो के वर्गो को उनकी आवृत्ति से गुणा करके प्राप्त होगी, N मदों की संख्या है।

प्रत्यक्ष विधि द्वारा खंडित वितरण के लिए मानक विचलन की संगणना करने की विधिः

1) श्रेणी की संमातर माध्य की संगणना करें; 2) समांतर माध्य से मदों का विचलन ज्ञात करें

3) विचलनों का वर्ग (d^2) निकाले 4) विचलनों के वर्गों को उनकी आवृत्ति से गुणा करकें fd^2 ज्ञात करें; 5) सम्पूर्ण आवृत्ति ज्ञात करें एवं सूत्र का प्रयोग करें।

लघु विधि

सूत्रः $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$

जहाँ fd^2 उत्पादों का योग है जो कि कल्पित माध्य से विचलनों के वर्गों को उनकी आवृत्ति से गुण करने पर प्राप्त होगी, N मदों की संख्या है।

लघु विधि द्वारा खंडित वितरण के लिए मानक विचलन के संगणना की विधिः

1) किसी मूल्य को कल्पित माध्य मानें तथा कल्पित माध्य से मदों के विचलनों को ज्ञात करें एवं इन्हें 'd' से दर्शाए 2)उपरोक्त विचलनों का वर्ग (d^2); निकालें 3) इन विचलनों को इनकी आवृत्ति से गुणा करें एवं इन्हें fd^2 से दर्शाए; 4) योग $(\sum fd^2)$ ज्ञात करें 5) सम्पूर्ण आवृत्ति ज्ञात करें तथा सूत्र का प्रयोग करें।

इस प्रक्रिया को समझने के लिए उदाहरण 12 का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें।

उदाहरण 12: प्रत्यक्ष विधि द्वारा तथा हुए लघु विधि द्वारा निम्न आवृत्ति बंटन के लिए मानक विचलन तथा प्रसरण परिकलित कीजिये 14 को कल्पित माध्य के रूप में प्रयोग करें।

x	:	10	12	14	16	18	20	22
F	:	3	5	9	16	8	7	2

हलः मानक विचलन तथा प्रसरण का परिकलन

प्रत्यक्ष विधिः (Direct Method)

Daily Wages (Rs.) X	No. of Workers f	f x	d $(X - \overline{X})$	d^2	fd^2
10	3	30	-6	36	108
12	5	60	-4	16	80
14	9	126	-2	4	36
16	16	256	0	0	0
18	8	144	2	4	32
20	7	140	4	16	112
22	2	44	6	36	72
	n = 50	$\sum fX = 800$			$\sum fd^2 = 440$

अब, $\overline{X} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{800}{50} = Rs. 16$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{n}} = = \sqrt{\frac{440}{50}} = \sqrt{8.8} = \text{Rs. } 2.97$$

लघु विधि

x	f	d= x-14	fd	fd^2
10	3	-4	-12	48
12	5	-2	-10	20
14	9	0	0	0
16	16	2	32	64
18	8	4	32	128
20	7	6	42	252
22	2	8	16	128
योग	**n = 50**		**$\sum fx=100$**	**$\sum fd^2=640$**

अब,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{640}{50} - \left(\frac{100}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{12.8 - 4}$$

$$= \sqrt{8.8} = 2.97$$

प्रसरण $\sigma^2 = 8.8$

ध्यान दीजिये कि जब समांतर माध्य पूर्णाकों में है, तब लघु विधि द्वारा परिकलन अधिक सरल नही होता।

अंखडित वितरणः

प्रत्यक्ष विधि : Formula: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n}}$

जहाँ, $\sum fd^2$ = उत्पादों को योग है, जोकि विचलनों के वर्गो को (जो कि असली माध्य से मध्य मूल्य तक लिए गए है) उनके आवृत्ति से गुणा करने पर मिलती है; n = मदों का योग।

प्रत्यक्ष विधि द्वारा अंखडित श्रेणी के लिए मानक विचलन की संगणना करने की विधिः

1) मध्य मूल्य ज्ञात कीजिए; 2)समांतर माध्य ज्ञात कीजिए; 3) समांतर माध्य से मध्य मूल्य का विचलन लिजिए (M-X) i.e., d; 4) विचलनों के वर्गों को उनकी आवृत्ति (f) से गुणा करके उनका योग निकालें;($\sum f\, d^2$) 5) मदों का योग ज्ञात करें तथा सूत्र का प्रयोग करें।

लघु विधि :

सूत्रः $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$

जहाँ, $\sum fd^2$ = उत्पादों का योग है, जो विचलनों के वर्गो को (जो कि कल्पित माध्य से मध्य मूल्य तक लिए गए है) उनके आवृत्ति से गुणा करने पर मिलती है; $\sum fd$ = उत्पादों का योग; N = मदों का योग।

लघु विधि द्वारा अंखडित श्रेणी के लिए मानक विचलन की संगणना करने की विधिः

1) मध्य मूल्य ज्ञात कीजिए; 2) किसी मध्य मूल्य को कल्पित माध्य मान ले तथा मध्य मूल्यों से कल्पित माध्य को घटाने हुए विचलनों को ज्ञात कीजिए (M-A) , इन्हें 'd' से दर्शाइए; 3) इन विचलनों का वर्ग निकालने का वर्ग निकाले एवक इन्हें d^2; से दर्शाए; 4) इन विचलनों को इनकी आवृत्ति से गुणा करने इनका योग ज्ञात कीजिए $\sum fd$; 5) विचलनों के वर्गो को उनकी आवृत्ति से गुणा करके योग ज्ञात कीजिए $\sum f\, d^2$; 6) मदों को योग ज्ञात करें (N); तथा सूत्र का प्रयोग करें।

उदाहरण 13: 100 कम्पनियों द्वारा 1989–99 के अंतर्गत अर्जित लाभ (लाख रुपयों में) नीचे दिये गए है। प्रत्यक्ष एवं लघु विधि का प्रयोग करते हुए मानक विचलन परिकलित कीजिए।

लाभ (रुपयों में)	कम्पनियों की संख्या
20-30	4
30-40	8
40-50	18
50-60	30
60-70	15
70-80	10
80-90	8
90-100	7

हलः

Calculation of Standard Deviation

वर्ग (Profit Rs. in lakhs)	मध्यबिंदु X	आवृत्ति f	fx	d $(X - \overline{X})$	d^2	fd^2
20-30	25	4	100	-34.1	1162.81	4651.24
30-40	35	8	280	-24.1	580.81	4646.48
40-50	45	18	810	-14.1	198.81	3578.58
50-60	55	30	1650	-4.1	16.81	504.30
60-70	65	15	975	5.9	34.81	522.15
70-80	75	10	750	15.9	252-81	2525.10
80-90	85	8	680	25.9	670.81	5366.48
90-100	95	7	665	35.9	1288.81	9021.67
		n = 100	$\sum fx$ = 5,910			$\sum fd^2$ = 30819.00

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{5910}{100} = \text{Rs. } 59.10 \text{ lakhs}$$

$$\text{प्रसरण } \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{30819}{100}} = \sqrt{308.19} = \text{Rs. } 17.56 \text{ lakhs}$$

लघु विधि : यहाँ कल्पित माध्य 55 हैं।

वर्ग (Profit Rs. in lakhs)	मध्यबिंदु X	आवृत्ति f	$\frac{x - A}{d}$	d^2	fd	fd^2
20-30	25	4	-30	900	-120	3600
30-40	35	8	-20	400	-160	3200
40-50	45	18	-10	100	-180	1800
50-60	55	30	0	0	0	0
60-70	65	15	10	100	150	1500
70-80	75	10	12	400	200	4000
80-90	85	8	30	900	240	7200
90-100	95	7	40	1600	280	11200
		n = 100			$\sum fx$ = 410	$\sum fd^2$ = 32,500

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{32,500}{100} - \left(\frac{410}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{325 - 16.81} = \sqrt{908.19} = \text{Rs. } 17.56 \text{ lakhs}$$

1) अब हम खंडित एवं अखंडित श्रेणी के लिए मानक विचलन के परिकलन की विधि की तुलना करेंगे। अखंडित श्रेणी के एक चरण (step) के अलावा सम्पूर्ण विधि तथा सूत्र समान है। अतः अखंडित श्रेणी में मध्य मूल्य को ज्ञात करना ही एक अलग प्रक्रिया है,

2) उदाहरण 13 में मानक विचलन के परिकलन के लिए प्रत्यक्ष तथा लघु विधि की तुलना से आप समझ सकते है कि प्रत्यक्ष विधि कठिन तथा समय लेने वाली विधि है यदि समांतर माध्य अंशों में दिया हो, यह कठिनाई लघु विधि द्वारा दूर की जा सकती है।

   यह लघु विधि और आसान बनाई जा सकती है क्रमिक विचलन विधि (Step Deviation Method) द्वारा। आइए अब इस विधि की उपयोगिता, तथा प्रक्रिया का अध्ययन करते हैं।

क्रमिक विचलन विधि : यदि X तथा f का मूल्य छोटा हो तो प्रत्यक्ष तथा लघु विधि के सूत्रों का प्रयोग असानी से किया जा सकता है। यदि X तथा f का मूल्य बड़ा हो तो मानक विचलन का परिकलन प्रत्यक्ष तथा लघु विधि से करना कठिन कार्य हो जाता है। ऐसे में, यह परिकलन क्रमिक विचलन विधि द्वारा आसान किया जा सकता है। यह विधि वर्गीकृत आंकड़ों। समंको के लिए अपनायी जा सकती है। यह तब लागू की जा सकती है जब मदों के मूल्यों के बीच निरंतर अंतराल हो। अखंडित श्रेणी के मामलें में, यदि वर्गोन्तर बराबर है तभी इसका प्रयोग किया जा सकता है। अब आप इस प्रक्रिया का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिएः

सूत्रः $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$

यहाँ, C एक समान फैक्टर है।

क्रमिक विचलन विधि द्वारा मानक विचलन का परिकलनः

1) सभी वर्गो का मध्य मूल्य ज्ञात कीजिए; 2) एक मध्य मूल्य को कल्पित माध्य मानते हुए इस माध्य से मूल्यों तक विचलन ज्ञात कीजिए तथा इन्हें 'd' से दर्शाइए; 3) विचलनों के समान फैक्टर से इन्हें भाग दीजिए; तथा इन्हें d' से दर्शाइए; 4) इन विचलनों का वर्ग ज्ञात कीजिए एवं इन्हें (d'^2); से दर्शाइए, 5) चरण 3 में पाए गए विचलनों को उनकी आवृत्ति से गुणा करें तथा योग ज्ञात करें $\sum fd'$; 6) विचलनों के वर्गो को उनकी आवृत्ति से गुणा करके योग $(\sum fd'^2)$;ज्ञात करें 7) मदों का योग ज्ञात करें तथा सूत्र का प्रयोग करें।

नोटः चरण 4 में विचलनों का वर्ग निकालने की जगह आप fd' के मूल्यों को उनके विचलन से गुणा fd'^2 करके निकाल सकते है। इसकी व्याख्या यह है कि – fd'^2का मतलब f (d'^2); $d'^2 = (d')\,(d')$; अतः fd'^2= f $(d')\,(d')$ i.e. $fd'(d')$

उदाहरण 14: निम्नलिखित बंटन से समांतर माध्य और मानक विचलन परिकलित कीजियेः

प्रति माह आय (रु):	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
कर्मचारियों की संख्याः	90	218	86	41	15

हलः मानक विचलन की संगणना (परिकलन)

प्रति माह आय (रु): (x)	कर्मचारियों की संख्या (f)	मध्य बिंदु (m)	(x-750) (d)	$d'=\frac{m-750}{250}$	fd'	$f(d'^2)$
0-500	90	250	-500	-2	-180	360
500-1000	218	750	0	0	0	0
1000-1500	86	1250	500	2	172	344
1500-2000	41	1750	1000	4	164	656
2000-3000	15	2500	1750	7	105	735
योग	N = 450	-	-	-	$\sum fd'$= 261	$\sum fd'^2$= 2095

यहां कल्पित माध्य है 750 तथा उभयनिष्ठ गुणांक C 250 है

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{n} - \left(\frac{\sum fd'}{n}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{2095}{450} - \left(\frac{261}{450}\right)^2} \times 250$$

$$= \sqrt{4.6556 - (0.58)^2} \times 250$$

$$= \sqrt{4.3192} \times 250 = 519.2 \text{ लगभग}$$

ध्यान दीजिये कि जब वर्गान्तर समान नहीं हैं, तो पद विचलन d' क्रम में पूर्णांक, जैसे 1, 2, 3, ... या –1, –2, –3 .... आदि नहीं होते।

बोध प्रश्न ग

1) मानक विचलन की परिभाषा कीजिये।

2) मानक विचलन के परिकलन के लिए प्रयोग किये जाने वाले सूत्र लिखिये तथा प्रत्यक्ष, लघु एवं क्रमिक विचलन की विधि का उल्लेख कीजिए।

3) प्रेक्षणों के निम्न कुलक के लिए प्रत्यक्ष एवं लघु विधि द्वारा मानक विचलन परिकलित कीजिये।

   245, 322, 192, 310, 231

3) निम्नलिखित समंकों के लिए प्रत्यक्ष, लघु एवं क्रमिक विचलण विधि द्वारा मानक का परिकलन कीजियेः

मूल्य :	130–139	140–149	150–159	160–169	170–179	180–189	190–199
आवृत्तिः	1	4	14	20	22	12	2

14.6.4.1 मानक विचलन की विशेषताएं

आप मानक विचलन को परिकलित करने के अर्थ, उसकी विधियों से अवगत हो चुके हैं। आइये अब मानक विचलन के प्रमुख गुणधर्मों का अध्ययन करें।

1) यदि श्रेणी के प्रत्येक को एक समान मान से बढ़ाया या घटाया जाए तो मानक विचलन के मान में कोई अंतर नही पड़ता, वह वही रहता है। अतः यदि y = x + k जहाँ k एक स्थिर मात्रा है तो Y का मानक विचलन X के मानक विचलन के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में मानक विचलन मूलबिंदू के परिवर्तन (Change of origin) से स्वतंत्र होता है। यह बात उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण के लिए:

X	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$	मान लीजिये Y = X + 10	$Y - \bar{Y}$	$(Y - \bar{Y})^2$
1	-2	4	1 + 10 = 11	-2	4
2	-1	1	2 + 10 = 12	-1	1
3	0	0	3 + 10 = 13	0	0
4	1	1	4 + 10 = 14	1	1
5	2	4	5 + 10 = 15	2	4
Total 15	0	10	65	0	10

X का समांतर माध्य $= \frac{\sum X}{n} = \frac{15}{5} = 3$

X का मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1.414$

Y का समांतर माध्य $= \frac{\sum Y}{n} = \frac{15}{5} = 3$

Y का मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1.414$

अतः X का मानक विचलन = Y का मानक विचलन

2) किसी दी गई श्रेणी के लिए, यदि प्रत्येक प्रेक्षण को एक स्थिरांक से गुणा किया जाये भाग दिया जाए, तो मानक विचलन पर भी समान प्रभाव पडेगा। अतः यदि Y = AX जहां A एक स्थिरांक है तो Y का मानक विचलन = x का मानक विचलन xA होगा

उदाहरण के लिए,

X	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$	Let Y = 10X	$(Y - \bar{Y})$	$(Y - \bar{Y})^2$
1	-2	4	10	-2	4
2	-1	1	20	-1	1
3	0	0	30	0	0
4	1	1	40	1	1
5	2	4	50	2	4
Total 15	0	10	150	0	10

$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{15}{5} = 3$

$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{150}{5} = 30$

σ of Y $= \sqrt{\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1000}{5}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 14.14$

σ of Y = 10 (σ of x)

अतः आप कह सकते है कि मानक विचलन मूल बिंदू के परिवर्तन से स्वतंत्र है परन्तु यह स्केल के परिवर्तन से स्वतंत्र नही है।

3) दिये गए प्रेक्षणों के एक कुलक के लिए मानक विचलन कभी भी संमातर माध्य से परिकलित माध्य विचलन तथा चतुर्थक विचलन से कम नही होता। वास्तव में सामान्य समकों के लिए माध्य विचलन 4/5 σ के बराबर तथा चतुर्थ विचलन 2/3 σ के बराबर होता है।

4) यदि दो समूहों में n_1, तथा n_2, प्रेक्षण हों, तथा उनका समांतर माध्य $\bar{X}_1$ तथा $\bar{X}_2$ तथा मानक विचलन σ_1 व, σ_2हो, तो संयुक्त समूह का मानक विचलन ज्ञात किया जा सकता है। यह निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात होता है।

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{(n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2) + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{(n_1 + n_2}}$$

जहाँ σ_{12} = दो समूहों का संयुक्त मानक विचलन

$d_1 = \bar{X}_{12} - \bar{X}_1$, $d_2 = \bar{X}_{12} - \bar{X}_2$

$\bar{X}_{12}$ = दोनों समूहों का संयुक्त समांतर माध्य।

गुणधर्म 3 व 4 को समझने के लिए सेक्सन 14.8 जो इस इकाई में आगे दिए गए हैं, में दिये गए उदाहरण 20 व 21 का अध्ययन कीजिये।

5) समांतर माध्य के अतिरिक्त किसी भी अन्य मूल्य से परिकलित मानक विचलन, समांतर माध्य से परिकलित मानक विचलन से सदैव अधिक होगा। इसकी व्याख्या करने के लिए आइये फिर ऊपर (1) में दिये गए x के मानों के समान मान लेते हैं, तथा मान 4 से, जो समांतर माध्य ($\bar{X}$) 3 से भिन्न है, मानक विचलन परिकलित करते हैं :

X	:	1	2	3	4	5
X – 4	:	-3	-2	-1	0	1
$(X - 4)^2$	:	9	4	1	0	1

अब $\sum(X - 4)^2 = 15$

4 से मूल माध्य वर्ग विचलन $= \sqrt{\frac{\sum(X-4)^2}{5}}$

$= \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{3} = 1.732$

किंतु x का मानक विचलन = $\sqrt{2}$ या 1.414 है। अतः समांतर माध्य के अतिरिक्त किसी भी मूल्य से मूल मध्य वर्ग विचलन मानक विचलन से अधिक होता है।

6) साधारण प्रकार के समंकों में, या प्रसामान्य प्रकार के समंकों में A. M. ± σ विस्तार में मदों की संख्या का 68%. A.M. ± 2 σ विस्तार में मदों की संख्या का लगभग 95% तथा । A.M. ± 3 σ विस्तार में समंकों की लगभग सभी मदें सम्मिलित होती हैं।

इसकी व्याख्या करने के लिए, उदाहरण 12 में दिये गए समंक लेते हैं। इन समंकों के लिए, समांतर माध्य (A.M.) 16 है तथा σ 2.97 है। अतः विस्तार । A.M. ± σ will be 16 ± 2.97 or 13.03 to 18.97 होगा। समंकों में 13.03 से 18.97 के बीच मदों की संख्या 9 + 16 + 8 = 33, अर्थात् मदों की कुल संख्या (अर्थात 50) का 66% है, जो कि 68 के निकट है। इसी प्रकार, विस्तार A.M. ± 2 σ will be 16 ± 2 × 2.97 या 10.06 से 21.94. होगा।

प्रथम तथा अंतिम समूह के मदों के अतिरिक्त समस्त मदें इस विस्तार के अंतर्गत आती हैं। इस प्रकार, विस्तार 10.06 से 21.94 में आने वाली मदों की कुल संख्या 45 अर्थात् कुल मदों का 90% है, जो कि 95% से बहुत भिन्न नहीं है। आप इस बात की जाँच कर सकते हैं कि विस्तार A.M. ± 3 σ में 100% मदें आती हैं कि नहीं।

ऊपर परिकलित विस्तारों के बीच आने वाली मदों की प्रतिशतताएँ यथार्थतः वही नहीं है जो कि गुणधर्म में बताई गई हैं। इससे केवल यही संकेत मिलता है कि उदाहरण 12 पूरी तरह प्रसामान्य नहीं है किंतु इसके बिल्कुल निकट है।

14.6.4.2 गुण व परिसीमाएँ

गुणः अपकिरण के समस्त मापों में मानक विचलन को श्रेष्ठ माना जाता है क्योंकि इसमें अपकिरण के अच्छे माप के लगभग तमाम आवश्यक गुण हैं। मानक विचलन में निम्नलिखित गुण हैं :

1) यह दृढ़ता से परिभाषित होता है, तथा श्रेणी के समस्त प्रेक्षणों पर आधारित होता है।

2) मानक विचलन की अद्वितीय विशेषता जो इसे अपकिरण के अन्य मापों से श्रेष्ठतर बनाती है, वह है इसका बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होना। अतः यदि हमें बहुत से समूहों में से प्रत्येक की मदों की संख्या, उनका समांतर माध्य तथा मानक विचलन दिया गया हो, तो हम सुगमतापूर्वक संयुक्त समूह का मानक विचलन परिकलित कर सकते हैं।

3) मानक विचलन प्रतिचयन के उच्चावचनों (fluctuation of sampling) से सबसे कम प्रभावित होता है।

4) एक प्रसामान्य बंटन में समांतर माध्य ± 3 σ मानों के 68.36% का समावेश करता है, जबकि चतुर्थक विचलन केवल 50% तथा माध्य विचलन केवल 57% मानों का समावेश करते हैं। इस कारण से मान विचलन को मानक माप कहा जाता है।

परिसीमाएँ: अपकिरण के माप के रूप में मानक विचलन की मुख्य परिसीमाएँ या अवगुण निम्नलिखित हैं :

1) मानक विचलन की एक बड़ी परिसीमा यह है कि भिन्न इकाइयों में दिये गए दो या दो से अधिक श्रेणियों के प्रेक्षणों के अपकिरण की तुलना करने के लिये

इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता। इस उद्देश्य के लिए मानक विचलन गुणांक (Coefficient of Standard deviation) की परिभाषा करनी पड़ती है

2) समांतर माध्य से विचलनों का वर्गफल निकालने और फिर उन वर्णित विचलनों के समांतर माध्य का वर्गमूल ज्ञात करने की प्रक्रिया काफी जटिल कार्य लगती है। वास्तव में इससे एक अन्य परिसीमा का उदय होता है, अर्थात् मानक विचलन चरम मूल्यों से बहुत अधिक प्रभावित होता है। विचलनों को निकालने की प्रक्रिया समान्तर माध्य से बड़े विचलनों को, जो कि केवल चरम मूल्यों से प्राप्त किये जाते महत्व प्रदान करती है, तथा उन मदों को कम महत्व देती है जो समांतर माध्य के निकट है।

3) विवृतमुखी वर्गों वाले बंटन के लिए मानक विचलन परिकलित नहीं किया जा सकता।

14.7 विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)

विचरण गुणांक, जिसे प्रतिशतताओं में व्यक्त **मानक विचलन गुणांक** के नाम से भी जाना जाता है, श्रेणी के समान्तर माध्य से मानक विचलन के अनुपात पर आधारित होता है। अतः विचरण गुणांक को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{समांतर माध्य}} \times 100$$

विचरण गुणांक अपकिरण का एक सापेक्ष माप है और इसे सामान्यतः प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता अतः इसका उपयोग भिन्न इकाइयों में दिये गए प्रेक्षणों के दो कुलकों के अपकिरण की तुलना करने के लिये सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। यदि प्रेक्षणों की इकाइयाँ समान हों, परंतु उनके औसत मान बहुत भिन्न हो, तब भी उनके अपकिरण की तुलना के लिए इसका उपयोग किया जा सकता है।

अतः प्रेक्षणों के दो या अधिक कुलकों की सुतथ्यता के माप या तुलना के लिए भी इसका प्रयोग किया जा सकता है। इस बात को.समझने के लिए आइये एक उदाहरण लें। मान लो, हम दिल्ली और बम्बई के बीच की दूरी नापते हैं तथा 1,540 कि.मी. की वास्तविक दूरी में 1 कि.मी. या 1,00,000 से.मी. का विचलन करते हैं। एक मीटर कपड़े के टुकड़े को मापने में 10 सें.मी. के विचलन की तुलना में इस विचलन का महत्व नगण्य है। जब प्रथम स्थिति के 1,00,000 से.मी. के विचलन की तुलना प्रत्यक्ष रूप से दूसरी स्थिति के 10 से.मी. विचलन से की जाती है, तो यह तथ्य स्पष्ट नहीं होता। चूँकि 1,00,000 से.मी. 10 से. मी. से अधिक है, तो यह निष्कर्ष निकाले जाने की सम्भावना है कि प्रथम स्थिति में माप का विचलन बहुत अधिक महत्वपूर्ण है। किन्तु यदि हम गुणांकों का परिकलन करें, तो चित्र स्पष्ट हो जाता है। प्रथम स्थिति में गुणांक केवल $\frac{1}{1540} \times 100 = 0.865\%$ हैं, तथा दूसरी स्थिति में गुणांक $10/1000 \times 100$ या 1% है। अतः दूसरी स्थिति में विचलन सापेक्ष रूप से अधिक है। **अतः जब कभी विचलन की तुलना करनी हो तो यह विचरण गुणांक के द्वारा ही की जानी चाहिए।**

प्रसरण (Variance):1913 में F.A. Fisher ने प्रसरण के माप का प्रयोग मानक विचलन के वर्ग को दर्शाने के लिए किया था। मानक विचलन का वर्ग प्रसरण की परिभाषा है। यह सकंल्पना उपयोगी है उन उच्च कार्यों में जहाँ योग को अनेक भागों

में बाँटा जा सके प्रत्येक किसी एक फैक्टर का कारक हो जो मूल आंकड़े समुच्चय में बदलाव उत्पन्न कर रहा हो।

प्रसरण $= \sigma^2$ या $\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}}$

अतः यह सूत्र इस प्रकार दर्शाया जा सकता है–

अवर्गीकृत आंकडों में;

प्रसरण (प्रत्यक्ष विधि) $= \sum X^2 / n$

प्रसरण (लघु विधि) $= \frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2$

वर्गीकृत आंकडों के : खंडित श्रेणी

प्रसरण (प्रत्यक्ष विधि) $= \sum fx^2 / N$

प्रसरण (लघु विधि) $= \sum fd^2 / N - (\sum fd^2 / N)^2$

अंखडित श्रेणीः

जो सूत्र खंडित श्रेणी में दर्शाया गया है वही अखंडित श्रेणी में भी होगा।

क्रमिक विचलन विधि में:

प्रसरण: $\frac{\sum fd'^2}{n} - \left(\frac{\sum fd'}{n}\right)^2 \times C^2$

उदाहरण 15: एक फुटबाल के मौसम में टीम A द्वारा दागे गये गोलों का रिकार्ड नीचे दिया गया है :

एक मैच में दागे गए गोलों की संख्या	:	0	1	2	3	4
मैचों की संख्या	:	1	9	7	5	3

टीम B के लिए, दागे माग गोलों की प्रति मैच औसत संख्या 2.5, तथा मानक विचलन 1.25 गोल था। कौन टीम अधिक संगत है।

हलः समान्तर माध्य और मानक विचलन का परिकलन, टीम A के लिये

गोलों की संख्या	मैचों की संख्या (f)	विचलन (d)	fd	fd^2
0	1	-2	-2	4
1	9	-1	-9	9
2	7	0	0	0
3	5	1	5	5
4	3	2	6	12
	N = 25		**$\sum fd = 0$**	**$\sum fd^2 = 30$**

टीम A का समांतर माध्य: $= A + \frac{\sum fd}{n}$

$= 2 + \frac{0}{25} = 2$ goals

टीम A का मानक विचलनः

$$= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{30}{25} - \left(\frac{0}{25}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.2 - 0} = \sqrt{1.2}$$

$$= 1.1$$

टीम A का विचरण गुणाकः $= \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{समांतर माध्य}} \times 100$

: $= \frac{S.D.}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.1}{2} \times 100 = 55\%$

टीम B का विचरण गुणाकः $= \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{समांतर माध्य}} \times 100$

$= \frac{S.D.}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.25}{2.5} \times 100 = 50\%$

टीम B का विचरण गुणांक A के विचरण गुणांक से कम है। अतः टीम B टीम A की अपेक्षा सगत मानी जाएगी।

उदाहरण 16: नीचे दिए गए संमकों से बताइये कि कौन सी श्रेणी अधिक विचरणशील (variable) है।

चर	**श्रेणी A**	**श्रेणी B**
10-20	10	18
20-30	18	22
30-40	32	40
40-50	40	32
50-60	22	18
60-70	18	10

हलः श्रेणी A के लिए संमातर माध्य और मानक विचलन का परिकलन

वर्गान्तर (चर) (x)	**मध्यमान (m)**	**आवृत्ति (f)**	**मद (d)**	**fd**	**fd^2**
10-20	15	10	-2	-20	40
20-30	25	18	-1	-18	18
30-40	35	32	0	0	0
40-50	45	40	1	40	40
50-60	55	22	2	44	83
60-70	65	18	3	54	162
		N = 140		**$\sum fd = 0$**	**$\sum fd^2 = 30$**

यहाँ कल्पित माध्य A 35 है तथा C 10 है।

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fx}{n} + C$$

$= 35 + \frac{100}{140} + 10$

$= 35 + 7.143 = 42.1$ लगभग

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{348}{140} - \left(\frac{100}{140}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{2.486 - 0.510} \times 10$

$= 1.4057 \times 10 = 14.057$

विचरण गुणांक (श्रेणी A) $= \frac{\sigma}{X} \times 100$

$= \frac{14.06}{42.1} \times 100 = 33.3\%$

प्रसरण (Variance) (श्रेणी A): $= \frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2 \times C^2$

$= \frac{348}{140} - \left(\frac{100}{140}\right)^2 \times 10^2$

$= 2.486 - (0.510)^2 \times 100$

$= 1.976 \times 10$

$= 197.6$

हम प्रसरण ऐसे भी परिकलित कर सकते है

प्रसरण $= \sigma^2$

σ श्रेणी A = 14.057

प्रसरण (A) $= 14.057^2 = 197.6$

श्रेणी B के लिए समांतर माध्य और मानक विचलन का परिकलन

वर्गान्तर (चर) (x)	मध्यमान (m)	आवृत्ति (f)	पद विचलन (d)	fd	fd^2
10-20	15	18	-2	-36	72
20-30	25	22	-1	-22	22
30-40	35	40	0	0	0
40-50	45	32	1	32	32
50-60	55	18	2	36	72
60-70	65	10	3	30	90
		N = 140		**$\sum fd = 40$**	**$\sum fd^2 = 288$**

यहाँ A = 35 तथा C_2 is 10

$\overline{X}_2 = A_2 + \frac{\sum f_2 d_2}{n_2} + C_2$

$= 35 + \frac{40}{140} + 10$

$= 35 + 2.85 = 37.85$ लगभग

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{288}{140} - \left(\frac{40}{140}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2.057 - 0.0784} \times 10$$

$$= \sqrt{1.9786} \times 10$$

$$= 1.4057 \times 10$$

$$= 14.057$$

विचरण गुणांक (श्रेणी B) $= \frac{\sigma}{X} \times 100$

$$= \frac{14.06}{37.85} \times 100$$

$$= 37.1\%$$

प्रसरण (Variance) (Series B) $= \sigma^2$

Standard deviation of B $= 14.057$

प्रसरण (Variance) $= 14.057^2$

$= 197.6$

चूंकि श्रेणी B का विचरण गुणांक श्रेणी A के विचरण गुणांक से अधिक है, अतः श्रेणी B अधिक विचरणशील है। इस उदाहरण में आप देख सकते हैं कि दोनों श्रेणियों का मानक विचलन एक समान, अर्थात् 14.06 है। इस तथ्य से हमें यह निष्कर्ष नहीं निकालना चाहिये कि दोनों श्रेणियों का विचरण अभिन्न है। सही निर्वचन के लिए समांतर माध्य के अंतर का ध्यान रखना भी आवश्यक है।

14.8 कुछ अन्य उदाहरण

उदाहरण 17: 100 कम्पनियों द्वारा 1987–88 में कमाया गया लाभ (लाख रु. में) निम्न है (a) माध्य (b) प्रसरण (c) मानक विचलन का परिकलन कीजिए।

लाभ (लाख रु. में)	कम्पनियों की संख्या
20-30	4
30-40	8
40-50	18
50-60	30
60-70	15
70-80	10
80-90	8
90-100	7

हलः

वर्ग	मध्य बिन्दु (X)	आवृत्ति (f)	fX	fX^2
20-30	25	4	100	2,500
30-40	35	8	280	9,800
40-50	45	18	810	36,450
50-60	55	30	1,650	90, 750
60-70	65	15	975	63,375
70-80	75	10	750	56,250
80-90	85	8	680	57,800
90-100	95	7	665	63,175
		N = 100	**$\sum fX = 5,910$**	**$\sum fX^2 = 3,80,100$**

a) $\overline{X} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{5,910}{100} = \text{Rs. } 59.10$ लाख

b) प्रसरण $= \frac{\sum fX^2}{n} - \left(\frac{\sum fX}{n}\right)^2$

$$= \frac{3,80,100}{100} - \left(\frac{5910}{100}\right)^2$$

$$= 3801.00 - 3492.81$$

$= \text{Rs. } 308.19$ लाख

c) मानक विचलन $= \sqrt{Variance} = \sqrt{308.19}$

$= 17.56$ लाख

उपरोक्त उदाहरण से आप समझ सकते है कि मदों का योग तथा उनके वर्ग का परिकलन बड़े है। यह विधि प्रत्यक्ष विधि है क्योंकि हमनें केवल मदों का प्रत्यक्ष प्रयोग किया है, किसी मूल्य से उनके विचलन का परिकलन नहीं किया गया है। यह विधि केवल तभी उपयोग की जा सकती है जब मद छोटे हो तथा उनका योग भी छोटा हो।

उदाहरण 18: निम्न आंकड़ों से माध्य तथा मानक विचलन का परिकलन कीजिए।

वर्गान्तर :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृत्ति : :	4	8	8	16	12	6	4

हलः आइए, लघु विधि का प्रयोग करते है। यह वह विधि जो साधारणतः प्रयोग की जाती है तथा सबसे कम गणना का प्रयोग करती है। समांतर माध्य यहाँ भी जैसे यहाँ भी कल्पित माध्य को एक मध्य मूल्य की तरह लिया जाता है जो लगभग मध्य (बीच में) होती है और एक उच्च आवृत्ति रखती है।

ज्ञात किए गए विचलनों को समान फैक्टर (यदि कोई है) से भाग दिया जाता है। जब हम इन्हें समान फैक्टर से भाग देते है, तो इस विधि को क्रमिक विचलन विधि कहते है।

माध्य एवं मानक विचलन का परिकलन

वर्गान्तर	f	मध्य बिन्दु (X)	D = X-A (X-45)	$d' = \frac{d}{10} - \frac{d}{C}$	fd'	fd'^2
10-20	4	15	-30	-3	-12	36
20-30	8	25	-20	-2	-16	32
30-40	8	35	-10	-1	-8	8
40-50	16	45	0	0	0	0
50-60	12	55	+10	1	12	12
60-70	6	65	+20	2	12	24
70-80	4	75	+30	3	12	36
	N = 58	-	-	-	$\sum fd' = 0$	$\sum fd'^2 = 148$

माध्य $\overline{X}$ $= A + \frac{\sum fx}{n} \times C$

$= 45 + \frac{0}{58} \times 10 = 45$

मानक विचलन $= C \times \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{n} - \left(\frac{\sum fd'}{n}\right)^2}$

$= 10 \times \sqrt{\frac{148}{58} - \left(\frac{0}{50}\right)^2}$

$= 10 \times \sqrt{2.552} = 10 \times 1.597 = 15.97$

उदाहरण 19 : एक राज्य सरकार ने 60 वर्ष की आयु से अधिक के लोगों को वृद्धावस्था पेंशन देने का निश्चय किया। पेंशन की निम्न दरें निश्चित की गईः

आयु वर्ग	रुपये प्रति मास
60-65	250
65-70	300
70-75	350
75-80	400
80-85	450

पेंशन के अधिकार प्राप्त 25 व्यक्तियों की आयु नीचे दी गई है :

74	62	84	72	83	72	81	64	71	63	61
60	61	67	74	64	79	73	75	76	69	78
65	67	68								

दी जाने वाली औसत मासिक पेंशन तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हलः

आयु वर्ग	मिलान रेखाएँ	आवृत्ति
60-65	卌 II	7
65-70	卌	5
70-75	卌 I	6
75-80	IIII	4
80-85	III	3
		25

दी जाने वाली मासिक औसत पेंशन तथा मानक विचलन का परिकलन

पेशन की दर (रुपयों में)	f	$d'=\left(\frac{X-350}{50}\right)$	fd'	fd'^2
250	7	-2	-14	28
300	5	-1	-5	5
350	6	0	0	0
400	4	1	4	4
450	3	2	6	12
	25	-	-9	49

यहाँ A = 350, C = 50; $\sum f$ or n = 25; $\sum fd'$ = -9; and $\sum fd'^2$ = 49

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'}{n} \times C$$

$$= 350 - \frac{9}{25} \times 50 = 332$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{49}{25} - \left(\frac{-9}{25}\right)^2} \times 50 = 1.353 \times 50 = 67.65$$

प्रसरण (Variance) $= \sigma^2$

$= 67.65^2$

$= 4576.52$

Coefficient of σ $= \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$

$= \frac{67.25}{332} \times 100$

$= 20.04\%$

अतः मासिक औसत पेंशन 332 रुपये है, तथा मानक विचलन 67.25 है।

उदाहरण 20: 50 पुरूष श्रामिकों के एक समूह के लिए उनके दैनिक मजदूरी का माध्य और मानक विचलन 72 रुपये तथा 9 रुपये हैं। दूसरे 40 महिला श्रमिकों के समूह के लिए, यह 54 रुपये तथा 6 रुपये हैं; पूर्ण 90 श्रमिकों के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हलः इन समंकों में

$n_1 = 50$ and $n_2 = 40$

$\overline{X}_1 = 72$ and $\overline{X}_2 = 54$

$\sigma_1 = 9$ and $\sigma_2 = 6$

90 श्रमिकों में समूह के लिए संयुक्त समांतर माध्य $(\overline{X}_{12})$ =

$$= \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1+n_2} = \frac{50\times72 + 40\times54}{90}$$

$$= \frac{3,600 + 2,160}{90} = 64$$

90 श्रमिकों में समूह के लिए संयुक्त मानक विचलन

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{n_1(\sigma_1^2+d_1^2)+n_2(\sigma_2^2+d_2^2)}{n_1+n_2}}$$

अब, $d_1 = 64 - 72 = -8$ तथा $d_2 = 54 - 72 = -18$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{50(80+64)+40(36+324)}{90}} = \sqrt{\frac{7,250+14,400}{90}}$$

$$= \sqrt{\frac{21,650}{90}} = \sqrt{240.54} = 15.51$$

आप देख सकते है कि दो समूहों का संयुक्त माध्य का मूल्य दो समूहों के बीच है लेकिन मानक विचलन का मूल्य दिए गए मानक विचलन से बड़ा है संयुक्त माध्य हमेशा दिए गए माध्य के बीच होगा, परन्तु संयुक्त मानक विचलन का मूल्य दिए गए मानक विचलन के बाहर पाना गलत नही हैं, बल्कि दिए गए माध्यों के बीच जितना अंतर होगा, संयुक्त मानक विचलन उतना ही दिए गए सबसे बड़े मानक विचलन से दूर होगा। जब सभी समूहों का माध्य बराबर होगा, तभी संयुक्त मानक विचलन, दिए गए मानक विचलनों के विस्तार के बीच होगा।

उदाहरण 21: उदाहरण 18 में दिए गए समकों से माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए एवं दिखाइए की माध्य विचलन मानक विचलन से कम होता है।

हल:

माध्य विचलन का परिकलन

वर्गान्तर	आवृत्ति (f)	मध्य बिन्दु (X)	$\|m - \overline{X}\|$ $\|d\|$	$f\|d\|$
10-20	4	15	30	120
20-30	8	25	20	160
30-40	8	35	10	80
40-50	16	45	0	0
50-60	12	55	10	120
60-70	6	65	20	120
70-80	4	75	30	120
	N= 58			$\sum f\|d\| = 720$

उदाहरण 18 से, $\overline{X} = 45$ तथा $\sigma = 15.97$

माध्य से मानक विचलन $= \frac{\Sigma f|d|}{n} = \frac{720}{58} = 12.41$

अतः माध्य से माध्य विचलन, मानक विचलन से कम है। आप देख सकते है कि माध्य विचलन मानक विचलन से सदैव कम होता है, आंकड़े चाहे जैसे भी हो।

बोध प्रश्न घ

1) निम्न सारणी में मोटे बैलो तथा मोटे भेंड़ो के वजन पाउंड में दिए गए है।

मोटे बैल	संख्या	मोटे भेंड़	संख्या
850-900	2	150-175	8
900-950	24	175-200	30
950-1000	45	200-225	59
1000-1050	120	225-250	70
1050-1100	110	250-275	98
1100-1150	140	275-300	60
1150-1200	66	300-325	37
1200-1250	42	325-350	23
1250-1300	20	350-375	15
1300-1350	15	375-400	5

ज्ञात कीजिए बैलो या भेड़ो में से किसका वजन ज्यादा अस्थिर है।

2) एक सह–शैक्षिक कॉलेज में लड़के तथा लड़कियों ने फॉउडेशन डे पर अलग–अलग समूह बना लिए जहाँ सभी को शारीरिक श्रम लगाना था। लड़के तथा लड़कियों के समूह के लिए अलग–अलग तथा संयुक्त मानक विचलन का परिकलन कीजिए। क्या लिंग का भेद प्रत्येक समूह को ज्यादा सजातीय बनाता है ?

प्रत्येक व्यक्ति द्वारा दिया गया श्रम मिनटों में	लड़कियों की संख्या	लड़कों की संख्या
60	20	120
55	60	100
50	100	200
45	450	355
40	450	350
35	300	500
30	250	350
25	100	20

14.9 सारांश

अपकिरण समकों के विस्तार या बिखराव को निरूपित करता है। इसका प्रयोग केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप से मदों के विचलनों के माध्य को प्रकट करने के लिए भी करते हैं। अपकिरण का परिकलन किसी माध्य की विश्वसनीयता का मूल्यांकन करने के लिए दो या दो से अधिक समंक कुलकों के विचरणों की तुलना करने के लिए या स्वयं विचरण का नियंत्रण करने के लिए करते हैं। अपकिरण की एक अच्छी माप सभी प्रेक्षणों पर आधारित होनी चाहिए। इसका परिकलन सुगम होना चाहिए और

इस पर प्रतिचयन उच्चावचनों का न्यूनतम प्रभाव होना चाहिए। यह आगे के बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होना चाहिए।

अपकिरण के सापेक्ष मापों का परिकलन दो या दो से अधिक समंक कुलकों में विचरण की तुलना करने के लिए करते हैं। इन्हें प्राप्त करने के लिए अपकिरण के निरपेक्ष मापों को एक उपयुक्त माध्य या आंकड़ों के दो चुने हुए मदों के योगफल के अनुपात के रूप में प्रकट करते हैं।

प्रायः प्रयोग में आने वाले अपकिरण के विभिन्न माप हैं : विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन और मानक विचलन हैं। विस्तार को आंकड़ों के उच्चतम और निम्नतम मदों के अंतर के रूप में परिभाषित करते हैं। यह समस्त आंकड़ों के विस्तार को प्रकट करता है। चतुर्थक विचलन Q_1 और Q_3 के अंतर का आधा होता है। यह केवल मध्यस्थ 50% मदों पर आधारित होता है। माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप से मदों के निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति का यह माप समांतर–माध्य, माध्यिका या कई बार बहुलक भी हो सकता है।

विवृतमुखी आंकड़ों के लिए चतुर्थक विचलन एक उपयुक्त माप है। जब चरम मानों को उचित महत्व देना हो, जैसे गुण नियंत्रण में, मूल्यों के अध्ययन में, या मौसम सबंधी आंकड़ों में, तो विस्तार उपयोगी होता है। क्योंकि माध्य विचलन सभी मदों पर आधारित होता है, इसलिए बहुत सी स्थितियों में यह समंकों के विचरण का अन्य दो मापों की तुलना में श्रेष्ठतर प्रतिनिधि होता है।

माध्य विचलन का परिकलन करते समय विचलनों के चिन्हों की उपेक्षा कर दी जाती है। इससे माप की कुछ परिसीमाएँ हो जाती हैं। ऐसी परिसीमाओं को निष्प्रभावित करने के लिए एक नया माप, जिसे मूल माध्य वर्ग विचलन कहा जाता है, अपकिरण मापने के लिए परिभाषित किया जाता है। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के वर्गों के समांतर माध्य का वर्गमूल होता है। समांतर माध्य से लिया गया मूल माध्य वर्ग विचलन न्यूनतम होता है तथा इसे मानक विचलन का नाम दिया जाता है । मानक विचलन के परिकलन की दो विधियाँ हैं–

1) प्रत्यक्ष विधि 2) लघु विधि

पद विचलो का प्रयोग करने वाली लघु विधि का प्रयोग अधिक प्रचलित है। इसका सूत्र है

$$\text{मानक विचलन } (\sigma) = C \times \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{n} - \left(\frac{\sum fd'}{2}\right)^2}$$

मानक विचलन दृढ़तापूर्वक परिभाषित होता है तथा यह समस्त मदों पर आधारित होता है।

14.10 शब्दावली

अंतर–चतुर्थक विस्तारः अपकिरण का एक माप जो मध्यस्थ 50% आंकड़ों के विस्तार $(Q_3 - Q_1)$ पर आधारित है।

माध्य विचलनः समांतर माध्य, माध्यिका या बहुलक से मदों के निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य।

चतुर्थक विचलनः पहले और तीसरे चतुर्थकों के बीच की दूरी का आधा।

विस्तारः किसी समंक कुलक में अधिकतम और न्यूनतम मानों में अंतर।

विचरण गुणांकः समान्तर माध्य से भाजित मानक विचलन जिसे प्रतिशतता के रुप में व्यक्त किया गया हो।

मूल माध्य वर्ग विचलनः केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के वर्गों के समातंर माध्य का वर्गमूल।

मानक विचलनः समांतर माध्य से मूल माध्य वर्ग विचलन।

14.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

ख 4) विस्तार = 39, QD = 9.25

5) विस्तार = 14, विस्तार गुणांक =0.58

Q.D. = 2.25 Q.D. का गुणांक = 0.101

ग 3) 49.1

4) 156.37

घ 1) बैलो : $\overline{X} = 1097.52$; $\sigma = 90.34$; C.V. = 8.23%

भेड़ों : $\overline{X} = 261.15$; $\sigma = 47.75$; C.V. = 18.25%

2) लडकियाँ:$\overline{X} = 39.45$; $\sigma = 7.5$; C.V. = 19.00%

लड़के :$\overline{X} = 40.69$; $\sigma = 8.68$; C.V. = 21.34%

$\overline{X}_{12} = 40.11$; $\sigma_{12} = 8.18$

14.12 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

1) अपकिरण से आप क्या समझते हैं ? अपकिरण की माप के उद्देश्य की समीक्षा कीजिए।

2) माध्य विचलन किसे कहते हैं ? इसके गुणों और दोषों का पुनरावलोकन कीजिए।

4) मानक विचलन क्या है ? अपकिरण के अन्य मापों से यह किस प्रकार श्रेष्ठ है?

5) विचरण गुणांक क्या होता है ? विचरण के एक माप के रूप में इसका क्या कार्य है ? यह प्रसरण से किस प्रकार भिन्न है ?

6) अपकिरण के विभिन्न मापों को परिभाषित कीजिये तथा उनके सापेक्ष गुणों और परिसीमाओं की व्याख्या कीजिये।

अभ्यास

1) निम्न आंकड़ों के लिए, चतुर्थक विचलन और माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

आयु (वर्षों में) :	20	30	40	50	60	70	80
सदस्यों की संख्या :	3	61	132	153	140	51	3

(**उत्तर :** R= 60 वर्ष, Q.D. =.10, M.D($\overline{X}$) = 9.52)

2) 20 लम्बी दूरी के टेलीफोन कालों का, काल अवधि के विचार से आवृत्ति बंटन इस प्रकार है:

काल की अवधि	आवृत्ति
4 या अधिक, परंतु 8 से कम	4
8 या अधिक, परंतु 12 से कम	5
12 या अधिक, परंतु 16 से कम	7
16 या अधिक, परंतु 20 से कम	2
20 या अधिक, परंतु 24 से कम	1
24 या अधिक, परंतु 28 से कम	1
योग	20

समांतर माध्य, माध्यिका और चतुर्थक विचलन परिकलित कीजिए।

(**उत्तर :** माध्य = 12.8, माध्यिका = 12.6, Q.D. = 3.3)

3) निम्न आंकड़ों के लिए माध्यिका से माध्य विचलन और माध्य विचलन गुणांक परिकलित कीजिए।

बिक्री ('00 रु.)	कम्पनियों की संख्या
20 से कम	3
30 से कम	9
40 से कम	20
50 से कम	23
60 से कम	25

(**उत्तर :** M_d से M.D. = 8.9, M_d से M.D. का गुणांक = 0.29)

4) बिजली की घरेलू खपत के एक सर्वेक्षण में खपत की गई बिजली इकाइयों के विचार से निम्न आवृत्ति बंटन प्राप्त हुआ। चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक परिकलित कीजिए :

इकाइयां	उपभोक्ताओं की संख्या
200 से कम	9
200–400	18
400 –600	27
600–800	32
800–1000	45
1000–1200	38
1200–1400	20
1400 और अधिक	11

(**उत्तर :** Q.D. = 520.6, Q.D. का गुणांक = 0.317)

5) निम्न आंकड़ों के लिए समांतर माध्य और माध्यिका से माध्य विचलन परिकलित कीजिए:

वर्ग अंतरालः	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59
आवृत्तिः	15	36	53	42	17	2

(**उत्तर :** $M.D(\overline{X}) = 9.10$, $M.D. (M_d) = 9.08$)

6) निम्न आंकड़ों के लिए बहुलक से माध्य विचलन और उसका गुणांक परिकलित कीजिए:

प्रति मद त्रुटियों की संख्या	आवृत्ति
0–5	18
5–10	32
10–15	50
15–20	75
20–25	125
25–30	150
30–35	100
35–40	90
40–45	80
45–50	50

(**उत्तर :** $M.D. (M_o) = 9.02$, $M.D. (M_o)$ का गुणांक $= 0.338$)

7) निम्न आंकड़ों के लिए माध्य विचलन और उसका गुणांक परिकलित कीजिए :

आवेदन किए गए शेयरों की संख्या	आवेदकों की संख्या
50—100	2500
100—150	1500
150—200	1300
200—250	1100
250—300	900
300—350	750
350—400	675
400—450	525
450—500	450

(**उत्तर :** M.D. $(M_d) = 102.13$, M.D. (M_d) का गुणांक $= 0.011$)

8) निम्न आकड़ों से माध्य से माध्य विचलन एवं उसके गुणांक का परिकलन कीजिए।

अंक	छात्रों की संख्या	अंक	छात्रों की संख्या
0-10	4	30-40	10
10-20	6	40-50	6
20-30	10	50-60	4

(**उत्तर :** M.D$(\overline{X}) = 11.33$, M.D. का गुणांक $= 0.32$)

9) एक महाविद्यालय की बी–काम– कक्षा के विद्यार्थियों ने सांख्यिकी में 100 अंकों में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किये हैं। प्राप्तांकों का मानक विचलन परिकलित कीजिये।

विद्यार्थी	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
अंक	5	10	20	25	40	42	45	48	70	80

(**उत्तर:** = 23.06)

10) निम्नलिखित समंकों से मानक विचलन परिकलित कीजिये:

माध्य बिंदु	आवृत्ति
1	2
2	60
3	101
4	152
5	205
6	155
7	79
8	40
9	1

(**उत्तर** : 1.57)

11) 100 कम्पनियों के लाभों से सम्बंधित निम्नलिखित समकों के लिए मानक विचलन परिकलित कीजिये:

लाभ (लाख रूपयों में)	कम्पनियों की संख्या
8–10	8
10–12	12
12–14	20
14–16	30
16–18	20
18–20	10

(**उत्तर** : $\sigma = 2.77$)

12) रद्द किये गए उत्पादन के विश्लेषण से निम्नलिखित संख्याएँ प्राप्त हुई। समांतर माध्य तथा मानक विचलन परिकलित कीजिये।

प्रति परिचालक रदद किये गए उत्पादन की संख्या	परिचालकों की संख्या
21–25	5
26–30	15
31–35	28
36–40	42
41–45	15
46–50	12
51–55	3

(**उत्तर** : $\bar{X}$ = 36.96; = 6.735)

13) 40 और 50 मदों वाले दो प्रतिदर्शों का समांतर माध्य एक समान 53 है, किंतु उनके मानक विचलन अलग–अलग तथा क्रमशः 19 और 8 हैं। 90 मदों वाले संयुक्त प्रतिदर्श का मानक विचलन ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर** : $\sigma_{12} = 14$)

14) निम्नलिखित समंकों का मानक विचलन व विचरण गुणांक ज्ञात कीजिये।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	12
20 से कम	30
30 से कम	65
40 से कम	107
50 से कम	202
60 से कम	222
70 से कम	230

(**उत्तर** : σ = 13.9, C.V. = 37.3%)

15) आपको एक विशेष नगर में 100 व्यक्तियों द्वारा उपभोग किए गए बिजली के किलोवाट घंटों से सम्बंधित समंक दिये गए हैं :

उपयोग किये गए कि वा घं	उपभोक्ताओं की संख्या
0 किन्तु 10 से कम	6
10 किन्तु 20 से कम	25
20 किन्तु 30 से कम	36
30 किन्तु 40 से कम	20
40 किन्तु 50 से कम	13

1) समांतर माध्य,

2) मानक विचलन, तथा

3) विस्तार जिसमें बीच के 50% उपभोक्ता आते हैं, परिकलित कीजिये।

(**उत्तर** : (1) 25.9, (2) 10.96, (3) 17.6 से 34)

16) एक छोटे नगर में फुटकर दुकानों द्वारा अर्जित लाभ के संबंध में एक सर्वेक्षण किया गया। निम्न परिणाम प्राप्त हुए।

लाभ (+)/हानि (–) (000 रु. में)	दुकानों की संख्या
–4 से – 3	4
–3 से – 2	10
–2 से – 1	22
–1 से 0	28
0 से 1	38
1 से 2	56
2 से 3	40
3 से 4	24
4 से 5	18
5 से 6	10

परिकलित कीजिए:

1) एक फुटकर दुकान द्वारा अर्जित औसत लाभ,

2) सारी दुकानों द्वारा अर्जित कुल लाभ

3) लाभ का विचरण गुणांक।

(**उत्तर** : (1) 1348 रू. (2) 3,37,000 रू. (3) 152.8%)

17) एक फैक्टरी A और B दो प्रकार के बिजली के लैम्पों का उत्पादन करती हैं। उनके जीवन से सम्बंधित एक प्रयोग में, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

जीवन की लम्बाई (घंटों में)	कैम्पों की संख्या A	कैम्पों की संख्या B
500 – 700	5	4
700–900	11	30
900 –1100	26	12
1100 – 1300	10	9
1300–1500	8	6

विचरण गुणांक का प्रयोग करके दोनों प्रकार के लैम्पों के जीवन की चरता की (Variability) तुलना कीजिये।

(**उत्तर** : C.V. (A) = 21.64% C.V. (B) = 23.41%)

18) एक ही प्रकार के कार्य में लगी हुई दो फैक्टरियों A तथा B में औसत साप्ताहिक वेतन का मानक।

विचलन निम्न प्रकार है :

फैक्टरी	औसत साप्ताहिक मजदूरी (रु.)	मजदूरी का मानक विचलन (रु.)	श्रमिकों की संख्या
A	460	50	100
B	490	40	80

i) कौन सी फैक्टरी साप्ताहिक मजदूरी के रूप में अधिक राशि देती है?

ii) कौन सी फैक्टरी मजदूरी के बंटन में अधिक चरता दिखाती है ?

iii) इन दोनों फैक्टरियों के कुल श्रमिकों की मजदूरी का संयुक्त समांतर माध्य व मानक विचलन क्या है ?

(**उत्तर** : i) फैक्टरी A

ii) C. V. (A) = 10.87%, C.V. (B) = 8.16%

iii) x_{12} = 47.33 रुपये, σ_{12} = 49.19 रुपये

19) 20 मदों के समांतर माध्य व मानक विचलन क्रमशः 20 व 5 पाए गए। किन्तु परिकलन करते समय मद 13 को गलती से 30 पढ़ लिया गया है। शुद्ध समांतर माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

(**उत्तर** : AM = 19.15; σ = 4.66)

20) 50 और 100 दो मदों वाले प्रतिदर्शी का माध्य 54.1 तथा 50.3 है एवं मानक विचलन 8 तथा 7 हैं। 150 मद वाले प्रतिदर्श जो इन दो प्रतिदर्शो को जोड़ने से बनता हैं उनके लिए माध्य एवं मानक विचलन का परिकलन करें।
(**उत्तर** : $\bar{X}_{12}$= 51.57, σ_{12} = 7.56)

नोट : ये प्रश्न व अभ्यास आपको इकाई को अधिक अच्छी तरह समझने में सहायक होंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिये। परंतु अपने उत्तर विश्वविद्यालय को न भेजें। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 15 सरल रैखिक सहसंबंध

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य

इस इकाई में पढ़ने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- संहसंबंध की संकल्पना को समझ सकें;
- दो चरों के बीच संबंध को स्पष्ट करने के लिए प्रकीर्ण आरेखों का प्रयोग कर सकें;
- दो चरों के बीच सरल और कोटि सहसंबंध गुणांकों का अभिकलन कर सकें;
- सहसंबंध गुणांक के महत्व के लिए परीक्षण कर सकें;

15.1 प्रस्तावना

अभी तक पिछली इकाइयों में केवल एक चर संबंधी आंकड़ों के साखकोट ज्यान के संबंध में ही विचार किया गया। अन्य अनेक स्थितियों में निर्णय लेने वालों को दो या उससे अधिक चरों में संबंध पर विचार करना होता है। उदाहरणार्थ किसी कंपनी के बिक्री मैनेजर को ऐसा लग सकता है कि प्रत्येक महीनों में एक समान बिक्री नही हो रही है। उसे यह भी मालूम है कि कंपनी का विज्ञापन व्यय अलग–अलग वर्षों में अलग अलग माप में होता है। इस मैनेजर को यह जानने के प्रति रूचि हो सकती है कि क्या बिक्रियों और विज्ञापन व्ययों के बीच कोई संबंध है। मैनेजर यदि सफलतापूर्वक इस संबंध को स्पष्ट कर सके तो इसके परिणाम का प्रयोग वह अपनी कंपनी के लिए भलीभांति आयोजन करने में कर सकता है तथा प्रतीपगमन तकनीकों की सहायता से प्रत्येक वर्ष की बिक्रियों के संबंध में पूर्वानुमान लगाने में कर सकता है। उसी प्रकार हो सकता है कि कोई अनुसंधानकर्ता यह जानना चाहे कि अनुसंधान एवं विकास पर फर्म द्वारा किए जा रहे व्ययों का उसके वार्षिक लाभों पर क्या प्रभाव

पड़ता है तथा कीमत सूचकांक (price index) और क्रय शक्ति के बीच क्या संबंध है, आदि। इनके बीच यदि कोई संबंध होता है तो कहा जाता है कि चरों के बीच घनिष्ठ संबंध है। इस खंड में हम द्विचर विश्लेषण के सहसंबध का अध्ययन करेगें और सरल रैखिक प्रतिपगमन को अगली इकाई 16 में शामिल किया गया है।

'द्विचर' शब्द का उपयोग उस स्थिति का वर्णन करने के लिए किया जाता है जिसमे प्रत्येक व्यक्ति या आइटम पर दो विशेषताओं को मापा जाता है। यह विशेषताएँ चर द्वारा दर्शाई जाती है।

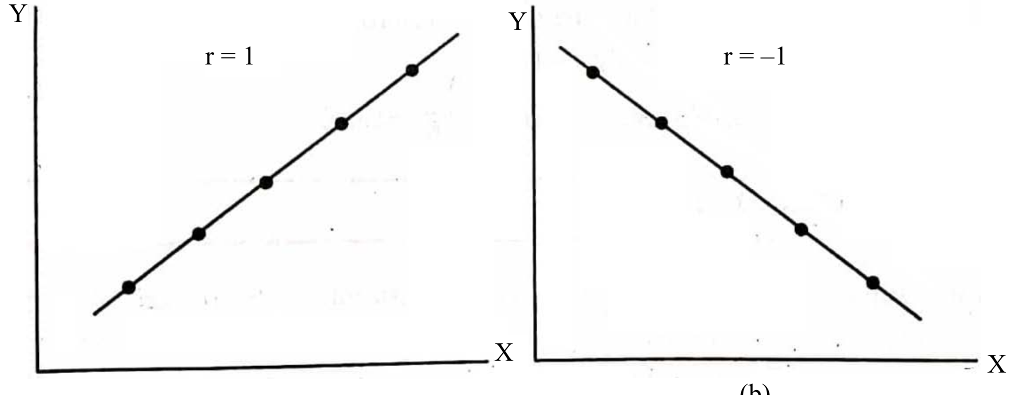
15.2 सरल सहसंबंध

15.2.1 अर्थ

यदि दो चर, जैसे x और y एक ही दिशा मे या विपरित दिशाओं में अलग–अलग या एक ही साथ जाते हैं तो कहा जाता है वे परस्पर संबंधित है। इस प्रकार सहसंबंध से आशय होता है चरों के बीच संबंध का होना। प्रायः कुछ प्रकार के चरों के बीच संबंध देखा जाता है। उदाहरणार्थ, आय और व्यय, अनुपस्थितता (absenteeism) और उत्पादन, विज्ञापन व्ययों और बिक्रियों आदि के बीच संबंध होता है। इस प्रकार का संबंध सेट एक के चरों की तुलना मे दूसरे प्रकार के सेट के चरों में भिन्न प्रकार का हो सकता है। प्रकीर्ण आरेखों की सहायता से ऐसे कुछ संबंधों के संबंध में विवेचन करने का प्रयास किया जाएगा।

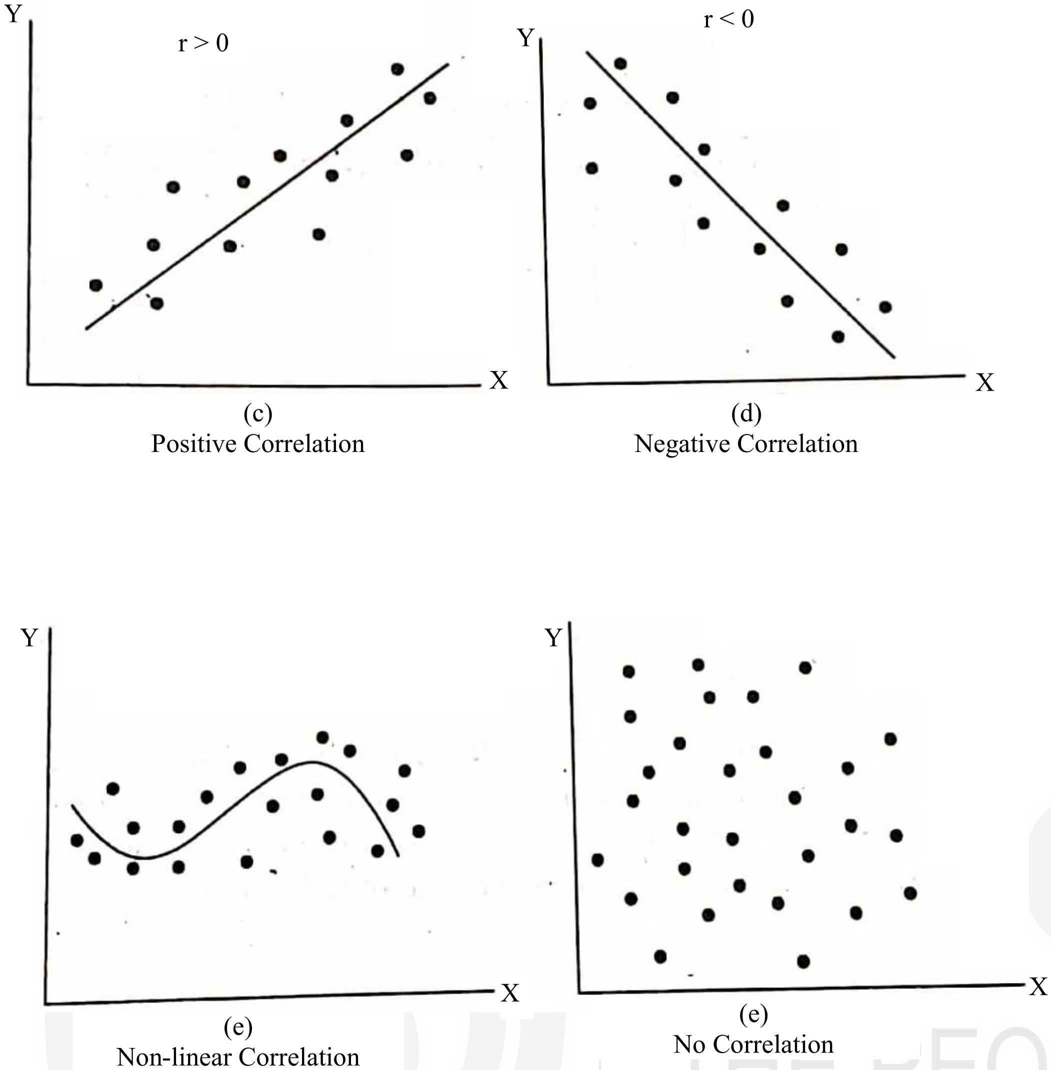
15.2.2 प्रकीर्ण आरेख (Scater Diagram)

जब आंकड़ों के विभिन्न सेटों को एक आलेख (graph) पर आलेखित किया जाता है तो परिणाम होता है। एक प्रकीर्ण आरेख बहुत ही महत्वपूर्ण दो प्रकार की सूचना प्रदान करता है। प्रथम, चरों के बीच हम एक ऐसे स्वरूप देख सकते हैं जिससे पता चलता है कि चरों के बीच कोई संबंध है या नहीं। द्वितीय, चरों के बीच यदि संबंध है तो हमें यह भी ज्ञात हो सकता है कि वह संबंध किस प्रकार का है (धनात्मक या ऋणात्मक संबंध) प्रकीर्ण आरेख विभिन्न प्रकार के संबंधों को दिखा सकता है नीचे चित्र 15.1 में ऐसे कुछ विशिष्ट प्रकार के स्वरूपों को प्रस्तुत किया गया है जो दो चरों के बीच के विभिन्न सहसंबंधों को दिखाते हैं।



(a) Perfect Positive Correlation

(b) Perfect Negative Correlation



चित्र 15.1 : Possible Relationships Between Two Variables, X and Y

यदि चर x और y एक ही दिशा में जाते हैं (अर्थात दोनों ही बढ़ते हैं या दोनों ही घटते हैं) तो इनके बीच के संबंध **को धनात्मक सहसंबंध (positive correlation)** कहा जाता है (चित्र 15.1 (a) और (c) इसके विपरीत यदि x और y चर विपरित दिशाओं में जाते हैं (अर्थात् चर x घटता है और y बढ़ता है या इसके उल्टा होता है) तो इनके बीच के संबंध को **ऋणात्मक सहसंबंध (negative correlation)** कहा जाता है। (चित्र 15.1 (b) और (d))। चर x मे हुए किसी परिवर्तन का यदि y पर कोई प्रभाव पड़ता, तो इनके बीच के संबंध को संबंधपरक एवं प्रवृत्ति विश्लेषण **असहसंबंध (Un-correlated)** कहा जाता है (चित्र 15.1 (f))। यदि चर में परिवर्तनों की मात्रा उसके अनुरूप की मात्रा में परिवर्तनों के अपरिवर्ती अनुपात (constant ratio) में होती है तो उनके बीच के संबंध को **रैखिक सहसंबंध (linear-correlation)** कहा जाता है (चित्र 15.1 (a) से (d) तक), अन्यथा इसे **आरैखिक (non-linear) या वक्ररेखी सहसंबंध (curvilinear correlation)** कहा जाता है (चित्र 15.1 (e))। क्योंकि आंकड़ों के विश्लेषण के लिए आरैखिक सहसंबंध की माप करना अत्यधिक जटिल है अतः आमतौर पर यह मान लिया जाता है कि दो चरों के बीच का संबंध रैखिक प्रकार का है।

यदि संबंध केवल दो चरों तक ही सीमित रहता है तो इसे **सरल सहसंबंध (simple correlation)** कहा जाता है। **सरल सहसंबंध** की संकल्पनाओं को सबसे अच्छी तरह से निम्नलिखित उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है जिसमें किसी कंपनी के विज्ञापन व्यय का संबंध उसकी बिक्री के साथ दिखाया गया है।

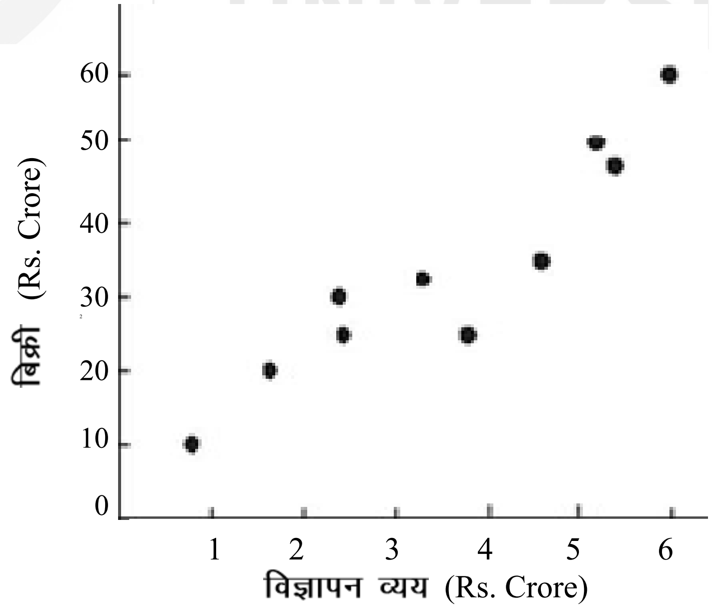
उदाहरण 1

सारणी 15.1 : एक कम्पनी का विज्ञापन व्यय एवं बिक्री ऑकड़े (A Company's Advertising Expenses and Sales Data (Rs. in crore))

Years	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
विज्ञापन व्यय (X)	6	5	5	4	3	2	2	1.5	1.0	0.5
बिक्री (Y)	60	55	50	40	35	30	20	15	11	10

कंपनी के बिक्री मैनेजर का दावा है कि बिक्री की मात्रा में परिवर्तन होने का कारण यह है कि बिक्री विभाग सदा ही अपने विज्ञापन व्ययों में परिवर्तन करता रहा है। वह यह निश्चित रूप से जानता है कि बिक्री और विज्ञापन के बीच संबंध है परन्तु उसे यह पता नहीं है कि यह संबंध किस प्रकार का है।

चित्र 15.1 में जिन विभिन्न परिस्थितियों को दिखाया गया है वे किसी कंपनी की बिक्री और विज्ञापन व्यय के बीच के सभी संबंधों के वर्णन की संभावनाओं को दिखाती है। समुचित संबंध के निर्धारण के लिए सारणी 15.1 में दिए गए मानों को ध्यान में रखते हुए हमें चित्र 15.2 में दिखाए गए प्रकीर्ण आरेख को बनाना होगा।



चित्र 15.2 : एक कम्पनी की बिक्री एवं विज्ञापन व्यय का प्रकीर्ण आरेख

चित्र 15.2 इस बात की ओर निर्देश करता है कि विज्ञापन व्यय और विक्रय के बीच रैखिक (धनात्मक) संबंध है। परन्तु इस संबंध की शक्ति ज्ञात नहीं है अर्थात् यह निर्धारित करना अभी शेष है कि किसी सरल रेखा के बिन्दुओं के कितना समीप ये कहां तक गिरती है। दो चरों (यहां बिक्री और विज्ञापन व्यय) के बीच के रैखिक संबंध की शक्ति के मात्रात्मक माप को सहसंबंध गुणांक (correlation coefficient) कहा जाता है। अतः अगले परिच्छेद में हम सहसंबंध के गुणांक के निर्धारण की विधियों के संबंध में अध्ययन करेंगे। आइए अन्य उदाहरण से समझते हैं।

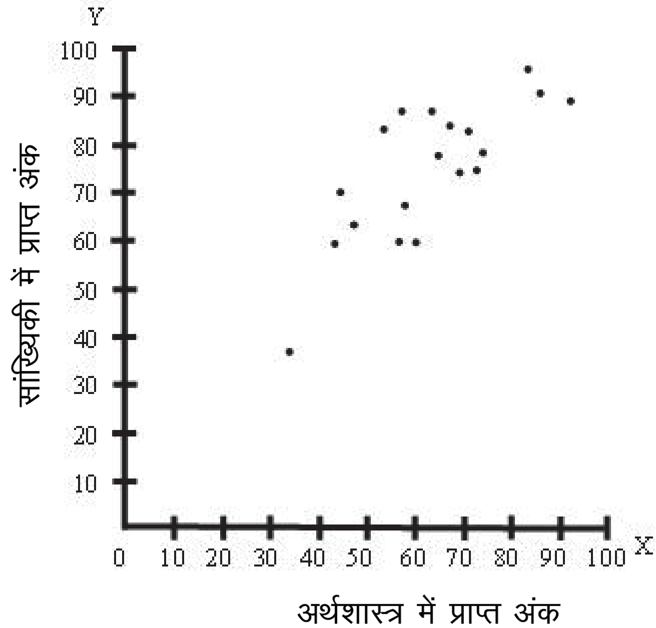
उदाहरण 2: एक शिक्षक की रुचि कक्षा के 20 विद्यार्थियों की सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में योग्यता के संबंध का अध्ययन करना हो सकती है। इसके लिए वह पिछली अर्ध–सत्रीय परीक्षा में इन विद्यार्थियों द्वारा इन विषयों में प्राप्त अंकों के आंकड़े संकलित करता है। इस प्रकार के कुछ आंकड़े सारणी 15.2 में प्रस्तुत किए गए हैं।

सारणी 15.2 : विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंक

क्रम संख्या	प्राप्त अंक		क्रम संख्या	प्राप्त अंक	
	सांख्यिकी	अर्थशास्त्र		सांख्यिकी	अर्थशास्त्र
1	82	64	11	76	58
2	70	40	12	76	66
3	34	35	13	92	72
4	80	48	14	72	46
5	66	54	15	64	44
6	84	56	16	86	76
7	74	62	17	&I	52
8	84	66	18	60	40
9	60	52	19	82	60
10	86	82	20	90	60

इस प्रकार के आंकड़ों का आलेखी निरूपण एक उपयोगी विधि है, जोकि दो चरों के बीच संबंध की प्रकृति तथा रूप के अध्ययन में सहायक होती है। आलेखी निरूपण द्वारा यह पता किया जा सकता है कि क्या चरों में अध्ययन करने लायक कोई संबंध है या नहीं, अगर है तो क्या वह रैखिक है या अरैखिक। इसके लिए मान लीजिए हम सांख्यिकी में प्राप्त अंकों को X से सूचित करते हैं तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों को Y से सूचित करते हैं तथा सारणी के आंकड़ों को X, Y समतल पर अंकित करते हैं। इस कार्य के लिए हम किसको X तथा किसको Y लें, कोई अर्थ नहीं रखता। इस प्रकार के अंकन को **प्रकीर्ण आरेख (scatter diagram)** कहते हैं। चित्र 15.3 में सारणी 15.2 के आंकडों का प्रकीर्ण आरेख दिया गया है।

सारणी 15.2 और चित्र 15.3 में की जांच द्वारा यह पता चलता है कि X तथा Y में धनात्मक संबंध है अर्थात X के बड़े मान Y के बड़े मानों के साथ तथा X के छोटे मान, Y के छोटे मानो के साथ सहचारी हैं। इसके अतिरिक्त, बिंदुओं एक सरल रेखा के दोनों ओर प्रकीर्ण दिखाई देते हैं। अतः X तथा Y के बीच रैखिक संबंध प्रतीत होता है, लेकिन यह संबंध पूर्ण (perfect) नहीं है, क्योंकि इस प्रकार के संबंध में विचलन मौजूद है। वास्तव में, इस रैखिक संबंध की शक्ति का परिमाप प्राप्त करना बड़ा ही उपयोगी होगा।



चित्र 15.3: सांख्यिकी और अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों का प्रकीर्ण आरेख

बोध प्रश्न क

1) ऐसे आठ चरों के युग्मों (passive) (प्रत्येक स्थिति में चार) का सुझाव दीजिए जिनसे आप सकारात्मक रूप से सहसंबंधित और ऋणात्मक रूप से सहसंबंधित होने की प्रत्याषा करते हैं।

2) दो चरों के बीच के सहसंबंध का अध्ययन करने में प्रकीर्ण आरेख विधि किस प्रकार से सहायता करती है

15.3 सहसंबंध–गुणांक (Correlation Coefficient)

सहसंबंध का गुणांक दो चरों X और Y के बीच के संबंध की मात्रा की माप करने में सहायता करता है। नीचे उन विधियों के संबंध में विवेचन किया गया है जिनका प्रयोग संबंध की मात्रा की माप करने के लिए किया जाता है।

15.3.1 कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (Karl Pearson's Correlation Coefficient)

कार्य पियर्सन की सहसंबंध–गुणांक (r) विधि उन गणितीय विधियों में से एक है जिनके द्वारा किन्हीं x और y दो चरों के बीच के सहसंबंध की मात्रा की माप की जाती है। इसे नीचे दिया जा रहा है।

$$r = \frac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})/N}{\sigma X\ \sigma Y}$$

सरलीकृत सूत्रों (जो उपर्युक्त सूत्र के बीजीय तुल्यमान हैं) को नीचे दिया जा रहा है :

1) $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}}$, where $x = X-\bar{X}, y = Y-\bar{Y}$

नोटः इस सूत्र का प्रयोग उस स्थिति में किया जाता है जब x और y पूर्णांक (integers) होते।

2)

$$r = \frac{\sum XY - \frac{\sum X.\sum Y}{N}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}}$$

सहसंबंध की मात्रा की माप करने के लिए उदाहरणों को लेने के पूर्व कुछ निम्नलिखित महत्वपूर्ण बातों पर ध्यान देना उचित होगा।

i) 'r' एक अबिम संख्या (dimension less number) है जिसका संख्यात्मक मान (numerical value) +1 से −1 के बीच है। मान +1 पूर्ण धनात्मक सहसंबंध को प्रस्तुत है जब कि −1 पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध को प्रस्तुत करता है। मान 0 (शून्य) सहसंबंध के अभाव को प्रस्तुत करता है। चित्र 15.1 में अनेक प्रकीर्ण प्लाटों को सहसंबंध गुणांक के लिए संगत मानों (corresponding values) के साथ दिखाया गया है।

ii) सहसंबंध का गुणांक एक संख्यामात्र (pure number) और चरों की माप की इकाइयों से स्वतंत्र है।

iii) x और y मानों के उद्‌गम और स्केल में किसी भी प्रकार के परिवर्तन से सहसंबंध गुणांक स्वतंत्र है।

टिप्पणीः सहसंबंध के परिणामों की व्याख्या करते हुए सावधानी रखनी चाहिए। यद्यपि विज्ञापन में किसी भी प्रकार के परिवर्तन से बिक्री में भी परिवर्तन हो सकता है, परन्तु इस तथ्य से कि ये दोनों ही चर परस्पर संबंधित है इस बात की कोई गारंटी नहीं होती कि इनके बीच कार्यकारण (cause and effect) का संबंध है। असंबंधित दिखने वाले दो चरों के बीच अत्यंत घनिष्ठ संबंध हो सकता है।

उदाहरणार्थ, निम्नलिखित के बीच सहसंबंध की मात्रा बहुत अधिक देखने में आ सकती है (i) व्यक्तियों का ऊंचे कद का होना और उनकी आय के बीच, या व्यक्तियों के एक समूह के जूतों के आकार और उनके द्वारा प्राप्त अंक के बीच, हालांकि इनके बीच किसी संबंध के होने की कल्पना करने की संभावना आमतौर पर नहीं होती। असंबंधित दिखने वाले ऐसे दो चरों के बीच जब सहसंबंध होता है तब इसे **मिथ्या या निरर्थक सहसंबंध** (spurious or non sense correlation) कहा जाता है। अतः मिथ्या सहसंबंध के आधार निष्कर्षों को निकालने से बचना चाहिये।

उदाहरण 3: सारणी 15.1 में दिखाए गए एक कंपनी के 10 वर्षों के दौरान विज्ञापन व्यय (X) और उसकी बिक्री (Y) के आंकड़ों का उदाहरण लेकर इन दो चरों के बीच सहसंबंध गुणांक को निर्धारित करने का प्रयास नीचे किया जा रहा है।

हलः

सारणीः 15.3: सहसंबंध गुणांक का परिकलन

Advertisement Expenditure Rs. (X)	Sales Rs. (Y)	XY	X^2	Y^2
6	60	360.0	35	3600
5	55	275.0	25	3025
5	50	250.0	25	2500
4	40	160.0	16	1600
3	35	105.0	9	1225
2	30	60.0	4	900
2	20	40.0	4	400
1.5	15	22.5	2.25	225
1.0	11	11.0	1	121
0.5	10	5.0	0.25	100
$\sum X = 30$	$\sum Y = 326$	$\sum XY = 1288.5$	$\sum X^2 = 122.50$	$\sum Y^2 = 13696$

हमे ज्ञात है कि

$$r = \frac{\sum XY - \frac{\sum(X)\sum(Y)}{n}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}}}$$

$$= \frac{\frac{1288.5 - (30)(326)}{10}}{\sqrt{122.5 - \frac{(30)^2}{10}}\sqrt{13696 - \frac{(326)^2}{10}}} = \frac{310.5}{315.7}$$

$=0.9835$

$r = 0.9835$ का परिकलित गुणांक दिखाता है कि बिक्रियों और विज्ञापन व्ययों के बीच संबंध की मात्रा बहुत बहुत अधिक है। इन विशिष्ट समस्या के लिए यह बताता है कि विज्ञापन व्यय में वृद्धि के फलस्वरूप बिक्री में भी वृद्धि की संभावना हो सकती है। इससे गणना का परिणाम यदि ऋणात्मक या धनात्मक रूप में आंकड़ों का सशक्त सहसंबंध दिखाता है तब आंकड़ों के लिए सबसे अधिक उपयुक्त रेखा पूर्वानमान के लिए उपयोगी होगी। (इसके संबंध में सरल रैखिक प्रतीपगमन इकाई 16 में विवेचन किया गया है।)

उदाहरण 4 : उदाहरण 2 में दिए गए आंकड़ो से सहसंबंध गुणाक का परिकलन कीजिए।

सारणीः 15.4: सहसंबंध गुणांक का परिकलन

प्रेशण सं .	X	Y	X^2	Y^2	$\overline{XY}$
1	82	64	6724	4096	5248
2	70	40	4900	1600	2800
3	34	35	1156	1225	1190
4	80	48	6400	2304	3840
5	66	54	4356	2916	3564
6	84	56	7056	3136	4704
7	74	62	5476	3844	4588
8	84	66	7056	4356	5544
9	60	52	3600	2704	3120
10	86	82	7396	6724	7052
11	76	58	5776	3364	4408
12	76	66	5776	4356	5016
13	92	72	8464	5184	6624
14	72	46	5184	2116	3312
15	64	44	4096	1936	2816
16	86	76	7396	5776	6536
17	84	52	7056	2704	4386
18	60	40	3600	1600	2400
19	82	60	6724	3600	4920
20	90	60	8100	3600	5400
जोड	**1502**	**1133**	**116292**	**67141**	**87450**

सारणी 15.4 से, हम देखते है कि

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{1502}{20} = 75.1;$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{1133}{20} = 56.65;$$

$$\sigma_X = \frac{1}{N}\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}} = \frac{1}{20}\sqrt{116292 - \frac{(1502)^2}{20}} = \sqrt{174.59}; = 13.21;$$

$$\sigma_y = \frac{1}{N}\sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}} = \frac{1}{20}\sqrt{67141 - \frac{1133^2}{20}} = \sqrt{147.83}; = 12.16;$$

$$\sigma xy = \frac{1}{N}\left[\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}\right] = \frac{1}{20}\left[87450 - \frac{1502 \times 1133}{20}\right] = 118.09$$

इस प्रकार सूत्र का प्रयोग करने पर

$$r = \frac{\sigma xy}{\sigma x\ \sigma y}$$

$$r = \frac{118.09}{13.21\ \times 12.16} = 0.735$$

अब अन्य सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$r = \frac{\sum XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}\sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}}$$

$$r = \frac{87450 - 1502 \times 1133}{\sqrt{\left(11292 - \frac{(1502)^2}{20}\right)}\sqrt{\left(67141 - \frac{(1133)^2}{20}\right)}}$$

$= 0.735$

इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों ही सूत्र से एक ही सहसंबंध गुणांक r निकलता है।

अब आप स्वयं ही जाँच सकते है कि सहसंबंध गुणांक (r) का वही मान सूत्र (1) जिसकी चर्चा पहले की गयी है से ज्ञात की जा सकती है। इसलिए सारणी 15.4 में दिए गए मानों को निम्नलिखित पाँच स्तम्भों से प्राप्त कर सकते है।

i) $(X - \bar{X}) = dx;$

ii) $Y - \bar{Y} = dy;$

iii) dx^2 ;

iv) dy^2 ;

v) $dxdy$

15.3.2 स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध (Spearman's Rank Correlation)

ऊपर जिस कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक के संबंध में विवेचन किया है वह उन स्थितियों में उपयुक्त सिद्ध नहीं होता जब अध्ययन की जा रही परिघटना (phenomenon) की प्रत्यक्ष मात्रात्मक माप संभव नहीं होती। कभी–कभी हमें दो कोटि–क्रमों (rank orderings) जैसे दो साधारण मापक्रमित चरों (sealed variables) के बीच के संबंध की मात्रा का परीक्षण करना होता है। उदाहरणार्थ हम कार्यकुशलता, निष्पादन, प्रतिस्पर्धी घटनाओं, अभिवृत्तिक सर्वेक्षणों (attitudinal survey), आदि का अध्ययन कर सकते हैं। ऐसी स्थितियों में दो चरों X और Y की कोटियों के बीच संबंध की मात्रा को ज्ञात करने की विधि कोटि सहसंबंध (Rank Correlation) कही जाती है। इसे **एडवार्ड स्पीयरमैन** ने विकसित किया। इसके गुणांक को निम्नलिखित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$$

जहां N = कोटियों की संख्या, और $\sum D^2$ = दो चरों की कोटियों के बीच अंतर के वर्ग।

कोटि सहसंबंध गुणांक के अभिकलन (Computation) को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 5: किसी कंपनी के सेल्समैन को एक माह का प्रशिक्षण दिया गया। प्रशिक्षण के पश्चात् प्रतिदर्श के आधार पर 10 सेल्समैनों का परीक्षण किया गया जिन्हें उनके प्रशिक्षण के निष्पादन के आधार पर कोटि प्रदान की गई। उसके पश्चात् उन्हें अपने–अपने क्षेत्रों में नियुक्त किया गया। छै महीनों के पश्चात् उनके विक्रय के आधार पर उन्हें कोटि प्रदान की गई उनके बीच संबंध की मात्रा को ज्ञात कीजिए।

Salesmen:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ranks in training (X):	7	1	10	5	6	8	9	2	3	4
Ranks on sales Peformance (Y):	6	3	9	4	8	10	7	2	1	5

हलः

सारणीः 15.5: कोटि सहसंबंध गुणांक का परिकलन

Salesmen	Ranks Secured in Training X	Ranks Secured on Sales Y	Difference in Ranks D = (X–Y)	D^2
1	7	6	1	1
2	1	3	–2	4
3	10	9	1	1
4	5	4	1	1
5	6	8	–2	4
6	8	10	–2	4
7	9	7	2	4
8	2	2	0	0
9	3	1	4	4
10	4	5	–1	1
				$\sum D^2 = 24$

स्पीयरमैन का सूत्र प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N} = 1 - \frac{6\sum 24}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - \frac{144}{990} = 0.855$$

हम कह सकते हैं सेल्समैनों के प्रशिक्षण और उनके विक्रय निष्पादन के बीच घनात्मक सहसंबंध (positive correlation) की मात्रा बहुत अधिक है।

उदाहरण 6

सारणी 15.6: Rank of 10 candidates by two Examiners.

S.No.	Rank Given by		Difference	
	Examiner 1	Examiner 2	D_i	D_i^2
1	6.0	6.5	–0.5	0.25
2	2.0	3.0	–1.0	1.00
3	8.5	6.5	2.0	4.00
4	1.0	1.0	0.0	0.00
5	10.0	2.0	8.0	64.00
6	3.0	4.0	–1.0	1.00
7	8.5	9.5	–1.0	1.00
8	4.0	5.0	–1.0	1.00
9	5.0	8.0	–3.0	9.00
10	7.0	9.5	–2.5	6.25
			$\sum D_i = 0$	$\sum D_i^2 = 87.50$

कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की भांति, स्पीयरमैन कोटि सह संबंध में कोटियों का पूर्ण मेल है तो मान +1 और पूर्णतया मेल न होने की स्थिति में मान –1 और कोटियों के बीच संबंध न होने की स्थिति में शून्य मान को व्यक्त करेगा।

कभी कभी गुणात्मक परिघटना (qualitative phenomenon) संबंधी आंकड़ें कोटियों में उपलब्ध नहीं होते परन्तु मान उपलब्ध होते हैं। ऐसी स्थिति में यह आवश्यक होता है कि वह मान (value) को कोटि प्रदान करे। 1 के रूप में अधिकतम मान लेकर या 1 के रूप में न्यूनतम मान लेकर कोटि प्रदान की जा सकती है। परन्तु दोनों ही चरों की स्थितियों में एक ही जैसी विधि का प्रयोग करना चाहिए।

कभी–कभी पहली और/या दूसरी श्रेणियों में दो या उससे अधिक कोटि के बीच टाई हो जाती है। उदाहरणार्थ, मान लेते हैं कि यदि दो वस्तुओं का मूल्य समान है और हम मानते है कि एक की कोटि 4 है तो ऐसी स्थिति में संबंधित दो प्रेक्षणों को 4^{th} थी कोटि प्रदान करने के स्थान पर इन दोनों में से प्रत्येक प्रेक्षण को 4.5 (4+5/2) देने हैं: अब एक उदाहरण से हम समझने का प्रयास करेंगे कि यदि आंकड़ें मान में दिये गये हों तो उन्हें कोटि किस प्रकार प्रदान करें और कोटि सहसंबंध की गणना करें। इस उदाहरण से हम यह भी समझेंगे कि जब श्रेणी में पदों का मान समान हो तब कोटि कैसे प्रदान करें।

उदाहरण 7: निम्नलिखित आंकड़ों से, जो कि 10 छात्रों के समूह और उनके अंकों के प्रतिशत से संबंधित है, का कोटि सहसंबंध ज्ञात करें।

Roll Nos. of the Students	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
% of marks in statistics	45	66	55	45	80	75	50	55	60	45
% of marks in Accountancy	70	81	75	75	70	85	65	80	45	60

हल: उपरोक्त आंकड़ें अंकों के प्रतिशत में दिये गये है नाकि कोटियों में। अतः कोटि सहसंबंध की गणना के लिये पहले हम मानों को कोटि प्रदान करेंगे। जैसा कि हम पहले भी चर्चा कर चुके है, कोटियाँ या तो अधिकतम मान या फिर न्यूनतम मान के

अनुसार प्रदान की जा सकती हैं। यहाँ इस उदाहरण में हमने कोटियाँ अधिकतम से न्यूनतम मान के अनुसार प्रदान की है। साधारणतया, इसी प्रकार कोटि प्रदान करते हैं।

कोटि संहसंबंध गुणांक का परिकलन

Roll Nos.	% of marks in statistics	% of marks in Accountancy	Ranks of % of marks in Statistics	Ranks of Marks in Accountancy	Difference in Ranks D	D^2
21	45	70	9	6.5	2.5	6.25
22	66	81	3	2	1	1.00
23	55	75	5.5	4.5	1	1.00
24	45	75	9	4.5	4.5	20.25
25	80	70	1	6.5	–5.5	30.25
26	75	85	2	1	1	1.00
27	50	65	7	8	–1	1.00
28	55	80	5.5	3	2.5	6.25
29	60	45	4	10	–6	36.00
30	45	60	9	9	0	0
						ΣD^2= 103.00

$$r = 1 - \frac{6(\Sigma D^2)}{\mathrm{N}^3 - N} = 1 - \frac{103}{10^3 - 10} = 1 - \frac{103}{990} = 1 - 0.10 = 0.90$$

कोटि प्रदान करने की व्याख्या

सांख्यिकी (statistics) में प्राप्त अंको के प्रतिशत जो 80, 75, 66, 60 वे केवल एक ही हैं अर्थात् इस प्रतिशत अंकों को पाने वाले छात्र केवल एक–एक ही हैं। अतः 1, 2, 3 तथा 4 कोटि प्रदान की गयी है। जबकि 55 प्रतिशत अंक पाने वाले छात्र दो हैं। अतः 5 + 6 कोटि को हम दो से भाग देंगें (5 + 6 ÷ 2 = 5.5) अतः 5.5 कोटि 55% प्राप्त करने वाले दोनो छात्रों को प्रदान की गयी है अतः कोटि 45% भी तीन बार दर्शाया गया है अतः कोटि $\frac{8+9+10}{3}$ कर दिया गया है। इस प्रकार कोटि 9 तीन बार प्रदान की गयी है। 50% वाले को 7 कोटि प्रदान की गयी है। इस प्रकार आप एकाउटेंसी में प्राप्त प्रतिशतों के सामने प्रदान किय गये कोटियों को समझ सकते हैं।

बोध प्रश्न ख

1) कार्लपीयर्सन के सूत्र का प्रयोग करके आठ वर्षों के दौरान शेयरों की कीमत (X) और डिबेंचरों की कीमत के बीच संबंध की मात्रा का अभिकलन कीजिए।

Years:	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Price of Shares:	42	43	41	53	54	49	41	55
Price of debentures:	98	99	98	102	97	93	95	94

2) उपर्युक्त अभ्यास पर ध्यान दीजिए तथा शेयरों की कीमत और डिबेंचरों की कीमत को कोटि प्रदान कीजिए। स्पीयरमैन के सूत्र का प्रयोग करके संबंध की मात्रा ज्ञात कीजिए।

15.4 सारांश

इस इकाई में सहसंबंध या साहचर्य, की मूल संकल्पनाओं, अर्थ और तकनीकों के संबंध में विवेचन किया गया है। प्रकीर्ण आरेख भी दिए गए हैं जिनमें विभिन्न प्रकार के संबंधों के उदाहरण दिए गए हैं, जिसमें कुछ विशिष्ट प्रकार के स्वरूप दिए गए हैं। यदि चरों को प्रकीर्ण रूप में दिया जाता है तो उसका अर्थ होता है कि दो चरों के बीच संबंध तो है परन्तु कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (r) संबंध की कोटि की मात्रा को बताता है। सहसंबंध गुणांक 1.0 के जितना ही अधिक समीप होगा, दो चरों के बीच का रैखिक संबंध उतना ही अधिक दृढ़ होगा। आंकड़ो के लिए स्पीयरमैन के कोटि सहसंबंध को कोटि के साथ वर्णित किया गया है। अततः चरों को कोटि प्रदान करने की विधि का वर्णन किया गया है।

15.5 शब्दावली (Key Words)

सहसंबंध विश्लेषण (Correlation Analysis): इससे अर्थ दो यादृच्छिक चरों के बीच साहचर्य का परिमाप है। जो दो यादृच्छिक चर इस प्रकार के हैं कि एक में परिवर्तन से दूसरे से संबंधित तरीके से परिवर्तन होता है तो इनको सहसंबंधित कहते हैं। जो चर स्वतंत्र होते हैं, वे सहसंबंधित नहीं होते। सहसंबंध गुणांक –1 तथा +1 के बीच एक संख्या होती है। यह प्रेक्षणों के बहुत से युग्मों, जिनको बिंदु (X, Y) से सूचित किया जाता है, से परिकलित किया जाता है। जब गुणांक का मान +1 है तो इसका अर्थ पूर्ण धनात्मक सहसंबंध, गुणांक का मान –1 है तो इसका अर्थ पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध तथा गुणांक का मान 0 है तो इसका अर्थ कोई सहसंबंध नहीं होता है।

कोटि सहसंबंध गुणांक (Rank Correlation Coefficient): **बहुत** सी परिस्थितियों में चरों का माप प्राप्त करना, सुविधाजनक अथवा कम खर्चीला नहीं होता। कई बार तो यह संभव नहीं होता। ऐसी स्थिति में उनको क्रम के अनुसार कोटिबद्ध किया जाता है। इन परिस्थितियों में कोटि सहसंबंध गुणांक का प्रयोग किया जा सकता है। जब चरों में अरैखिक संबंध हो तो भी कोटि सहसंबंध गुणांक उपयुक्त होता है।

प्रकीर्ण आरेख (Scatter Diagrams): ऐसा आरेख है जो दो चरों X और Y के बीच संयुक्त परिवर्तन को दर्शाता है। प्रत्येक व्यष्टि को एक बिंदु द्वारा निरूपित किया जाता है जिसके साधारण आयताकार अक्षों पर निर्देशांक, चरों के मान होते हैं। इस प्रकार n प्रेक्षणों को समुच्चय, आरेख पर n बिंदु प्रदान करता है। इन बिंदुओं का प्रकीर्ण X तथा Y के बीच संबंध को दर्शाता है।

15.6 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress/Exercises)

ख) 1. $r_k = -\ 0.071$

2. $R = -\ 0.185$

15.7 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास (Terminal Question/Exercises)

1) सहसंबंध शब्द से आप क्या समझते हैं? प्रकीर्ण आरेख की सहायता से विभिन्न प्रकार के सहसंबंध में अंतर बताइए।

2) कार्लपियर्सन सहसंबंध गुणांक और स्पीयरमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक के बीच अंतर को स्पष्ट कीजिए। किन स्थितियों में स्पीयरमैन का गुणांक कार्लपियर्सन के गुणांक से. श्रेष्ठ माना जाता है?

3) उदाहरण के साथ चरों को कोटि प्रदान करने की विधि की व्याख्या कीजिये, जब ऑकड़ों के लिए दिए हुए मानों में से कुछ मान एक समान हों।

4) पति और पत्नी की आयु के लिए सहसंबंध गुणांक का परिकलन कीजिए।

पति की आयु:	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
पत्नी की आयु:	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

5) X और Y में सहसंबंध गुणांक का निर्धारण कीजिए:

X:	5	7	9	11	13	15
Y:	1.7	2.4	2.8	3.4	3.7	4.4

6) दस विद्यार्थियों द्वारा गणित और सांख्यिकी में निम्नलिखित अंक प्राप्त किए गए। कोटि सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए।

विद्यार्थी (रोल नं.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
गणित में अंक	8	36	98	25	75	82	90	62	65	29
संख्यिकी में अंक	84	51	91	60	68	62	86	58	53	47

7) तीन निर्णायकों A,B,C ने एक संगीत प्रतियोगिता में दस प्रतियोगियों को निम्नलिखित क्रम में कोटिबद्ध किया:

प्रतियोगी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A द्वारा कोटि	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
B द्वारा कोटि	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
C द्वारा कोटि	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

निर्णायकों का कौन सा युग्म संगीत की सामान्य रुचि के निकटतम सादृश्य है? कोटि सहसंबंध विधि के प्रयोग द्वारा विवेचन कीजिए।

नोट: इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

15.8 संदर्भ पुस्तकें

इकाई में दिये गये विषय वस्तु को गहराई से समझने के लिए निम्नलिखित पाठ्य–पुस्तकें प्रयुक्त की जा सकती हैं।

Richard I. Levin and David S. Rubin, 1996, *Statistics for Management*, Prentice Hall of India Pvt. Ltd., New Delhi

Peters, W.S. and GW, Summers, 1968, *Statistical Analysis for Business Decisions*, Prentice Hall, Englewood &cliffs.

Hooda, R.P. 2000. *Statistics for Business and Economics*, MacMillan India Ltd- New Delhi.

Gupta, S.P. 1989, *Elementary Statistical Methods*, Sultan Chand & Sons % New Delhi.

Chandan J.SA. *Statistics for Business and Economics,* Vikas Publishing House Pvt Ltd. New Delhi.

इकाई 16 सरल रैखिक प्रतीपगमन

इकाई की रूपरेखा

16.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- प्रतिपगमन की संकल्पना को समझा सकेंगे;
- सरल प्रतिपगमन का आकलन कर सकेंगे;
- न्यूनतम वर्ग विधि–को व्यक्त कर सकेंगे;
- दिए गए आंकड़ों पर रैखिक प्रतिपगमन निदर्शों को लागू कर सकेंगे; और
- प्रागुक्ति अथवा पूर्वानुमान के लिए प्रतिपगमन समीकरण का प्रयोग कर सकेंगे।
- संहसंबंध और प्रतिपगमन गुणांक के बीच के संबंध और अन्तर की पहचान कर सकेंगे।

16.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपने देखा कि सरल रैखिक सहसंबंध गुणांक दो चरों के बीच कारण और प्रभाव संबंध को प्रतिबिंबित नहीं करता। अतः हम एक चर के लिए दिए हुए मान के अनुरूप अन्य चर के मान की प्रागुक्ति नहीं कर सकते। लेकिन प्रतिपगमन विश्लेषण (regression analysis) के माध्यम से हम इस दोष को दूर करते हैं। इस इकाई में हम प्रतिपगमन विश्लेषण की चर्चा करेंगे जिससे चरों के बीच के संबंध को गणितीय समीकरण के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। इसमें हम मान

लेते हैं कि एक चर कारण है और दूसरा प्रभाव। आपको याद होना चाहिए कि प्रतिपगमन एक सांख्यिकीय उपकरण है जो चरों के बीच के संबंध को समझने में सहायक होता है और जो स्वतंत्र चर के ज्ञात मानों से आश्रित चर के अज्ञात मानों की प्रागुक्ति करता है।

16.2 प्रतिपगमन की संकल्पना

प्रतिपगमन विश्लेषण में दो प्रकार के चर होते हैं : i) आश्रित (या वर्णित) चर, और ii) स्वतंत्र (या व्याख्यात्मक) चर। जैसा कि इनके नाम से इंगित है, स्वतंत्र चर से आश्रित चर का विवरण दिया जाता है।

प्रतिपगमन विश्लेषण के सरलतम मामले में, एक आश्रित चर और एक स्वतंत्र चर होता है। आइए मान लेते हैं कि परिवार का उपभोग व्यय, परिवार की आय से संबंधित है। जैसे, मान लेते हैं कि पारिवारिक आय बढ़ने के साथ–साथ खर्च में भी बढ़ोतरी होती है। इस संदर्भ में उपभोग व्यय आश्रित चर है और पारिवारिक आय स्वतंत्र चर है।

आमतौर पर हम आश्रित चर को Y और स्वतंत्र चर को X से दर्शाते हैं। मान लीजिए हमने पारिवारिक सर्वेक्षण किया और X और Y में n प्रेक्षण युग्मों को इकट्ठा किया। अब हमारा अगला चरण, X और Y के बीच के संबंध की प्रकृति का पता लगाना है। X और Y के बीच का संबंध अलग–अलग रूपों का हो सकता है। आम व्यवहार में इस संबंध को किसी गणितीय समीकरण से अभिव्यक्त किया जाता है। इन समीकरणों में से सरलतम, **रैखिक समीकरण** है। इसका अर्थ है कि X और Y के बीच का संबंध सरल रेखा में है और इसे रैखिक प्रतिपगमन कहते हैं। जब समीकरण (सरल रेखा न होकर) वक्रों को दर्शाता है तो इसे अरैखिक या वक्ररेखी प्रतिपगमन (non & linear regression) कहते हैं।

अब प्रश्न उठता है कि, 'समीकरण के रूप की पहचान हम कैसे करते हैं ?' इसके लिए कोई विशेष नियम नहीं है। समीकरण का स्वरूप हमारी तार्किक सोच और कल्पनाशक्ति पर आधारित है। लेकिन प्रकीर्ण आरेख बनाने के लिए, हम X और Y चरों को ग्राफ पर खींच सकते हैं। प्रकीर्ण आरेख से हमें ग्राफ कागज पर बिंदुओं की स्थिति का पता चल जाता है जिससे समीकरण के रूप को पहचाना जा सकता है। यदि बिंदु लगभग सीधी रेखा में हैं तो रैखिक समीकरण बनेगा। दूसरी तरफ यदि बिंदु सीधी रेखा में नहीं हैं, बल्कि वक्र के रूप में है तो इसे उपयुक्त अरैखिक समीकरण बनेगा।

अब हमें एक बात और तय करनी है और वह है आश्रित और स्वतंत्र चरों की पहचान करना। यह बात भी दुबारा तर्क और विश्लेषण के उद्देश्य पर आधारित है कि क्या Y, X पर निर्भर है या X, Y पर निर्भर है। **अतः आंकड़ों के एक ही समुच्चय से दो प्रतिपगमन समीकरणों की प्राप्ति की जा सकती है। ये हैं : i) Y को X पर आश्रित मान लिया गया है (इसे X रेखा पर Y के रूप में माना जाता है), और ii) X को Y पर आश्रित मान लिया गया है (इसे Y रेखा पर X के रूप में माना जाता है)।**

अब तक आप सोच रहे होंगे कि 'प्रतिपगमन' शब्द का प्रयोग क्यों किया गया है, क्योंकि इसका अर्थ तो घटाना या कम करना होता है। यह नाम एक घटना के साथ जुड़ा हुआ है, जोकि उस समय प्रेक्षित की गई जब इन धारणाओं को विकसित किया जा रहा था। पिता की ऊँचाई (X) तथा बेटे की ऊँचाई (Y) के संबंध में एक अध्ययन

में यह प्रेक्षित किया गया कि सबसे ऊँचे पिताओं के बेटों की औसत ऊँचाई इन पिताओं की औसत ऊँचाई से कम होने के प्रवृति है। इस तरह सबसे कम ऊँचाई वाले पिताओं के बेटों की औसत ऊँचाई इन पिताओं की औसत ऊँचाई से अधिक होने की प्रवृति है। इस घटना को माध्य की तरफ प्रतिपगमन होना कहा गया है। चाहे यह उस समय कुछ अजीब–सा महसूस हुआ हो, लेकिन बाद में यह पाया गया कि इसका कारण वर्ग के उप–वर्गों में प्राकृतिक प्रसरण है। इसी प्रकार की प्रक्रियाएं बहुत–सी समस्याओं तथा आंकड़ों में घटित हुई। इसकी व्याख्या यह है कि कुछ जननिक कारकों के अतिरिक्त, अनियमित प्राकृतिक परिवर्तनों के कारण बहुत से लंबे व्यक्ति औसत ऊँचाई के परिवारों से होते हैं तथा इनके बेटे कुल मिलाकर इनसे कम ऊँचाई के होते हैं। ठीक इसी प्रकार की प्रक्रिया पैमाने के निचले सिरे पर भी लागू होती है।

आइए, सरल रैखिक प्रतिपगमन का अध्ययन करें।

16.3 सरल रैखिक प्रतीपगमन (Simple Linear Regression)

इस तथ्य की पहचान कर लेने के पश्चात् कि दो चरों के बीच सहसंबंध होता है, हम आकलन समीकरण (estimating equation) विकसित करेंगे, जिसे प्रतीपगमन समीकरण (regression equation) या आकलन रेखा (estimating line) कहा जाता है। यह प्रणालीतंत्रीय सूत्र (methodological formula) है, जो किसी अन्य चर के ज्ञात मान से किसी चर के अज्ञात मान का आकलन करने या भावीकथन करने में हमारी सहायता करता है। या–लूनचाऊ (ya-lun-chou) के शब्दों में समाश्रय विश्लेषण चरों के बीच के संबंध के स्वरूप को निश्चित करने का प्रयास करता है। चरों के बीच के संबंध के स्वरूप को निश्चित करने का प्रयास करता है। अर्थात् यह चरों के बीच के कार्यपरक संबंध (functional relationship) का अध्ययन करने का प्रयास करता है और इस प्रकार यह पूर्वकथन या पूर्वानुमान के तंत्र की व्यवस्था करता है। उदाहरणार्थ, यदि हम इस बात की पुष्टि कर दें कि विज्ञापन व्यय (स्वतंत्र चर) और विक्रय (परतंत्र चर) परस्पर संबंधित है तब हम बिक्री की एक दी हुई मात्रा के लिए विज्ञापन व्यय की आवश्यक मात्रा का पूर्वानुमान कर सकते हैं या ठीक इसका उल्टा भी होता है। इस प्रकार पूर्वकथन के लिए प्रयुक्त सांख्यिकीय विधि प्रतीपगमन विश्लेषण कही जाती है। चरों के बीच का संबंध जब रैखिक होता है तब इस तकनीक को सरल **रैखिक प्रतीपगमन** कहा जाता है।

इस प्रकार प्रतीपगमन की तकनीक सहसंबंध से एक कदम आगे जाती है। यह उस संबंध में है जिसने भविष्य में होने वाली घटनाओं के संबंध में भूतकाल में मार्गनिर्देशक का कार्य किया है। इसे कालो के लिए हमें प्रतीपगमन समीकरण और सहसंबंध गुणांक की आवश्यकता पड़ती है। सहसंबंध गुणांक का प्रयोग यह निर्धारित करने के लिए किया जाता है कि चर वास्तव में साथ–साथ चल रहे हैं।

सरल रैखिक प्रतीपगमन का उद्देश्य है नीचे दिए हुए रूप के मॉडल के साथ दो चरों के बीच के संबंध का चित्रण करना :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + e_i$$

Y = परतंत्र चर का मान

β_0 = Y–अंतः खंड (intercept)

β_1 = प्रतीपगमन रेखा की प्लान (slope)

X = स्वतंत्र चर का मान

X = त्रुटि–पद (अर्थात Y के वास्तविक मान तथा मॉडल दूसरा पूर्वकथित Y के मान के बीच अतंर)।

e_i = त्रुटि–पद (अर्थात Y के वास्तविक मान तथा मॉडल दूसरा पूर्वकथित Y के मान के बीच अतंर)।

i = अवलोकन (observation) संख्या का प्रतिनिधित्व करता है।

16.3.1 रैखिक प्रतीपगमन का आकलन (Estimating the Linear Regression) : द्विचर स्थिति

यदि हम दो चरों (X चर और Y चर) के संबंध में विचार करते हैं तब हमारे सम्मुख दो प्रतीपगमन रेखाएं आएंगी। ये है :

i) X पर Y का प्रतीपगमन

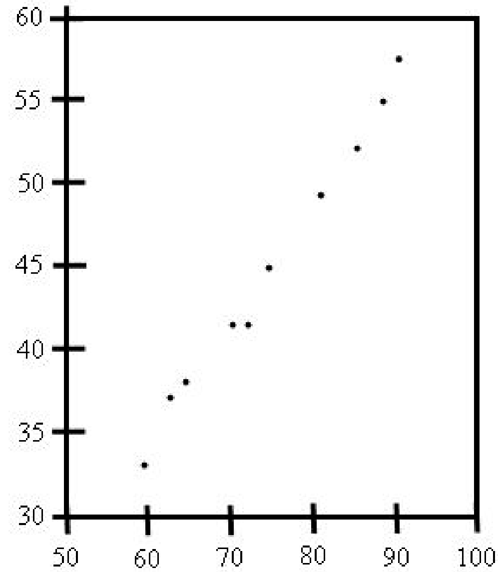
ii) Y पर X का प्रतीपगमन

पहली प्रतीपगमन रेखा (X पर Y)X के दिए हुए मान के लिए Y के मान का आकलन करती है। दूसरी प्रतीपगमन रेखा (Y पर X) Y के दिए हुए मान के लिए X के मान का आकलन करती है। चरों के बीच सहसंबंध पूर्ण धनात्मक है या पूर्ण ऋणात्मक है तो दोनों प्रतीपगमन रेखाएं संपाती होंगी (coincide)।

उदाहरण 1: दस वर्षो में हुई वर्षा और कृषि उत्पादन का ब्यौरा, सारणी 16.1 में दिया गया है।

सारणी 16.1: वर्षा और कृषि उत्पादन

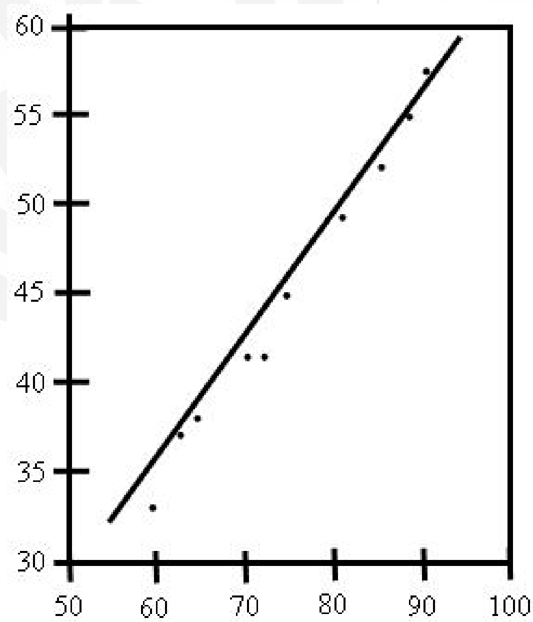
वर्षा, मि. मीटर में	कृषि उत्पादन टनों में
60	33
62	37
65	38
71	42
73	42
75	45
81	49
85	52
88	55
90	57



चित्र 16.1 : प्रकीर्ण आरेख

अब हम इस आंकड़ों का ग्राफ बनाते हैं। प्रकीर्ण आलेख, चित्र 16.1 की भांति नजर आयेगा। चित्र 16.1 पर गौर करने से हमें पता चलता है कि बिंदु सीधी रेखा में नहीं हैं। लेकिन ऊपर की तरफ बढ़ते हुए वे इस प्रकार प्रवृत है कि उन्हें जोड़ने से सीधी सी रेखा नजर आयेगी

आइए अब प्रकीर्ण आलेख के साथ प्रतीपगमन रेखा भी खींचें।



चित्र 16.2: प्रतीपगमन रेखा

प्रतीपगमन रेखा और प्रेषणों के बीच का ऊर्ध्वाधर अंतर विभ्रम e_i है। प्रतीपगमन रेखा संगत मान को प्रागुक्ति मान या प्रत्याशित मान कहते हैं। दूसरी तरफ, स्वतंत्र चर के कि विशिष्ट मान से संगत करने वाले आश्रित चर के वास्तविक मान को प्रेक्षित मान कहते है। अतः विभ्रम से आशय, प्रागुक्ति मान और प्रेक्षित मान के बीच का अंतर है।

अब प्रश्न उठता है कि, 'हम प्रतीपगमन रेखा की प्राप्ति कैसे करते हैं ? आंकड़ों के लिये सीधी रेखा बनाने की क्रियाविधि इस प्रकार है।

प्रकीर्ण आरेख की सहायता से जब हम प्रतीपगमन रेखाएं बनाते हैं (जैसा कि पहले चित्र 16.1 में दिखाया गया है) तब हमें दत्तानुसारी बिन्दुओं (data points) के एक सेट के लिए संभव प्रतीपगमन की अपरिमित संख्याएं प्राप्त होती हैं। अतः आवश्यक होता है कि सर्वोत्तम रेखा के चयन के लिए एक कसौटी निश्चित की जाए। जो कसौटी उपयोग में लाई जाती है वह है न्यूनतम वर्ग विधि (Least Square Method) न्यूनतम वर्ग कसौटी के अनुसार सर्वोत्तम प्रतीपगमन रेखा वह होती है जो प्रेक्षित (X, Y) के बीच की वर्गित उर्ध्व दूरियों के योग को कम से कम करती है और प्रतीपगमन रेखा अर्थात् $\Sigma(Y-\hat{Y})^2$ न्यूनतम मान है तथा घनात्मक और ऋणात्मक विचलनों का योग शून्य है अर्थात् $\Sigma\left(Y-\hat{Y}\right) = 0$. इस संबंध में यह ध्यान देना महत्वपूर्ण है कि (X, Y) बिन्दुओं और प्रतीपगमन रेखा के बीच की दूरी को त्रुटि (error) कहा जाता है।

16.3.2 सरल रैखिक प्रतीपगमन समीकरण (Simple Linear Regression Equations)

जैसा कि पहले विवेचन किया है दो प्रतीपगमन रेखाओं (X पर Y और Y पर X) के लिए दो प्रतीपगमन समीकरण होते हैं, जिन्हें आकलन समीकरण (estimating equations) भी कहा जाता है। ये समीकरण प्रतीपगमन रेखाओं के बीजीय व्यंजक (algebric expressions) हैं, जिन्हें निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

X पर Y का प्रतीपगमन समीकरण

$$\hat{Y} = a + bx$$

जहां पर $\hat{Y}$ दिए हुए X के लिए संबंध से Y (परतंत्र चर) का अभिकलित मान है, 'a' और '' अपरिवर्ती (स्थिर मान) हैं, 'a'Y- अक्ष पर आसंजित रेखा (Y– अंतः खंड) का निर्धारण करता है, 'b' प्रतीपगमन रेखा के ढलान का निर्धारण करता है, X स्वतंत्र चर के दिए हुए मान को दिखाता है।

उपर्युक्त समीकरण का वैकल्पिक सरल अभिव्यक्ति निम्नलिखित है :

$$\hat{Y} - \bar{Y} = byx\,(X - \bar{X})$$

$$byx = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{(\Sigma XY) - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}$$

Y पर X का प्रतीपगमन समीकरण

$$\hat{X} = a + by$$

वैकल्पिक सरल अभिव्यक्तियां है:

$$\hat{X} - \bar{X} = bxy\,(Y - \bar{Y})$$

$$bxy = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}$$

ध्यान देने की बात यह है कि आकलित सरल प्रतीपगमन रेखा सदा ही $\bar{X}$ और $\bar{Y}$ से होकर जाती है। निम्नलिखित उदाहरण में दिखाया गया है कि आकलित प्रतीपगमन

समीकरणों को किस प्रकार प्राप्त किया जाता है और इसलिए X के दिए हुए मान के लिए Y के मान के आकलन के उद्देश्य को किस प्रकार प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण 2: नीचे दिए गए किसी कंपनी के 12 महीनों के प्रतिदर्श आंकड़ों के आधार पर प्रतीपगमन रेखाओं का निर्धारण कीजिए।

(Rs. in lakh)

Advertisement Expenditure:	0.8	1.0	1.6	2.0	2.2	2.6	3.0	3.0	4.0	4.0	4.0	4.6
Sales:	22	28	22	26	34	18	30	38	30	40	50	46

हलः

Table 16.2: Calculations for Least Square Estimates of a Company.

(Rs. in lakh)

Advertising (X)	**Sales (Y)**	X^2	Y^2	**XY**
0.8	22	0.64	484	17.6
1.0	28	1.00	784	28.0
1.6	22	2.56	484	35.2
2.0	26	4.00	676	52.0
2.2	34	4.84	1156	74.8
2.6	18	6.76	324	46.8
3.0	30	9.00	900	90.0
3.0	38	9.00	1,444	114.0
4.0	30	16.00	900	120.0
4.0	40	16.00	1600	160.0
4.0	50	16.00	2,500	200.0
4.6	46	21.16	2,116	211.6
ΣX=32.8	**ΣY=384**	$\Sigma X^2=106.96$	ΣY^2=13368	ΣXY=1150.0

अब हम सर्वोत्तम प्रतीपगमन रेखा (न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा आकलित) को निश्चित करते है।

i) हम जानते है कि X पर Y का प्रतिपगमन समीकरण है:

$$\hat{Y} - \bar{Y} = byx\ (X - \bar{X})$$

$$\bar{Y} = \frac{384}{12} = 32;\ \bar{X} = \frac{32.8}{12} = 2.733$$

$$byx = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}$$

$$= \frac{1{,}150 - \frac{(32.8)(384)}{12}}{106.96 - \frac{(32.8)^2}{12}} = 100.4/17.31 = 5.8$$

अब X समीकरण पर Y है : $\hat{Y} - \bar{Y} = byx\,(\hat{X} - \bar{X})$

$$\hat{Y} - 32 = 5.8\,(X - 2.733)$$

या $\hat{Y} = 16.15 + 5.8X$

$$\hat{Y} = 5.8\,X - 15.85 + 32 = 5.8\,X + 16.15$$

जिसे जित्र 16.2 में दिखाया गया है। ध्यान दीजिए कि जैसा पहले कहा गया है, यह रेखा $\bar{X} = 2.733$ और $\bar{Y} = 32$ से होकर जाती है।

ii) हम जानते है कि Y पर X का प्रतीपगमन समीकरण है:

$$\hat{X} - \bar{X} = bxy\,(Y - \bar{Y})$$

$$bxy = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}} = \frac{1{,}150 - \frac{(32.8)(384)}{12}}{13368 - \frac{(328)^2}{12}} = \frac{100.4}{1{,}080} = 0.093$$

अब Y समीकरण पर X:

$$\hat{X} - 2.733 = 0.093\,(Y - 32)$$

$$\hat{X} - 2.733 = 0.093Y - 2.976$$

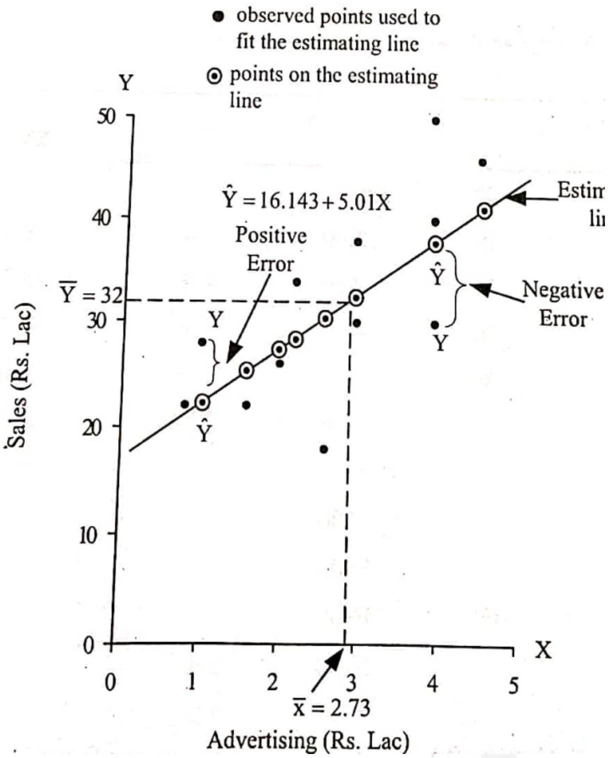
$$\hat{X} = 2.733 - 2.976 - 0.093Y$$

$$\hat{X} = -0.243 + 0.093Y$$

हमारे पास $\bar{X}$ (2.733) और $\bar{Y}$ (32) का मान है।

अब हम bxy का मान ज्ञात करते है –

$$bxy = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}$$



चित्र 16.2: Least Squares Regression Line of a Company's Advertising Expenditure and Sales.

ध्यान देने की बात यह है कि प्रतीपगमन समीकरण के अभिकलन में जिन आंकड़ा बिन्दुओं (मानों) पर विचार किया गया है उन बिन्दुओं के आगे यदि आकलन समीकरण को ले जाया जाता है तब प्रकीर्ण आरेख द्वारा दिखाया गया संबंध वही नहीं भी हो सकता है।

16.3.3 प्रागुक्ति (पूर्वानुमान) के लिए प्रतीपगमन का प्रयोग (Using Regression for Prediction)

प्रतीपगमन वह सांख्यिकीय विधि है जिसका प्रयोग मांग विक्रयों का प्रागुक्ति करने से लेकर उत्पादन और उत्पादन स्तर संबंधी प्रागुक्ति करने के लिए किया जाता है। उपर्युक्त उदाहरण 2 में विक्रय के प्रागुक्ति के लिए कंपनी के प्रतीपगमन मॉडल को प्राप्त किया गया, जिसे नीचे दिया गया है, इन मॉडलों से

i) उस स्थिति के लिए बिक्रियो के मूल्य का आकलन किजिए जब अगले तीन महीनों में कम्पनी ने विज्ञापन पर 2,50,000 रु खर्च करने का निर्णय किया।

ii) विज्ञापन की लागत ज्ञात कीजिए जब कम्पनी 50 लाख रु. के लक्ष्य तक पहुँचने की इच्छा रखती है।

हलः i) $\hat{Y}$ अर्थात् प्रत्याशित बिक्रियों के आकलन को ज्ञात करने के लिए हम विज्ञापन स्तर को मन मॉडल में प्रतिस्थापित कर देते है। उदाहरणार्थ यदि हम जानते हैं कि कंपनी के विपणन विभाग ने अगले तीन महीनों के दौरान विज्ञापन पर 2,50,000 रू. (X = 2.5) खर्च का निर्णय लिया है तब बिक्रियों ($\hat{Y}$) की सर्वाधिक संभव आकलन निम्नलिखित होगाः

$$\hat{Y} = 16.15 + 5.8\,(2.5) = 30.65$$

$$= \text{Rs. } 30{,}65{,}000$$

इस प्रकार अनुमान लगाया जाता है कि कंपनी यदि विज्ञापन पर 2.5 लाख रूपए खर्च तो उसकी बिक्री 30,65,000 रू. के लगभग होगी।

ii) $\hat{X}$ अर्थात् प्रत्याशित विज्ञापन के आकलन को ज्ञात करने के लिए जब कम्पनी 50 लाख रु के लक्ष्य तक पहुँचने की इच्छा रखती है, तब विज्ञापन $(\hat{X})$ का सर्वाधिक सम्भवत् आकलन निम्नलिखित होगाः

$$\hat{X} = -0.25 + 0.093\ (50)$$

$$= -0.25 + 4.65 = 4.4$$

= Rs. 4,40,000.

इस प्रकार 50 लाख के विक्रय का लक्ष्य पाने के लिए विज्ञापन पर 4,40,000 रु का प्रत्याशित लागत होगा।

बोध प्रश्न क

मोटर गाड़ियों की उम्र और उनके रखरखाव लागतों के संबंध में आपको निम्नलिखित आंकड़े दिए गए है। न्यूनतम वर्गों की विधि से दो प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए और आकलन कीजिए कि कोई मोटर गाड़ी जब 5 वर्ष पुरानी हो जाती है तब उसके रखरखाव पर क्या खर्च होने की संभावना है। आकलन की मानक त्रुटि भी ज्ञात कीजिए।

मोटर गाड़ियों की उम्र (वर्षों में)	2	4	6	8
रखरखाव लागतें (रू. 0 00)	10	20	25	30

16.3.4 न्यूनतम वर्ग विधि

प्रकीर्ण आरेख विधि में जैसा विवेचन किया गया है डेटा बिंदुओ के एक सेट के लिए हमें प्रतिपगमन रेखाओं की असिमित संख्या मिल सकती है, अतः एक रेखा के चयन के लिए एक मापदंड स्थापित करना आवश्यक है, न्यूनतम वर्ग विधि के अंतर्गत प्रयोग होने वाला मापदंड $\sum(Y-\hat{Y})^2$ न्यूनतम मान एवं $\sum(Y-\hat{Y})$ शून्य है।

जैसा हमें पता है न्यूनतम वर्ग विधि का समीकरण जब X पर Y समीकरण हो $\hat{Y} = a + bx$ और जब Y पर X समीकरण हो $\hat{X} = a + by$.

हम निम्नलिखित समीकरण न्यूनतम वर्ग प्रतिपगमन रेखा के, गुणांक a और b का मान ज्ञात कर सकते हैः

$$\sum Y = Na + b\sum X \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2 \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

आइए निम्न उदाहरण से श्रेष्ठ प्रतिपगमन रेखा यानि न्यूनतम वर्ग प्रतिपगमन रेखा बनाते है।

उदाहरण 3: मान लीजिए कृषि उत्पादन की मात्रा वर्षा की मात्रा पर निर्भर करती है। उदाहरण में दिए गए आंकड़ों से रैखिक प्रतिपगमन बनाइए।

वर्षा (mm)	कृषि उत्पादन (tonnes)
60	33
62	37
65	38
71	42
73	42
75	45
81	49
85	52
88	55
90	57

इस मामले में आश्रित चर (Y), कृषि उत्पादन की मात्रा है और स्वतंत्र चर (X), वर्षा की मात्रा है। फिट किये जाने वाले प्रतिपगमन समीकरण है

$$Y = a + bX$$

उपर्युक्त समीकरण के लिए हम न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रसामान्य समीकरण ज्ञात करते हैं। अब निम्नलिखित के अनुसार सारणी बनाइए।

तालिका 16.3: प्रतिपगमन रेखा का परिकलन

X	Y	X^2	$X\ Y$	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}(e_i)$
60	33	3600	1980	33.85	-0.85
62	37	3844	2294	35.34	1.66
65	38	4225	2470	37.57	0.43
71	42	5041	2982	42.03	-0.03
73	42	5329	3066	43.51	-1.51
75	45	5625	3375	45.00	0.00
81	49	6561	3669	49.46	-0.46
85	52	7225	4420	52.43	-0.43
88	55	7744	4840	54.66	0.34
90	57	8100	5130	56.15	0.85
$\sum X = \mathbf{750}$	$\sum Y = \mathbf{450}$	$\sum X^2 = \mathbf{57294}$	$\sum XY = \mathbf{34526}$	$\sum \hat{Y} = \mathbf{450}$	$\sum e_i = \mathbf{0}$

अब हम इन समीकरणों को हल करेंगे:

$$\sum Y = Na + b\sum X \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2 \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

असामान्य समीकरण (i) और (ii) में सारणी (16.3) से मान रखने पर हमें निम्नलिखित की प्राप्ति होती है :

$$450 = 10a + 750b \ldots\ldots\ldots \qquad \text{(iii)}$$

$34526 = 750a + 57294b$......... (iv)

उपर्युक्त सारणी (16.3) के मानों को उपर्युक्त समीकरण (i) एवं (ii) में पुनः व्यवस्थित करने पर हम पाते हैं कि,

$450 = 10a + 750b$ .... (iii)

$34,526 = 750a + 57,294b$ .... (iv)

उपर्युक्त पदों को समीकरण (iii) एवं (iv) में पुनः व्यवस्थित करने से पहले हमें जो मान अथवा गुणांक से जुड़े है उन्हें उपर्युक्त जुड़े हुए गुणक के मान जितना समयोजित करना होगा।

यदि, हम समीकरण (iii) को मान 75 से गुणा करते है तब हम गुणांक a से जुड़े पद को बराबर कर सकते है, हमे मिलेगाः

$450 = 10a + 750b \times 75$

$33,750 = \cancel{750a} + 56,250b$ (adjusted of iii)

(-) $34,526 = \cancel{750a} + 57,294b$ (as (iv))

$- \quad 776 = . \quad - \quad 1,044 \quad b$

अब, $b = \frac{-776}{-1,044} = 0.743$

हमें गुणांक a का मान ज्ञात होगा, उपर्युक्त समीकरण (iii) से –

$450 = 10a + 750\,(0.743)$

$450 = 10a + 557.25$

$-10a = 557.25 - 450$

$a = \frac{107.25}{-10} = -10.73$

अतः प्रतिपगमन रेखा, है $\hat{Y} = -10.73 + 0.743X$.

ध्यान दीजिए कि प्रत्याशित प्रतिपगमन समीकरण के लिए विभ्रम योग$\sum e_i$शून्य है देखें सारणी 16.3 का अंतिम स्तंभ देखें।

सारणी 16.3 परिकलन में प्रायः बड़ी–बड़ी संख्याएं शामिल होती हैं और इस कारण कठिनाई उत्पन्न हो सकती हैं। अतः प्रसामान्य समीकरणों से a और b के मानों के परिकलन के लिए हम लघुतर विधि का प्रयोग करेंगे।

इस लघुतर विधि मेंः

$a = \bar{Y} - b\bar{X}$

$b = \sum XY / \sum X^2$

यहाँ $x = X - \bar{X}$ का अर्थ है X (स्वतंत्र चर) का विचलन $\bar{X}$ के माने से

$y = Y - \bar{Y}$ का अर्थ है Y (परतंत्र चर) का विचलन $\bar{Y}$ के माने से

अतः $xy = (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$

चूंकि इन सूत्रों को प्रसामान्य समीकरण से व्युत्पन्न किया जाता है, इसलिए इस विधि में हम a और b के लिए भी समान मान प्राप्त करते हैं। इस उद्देश्य के लिए, हम सारणी 16.4 का निर्माण करते हैं।

सारणी 16.4: प्रतिपगमन रेखा का परिकलन (लघुतर विधि)

	X	Y	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$x - X^2$	xy
	60	33	–15	–12	225	180
	62	37	–13	–8	169	104
	65	38	–10	–7	100	70
	71	42	–4	–3	16	12
	73	42	–2	–3	4	6
	75	45	0	0	0	0
	81	49	6	4	36	24
	85	52	10	7	100	70
	88	55	13	10	136	130
	90	57	15	12	225	180
जोड	**750**	**450**	**0**	**0**	**1044**	**776**

सारणी 16.4 के आधार पर हम पाते हैं कि

$$\bar{X} = \frac{750}{10} = 75 \; and \; \bar{Y} = \frac{750}{10} = 45$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} xy}{\sum_{i=1}^{n} x^2} = \frac{776}{1044} = 0.743$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 45 - 0.743 \times 75 = 10.73$$

अतः इस विधि में भी प्रतिपगमन रेखा है $\hat{Y} = -70.73 + 0.743X$

गुणांक b, प्रतिपगमन गुणांक कहलाता है। जब X में यूनिट बढ़ोतरी होती है तो प्रतिपगमन गुणांक Y में बढ़ने वाली संख्या को प्रभावित करता है। प्रतिपगमन समीकरण गुणांक b = 0.743 दर्शाता है कि यदि वर्षा की मात्रा में 1 मिमी. से बढ़ोतरी होती है तो कृषि उत्पादन 0.743 हजार टन बढ़ जाएगा। यह लघुतर विधि सबसे आसान विधि है केवल तब जब x एवं y दानों का समांतर माध्य का मान पूर्ण हो (10, 25,32 ………..) आंशिक (10.62, 53.12, 83.95……). न हो।

बोध प्रश्न ख

निम्नलिखित आंकडों से न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्राप्त कीजिए एवं बिक्रि अनुमान कीजिए अगर खरीद 95 लाख है

बिक्री	:	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
खरीद	:	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

16.4 संहसंबध और प्रतिपगमन गुणांक के बीच संबंध

1) दो प्रतीपगमन गुणांको (by x और bxy) का ज्यामितीय माध्य (geometric mean) सहसंबंध का गुणांक देता है।

$$r = \pm\sqrt{(bxy)\,(byx)}$$

विज्ञापन व्यय और बिक्रियों के बीच सहसंबंध की मात्रा ज्ञात करने के लिए पिछले उदाहरण से प्रतीपगमन गुणांक के मानों के संबंध में विचार कीजिए।

$$r = \pm\sqrt{0.093 \times 5.801} = 0.734$$

2) दोनों ही सहसंबंध गुणांकों सदा ही एक समान ही चिह्न (+ या −) होगा।

3) सहसंबंध के गुणांक का प्रतीपगमन गुणांकों जैसा चिन्ह होगा। यदि दोनों ही धनात्मक है तब घनात्मक है। दोनों ही के ऋणात्मक होने की स्थिति में; तभी ऋणात्मक होगा। उदाहरणार्थ जब $bxy = -1.3$ and $byx = -0.65$, तब r है :

$$\pm\sqrt{-1.3x - 0.65} = -0.919 \text{ but not } +0.919$$

4) प्रतीपगमन गुणांक मूल बिन्दु (origin) में परिवर्तन से स्वतंत्र होते हैं, लेकिन स्केल से नहीं।

16.5 सहसंबंध और प्रतीपगमन में अंतर (Difference between Correlation and Regression)

सरल सहसंबंध (इकाई 15) और सरल प्रतीपगमन की संकल्पना और प्रयोग को समझ लेने के पश्चात् हम इनके बीच अंतर कर सकते हैं। ये निम्नलिखित है :

1) दो चरों (X और Y) के बीच सहसंबंध गुणांक 'r' उनके बीच के रैखिक संबंध जो पारस्परिक होता है की दिशा और मात्रा की माप होता है। यह सममित (symmetric) (अर्थात् ($r_{xy} = r_{yx}$) होता है और यह नगण्य (inconsiderable) होता है कि X और Y में से कौन सा परतंत्र चर है और कौन सा स्वतंत्र चर है। प्रतीपगमन विश्लेषण का लक्ष्य होता है अध्ययन किए जा रहे दो चरों के बीच के कार्यपरक संबंध को निश्चित करना और उसके पश्चात् इस संबंध का प्रयोग करते हुए स्वतंत्र चर के किसी दिए मान के लिए परतंत्र चर के मान का पूर्वानुमान लगाना। यह चरों के स्वरूप का भी चित्रण करता है (अर्थात् कौन परतंत्र चर है और कौन स्वतंत्र चर है)। अतः प्रतीपगमन गुणांक X और Y में सममित नहीं होते (अर्थात्, $r_{xy} \neq r_{yx}$)।

2) सहसंबंध का यह अर्थ होना आवश्यक नहीं होता कि अध्ययन के अधीन चरों के बीच कार्यकारण (cause and effect) का संबंध हो। लेकिन प्रतीपगमन विश्लेषण स्पष्ट रूप से चरों के बीच कार्यकारण संबंध की ओर संकेत करता है। कारण के अनुरूप चर को स्वतंत्र चर के रूप में ले लिया जाता है और कार्य के अनुरूप चर को परतंत्र चर के रूप में ले लिया जाता है।

3) सहसंबंध गुणांक 'r' X और Y चरों के बीच रैखिक संबंध की सापेक्ष माप है और यह माप की इकाई से स्वतंत्र होता है। यह ± 1 के बीच की संख्या है। जबकि प्रतीपगमन गुणांक byx (या bxy) एक निरपेक्ष माप है जो चर X(या

Y) के मान में इकाई परिवर्तन के लिए चर Y (या X) के मान में परिवर्तन को दिखाता है। प्रतीपगमन वक्र का कार्यपरक रूप जब ज्ञात हो जाता है तब परतंत्र चर के मान को प्रतिस्थापित करके हम स्वतंत्र चर के मान को ज्ञात कर सकते हैं जो चर की माप की इकाई में होगा।

4) दो चरों के बीच मिथ्या (या अनर्थक) सहसंबंध हो सकता है, जो संयोग से होता है और इसका कोई व्यावहारिक संबंध नहीं होता। उदाहरणार्थ व्यक्तियों के एक समूह के जूते के आकार और उनकी आय। मिथ्या प्रतीपगमन जैसी कोई बात नहीं होती।

5) सहसंबंध विश्लेषण केवल चरों के बीच रैखिक संबंध के अध्ययन तक ही सीमित होता है और इसलिए इसका प्रयोग सीमित मात्रा में होता है। जबकि प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग व्यापक रूप मे होता है क्योंकि यह चरों के बीच रैखिक तथा आरैखिक दोनों ही प्रकार के संबंधो का अध्ययन करता है।

16.6 सारांश (Let Us Sum Up)

इस इकाई में सरल रैखिक प्रतिपगमन के मूल संकल्पनाओं एवं तकनीकों के संबंध में विवेचन किया गया है। जब पहचान कर लिया जाता है कि चरों के बीच सहसंबंध है। तब पूर्वकथन (पूर्वानुमान) के लिए न्यूनतम वर्ग विधि के द्वारा आकलन समीकरण (जिसे प्रतीपगमन समीकरण कहा जाता है) को विकसित किया जा सकता है। सहसंबंध और प्रतीपगमन के बीच के संबंध एवं संकल्पनात्मक अंतरों को स्पष्ट किया गया है। व्यवसाय कार्यों में निर्णय लेने में और आंकड़ो को विश्लेषण करने में सहसंबंध और प्रतीपगमन तकनीकों का बड़े व्यापक रूप में प्रयोग किया जाता है।

16.7 शब्दावली (Key Words)

रैखिक संबंध (Linear Relationship): दो चरों के बीच का संबंध जिसका वर्णन एक सीधी रेखा द्वारा होता है।

न्यूनतम वर्ग कसौटी (Least Squares Criterion): उस प्रतीपगमन रेखा के निर्धारण की कसौटी जो वर्गित त्रुटियों के योग को न्यूनतम करती है।

सरल प्रतीपगमन विश्लेषण (Simple Regression Analysis): वह प्रतीपगमन मॉडल जो परतंत्र चर में विचलन के स्पष्टीकरण के लिए एक स्वतंत्र चर का प्रयोग करता है।

16.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

(क) Y on X : $\hat{Y} = 5 + 3.25x$

X on Y : $\hat{X} = -3 + 0.297y$

(ख) Y = 14.81 + 0.613x

X = -5.2 + 1.36y

Estimation = Rs. 124 lakhs

16.9 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास (Terminal Question/Exercises)

1) प्रतीपगमन शब्द से आप क्या समझते हैं? इसके महत्व को स्पष्ट कीजिए।

2) सहसंबधं और प्रतीपगमन के बीच अंतर बताइए।

3) न्यूनतम वर्ग विधि स्पष्ट करें।

4) एक फर्म का कार्मिक प्रबंधक (Personnel Manager) यह अध्ययन करना चाहता है कि किसी दिन के औसत तापमान के साथ उस दिन अनुपस्थित रहने वाले श्रमिकों की संख्या का क्या संबंध है। इस अध्ययन के लिए 12 दिनों के यादृच्छिक प्रतिदर्श (random sample) का प्रयोग किया गया। इस आंकड़ें को नीचे दिया गया है :

अनुपस्थित श्रमिकों की संख्या :	6	4	8	9	3	8	5	2	4	10	7	6
औसत तापमान (^{0}C)	12	30	15	18	40	30	45	35	23	15	25	35

क) स्वतंत्र चर और परतंत्र चर बताइए।

ख) एक प्रकीर्ण आरेख बनाइए

ग) प्रतिपगमन रेखा ज्ञात कीजिए –

i) X on Y

ii) Y on X

5) निम्नलिखित सारणी में 6 दिनों के लिए किसी वस्तु की मांग और कीमत के आंकड़े दिए गए हैं

कीमत (रू)	4	3	6	9	12	10
मांग (मनों में)	46	65	50	30	15	25

क) सहसंबंध गुणांक के मान को ज्ञात कीजिए

ख) 5 रू. 8 रू. और 11 रू. कीमत पर मांग का पूर्वानुमान कीजिए।

6). एक साफ्ट ड्रिंक कंपनी का बिक्री मैनेजर अपने अद्यतन विज्ञापन अभियान के प्रभाव का अध्ययन कर रहा है। यादृच्छिक आधार पर चुने गए लोगों को बुलाया गया है और उनसे पूछा गया है कि पिछले सप्ताह में उन्होंने कितना बोतल खरीदा और उस सप्ताह में उन्होनें इस उत्पाद का कितना विज्ञापन देखा।

विज्ञापन की संख्या (X)	4	0	2	7	3	4	2	6
खरीदे गए बोतल (Y)	6	5	4	16	10	9	6	14

क) न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा आकड़ो के लिए सबसे उपयुक्त प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए।

ख) $X = 78$ की स्थिति में Y मान का पूर्वानुमान कीजिए।

ग) $Y = 20$ की स्थिति में X मान का पूर्वानुमान कीजिए।

7) निम्न आकड़ों से प्रतीपगमन रेखा ज्ञात कीजिए।

X	25	22	28	26	35	20	22	40	20	18
Y	18	15	20	17	22	14	16	21	15	14

क) Y का मान ज्ञात कीजिए जब $X = 25$ एवं

ख) X का मान ज्ञात कीजिए जब $Y = 45$ ।

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

16.10 संदर्भ पुस्तकें

इकाई में दिये गये विषय-वस्तु की गहराई से समझने के लिए निम्नलिखित पाठ्य–पुस्तकें प्रयुक्त की जा सकती है।

Richard I. Levin and David S. Rubin, 1996, Statistics for Management. Prentice Hall of India Pvt. Ltd., New Delhi.

Peters, W.S. and G.W. Summers, 1968, Statistical Analysis for Business Decisions, Prentice Hall, Englewood-cliffs.

Hooda, R.P., 2000, Statistics for Business and Economics, MacMillan India Ltd., New Delhi.

Gupta, S.P. 1989, Elementary Statistical Methods, Sultan Chand & Sons: New Delhi.

Chandan, J.S. - Statistics for Business and Economics, Vikas Publishing House Pvt. Ltd., New Delhi.

इकाई 17 सूचकांक (INDEX NUMBERS)

इकाई की रूपरेखा

17.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- सूचकांकों के अर्थ को स्पष्ट कर सकें और सूचकांको के प्रयोग को समझ सकें;
- विशेष प्रयोजन से सूचकांकों को बनाने के दौरान सामने आने वाली विभिन्न समस्याओं की पहचान कर सकें और उनसे बच सकें;
- सूचकांकों के वर्गीकरण के संबंध में विवेचन कर सकें;
- विभिन्न विधियों का प्रयोग करके सूचकांको का प्रयोग कर सकें और उनका परिकलन कर सकें, तथा
- सूचकांकों की व्याख्या के संदर्भ में होने वाले अनेक त्रुटियों से बचने के लिए सूचकांकों की सीमाओं का वर्णन कर सकें।

17.1 प्रस्तावना

पिछले ब्लॉक 5 में हमनें सीखा है कि सांख्यिकीय उपकरणों को लागू करके द्विचर सांख्यिकीय आकड़ों की गणना कैसे करें। सरल रैखिक सहसंबध एवं सरल रैखिक

प्रतिपगमन ऐसे ही सांख्यिकीय उपकरण है जो दो चरो के बीच संबंध स्थापित करते है।

इस इकाई में विभिन्न प्रयोजनों से विभिन्न प्रकार के सूचकांकों के निर्माण की विधियों के संबंध में विवेचन किया जाएगा। यह विधि काल श्रेणी विश्लेषण का विस्तार है क्योंकि किसी सूचकांक में अतुलनीय इकाइयों (noncomparable units) से संबंधित दो या उनसे अधिक काल श्रेणी चरों का योग होता है। आपने समाचार पत्रों में पढ़ा होगा, दूरदर्शन पर देखा होगा या रेडियो पर सुना होगा कि निर्वाह खर्च सूचकांक (cost of living index) में इतने प्वाइंटों की वृद्धि हुई है, अतः सरकारी कर्मचारियों के लिए मंहगाई भत्ते के एक और स्लैब की घोषणा हुई है। संभवतः आप जानना चाहेंगे कि निर्वाह खर्च सूचकांक का क्या अर्थ है।

आपमें से अनेक व्यक्तियों ने शेयर बाजार शेयर कीमत सूचकांक (stock exchange share price index) के नाम से सुना होगा, जिसे सामान्यतः BSE SENSEX(या हाल ही में NSE SENSEX) के नाम से जाना जाता है। इन विभिन्न प्रकार के सूचकांक श्रेणियो का प्रयोग विभिन्न प्रकार के कार्यकलापों में किया जाने लगा है। जैसे कि औद्योगिक उत्पादन, निर्यात, कीमतें, आदि। इस इकाई में आप जिन विषयों के संबंध में पढ़ेंगे और जानकारी प्राप्त करेंगे, वे हैं सूचकांको का अर्थ और उनका प्रयोग, सूचकांको के प्रयोग के फलस्वरूप सामने आने वाली अनेक समस्याएं, विभिन्न प्रकार के सूचकांकों के निर्माण की विधियां तथा उनकी सीमाएं।

17.2 सूचकांकों का अर्थ और संकल्पना (Meaning and Concept of Index Number)

जब हम कहते हैं कि औद्योगिक उत्पादन के सामान्य स्तर में 4 प्रतिशत की वृद्धि हुई है तब हमारा अभिप्राय उन सभी वस्तुओं के उत्पादन से होता है जिनका निर्माण औद्योगिक क्षेत्र में होता है। परन्तु संभव है कि इन वस्तुओं में से कुछ का उत्पादन बढ़ रहा हो, कुछ का उत्पादन घट रहा हो और कुछ का उत्पादन ज्यों का त्यों बना रहे। वृद्धि या कमी की क्या दर है और इन वस्तुओं को किन इकाइयों में अभिव्यक्त किया जा रहा है इनके संबंध में अंतर हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, सीमेंट को प्रति किलोग्राम में, वस्त्र को प्रति मीटर में, और मोटर गाड़ियों को प्रति इकाई में कोटि किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में जब हमारा उद्देश्य समयोपरांत दृष्टि से या स्थानों की भौगोलिक दृष्टि से औद्योगिक उत्पादों के उत्पादन के औसत स्तर में परिवर्तन की माप करना होता है केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप की तकनीक का प्रयोग करना सही नहीं होता क्योंकि जब श्रेणियों को विभिन्न इकाइयों में या/और विभिन्न मदों में अभिव्यक्त किया जाता है तब यह उपयोगी सिद्ध नहीं होती।

ऐसी स्थिति में विशेष प्रकार के औसत की आवश्यकता होती है, जिसे सूचकांक कहा जाता है। इन्हें प्रायः आर्थिक बैरोमीटर की संज्ञा दी जाती है।

सूचकांक की परिभाषा इस प्रकार दी जा सकती है— एक विशेष प्रकार का औसत जो दो या उससे अधिक स्थितियों में परस्पर संबंधित चरों के समूह की मात्रा के भीतर की तुलना में सहायता करता है।

सूचकांक संख्याओं की श्रेणी होते हैं, जिनकी योजना किसी विशिष्ट समय काल में (यह समय काल दैनिक, साप्ताहिक, मासिक, वार्षिक या कोई अन्य नियमित समय अंतराल हो सकता है) परिवर्तनों की माप करने के लिए बनाई जाती है या ऐसा किसी

एक चर या परस्पर चरों के एक समूह के संदर्भ में तुलना करने के लिए किया जाता है। इस प्रकार विशिष्ट सूचकांक की श्रेणी में प्रत्येक संख्या का स्वरूप यों होता है :

क) यह संख्यामात्र होती है अर्थात् इसमें कोई इकाई नहीं होती।

ख) इसका परिकलन पूर्वनिर्धारित सूत्र के अनुसार किया जाता है।

ग) इसका निर्माण नियमित समय अंतरालों पर किया जाता है। कभी–कभी ऐसा विभिन्न विश्लेषण स्थानों पर एक ही समय अंतराल में किया जाता है।

घ) संख्याओं का नियमित निर्माण कालानुक्रमी श्रेणियों (chronological series) में होता है।

ङ) कुछ आधार काल (base period) और आधार संख्या (base number) के नाम से जाने वाले कुछ विशिष्ट काल और संख्या के संदर्भ में आधार संख्या सदा 100 होती है। उदाहरणार्थ गणना 2003 वर्ष के लिए 180 के रूप में की जाती है तो इसका अर्थ होता है कि 1996 की कीमतों की तुलना में 2003 में उपभोक्ता कीमतों में वृद्धि 80 प्रतिशत हुई है।

17.2.1 सूचकांक की विशेषताएँ

सूचकांक संख्या की माप की मुख्य विशेषताएं इस प्रकार हैं:

1. सापेक्ष माप
2. विशिष्ट औसत
3. परिवर्तनों का माप प्रत्यक्ष माप के लिए सक्षम नहीं है
4. वस्तुओं के समूह की सामान्य विशेषताओं का मापन
5. समय या स्थान के आधार पर तुलना
6. प्रतिशत में प्रभावित
7. सार्वभौमिक उपयोग

1. **सापेक्ष माप**: सूचकांक संख्या का उपयोग परिवर्तनशील समय और स्थान पर चर के समूह में वास्तविक परिवर्तन की तुलना के लिए किया जाता है।

2. **विशेष औसत**: सूचकांक संख्या एक विशेष प्रकार का औसत है जो चर या चर के समूह में सापेक्ष परिवर्तनों का माप प्रदान करता है।

3. **प्रत्यक्ष माप के लिए असक्षम परिवर्तनों की माप**: सूचकांक संख्या की सहायता से हम परिमाण में उन परिवर्तनों को माप सकते हैं जो उनकी जटिल प्रकृति के कारण प्रत्यक्ष माप में सक्षम नहीं हैं।

4. **वस्तुओं के समूह की सामान्य विशेषताओं का मापन**: सूचकांक संख्या वस्तुओं के समूह की सामान्य विशेषताओं को व्यक्त करती है। इंडेक्स में परिवर्तन का मतलब हमेशा यह नहीं होता है कि सभी चर में बदलाव होता है। उदाहरण के लिए, मूल्य सूचकांक में वृद्धि का मतलब यह नहीं है कि सभी वस्तुओं की कीमत बढ़ रही है।

5. **समय और स्थान के आधार पर तुलना:** सुचकांक संख्या का उपयोग समय या स्थान के आधार पर सापेक्ष परिवर्तनों को मापने के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए– उत्तर प्रदेश में गेहूं का उत्पादन दो अलग–अलग अवधि के लिए या उत्तर प्रदेश और हरियाणा में एक ही अवधि में गेहूं का उत्पादन

6. **प्रतिशत में व्यक्त:** सापेक्ष परिवर्तन दिखाने के लिए सूचकांक संख्या प्रतिशत में व्यक्त की जाती है, हालांकि प्रतिशत का संकेत कभी भी उपयोग नहीं किया जाता है।

7. **सार्वभौमिक उपयोग** : आजकल सभी क्षेत्रों में सूचकांक संख्या की तकनीक का बड़े पैमाने पर उपयोग किया जा रहा है, चाहे वह उत्पादन, व्यापार आदि में परिवर्तन हो।

17.3 सूचकांकों के उपयोग (Uses of Index Numbers)

मूल रूप में सूचकांकों का विकास कीमतों में परिवर्तन के प्रभाव की माप करने के लिए किया गया था। परन्तु आजकल व्यवसाय और आर्थिक कलापों के आंकड़ों के विश्लेषण के लिए वे अनिवार्य हो गए हैं। इस सांख्यिकीय उपकरण (statistical) का उपयोग अनेक प्रकार से किया जा सकता है, जिन्हें नीचे दिया जा रहा है:

1) निर्णयकर्ता सूचकांकों का प्रयोग मध्यवर्ती अभिकलन (intermediate computation)के लिए करते हैं, जिससे वे अन्य सूचना को बेहतर ढंग से समझ सकें। नाममात्र आय को वास्तविक आय का रूप दिया जा सकता है आदि उपभोक्ता कीमत सूचकांक जिसे जीवन निर्वाह खर्च सूचकांक (cost of living index) के नाम से भी जाना जाता है, की गणना उपभोक्ताओं के एक विशिष्ट समूह के लिए की जाती है, और उन विशिष्ट वस्तुओं और सेवाओं की कीमतों के संबंध में जिनका क्रय यह उपभोक्ता समूह प्रायः करता है। उदाहरणार्थ, मान लेते हैं कि वर्ष 1970 में कोई व्यक्ति 100 रू अर्जित करता है और 1980 में उसका अर्जन बढ़कर 300 रू हो गया। इस अवधि में यदि उपभोक्ता कीमत सूचकांक 100 से बढ़कर 400 हो गया हो तब वह उपभोक्ता 300 रू से उन विभिन्न वस्तुओं को उसी मात्रा में नहीं खरीद सकेगा। जिन्हें वह 1970 में अपनी 100 रू की आय से खरीद पाता था। इसका अर्थ होता है कि उस व्यक्ति की वास्तविक आय घट गई है। इस प्रकार वास्तविक आय का परिकलन, वास्तविक आय को उपभोक्ता कीमत सूचकांक से भाग देकर किया जा सकता है:

$$1980 \text{ में वास्तिविक आय (Real Income)} = \frac{1980 \text{ में वास्तविक आय (actual income)}}{1970 \text{ का उपभोक्ता कीमत सूचकांक}} \times 100$$

$$= \frac{300}{400} \times 100 = 75 \text{ रु आधार वर्ष 1970 संबंधित}$$

अतः वर्ष 1970 में उपभोक्ता की आय 100 रू की तुलना में 1980 में उसकी वास्तविक आय 75रू है। हम यह भी कह सकते हैं कि यद्यपि उसकी आय तो बढ़ गई है परन्तु कीमत क्रय शक्ति घट गई है।

2) D.A. महंगाई भत्ते के रूप में कीमतों के प्रतिपूरक (price compensating) के लिए मजदूरी और वेतन के संबंध में बातचीत के लिए विभिन्न प्रकार के कीमत सूचकांकों का प्रयोग किया जाता है।

3) नीतियों के निर्धारण के संबंध में विभिन्न प्रकार के कीमत सूचकांक सरकार के लिए उपयोगी सिद्ध होते है। इनमें से कुछ यें हैं : कराधान नीतियां, मजदूरी और कीमत नीतियां, आर्थिक नीतियां तथा सीमाशुल्क और टैरिफ नीतियां।

4) मकान किराया भत्ता, नगर भत्ता, या कुछ अन्य विशेष भत्तों के समायोजन के लिए विभिन्न क्षेत्रों मे स्थित नगरों के जीवन निर्वाह खर्च के बीच तुलना करने के लिए भी सूचकांक का प्रयोग किया जा सकता है।

5) औद्योगिक उत्पादन, कृषि उत्पादन, व्यावसायिक कार्यकलाप, निर्यात और आयात के सूचकांक विभिन्न स्थानों के बीच तुलना के लिए उपयोगी सिद्ध होते हैं तथा उद्योग नीतियों और आयात नीतियों के निर्माण में भी ये उपयोगी सिद्ध होते हैं।

6) बम्बई शेयर बाजार में खरीद विक्रय किए जाने वाले शेयरों की कीमतों के लिए BSE SENSEX सूचकांक हैं। शेयर बाजार को विनियमित करने में इससे संबंधित अधिकारियों को सहायता मिलती है। सामान्य व्यवसाय कार्यकलापों का भी यह सूचक होता है और सरकार द्वारा विभिन्न प्रकार की नीतियों के निर्धारण में इससे सहायता मिलती है। उदाहरणार्थ किसी विशेष उद्योग की अधिकतर कंपनियों की शेयर कीमतें यदि लगातार गिरती जा रही है तो उस विशेष उद्योग की सहायता की दृष्टि से सरकार अपनी नीतियों में परिवर्तन करने के संबंध में सोच सकती है।

7) कभी–कभी ऐसा करना उपयोगी सिद्ध होता है कि किसी एक उद्योग के सूचकांक और किसी दूसरे उद्योग या कार्यकलाप के बीच संबंध स्थापित किया जाए, जिससे प्रथम उद्योग में होने वाले परिवर्तनों के संबंध में पूर्वानुमान लगाया जा सके। उदाहरणार्थ, सीमेंट उद्योग तथा भवन निर्माण उद्योग के सूचकांकों पर नजर रख सकता है। यदि भवन–निर्माण उद्योग के सूचकांक में वृद्धि हो रही है तब सीमेंट उद्योग आशा कर सकता है कि सीमेंट के लिए मांग बढ़ेगी।

8) यदि आपकों सूचित किया जाता है कि एक कि0 ग्रा0 तेल की कीमत वर्ष 1940 में ₹0.50 प्रति कि0 ग्रा0, वर्ष 1980 में 30 प्रति कि0 ग्रा0, वर्ष 2004 में ₹70 प्रति कि0 ग्रा0 एवं 2018 में 160 प्रति कि0 ग्रा0 है और यदि फिर आपसे पूछा जाए: क्या तेल को भविष्य में पुनः ₹50, ₹30 या ₹70 पर बेचा जाए ? अवश्य आपक उत्तर 'नहीं' होगा।

17.4 सूचकांकों के निर्माण संबंधी समस्याएं (Issues in Construction of Index Numbers)

सूचकांकों के निर्माण के दौरान तीन प्रमुख समस्याएं उत्पन्न हो सकती हैं। वो यें है (1) आंकड़ों का संग्रहण, (2) आधार वर्ष का चयन और (3) समुचित सूचकांक का चयन। इनके संबंध में नीचे विस्तारपूर्वक विवेचन किया गया है :

1) **आंकड़ों का संग्रहण (Collection of Data)**: सूचकांको के निर्माण के संबंध में यादृच्छिक प्रणाली (sample method) द्वारा आंकड़ों का संकलन एक प्रमुख

विषय होता है। आंकड़ों के लिए आवश्यक होता है कि वह यथासंभव विश्वसनीय, पर्याप्त, यथार्थ, तुलनीय, तथा निरूपक (reprensentative) हो। इस संबंध में अनेक प्रकार के प्रश्नों का उत्तर देना आवश्यक होता है। यें उत्तर अंततः व्यक्तियों के अपने–अपने विचारों तथा उनके प्रयोजनों पर निर्भर करते हैं। उदाहरणार्थ, निम्नलिखित के संबंध में निर्णय करना आवश्यक होता हैः

i) **शामिल की जाने वाली वस्तुओं पहचान करना (Identification of Commodities to be Included)** : किस प्रकार की और कितनी वस्तुओं को शामिल किया जाए? मदें बहुत बड़ी संख्या में हो सकती हैं। उन सबको शामिल करना संभव नही होता। सूचकांकों के निर्माण के संदर्भ में केवल वे ही मदें शामिल करने योग्य होती हैं जो इन्हे निरूपक बना सकें। उदाहरणार्थ, बम्बई शेयर बाजार में शेयरों के लिए यदि हम सूचकांक बनाते हैं, जहां पर बहुत बड़ी संख्या में शेयर सूचीबद्ध होते हैं और उनका क्रय–विक्रय होता है, तो उन सबको शामिल करना संभव नहीं होता। अतः निर्णय करना होता है कि शेयरों की कौन सी प्रतिदर्श संख्या (यह 30 या 40 हो सकती है) बम्बई शेयर बाजार में शेयर कीमतों में उतार चढ़ाव का प्रतिनिधित्व कर सकती है। इसलिए यह बात ध्यान देने योग्य है कि मदों का चयन किसी उद्देश्य से होना चाहिए तथा जिस प्रयोजन से सूचकांक बनाया जा रहा है उसके लिए वह सार्थक और उससे संबंधित हो।

ii) **आंकड़ों के स्त्रोत (Sources of Data)**: आंकड़ों को कहां से एकत्र किया जाये यह प्रश्न महत्वपूर्ण और कठिन होता है। उदाहरणार्थ, कीमत सूचकांक के लिए कुछ वस्तुओं से संबंधित कीमतों और उपभोग की मात्रा के संबंध में जानकारी प्राप्त करना पड़ सकता है। परन्तु उन वस्तुओं को बेचने वाले खुदरा विक्रेता और थोक विक्रेता बहुत बड़ी संख्या में होते हैं, जो विभिन्न प्रकार की कीमतें कोट करते हैं। विस्तार से जानकारी प्राप्त करने के लिए कुछ थोडी सी प्रतिनिधि दुकानों (जो खरीदारों के विशिष्ट क्रय बिन्दुओं का प्रतिनिधित्व करती हैं) को चुनने की आवश्यकता पड़ती है। इस प्रकार प्रतिनिधि यादृच्छिक सर्वेक्षण पर आधारित स्त्रोत ऐसे होने चाहिए जहां से सार्थक, पर्याप्त और समय पर आंकड़े एकत्र किए जा सकें।

iii) **आकड़ा संग्रहण का समय (Timings of Data Collection)**: यह भी महत्वपूर्ण होता है कि आंकड़ों का संग्रहण सही समय पर किया जाए। उपभोक्ता कीमत सूचकांक के उदाहरण पर यदि हम ध्यान दें तो देखेंगे कि किसी महीने के अलग–अलग दिनों पर कीमतें अलग–अलग होती है। कुछ वस्तुओं की कीमतें तो एक ही दिन में अलग–अलग समयों पर अलग–अलग हो सकती है। उदाहरणार्थ, प्रातः काल में सब्जियां ताजी आती हैं और उनकी कीमतें प्रायः उँची होती हैं, परन्तु संध्या के समय कीमतें गिर जाती है क्योंकि इनके बिक्रेता अपनी दुकानें बंद करने लगते हैं और इस विनाशशील वस्तु के स्टॉक को समाप्त कर देना चाहते हैं। प्रत्येक वस्तु के संबंध में व्यक्ति को स्वंय ही निर्णय करना होता है कि यथार्थता का चित्रण किस प्रकार किया जाए और जिस कार्य के लिए सूचकांक का प्रयोग किया जाता है, उसे किस प्रकार पूरा किया जाए।

2) **आधार वर्ष का चयन (Selection of Base Year):** आधार अवधि वह संदर्भ अवधि होती है जिसका प्रयोग किसी दी हुई अवधि में कीमतों या मात्राओं में परिवर्तन की तुलना करने पर उनका विश्लेषण करने के लिए किया जाता है (जो प्रायः एक वर्ष की होती है) के मूल्य को संदर्भ अवधि के रूप में लिया जाता है, बहुत से सूचकांक श्रेणी के लिए किसी निश्चित समयावधि जिसके संदर्भ में इन श्रेणियों के आगे' के सूचकांको का परिकलन किया जाता है और तुलना की जाती है।

कुछ अन्य स्थितियों में, विशेषतः उस समय जब विभिन्न नगरों मे निर्वाह खर्च के बीच तुलना करना होता है, एक चूने गए नगर में जीवन निर्वाह के मूल्य को आधार के रूप में ले लिया जाता है, जिससे अन्य नगरों में निर्वाह खर्च की तुलना की जाती है।

इसके अतिरिक्त अन्य स्थितियों में आवश्यक हो सकता है कि किसी एक सूचकांक श्रेणियों की तुलना किसी अन्य श्रेणी से की जाए। ऐसी स्थितियों में सभी श्रेणियों के लिए उभयनिष्ठ (common) सामान्यतः अधिक उपयुक्त होता है।

उपर्युक्त तथ्यों की दृष्टि से इसलिए आवश्यक होता है कि आधार वर्ष के रूप में चुनी हुई अवधि सामान्य अवधि हो। सामान्य अवधि (normal period) वह होती है जिससे संबंधित कीमत या मात्रा–संख्या न तो बहुत ही नीची है, और न बहुत ही ऊँची है। इसे असामान्य घटनाओं से प्रभावित नहीं होना चाहिए, जैसे कि बाढ़ (कृषि मे रूचि रखने वालों के लिए), युद्ध, अचानक सुस्ती (recession) की स्थिति हो जाना, आदि। सामान्य क्या है, इस बात का निर्णय यह ध्यान में रख कर करना चाहिए कि सूचकांक को बनाने का उद्देश्य क्या है और विशेष प्रकार की स्थिति क्या है।

3) **समुचित सूचकांक का चयन (Selection of an Appropriate Index):** जब एक समान आंकड़ों में सूचकांकों की विभिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है तो उनके विभिन्न प्रकार के परिणाम होते हैं। ऐसे सूत्र के चयन में पूरी सावधानी रखनी चाहिए जो इस कार्य के लिए सर्वाधिक उपयुक्त सिद्ध हो। यह बताना अत्यंत कठिन होता है कि भारित सूचकांक (weighted index) का प्रयोग किया जाए या अल्पभारति सूचकांक (under weighted index) का प्रयोग किया जाए। यह तो इस बात पर निर्भर करता है कि सूचकांक का प्रयोग किस प्रयोजन से करना है। उदाहरणार्थ, यदि हम मजदूरी के संबंध में बातचीत करने के लिए या कीमत वृद्धि के लिए प्रतिपूर्ति के लिए सूचकांक का प्रयोग करना चाहते है तो केवल भारित सूचकांक का प्रयोग करना उचित होगा।

किन भारों (weights) का प्रयोग किया जाए? आधार वर्षों की मात्राओं का या वर्तमान वर्ष की मात्राओं का या किन्हीं अन्य भारों का प्रयोग करना है, इन प्रश्नो का उत्तर महत्वपूर्ण होता है। सूचकांक के निर्माण में शामिल की गई मदों के सापेक्ष महत्व का वास्तविक चित्रण करने वाले भार ही एक मात्र उत्तर सिद्ध होते हैं। सूचकांक की आवश्यकता किस प्रयोजन के लिए है यह एक महत्वपूर्ण कारक होता है।

17.5 सूचकांकों का वर्गीकरण (Classification of Index Numbers)

सूचकांक तीन प्रमुख प्रकार के होते हैं : कीमत सूचकांक, मात्रा सूचकांक और मूल्य सूचकांक।

कीमत सूचकांक (Price Indices): इस प्रकार के सूचकांको का प्रयोग अधिकतर किया जाता है। कीमत सूचकांक किसी वस्तु की कीमतों या वस्तुओं के एक समूह की कीमतों पर विचार करता है तथा एक अवधि से दूसरी अवधि के बीच हुए कीमतों में परिवर्तन के बीच तुलना करता है। इसके अतिरिक्त यह दो स्थानो पर कीमतों में भी तुलना करता है। उदाहरणार्थ, जीवन निर्वाह खर्च की व्याख्या करने के लिए उपभोक्ता वस्तुओं और सेवाओं के समग्र कीमत परिवर्तनों (overall price changes) की माप करने वाले सुपरिचित उपभोक्ता कीमत सूचकांक का प्रयोग किया जाता है।

मात्रा सूचकांक (Quantity Indices): इन सूचकांको के संबंध में विचार करने और तुलना करने के संबंध में जिन बातों पर जोर दिया जाता है वे हैं, कोई एक ही वस्तु या वस्तुओं का एक समूह। उदाहरणार्थ, यह समझने पर जोर दिया जा सकता है कि विभिन्न समय अवधियों के दौरान भारत में धान के उत्पादन की मात्रा में क्या परिवर्तन हुए है। इस प्रयोजन से एक एकल वस्तु–मात्रा सूचकांक (single commoditiy's quantity index) बनाना होगा। इसके विकल्प में भारत में खाद्यानों के उत्पादन में परिवर्तनों को समझने पर जोर दिया जा सकता है। इस स्थिति में मात्रा सूचकांक को बनाने के दौरान खाद्यान्न कही जाने वाली सभी वस्तुओं के संबंध में विचार करना होगा।

मूल्य सूचकांक (Value Indices): मूल्य सूचकांक वास्तव में कीमत और मात्रा परिवर्तनों के संयुक्त प्रभाव की तुलना करते हैं। अनेक स्थितियों में तुलना करने के कार्य के लिए कीमत सूचकांक या मात्रा सूचकांक पर्याप्त नहीं होते है। उदाहरणार्थ, किसी नगर या क्षेत्र के विशिष्ट समूह के व्यक्तियों के निर्वाह खर्च में तुलना करने के लिए एक सूचकांक की आवश्यकता हो सकती है। ऐसी स्थिति में समूह के एक विशिष्ट परिवार (typical family) के व्यय की तुलना करना अधिक उपयुक्त होता है। क्योंकि इस कार्य के लिए व्यय के बीच तुलना करना होता है। अतः इस स्थिति में मूल्य सूचकांक बनाने की आवश्यकता होती है। ये सूचकांक उत्पादन–निर्णयों में उपयोगी सिद्ध होते हैं क्योंकि ये मुद्रास्फीति के प्रभाव से बचाते हैं।

अतः सूत्र निम्नलिखित है :

मूल्य सूचकांक $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

बोध प्रश्न क

1) कारणों के साथे बताइए कि निम्नलिखित कथन के साथ आप **सहमत** या **असहमत** हैं।

   क) सूचकांक विशिष्ट औसत (specialised averages) होते हैं।

   ख) किसी आधार वर्ष का सूचकांक सदा शून्य होता है।

   ग) मूल्य सूचकांक कीमत या मात्रा में परिवर्तनों की माप करता है।

घ) मुद्रास्फीति के समय मात्रा सूचकांक अपने अनुरूप मूल्य सूचकांक की तुलना में वास्तविक उत्पादन की बेहतर माप सिद्ध होता है।

ड) समुचित सूचकांको के द्वारा सामान्य वृद्धि को वास्तविक आय के रूप में बदला जा सकता है।

च) सूचकांको को बनाते समय वस्तुओं के चयन के लिए प्रायिकता प्रतिचयन (probability sampling) सर्वाधिक उपयुक्त प्रणाली सिद्ध होता है।

छ) किसी आधार वर्ष के उस स्थिति को सामान्य अवधि कहा जा सकता है, जब कि वह आंकड़ो से संबंधित सर्वाधिक हाल की अवधि हो।

2) पत्रिकाओं और समाचारपत्रों में आपने अनेक सूचकांकों को देखा होगा ऐसे चारसूचकांको के नाम बताइए और संक्षेप में यह भी बताइए कि इनमें से प्रत्येक किस बात की ओर संकेत करता है।

3) सूचकांक को बनाते समय जो समस्याएं उठ खड़ी होती हैं उन्हें सूचीबद्ध कीजिए।

4) इनमे से प्रत्येक के एक उदाहरण देने का प्रयास कीजिए जब,

   क) कीमत सूचकांक,

   ख) मात्रा सूचकांक और

   ग) मूल्य सूचकांक समुचित सिद्ध नहीं होते हैं।

17.6 सूचकांकों के निर्माण की विधियां (Methods of Constructing Index Numbers)

ऊपर के परिच्छेद में विभिन्न प्रकार के सूचकांकों के संबंध में विचार किया गया है जो हैं कीमत सूचकांक, मात्रा सूचकांक, और मूल्य सूचकांक। नीचे कीमत और मात्रा सूचकांकों के निर्माण और उनकी सीमाओं पर जोर दिया जाएगा।

सांख्यिकी–विदों ने संयुक्त सूचकांकों (composite index numbers) के निर्माण के लिए विभिन्न प्रकार के सूत्र बनाये हैं। उन्हें दो व्यापक वर्गों में रखा गया है, जिन्हें नीचे दिया जा रहा है :

i) अभारित सूचकांक, और

ii) भारित सूचकांक

ऊपर वर्णित सूत्र के संबंध में और प्रत्येक वर्ग के सूचकांकों के निर्माण तथा इसके प्रयोग के संबंध में आगे के परिच्छेदो में विवेचन किया गया है। सूचकांको के निर्माण में जिन प्रतीकों का प्रयोग किया जाता है उनसे पहले आपको परिचित कराया जाएगा। ये निम्नलिखित हैः

किसी आधार वर्ष में किसी वस्तु की प्रति इकाई कीमत की ओर P_0 संकेत करता है। P_1 संकेत करता है वर्तमान अवधि (वर्तमान अवधि वह होती है जिसमें सूचकांक का परिकलन आधार अवधि के संदर्भ में किया जाता है) में उसी वस्तु की प्रति इकाई कीमत की ओर।

Q_0, Q_1 और V_0, V_1 के लिए इसी प्रकार की होती है।

कीमत सूचकांकों, मात्रा सूचकांको और मूल्य सूचकांकों के संकेत के लिए अंग्रेजी के P,Q और V बड़े अक्षरों (Capital letters) का प्रयोग किया जाता है।

इस प्रकार P_{01} आशय होत है आधार अवधि (P_0) से संबंधित अवधि (P_1) के लिए कीमत सूचकांक। मात्रा (Q_{01}) और मूल्य (V_{01}) सचूकांकों को इसी प्रकार के अर्थ प्रदान किए जाते हैं। इस संबंध में ध्यान देने की बात यह है कि सूचकांको को प्रतिशत में अभिव्यक्त किया जाता है।

17.6.1 अभारित सूचकांक (Unweighted Index Numbers)

इस प्रकार के सूचकांकों को सरल सूचकांक (simple index numbers) कहा जाता है। सूचकांको के निर्माण की इस विधि में, भार स्पष्ट रूप से नहीं दिए जाते। इन्हें दो वर्गों में बांटा जाता है :

1) **सरल समुच्चयी सूचकांक**
2) **सापेक्ष सूचकांको का सरल औसत**

सूचकांकों के निर्माण के संबंधि में नीचे दो शीर्षकों में विवेचन किया गया है :

1) **सरल समुच्चयी सूचकांक (Simple Aggregative Index):** सूचकांको के निर्माणकी यह सबसे अधिक सरल और सबसे कम संतोषजनक विधि है। कीमत सूचकांकों की स्थिति में इस विधि के द्वारा चालू वर्ष में प्रत्येक वस्तु की इकाई लागत के योग के आधार वर्ष में इसी वस्तु की इकाई लागत के योग से विभाजित कर दिया जाता है तथा भागफल (quotient) को 100 से गुणा कर दिया जाता है। प्रतीक के रूप में,

$$P_{01} = \left(\frac{\sum P_1}{\sum P_0}\right) \times 100$$

इसी प्रकार मात्रा सूचकांक को यों अभिव्यक्त किया जा सकता है :

$$Q_{01} = \left(\frac{\sum q_1}{\sum q_0}\right) \times 100$$

उदाहरण 1: कीमत सूचकांक और मात्रा सूचकांक के निर्माण के लिए वर्ष 1990 और वर्ष 2000 के लिए दिए प्रतिदर्शी आंकड़ों (sample data) के संबंध में विचार कीजिए।

सारणी 17.1 : सरल समुच्चयी विधि द्वारा सूचकांक का परिकलन

Item	**Year 1990**		**Year 2000**	
	कीमत **(Rs.)**	मात्रा	कीमत **(Rs.)**	मात्रा
Wheat	700	4 qts	950	3.5 qts
Clothing	200	30 mts	300	35 mts
Gas	150	4 cylinder	220	6 cylinders
Electricity	0.8	800 units	1.10	1,000 units
House Rent	400	1 dwelling	800	1 dwelling
	1450.80 $\sum P_0$	839 $\sum q_0$	2271.1 $\sum P_1$	1045.5 $\sum q_1$

आधारवर्ष 1990 के संदर्भ में वर्ष 2000 के लिए कीमत सूचकांक के लिए सरल समुच्चयी विधि ये हैं

सूचकांक

$$P_{01} = \left(\frac{\sum P_1}{\sum P_0}\right) \times 100 = \frac{2271.1}{1450.8} \times 100 = 156.54$$

इस प्रकार सूचकांक में विचाराधीन वस्तुओं की कीमतों में वर्ष 1990 की तुलना में वर्ष 2000 में 56.54 प्रतिशत की वृद्धि हुई है। इस विधि की निम्नलिखित दो सीमाएं है :

1) इकाई का आकार (unite size) सूचकांक को प्रभावित करता है। उदाहरणार्थ, उपर्युक्तउदाहरण में यदि गेहूं की कीमत प्रति कि0ग्रा0 के रूप में 1990 में 7 रू कोट की गई तथा 2000 में 9.5 रू कोट की गई तो सूचकांक बहुत भिन्न हो जाएगा।

2) विभिन्न वस्तुओं का सापेक्ष महत्व सूचकांक में प्रतिबिंबित नहीं होता। उदाहरणार्थ, उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि गेहूँ पर कुल 2,800 रू व्यय किया जाता है, जोकि व्यय की सबसे प्रमुख मद है। इस विधि में यह प्रतिबिंबित नहीं होता।

इसके अनुरूप (analogously) सरल समुच्चयी विधि के द्वारा मात्रा सूचकांक यो हैं:

$$Q_{01} = \left(\frac{\sum q_1}{\sum q_0}\right) \times 100$$

मात्रा सूचकांक के लिए उदाहरण 1 को देखिए

$$Q_{01} = \frac{1045.5}{839} \times 100 = 124.61$$

यहां आपको ध्यान देना चाहिए कि कीमत सूचकांक के सूत्र में 'P' के स्थान पर मात्रा सूचकांक को बनाते समय 'q' को रखा जाएगा। यह अभिव्यक्ति भिन्न विधियों के सूत्रों पर लागू होती है।

सीमाएं (Limitations): मात्राओं की इकाइयों के भिन्न होने के कारण उन्हे जोड़ा नहीं जा सकता तथा व्यय की तुलना करने के लिए मात्राएं समुचित चरों का प्रतिनिधित्व नहीं करती।

2) सापेक्ष सूचकांक का सरल औसत (Simple Average of Relative Index)

कीमत सूचकांक के निर्माण की इस विधि में, सबसे पहले सूचकांक में शामिल की गई विभिन्न मदों के लिए मूल्यानुपातों (price relatives) का अभिकलन करना होगा। उसके बाद प्रतीक के रूप में इनके औसत का अभिकलन करना होगा।

$$P_{01} = \frac{\sum\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)}{N} \text{ or } \frac{\underline{\textit{Sum of the Price Relatives}}}{\textit{No.of Items}}$$

उदाहरण – 1 में दी गई कीमतों पर विचार करके इसी आंकड़े का प्रयोग करते हुए मूल्यानुपातों के सरल औसत के रूप में कीमत सूचकांक का अभिकलन निम्नलिखित होगा।

उदाहरण 2 :

सारणी 17.2 : सापेक्ष के सरल औसत विधि द्वारा सूचकांक का परिकलन

Items	Units	वर्ष 1990 कीमतें (Rs.)	वर्ष 2000 कीमतें (Rs.)	सापेक्ष कीमतें या मूल्यानुपात (Rs.) $\frac{P_1}{P_0} \times 100$
Wheat	Qts	700	950	(950/700) × 100 = 135.7
Clothing	Mts	200	300	(300/200) × 100 = 150.7
Gas	Cylinder	150	220	(220/150)× 100 = 140.7
Electricity	Units	0.80	1.10	(1.10/0.8) × 100 = 137.5
Housing	dwelling	400	800	(800/400) × 100 = 200
	N = 5			$\sum\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) = 763.9$

$$P_{01} = \frac{\sum\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)}{N} = \frac{763.9}{5} = 152.78$$

इस प्रकार मूल्यानुपातों का सरल औसत का सूचकांक कीमत में 52.78 प्रतिशत की वृद्धि दिखाता है।

मात्रा सूचकांक को बनाने के लिए मात्रानुपातों (quantity relatives) को ज्ञात करना चाहिए और उनका औसत निकालना चाहिए। इस विधि में मात्रा सूचकांक की सूची है:

$$Q_{01} = \frac{\sum\left(\frac{q_1}{q_0} \times 100\right)}{N}$$

उदाहरण 1 में दिये गए आंकड़ों की सहायता से इसका अभिकलन आप स्वयं ही कर सकते है।

इस विधि की भी अपनी कुछ सीमाएं है। प्रथम, प्रत्येक मूल्यानुपात/मात्रानुपात को समान महत्व दिया जाता है जो यथार्थ मे नही होता। द्वितीय, समांतर माध्य अनुपातों और प्रतिशतों के लिए सही प्रकार का औसत नहीं होता।

बोध प्रश्न ख

1) निम्नलिखित आंकड़ो (कीमत प्रति कि0ग्रा0) से सरल समुच्चयी और सापेक्षों के औसत विधियों से

   i) कीमत सूचकांक का परिकलन कीजिए:

ii) इन दोनों विधियों की सीमाएं क्या है ?

वस्तुएँ	2015 में कीमत (Rs.)	2018 में कीमत (Rs.)
Apple	35	60
Mango	30	45
Watermelon	5	10

2) दिए हुए संमकों से सरल समुच्चयी सूचकांक ज्ञात कीजिए।

i) वर्ष 2016 के संदर्भ में 2017 के लिए

ii) वर्ष 2017 के संदर्भ में 2018 के लिए

वस्तुएँ	2016 (Rs.)	2017 (Rs.)	2018 (Rs.)
A (100 gm)	12	15	15.60
B (per piece)	3	3.60	3.30
C (per kg)	5	6	5.70
Aggregate	20	24.60	54.60

17.6.2 भारित सूचकांक (Weighted Index Numbers)

सूचकांक को बनाने के कार्य में पहली दो विधियों के अंतर्गत प्रत्येक मद को समान भार/महत्व दिया गया, जब कि भारित सूचकांक विधियों मे उस प्रत्येक मद को स्पष्ट रूप से दिया जाता है जिसे सूचकांक के निर्माण में शामिल किया जाता है। इस प्रकार से भार देने के चलते हम समयोपरांत केवल कीमतध्मात्रा में परिवर्तन की तुलना में अधिक सूचना के संबंध में विचार कर सकते हैं। इस संबंध में समस्या केवल यह होती है कि प्रतिदर्श में शामिल किए गए प्रत्येक मद को किस मात्रा में भार के संबंध में विचार किया जाए। इस विधि को दो और विधियों में बांटा जाता है।

1) **भारित समुच्चय सूचकांक और**

2) **सापेक्ष सूचकांक का भारित औसत**

नीचे इन दो विधियों के सम्बन्ध में विचार किया गया है।

1) भारित समुच्चय सूचकांक (Weighted aggregative index)

इस वर्ग के अंतर्गत तीन विशिष्ट विधियों का अध्ययन किया जाएगा, जिनका सामान्यतः व्यवसाय अनुसंधान में प्रयोग किया जाता है। वे हैं:

(क) लेस्पिर का सूचकांक, (ख) पाशे का सूचकांक, और (ग) फिशर का सूचकांक। इन तीन सूचकांकों की संकल्पनाओं को समझने के पश्चात् इन सूचकांको को बनाने के लिए हम एक दृष्टांत लेंगे।

क) **लेस्पिरे का सूचकांक (Laspeyre's Indexs)**: इस विधि के अंतर्गत प्रत्येक वस्तु को जो भार दिये जाते हैं वे होते हैं कीमत सूचकांको के लिए आधार वर्ष में उपयोग की गई मात्राएँ तथा मात्रा सूचकांक के लिए भार होता है आधारवर्ष में वस्तुओं की कीमतें। इस प्रकार लेस्पिरे के अनुसार

$$\text{कीमत सूचकांक } \left(P_{01}^{La}\right) = \left(\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0}\right) \times 100, \text{ और}$$

$$\text{मात्रा सूचकांक } (Q_{01}^{La}) = \left(\frac{\sum q_1 P_0}{\sum q_0 P_0}\right) \times 100$$

ध्यान देने की बात यह है कि **उपभोक्ता कीमत सूचकांक** (consumer price index) बनाने के लिए यह विधि सर्वाधिक प्रचलित है। अतः इसे समुच्चय व्यय विधि (aggregate expenditure method) के रूप में लिया जाता है, जो उपभोक्ता कीमत सूचकांक को बनाने की विधियों में से एक है।

क्योंकि प्रत्येक सूचकांक एक ही आधार वर्ष की कीमत और मात्रा पर निर्भर करता है। अतः अनुसंधानकर्ता एक अवधि के सूचकांक की तुलना सीधे ही किसी दूसरी अवधि के सूचकांक के साथ कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, मान लेते हैं कि 1991 को आधार वर्ष लेकर सीमेंट का कीमत सूचकांक 1995 में 115 है और 2001 में 143 है। फर्म यह निष्कर्ष निकालती है कि फर्म के कीमत स्तर में 1991 से 1995 के बीच 15 प्रतिशत की वृद्धि हो गई और 1991 से 2000 के बीच यह स्तर 43 प्रतिशत बढ़ गया।

ख) **पाशे का सूचकांक (Paasehe's Indexs)**: इस विधि के अंतर्गत चालू कीमत सूचकांक को बनाने में वर्ष में उपभोग की गई मात्राओं का भार के रूप में प्रयोग किया जाता है, जब कि मात्रा सूचकांक को बनाने में चालू वर्ष मे मदो की कीमतों को भार के रूप में प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार पाशे के अनुसार :

$$\text{Price Index } ({P_{01}}^{Pa}) = \left(\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1}\right) \times 100$$

$$\text{Quantity Index} = ({Q_{01}}^{Pa}) = \left(\frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_0 P_1}\right) \times 100$$

लेस्पिरे और पाशे के सूचकांको के बीच तुलना (Comparison of Laspeyre's and Paasehe's Indices): व्यवहारिक दृष्टि से सामान्यतः लेस्पिरे के सूचकांक को पाशे के सूचकांक से बेहतर माना जाता है। इसका कारण यह है कि जब तक आधार वर्ष निश्चित रहती है तब तक दिया गया भार अपरिवर्तित बना रहता है। अतः परिकलन करने और तुलना करने के कार्य आसान होते हैं। इसके विपरित पाशे के सूत्र में चालू वर्ष में परिवर्तन होने के साथ–साथ भार में परिवर्तन होता रहता है अतः नये/भिन्न भारों का प्रयोग करके प्रत्येक वर्ष के लिए कीमत सूचकांक का अभिकलन करना होता है।

लेस्पिरे के सूचकांक का एक दूसरा रोचक गुणधर्म यह है कि इसमें सूचकांकों के मान (value) का बहुत अधिक अनुमान लगाने की प्रवृत्ति होती है। कहा जाता है कि जब कीमतें बढ़ती हैं तब उपभोक्ता इन वस्तुओं (जो कीमत लोचदार होती है) का उपभोग कम कर देते हैं जिनकी कीमत सबसे अधिक हो गई है। इस प्रकार आधार वर्ष मात्राओं का प्रयोग अंश (numerator) के मान को बढ़ा देता है और इस प्रकार सूचकांक का मान बढ़ जाता है। यही बात उस समय भी होती है जब कीमतें गिर रही होती है। इसके विपरित पाशे के सूचकांक में कम अनुमान लगाने की प्रवृत्ति होती है। इसका कारण यह है कि

जब कीमतें बढ़ रही होती है। तब कम की गई वर्तमान मात्राओं का प्रयोग भार के रूप में किया जाता है, जिससे सूचकांक का मान घट जाता है। जब कीमतों में परिवर्तन बहुत तेजी से नहीं हुए हैं तब इन दो विधियों द्वारा बने सूचकांक मानों में बहुत अधिक अंतर नहीं होता।

ग) **फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index):** इर्विंग फिशर ने लेस्पिरे और पाशे के सूचकांकों की कमियों को दूर करने के उद्देश्य से इनके गुणोत्तर माध्य (geometric mean) का प्रयोग किया। इस प्रकार,

$$\textbf{फिशर कीमत सूचकांक } (P_{01}{}^{F}) = \sqrt{\left(\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0}\right)\left(\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1}\right)} \times 100$$

इसके अनुरूप,

फिशर मात्रा सूचकांक =

$$(Q^{F}{}_{01}) = \sqrt{\left(\frac{\sum q_1 P_0}{\sum q_0 P_0}\right)\left(\frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_0 P_1}\right)} \times 100$$

अतः फिशर आदर्श सूचकांक = $\sqrt{\text{लेस्पिरे सूचकांक} \times \text{पाशे सूचकांक}}$

फिशर सूचकांक श्रेष्ठ हैं क्योंकि यह लेस्पिरे और पाशे के सूचकांको के गुणोत्तर माध्य (geometric mean) का प्रयोग करता है। यह माध्य अनुपातों और प्रतिशतों के लिए श्रेष्ठ होता है। दूसरा कारण यह है कि इसमें बहुत अधिक या बहुत कम अनुमान लगाने की संभावना नहीं रहती। फिशर का सूचकांक कालोत्क्रमण परीक्षण (time reversal test) और उपादानोंत्क्रमण परीक्षण (factor reversal test) की आवश्यकताओं को पूरा करता है। अतः इस सूचकांक को आदर्श सूचकांक कहा जाता है। अब तक हमने भारित समुच्चय विधि के तीन भिन्न–भिन्न सूचकांकों के संबंध में विवेचन किया।

उदाहरण के लिए हम 2013 और 2018 के निम्नलिखित आंकड़ो का प्रेक्षण, करेंगे तथा (i) लेस्पिरे, (ii) पाशे और (iii) फिशर के सूचकांकों को बनाने के लिए इस सारणी में दिए गए आवश्यक अभिकलन को भी देखेंगे।

उदाहरण 3:

सारणी 17.3: भारित समुच्चय सूचकांक का परिकलन

वस्तुएँ	वर्ष 2013 (आधार वर्ष)		वर्ष 2018 (वर्तमान वर्ष)		P_0q_0	P_1q_0	P_0q_1	P_1q_1
	कीमतें (P_0)	मात्रा (q_0)	कीमतें (P_1)	मात्रा (q_1)				
A	800	6	950	8	4800	5700	6400	7600
B	600	3	800	4	1800	2400	2400	3200
C	400	5	425	4	2000	2125	1600	1700
D	250	2	300	2	500	600	500	600
					$\sum P_0q_0$ = 9100	$\sum P_1q_0$ = 10824	$\sum P_0q_1$ = 10900	$\sum P_1q_1$ = 13100

i) **लेस्पिरे कीमत सूचकांक** or $(P_{01}{}^{Pa}) = \left(\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1}\right) \times 100$

$$= \frac{10824}{9100} \times 100 = 118.94$$

यह दिखाता है कि 2013 की तुलना में 2018 में इस समूह (प्रतिदर्श वस्तुओं) की कीमतें 18.94 प्रतिशत बढ़ गई।

लेस्पिरे के सूत्र के अनुसार **मात्रा सूचकांक** का अभिकलन निम्न प्रकार से किया जाता है :

$$Q_{01} = \left(\frac{\sum q_1 P_0}{\sum q_0 P_0}\right) \times 100$$

q1, P0 एवं q0 P0 का जोड़ सारणी 17.3 से लिया जा सकता है जैसे $\sum P_0 q_1 = \sum q_1 P_0$, एवं $\sum P_0 q_0 = \sum q_0 P_0$

$$Q_{01}^{La} = \frac{10900}{9100} \times 100 = 119.78$$

यह दिखाता है कि 2013 की तुलना में 2018 में इस समूह के समुच्चय मात्रा उपभोग में 19.78 प्रतिशत की वृद्धि हो गई।

ii) **पाषे कीमत सूचकांक or** $(P_{01}{}^{Pa}) = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1} \times 100$

$$= \frac{13100}{10900} \times 100 = 120.18$$

इस प्रकार पाशे के सूचकांक के अनुसार कीमत सूचकांक अभिव्यक्त करता है। 2013 के मुकाबले 2018 में कीमत वृद्धि 21.18 प्रतिशत हो गई।

इसके अनुरूप **पाशे का मात्रा सूचकांक** यह है:

$$Q_{01}{}^{Pa} = \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_0 P_1} \times 100$$

सारणी 17.3 में $\sum q_1 P_1$ तथा $\sum q_0 P_1$ का मान $\sum P_1 q_1$ तथा $\sum P_1 q_0$ के बराबर है।

अतः,

$$Q_{01}{}^{Pa} = \frac{13100}{10824} \times 100 = 121.03$$

यह दिखाता है कि 2013 की तुलना में 2018 में इस समूह के लिए मात्रा उपभोग में 21.03 प्रतिशत की वृद्धि हो गई।

iii) **Fisher's Index or** $(\boldsymbol{P_{01}^F}) = \sqrt{\left(\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0}\right)\left(\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1}\right)} \times 100$

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\left(\frac{10824}{9100}\right)\left(\frac{13100}{10900}\right)} \times 100$$

$$= \sqrt{1.43} \times 100 = 119.55$$

इसलिए फिशर का सूचकांक मान तुलनात्मक दृष्टि से कम मूल्य निरूपरण या अधिक मूल्य के प्रभाव से मुक्त है, जैसा कि लेस्पिरे और पाशे के सूचकांको में होता है। परन्तु इसका निर्माण करना बहुत अधिक जटिल होता है।

Fisher's Quantity Index or $(Q_{01}^{F}) = \sqrt{\left(\frac{\sum q_1 P_0}{\sum q_0 P_0}\right)\left(\frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_0 P_1}\right)} \times 100$

सारणी 17.3 में दिए गए आंकड़ों का प्रयोग करके आप स्वयं इसका अभिकलन कर सकते हैं और इसकी व्याख्या कर सकते हैं।

उदाहरण 4: निम्न संमकों से वर्ष 2012 के लिए कीमत सूचकांक का परिकलन कीजिए।

1 लेस्पिरे विधि

2 पाशे विधि

3 फिशर विधि

Items	**कीमत** (2011)	**मात्रा** (2011)	**कीमत** (2018)	**मात्रा** (2018)
A	10	10	5	25
B	35	4	35	10
C	30	3	15	15
D	10	25	20	20
E	40	3	40	5

हलः

सारणी 17.4: सूचकांको का परिकलन

Items	**P_0**	**q_0**	**P_1**	**q_1**	**P_0q_0**	**P_0q_1**	**P_1q_0**	**P_1q_1**
A	10	10	5	25	100	250	50	125
B	35	4	35	10	140	350	140	350
C	30	3	15	15	90	450	45	225
D	10	25	20	20	250	200	100	80
E	40	3	40	5	120	200	120	200
					$\sum P0q0 = 700$	$\sum P0q1 = 1450$	$\sum P1q0 = 455$	$\sum P1q1 = 980$

1) लेस्पिरे विधिः $(P_{01}{}^{La}) = \left(\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0}\right) \times 100$

$= (455 / 700)100 = 65$

2) पाशे विधि$(P_{01}{}^{Pa}) = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1} \times 100$

$= (980 / 1450)100 = 67.58$

3) फिशर विधि $(P_{01}^{F}) = \sqrt{\left(\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0}\right)\left(\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1}\right)} \times 100$

$= \sqrt{0.43927 \times 100} = 66.27$

2) सापेक्ष सूचकांक का भारित औसत (Weighted Average of Relative Index)

इस विधि के अंतर्गत कीमत सापेक्षों के अभिकलन के संबंध में सूचकांक को बनाना सापेक्षों के सरल औसत विधि जैसा ही है, जैसा कि परिच्छेद 17.6.1 में विचार किया जा चुका है। परन्तु सापेक्षों के सरल औसत विधि की कमियों को दूर करने के लिए जिन भारों का प्रयोग किया जाता है वे हैं आधार वर्ष या वर्तमान वर्ष में उपभोग की जाने वाली प्रत्येक वस्तु के मूल्य।

इस विधि को परिवार बजट विधि (Family Budget method) भी कहा जाता है। जिसे उपभोक्ता कीमत सूचकांक को बनाने की विधियों मे से एक माना जाता है। प्रतीक के रूप में इसे यों स्पष्ट किया जा सकता है।

$$(\boldsymbol{P_{01}}) = \frac{\sum\left[\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right) P_0 q_0\right]}{\sum P_0 q_0}, \text{ in simple } \frac{\sum \text{pv}}{\sum v}$$

दृष्टांत के रूप मे हम सारणी 17.5 में दिए गए आंकड़ो के संबंध में विचार करेंगे जिसमें सापेक्षों के भारित औसत विधि के द्वारा सूचकांक के निर्माण के लिए आवश्यक अभिकलन है।

उदाहरण 5:

सारणी 17.5: सापेक्षों के भारित औसत विधि द्वारा सूचकांक का परिकलन

Items	वर्ष 2005 (आधार वर्ष)		वर्ष 2015 (वर्तमान वर्ष)		V	P	PV
	Prices P_0	Qty. q_0	Prices P_1	Qty. q_1			Prices P_0
A	7	25	12	21	175	171.43	30000.25
B	2	12	2.5	12	24	125.00	3000.00
C	3	4	5	3	12	166.67	2000.64
					∑V= 211		∑PV = 35000.29

तब कीमत सूचकांक =

$$(P_{01}) = \frac{\sum PV}{\sum V} = \frac{35000.29}{211} = 165.88$$

इसका अर्थ है कि इस विधि के अनुसार आधार वर्ष 2005 की तुलना में वर्ष 2015 में कीमतों में वृद्धि 65.88 प्रतिशत हुई। इस विधि में मात्रा सापेक्षों के सूचकांको को यों अभिव्यक्त किया जाता है :

$$(Q_{01}) = \frac{\sum\left[\left(\frac{q_1}{q_0}\times 100\right) q_0 P_0\right]}{\sum q_0 P_0} = \frac{\sum qV}{\sum V}$$

सारणी 17.5 में दिए गए आंकड़ों का प्रयोग करके आप स्वयं ही इसका अभिकलन और इसकी व्याख्या कर सकते हैं। ।

बोध प्रश्न ग

नीचे दिए गए आंकड़ों (कीमत प्रति कि0 ग्रा0 एवं उत्पादन में कोट क्विटलों में) से भारित समुच्चय विधि (लेस्पिरे, पाशे और फिशर की) और सापेक्षों के भारित औसत विधि से कीमत सूचकांक का अभिकलन कीजिए।

वस्तु	1990		2000	
	कीमत	उत्पादन	कीमत	उत्पादन
Wheat	8	700	12	900
Rice	7	900	16	1400
Sugar	12	300	19	500

17.7 सूचकांकों के परीक्षण

एक श्रेष्ठ सूचकांक को जिसके द्वारा एक अवधि से दूसरी अवधि में किसी तथ्य के बारे में परिवर्तन को मापा जाता है, कुछ परीक्षणों के आधार यथेष्ठ होना चाहिए। सूचकांक के तीन मुख्य परीक्षण होते है –

1) कालोत्क्रमण परीक्षण

2) उपादानोत्क्रमण परीक्षण

3) श्रंखलिक परीक्षण

हम इनमें से यहाँ पर पहले दो परीक्षणों के बारे में चर्चा करेंगे।

17.7.1 कालोत्क्रमण परीक्षण (The Time Reversal Test)

यदि हम सूचकांको के निर्माण को ध्यान से देखें तो हमें दो पहलु नजर आएगें। वे है समय तथा/अथवा मात्रा (समय अनुलग्न अथवा मात्रा) इसलिए, यदि इन्हें विपरीत कर दिया जाए जैसे कि किसी कीमत या/तथा मात्रा सूचकांक का आधार काल (0) और वर्तमान काल (1) एक हो तो प्राप्त परिणाम सूचकांक का व्युत्तक्रम होना चाहिए।

संकेतिक रूप में: $P_{0.1} \times P_{1.0} = 1$

जहाँ पर

$P_{0.1}$ = वर्तमान काल (P_1) का सूचकांक जिसका आधारकाल (P_0) है।

$P_{1.0}$ = आधारकाल (P_0) है। जिसका वर्तमान काल (P_1)

इस इकाई के परिछेद (भाग) 17.6.2 भारित सूचकांक में हमने सूचकांको के निर्माण के तीन विधियों की चर्चा की थी, उनमें से फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index) इस परीक्षण को सतुंष्ट करता है।

अतः इस विधि को आदर्श सूचकांक समझा जाता है।

फिशर आदर्श सूचकांक $P_{0.1} = \sqrt{\left(\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0}\right)\left(\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1}\right)}$

समय अनुलग्नों को विपरीत करने पर,

$$P_{1.0} = \sqrt{\left(\frac{\sum P_0 q_1}{\sum P_1 q_1}\right)\left(\frac{\sum P_0 q_0}{\sum P_1 q_0}\right)}$$

क्योंकि $P_{0.1} \times P_{1.0} = 1$, इसलिए यह परीक्षण सतुंष्ट हो जाता है। अतः

$$P_{0.1} \times P_{1.0} = \sqrt{\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1} \times \frac{\sum P_0 q_1}{\sum P_1 q_1} \times \frac{\sum P_0 q_0}{\sum P_1 q_0}}$$

17.7.2 उपादानोत्क्रयण परीक्षण

इरविंग फिशर एक और परीक्षण सुझाया जिसे उपादानोत्क्रयण परीक्षण कहते है। उनके अनुसार 'बिना असंगत परिणाम दिए जिस प्रकार हमारे सूत्र को दो समयावधियों (कालों) में परस्पर बदलाव की अनुमति प्रदान करनी चाहिए, उसी प्रकार असंगत परिणामों को दिए बिना कीमतों और मात्राओं के बीच बदलाव की अनुमति होनी चाहिए। इसका अर्थ है कि दो परिणामों को एक साथ गुणा करने पर सही अनुपात मिलना चाहिए। प्रायः उपयोग किए जाने वाले संकेतों की सहायता से 'मूल्य सूचकांक' का सूत्र इस प्रकार लिखा जाता है।

$$P_{0.1} \times q_{0.1} = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_0}$$

जहाँ,

$P_{0.1}$ = आधार काल की तुलना में वर्तमान काल में हुआ कीमत परिवर्तन

$q_{0.1}$ = आधार काल की तुलना में वर्तमान काल में हुआ मात्रा परिवर्तन

$\sum P_1 q_1$ = वर्तमान काल का कुल मूल्य

$\sum P_0 q_0$ = आधार काल का कुल मूल्य

इस परीक्षण को केवल फिशर का आदर्श सूचकांक ही सतुंष्ट करता है:

$$P_{0.1}^{F} = \sqrt{\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1}}$$

और यदि उत्पादनों (q) को विपरीत कर दिया जाए जैसे की,

$$q_{0.1} = \sqrt{\frac{\sum q_1 P_0}{\sum q_0 P_0} \times \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_0 P_1}}$$

अतः,

$$P_{0.1} \times q_{0.1} = \sqrt{\frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1} \times \frac{\sum q_1 P_0}{\sum q_0 P_0} \times \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_0 P_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_0 P_0}} = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_0} = P_{0.1} \times q_{0.1}$$

उदाहरण 6: हम निम्नलिखित आकड़ो को दर्शाते है जहाँ फिशर आदर्श सूचकांक कालोत्क्रमण एवं उत्पादनोंत्क्रमण परीक्षण को संतुष्ट करता है:

Commodity	Price		No. of Units		P_0q_0	P_1q_0	P_0q_1	P_1q_1
	2005(P_0)	2018(P_1)	2005(q_0)	2018(q_1)				
I	6	10	50	56	300	500	336	560
II	2	2	100	100	200	200	240	240
III	4	6	60	60	240	360	240	360
IV	10	12	30	30	300	360	240	288
V	8	12	40	40	320	480	288	432
Total					1360	1900	1344	1880

i) कालोत्क्रमण परीक्षण:

$$P_{0.1}^{F} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} \times \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1}} = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344}}$$

$$P_{1.0} = \sqrt{\frac{\sum P_0q_1}{\sum P_1q_1} \times \frac{\sum P_0q_0}{\sum P_1q_0}} = \sqrt{\frac{1344}{1880} \times \frac{1360}{1900}} = 1$$

$$P_{0.1} \times P_{1.0} = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1344}{1880} \times \frac{1360}{1900}} = 1$$

ii) उत्पादानोत्क्रमण परीक्षण:

$$\text{Price ratio: } P_{0.1} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} \times \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1}} = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344}}$$

$$Quantity\ ratio: q_{0.1} = \sqrt{\frac{\sum q_1P_0}{\sum q_0P_0} \times \frac{\sum q_1P_1}{\sum q_0P_1}} \times \sqrt{\frac{1344}{1360} \times \frac{1880}{1900}}$$

$$P_{0.1} \times q_{0.1} ratio \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1344}{1360} \times \frac{1880}{1900} = \frac{1880}{1360}}$$

$$New\ Value\ ratio\ P_{0.1} \times q_{0.1} = \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_0}\ is\ equal\ to\ \frac{1880}{1360}$$

17.8 उपभोक्ता कीमत सूचकांक (Consumer Price Index)

इस विधि को जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक भी कहते है। यह सूचकांक वस्तुओं और सेवाओं की कीमतों में होने वाले परिवर्तन को मापने में सहायता करता है जो व्यक्तियों

के एक सजातीय (homogeneous) समूह, जैसे निम्नतर मध्यम, मध्यम, ऊपरी मध्यम, औद्योगिक श्रमिकों, शहरी और ग्रामीण क्षेत्रों आदि के द्वारा उपयोग कि जाती है। यह सूचकांक मँहगाई भत्ता, मजदूरी या आय, मोल–भाव, मूल्य निर्धारण नीति, कर नीति, अन्य आर्थिक और कल्याणकारी नीतियों को निश्चित करने में सहायता करता है।

उपभोग समंक उस जनसंख्या वर्ग, जिसके लिए उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना की जानी है, परिवार निर्वाह सर्वेक्षण द्वारा प्राप्त किए जाते है। प्रायः उपभोग कि जाने वाली चयनित वस्तुओं की कीमतें एवं मात्रा (साधारणतः भार (W) में व्यक्त की जाती है) का संकलन उन विभिन्न फुटकर बजारों से, जिनसे में उपभोक्ता वस्तुएँ खरीदते हैं किया जाता है। जब एक वस्तु की कीमत बदलती है साधारण माद्य (औसत) का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि प्रत्येक पाँच वर्गों के लिए अलग–अलग सूचकांक की रचना वर्ग कीमतों का भारित माध्य लेकर की जाती है। उपयोग किए जाने वाले भार एक औसत परिवार द्वारा उपभोग की गई वस्तुओं के व्यय के अनुपात में होते हैं। समग्र सूचंकाक (उपभोक्ता कीमत सूचकांक), इन वर्ग सूचकांकों के भारित माध्य, का परिकलन करके प्राप्त किया जाता है। यहाँ पर भी उपयोग किए जाने वाले भार विभिन्न वर्गों में किए गए व्यय के अनुपात में होते हैं। (जैसे खाद्य सामग्री पर 30 प्रतिशत आदि)।

जैसा कि लास्पियर विधि में समझाया गया है एवं लास्पियर सूत्र का उपयोग करते हुएः

उपभोक्त कीमत सूचकांक (CPI:) = $\dfrac{\Sigma W\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right)}{\Sigma W}$

जहाँ, W = $\dfrac{P_0 q_0}{\Sigma P_1 q_0}$, वर्ग सूचकांक का भार है।

उदाहरण 7: आइए देखते है कि किस प्रकार खाद्य सामग्री सूचकांक की रचना, निम्नलिखित ऑकड़े जो वर्तमान कीमत, आधार कीमत एवं सात वस्तुओं के भार से संबधित है, से की जाती है।

हलः

Construction of an Index for food

Items	Price		$P\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right)$	Weights (w)	Pw
	P_1	P_0			
Wheat	50	40	125.0	30	3750.0
Pulses	45	30	150.0	20	3000.0
Rice	60	40	150.0	10	1500.0
Sugar	40	50	200.0	5	1000.0
Oil	75	60	125.0	15	1875.0
Potato	60	50	120.0	15	1800.0
Meat	200	150	133.3	5	666.5
Total				100	13591.5

CPI (Food) = $\dfrac{\Sigma W\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right)}{\Sigma W} = \dfrac{13591.5}{100} = 135.92$

बोध प्रश्न घ

निम्नलिखित दिए गए ऑकड़ो से उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना कीजिए

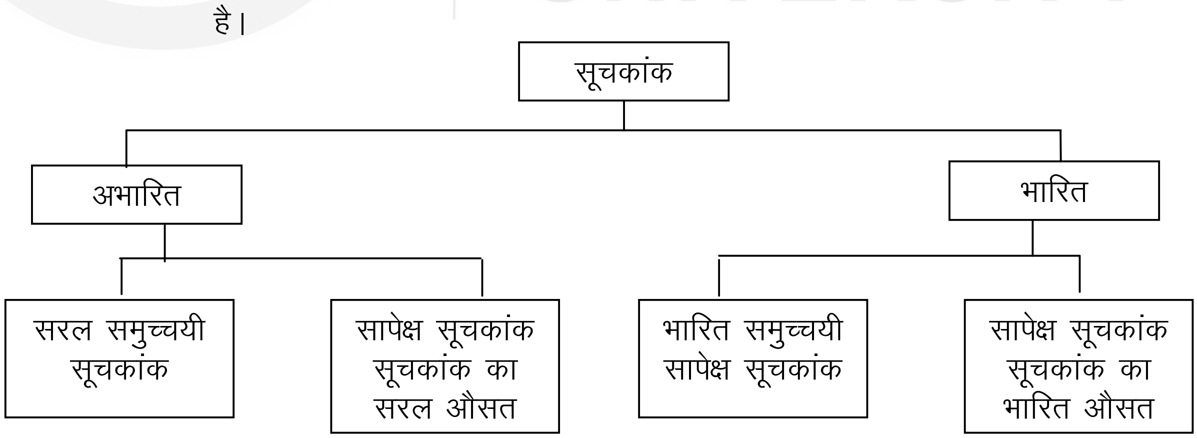
Item	:	A	B	C	D	E
Price of Base Year (Rs.)	:	85	15	45	55	17
Price of Current Year (Rs.)	:	115	20	61	100	23
Weights	:	35	15	10	25	15

17.9 सारांश (Let Us Sum Up)

सूचकांक एक विशेष प्रकार का औसत है जो परस्पर संबंधित चरों के एक समूह की मात्रा के स्तर की तुलना में सहायता करता है। यह कार्य वह समय, भौगोलिक स्थिति या उत्पादन, आय, रोजगार जैसी अन्य विशेषताओं के संबंध में करता है। अतुलनीय इकाइयों से संबंधित दो या अधिक साल श्रेणी चरों को यह संयुक्त करता है।

सूचकांकों का प्रयोग अनेक प्रकार से किया जा सकता है, जैसे कि व्यवसाय प्रवृत्तियों का अध्ययन, उपयुक्त नीतियों को बनाने में मार्गदर्शन, दृव्य की क्रयशक्ति की माप, नकद मजदूरी का वास्तविक मजदूरी में रूपांतरण, आदि/विभिन्न प्रकार के सूचकांकों को बनाने के कार्य में अनुसंधानकर्ताओं को अनेक प्रकार की समस्याओं का सामना करना पड़ सकता है। ये समस्याएं हैः आधार अवधि का चयन, आंकड़ों का संग्रहण, वस्तुओं का चयन, औसतों और भारों का चुनाव तथा समुचित सूचकांक का चयन/सूचकांकों का निर्माण करने के पहले इन विषयों के संबंध में स्पष्टीकरण करना आवश्यक होता है। सूचकांकों के तीन प्रमुख प्रकार होते है। ये हैः (i) कीमत सूचकांक, (ii) मात्रा सूचकांक और (iii) मूल्य सूचकांक। इन तीनों में से आंकड़ो के विश्लेषण के लिए कीमत सूचकांकों का सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है।

सूचकांकों को बनाने की दो विधियां है, जिन्हें नीचे दिए गए चार्ट में स्पष्ट किया गया है।



समुचित विधि का चयन सूचकांकों के निर्माण के प्रयोजन पर निर्भर करता है।

आपको यह दर्शाया गया है कि कीमत तथा मात्रा सूचकांक के परिकलन में लास्पियर, पाशें तथा फिशर सूत्रों का उपयोग किया प्रकार किया जाता है। केवल फिशर आदर्श सूचकांक कालोत्क्रमण एवं उपादानोत्क्रमण परीक्षण को संतुष्ट करता है। आपको यह भी ज्ञात हुआ है निर्वाह व्यय में कि उपभोक्ता कीमत या निर्वाह व्यय में जीवन परिवर्तनों को कैसे मापा जा सकता है।

17.10 शब्दावली (Key Words)

सूचकांक (Index Number): अलग–अलग समयों से संबंधित परस्पर संबंधित चरों के समूह की मात्रा में अंतरों की माप करने के लिए अनुपात।

निर्वाह खर्च सूचकांक (Cost of Living Index): समयोपरांत उपभोक्ता जिन विशिष्ट प्रकार की वस्तुओं और सेवाओं पर खर्च करता है, उनकी कीमतों में औसत परिवर्तन को यह संख्या चित्रित करती है। लोकप्रिय शब्दों में इसे "उपभोक्ता कीमत सूचकांक'' भी कहा जाता है।

आधार अवधि (Base Period): वह संदर्भ अवधि जिसके साथ तुलना की जाती है।

कीमत सूचकांक (Price Index): समयोपरांत कीमत चरों में कितना परिवर्तन होता है, उसकी माप मात्रा

सूचकांक (Quantity Index): एक अवधि से दूसरी अवधि के बीच किसी चर में परिवर्तनों की मात्रा के अध्ययन की माप।

मूल्य (मान) सूचकांक (Value Index): समयोपरांत मुद्रा के कुल मूल्य में परविर्तनों की माप।

मूल्यानुपात /सापेक्ष कीमत (Price Relatives) : एक सूचकांक की रचना में किसी वस्तु का मूल्यानुपात वर्तमान वर्ष की तथा आधार वर्ष की कीमतों का अनुपात होता है।

17.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

क) 1) क) सहमत ख) असहमत ग) असहमत घ) सहमत

च) असहमत छ) असहमत

ख) 1) i) सरल समुच्चयी P_{01} = 164.3

ii) सापेक्ष सूचकांक का सरल औसत $P_{01} = 173.8$

2) i) सरल समुच्चयी सूचकांक वर्ष 2017 के लिए वर्ष 2016 पर = 123

ii) सरल समुच्चयी सूचकांक वर्ष 2018 के लिए वर्ष 2017 पर = 273

ग) भारित समुच्चय सूचकांक : P_{01}^{La} = 183.9 P_{01}^{Pa} = 18.4;P_{01}^{F} = 181.9
सापेक्ष सूचकांक का भारित औसत $(P_{01}) = 183.9$

घ) CPI = 146.65

17.12 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

1) सूचकांक से आप क्या समझते हैं? आंकड़ों के विश्लेषण में सूचकांकों के उपयोगों को स्पष्ट कीजिए।

2) किसी सूचकांक को बनाने के संदर्भ में जो अनेक समस्याएं उत्पन्न होती है, उनका वर्णन कीजिए।

3) सूचकांकों को बनाने की विभिन्न विधियों और उनकी सीमाओं को संक्षेप में स्पष्ट कीजिए।

4) फिशर के सूचकांक को आप आदर्श सूचकांक क्यों समझते हैं?

5) निम्नलिखित के संबंध में संक्षिप्त नोट लिखिये।

   क) कीमत सूचकांक

   ख) मात्रा सूचकांक

   ग) सूचकांको का समबंधन

   घ) सूचकांको की अपस्फीति

6) भोजषज बनाने वाले एक प्लांट ने दवा बनाने के कार्य में विभिन्न चर प्रकार की सामग्री का प्रयोग किया। निम्नलिखित आंकड़े इन सामग्रियों के लिए वर्ष 2000 और 2004 के लिए अंतिम इन्वेंट्री स्तरों (टनों में) और कीमतों (प्रति कि0ग्रा0) को दिखाते हैं।

सामग्री	2000		2004	
	माल	कीमत (Rs.)	माल	कीमत (Rs.)
A	96	45	108	41
B	495	26	523	32
C	1425	5	1608	8
D	208	12	196	9

उस भारित सूचकांकों की विधि का प्रयोग करके कीमत सूचकांकों और मात्रा सूचकांको को ज्ञात कीजिए और परिणामों की व्याख्या कीजिए।

7) सांख्यिकी विभाग ने निम्नलिखित आंकड़ों को एकत्र किया है, जिनमें वर्ष 1990, 2000 और 2004 के लिए काटी गई फसलों की कीमतों और उनकी मात्रा (कीमत क्विंटलों. में और उत्पादन टनों में) का विवरण दिया गया है।

Item	1990		2000		2004	
	कीमत	उत्पादन	कीमत	उत्पादन	कीमत	उत्पादन
Paddy	200	1050	500	1300	600	1450
Wheat	250	940	550	1220	700	1450
Groundnut	350	400	800	500	1000	480

वर्ष 1990 को आधार अवधि लेकर वर्ष 2000 और 2004 में लेस्पिरों के सूचकांक, पाशे के सूचकांक और फिशर के सूचकांक के कीमत और मात्रा सूचकांकों को बनाइए/परिणामों के संबंध में अपना मत प्रकट कीजिए।

8) प्रश्न 7 में दिए गए आंकड़ों से निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।

   i) वर्ष 1990 और 2000 को आधार मानकर 2004 के लिए सापेक्ष कीमत सूचकांक काभारित औसत।

ii) 2000 को आधार मानकर 2004 के लिए सापेक्ष मात्रा सूचकांक का भारित औसत।

iii) कीमत सूचकांकों के संबंध में अपना मत प्रकट कीजिए।

9) नीचे 2010–2017 की अवधि में एक इंजीनियर की वार्षिक आय और कीमतों के सामान्य सूचकांक दिए गए हैं। इंजीनियर की वास्तविक आय में परिवर्तन को दिखाने के लिए सूचकांक बनाइए।

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
आय (in '000 Rs.)	255	265	286	312	336	380	405	420
कीमत सूचकांक	100	108	116	153	140	192	248	235

10) एक आद्योगिक क्षेत्र में श्रामिक वर्ग परिवारों के बजट के सर्वेक्षण ने निम्नलिखित जानकारी दी है।

Expression %	:	Food 30%	Rent 15%	Clothing 20%	Fuel 10%	Others 25%
2015 में कीमत (Rs.)	:	100	20	70	20	40
2016 में कीमत (Rs.)	:	90	20	60	15	55

2015 की तुलना में 2016 में जीवन निर्वाह व्यय में क्या अंतर आएगा ?

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायतामिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

17.13 संदर्भ पुस्तकें (Further Reading)

A number of good text books are available for the topics dealt with in this unit.

The following books may be used for more indepth study.

Hooda, R.P, 2001. Statistics for Business and Economics, Macmillan India Ltd.

Richard I. Levin and David S. Rubin, 1996, Statistics for Management, Prentice Hall of India Pvt. Ltd.

Gupta, S.P., Statistical Methods, 2000, Sultan Chand and Sons.

Gupta, C.B. and Vijay Gupta, 2001. An Introduction to Statistical Methods, Vikas Publishing House Pvt. Ltd., New Delhi.

इकाई 18 काल–श्रेणी विश्लेषण (Times Series Analysis)

इकाई की रूपरेखा

18.0 उद्देश्य

- काल–श्रेणी अवधारणा को परिभाषित करना
- अल्पकालीन पुर्वानुमान में काल श्रेणी कि भूमिका को बढ़ावा देना
- कालश्रेणी के संघटन कि व्याख्या एवं
- विभिन्न विधियों द्वारा प्रवृत्तियों मूल्यों का अनुमान

18.1 परिचय

पिछले अध्याय में आपने, शोध कार्य के लिए एकत्रित समंकों का सांख्यिकीय विवेचन का अध्ययन किया। प्रत्येक घटना में समंकों की प्रकृति परिवर्तनशील होती है। आप, प्रगणकों (Respodents) के समूहों द्वारा एकत्रित समंकों के उद्देश्य व समूह के एक या एक से अधिक प्राचलों का अध्ययन कर चुके हैं जैसे– निवेश, लाभ, उपयोग आदि । किन्तु एक देश, राज्य, संस्था या व्यापारिक इकाई आदि का उद्देश्य कुछ तत्वों के व्यवहार या अपनति में परिवर्तन का अध्ययन करना होता है जैसे वस्तु की कीमत, वस्तु का निर्यात, निवेश, विक्रय, लाभ आदि, जैसा कि यह परिवर्तन एक समय अवधि में दृष्टिगोचर होता है, अतः इनके बारे में सम्पूर्ण जानकारी हेतु लम्बे समय अवधि के सूचनाएं एकत्रित की जाती हैं। इस प्रकार समंकों के समूहों को एकत्रित कर, समय के आधार पर समयावधि पर निर्भर करना ही ''कालश्रेणी'' कहलाता है। समय का माप दशक. एक वर्ष, एक महीना या एक सप्ताह आदि हो सकता है। जैसे फर्म के

उत्तरोत्तर वर्षो में विक्रय, सिमेन्ट फेक्ट्री का मासिक उत्पादन, बाम्बे स्टाक मार्केट में प्रतिदिन होने वाली कीमतें, मरीज का प्रतिघंटा तापमान आदि सही अर्थो में काल श्रेणी के उदाहरण है।

प्रायः अध्ययन में चुने गये संख्यात्मक समंकों वाले चरों (variables) को y_1, y_2, y_3---------- y_n एवं उससे संबंधित समय इकाई को t_1, t_2,t_3-----------t_n द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। ''y'' चर परिवर्तनशील हो सकता है, जैसे कि हम आगे देखेगें, इसके मूल्य में उच्चावचन होते हैं। यह परिवर्तन इस चर के व्यवहार को दर्शाता है।

प्रारम्भ में हम विचारते हैं कि यह परिवर्तन समय के कारण होता है किन्तु यह सत्य नहीं है, चूंकि ''y'' चर में परिवर्तन के लिए ''t'' समय कारक या प्रभाव नहीं होता है। इस तथ्य को समझने के लिए विभिन्न कारकों का विश्लेषण आवश्यक है जो इस चर को एक निश्चित समयावधि में प्रभावित करते हैं। अतः समय केवल समंकों के विश्लेषण हेतु प्रयुक्त होता है।

पूर्वानुमान निर्णय लेने की क्रिया में मददगार होते हैं। किसी विशेष घटना के भूतकाल के आचरण के बारे में जानकारी होने पर ही भावी अनुमान लगा सकते है। भूतकाल की जानकारी हेतु, शोधकर्ता को न केवल भूतकाल के समंकों की आवश्यकता होती है बल्कि इनका पूरा विश्लेषण भी आवश्यक है। इस प्रकार, इस अध्याय में हम काल–श्रेणी में उच्चावचन, तथा पूर्वानुमान हेतु प्रवृत्ति के मापों की विवेचना करेंगे।

18.2 काल–श्रेणी विश्लेषण की परिभाषा एवं उपयोगिता

उपरोक्त विवेचन के आधार पर कुछ सांख्यिकी विद्वानों द्वारा दी गई परिभाषाओं को समझ सकते है। जो इस प्रकार है :

एक काल श्रेणी ऐसे सांख्यिकीय समंकों का समूह है, जिन्हें कालक्रमानुसार संग्रहित, अभिलेखित किया जाता है।''

''समय के किसी माप के आधार पर प्रस्तुत समंकों के व्यवस्थित क्रम को काल–श्रेणी कहते हैं।''

निम्न कारणों में काल श्रेणी विश्लेषण न केवल शोधकर्ता के लिए बल्कि अर्थशास्त्री, व्यापारी एवं वैज्ञानिकों के लिए भी अति–महत्वपूर्ण है;

i) अध्ययन में प्रयुक्त चर का भूतकाल में आचरण को समझने में सहायक

ii) भूतकाल में हुए परिवर्तन के आधार पर, भावी पुर्वानुमान लगाने में सहायक

iii) भावी निति–निर्धारण में सहायक

iv) वर्तमान निति–निर्धारण में सहायक

v) विभिन्न पारस्परिक श्रेणियों में तुलना करना एवं इसमें से सार्थक निष्कर्ष निकालना।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि कालश्रेणी विश्लेषण की आवश्यकता निम्न कारणों से है

- अध्ययन में प्रयुक्त चर के आचरण के बारे में समझना।

- हम जानना चाहते हैं कि अध्ययन में प्रयुक्त चर में अनुमानित परिभाषात्मक परिवर्तन ।
- विभिन्न कारकों के परिमाणात्मक प्रभाव का अनुमान।

संक्षेप में काल श्रेणी विश्लेषण न केवल शोधकर्ता, व्यापारी, शोध संस्था के लिए उपयोगी है । बल्कि सरकार के लिए भावी वृद्धि हेतु व्यूह–रचना बनाने में भी अति–महत्वपूर्ण है।

18.3 काल श्रेणी के संघटक

अगर आपको यह मालूम है कि 1940 में प्रतिकिलो सन–फलावर तेल की कीमत 50रू थी तथा 1980 में 80 रू तथा 2004 में 70 रू हो गई, अब आपसे यह पूछा जाये कि क्या भविष्य में इसकी कीमत 5रू या 30रू हो सकती है? निश्चित रूप में आपका उत्तर ''नहीं'' होगा।

तथा फिर प्रश्न किया जाए कि इसकी कीमत 60 रू हो सकती है? निश्चित रूप आपका उत्तर ''हां'' होगा। आपने क्या कभी विचार किया कि आपने उपरोक्त दोनो प्रश्नो का उत्तर कैसे दिया? "संभवतः नही'' इन उत्तरो के विश्लेषण से हम निम्न निरक्षणो पर पहुंचते है। चर को प्रभावित करने वाले कई कारक है जो धीरे–धीरे व स्थाई रूप से प्रभावित करते है। इसी कारण प्रथम प्रश्न का उत्तर तत्काल "नही'' दिया गया। चर को बहुत से कारक अस्थाई रूप से प्रभावित करते है। इसी कारण दूसरे प्रश्न का उत्तर तत्काल ''हाँ'' दिया गया।

वे कारक जो चर को धीरे–धीरे व स्थाई रूप से प्रभावित करते है उसे ''सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति'' (Long -Term Causes) कहते है। उदाहरणार्थ – पूंजी–संचय के बढने की दर, प्राधोगिकी नव–प्रर्वतन, उत्पादकता में परिवर्तन, व्यवसायिक संगठन में सुधार आदि। दीर्घकाल में किसी काल श्रेणी में बढने या घटने की सामान्य मूलभूत प्रवृत्ति को ही ''सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति" कहते है। यह प्रवृत्ति दशार्ता है कि अध्ययन के अन्तर्गत चुनी गई काल श्रेणी समय के साथ कैसा व्यवहार करती है।

वे कारक जो चर को अस्थाई रूप से या समय विशेष के लिए प्रभावित करते है उसे अल्पकालिन उच्चावचन (short –term causes) कहते है। अल्पकालिन उच्चावचनो को दो भागो में बॉट सकते है (*a*) नियमित (*b*) अनियमित नियमित उच्चावचनो को पुनः दो भागो में बांटा जा सकता है – (*a*) चक्रिय एवं (*b*) "मौसमी या आर्तव''। चक्रिय उच्चावचनो को व्यापार चक्र उच्चावचन भी कहते है। एव व्यापार चक्र मे चार चरण होते है– समृद्धि, प्रतिसार, अवसाद एवं पुनरूत्थान। समृद्धि के बाद पुनरुत्थान तथा पुनः समृद्धि का क्रम चलता रहता है किन्तु प्रत्येक चरण में अवधि व तीव्रता में अन्तर होता है। ऐसे परिवर्तन जो जलवायु, मौसम, स्थानीय रीति–रिवाज विशेष उत्सव आदि कारणो से उत्पन्न होते हैं उन्हें मौसमी विचरण कहते है, यह विचरण सभी प्रकार के व्यवसायिक क्षेत्र के लिए विशेष महत्वपूर्ण भूमिका निभाते है। जैसे– कृषिगत उत्पादन एवं बाजार क्रियाएं प्रतिवर्ष ऋतुनिष्ट कारणों से प्रत्यक्ष रूप से प्रभावित होती है।

यहाँ यह कहना महत्वपूर्ण होगा कि मौसमी विचरण विश्लेषण तभी संभव होगा जब ऋतुनिष्ट समंक उपलब्ध हो। इस तथ्य को पहले ही परख लेना चाहिए। मौसमी विचरण के विश्लेषण हेतु बहुत सी विधियाँ हैं। इनमें से "चल माध्य अनुपात" विधि सर्वाधिक प्रयोग में लाई जाती है। यदि संग्रहित संमक केवल वार्षिक मूल्यों का

प्रतिनिधित्व करते है तो उनसे मौसमी विचरण ज्ञात करना संभव नहीं है। उपयुक्त नियमित उच्चावचनो के अतिरिक्त कभी कभी काल श्रेणी में अनियमित (irregular) एवं दैव उच्चावचन (random variations) भी दृष्टिगोचर होते है। ऐसे दैव उच्चावचन आकस्मिक कारणों से उत्पन्न होते है जैसे– युद्ध, हड़ताल, भूकम्प बाढ़ आदि। इन कारणों से इन उच्चावचनों में तीव्र गति में गिरावट या समृद्धि आती है।

उपरोक्त अध्ययन से काल श्रेणी के संघटनो के विश्लेषण का मार्ग प्रशस्त होता है। काल श्रेणी विश्लेषण के अनुसार ये संघटक निम्न है –

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति (Long-Term Causes) : प्रवृत्ति (T)

अल्पकालीन विचरण (Short-term causes) :

नियमित (Regular) : चक्रिय उच्चावचन (cyclical) (C)

: आर्तव विचरण (Seasonal) (S)

अनियमित या दैव उच्चावचन (Irregular or Random): अनियमित (erratic) (I)

18.4 काल श्रेणी का विश्लेषण या विघटन (Decomposition of Time Series)

काल श्रेणी का विश्लेषण या विघटन एक ही घटना है। मूल समंक या अवलोकित समंक (0) अल्प कालिन एवं दीर्घकालिन प्रवृत्तियो के परिणाम है, मुख्यतः

i) दीर्घकालीन प्रवृत्ति (Trend) = T

ii) चक्रिय (Cyclical) = C

iii) आर्तव (Seasonal) = S

iv) अनियमित (Irregular) =I

काल श्रेणी के इन संघटक अंगो का मूल्य ज्ञात करना, काल श्रेणी का विश्लेषण या विघटन कहलाता है। काल श्रेणी का विश्लेषण योज्य या (or) गुणात्मक मॉडल (प्रतिरूप) पर आधारित है। काल श्रेणी विश्लेषण के लिए दोनो में से एक मॉडल का चयन चारो संघटक अंगो की प्रकृति एवं संबंधो पर निर्भर करती है।

योज्य प्रतिरूप (Additive Model)

यह मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि चारो संघटक अंग आपस में स्वतंत्र है। इस मान्यता के अन्तर्गत किसी एक संघटक की उपस्थिति एवं गति का परिमाण दूसरे संघटक अंगो से प्रभावित नहीं होता है। इस प्रतिरूप में चारो संघटक–अंगों के मूल्य मूल इकाई के माप में व्यक्त किये जाते है। इस प्रकार, मूल या अवलोकित समंक " Y" चारो संघटक अंगों के मूल्यो के योग के बराबर होता है।

$$Y = T + S + C + I$$

यहां T, S, C, एवं I क्रमशः दीर्घकालीन, चक्रिय, आर्तव एवं अनियमित प्रवृत्तियां है।

गुणात्मक प्रतिरूप (Multiplicative Model): यह मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि चारो संघटक अंग आपस में एक दूसरे पर आश्रित है। अतः मूल समंक या अवलोकित समंक इन सबका गुणफल है

$$Y = T \times S \times C \times I$$

इस प्रतिरूप में प्रवृत्ति मूल्यो के अलावा सभी मूल्य संघटक अंगो के मूल्य प्रतिशत में व्यक्त किये जाते है।

व्यवसायिक अनुसंधान के अन्तर्गत, काल श्रेणी विश्लेषण में गुणात्मक प्रतिरूप अधिक उपर्युक्त है एवं इसका उपयोग भी अधिक होता है। चूंकि, व्यवसाय में आंकड़े एक दूसरे से संबंधित होते है एवं काल श्रेणी के समंक कई कारको पर निर्भर होते जो आपस में एक दूसरे पर निर्भर होते है।

अब हम गुणात्मक प्रतिरूप के आधार पर काल श्रेणी के निर्माण को उदाहरण द्वारा स्पष्ट करते है।

सारणी 18.1 में दीर्घकालिन आर्तव चक्रिय एवं अनियमित उच्चावचन काल्पनिक श्रेणी को प्रदर्शित करते है

सारणी 18.1: काल्पनिक काल श्रेणी एवं उसके घटक (तिमाही)

Components					
Year	**Quarter**	**Series (O)**	**Trend (T)**	**Seasonal (100 S)**	**Cyclicalerratic Irregular (100 CI)**
1	1	79	80	120	82
	2	58	85	80	85
	3	84	90	92	102
	4	107	95	108	105
2	1	130	100	120	108
	2	93	105	80	132
	3	121	110	92	120
	4	161	115	108	130
3	1	216	120	120	150
	2	132	125	80	132
	3	150	130	93	125
	4	163	135	108	112
4	1	176	140	120	105
	2	112	145	80	97
	3	128	150	93	93
	4	142	155	108	85

गुणात्मक प्रतिरूप के अनुसार

$$Y = T \times X \times C \times I$$

अतः 79 (1 वर्ष एवं 1 तिमाही) = $80 \times \frac{120}{100} \times \frac{82}{100}$

130 (2 वर्ष एवं 1 तिमाही) = $100 \times \frac{120}{100} \times \frac{108}{100}$

इस प्रकार प्रत्येक तिमाही (Quarter) आंकड़े (Y) T, S एंव CI का गुणनफल है। यह निर्मित संघटन वास्तविक तथा कालश्रेणी की तरह है तथा कालश्रेणी विश्लेषण मे इस प्रतिरूप के उपयोग को बढावा दिया गया है।

18.5 प्रारम्भिक समायोजन (Preliminary Adjustment)

काल श्रेणी समंको के विश्लेषण से पूर्व कच्चे संमको (Raw data) में प्रारम्भिक समायोजन आवश्यक है, जो कि निम्न हैः

1) **तिथि सम्बन्धी समायोजन (Calendar Variations):** जैसा कि हम जानते है कि वर्ष के सभी महीनों में दिनो की संख्या समान नही होती है। उदाहरण के लिए फरवरी माह में कुल उत्पादन अन्य माह की तुलना में कम हो सकता है चूंकि इस महीने में दिनो की संख्या अन्य माह से कम होती है तथा अवकाश के कारण भी काल श्रेणी में उच्चावचन आ सकते है। इस कारण तिथि सम्बन्धी विचरणो में समायोजन आवश्यक है।

2) **मूल्य परिवर्तन (Price Changes):** अर्थशास्त्र में एक स्वाभाविक क्रिया है, कीमतों में परिवर्तन। अतः कीमतों का सूचकांक (Indices) बनाते समय मौद्रिक मूल्यों का वास्तविक मूल्यों में परिवर्तन आवश्यक है। इस प्रक्रिया की इकाई 17 (सूचकांक) में व्याख्या की गई है।

3) **जनसंख्या परिवर्तन (Population Changes):** जनसंख्या में लगातार वृद्धि होती है, अतः इसमें जनसंख्या संबंधी समायोजन कर लेने चाहिए। उदाहरण के लिए मूल समंको को कुल जनसंख्या से भाग देकर प्रतिव्यक्ति मूल्य ज्ञात कर लिए जाते है।

बोध प्रश्न क

1) कारणों के साथ बताइए कि निम्नलिखित कथन के साथ आप **सहमत** या **असहमत** हैं।

   a) अध्ययन के अन्तर्गत चरों में उच्चावचन समय के कारण लेते है।

   b) काल श्रेणी विश्लेषण में अध्ययनरत चरो को "y" से प्रदर्शित करते है।

   c) "प्रवृत्ति" मूल्य कालश्रेणी के मुख्य संघटक है।

   d) काल श्रेणी का विश्लेषण वर्तमान की सम्पूर्णता जानने में मदद करता है।

   e) जलवायु स्थितियाँ, रीति–रिवाज आदतें आदि कारण चक्रिय उच्चावचन के लिए उत्तरदायी है।

   f) कालश्रेणी विश्लेषण अध्ययन चर में अपेक्षित परिमाण में परिवर्तन जानने हेतु किया जाता है।

2) हम काल श्रेणी का विश्लेषण क्यों करते हैं ?

3) कालश्रेणी के संघटकों को बताइये।

18.6 प्रवृत्तियों को मापने कि विधियां (Methods of Measurementof Trend)

दीर्घकालीन उच्चावचनो मूल्य का प्रभाव प्रवृत्ति मूल्यो के गणना में देखा जाता है। प्रवृत्तियों के मूल्यो को सुदीर्घकालिन प्रवृत्ति (T) के नाम से भी जाना जाता है। प्रवृत्तियो को मापने कि कई विधियां है। किन्तु हम यहां केवल दो विधियों का ही विवेचन करेंगे जो कि आर्थिक एवं व्यापारिक आंकडो के विश्लेषण मे सामान्यतः उपयोग मे लाई जाती है। ये विधियां – चल माध्य विधि एवं – न्यूनतम वर्ग विधि है।

18.6.1 चल माध्य विधि

कुछ विषयों जैसे, मूल्य, बिक्री और लाभ इत्यादि के आंकड़ों की प्रवृत्ति पर विचार करते समय हम एक विशेष प्रकार के माध्य का प्रयोग करते हैं, जिसे चल माध्य कहते हैं। यह काल–श्रेणी समंकों में प्रवृत्ति (Trend) का एक माप है। गतिमान माध्य, वास्तव में, एक काल श्रेणी से सम्बंधित नियत अवधि के, क्रमागत परस्पर–व्यापी समंक समहों के समांतर माध्यों की एक श्रेणी होती है। इस श्रेणी के प्रत्येक पद को भी चल माध्य कह देते हैं। इसका परिकलन करने के लिए, पूर्ववर्ती माध्य में, पहले मद के स्थान पर, नए प्रवेश करने वाले मद को प्रतिस्थापित करते हैं। प्रत्येक चल माध्य, एक नियत काल अवधि के मानों पर आधारित होता है और इस . नियत काल अवधि को **चल माध्य की अवधि** कहते हैं।

क्रमागत माध्यम प्रक्रिया, काल श्रेणी के समंकों पर, एक समरेखण संक्रिया (smoothing operation), सम्पन्न करती है। अर्थात् यह समान अवधि और तीव्रता के उच्चावचनों को कम करती है। गतिमान माध्य की अवधि को चक्रीय आवर्त काल के बराबर लेकर इन उच्चावचनों को पूर्णतया विलप्त किया जा सकता है। काल श्रेणी में, यदि चक्रीय गति (cyclical movement) अनुपस्थित भी हो तो भी गतिमान माध्यम प्रक्रिया द्वारा आंकड़ों के अनियमित विचरण, बड़ी सीमा तक कम किये जा सकते हैं।

परिकलन

चल माध्य के परिकलन में, गतिमान माध्य की अवधि, एक महत्वपूर्ण उपादान है। उदाहरण के लिए, वार्षिक मानों A, B, C, D, E और F के लिए, 3–वर्षीय गतिमान माध्य, सारणी 18.2 में दिखाये गए अनुसार परिकलित कर सकते हैं।

सारणी 18.2: चल माध्यों का परिकलन

वर्षीय मान	3 वर्षीय गतिमान योग	3 वर्षीय गतिमान माध्य
A	....	....
B	(A+B+C)	(A+B+C)/3
C	(B+C+D)	(B+C+D/3
D	(C+D+E)	(C+D+E)/3
E	(D+E+F)	(D+E+F)/3
F	....	....

चल माध्य की अवधि, या तो विषम ले सकते हैं, (जैसे 3 वर्ष, 5 वर्ष, 7 वर्ष) या सम, (जैसे 2 वर्ष, 4 वर्ष, 6 वर्ष) । गतिमान माध्य की अवधि, प्रायः आंकड़ों में, विवरण–चक्र

की अवधि को ध्यान में रखकर, निर्धारित करते हैं। साधारणतः व्यवसायिक श्रेणियों के लिए, गतिमान माध्य की अवधि, 3 और 10 वर्ष के बीच होती है।

चल माध्य की विषम अवधि : जब गतिमान माध्य की अवधि, विषम हो (मान लीजिए, 3 वर्ष, 5 वर्ष, या 7 वर्ष, इत्यादि) तो गतिमान माध्य को, संगत काल अवधि के मध्य बिंदु से सम्बंधित करते हैं। क्रियाविधि को समझने के लिए सारणी 18.3 का अध्ययन कीजिए :

सारणी 18.3 : विषम चल माध्य का परिकलन

वर्ष	बिक्री ('000 टन)	3–वर्षीय गतिमान योग	3–वर्षीय गतिमान माध्य
2001	15	--	--
2002	25	72	24
2003	32	81	27
2004	24	75	25
2005	19	60	20
2006	17	--	--

ध्यान दीजिए कि पहले तीन वर्षों (2001, 2002, और 2003,) के लिए, गतिमान माध्य, अर्थात् 24, को मध्य वर्ष, 1978 से सम्बंधित किया गया है। अब पहले वर्ष को छोड़कर, आगामी 3 वर्षों, अर्थात 2001, 2002, और 2003, के गतिमान माध्य को, 2002, से सम्बंधित किया गया है, और उसके सम्मुख लिखा गया है और आगे भी इसी प्रकार किया गया है यह भी ध्यान दीजिए कि दिए गए समकों में, पहले, और अंतिम वर्ष के चल माध्य ज्ञात नहीं किये जा सकते। यदि गतिमान माध्य की अवधि 5 वर्ष हो, तो पहले दो वर्षों और अंतिम दो वर्षों के लिए चल माध्य ज्ञात नहीं कर सकते।

चल माध्य की सम अवधिः यदि चल माध्य की अवधि, सम हो (मान लीजिए, 4 वर्ष, 6 वर्ष, 8 वर्ष, इत्यादि) तो चल योग और चल माध्य, मूल काल अवधि के किसी वर्ष पर संपाती नहीं होंगे। चल माध्य को, ठीक किसी वर्ष के सम्मुख रखना सम्भव न होगा। इसलिए केन्द्रण आवश्यक होगा। केन्द्रण इस प्रकार किया जाता है कि वह गतिमान माध्य को, मूल समंकों के संपाती होने में सहायता प्रदान करे। केन्द्रण की प्रक्रिया को समझने के लिए **उदाहरण 1** का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

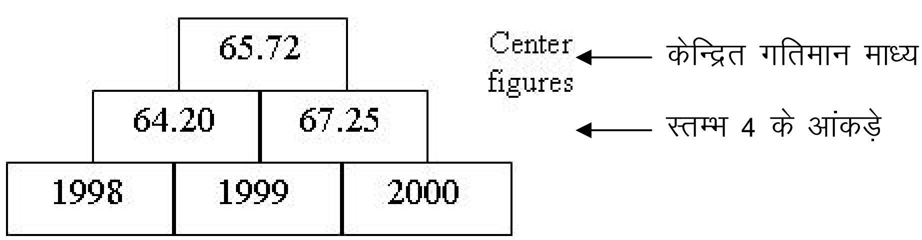
उदाहरण 1: निम्न समंकों के लिए, 4–वर्षीय चल माध्य परिकलित कीजिए:

वर्ष (Years)	:	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
बिक्री(Rs. in '000)	:	75	60	54	69	86	65	63	80	90	72

हलः चार वर्षीय चल माध्य का परिकलन

वर्ष	बिक्री ('000 रु.)	4 वर्षीय गतिमान योग	4 वर्षीय गतिमान	4 वर्षीय गतिमान केन्द्रित
1997	75	--	--	--
1998	60	--	--	--
1999	54	258	64.20	--
2000	69	269	67.25	67.88
2001	86	274	68.50	69.62
2002	65	283	70.75	72.12
2003	63	294	73.50	73.50
2004	80	298	74.50	75.37
2005	90	305	76.25	--
2006	72	--	--	--

पहली चार संख्याओं (वर्ष 1997 से 2001) के योग 258 को और उनके माध्य 64.50 को, इस काल अवधि के मध्य बिंदु, अर्थात् 1998 और 1999 के मध्य बिंदु के सामने लिखा गया है। यह मध्य बिंदु एक विशेषतः संरचित वर्ष को सूचित करता है, जिसके अंतर्गत, 1972 के अंतिम 6 माह और 1998 के पहले 6 माह सम्मिलित हैं। इसी प्रकार, सन 1998 से 2001 तक के वर्षों के संगत योग 264 को और इनके माध्य 67.25 को एक विशेषतः सरचित वर्ष, अर्थात सन् 1999 और 2000 वर्षों के मध्य बिंदु के सामने लिखा। इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि अंतिम माध्य 76.25 और अंतिम योग 305 को, 2004 और 2005 के मध्य बिंदु के सामने न लिख दिया जाए। पहला केन्द्रित माध्य, 65.72 (अर्थात् गतिमान माध्य का वह मान जो वर्ष 1999 के संपाती हो) ज्ञात करने के लिए, हमें स्तम्भ 4 के पहले दो आंकड़ों, 64.50 और 67.25 का मध्य मान ज्ञात करना होगा। निम्न आरेख की सहायता से, आप इस प्रक्रिया को भली भांति समझ सकेंगे :



आरेख से स्पष्ट होता है कि गतिमान माध्य का जो मान, 1999 के संपाती है वह आधा 64.50 से और शेष आधा 67.25 से लेता है। जिसका अर्थ है कि यह दोनों गतिमान माध्यों का समांतर माध्य है। इसलिए इस गतिमान माध्य मान 65.88 को केन्द्रित गातिमान माध्य कहते हैं और इसे अंतिम स्तम्भ में लिखते हैं। इस प्रकार, विभिन्न केन्द्रित गतिमान माध्यों का परिकलन, क्रमागत रूप में, स्तम्भ 4 के, प्रत्येक दो निकटवर्ती आंकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात करके किया जाता है।

18.6.2 न्यूनतम वर्ग विधि (Least Square Method)

यह सरल रेखीय विधि के नाम से भी जानी जाती है। यह विधि अनुसंधान मे काल श्रेणी समंक के अनुमान मे सर्वाधिक प्रयुक्त होती है। यह बीजगणित पर आधारित है। जो दो शर्तों को पूरा करती है; .

1) Sum of $(Y + Y_c) = 0$, and

2) Sum of $(Y + Y_c)^2 =$ least

सरल रेखीय विधि दिए हुए समंको से सर्वाधिक उपयुक्त (Line of best fit) रेखा प्रदर्शित करती है। सरल रेखा उपर्युक्त शर्तों को पूरा करती है। एंव निम्न प्रतिपगमन (Regression) समीकरणो द्वारा प्राप्त की जाती।

$$Y_c = a + bx$$

जहाँ, Y_c = Y चर का अनुमानित मूल्य, a एवं b अचल मूल्य जहाँ a अन्तः खण्ड को व b समय की इकाई के साथ अनुमानित मूल्य में परिवर्तन को दर्शाते हैं, X = काल या समय की इकाई (स्वतंत्र चर का मूल्य)।

a एवं b अचल मूल्यों की परिगणना निम्न दो प्रसमान्य समीकरणों द्वारा की जाती है।

$$\sum y = na + b\sum x \quad \text{..........................} \quad (i)$$

$$\sum x\,y = a\sum x + b\sum x^2 \quad \text{............} \quad (ii)$$

a तथा b अचल मूल्यों की परिगणना लघुविधि (Short cut Method) द्वारा की जा सकती है। इस विधि में विचलन बीच वाले समय से लिए जाते है ताकि x का योग अर्थात x = 0 (शून्य) हो जाए। इस प्रकार श्रेणी में प्रथम आधे ऋणात्मक मूल्य, द्वितीय आधे धनात्मक मूल्य के बराबर होते है। अतः उपरोक्त समान्य समीकरणो को निम्न प्रकार परिवर्तित किया जा सकता है।

$\sum y = a$ (as $\sum bx$ becomes zero)

$\sum xy = b\sum x^2$ (as $a\sum x$ becomes zero)

इस प्रकार a एंव b अचल मूल्यों को निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते है।

$a = \frac{\sum y}{N}$, and $b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$

यहां यह ध्यान रखना चाहिए कि जब समय श्रेणी में समय इकाइयाँ सम (even) हो तो समय इकाई का प्रारम्भिक इकाई दो मध्य इकाईयों के बीच होगा।

न्यूनतम वर्ग विधि की प्रक्रिया को निम्न उदाहरण द्वारा सरलता से समझ सकते है।

उदाहरण 2: एक खाद्य उत्पादन कम्पनी मे निर्णय लेने वाला विभाग पूर्व विक्रय प्रवृत्त के आधार पर 2006 एवं 2008 मे खाद्य् उत्पादन का अनुमान लगाना चाहता है, एवं इस हेतु पिछले 7 वर्ष के विक्रय दिए हुए है।

वर्ष	विक्रय ('000 टन में)
1998	70
1999	75
2000	90
2001	98
9002	85
2003	91
2004	100

हलः दिए गए काल श्रेणी समंकों से सरल रेखा समीकरण (Y_c = a + bx) प्राप्त करने हेतु निम्न सूत्र में मूल्य रखने पड़ते हैं।

$$a = \frac{\sum y}{N}, \text{ and } b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

$\sum x = 0$ (शून्य) प्राप्त करने के क्रम में 2001 को मध्य का (मूल) वर्ष लेते हैं। सरल रेखा खीचने को समझने हेतु निम्न सारणी में प्रक्रिया को ध्यान पूर्वक समझें

सारणी 18.4: प्रवृत्ति वर्ष के बिक्री का परिकलन

वर्ष	बिक्री ('000 tons)	x	x^2	xy	Trend (Yc= a + bx)
1998	70	-3	9	-210	74.5
1999	75	-2	4	-150	78.6
2000	90	-1	1	-90	82.8
2001	98	0	0	0	87.0
2002	85	1	1	85	91.2
2003	91	2	4	182	95.4
2004	100	3	9	300	99.5
N =7	$\sum y = 609$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 28$	$\sum xy = 117$	609.0

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{609}{7} = 87; \quad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{117}{28} = 4.18$$

इस प्रकार सरल रेखा समीकरण होगी:

$Y_c = 87 + 4.18x$

उपरोक्त समीकरण से मासिक वृद्धि भी निम्न तरह से ज्ञात कर सकते है –

$$\frac{4.180}{12} = 348.33 \text{ टन}$$

इसी कारण प्रवृत्ति मूल्य प्रति वर्ष अचल मूल्य 'b' के बराबर बढ़ते हैं। अतः विक्रय मे वार्षिक वृद्धि 4.18 हजार टन है।

प्रवृत्ति मूल्य निम्न तरह से प्राप्त किये जाते हैः

$y_{1998} = 87 + 4.18(-3) = 74.5$

$y_{1999} = 87 + 4.18(-2) = 78.6$ एवं तरह ....

काल श्रेणी का विघटित संघटक द्वारा अनुमानः प्रबंधक 2006 एवं 2008 में खाद्य् के विक्रय का अनुमान लगाना चाहता है।

2006 के विक्रय अनुमान के लिए 'x' = 5 (चूँकि 2004 के लिए 'x' = 3 है) अतः

$Y_{2006} = 87 + 4.18(5) = 107.9$ हजार टन

2008 के विक्रय अनुमान के लिए 'x' = 7 होगा अतः

$Y_{2008} = 87\ 4.18\ (7) = 116.3$ हजार टन

उदाहरण 3: निम्नलिखित संमकों मे न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करते हुए सरल रेखा समीकरण एवं प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्ष	1958	1959	1960	1961	1962
विक्रय (in lakhs units)	65	95	80	115	105

हलः n = 5

∴ n विषम है,

1960, को माध्य का मूल वर्ष लेते हुए,

सारणी 18.5 : परिकलन

वर्ष	विक्रय	X	x^2	XY
1958	65	–2	4	–130
1959	95	–1	1	–95
1960	80	0	0	0
1961	115	1	1	115
1962	105	2	4	210
Total	ΣY=460	ΣX=0	ΣX^2=10	ΣXY=100

$\therefore n = 5, \Sigma X = 0, \Sigma X^2 = 10, \Sigma Y = 460\ and\ \Sigma XY = 100$

$a = \Sigma Y n\ 460 \Rightarrow a = 460/5 = 92$

$b = \Sigma XY \Sigma X^2 = \frac{100}{10} = 10$

∴ सरल रेखा समीकरण होगी,

$Yc = a + bx \Rightarrow yc = 92 + 10X$

वर्ष 1958 के लिए $x = -2$

$\Rightarrow \text{Yc}\,(1958) = 92 + 10(-2) = 92 - 20 = 72$

वर्ष 1959 के लिए $x = -1$

$\Rightarrow Y_c(1959) = 92 + 10(-1) = 92 - 10 = 82$

वर्ष 1960 के लिए $x = 0$

$\Rightarrow Y_c(1960) = 92 + 10(0) = 92 - 0 = 92$

वर्ष 1961 के लिए $x = 1$

$\Rightarrow Y_c(1961) == 92 + 10(1) = 92 + 10 = 102$

वर्ष 1962 के लिए $x = 2$

$\Rightarrow Y_c(1962) == 92 + 10(2) = 92 + 20 = 112$

इस प्रकार,

वर्ष	प्रवृत्ति मूल्य	और सरल रेखा प्रवृत्ति समीकरण है: Y_c= 92 + 10X
1958	72	
1959	82	
1960	92	
1961	102	
1962	112	

बोध प्रश्न ख

1) कारणों के साथ बताइए कि निम्नलिखित कथन के साथ आप **सहमत** या **असहमत** हैं।

   a) गुणात्मक मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि चारो संघटकों के आश्रित होनेके कारण प्रवृत्ति में वृद्धि होती है।

   b) सरल रेखा विधि में मूल समंक एवं प्रवृत्ति मूल्य मे अन्तर कभी ''शून्य'' नही होता

   c) न्यूनतम वर्ग रिति समीकरण। $Y_c = a + bX$ यदि ''b'' धनात्मक है तो यह बढते हुए प्रवृत्ति मूल्य का घातक है।

   d) काल श्रेणी विश्लेषण में योज्य मॉडल Y = T + S + C + I के रूप में लिखा जाता है।

2) प्रवृत्ति को ज्ञात करने की विधियो को समझाइये।

3) चल माध्य विधि से आप क्या समझते है ? चल माध्य विधि की गणना के प्रक्रिया की व्याख्या करें जब ऑकड़ें सम और विषम कि अवधि में दिया गया हो।

4) निम्न काल्पनिक आंकड़ें अनाज के उत्पादन (लाख टन) के है तो (a) तीन तथा चार वार्षिय चल माध्य (b) सरल रेखा विधि द्वारा प्रवृत्ति मूल्य कि गणना कीजिए c) 2010 के लिए अनुमानित मूल्य ज्ञात किजिए।

Years	Production
2008	40
2009	60
2010	45
2011	83
2012	130
2013	135
2014	150
2015	120
2016	200

18.7 सारांश

इस इकाई में भविष्य के लिए विश्वसनीय एवं अधिक सही जानकारी के उद्देश्य के लिए काल श्रेणी कि धारणा एवं इसके विश्लेषण से परिचित करवाया गया है।

संख्यात्मक समंकों के समूहों को समय के आधार पर व्यवस्थित करना ''काल श्रेणी'' कहलाती है। काल श्रेणी का विश्लेषण किसी संस्था के अल्पकालिन एवं दीर्घकालिन गत्यात्मक परिस्थितियों को समझने के लिए किया जाता है। काल श्रेणी विश्लेषण के तकनीकों की सहायता से भूतकालीन प्रवृत्तियों के आधार पर भविष्य के प्रतिरूप का अनुमान लगाया जा सकता है।

अध्ययन मे संख्यात्मक चरों के मूल्यो को y_1 y_2 y_3 y_4........................y_n, एंव संदर्भित समय इकाइयो को x_1 x_2 x_3 x_4........................x_n, से प्रदर्शित किया जाता है। अतः समय विश्लेषण का आधार है। समय कारक नही है एवं चर के मूल्य में परिवर्तन प्रभाव नहीं है। वे कारक जो चर के धीरे–धीरे व स्थाई रूप से प्रभाव डालते है उसे सुदीर्घकालिन प्रवृत्ति कहते है। किसी काल श्रेणी में अल्पकाल में होने वाले परिवर्तनों को अल्पकालीन उच्चावचन कहते है। काल श्रेणी प्रायः चार घटको का परिणाम होती है ये है – दीर्घकालीन प्रवृत्ति (T), आर्तवविचरण (S), चक्रिय उतार–चढ़ाव (C),एवं अनियमित उच्चावचन (I) है।

जब हम काल श्रेणी के विश्लेषण का प्रयत्न करते है तो काल श्रेणी के संघटकों को पृथक कर इनके प्रभाव को मापते है।

काल श्रेणी के विश्लेषण हेतु दो मॉडल हैं –

1) योज्य मॉडल (प्रतिरूप), यह प्रतिरूप इस मान्यता पर आधारित है कि मूल समंक (o) चारो संघटकों को योग होता है, और प्रतिकात्मक रूप से इसे निम्न तरह से प्रदर्शित करते है; $Y = T + C + S + I$

2) गुणात्मक प्रतिरूप, यह प्रतिरूप इस मान्यता पर आधारित है कि संघटक के विभिन्न घटक काल श्रेणी मे गुणात्मक रूप से एक दुसरे को प्रभावित करते है, प्रतिकात्मक रूप से इसे निम्न तरह से व्यक्त किया जाता है $Y = T \times C \times S \times I$

प्रवृत्ति विश्लेषण उपनति का मापन करते हैं। प्रवृत्ति को मापने की कई विधियां है, किन्तु यहाँ हमने केवल दो विधियों : चल माध्य विधि एवं न्यूनतम वर्ग विधि की ही चर्चा की है। दीर्घकालिन पुर्वानुमान केवल प्रवृत्ति के आधार पर होते है, एवं इसके लिए केवल न्यूनतम वर्ग विधि सबसे उपयुक्त है।

18.8 शब्दावली (Key Words)

चक्रिय उच्चावचन: यह भी काल श्रेणी मे उतार–चढाव का एक प्रकार है, जिसके अन्तर्गत चर के मूल्य उपनति प्रवृत्ति रेखा के चारो तरफ उपर नीचे परिवतर्तित होते है।

दैव या अनियमित उच्चावचन: काल श्रेणी मे होने वाले ऐसे उच्चावचन जो आकस्मिक कारणो से अनियमित रूप से उत्पन्न होते है एवं जिनका पुर्वानुमान नही लगाया जा सकता है।

मौसमी या आर्तव उच्चावचन: इस काल श्रेणी में उच्चावचन नियमित रूप से एक वर्ष के अन्दर होते है एवं प्रतिवर्ष समान उतार–चढ़ाव की पुनरावृत्ति होती है।

सुदीर्घकालिन प्रवृत्ति: यह उच्चावचन का एक प्रकार है जो काल श्रेणी में एक समायावधि के साथ बढ़ने या घटने की मूलभूत प्रवृत्ति होती है।

काल श्रेणी: ये किसी चर के वे संचित समंक है जो निश्चित समयान्तराल में एकत्रित किये जाते है।

18.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

क) 1) (a) असहमत (b) सहमत (c) सहमत (d) सहमत (e) असहमत (f) सहमत

3) दीर्घकालिन प्रवृत्ति, मौसमी उच्चावचन, चक्रिय उच्चावचन एवं अनियमित उच्चावपन

ख) 1) (a) असहमत (b) सहमत (c) असहमत (d) सहमत

4) a) तीन वर्षीय चल माध्य = 48.33, 62.67, 86, 116, 138.33, 101.67, 156.67

चार वर्षीय चल माध्य = 273, 353, 433, 51135, 540, 570

b) $Y_1 = 107 + 18.03\ x$

c) 2022 के लिए अनुमानित उत्पादन 287.3 लाख टन है।

18.10 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

1) काल–श्रेणी क्या है? हम काल श्रेणी का विश्लेषण क्यों करते हैं?

2) काल–श्रेणी में संघटको का विस्तार पूर्वक व्याख्या कीजिए।

3) काल–श्रेणी के गुणात्मक व योज्य प्रतिरूपो का विस्तारपूर्वक व्याख्या कीजिए, इन दोनों मे से सामान्यतः किसका अधिक उपयोग होना है, और क्यों?

4) निम्न ऑकडो से प्रवृत्ति रेखा की गणना करें, तीन और चार वर्षीय चल माध्य का प्रयोग करते हुए।

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
उत्पाद (in tones)	24	28	38	33	49	50	66	68

5) चीनी मील में 2010 से 2017 तक उत्पादन (हजार टन में) निम्न हैं:

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
उत्पादन	35	38	49	41	56	58	76	75

i) न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करते हुए प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कीजिए।

ii) उत्पादन में प्रति माह बढ़ोतरी क्या है ?

iii) वर्ष 2020 के लिए चीनी के उत्पादन का आकलन करें।

6) निम्न ऑकडें वर्ष 2006 से 2014 तक उपयोग कि गयी गाड़ियों के सर्वेक्षण से संबंधित है। रैखिक प्रवृत्ति समीकरण का प्रयोग करते हुए बिक्री का आकंलन करें।

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
बिक्रि	214	320	305	298	360	450	340	500	520

7) निम्न ऑकडों से 4 एवे 5 वर्षीय चल माध्य (moving average) की गणना कीजिए।

Quarter	2014	2015	2016	2017
I	62	68	75	80
II	58	62	68	75
III	72	74	81	85
IV	65	77	80	85

नोटः इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

18.11 संदर्भ पुस्तकें

इस अध्याय को और गहराई से समझने के लिए निम्न पुस्तकें उपलब्ध हैं:

Mentgomery, D.C.and L.A. Johnson. 1996, '*Forecasting and Time Series Analysis'* McGraw Hill : New York

Chandan, J.S., 2001, *Statistics for Business and Economics*, Vikas Publishing House Pvt. Ltd. New Delhi.

Gupta. S.P. and H.P. Gupta, 2001, *Business Statistics*, S, Chand, New Delhi,

NOTES

NOTES