BECC-102

अर्थशास्त्र में प्रारंभिक गणितीय विधियाँ-I

सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

विशेषज्ञ समिति

प्रो. इन्द्राणी रॉय चौधरी
प्राध्यापक
जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. एस.के. सिंह
रिटायर्ड, प्रो. अर्थशास्त्र
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. गोपीनाथ प्रधान
रिटायर्ड, प्रो. अर्थशास्त्र
इग्नू, नई दिल्ली

डॉ. एस. पी. शर्मा
सह प्राध्यापक अर्थशास्त्र
श्यामलाल कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. एम.एस. भट्ट
प्रो. जामिया मिलिया इस्लामिया
नई दिल्ली

प्रो. अनूप चटर्जी
रिटायर्ड, सह प्राध्यापक,
ए.आर.एस.डी. कॉलेज, नई दिल्ली

डॉ. सुरजीत दास
सह प्राध्यापक
जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

डॉ. मंजुला सिंह
सह प्राध्यापक
दिल्ली विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

श्री बी.एस. बागला
सह प्राध्यापक अर्थशास्त्र, पी.जी., डी.
ए. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय

सुश्री नीति अरोड़ा
सह प्राध्यापक अर्थशास्त्र, माता सुंदरी
कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. नारायण प्रसाद
प्रो. अर्थशास्त्र
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. कौस्तुभ बारिक
प्रो. अर्थशास्त्र
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. बी.एस. प्रकाश
प्रो. अर्थशास्त्र
इग्नू, नई दिल्ली

श्री सौगतो सेन
सह प्राध्यापक अर्थशास्त्र
इग्नू, नई दिल्ली

पाठ्यक्रम संयोजक : श्री सौगतो सेन

पाठ्यक्रम संपादक : श्री सौगतो सेन और सुश्री चैताली अरोड़ा

पाठ्यक्रम निर्माण दल

खंड 1	**प्राथमिक संकल्पनाएँ**	**इकाई लेखक**	**इकाई अनुवादक**
इकाई 1	समुच्चय तथा समुच्चयों पर संक्रियाएँ	श्री अनूप चटर्जी	श्री जगमोहन राय
इकाई 2	संबंध एवं फलन	श्री अनूप चटर्जी	श्री जगमोहन राय
इकाई 3	तर्कशास्त्र	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
खंड 2	**एक स्वतंत्र चर के फलन**		
इकाई 4	फलनों के आधारभूत प्रकार	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
इकाई 5	वैश्लेषिक ज्यामिति	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
इकाई 6	अनुक्रम तथा श्रेणी	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
खंड 3	**अवकलन गणित**		
इकाई 7	सीमाएँ	श्री अनूप चटर्जी	श्री जगमोहन राय
ठकाइ 8	सांतत्य	श्री अनूप चटर्जी	श्री जगमोहन राय
इकाई 9	प्राथम–कोटि अवकजल	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
इकाई 10	उच्च–कोटि आवकलज	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
खंड 4	**एक चर अभीष्टीकरण**		
इकाई 11	अवतल तथा उत्तल फलन	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
इकाई 12	अभीष्टीकरण की विधियाँ	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
खंड 5	**स्माकलन**		
इकाई 13	अनिश्चित समाकलन	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
इकाई 14	निश्चित समाकलन	श्री सौगतो सेन	श्री जगमोहन राय
खंड 6	**अन्तर समीकरण**		
इकाई 15	रैखिक अंतर समीकरण	श्री जगमोहन राय	श्री जगमोहन राय
इकाई 16	अरैखिक अंतर समीकरण	श्री सौगतो सेन एवं सुश्री चैताली अरोड़ा	श्री जगमोहन राय

सामग्री निर्माण

श्री मंजीत सिंह
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू, नई दिल्ली

अक्टूबर, 2019

इंदिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से निदेशक, सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।
लेजर टाइप सेटिंग : टेसा मीडिया एण्ड कम्प्यूटर, C-206, A.F.Enclave-II, नई दिल्ली

विषय-सूची

		पृष्ठ सं.
खंड 1	**प्राथमिक संकल्पनाएँ**	**7**
इकाई 1	समुच्चय तथा समुच्चयों पर संक्रियाएँ	9
इकाई 2	संबंध एवं फलन	27
इकाई 3	तर्कशास्त्र	43
खंड 2	**एक स्वतंत्र चर के फलन**	63
इकाई 4	फलनों के आधारभूत प्रकार	65
इकाई 5	वैश्लेषिक ज्यामिति	87
इकाई 6	अनुक्रम तथा श्रेणी	108
खंड 3	**अवकलन गणित**	135
इकाई 7	सीमाएँ	137
ठकाइ 8	सांतत्य	161
इकाई 9	प्रथम–कोटि अवकजल	179
इकाई 10	उच्च–कोटि आवकलज	205
खंड 4	**एक चर अभीष्टीकरण**	221
इकाई 11	अवतल तथा उत्तल फलन	223
इकाई 12	अभीष्टीकरण की विधियाँ	241
खंड 5	**स्माकलन**	257
इकाई 13	अनिश्चित समाकलन	259
इकाई 14	निश्चित समाकलन	289
खंड 6	**अन्तर समीकरण**	311
इकाई 15	रैखिक अंतर समीकरण	313
इकाई 16	अरैखिक अंतर समीकरण	335

पाठ्यक्रम परिचय

''**अर्थशास्त्र में प्रारंभिक गणितीय प्रविधियां**'' पाठ्यक्रम में आपका स्वागत है। अर्थशास्त्र व्याख्या, अनुशीलन और स्पष्टीकरण के लिए निरंतर गणितीय विधियों का प्रयोग करता आ रहा है। गणित ने ऐसी संकल्पनाएँ, तकनीके और प्रविधियां प्रदान की है, जिनसे अध्येता और अर्थशास्त्र प्रयोक्ता आर्थिक विचारों का अनुशीलन करने में लाभान्वित होते रहे हैं। इसके मुख्य कारण यही हैं कि अनेक आर्थिक संकल्पनाएं परिमाणात्मक होती हैं और गणित हमें अनेक आर्थिक चरों के बीच संबंधो के निरुपण और स्पष्टीकरण में सहायक रहता है। गणित की रचना एक 'भाषा' जैसी भी है और अर्थशास्त्र के अध्येता होने के नाते आपको आर्थिक विचारों को इस भाषा में व्यक्त करने में भी सिद्ध हस्त होना चाहिए। इस पाठ्यक्रम का मुख्य ध्येय यही है कि आपको उन गणितीय संकल्पनाओं से परिचित करा दिया जाए जो आर्थिक विश्लेषण पद्धति के आधार की रचना करती हैं। यहां आपको केवल संकल्पनाएं नही बल्कि अनेक आर्थिक परिप्रेक्ष्यों में उनके प्रयोग भी बताए जाएंगे? अतः इस पाठ्यक्रम में आप गणितीय संकल्पनाओं के साथ साथ यह भी आर्थिक संकल्पनाओं के विषय में यह सोच पाएंगे कि कौन सी संकल्पना किस गणितीय संकल्पना के आधार पर अधिक सरलता से समझी जा सकती है। इस पाठ्यक्रम में 6 खंड है।

प्रथम खंड का शीर्षक ही **'प्राथमिक संकल्पनाएं'** हैं यहां समुच्चय, संबंध, फलन ओर तर्कशास्त्र से आपका परिचय कराया जा रहा है। ''**एक स्वतंत्र चर के फलन**'' नामक **दूसरे खंड** में बीजगणितीय और गैर-बीज गणितीय, दोनों प्रकार के विशेष फलनो पर चर्चा की गई है। इसी खंड में अनुक्रमों पर भी बात हुई है जो विशेष प्रकार के फलन ही हैं। श्रृंखला किसी अनुक्रम के विभिन्न पदों का योग होती है।

खण्ड 3 में हम अवकलन गणित पर चर्चा कर रहे है – यह तो गणितीय अर्थशास्त्र का केन्द्रभूत उपस्कर होता है – यह हम किसी निर्भर चर में किसी स्वतन्त्र चर में हुए परिवर्तन के शून्यगामी होने पर आ रहे परिवर्तन का आंकलन करते हैं। **खंड 4** ''**एक चर अभीष्टीकरण**'' की व्याख्या करता है। आर्थिक निर्णय चाहे अपभोक्ता का हो या उत्पादक या किसी अन्य आर्थिककर्ता का सभी में अभीष्टीकरण ही केन्द्रीय सरोकार होता है।

खंड 5 समाकलन से संबंधित है। यहां गणित की समाकलन प्रशाखा पर चर्चा की गई है। किसी फलन के समाकलन को अवकलन की विपरीतक्रिया भी माना जा सकता है– और समाकलन से प्राप्त परिणाम को समाकल कहा जाता है। ये समाकल किसी वक्र के अधीन क्षेत्रफल का आकलन करने में भी उपयोगी होते हैं। पाठ्यक्रम का अन्तिम खंड, **खंड 6 'अन्तर समीकरण'** पर है। ये गणितीय संकल्पना प्रयोग करने पर हम समयानुसार हो रही आर्थिक प्रक्रियाओं को सहज ही समझ जाते हैं – हां यहां पर हम समय का मापन सातत्यहीन (असतत्) इकाइयों में ही करते हैं।

खंड 1
प्राथमिक संकल्पनाएँ

खण्ड 1 परिचय

पाठ्यक्रम के पहले खंड को '**प्रारंभिक संकल्पनाएं**' नाम दिया गया है। इसमें तीन इकाइयां है जिनमें चर्चित विषय पाठ्यक्रम की आगामी इकाइयों को समझने में उपयोगी रहेंगे। इस खंड की तीन इकाइयों में समझाई गई संकल्पनाएं आपको आगे आने वाले गणितीय सिद्धांतों को समझ पाने में सहायक होंगी। ये –**प्रारंभिक संकल्पनाएं**' इस संपूर्ण पाठ्यक्रम के आधार की रचना करती हैं।

पहली इकाई ''**समुच्चय और समुच्चायों पर अनुक्रियाएं**'' हैं। यह समुच्चय की ध्यानपूर्वक परिभाषा करती है और समुच्चय को दर्शाने की विभिन्न विधियां भी बताती है। आप यहीं पर उपसमुच्चय, अधिसमुच्चय और घातसमुच्चय तथा समुच्चयों पर की जाने वाली अनुक्रियाओं – जैसे कि योग, गुणन (प्रतिच्छेदन), घटा आदि के बारे में जानेंगे। **दूसरी इकाई** '**संबंधों और फलनों**' पर है – यह दो समुच्चयों के कार्टेजियन गुणन के उपसमुच्चय के रूप में एक 'संबंध' की संकल्पना से कराया जाएगा। आगे चल कर इस इकाई में आप फलनों और प्रतिचित्रण को समझेंगे। यही आपको वास्तविक मान फलनों, अनुरुपता और समुच्चय फलनों के विषय में भी जानकारी दी जाएगी।

इकाई 3 का नाम ही **तर्कशास्त्र** है– यहां आपको निगमनात्मक चिंतन के कौशल की ओर अग्रसर किया जाएगा। आप यहां कथन निश्चयात्मक कथन और निहतार्थ तथा सत्यमान तालिका आदि से परिचित होंगे। आप प्रमाण का अर्थ समझ पाएंगे और यह भी जान जाएंगे कि प्रमाणों के कई प्रकार भेद होते हैं।

इकाई 1 समुच्चय तथा समुच्चयों पर संक्रियाएँ*

संरचना

1.0 उद्देश्य

1.1 विषय-वस्तु

1.2 एक समुच्चय की अवधारणा (The Concept of a Set)

1.3 उपसमुच्चय, अधिसमुच्चय तथा घात समुच्चय (Subsets, Supersets and Power Sets)

1.3.1 उपसमुच्चय तथा अधिसमुच्चय (Subsets and Supersets)

1.3.2 घात समुच्चय (Power Sets)

1.4 समुच्चयों पर संक्रियाएँ (Operations on Sets)

1.4.1 समुच्चयों का सम्मिलन (योग) (Union of Sets)

1.4.2 समुच्चयों की उभयनिष्ठता (Intersection of Sets)

1.4.3 समुच्चयों का अंतर (Difference of Sets)

1.4.4 समुच्चय का विभक्तीकरण (Partition of a Set)

1.5 सार संक्षेप

1.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

1.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् हम निम्नलिखित संकल्पनाओं/विधियों से भली-भाँति अवगत हो जाएंगे :

- समुच्चय की परिभाषा से;
- उपसमुच्चय, अधिसमुच्चय तथा घात समुच्चय की संकल्पनाओं से;
- समुच्चयों की सम्मिलन, उभयनिष्ठता, अंतर इत्यादि संक्रियाओं से;
- समुच्चयों के माध्यम से अर्थशास्त्रीय विश्लेषण की विधियों से; तथा
- गणितीय अर्थशास्त्र में समुच्चयों की महत्त्वपूर्ण भूमिका से।

1.1 विषय-वस्तु

यह अनुभव किया गया है कि गणित में विकसित अवधारणाएँ, अर्थशास्त्र के सिद्धांतों की व्याख्या करने में तथा उनके विकास में अत्याधिक सुविधाजनक सिद्ध हुई हैं। अतः, इस इकाई में, हम उन आधारभूत अवधारणाओं का अध्ययन करेंगे जो अर्थशास्त्र के सिद्धांतों को समझने में तथा उनके विश्लेषण करने में हमारी सहायता करते हैं। मूलभूत गणितीय भाषा तथा उसके प्रस्तुतीकरण की विधि के अध्ययन से विचारों/संकल्पनाओं को सुगठित तथा विधिपूर्वक व्यक्त करने के तौर-तरीकों को भली-भाँति समझा जा सकता है। आगे होने वाली चर्चा में, हम पाठकों को समुच्चय की प्रारंभिक अवधारणा से अवगत करवाने का प्रयास करेंगे। समुच्चय गणितीय विश्लेषण में एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप आगे की इकाइयों में आने वाली सामग्री को सरलतापूर्वक समझ सकेंगे। इस पाठ्यक्रम के शीर्षक में 'गणितीय विधियाँ' पद का प्रयोग किया गया है। आप शीघ्र ही देख पाएंगे कि इस प्रथम इकाई की विषय-वस्तु,

*श्री अनूप चटर्जी

इस पाठ्यक्रम में सम्मिलित की गई सभी गणितीय विधियों के लिए नींव के पत्थर के समान हैं। समुच्चयों के सिद्धांत गणित की भाषा तथा गणितीय शैली में सोचने का आधार है। आप यह भी देख सकेंगे कि अर्थशास्त्र के अन्य पाठ्यक्रमों में भी आप जिन अवधारणाओं/संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे, उनका भी गणित की भाषा में भाषांतरण किया जा सकता है। प्रारंभ में यह अमूर्त या गूढ़ प्रतीत हो सकता है तथापि यह अर्थशास्त्र की अवधारणाओं पर विचार करने में तथा उनके तार्किक विश्लेषण में आपने कौशल का विकास करने में लाभकारी होगा।

इस इकाई को निम्न रूप में व्यवस्थित किया गया है। अगले भाग में समुच्चय की संकल्पना पर व्यापक चर्चा की गई है। समुच्चय की परिभाषा देने के पश्चात्, इसे व्यक्त करने की विधियों के बारे में बताया गया है। हम देखेंगे कि वस्तुओं के एक सुपरिभाषित समूह को ही समुच्चय कहते हैं। इस भाग में यह भी बताया गया है कि दो समुच्चय समान कब होते हैं तथा कोई समुच्चय, दूसरे समुच्चय का उपसमुच्चय कब कहलाता है और इस संकल्पना के माध्यम से छोटे और बड़े संग्रहों पर विचार किया जा सकता है। उपसमुच्चय के साथ-साथ, अधिमुच्चय तथा घात समुच्चय की अवधारणाओं की भी चर्चा की गई है। अनुगामी भागों में समुच्चयों पर की जा सकने वाली संक्रियाओं पर भी चर्चा की गई है, जिनमें समुच्चयों का सम्मिलन, उनकी उभयनिष्ठता तथा अंतर प्रमुख हैं। साथ ही किसी समुच्चय के पूरक के बारे में बात की गई है। अंतिम भाग में किसी समुच्चय के विभक्तीकरण की अवधारणा के बारे में चर्चा की गई है तथा इसके कुछ व्यावहारिक उदाहरण भी दिए गए हैं। वस्तुतः, इस पूरे भाग में अनेक उदाहरण दिए गए हैं जिससे सभी अवधारणाओं को भली-भांति समझा जा सके।

1.2 समुच्चय की अवधारणा (The Concept of a Set)

समुच्चय की परिभाषा (Definition of Concept)

वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह या संग्रह को समुच्चय कहते हैं। जैसे कि पुस्तकों का समुच्चय, व्यक्तियों का समुच्चय, संख्याओं का समुच्चय इत्यादि। हम किसी भी प्रकार की वस्तुओं के समुच्चय बना सकते हैं जैसे कि

- सम-संख्याओं का समुच्चय (2, 4, 6....);
- आपके पसंदीदा खाद्य पदार्थों का समुच्चय (डबल रोटी, चावल, दही, मिक्स्ड वेज़ीटेबल) अथवा आभूषण (सोने की चैन, कान की बालियाँ)।

हम और भी अनेक प्रकार के समुच्चयों की चर्चा कर सकते हैं जैसे कि किसी कंपनी के निदेशक मंडल (बोर्ड ऑफ डायरेक्टरस्) का समुच्चय, एक संस्था के न्यासियों (Trustee) का समुच्चय, एक फर्म के कर्मचारियों का समुच्चय, किसी निर्माता के आपूर्तिकर्ताओं का समुच्चय, किसी उत्पाद के उपभोक्ताओं का समुच्चय, किसी फर्म के विभिन्न खातों का समुच्चय। परंतु यह आवश्यक नहीं है कि समुच्चय केवल मूर्त्त वस्तुओं के ही होते हैं जैसा कि ऊपर दिए गए उदाहरणों में उल्लेख किया गया है। अमूर्त संकल्पनाओं के समुच्चय भी हो सकते हैं जैसे कि धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय इत्यादि। परंतु याद रहे कि समुच्चय वस्तुओं का सुपरिभाषित समूह होता

है। अर्थात् किसी भी दी हुई किसी भी वस्तु के संबंध में यह निश्चित रूप से कह सकते हैं कि वह वस्तु इस संग्रह समूह में है अथवा नहीं। उदाहरण के लिए, यदि हम अपने घर के 'आस-पास रहने वाले लंबे' व्यक्तियों के समूह लें तो यह समुच्चय नहीं होगा क्योंकि शब्द 'लंबे' और 'पास' के आधार पर यह तय करना कठिन है कि कोई व्यक्ति इस समूह में होगा या नहीं जब तक हम इन शब्दों को ठीक-ठीक परिभाषित न कर दें। प्रथानुसार, यह भी अपेक्षित है कि किसी भी समुच्चय के सदस्य अलग-अलग हों। अतः, जब हम किसी समुच्चय का वर्णन उसके सदस्यों को सूचीबद्ध करके करते हैं, तो यह ध्यान रखते हैं कि उसमें कोई दोहराव न हो अर्थात्, अगर कोई सदस्य समुच्चय में एक से अधिक बार आए तो एक ही बार लिखा जाता है।

समुच्चय के अवयव (Elements of a Set)

कोई वस्तु जब किसी समुच्चय में हो तो उसे उस समुच्चय का *अवयव* या *सदस्य* कहते हैं। अतः हम लिखते हैं कि ''a , इंगलिश वर्णमाला के समुच्चय का एक सदस्य है'' या ''3, सम-संख्याओं के समुच्चय का अवयव नहीं है''। समुच्चयों को लिखने के लिए हम इसके अवयवों को मध्यम कोष्ठकों के मध्य में अल्पविराम के माध्यम से अलग करके सूचीबद्ध करते हैं। उदाहरणार्थ, सम-संख्याओं के समुच्चय को हम $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ से निरूपित किया जा सकता है। ध्यान दें कि इस समुच्चय के अंत में अंकित बिंदु इस तथ्य को दर्शाते हैं कि यह समुच्चय अनंत तक जाता है।

एक समुच्चय के अवयवों की संख्या कुछ भी हो सकती है। उदाहरण के लिए, अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों के समुच्चय $\{a, b, c, d, e, \ldots\}$ में 26 अवयव होते हैं जबकि स्वर वर्णों (vowels) के समुच्चय $\{a, e, i, o, u\}$ में 5 अवयव होते हैं।

समुच्चय की गणनीयता/गणनसंख्यात्मकता (Cardinality of a Set)

एक समुच्चय के अवयवों की संख्या परिमित अथवा अपरिमित हो सकती है। किसी फर्म के कर्मचारियों का समुच्चय किसी निर्माता के समायोजकों/संभरणकर्ताओं का समुच्चय तथा व्यापार की दुनिया से इसी प्रकार के अन्य उदाहरण परिमित समुच्चयों के उदाहरण हैं क्योंकि हम इन समुच्चयों के अवयवों की किसी न किसी क्रम में गिनती कर सकते हैं। इसके लिए हम इसके अवयवों को एक-एक करके तब तक गिनते हैं जब तक अंतिम अवयव न मिल जाए। दूसरी ओर, धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots\}$ अनंत है क्योंकि गणन की प्रक्रिया कभी समाप्त नहीं होगी। व्यापार से संबंधित कुछ व्यावहारिक समस्याओं में अनंत समुच्चय भी आ सकते हैं। किसी समुच्चय के अवयवों की संख्या को उस समुच्चय की गणनीयता कहते हैं। यदि किसी समुच्चय A में n अवयव हों तो समुच्चय A की गणनीयता A होगी। किसी समुच्चय A की गणनीयता को $|A|$ से भी व्यक्त करते हैं। अतः, यदि A अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय है, तो $|A| = 26$ होगा। यदि अंग्रेज़ी वर्णमाला के स्वर वर्णों का समुच्चय है तो इसकी गणनीयता 5 होगी, अर्थात् $|X| = 5$ होगा।

अंकन पद्धति (Notations)

1) समुच्चयों को सामान्यतः अंग्रेज़ी वर्णमाला के बड़े अक्षरों अर्थात् $A, B, C, \ldots$ इत्यादि से व्यक्त किया जाता है।

2) किसी समुच्चय के अवयवों को सामान्यतः अंग्रेज़ी वर्णमाला के छोटे अक्षरों अर्थात् $a, b, c, \ldots$ इत्यादि से व्यक्त किया जाता है। यदि X एक समुच्चय है और x समुच्चय X का एक अवययव है तो हम इसे $x \in X$ के रूप में लिखते हैं अर्थात x समुच्चय X में है या x समुच्चय X का एक सदस्य है।

3) यदि X एक समुच्चय है तथा y, समुच्चय X का अवयव नहीं है तो इसे $y \notin X$ के रूप में लिखा जाता है अर्थात् y समुच्चय X में नहीं है या y समुच्चय X का सदस्य नहीं है।

हम समुच्चयों और उनके अवयवों को व्यक्त करने की इसी सामान्य प्रथा का अनुपालन करेंगे। अर्थात् समुच्चयों को बड़े अक्षरों तथा उनके अवयवों को छोटे अक्षरों से व्यक्त करेंगे। मान लीजिए J मेगा इंटरनेशनल लिमिटेड के निदेशक मंडल के सदस्यों का समुच्चय है और x की सुमंत को निरूपित करता है, तो $x \in J$ का अर्थ है कि श्री सुमंत मेगा इंटरनेशनल लिमिटेड के निदेशक मंडल का सदस्य हैं तथा $x \notin J$ का अर्थ है कि वे इस कंपनी निदेशक के निदेशक मंडल का सदस्य नहीं है।

समुच्चयों का निरूपण (Specifying a Set)

हमने अब तक की चर्चा में यह उल्लेख किया है कि किसी समुच्चय को इसके अवयवों तथा गणनीयता के पदों में किस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है। हम समुच्च्य के सदस्यों को अर्धविरामों द्वारा पृथक् करते हुए उनकी सूची बनाते हैं और उस सूची को इन कोष्ठक { } चिन्हों से आवृत्त कर देते हैं। हमने देखा कि किसी समुच्चय को उसके अवयवों को सूचीबद्ध करके लिखा जा सकता है। इस विधि में किसी समुच्चय के निरूपण को समुच्चय का रोस्टर या सारणीबद्ध रूप कहते हैं। रोस्टर रूप में हम समुच्चय के अवयवों को मध्यम कोष्ठकों में सूचीबद्ध करते हैं। इस विधि में हम केवल समुच्चय के अवयवों की सूची बनाते हैं, इस सूची में अवयवों का क्रम कोई महत्त्व नहीं रखता। उदाहरण के लिए, हम कोष्ठकों में अवयवों का क्रम a, e, i, o, u हो अथवा $u, a, o, e, i,$ इससे कोई अंतर नहीं पड़ता।

उदाहरण 1 : मान लीजिए कि P एक कंपनी द्वारा निर्मित उत्पादों a, b, c, d, e और f का एक समुच्चय है। रोस्टर विधि के अनुसार, इस समुच्चय को

$$P = \{a, b, c, d, e, f\}$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण : समुच्चय $\{x \mid x$ शब्द 'stock' में प्रयुक्त अक्षर है$\}$ को इस प्रकार पढ़ा जाता है– ''ऐसे सभी अक्षरों x का समुच्चय जिसका प्रयोग शब्द 'stock' लिखने में हुआ है। इस समुच्चय को इसके अवयवों को सूचीबद्ध करके {s, t, o, c, k} के रूप में भी व्यक्त किया जाता है।

परंतु इस विधि से किसी समुच्चय का निरूपण सदैव सरल नहीं होता। विशेष तौर पर तब जब समुच्चय में अवयवों की संख्या बहुत अधिक अथवा अपरिमित हो। जैसे कि प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय के सभी अवयवों को इस विधि से पूर्णतया निरूपित करना कठिन है। अतः, बहुधा किसी समुच्चय को व्यक्त करने की अन्य विधि का प्रयोग भी हमें करना पड़ता है जिसको समुच्चय निर्माण विधि के नाम से जाना जाता है।

इस विधि में समुच्चय का कोई व्यापक/सामान्य अवयव लिया जाता है, उसके आगे (:) अथवा "|" का चिन्ह लगाया जाता है और इसके पश्चात् उस अवयव के मूलभूत गुण अथवा विशेषता का वर्णन किया जाता है। चिन्ह ':' या "|" ।

अर्थशास्त्र में हम समुच्चयों को निरूपित करने की इस विधि का प्रयोग अक्सर करेंगे। समुच्चय निर्माण विधि के अंतर्गत कोष्ठक में उस नियम या प्रतिबंध का वर्णन किया जाता है जिसके आधार पर यह तय किया जा सके कि कोई दी हुई वस्तु इस समुच्चय का अवयव है या नहीं।

इस विधि में समुच्चय का कोई व्यापक/सामान्य अवयव लिया जाता है, जिसका प्रतीक (अथवा y, z आदि) से व्यक्त किया जाता है। यह प्रतीक समुच्चय के सभी अवयवों को निरूपित करता है। इस प्रतीक के पश्चात् हम चिन्ह ':' अथवा "|" का प्रयोग करते हैं जिसका अर्थ 'जहाँ' होता है। तत्पश्चात् समुच्चय के अवयवों के विशिष्ट गुणधर्म लिखकर, इस पूरे कथन को मध्यम कोष्ठक { } के भीतर लिखा जाता है।

उदाहरण 2 : आइये, अब हम ऊपर लिए गए एक कंपनी द्वार निर्मित सभी उत्पादों के समुच्चय P को समुच्चय निर्माण विधि से निरूपित करें। इस समुच्चय को इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है :

$P = \{x \mid x$ कंपनी R द्वारा निर्मित एक उत्पाद है$\}$

इस कोष्ठक में दिए संपूर्ण कथन को हम इस प्रकार पढ़ते हैं :

ऐसे x का समुच्च्य जहाँ x कंपनी R द्वारा निर्मित एक उत्पाद है।

जैसा कि ऊपर बताया गया x, समुच्चय P के किसी भी अवयव को निरूपित करता है। अतः, अब जो भी वस्तु यहाँ है, दिए हुए अपेक्षित गुण को संतुष्ट करेगी, केवल वही इस समुच्चय P का सदस्य/अवयव होगी, अन्य कोई वस्तु नहीं।

कुछ विशिष्ट समुच्चय (Examples of Sets)

1) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय

2) $\mathbb{Z} = \{0, -1, +1, -2, +2, \ldots\}$, पूर्णांकों का समुच्चय

3) $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in Z\}$, परिमेय संख्याओं का समुच्चय

धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय, $\mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$

4) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $R = \{x : x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$

धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

$$\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

5) सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय

$$C = \{x : x + ib, a, b \in R\},$$

$X = \{A, B, C, \ldots\}$, यदि हम यह आग्रहपूर्वक कहना चाहते हैं कि समुच्चय x के अवयव स्वयं भी समुच्च्य हैं तो हम लिखेंगे :

$X = \{A, B, C, \ldots\}$, जहाँ $A, B, C, \ldots$, उपसमुच्च्य हैं।

ये कुछ ऐसे विशेष समुच्चयय है जिनका प्रयोग करने की आवश्यकता गणित में बार-बार पड़ती है। इनको निरूपित करने वाले प्रतीक N, Z, Q, Q^{+}, R, R^{+}, C विशिष्ट मानक प्रतीक है। हम इन प्रतीकों का प्रयोग इन्हीं विशिष्ट समुच्चयों के लिए सुरक्षित रखेंगे।

रिक्त समुच्चय (Empty Set)

एक ऐसा समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता, *रिक्त समुच्चय* कहलाता है। इसे *प्रतीक* ϕ अथवा से { } व्यक्त करते हैं।

उदाहरण के लिए, $A = \{x : x \in N,\ 2 < x < 3\}$ एक रिक्त समुच्चय है क्योंकि ऐसा कोई भी प्राकृतिक संख्या नहीं होती जो 2 और 3 के बीच में हो अर्थात् जो दिए हुए गुण को संतुष्ट करें। अतः, हम लिख सकते हैं कि $A = \emptyset$ या $A = \{\ \}$. स्वाभाविक रूप से, रिक्त समुच्चय की गणनीयता शून्य होती है अर्थात् $|\emptyset| = 0$.

ध्यान दें कि $B = \{0\}$, रिक्त समुच्चय नहीं है क्योंकि इसमें एक अवयव 0 है।

टिप्पणी :

1) यदि x किसी समुच्चय A का अवयव है तो हम इसे सांकेतिक रूप में $x \in A$ से व्यक्त करते हैं। यदि b समुच्चय A का अवयव नहीं है तो इसे $b \{\notin\}$ A से व्यक्त किया जाता है।

2) किसी समुच्चय के अवयव, समुच्चय भी हो सकते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि A, B, C समुच्चय हैं, तो इनका संग्रह $x = \{A, B, C\}$ भी एक समुच्चय होगा जिसके अवयव समुच्चय A, B तथा C हैं। अर्थात् $A \in X,\ B \in X, C \in$ X.

आइये, अब हम दो दिए हुए समुच्चयों के बीच संबंधों के बारे में कुछ चर्चा करें। इस भाग में हम समुच्चयों के मध्य केवल दो प्रकार के संबंधों की जानकारी लेंगे, दो समुच्चय समान कब होते है, तथा किसी समुच्चय का एक पूरक समुच्चय क्या होता है।

समान समुच्चय (Equality of Sets)

दो समुच्चय समान होते हैं यदि उनके अवयव समान हों। यदि $A = \{1,2,3,5\}$ है और $B = \{1,2,3,5\}$ तो $A = B$ होता है अर्थात् A और B के अवयव समान हैं। जैसा कि हम पहले यह चुके हैं कि किसी समुच्चय में अवयवों को लिखने का कुछ महत्त्व नहीं रखता, इसलिए यदि $A = \{m, n, p\}$ है और $B = \{n, p, m\}$, तो भी $A = B$ होगा।

उदाहरण 3 : यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ है और $B =\{x \mid x$ एक धनात्मक पूर्णांक है तथा $x^2 < 25\}$है तो $A = B$ होगा।

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित समुच्चयों को समुच्चय निर्माण रूप में लिखें :
   क) 43 से बड़ी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
   ख) 18 से बड़ी परंतु 57 से छोटी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

....
....
....
....
....
....

2) यदि समुच्चय $A = \{2,4,6\}$, $B = \{7,2,6\}$, $C = \{4,2,6\}$ और $D = \{2,4\}$है, तो नीचे दिए कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं?

   (क) $A = D$ (ख) $6 \in C$ (ग) $\phi \in C$ (घ) $C = A$

....
....
....
....
....
....
....
....

1.3 उपसमुच्चय, अधिसमुच्चय तथा घात समुच्चय (Subsets, Supersets and Power Sets)

इस भाग में हम उन समुच्चयों की चर्चा करेंगे जो अन्य किसी समुच्चय में अंतर्विष्ट हैं। उपसमुच्चय, अधिसमुच्चय तथा घात उपसमुच्चय जैसी महत्त्वपूर्ण की अवधारणाएँ इस खंड की विषय-वस्तु है। हम यहाँ यह भी समझने का प्रयास करेंगे कि इन उप-समुच्च्यों के संयोजनों से हम विभिन्न समुच्च्यों के बीच संबंधों को निरूपण किस प्रकार करते हैं?

1.3.1 उपसमुच्चय तथा अधिसमुच्चय (Subsets and Supersets)

माना $A = \{1,2,3\}$ और $B = \{1,2,3,5,7\}$ है। हम देखते हैं कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी अवयव है। अर्थात् $x \in A \Rightarrow x \in B$. ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय है तथा सांकेतिक रूप में इसे $A \subseteq B$ से व्यक्त करते हैं। अतः, समुच्चय A समुच्चय B का उपसमुच्चय कहलाता है यदि A का प्रत्येक अवयव, B का भी अवयव हो।

यदि A, B का उपसमुच्चय है तो B, A का अधिसमुच्चय कहलाता है। इसे सांकेतिक रूप में $B \supseteq A$ से व्यक्त किया जाता है।

टिप्पणी :

1) ऊपर की परिभाषा से हम देख सकते हैं कि –

   प्रत्येक समुच्चय अपना उपसमुच्चय होता है। अर्थात् $A \subset A$ है। हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रिक्त समुच्चय ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। क्योंकि रिक्त समुच्चय ϕ में कोई अवयव नहीं होता,

2) यदि $A \subset B$ है, तो हमें यह तो निश्चित रूप से कह सकते हैं कि A का प्रत्येक अवयव B में होगा। परंतु B के अवयवों के बारे में निश्चित रूप से कुछ नहीं कहा जा सकता। B के सभी अवयव A के भी अवयव हों, यह आवश्यक नहीं है। यदि B के सभी अवयव, A के भी अवयव हों तो B भी A का उपसमुच्चय हो जाएगा, अर्थात् $B \subset A$ होगा। इस स्थिति में A और B समान समुच्चय हो जाएंगे। अर्थात्,

   $$A \subset B \text{ तथा } B \subset A \Leftrightarrow A = B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

   ऊपर दिए गए कथन में चिन्ह '$\Leftrightarrow$' द्विधा तात्पर्य (Double implication) कहलाता है तथा '$\Rightarrow$' और '$\Leftarrow$' का सम्मिश्रण है। दो कथनों के मध्य का प्रयोग करने का अर्थ है कि दोनों कथन समान हैं।

3) यदि समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय न हो तो इस तथ्य को $A \not\subset B$ से व्यक्त किया जाता है।

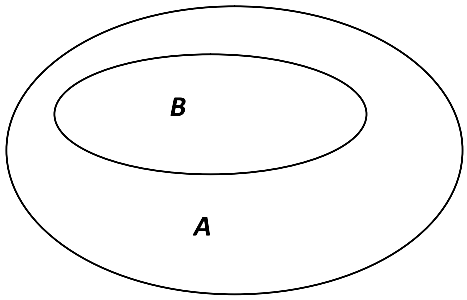
   यदि $A \not\subset B$ है तो A में कम से कम एक ऐसा अवयव होगा जो B में नहीं है।

उचित उपसमुच्चय : यदि A, B का उपसमुच्चय है ($A \subset B$) परंतु B के बराबर नहीं है ($A \neq B$), तो A, B का उचित समुच्चय कहलाता है। अर्थात् यदि A, B का उपसमुच्चय है, परंतु B, A का उपसमुच्चय नहीं है तो A को B का उचित उपसमुच्चय (Proper subset) कहते हैं और इसे $A \subseteq B$ से व्यक्त किया जाता है।

मान लीजिए $A = \{1,2,3\}$; तथा $B = \{1,2,3,5\}$ है। हम देख सकते हैं कि A, B का उपसमुच्चय है परंतु B, A का उपसमुच्चय नहीं है क्योंकि 5, B का ऐसा अवयव है जो A में नहीं है। अतः हम पाते हैं कि $A \subseteq B$ तथा $B \not\subseteq A$. इसलिए हम कह सकते हैं कि A, B का उचित उपसमुच्चय है अर्थात् $A \subset B$ है।

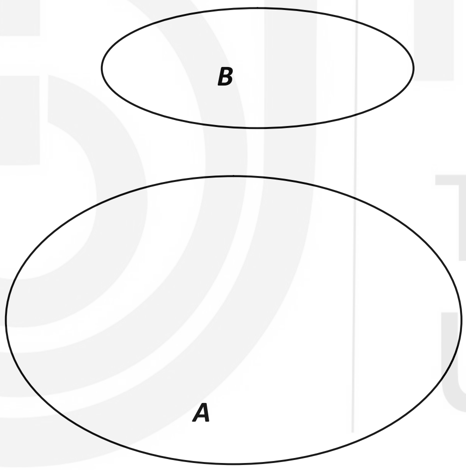
उदाहरण 4 : मान लीजिए Q, भारत की सभी कंपनियों के सभी प्रबंध निदेशकों का समुच्चय हैं तथा P रैनबैक्सी लिमिटेड में प्रबंध निदेशकों का समुच्चय है। इस स्थिति में P, Q का उचित उपसमुच्चय है। इसे हमें $P \subset Q$ से व्यक्त कर सकते हैं।

उपसमुच्चय की संकल्पना को चित्र के माध्यम से भी दर्शाया जा सकता है जैसा कि नीचे दिए गए रेखाचित्र में किया गया है।



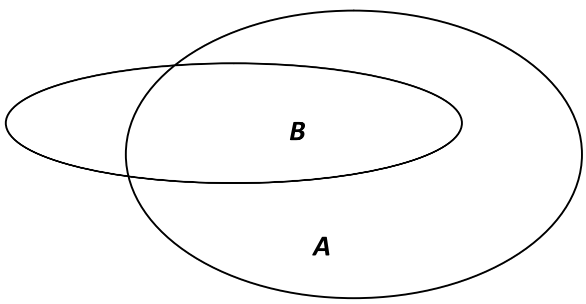
रेखाचित्र 1.1

इन रेखाचित्रों को वेन आरेख कहते हैं। रेखाचित्र 1.1 में, समुच्चय B पूरी तरह समुच्चय A के भीतर है। अतः, $B \subset A$ होगा



रेखाचित्र 1.2

रेखाचित्र 1.2, दो ऐसे समुच्चयों A और B को दर्शाता है जिनमें कोई भी उभयनिष्ठ अवयव नहीं है अर्थात् $(A \cap B = \phi)$। अतः हम कह सकते हैं कि $A \not\subset B$ और $B \not\subset A$ ।
रेखाचित्र 1.3 में



रेखाचित्र 1.3

दो ऐसे समुच्चय दर्शाए गए हैं जिनमें कुछ अवयव तो उभयनिष्ठ हो सकते हैं परंतु न A, B का उपसमुच्चय है न B, A का।

सार्वत्रिक समुच्चय (Universal Set)

हमें बहुधा ऐसे समुच्चयों पर विचार करना पड़ता है तो किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्च होते हैं। वह आधारभूत समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय कहलाता है। उदाहरण के लिए, यदि हम किसी विशेष संदर्भ में केवल प्राकृतिक संख्याओं के उपसमुच्चयों पर विचार कर रहे हैं जैसे कि

सभी सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय = A = {2, 4, 6, 8, …}

सभी विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय = B = {1, 3, 5, 7, …}

3 से विभाजित होने वाली सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय = {3, 6, 9, 12, …} इत्यादि। इस विशेष संदर्भ में प्राकृत संख्याओं का समुच्चय = N = {1, 2, 3,….} समुच्चयों A, B, C के लिए सार्वत्रिक समुच्चय कहलाता है। क्योंकि यहाँ जो समुच्चय प्रासंगिक है वे सभी N के उपसमुच्चय है।

1.3.2 घात समुच्चय (Power Sets)

मान लीजिए $X = \{2, 3\}$ है। आइये, इसके सभी संभव उपसमुच्चयों पर विचार करें। X के उपसमुच्चय हैं :{2}, {3}, {2, 3} और ϕ (अर्थात्, रिक्त समुच्चय)। समुच्चय $\{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ को X का घात समुच्चय कहते हैं। अतः, किसी समुच्चय X का घात समुच्चय उसके सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय होता है। इसे $\mathcal{P}(X)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस परिभाषा के अनुसार,

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$$

ऊपर दी गई परिभाषाओं के आधार पर हम निम्नलिखित कथनों को सिद्ध कर सकते हैं। यदि A और B कोई भी समुच्चय हैं तो

1) $A = B$ यदि $A \subset B$ और $B \subset A$

2) $A \subset A$ तथा $\phi \subset A$

3) $A \in \mathcal{P}(A)$ तथा $\phi \in \mathcal{P}(A)$

4) $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$ होता है। अतः $\mathcal{P}(\phi)$ रिक्त समुच्चय नहीं होता। इसमें एक और केवल एक अवयव ϕ होता है

हम किसी भी दिए हुए समुच्चय के सभी संभव उपसमुच्चय तथा उनकी संख्या सरलतापूर्वक ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि हम एक समुच्चय $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ लें तो इसके सभी उपसमुच्चय इस प्रकार ज्ञात किए जा सकते हैं :

i) $A_0 = \{1,3,5,7,9\}$ (उपसमुच्चय की परिभाषा से A अपना उपसमुच्चय है)

ii) $A_{11} = \{1\}, A_{12} = \{3\}, A_{13} = \{5\}, A_{14} = \{7\}, A_{15} = \{9\}$

iii) $A_{21} = \{1,3\}, A_{22} = \{1,5\}, A_{23} = \{1,7\}, A_{24} = \{1,9\}, A_{25} = \{3,5\}, A_{26} = \{3,7\}$

$A_{27} = \{3,9\}, A_{28} = \{5,7\}, A_{29} = \{5,9\}, A_{20} = \{7,9\}$

iv) $A_{31} = \{1,3,5\}, A_{32} = \{1,3,7\}, A_{33} = \{1,3,9\}, A_{34} = \{1,5,7\},$

$A_{35} = \{1,5,9\}, A_{36} = \{1,7,9\}\ A_{37} = \{3,5,7\}, A_{38} = \{3,5,9\},$

$A_{39} = \{3,7,9\}, A_{30} = \{5,7,9\}$

v) $A_{41} = \{1,3,5,7\}, A_{42} = \{1,3,5,9\}, A_{43} = \{1,3,7,9\}, A_{44} = \{1,5,7,9\},$
$A_{45} = \{3,5,7,9\}$

vi) $\Phi = \{\ \}.$

जब हम इन सभी उपसमुच्चयों की गणना करते हैं, तो पाते हैं कि इनकी संख्या 32 है। व्यापक रूप में 32 = 2^5 अतः n अवयवों वाले किसी भी समुच्चय के उपसमुच्चयों की कुल संख्या 2^n होती है।

उदाहरण 5 : यदि A = {h, I, j, k, l} है तो इसके भी $2^5 = 32.$ उपसमुच्चय होंगे। इनमें से कुछ नीचे दिए हैं

X = {I, j, l}⊂A

Y = {h, l} ⊂ A

Z = {I, j} ⊂A

हम देख सकते हैं कि Z, X का भी उपसमुच्चय है। अर्थात् Z⊂X

ध्यान दें कि X, Y, Z सभी P(A) के अवयव हैं। अर्थात् X P(A)[Y P (A), Z [(A) विद्यार्थियों से अनुरोध है कि P(X) के सभी अवयवों को सूचीबद्ध करें।

बोध प्रश्न 2

1) समुच्चय {a, b, c}के सभी उपसमुच्चय ज्ञात करें। इनकी संख्या क्या होगी?

....

....

....

....

....

....

2) नीचे दिए समुच्चयों में $(\subseteq, \subset, =)$ के आधार पर यदि कोई संबंध, हो तो, उसे ज्ञात कीजिए :

$$A = \{x : 0 \le x \le 1\}$$

$$B = \{x : 0 < x < 1\}$$

$$C = \{x : 0 \le x < 1\}$$

$$D = \{x : 0 \le x^2 \le 1\}$$

....

....

....

....

....

3) किसी उपसमुच्चय के घात समुच्चय की संकल्पना की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

....

1.4 समुच्चयों पर संक्रियाएँ (Operations on Sets)

साधारण अंकगणित तथा बीजगणित में, चार सामान्य संक्रियाएँ हैं, जिन्हें अंकों/व्यंजकों पर किया जा सकता है, वे हैं : योग, व्यवकलन, गुणनफल तथा विभाजन। इसी प्रकार, समुच्चयों पर मुख्यतः दो संक्रियाएँ की जा सकती हैं। ये हैं समुच्च्य सम्मिलन तथा समुच्च्यों की उभयनिष्ठता। इस खंड में हम इन संक्रियाओं के बारे में पढ़ेंगे।

1.4.1 समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Sets)

दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन, जिसे $A \cup B$ से व्यक्त किया जाता है, एक ऐसा समुच्चय C होता है जिसमें A के सभी अवयवों के साथ-साथ B के भी सभी अवयव है। वे अवयव जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हों, वे $A \cup B$ केवल एक बार लिखे जाते हैं :

सांकेतिक रूप में, $C = A \cup B = \{x \mid x \in A$ अथवा $x \in B\}$

उदाहरण 6 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

ध्यान दें कि $A \cup B$ को लिखने के हमने मात्र A और B के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया है और ''5'' को, जो कि A और B दोनों में है, केवल एक बार लिखा है।

उदाहरण 7 : यदि A= चार्ल्स डिकेंस द्वारा लिखी गई सभी पुस्तकों का समुच्चय तथा

B= मार्क ट्वेन द्वारा लिखी गई सभी पुस्तकों का समुच्चय है। अतः,

$A \cup B$ = उन पुस्तकों का समुच्चय होगा जो या तो चार्ल्स डिकेंस द्वारा लिखी गई हों या मार्क ट्वेन द्वारा।

उदाहरण 8 : मान लीलिए $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{3, 4, 7, 8\}$है। अतः $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$. ध्यान दें कि समुच्चय में हमने अवयवों 3 और 4 को केवल एक ही बार लिखा है यद्यपि ये दोनों A और B दोनों समुच्चयों के अवयव थे।

1.4.2 समुच्चयों की उभयनिष्ठता (Intersection of Sets)

दो समुच्चयों A और B का उभयनिष्ठ समुच्च्य C, जिसे $A \cap B$ से व्यक्त किया जाता है, उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो A और B दोनों में उपस्थित हैं।

सांकेतिक भाषा में,

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ और } x \in B\}$$

उदाहरण 9 : मान लीजिए –

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ तथा $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ है।

3 और 5 A और B के उभयनिष्ठ अवयव हैं।

अतः $A \cap B = \{3,5\}$ होगा।

उदाहरण 10 : यदि A = अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय है, तथा

B = अंग्रेज़ी वर्णमाला के स्वरों का समुच्चय है।

तो $A \cap B$ = अंग्रेज़ी वर्णमाला के स्वरों का समुच्चय होगा।

उदाहरण 11 : मान लीजिए

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

है। हम देख सकते हैं कि A और B में कोई भी उभयनिष्ठ अवयव नहीं है। अतः $A \cap B$ में कोई भी अवयव नहीं होगा। अर्थात् $A \cap B = \varnothing$.

इसी प्रकार, हम दो से अधिक समुच्चयों का उभयनिष्ठ भी ज्ञात कर सकते हैं। यदि A, B और C तीन समुच्चय हैं, तो $A \cap B \cap C$ उन अवयवों का समुच्चय होगा जो तीनों समुच्चयों A, B और C में उपस्थित हों।

उदाहरण 12 : यदि $A = \{m, n, o, p\}$, $B = \{m, o, p, q\}$ तथा $C = \{n, q, r\}$ है, तो $A \cap B \cap C = \emptyset$ होगा क्योंकि A, B और C कोई भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं है।

उदाहरण 13 : मान लीजिए $A = \{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$; $B = \{2, 7, 9, 11, 17, 19\}$; $C = \{0, 2, 5, 7, 19, 24\}$तथा $D = \{2, 7, 9\}$ हैं अतः $A \cap B \cap C \cap D = \{2, 7\}$होगा।

उदाहरण 14 : मान लीजिए $A = \{x \mid x \in R$ तथा $0 \le x \le 7\}$, $B= \{x \mid x \in R$ और $3 \le x \le 9$ है। अतः $A \cap B=\{x \mid x \in R$ और $3 \le x \le 7\}$ होगा।

असंयुक्त समुच्चय (Disjoint Sets)

दो समुच्चय A और B असंयुक्त कहलाते हैं यदि $A \cap B = \phi$ हो, अर्थात्, A और B में कोई भी उभयनिष्ठ अवयव न हो।

1.4.3 समुच्चयों का अंतर (Difference of Sets)

दो समुच्चयों A और B का अंतर, जिसे A/B अथवा $A - B$ से व्यक्त किया जाता है, उन अवयवों का समुच्चय है जो A में है किंतु B में नहीं हैं। सांकेतिक भाषा में,

$$A - B = \{x : x \in A \text{ और } x \notin B\}$$

उदाहरण 15 : यदि $A= \{1, 2, 3, 4, 5)$ तथा $B = \{4, 5, 6,7\}$ है तो $A - B = \{1, 2, 3\}$ होगा क्योंकि केवल 1, 2 और 3 ही समुच्चय A के वे अवयव हैं, जो B में उपस्थित नहीं हैं। अतः उन्हें $A - B$ में सम्मिलित नहीं किया गया।

इसी प्रकार, $B - A = \{6, 7\}$ है।

किसी समुच्चय का पूरक : हमने पीछे सार्वत्रिक समुच्च्य की संकल्पना की व्याख्या की थी।

यदि U एक सार्वत्रिक समुच्च्य है तथा A उसका एक उपसमुच्च्य है तो A का पूरक U के उन अवयवों का समुच्च्य है जो A में नहीं है। A के पूरक को A' से व्यक्त किया जाता है। स्पष्ट है कि $A' = U - A$ होगा।

अतः $A' = U - A = \{x \in U \mid x \notin A\}$

उदाहरण के लिए, यदि U= प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है तथा E= सम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय, तो हम देख सकते हैं कि $A \subset U$, अतः A का पूरक $A' = U - A$, विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय होगा।

उदाहरण 16 : यदि $A = \{ m, n, o, p \}$, $B = \{ m, o, p, q \}$, $C = \{ m, p, r \}$ है तथा सार्वत्रिक समुच्चय $E = \{ k, l, m, n, o, p, q, r, s \}$ है, तो

a) $A \cup B = \{ m, n, o, p, q \}$

b) $A \cup C = \{ m, n, o, p, r \}$

c) $B \cup C = \{m, o, p, q, r \}$

d) $A \cup B \cup C = \{m, n, o, p, q, r \}$

e) $(A\cup B)' = \{k, l, r, s \}$ U के ऐसे अवयवों का समुच्चय है जो $A\cup B$ में नहीं हैं।

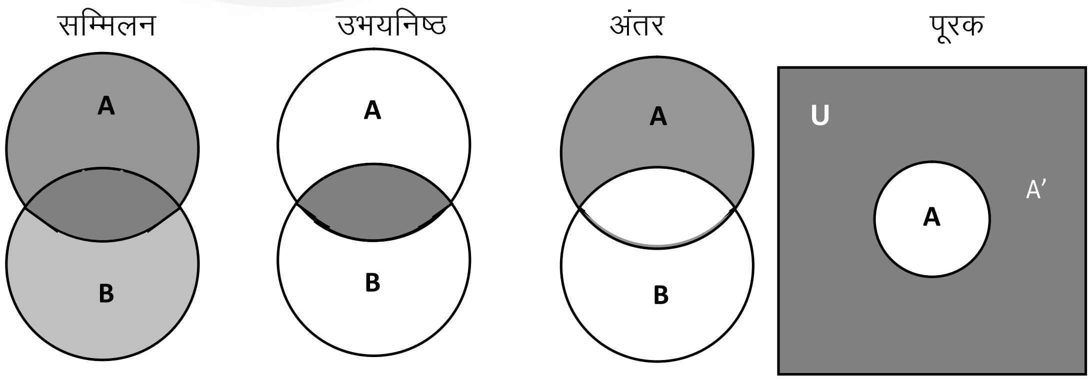
इसी प्रकार, हम देख सकते हैं कि

$(A\cup C)' = \{k, l, q, s \}$

$(B \cup C)' = \{k, l, n, s \}$

$(A\cup B \cup C)' = \{k, l, s \}$

समुच्चयों पर संक्रियाएँ – सम्मिलन, उभयनिष्ठ, अंतर तथा पूरक – वेन आरेखों के माध्यम से भली-भाँति निरूपित की जा सकती है। नीचे दिए रेखाचित्रों को देखें। इन रेखाचित्रों में दो समुच्चयों A और B पर विभिन्न संक्रियाओं को निरूपित किया गया है। रेखाचित्र 1.4 में समुच्चयों A और B का सम्मिलन, $A \bigcup B$ निरूपित किया गया है जबकि रेखाचित्र 1.5 में A और B का उभयनिष्ठ, $A \bigcap B$। इसी प्रकार रेखाचित्र 1.6 में $A - B$ तथा रेखाचित्र 1.7 में A' को निरूपित किया गया है। प्रत्येक रेखाचित्र में संगत संक्रिया के फलस्वरूप प्राप्त होने वाले क्षेत्र का छायांकित किया गया है। रेखाचित्र में सार्वत्रिक समुच्चय को एक आयत/वर्ग से निरूपित किया गया है।



रेखाचित्र 1.4 रेखाचित्र 1.5 रेखाचित्र 1.6 रेखाचित्र 1.7

अब हम इन संक्रियाओं से संबंधित कुछ आधारभूत संबंधों का उल्लेख करेंगे।

नीचे दिए नियम या गुणधर्म सरलतापूर्वक सिद्ध किए जा सकते हैं परंतु हमने इनकी उत्पत्ति यहाँ नहीं दी है क्योंकि यह इस पाठ्यक्रम की परिधि से बाहर है।

क्रम विनिमय, साहचर्य तथा बंटन/वितरण नियम (Commutativity, Associativity, Distributivity)

1) समुच्चयों का सम्मिलन तथा उभयनिष्ठ क्रम विनिमय तथा साहचर्य गुणों का पालन करते हैं :

   (i) $A \cup B = B \cup A, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   (ii) $A \cap B = B \cap A, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2) समुच्चयों का सम्मिलन उनके उभयनिष्ठ पर तथा उनका उभयनिष्ठ, सम्मिलन पर वितरित होता है :

   (i) $A \cup (B \cap C) \quad = \quad (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   (ii) $A \cap (B \cup C) \quad = \quad (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3) डी मॉरगन के नियम

   डी मॉरगन के नियमों के अनुसार दो समुच्चयों के सम्मिलन का पूरक उनके पूरकों का उभयनिष्ठ होता है। इसी प्रकार दो समुच्चयों के उभयनिष्ठ का पूरक उनके पूरकों का सम्मिलन होता है। सांकेतिक भाषा में इन नियमों को इस प्रकार से लिखा जा सकता है :

   $$C/(A \cup B) = (C/A) \cap (C/B)$$

   तथा $$C/(A \cap B) = (C/A) \cup (C/B)$$

1.4.4 समुच्चय का विभक्तीकरण (Partition of a Set)

किसी दिए हुए समुच्चय U का विभक्तीकरण, उसके परस्पर असंयुक्त उपसमुच्चयों का ऐसा संग्रह है जिनका सम्मिलन U हो। मान लीजिए $X_i, i = 1,2, \dots, n$, U के n उपसमुच्चय हैं जो निम्नलिखित गुणों को संतुष्ट करते हैं :

i) $X_i \cap X_j = \emptyset,\ i, j = 1, 2, \dots, n,\ i \neq j$

   अर्थात् कोई भी दो भिन्न समुच्चय X_i और X_j परस्पर असंयुक्त हैं, तथा

ii) $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_n = U$

   अर्थात् $X_1,\ X_2,\ X_3, \dots, X_n$ के सम्मिलन से हमें समुच्चय U प्राप्त होता है।

ध्यान देने योग्य बिंदु यह है कि यदि $X_1,\ X_2,\ X_3, \dots, X_n$ U के विभक्तीकरण है और U का प्रत्येक अवयव एक और केवल एक X_i में होगा। आइए, हम इस उपसमुच्च्य समूह को S द्वारा व्यक्त करें तो इनका सम्मिलन $\cup_{i=1}^{n} X_i$ द्वारा दिखाया जा सकता है।

किसी समुच्चय U के विभक्तीकरण को हम निम्नरूप में भी लिख सकते हैं।

उदाहरण : समुच्चय U = {1,2,3,4,5,6} के लिए $X_1 = \{1,2\}$, $\underline{X_2} = \{3,5,6\}$, $X_3 = \{4\}$

एक विभक्तीकरण है क्योंकि

$X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_3 = X_1 \cap X_3 = \emptyset$ है,

तथा $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \cup$ है

व्यावहारिक उदाहरणों में हम देख सकते हैं कि

i) किसी देश के राज्यों का समूह देश का एक विभक्तीकरण है

ii) किसी महाद्वीप के अंतर्गत आने वाले देशों का समूह, उस महाद्वीप का एक विभक्तीकरण है।

टिप्पणी : एक समुच्चय $\cup$ के अनेक विभक्तीकरण हो सकते हैं।

बोध प्रश्न 3

1) मान लीजिए कि A शब्द 'trivial' में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय है तथा B शब्द 'difficult' में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय है। $A \cup B$ तथा $A \cap B$ ज्ञात कीजिए

....

....

....

....

....

2) यदि $X = Y$ है तो दर्शाइए की $X - Y = Y - X = \emptyset$ है।

....

....

....

....

3) मान लीजिए कि समुच्चय $C = \{(x_1, x_2): x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ एक उपभोक्ता के उपभोग को व्यक्त करता है तथा समुच्चय $B = \{(x_1, x_2): p_1x_1 + p_2x_2 \leq m\}$ उसके बजट को व्यक्त करता है। जहाँ x_1 और x_2 उपभोग की गई वस्तुओं की मात्राएँ हैं, p_1, $p_2 > 0$ उनके प्रति इकाई मूल्य हैं तथा उपभोक्ता की आय है। बताइए कि $B \cup C$ तथा $B \cap C$ क्या होंगे

....

....

....

....

4) यदि A = {1, 2}, B = {3, 4, 5} और C = {3, 5, 6, 7, 8}, तो दर्शाइए कि $A \cup B = B \cup A$ तथा $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ है

....

....

....

....

1.5 सार-संक्षेप

हमने अभी इस पाठ्यक्रम की पहली इकाई को पढ़ा है। समुच्चयों पर केंद्रित इस इकाई में जिन संकल्पनाओं से हमारा परिचय हुआ वे इस पाठ्यक्रम की नींव के पत्थरों के समान हैं। समुच्चयों के सिद्धांतों की जानकारी हमें गणितीय अर्थशास्त्र की संकल्पनाओं को, जिन्हें हम इस पाठ्यक्रम के दौरान पढ़ेंगे, समझने तथा उनके साथ कार्य करने में हमारी मदद करेगी। न केवल इस पाठ्यक्रम के लिए बल्कि अगले सेमेस्टर में पढ़े जाने वाले गणितीय अर्थशास्त्र के पाठ्यक्रम को समझने के लिए भी इस इकाई को अच्छी तरह से पढ़ना आवश्यक है।

हमने इकाई को समुच्च्य की परिभाषा तथा उसे निरूपित करने की विधियों से प्रारंभ किया तथा समुच्चयों को सारणीबद्ध रूप तथा समुच्च्य निर्माण रूप में व्यक्त करने की विधियाँ सीखीं। इसके पश्चात् उपसमुच्च्य, अधिसमुच्च्य तथा घात समुच्च्य के अर्थ स्पष्ट किए। साथ ही, हमने सार्वत्रिक समुच्च्य तथा किसी समुच्च्य के पूरक समुच्च्य के बारे में चर्चा की। तत्पश्चात् हमने समुच्च्यों के सम्मिलन, उभयनिष्ठ तथा अंतर इत्यादि संक्रियाओं पर विस्तार से चर्चा की। अंत में हमने इस इकाई को किसी समुच्च्य के विभक्तीकरण पर चर्चा के साथ समाप्त किया।

1.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) किसी समुच्चय के निरूपण की विधियों के लिए भाग 1.2 देखें।

2) केवल कथन (क) असत्य है।

बोध प्रश्न 2

1) हमें 2^3 अर्थात् 8 उपसमुच्चय प्राप्त होंगे।

2) भाग 1.3 को ध्यानपूर्वक पढ़ें।

3) किसी समुच्चय का घात समुच्चय, दिए हुए समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय/संग्रह होता है।

बोध प्रश्न 3

1) $A \cup B = \{t, r, i, v, a, l, d, f, c, u\}$ तथा $A \cap B = \{t, i, l\}$.

2) भाग 1.4 देखें।

3) $B \cup C = C$; $B \cap C = B$.

4) भाग 1.4 देखें।

इकाई 2 संबंध एवं फलन*

संरचना

2.0 उद्देश्य

2.1 विषय-प्रवेश

2.2 क्रमित युग्म तथा कार्तीय गुणन (Ordered Pairs and Cartesian Products)

2.2.1 क्रमित युग्म (Ordered Pairs)

2.2.2 समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Sets)

2.3 संबंध (Relations)

2.3.1 संबंधों के प्रांत एवं परिसर (Domain and Range of Relations)

2.3.2 संबंधों के गुणधर्म (Properties of Relations)

2.3.3 विशिष्ट संबंध (Special Relations)

2.4 फलन (Functions)

2.4.1 फलन का प्रांत, परिसर, लक्ष्य और सहप्रांत (Domain, Range, Target and Codomain of a Function)

2.4.2 एकैकी, आच्छादी एवं एकैकी आच्छादी फलन (Injective, Surjective, Bijective Functions)

2.4.3 फलनों के अंतर्गत समुच्चयों के प्रतिबिंब तथा प्रतिलोम प्रतिबिंब (Image and Inverse Image of Sets under Functions)

2.5 वास्तविक वितान तथा बिंदु समुच्चय (Real Space and Point-Sets)

2.6 संगतता तथा समुच्चय-फलन (Correspondence and Set Functions)

2.6.1 संगतता (Correspondence)

2.6.2 समुच्चय फलन (Set-functions)

2.7 सार-संक्षेप

2.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

2.0 उद्देश्य

पिछले इकाई में हमने समुच्चयों के बारे में पढ़ा। इस इकाई में समुच्चयों के संयोजन की विधियों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे और देखेंगे कि समुच्चयों के संयोजन से किस प्रकार नए समुच्चय प्राप्त होते हैं। इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप समर्थ हो जाएंगे :

- दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन ज्ञात करने में;
- संबंधों और फलनों की अवधारणाओं का समझने में;
- फलनों एवं संगतता के अंतर को समझने में;
- वास्तविक वितान तथा बिंदु-समुच्चयों की संकल्पनाओं को समझने में; तथा
- समुच्चय-फलनों की संकलपना को समझने में।

*श्री अनूप चटर्जी

2.1 विषय-प्रवेश

पिछली इकाई में, जो कि इस पाठ्यक्रम की पहली इकाई थी, पाठकों को समुच्चयों की अवधारणा से अवगत करवाया गया जोकि इस पाठ्यक्रम के आधारभूत संदर्भ हैं। हमने उपसमुच्चय, अधिसमुच्चय तथा घात समुच्चय के बारे में भी जानकारी प्राप्त की। यह इकाई पूर्णतः पिछली इकाई में विकसित की गई संकल्पनाओं पर आधारित है। पिछली इकाई में पाठकों को समुच्चयों पर की जाने वाली संक्रियाओं जैसे कि समुच्चयों का सम्मिलन, समुच्चयों का सर्वनिष्ठ तथा समुच्चयों का अंतर आदि की भी चर्चा की गई। यह इकाई समुच्चयों पर एक और संक्रिया, समुच्चयों के गुणन से प्रारंभ होती है। इसके आधार पर हम एक महत्त्वपूर्ण संकल्पना 'संबंध' की व्याख्या करेंगे जिसे समुच्चयों के गुणनफल के उपसमुच्चय द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

तत्पश्चात्, इस इकाई में हम फलनों की अवधारणा की व्याख्या करेंगे जो कुछ विशिष्ट प्रकार के संबंध होते हैं। फलन के कुछ नियत तत्व होते हैं जिन्हें प्रांत तथा सह-प्रांत कहते हैं। ये प्रांत तथा सहप्रांत वास्तव में समुच्चय ही होते हैं। यदि इस समुच्चयों के अवयव भी समुच्चय हों तो संगतता तथा समुच्चय फलनों की संकल्पनाओं का उदय होता है। इस सारी चर्चा के दौरान, हमें कुछ विशेष प्रकार के फलनों के बारे में जानने का भी अवसर मिलेगा। हम जानते हैं कि समुच्चय, वस्तुओं के संग्रह होते हैं। मान लीजिए, किसी समुच्चय के अवयव वास्तविक संख्याएँ हैं। इस समुच्चय को हम वास्तविक संख्याओं का समुच्चय कहते हैं। इस इकाई में वास्तविक संख्याओं के समुच्चय तथा उसके कार्तीय गुणन तथा उनके कुछ गुणधर्मों की भी चर्चा की गई है।

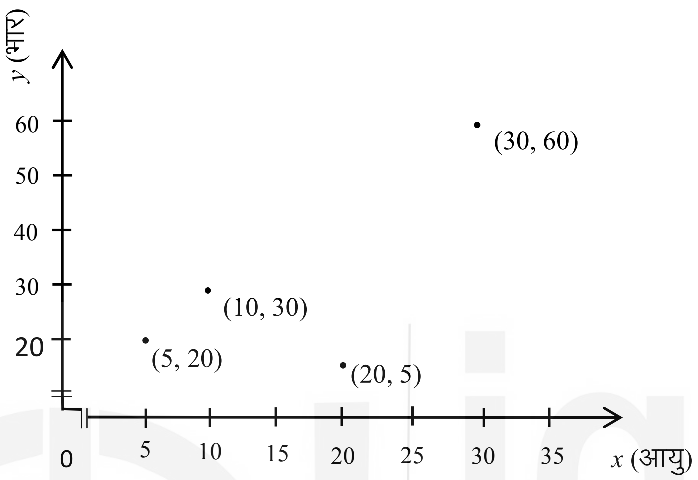
2.2 क्रमित युग्म तथा कार्तीय गुणन (Ordered Pairs and Cartesian Products)

2.2.1 क्रमित युग्म (Ordered Pairs)

जब हम किसी समुच्चय को {a, b} के रूप में लिखते हैं तो हम इस बात पर ध्यान नहीं देते कि समुच्चय के अवयवों को किस क्रम में लिखा गया है। अर्थात् समुच्चय {a, b} और समुच्चय {b, a} समान हैं। इस स्थिति में हम कहते हैं कि अवयवों (संख्याओं) a और b का युग्म {a, b} एक अक्रमित युग्म है। यदि अवयवों (संख्याओं) का क्रम महत्त्वपूर्ण हो, तो हम a और b के दो पृथक् क्रमित युग्म (a, b) तथा (b, a) प्राप्त करते हैं। ये दोनों क्रमित युग्म एक-दूसरे से अलग होते हैं, अर्थात् $(a, b) \neq (b, a)$ होता है। यद्यपि हमने यहाँ केवल क्रमित युग्मों के बारे में चर्चा की है, परंतु इसी प्रकार हम संख्याओं, अवयवों के क्रमिक त्रिक, चतुष्क अथवा पंचक भी बना सकते हैं। व्यापक रूप में, यदि हमारे पास n-अवयव/संख्याएँ $X = \{x_1, x_2, x_3 \dots x_n\}$ हों, इस n-टपल में प्रयुक्त अवयव क्रमबद्ध हों तो, हमें एक क्रमित n-टपल प्राप्त होता है। सामान्यतः, क्रमित युग्म, त्रिक अथवा n-टपल, क्रमित समुच्चय कहलाते हैं। क्रमित समुच्चयों को मध्यम कोष्टकों {…} के स्थान पर लघु कोष्ठकों (…) द्वारा व्यक्त किया जाता है। अब हम क्रमित युग्मों के उपयोग के कुछ उदाहरण लेते हैं।

मान लीजिए (x, y) एक क्रमित युग्म है जहाँ $x \in X$ तथा $y \in Y$ है। साथ ही, मान लीजिए कि x एक कक्षा के विद्यार्थियों की आयु को तथा $y = \{y_1, y_2, y_3 \dots y_n\}$ उनके भार को व्यक्त करता है। इस स्थिति में (x, y), उस कक्षा के विद्यार्थियों के गुणों, आयु तथा भार के युग्म को व्यक्त करेगा। क्रमित युग्म के इस निरूपण को समझने के लिए हम x और y को संख्यात्मक मान देते हैं। मान लीजिए x = 12 वर्ष तथा y = 50

किलोग्राम है। इस स्थिति में, (12, 50) आयु तथा भार के एक क्रमित युग्म को निरूपित करता है जिसमें प्रथम *प्रविष्टि* एक विद्यार्थी की आयु को तथा दूसरी *प्रविष्टि* उसके भार को व्यक्त करती है। यदि हम इन प्रविष्टियों का क्रम बदल दें और (12, 50) के स्थान पर (50, 12) लिखें, तो हमें विद्यार्थी की आयु 50 वर्ष तथा उसका भार 12 वर्ष प्राप्त होगा। क्रमित युग्म की संकल्पना ठीक से समझने के लिए रेखाचित्र 2.1 देखें। ध्यान दें कि इस रेखाचित्र में युग्म (5, 20) तथा (20, 5) की स्थिति अलग-अलग है क्योंकि इनमें उपयुक्त संख्याओं X और Y का क्रम बदल दिया गया है।



रेखाचित्र 2.1

परिभाषा : मान लीजिए X और Y तो कोई भी दो अरिक्त समुच्चय हैं तथा $x \in X$ और $y \in Y$ है। एक क्रमित युग्म (x, y), एक ऐसा युग्म होता है जिसमें $(x, y) \neq (y, x)$ हो यदि $x \neq y$ है। अर्थात् $(x, y) = (y, x)$ केवल तभी होगा, यदि $x = y$ हो। साथ ही, $(p, q) = (r, s)$ तभी और केवल तभी होगा यदि $p = r$ तथा $q = s$ हो।

नोट : किसी क्रमित युग्म (x, y) में x को प्रथम प्रविष्टि घटक तथा y को दूसरी प्रविष्टि कहते हैं।

2.2.2 समुच्चयों का कार्तीय गुणन **(Cartesian Product of Sets)**

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं। X और Y का कार्तीय गुणन, जिसे $X \times Y$ से व्यक्त किया जाता है, ऐसे सभी क्रमित युग्मों (x, y) का संग्रह/समुच्चय है जिनमें $x \in X$ का तथा $y \in Y$ का अवयव है। कार्तीय गुणन $X \times Y$ को इस प्रकार लिया जा सकता है

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ and } y \in Y\}$$

उदाहरण 1 : मान लीजिए $A = \{a, b, c\}$ और $X = \{2, 5\}$ है।

इस स्थिति में, $H = \{(a,2);(a,5),(b,2);(b,5),(c,2);(c,5)\}$ होगा।

उपरोक्त चर्चा से हम नीचे दिए निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

1) हम क्रमित युग्म की परिभाषा से क्रमित n-टपल $(x_1, x_2, ..., x_n)$ की परिभाषा प्राप्त कर सकते हैं। इसी प्रकार n-समुच्चयों $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \left(n \in \mathbb{N}^+, n > 2\right)$ के कार्तीय गुणन को भी निम्न रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

2) हम $A \times A$ को सामान्यतः A^2 लिखते हैं। इसी प्रकार A^n का अर्थ है $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$

2.3 संबंध (Relation)

किसी अरिक्त समुच्चय X से अरिक्त समुच्चय B में एक संबंध, उनके कार्तीय गुणन $X \times Y$ का एक उपसमुच्चय होता है। मान लीजिए X और Y दो समुच्चय है तथा $\rho \subseteq X \times Y$ है, अर्थात्, $\rho \subseteq X \times Y$ का कोई उपसमुच्चय है तो ρ समुच्चय X से समुच्चय Y तक एक संबंध कहलाता है (या ρ, X और Y के अवयवों के बीच एक संबंध है)। यदि $\rho \subseteq X \times X$ है तो हम कहते हैं कि ρ, X में एक संबंध है।

उदाहरण 2 : माना $X = \{1,3,5\}$ तथा $Y = \{2,4,6\}$ है और S समुच्चयों X और Y का कार्तीय गुणन है। अतः

$$S = \{(1,2);(1,4);(1,6);(3,2);(3,4);(3,6);(5,2);(5,4);(5,6)\}$$

होगा। यहाँ हम X से Y तक कोई संबंध (ρ) ज्ञात करना चाहते हैं। निश्चित रूप से X से Y तक यह संबंध $X \times Y$ का एक उपसमुच्चय होगा।

इसके लिए हम नीचे दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार $X \times Y$ के उपसमुच्चय ज्ञात करते हैं। इस प्रकार, प्राप्त प्रत्येक उपसमुच्चय दिए हुए प्रतिबंध के संगत, X से Y तक एक संबंध को निरूपित करेगा।

i) $(x+y)$, 3 का एक गुणज है

ii) $(x+y) \leq 7$

iii) $x > y$

आइये, इन संबंधों को ज्ञात करें :

i) $(1,2);(3,6);(5,4)$

ii) $(1,2);(1,4);(1,6)$; (3, 2); (3, 4); (5, 2)

iii) $(3,2);(5,2);(5,4)$

संबंधों के कुछ उदाहरण :

1) किसी अरिक्त समुच्चय X में समानता का संबंध, अर्थात् $\rho_1 = \{(x,x) : x \in X\}$ अतः $(x, y) \in \rho_1 \subseteq X \times X$ यदि और केवल यदि $x = y$ हो।

2) $\mathbb{N}^+$ में विभाज्यता का संबंध

$\rho_2 = \{(m, n) \in \mathrm{N}^+ \times \mathrm{N}^+ : \exists \, \mathrm{k} \in \mathrm{N}^+ \quad n = k \, . \, m\}$

अतः $(m, n) \in \rho_2 \subseteq \mathrm{N}^+ \times \mathrm{N}^+$ iff $m|n$, यदि और केवल यदि

अर्थात्, n, m से पूरा-पूरा विभाज्य हो।

टिप्पणी : $\exists$ का अर्थ है, 'हम ज्ञात कर सकते हैं (कम से कम एक)

3) R में 'से कम है' का संबंध

$\rho_3 = \{(x, y) \in R \times R : x < y\}$,

अतः $(x, y) \in \rho_3 \subseteq R \times R$ iff $y - x$ [यदि और केवल यदि y - x एक धनात्मक संख्या है]।

4) R में 'से अधिक है या के समान है' का संबंध

$\rho_4 = \{(x, y) \in R \times R : x \geq y\}$,

अतः $(x, y) \in \rho_4 \subseteq R \times R$ यदि और केवल यदि $x - y$ एक अऋणात्मक संख्या है।

5) किसी तल के सभी त्रिभुजों के समुच्चय T और सभी अऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{R}_0^+$ में संबंध

$\rho_5 = \{(t, a) \in T \times \mathbb{R}_0^+$: त्रिभुज t का क्षेत्रफल a है$\}$।

6) सभी अऋणात्मक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{R}_0^+$ तथा किसी तल के सभी त्रिभुजों के समुच्चय T में संबंध

$\rho_6 = \{(a, t) \in \mathbb{R}_0^+ \times T$: त्रिभुज t का क्षेत्रफल a है।

7) किसी तल के सभी वृत्तों के समुच्चय C तथा उसी तल की सभी सरल रेखाओं के समुच्चय L में संबंध

$\rho_7 = \{(c, l) \in C \times L$: रेखा l, वृत्त c की एक स्पर्श रेखा है)

2.3.1 संबंधों के प्रांत एवं परिसर (Domain and Range of Relations)

मान लीजिए कि X और Y दो अरिक्त समुच्चय है और ρ, X से Y तक एक संबंध है। अर्थात् $\rho \subseteq X \times Y$ है।

1) **संबंध ρ का प्रांत :**

समुच्चय X से समुच्चय Y तक किसी संबंध का प्रांत, ρ में उपस्थित सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों का संग्रह/समुच्चय होता है। इसे हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते है :

$$D(\rho) := \{x \in X : \exists y \in Y \ (x, y) \in \rho\}$$

2) **संबंध ρ का परिसर :**

समुच्चय X से समुच्चय Y तक किसी संबंध का परिसर, ρ में उपस्थित सभी क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों का संग्रह/समुच्चय होता है। इसे हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते है :

$$R(\rho) := \{y \in Y : \exists x \in X \ (x, y) \in \rho\}$$

2.3.2 संबंधों के गुणधर्म/अभिलक्षण (Properties of Relations)

मान लीजिए X का एक अरिक्त समुच्चय है और ρ, X में संबंध है। अर्थात् $\rho \subseteq X^2$ है।

1) स्वतुल्यता (**Reflexivity**)

संबंध ρ *स्वतुल्य* कहलाता है यदि $\forall x \in X \; (x,x) \in \rho.$

टिप्पणी : यहाँ $\forall$ का अर्थ है 'प्रत्येक x के लिए'

2) अस्वतुल्यता (**Irreflexivity**)

संबंध ρ *अस्वतुल्य* कहलाता है यदि $\forall x \in X \; (x,x) \notin \rho.$

3) सममिति (**Symmetry**)

संबंध ρ *सममिति* कहलाता है यदि $\forall (x,y) \in \rho \; (y,x) \in \rho$ जब भी (x, y) ρ में हो तो (x, y) भी ρ में हो। अर्थात् $(x,y) \in \rho = (y,x) \in \rho$

4) प्रतिसममिति (**Antisymmetry**)

संबंध ρ *प्रतिसममित* कहलाता है यदि, जब भी (x, y) और (y, x), दोनों ρ में हो तो निश्चित रूप से $x = y$ हो। अर्थात् $(x, y) \in \rho$ यदि $(y, x) \in \rho = \; x = y$

5) सकर्मकता (**Transitivity**)

संबंध ρ *सकर्मकता* कहलाता है यदि, जब भी (x, y) और (y, z), दोनों ρ में हो तो (x, z) भी ρ में हो। अर्थात् यदि $(x, y) \in \rho$, $(y, z) \in \rho = (x,z) \in \rho$

2.3.3 विशिष्ट संबंध (Special Relations)

मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है तथा ρ, X पर एक संबंध है। अर्थात् $\rho \subseteq X^2$ है।

1) तुल्यता संबंध

ρ एक *तुल्यता संबंध* कहलाता है यदि वह एक

(क) स्वतुल्य, (ख) सममित, तथा (ग) सकर्मक संबंध है।

2) क्रम संबंध

ρ एक *क्रम संबंध* कहलाता है यदि वह एक

(क) स्वतुल्य (ख) प्रतिसममित, तथा (ग) सकर्मक संबंध है।

हम कह सकते हैं कि कोई क्रम संबंध ρ, एक पूर्ण या रेखीय क्रम संबंध कहलाता है यदि प्रत्येक क्रमित युग्म $(x, y) \in X^2$ के लिए या तो $(x, y) \in \rho$ हो अथवा $(y,x) \in \rho$ हो। अन्यथा, ρ को आंशिक क्रम संबंध कहते हैं।

3) व्युत्क्रम संबंध

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त संबंध हैं तथा ρ, X से Y तक एक संबंध है अर्थात् $\rho \subseteq X \times Y$ है। ρ के व्युत्क्रम या प्रतिलोम संबंध जिसे ρ^{-1} से व्यक्त किया जाता है, को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : \; (x,y) \in \rho\}$$

समुच्चयों का वर्गीकरण

मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है। X के उपसमुच्चयों का एक समुच्चय (Z द्वारा दिखाया गया) X का एक वर्गीकरण कहलाता है यदि ये शर्तें संतुष्ट हो रही हों :

i) $\forall A \in Z, A$ X का एक अरिक्त उपसमुच्चय हो,

ii) $(A, B \in Z$ और $A \neq B)$ का अर्थ है $A \cap B = \phi$,

iii) $\cup Z$ [उपसमुच्चयों के समुच्चय Z का एक योग] $= X$

Z A के घटकों को वर्गीकरण के वर्ग कहा जाता है।

तुल्यता वर्ग

मान लीजिए X एक अरिक्त समुच्चय है और ρ, X पर एक तुल्यता संबंध है।

प्रत्येक $x \in X$ के लिए हम A का एक उपसमुच्चय इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$A_x := \{y \in X : (x, y) \in \rho\} \in \mathcal{P}(X)$$

यहाँ $\in \mathcal{P}(X)$ के घात समुच्चय को निरूपित करता है।

A_x को x का तुल्यता वर्ग कहते है।

बोध प्रश्न 1

1) संबंध क्या है?

....
....
....
....
....

2) तुल्यता वर्ग क्या है?

....
....
....
....
....

3) किसी संबंध के प्रांत एवं परिसर की परिभाषा दीजिए।

....
....
....
....
....
....

2.4 फलन (Functions)

हमने ऊपर की गई चर्चा में देखा कि एक क्रमित युग्म $\{x, y\}$, x के मान के संगत y का मान देता है। अतः, हम y और x के बीच एक संबंध की परिकल्पना कर सकते हैं। इस संबंध के द्वारा हमें x के एक मान के लिए, y के एक या एक से अधिक मान निर्दिष्ट किए जा सकते हैं। इस कथन को ठीक से समझने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरणः मान लीजिए $X = \{2, -2\}$ एक समुच्चय है और $y = (x^2)$ और x में y एक संबंध है। इस संबंध में यदि हम $x = 2$ लेते हैं तो हमें $y = 4$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार $x = -2$ लेने पर भी हमें $y = 4$ प्राप्त होता है। अतः, इस स्थिति में हम पाते हैं कि y के एक मान से संबंधित x के दो मान हैं।

उदाहरण : यदि क्रमित त्रयीं $X = \{1,3,5\}$ और $Y = \{2,4,6\}$ दो समुच्चय है तो संबंध $x > y$ को संतुष्ट करने वाले हमें तीन क्रमित युग्म प्राप्त होते हैं, $\{(3,2);(5,2);(5,4)\}$ यहाँ हम देख सकते हैं कि x के एक मान $x = 5$ से संबंधित y के दो मान $y = 2$ तथा $y = 4$ हैं।

इन उदाहरणों में हमने देखा कि यदि हमें x का कोई मान दिया हो, तो यह आवश्यक नहीं है कि किसी दिए हुए संबंध से y के एक अद्वितीय मान का निर्धारण किया जा सके। तथापि, यदि कोई संबंध ऐसा हो जिसमें x के प्रत्येक मान के संगत y का एक अद्वितीय मान हो, तो y, x का एक फलन कहा जाता है। इसे हम $y = f(x)$ से व्यक्त करते हैं। समुच्चय x से समुच्चय y तक किसी फलन को $y = f(x)$ से व्यक्त किया जाता है।

प्रतीकात्मक रूप में, यदि x और y दो अरिक्त समुच्चय हैं, तो X से Y तक एक संबंध $f \subseteq X \times Y$ एक फलन कहलाता है यदि

i) $D(f) = X$

ii) $\forall x \in X$ समुच्चय $\{y \in Y : (x, y) \in f\}$ में केवल एक ही सदस्य हो। अर्थात्, $\forall x \in X$ के लिए, समुच्चय y का एक और केवल एक अवयव $y \in Y$ होगा जिसके लिए $(x, y) \in f$ है।

टिप्पणी : अंकन ''$y = f(x)$ का अर्थ है'' y x का एक फलन है तथा $X \rightarrow Y$ का अर्थ है कि यह फलन X से Y तक है, अर्थात् $x \epsilon X$ के लिए, एक ऐसा $y \in Y$ मिलता है कि $(x, y) \in f$ है। दूसरे शब्दों में, $y = f(x)$, y का वह अवयव है जो f के द्वारा x से संबंधित है।

हम इसे f के अंतर्गत x का प्रतिबिंब या f का x पर मान भी कहते हैं। जब हम किसी फलन को $y = f(x)$ के रूप में लिखते हैं तो x को फलन का कोणांक तथा y को फलन का मान कहते हैं। अर्थशास्त्र में सामान्यतः x को स्वतंत्र चर के रूप में प्रयोग किया जाता है तथा y को निर्भर चर के रूप में।

2.4.1 फलन का प्रांत, परिसर, लक्ष्य और सहप्रांत (Domain, Range, Target and Codomain of a Function)

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं तथा $y = f(x)$, X से Y तक एक फलन है।

ध्यान दें कि X से Y तक प्रत्येक फलन, वास्तव में, X से Y तक एक ऐसा विशिष्ट संबंध होता है जिसमें X के प्रत्येक अवयव x के लिए, Y का एक और केवल एक अवयव y होता है।

अतः, हम फलन f के प्रांत तथा परिसर को निम्न रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

f का प्रांत $D(f) = \{ x : (x, y) \in f \} = X$

f का परिसर $R(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$

इसे $f(X)$ से भी व्यक्त किया जा सकता है।

ध्यान दें कि f का परिसर $R(f)$, f के प्रांत के अवयवों के प्रतिबिंबों का समूह है।

निश्चित रूप से $R(f)$, Y का उपसमुच्चय होगा। अर्थात् $R(f) \subseteq Y$ हो।

यदि $f : X \to Y$ तक एक फलन है तो Y को f का **सहप्रांत** कहते हैं। हम देख सकते हैं कि किसी फलन f का परिसर उसके सहप्रांत का उपसमुच्चय होता है।

फलन का सीमा बंधन

मान लीजिए कि X, Y और A अरिक्त समुच्चय है, $A \subseteq X$ है तथा $f : X \to Y$ तक एक फलन है। फलन $g : A \to Y$ जहाँ $g : A \to Y$, $g(x) = f(x)$ $A \subseteq X$ हो f *का* A तक/पर सीमाबंधन कहलाता है। इसे हम सांकेतिक रूप से $f|_A = g$ निरूपित करते हैं।

2.4.2 एकैक, आच्छादी तथा एकैकी-आच्छादी फलन (Injective, Surjective, Bijective Functions)

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं और $f : X \to Y$ एक फलन है।

1) **एकैक/एकैकी फलन**

   f एक एकैकी फलन कहलाता है यदि $\forall\ x, z \in X,\ f(x) = f(z)$ का अर्थ है $x = z$, या दूसरे शब्दों में $x \neq z = f(x) \neq f(z)$. अतः, कोई फलन $f : X \to Y$ एकैकी होगा यदि f के अंतर्गत, X के भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भी भिन्न हों।

2) **आच्छादी फलन**

   f एक आच्छादी फलन कहलाता है यदि

   $$\forall y \in Y,\ x \in X\ :\ f(x) = y, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

   $$R(f) = Y.$$

   अर्थात् y का प्रत्येक अवयव, f के अंतर्गत X के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिंब है। (1) में दिए हुए व्यंजक को हम इस प्रकार पढ़ते हैं Y के प्रत्येक अवयव Y के लिए, X का एक ऐसा अवयव x प्राप्त किया जा सकता है कि $f(x) = y$, हो।

ध्यान दें, कि यदि $f: X \to Y$ तक एक आच्छादी फलन है तो f का परिसर Y के बराबर होगा। अर्थात् $f(x) = y$, होगा।

3) **एकैकी आच्छादी फलन** : f एक एकैकी आच्छादी फलन कहलाता है यदि f एक एकैकी फलन भी है और आच्छादी फलन भी। अर्थात्, फलन $f: X \to Y$ एक एकैकी आच्छादी फलन होगा यदि Y के प्रत्येक अवयव Y के लिए X का एक और केवल एक अवयव x हो जिसके लिए $f(x) = y$ है।

फलनों की समानता

मान लीजिए f और g दो फलन हैं। f और g समान फलन कहलाते हैं अर्थात् $f = g$ होता है। यदि और केवल यदि

i) $D(f) = D(g)$ और (ii) $\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$.

प्रतिलोम फलन

मान लीजिए $f: X \to Y$ एक एकैकी आच्छादी फलन है। स्पष्टतः $R(f) = Y$ होगा। f का प्रतिलोम फलन, f^{-1}, $R(f)$ से X तक एक ऐसा फलन है जिसमें $f^{-1}(y) = x$ होगा जहाँ x समुच्चय X का वह अद्वितीय अवयव है जिसके लिए $f(x) = y$ है।

सांकेतिक भाषा में $f^{-1}: R(f) \to X$ को हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं –

$$f^{-1}(y) = x \langle = \rangle f(x) = y$$

फलनों का संयोजन

मान लीजिए कि $g: X \to Y$ तथा $f: Y \to Z$ दो फलन हैं हम फलनों f और g के संयोजन को जिसे हम $f\,o\,g$ से निरूपित करते हैं –

तथा $(f\,o\,g): X \to Z$,

$(f\,o\,g)(x) = f\{(g(x)\}\ \ \forall x \in X$

द्वारा परिभाषित होता है। स्पष्टतः $D(f\,o\,g) = \{x \in X: g(x) \in Y\}$

2.4.3 फलनों के अंतर्गत समुच्चयों के प्रतिबिंब तथा प्रतिलोम प्रतिबिंब (Image and Inverse Image of Sets under Functions)

मान लीजिए $f: X \to Y$ तक एक फलन है तथा A और B कोई दिए हुए समुच्चय है।

1) f के अंतर्गत A का प्रतिबिंब

हम समुच्चय A को f के अंतर्गत प्रतिबिंब को $f(A)$ से निरूपित करते हैं तथा इसे $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ के रूप में परिभाषित करते हैं।

ध्यान दें कि $f(A) = f(A \cap X) \subset f(X) = R(f) \subset Y$

2) ***f*** के अंतर्गत ***B*** का प्रतिलोम प्रतिबिंब :

f के अंतर्गत समुच्चय B के प्रतिलोम प्रतिबिंब को हम $f^{-1}(B)$ से व्यक्त करते हैं तथा इसे $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ के रूप में परिभाषित करते हैं।

ध्यान दें कि $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap Y) \subset f^{-1}(Y) = f^{-1}(R(f)) = X$

$f^{-1}(B)$ के विषय में यह ध्यान देना आवश्यक है कि किसी भी समुच्चय B के लिए और किसी भी फलन f के लिए "$f^{-1}(B)$" ज्ञात किया जा सकता है यदि f का प्रतिलोम न हो, तब भी। चिन्ह f^{-1} (B) में f^{-1} f से प्रतिलोम फलन को व्यक्त नहीं करता।

परंतु यदि फलन f एकैकी है तो f^{-1} (B) , f के प्रतिलोम फलन f^{-1} के अंतर्गत B का प्रतिबिंब होगा।

बोध प्रश्न 2

1) फलन की परिभाषा क्या है?

....

....

....

....

....

2) किसी आच्छादी फलन का उदाहरण दीजिए।

....

....

....

....

....

3) प्रतिलोम फलन की परिभाषा दीजिए।

....

....

....

....

....

2.5 वास्तविक वितान तथा बिंदु-समुच्चय (Real Space and Point- Sets)

अब तक हमने जाना है कि समुच्चय, संबंध और फलन क्या होते हैं। हम संख्या रेखा के बारे में भी जानते हैं, जिसमें 0 को एक बिंदु से निरूपित किया जाता है रेखा इस (मध्य) बिंदु के दोनों ओर अनंत तक जाती है। यह रेखा वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाती है, जिसे R से व्यक्त किया जाता है। अब एक अंतराल $[a, b]$ पर विचार कीजिए। यह a और b के बीच में आने वाली सभी संख्याओं का समुच्चय/समूह है।

तथा इसमें संख्याएँ a और b भी सम्मिलित हैं। हम देख सकते हैं कि यह अंतराल $[a, b]$, R का एक उपसमुच्चय है।

अतः हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय की अवधारणा को भली-भाँति समझते हैं। अर्थशास्त्र में पायी जाने वाली राशियों को सामान्यतः वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चयों द्वारा व्यक्त किया जाता है। इससे हम समझ सकते हैं कि अर्थशास्त्र की संकल्पनाओं को समझने में वास्तविक संख्याओं का समुच्चय और उसके उपसमुच्चय अत्याधिक महत्त्वपूर्ण है। हम इन समुच्चयों को बिंदुओं के समुच्चयों के रूपमें देख सकते हैं क्योंकि इन्हें संख्या रेखा पर बिंदुओं के रूप में दर्शाया जाता है। हम इन्हें बिंदु-समुच्चय कह सकते हैं। वास्तविक संख्याओं को दिखाने वाली संख्या-रेखा को **वास्तविक रेखा** कहते हैं।

आइये, अब हम समुच्चयों के कार्तीय गुणन की संकल्पना का उपयोग करें, जिसके बारे में हम पहले ही पढ़ चुके हैं। हमारे समक्ष वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R है। क्या हम इस समुच्चय का किसी दिए हुए समुच्चय से गुणा कर सकते हैं? बिल्कुल कर सकते हैं। और यदि वह दिया हुआ समुच्चय भी R ही हो तो? अर्थात् यदि हम R का गुणन स्वयं R से ही करें, तो ऐसा करने पर जो समुच्चय हमें प्राप्त होता है उसे R^2 से व्यक्त करते हैं।

इस समुच्चय, R^2 के अवयव क्या हैं? स्पष्टतः R^2 वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है। हम इसे एक रेखाचित्र के रूप में कैसे दर्शा सकते हैं? इसे सामान्यतः x और y-अक्षों के तल द्वारा (x-y-तल) दर्शाया जाता है। x-अक्ष और y-अक्ष, दोनों ही वास्तविक संख्याओं (वास्तविक संख्या रेखा) को निरूपित करते हैं, जो धनात्मक तथा ऋणात्मक, दोनों दिशाओं में अनंत तक जाती हैं। अंतर मात्र इतना ही है जहाँ x-अक्ष में संख्या रेखा क्षैतिज होती है, वहीं y-अक्ष में यह ऊर्ध्वाधर दिशा में अर्थात् अधोलंब के रूप में होती है। इस प्रकार, पूरा तल चार चतुर्थांशों में विभाजित हो जाता है। तल पर प्रत्येक बिंदु वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित युग्म होता है जिसमें से प्रथम घटक (पहली संख्या) को x-अक्ष पर तथा दूसरे घटक (दूसरी संख्या) को y-अक्ष पर निरूपित किया जाता है। यद्यपि एक क्रमित युग्म (x, y) और एक अंतराल (x, y) को एक ही प्रकार से व्यक्त किया जाता है, परंतु संदर्भ से यह स्पष्ट हो जाता है कि हम किसी क्रमित युग्म की बात कर रहे हैं अथवा अंतराल की। वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक क्रमित युग्म R^2 का सदस्य/अवयव होता है। इस प्रकार, R^2 भी एक बिंदु-समुच्चय (बिंदुओं का एक समुच्चय) है।

मान लीजिए कि ऐसा उपभोक्ता जो केवल सेबों और संतरों का उपभोग करता है। उसके द्वारा उपभोग किए गए सेबों तथा संतरों की संख्याओं के विभिन्न संयोजनों से वास्तव में, हमें संख्याओं के क्रमित युग्त प्राप्त होते हैं। इनमें से प्रत्येक युग्म R^2 का सदस्य है। परंतु इसके लिए हमें एक वस्तु को पहले तथा दूसरी को बाद में लिखना पड़ेगा। उदाहरण के लिए, मान लीजिए x-अक्ष सेबों की संख्या को तथा y-अक्ष संतरों की संख्या को निरूपित करता है। इस प्रकार, $(x, y) = (3, 4)$ का अर्थ होगा 3 सेब तथा 4 संतरे। क्योंकि यहां हम सेबों तथा संतरों की अऋणात्मक मात्राओं के माप की बात कर रहे हैं, इस स्थिति में प्राप्त होने वाले सभी क्रमित युग्म x-अक्ष और y-अक्ष के प्रतिच्छेदन से प्राप्त चतुर्थांशों में से पहले अर्थात् उत्तर-पूर्व चतुर्थांश में स्थित होंगे।

याद रहे कि दूसरे या उत्तर-दक्षिणी चतुर्थांश में वे क्रमित युग्म होते हैं जिनमें x-निर्देशांक ऋणात्मक तथा y-निर्देशांक धनात्मक होता है। इसी प्रकार, दक्षिण-पश्चिमी में दोनों संख्याएँ (निर्देशांक) ऋणात्मक होते हैं तथा दक्षिण-पूर्वी चतुर्थांश में x धनात्मक

तथा y ऋणात्मक होता है। प्रत्येक चतुर्थांश में बिंदुओं को क्रमित युग्मों द्वारा निरूपित किया जा सकता है। अतः, समुच्चय R^2 भी एक बिंदु समुच्चय अर्थात् बिंदुओं का समुच्चय है, जिनमें से प्रत्येक बिंदु एक क्रमित युग्म है। अतः ध्यान रहे कि यद्यपि प्रत्येक क्रमित युग्म दो संख्याओं से बनता है, तथापि क्रमित युग्म स्वयं एक ही बिंदु है अर्थात् वह समुच्चय R^2 का केवल एक अवयव है। संक्षेप में, हम कह सकते हैं कि R^2 एक ऐसा समुच्चय है जिसके अवयव क्रमित युग्म हैं, प्रत्येक क्रमित युग्म एक बिंदु है तथा फलस्वरूप R^2 एक बिंदु-समुच्चय है।

हमने ऊपर दो विशिष्ट बिंदु-समुच्चयों की चर्चा की है : R, जिसमें बिंदु वास्तविक संख्याएँ हैं तथा R^2, जिसमें बिंदु वास्तविक संख्याओं के क्रमित-युग्म हैं। क्या हम इस अवधारणा का और विस्तार कर सकते हैं। अर्थात् क्या हम ऐसे समुच्चयों की कल्पना कर सकते हैं जिनमें प्रत्येक अवयव (बिंदु) 2 से अधिक संख्याओं से बना हो? निश्चित रूप से हम ऐसा कर सकते हैं। ध्यान रहे कि हमने R^2 बनाने के लिए R का R से कार्तीय गुणन किया और R को $R \times R$ के रूप में प्राप्त किया।

इसी प्रकार, हम R^3 की कल्पना $R \times R \times R$ के रूप में कर सकते हैं। इस समुच्चय का प्रत्येक अवयव एक क्रमित त्रिक (x, y, z) होगा। अर्थात्

$$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

यदि हम तीन अक्ष, x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष लें, तो R^3 का प्रत्येक अवयव के तीन घटक x, y और z होंगे। जबकि R को एक सरल रेखा से निरूपित किया जा सकता है और R^2 को एक तल द्वारा, R^3 एक त्रि-आयामी संरचना है। इन तीनों समुच्चयों के अवयव बिंदु हैं। वास्तविक जीवन की स्थितियों के चित्रण में R^3 की अवधारणा का महत्त्व समझने के लिए कि ऊपर उदाहरण में विचाराधीन उपभोक्ता सेबों और संतरों के साथ-साथ केलों का भी उपभोग करता है। अतः, यदि हम प्रत्येक वस्तु (फल) की उपभोग की मात्रा को एक अक्ष पर अंकित करें, तो हमें उपभोग किए गए फलों को चित्रित करने के लिए तीन अक्षों की आवश्यकता होगी क्योंकि यहाँ तीन फल हैं।

अब मान लीजिए कि हमारे पास n वस्तुएँ हैं जहाँ $n > 3$ है। क्योंकि हम प्रत्येक वस्तु के माप को एक अक्ष पर निरूपित करते हैं, तो इन वस्तुओं की मात्राओं के किसी भी संयोजन को व्यक्त करने के लिए, हमें n-अक्षों की आवश्यकता होगी। ये n-अक्ष हमें कैसे प्राप्त होंगे? R के n बार कार्तीय गुणन द्वारा। इस प्रकार हमें एक नया समुच्चय प्राप्त करते हैं : $R \times R \times R \times \ldots \times$x R ($n$ बार)। इस समुच्चय के किसी अवयव का प्रारूप कैसा होगा? इस समुच्चय का प्रत्येक n अवयव संख्याओं का क्रमित संयोजन होगा जिसे हम $(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ के रूप में व्यक्त करते हैं तथा इसे एक n-टपल कहते हैं। अर्थात्

n-अक्षों को दर्शाने वाले किसी चित्र को बनाना निश्चित रूप से संभव नहीं है। परंतु हम इसे अमूर्त रूप में R, R^2, R^3,.....R^n इत्यादि के विस्तार के तौर पर समझ सकते हैं। हमने देखा कि R, R^2, R^3,.....R^n... इत्यादि सभी समुच्चयों के अवयव बिंदु होते हैं। अतः, ये सभी समुच्चय, बिंदु-समुच्चय कहलाते हैं।

R^n के अवयवों अर्थात् प्रत्येक n-टपल को एक सदिश कहते हैं। अर्थात्, क्रमित युग्म, क्रमित त्रिक इत्यादि सभी सदिश हैं। हम आगे पढ़ाए जाने वाले 'अर्थशास्त्र में गणितीय विधियाँ' पाठ्यक्रमों में पाएँगे कि सदिश अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं।

2.6 संगतता तथा समुच्चय-फलन (Correspondence and Set Functions)

इस इकाई के अब तक के खंडों में आपका परिचय फलन की अवधारणा/संकल्पना से हुआ। आइये, हम एक बार फिर से देखें कि एक फलन के विभिन्न तत्व क्या हैं : एक फलन में सर्वप्रथम हमें दो समुच्चयों की आवश्यकता होती है। एक फलन का प्रांत कहलता है तथा दूसरा फलन का परिसर। इसके साथ ही एक नियम का होना आवश्यक है जो फलन के प्रांत के प्रत्येक अवयव को उसके परिसर के एक अद्वितीय अवयव पर ले जाए। परिसर के इस अवयव को प्रांत के उस अवयव विशेष का प्रतिबिंब कहते हैं। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि एक फलन एक ऐसा नियम है जो प्रांत के प्रत्येक अवयव के साथ, परिसर का एक (अद्वितीय) अवयव संबद्ध करता है।

2.6.1 संगतता (Correspondence)

एक समुच्चय A लीजिए। मान लीजिए यह किसी फलन का प्रांत है। मान लीजिए समुच्चय B इस फलन का सह-प्रांत है। इस समुच्चय B के अनेक उपसमुच्चय हो सकते हैं। एक नए समुच्चय D की कल्पना कीजिए जिसके अवयव B के विभिन्न उपसमुच्चय हों। एक सामान्य फलन अपने प्रांत के प्रत्येक अवयव को अपने परिसर के एक और केवल एक अवयव पर ले जाता है। इसलिए सामान्य फलन को एकल-मान फलन भी कहते हैं। दूसरी ओर, एक ऐसा फलन जो प्रांत के एक अवयव को एक ऐसे अवयव पर ले जाता है जो स्वयं में एक समुच्चय है (अतः, अनेक वस्तुओं का समूह है), एक बहुमान फलन कहलाता है। आइये, हम बहुमान फलन की संकल्पना को एक उदाहरण द्वारा समझने की कोशिश करें।

मान लीजिये $A = \{2,7,9,11,14\}$ तथा $B = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ है। अब हम अपनी चर्चा के प्रमुख भाग पर आते हैं : मान लीजिए D एक ऐसा उपसमुच्चय है जिसके अवयव, B के कुछ उपसमुच्चय है। दूसरे शब्दों में, D वास्तव में समुच्चयों का एक कुल है। मान लीजिए $D = \{\{a,c,f\},\{b,a,d\},\{i,c,h,g,d\}\}$ है। अब समुच्चय A के अवयवों से समुच्चय B के अवयवों तक एक फलन लीजिए। मान लीजिए A का अवयव 9, समुच्चय D के अवयव $\{b, a, d\}$ पर तथा समुच्चय A का अवयव 14 समुच्चय D के अवयव $\{a, c, f\}$ पर जाता है। अब हम संगतता का अर्थ समझने का प्रयास करते हैं कि इसे बहुमान फलन क्यों कहा जाता है। इस उदाहरण में A का एक अवयव 9 D के अवयव $\{b, a, d\}$ पर जाता है परंतु इस अवयव में 3 मान हैं : b, a और d. अतः, संगतता एक अवयव को एक समुच्चय के किसी उपसमुच्चय पर ले जाता है। A के अवयव, D के अवयवों पर जाते हैं जो कि B के उपसमुच्चय हैं।

2.6.2 समुच्चय फलन (Set Functions)

एक संगतता में हमने एक समुच्चय लिया और एक ऐसा समुच्चय बनाया जिसके सदस्य इस प्रदत्त (दिए हुए) समुच्चय के कुछ (या सभी) उपसमुच्चय थे। इस प्रकार प्राप्त समुच्चय को हमने परिसर माना था। अब हम इस समुच्चय को प्रांत के रूप में लेते हैं। मान लीजिए $H = \{12,17,3,9,8,6\}$ के समुच्चय है तथा $J = \{\{12, 17, 8\}, \{17, 9, 3\}, \{17, 12, 6, 9\}\}$ । एक ऐसा समुच्चय है जिसके अवयव H के कुछ उपसमुच्चय हैं। अब समुच्चय J से किसी समुच्चय $M = \{a, b, c, d\}$ तक एक फलन लीजिए। ऐसा फलन एक समुच्चय-फलन कहलाता है। मान लीजिए यह फलन J के अवयव $\{17, 12, 6, 9\}$ को M के अवयव b पर ले जाता है। यह फलन निश्चित रूप से एक एकल-मान

फलन होगा क्योंकि प्रांत का प्रत्येक अवयव परिसर के एक ही अवयव पर जाता है। परंतु, ध्यान दें कि इस उदाहरण में प्रांत का प्रत्येक अवयव, समुच्चय H का एक उपसमुच्चय है। अर्थात् प्रांत J का प्रत्येक अवयव एक समुच्चय है क्योंकि हम यहाँ J से M तक एक फलन की परिकल्पना कर रहे हैं, न कि H से M तक। ऐसे फलन जो ऐसे अवयवों, जो कि स्वयं समुच्चय हैं, को परिसर के केवल एक अकेले अवयव पर ले जाते हैं, समुच्चय फलन कहलाते हैं।

बोध प्रश्न 3

1) हम बिंदुओं के समुच्चय से क्या समझते हैं? इस संदर्भ में शब्द बिंदु का क्या अर्थ है।

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित अवधारणाओं/संकल्पनाओं की व्याख्या कीजिए –

क) संगतता

ख) समुच्चय-फलन

....

....

....

....

....

....

2.7 सार-संक्षेप

समुच्चयों पर संक्रियाओं के आधार पर, इस इकाई में हमने, अपनी चर्चा को संबंधों और फलनों की संकल्पना तक विस्तृत किया। जहाँ संबंधों को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया गया वहीं फलनों को विशेष प्रकार के संबंधों के रूप में सूत्रबद्ध किया गया। हमने फलन की संकल्पना, इसके प्रतिपादन तथा सामान्यतः पाए जाने वाले विभिन्न प्रकार के निरूपणों पर चर्चा की। यह इकाई समुच्चयों के कार्तीय गुणन की विस्तृत व्याख्या से प्रारंभ हुई और देखा कि किस प्रकार दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन क्रमित युग्मों का एक संग्रह होता है। तत्पश्चात् हमने संबंध जैसी अत्यंत महत्त्वपूर्ण संकल्पना की चर्चा समुच्चयों के कार्तीय गुणन के उपसमुच्चय के रूप में की।

इसके पश्चात्, हमने फलनों का परिचय दिया। आप किसी फलन को एक चर की दूसरे चर पर निर्भरता दर्शाने वाले नियम के रूप से पहले से ही परिचित थे। यहाँ हमने फलन की एक समुच्चय (जिसे फलन का प्रांत कहा जाता है) के अवयवों तथा एक अन्य समुच्चय (जिसे फलन का परिसर कहा जाता है) के अवयवों तक एक प्रतिचित्रण अथवा रूपांतरण अथवा इनके बीच एक संबंध के रूप में व्याख्या की। हमने देखा कि किस

प्रकार एक फलन वास्तव में एक संबंध का उपसमुच्चय होता है अर्थात् किस प्रकार किसी संबंध पर कुछ प्रतिबंध लगाकर एक फलन प्राप्त किया जा सकता है। अतः, हमने देखा कि दो समुच्चयों के बीच एक संबंध उनके कार्तीय गुणन का एक उपसमुच्चय होता है तथा एक फलन एक संबंध का उपसमुच्चय होता है। इस इकाई में हमने फलनों के विभिन्न प्रकारों जैसे कि एकैकी फलन, आच्छादी फलन तथा एकैकी आच्छादी फलन।

तत्पश्चात्, इस इकाई में वास्तविक संख्याओं एवं वास्तविक वितान तथा अर्थशास्त्र में इनके महत्त्व की चर्चा की गई। इस चर्चा के दौरान बिंदुओं के समुच्चय या बिंदु-समुच्चयों की महत्त्वपूर्ण संकल्पना की भी चर्चा की गई। अंत में, इस इकाई में, कुछ विशिष्ट फलनों की चर्चा की गई जिनमें फलन के प्रांत अथवा परिसर के अवयव, किसी समुच्चय के सभी अथवा कुछ उपसमुच्चय होते हैं। इन्हें संगतता या बहुमान फलन या समुच्चय फलन भी कहते हैं।

2.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) समुच्चयों के कार्तीय गुणन के किसी उपसमुच्चय को एक संबंध कहते हैं। दूसरे शब्दों में, संबंध एक क्रमित युग्मों का समुच्चय होता है (आगे की व्याख्या 2.3 में देखें)।

2) यदि कोई संबंध ρ स्वतुल्य, सममित और सकर्मक हो तो उसे 'तुल्य' संबंध कहते हैं।

3) संबंध ρ के प्रथम पदों का समुच्चय उसका प्रांत कहलाता है। संबंध के प्रतिबिंबों का समुच्चय उसका परिसर कहा जाता है– यह संबंध ρ के द्वितीय पदों का समुच्चय ही है।

बोध प्रश्न 2

1) समुच्चय X से Y की ओर एक संबंध ρ, जिसमें प्रत्येक X तत्व के लिए Y में एक अद्वितीय प्रतिबिंब की परिभाषा हो जाती हो X से Y की ओर फलन कहलाता है।

2) एक फलन $f : X \rightarrow Y$ आच्छादी होता है या 'के ऊपर फलन' होता है यदि f का परिसर f के सहप्रांत के समान हो। उदाहरण, $f = \{(1,0),(2,0),(3,5)\}$ जहाँ $X = \{1,2,3\}$ तथा $Y = \{0,5\}$ एक आच्छादी फलन है। ऐसे ही अन्य उदाहरण भी बनाए जा सकते हैं।

3) भाग 2.4 देखें।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 2.5 देखें।

2) भाग 2.6 देखें।

इकाई 3 तर्कशास्त्र*

संरचना

3.0 उद्देश्य

3.1 विषय-प्रवेश

3.2 कथन [Statements]

3.2.1 कथन और कथन का निषेधन [Statement and Negation of a Statement]

3.2.2 सत्यमान तालिकाएं [Truth Tables]

3.2.3 'और' द्वारा संयोजन [Connectives using Conjunctions ('and')]

3.2.4 'या' द्वारा संयोजन [Connectives Using Disjunctions ('or')]

3.3 सप्रतिबंध कथन [Implications]

3.3.1 पूर्वधारणाएं एवं निष्कर्ष [Assumption and Conclusion]

3.3.2 अनिवार्य एवं पर्याप्त प्रतिबंध [Necessary and Sufficient Conditions]

3.3.3 प्रतिलोम एवं विलोम कथन [Inverse and Converse]

3.3.4 प्रतिधनात्मक कथन [Contrapositive]

3.4 परिमाणवाचक वाक्यांश [Quantifiers]

3.4.1 सार्वत्रिक परमिाणक

3.4.2 अस्तित्व-बोधी परिमाणक

3.5 प्रमेय तथा उपपत्ति [Theorems and Proofs]

3.6 उपपत्ति के विभिन्न प्रकार [Varieties of Proof]

3.6.1 प्रत्यक्ष विधि [Direct Proofs]

3.6.2 विरोधोक्ति विधि [Proof by Contradiction]

3.6.3 गणितीय आगमन विधि [Proof by Induction]

3.6.4 प्रतिधनात्मक विधि द्वारा उपपत्ति [Proof using the Contrapositive Method]

3.7 सार-संक्षेप

3.8 बोध-प्रश्नों के उत्तर/संकेत

3.0 उद्देश्य

यह इकाई इस पाठ्यक्रम की एक अत्यंत महत्वपूर्ण इकाई है क्योंकि यह पाठकों का परिचय गणितीय अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाली भाषा से करवाएगी। इस इकाई में आप अमूर्त रूप से विचार करने की प्रक्रिया सीखेंगे। पहली इकाई में समुच्चयों और उन पर की जानी वाली संक्रियाओं की जानकारी तथा दूसरी इकाई में संबंधों और फलनों जैसी महत्वपूर्ण संरचनाओं का अध्ययन करने के पश्चात् (जो कि समुच्चयों से संबंधित सिद्धांतों पर आधारित था), यह इकाई गणित की भाषा में कथनों की वैधता को निर्धारित करने की विभिन्न विधियों पर केंद्रित है।

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित से भली-भाँति अवगत हो जाएंगे,

- एक कथन और उसके निषेधन की परिभाषा से;
- 'और' तथा 'या' जैसे संयोजकों से;

*श्री अनूप चटर्जी

- कथनों की सत्यमान तालिकाओं से;
- सप्रतिबंध कथनों से;
- अनिवार्य और पर्याप्त कथनों से;
- परिमाणकों के गुणधर्मों से;
- प्रमेय और उपपत्ति की संकल्पनाओं से; तथा
- उपपत्ति की विभिन्न विधियों से।

3.1 विषय-प्रवेश

इस अध्याय/इकाई में हम जिस विषय पर चर्चा करेंगे उसे गणित की भाषा कहा जा सकता है। इसका लक्ष्य पाठकों का परिचय गणितीय विवेचन से करवाना है कि गणित में कथन किस प्रकार बनाए जाते हैं तथा किसी कथन का निषेधन क्या होता है। हम इस पर भी चर्चा करेंगे कि किस प्रकार प्रत्येक वाक्य, एक कथन नहीं होता। इस इकाई में हम ऐसे कई पदों/शब्दों पर भी चर्चा करेंगे जो आपने स्कूल के गणित के पाठ्यक्रमों के दौरान पढ़े होंगे जैसे कि प्रमेय, स्वयं सिद्ध तथ्य, उपप्रमेय इत्यादि। हम यह भी सीखेंगे यह कैसे जाँचा जाए कि कोई तर्क वैध है अथवा अवैध। पूर्वधारणा क्या होती हैं? हम पूर्वधारणा की संकल्पना के बारे में भी जानेंगे और यह भी कि किसी तर्कक्रम में पूर्वधारणा से निष्कर्ष तक का पथ वैध रूप से तय किया गया है या नहीं। एक शब्द जिसकी चर्चा बार-बार होगी, वह है 'उपपत्ति'। उपपत्ति का सही अर्थ क्या है? हम यह किस प्रकार जान सकते हैं कि कोई प्रमेय वैध रूप से सिद्ध किया गया है अथवा नहीं। उपपत्ति की विभिन्न विधियाँ कौन-कौन सी हैं।

इस इकाई की विषय-वस्तु, अर्थशास्त्र के सिद्धांत की संरचना को समझने भी अत्यंत उपयोगी सिद्ध होगी, विशेषकर व्यष्टि एवं समष्टिगत अर्थशास्त्र के सिद्धांतों में। आप अगले कई सेमेस्टरस् में व्यष्टि एवं समष्टिगत अर्थशास्त्र के सिद्धांतों का अध्ययन करेंगे। तर्कशास्त्र का अध्ययन आपको अर्थशास्त्र के सिद्धांतो की संरचना को ठीक से समझने में सहायता करेगा : पूर्वधारणाएं क्या होती हैं और उन्हें क्यों माना जाता है : पूर्वधारणाओं से निष्कर्ष तक कैसे पहुँचा जाए, अनिवार्य और/या पर्याप्त प्रतिबंधों अथवा शर्तों से हम क्या समझते हैं, सप्रतिबंध कथन क्या होते हैं, प्रमेय क्या है, हम किसी कथन या प्रमेय को कैसे सिद्ध करते है, स्वयंसिद्ध तथ्य क्या होते हैं ? आदि।

तर्क-शास्त्र के सिद्धांतों की अच्छी समझ अर्थशास्त्र में तर्क और विवेचन, दोनों को, ठीक से समझने में आपकी सहायता करेगी। साथ ही यह आपकी स्वयं से विवेचन की क्षमता भी प्रदान करेगी। इसके अतिरिक्त यह इकाई आपको इस पाठ्यक्रम में आगे आने वाली इकाईयों को समझने में सहायता करेगी। क्योंकि इस पाठ्यक्रम का ध्येय पाठकों को ऐसे उपकरणों तथा विधियों से लैस करना है जिससे वे अर्थशास्त्र के सिद्धांतों को भली-भाँति समझ सकें, इस इकाई का गहन अध्ययन पाठकों को यह समझने में सहायता करेगा कि अर्थशास्त्र के सिद्धांतों की व्याख्या करने में किस तरह गणित उपयोगी सिद्ध होता है। तर्कशास्त्र के सिद्धांतों के अध्ययन से आपको न केवल इस पाठ्यक्रम के शेष भाग को समझने में बल्कि अन्य पाठ्यक्रमों को समझने में भी भरपूर सहायता मिलेगी।

इस इकाई को इस प्रकार व्यवस्थित किया गया है : अगला अनुच्छेद इस इकाई की सबसे महत्वपूर्ण संकल्पना 'कथन' की परिभाषा से प्रारंभ होता है। इस अनुच्छेद में किसी

कथन के निषेधन की व्याख्या भी की गई है। इसके पश्चात् पाठकों का परिचय सत्यमान तालिका से करवाया गया जिसकी सहायता से दिए हुए कथन के सत्यमान के सापेक्ष वे उसके निषेधन का सत्यमान ज्ञात कर सकते हैं। इसी प्रकार सत्यमान तालिका से मिश्र/संयुक्त कथनों, जो हमें 'और' तथा 'या' जैसे संयोजकों के माध्यम से प्राप्त होते हैं, की सत्यता अथवा असत्यता ज्ञात की जा सकती है। अर्थात्, इस अनुच्छेद में कथनों के संयोजन की चर्चा भी की गई है। अनुच्छेद 3.3 में सप्रतिबंध कथनों की चर्चा की गई है। पूर्वधारणाएं क्या होती हैं और निष्कर्ष से हम क्या समझते हैं, इसकी चर्चा भी इस अनुच्छेद में की गई है। इस अनुच्छेद में अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंधों की संकल्पना की भी व्याख्या की गई है। दूसरे शब्दों में, आप 'यदि', 'केवल यदि' तथा 'यदि और केवल यदि' इत्यादि प्रतिबंधों का अर्थ समझ पाएंगे। इस अनुच्छेद में किसी कथन के प्रतिलोम, विलोम तथा प्रतिधनात्मक कथनों के अर्थों की भी व्याख्या की गई है। इससे अगला अनुच्छेद परिमाणकों पर केंद्रित है। इसमें अस्तित्वात्मक परिमाणकों पर ध्यान केंद्रित है। इसमें अस्तित्वात्मक परिमाणक 'एक ऐसे का अस्तित्व है' तथा सार्वत्रिक परिमाणक 'प्रत्येक के लिए/सभी के लिए' की व्याख्या की गई है। अगले अनुच्छेद, अनुच्छेद 3.5 में एक महत्वपूर्ण संकल्पना, प्रमेय, पर चर्चा की गई है। इस अनुच्छेद में स्वयंसिद्ध कथन और उपप्रमेय की संकल्पनाओं की भी व्याख्या की गई है। इसी प्रकार आप उपपत्ति की संकल्पना से भी अवगत होंगे। उपपत्ति क्या होती है, और जब हम यह कहते हैं कि हमने स्वयंसिद्ध कथनों तथा पूर्वधारणाओं से प्रारंभ करके एक उपपत्ति की रचना की है तो इसका क्या अर्थ होता है? अंततः अनुच्छेद 3.6 में उपपत्ति (किसी कथन की वैधता तय करने की) विभिन्न विधियों की चर्चा की गई है जैसे कि प्रत्यक्ष विधि, निषेधन द्वारा वैधता विधि, आगमन विधि तथा प्रतिधनात्मक विधि।

3.2 कथन [Statements]

3.2.1 कथन और कथन का निषेधन [Statement and Negation of a Statement]

हम एक कथन की मूलभूत संकल्पना से प्रारंभ करते हैं। हम जानते हैं कि हम अपनी दैनंदनिक भाषा में अनेक प्रकार के वाक्यों का प्रयोग करते हैं जैसे कि ''दो, पाँच से बड़ा होता है'' जैसे घोषणात्मक वाक्य या आदेशात्मक अथवा विस्मयादि बोधक वाक्य। परंतु ये सभी प्रकार के वाक्य गणित में कथन की परिभाषा के अंतर्गत नहीं आते। गणित में कोई वाक्य तभी एक कथन कहलाता है यदि वह 'सत्य' अथवा 'असत्य' के रूप में वर्गीकृत किया जा सके। नीचे दिए गए वाक्य कथन की श्रेणी में नहीं आते :

i) 'दरवाज़ा खोलिए!'

ii) 'X एक विषम संख्या है'

इन वाक्यों में से पहला एक आदेशात्मक वाक्य है, अतः यह एक कथन नहीं। इसे सत्य अथवा असत्य नहीं कहा जा सकता। दूसरा वाकय 'X एक विषम संख्या है' X के मान पर निर्भर करता है। अतः, इसकी सत्यता अथवा असत्यता तब तक ज्ञात नहीं की जा सकती जब तक हमें और अधिक जानकारी न हो। यदि $X = 13$ है, तो यह वाक्य सत्य होगा परंतु $X = 90$ के लिए यह वाक्य असत्य होगा। अर्थात् हमें इस वाक्य का सत्यमान (यह वाक्य सत्य है अथवा असत्य) जानने के लिए X के बारे कुछ और जानकारी की आवश्यकता है। क्योंकि यहाँ X के साथ एक प्रतिबंध जुड़ा हुआ है, इसे हम एक सप्रतिबंध कथन कह सकते हैं। तकनीकी रूप से सप्रतिबंध कथन, कथन नहीं होते।

किसी कथन p का निषेधन एक ऐसा कथन है जो p को नकारता है p का प्रतिवाद करता है अर्थात् यदि कथन p सत्य है तो इसका निषेधन कथन असत्य होगा और यदि कथन p असत्य है तो इसका निषेधन कथन सत्य होगा। किसी कथन p के निषेधन को p¬नहीं (not p) कहते हैं। निषेधन को संकेत " ¬ " द्वारा व्यक्त किया जाता है। अर्थात् यदि p एक कथन है तो इसके निषेधन को $\neg p$ द्वारा व्यक्त किया जाएगा।

3.2.2 सत्यमान तालिकाएँ [Truth Tables]

तर्कशास्त्र के अध्ययन में सत्यमान तालिकाओं की एक महत्वपूर्ण भूमिका है। किसी कथन की सत्यमान तालिका में हम सभी संभव स्थितियों में प्राप्त होने वाले सत्यमानों को संक्षेप में सारणीबद्ध करते हैं।

उदाहरण के लिए p के निषेधन अर्थात् $\neg p$ की सत्यमान तालिका होगी।

p	$\neg p$
T	F
F	T

यहाँ T का अर्थ सत्य (True) तथा F का अर्थ असत्य (False) है। सबसे ऊपर वाली पंक्ति में उस कथनों को लिखा जाता है जिनके सत्यमानों को हम दर्शाना चाहते हैं। इस उदाहरण में पहले p और उसके पश्चात् $\neg p$ लिखा गया। अतः, पहले स्तंभ में p के सभी संभव सत्यमान लिखे जाएंगे तथा दूसरे स्तंभ में p के प्रत्येक सत्यमान से संबंधित $\neg p$ के सत्यमान लिए जाएंगे। ध्यान रहे कि किसी कथन p के केवल दो ही सत्यमान हो सकते हैं : T या F अर्थात् कथन p या तो सत्य होगा या असत्य। अब, यदि p सत्य है तो, परिभाषा के अनुसार, $\neg p$ असत्य होगा और यदि p असत्य है, तो $\neg p$ सत्य होगा। हम ऊपर दी गई सत्यमान तालिका में देख सकते हैं कि यदि p का सत्यमान T है, तो $\neg p$ का सत्यमान F लिया गया और यदि p का सत्यमान F है तो $\neg p$ का सत्यमान T लिया गया है।

यहाँ हमने देखा कि हमने एक दिए हुए (ज्ञात) कथन p से एक नया कथन $\neg p$ बनाया। इसी प्रकार हम दो दिए हुए कथनों p और q के संयोजन से नए कथन बना सकते हैं। ऐसा हम 'और' अथवा 'या' इत्यादि संयोजकों के माध्यम से कर सकते हैं।

3.2.3 'और' द्वारा संयोजन [Connectives using Conjunctions ('and')]

संयोजक 'और' कथनों से संयोजन के प्रयुक्त होने वाले संयोजनों में सबसे सरल है क्योंकि इसका प्रयोग तर्कशास्त्र मे वैसा ही है जैसा कि अंग्रेज़ी भाषा में। तर्कशास्त्र में 'और' को चिह्न '∧' द्वारा व्यक्त किया जाता है।

'और' के लिए सत्यमान तालिका बनाने के लिए, हम दो सरल/अमिश्र कथन p और q लेते हैं। क्योंकि ये दोनों कथन स्वतंत्र रूप से सत्य या असत्य हो सकते हैं, हमें कुल मिलाकर चार संभव परिस्थितियाँ प्राप्त होती हैं।

i) p, q दोनों असत्य हैं

ii) p असत्य तथा q सत्य है

iii) p सत्य तथा q असत्य है

iv) p, q दोनों सत्य हैं

नीचे दी गई तालिका इनमें से प्रत्येक स्थिति के संगत $p \wedge q$ का सत्यमान देती है अर्थात् यह संयोजक 'और' की सत्यमान तालिका है।

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

इस तालिका में हम स्पष्ट रूप से देख सकते हैं कि यदि p या q में से कोई भी कथन असत्य है तो मिश्रित कथन 'p और q' भी असत्य होगा। यहां पहले दो कॉलम आदान हैं और तीसरा उत्पत्ति। इस तालिका में दो अमिश्र कथन थे जिनसे हमें $4 = 2^2$ पृथक्–पृथक् संभव सत्यमान प्राप्त हुए जिन्हें पहले दो स्तंभों में लिखा गया हैं। इसी प्रकार यदि हमें 3 अमिश्र कथन दिए हैं तो हमें कुल $8 = 2^3$ संभव स्थितियाँ प्राप्त होंगी।

हम सत्यमान तालिकाओं का प्रयोग जटिल मिश्रित कथनों का विश्लेषण करने के लिए भी कर सकते हैं। उदाहरण के लिए यदि हम जानना चाहें कि कथन 'p और $\neg q$' अर्थात् $p \wedge \neg q$ कब सत्य होगा तो हम इस कथन के लिए एक सत्यमान तालिका बनाते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
F	F	T	F
F	T	F	F
T	F	T	T
T	T	F	F

ध्यान दें कि इस तालिका में तीसरा स्तंभ $\neg q$ (q नहीं), दूसरे स्तंभ q के निषेधन के आधार पर बनाया गया है। इसके पश्चात् स्तंभ 4 में $p \wedge \neg q$ के सत्यमान को दर्शाने के लिए p तथा q के सतंभों अर्थात् स्तंभ 1 और स्तंभ 3 पर 'और' की सत्यमान तालिका का प्रयोग किया गया है।

3.2.4 'या' द्वारा संयोजन [Connectives Using Disjunctions ('or')]

तर्क शास्त्र में जहाँ 'और' का प्रयोग बोल–चाल की भाषा के समान ही है वहीं 'या' का प्रयोग अंग्रेज़ी भाषा में होने वाले इसके प्रयोग से थोड़ा अलग है। उदाहरण के लिए यदि हम यह कहें 'अरूण या अमित मीटिंग के लिए जा रहा/रहे हैं' तो सामान्य भाषा में इस कथन अर्थ होगा कि अरूण या अमित में से कोई एक मीटिंग के लिए जा रहा

है, दोनों नहीं। इस प्रकार के 'या' को 'अपवर्जित या' (*exclusive or*) कहते हैं/अर्थात् कथन के भाग/घटक का सत्य होना उसके दूसरे भाग/घटक के सत्य होने की संभावना को अपवर्जित/वर्जित करता है। परंतु तर्कशास्त्र में इस कथन का अर्थ होगा कि अरूण और अमित में से कम से कम एक मीटिंग में जाएगा, दोनों भी जा सकते हैं। इसे 'अंतर्विष्ट या' कहते हैं। 'अंतर्विष्ट या' को चिह्न '$\vee$' से व्यक्त किया जाता है। इसकी सत्यमान तालिका नीचे दी गई है :

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

इस तालिका में हम देख सकते हैं कि यदि p और q में से कोई एक कथन भी सत्य हो तो $p \vee q$ सत्य होगा। दूसरे मिश्र शब्दों में कथन $p \vee q$ केवल तभी असत्य होगा यदि p और q दोनों असत्य हों।

बोध–प्रश्न 1 :

1) निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक के लिए सत्यमान तालिका बनाईए :

   a) $\neg (p \wedge q)$

   b) $\neg (p \vee q)$

   c) $(\neg p) \vee (\neg q)$

   d) $p \vee (\neg q)$

   e) $(\neg q) \vee q$

   f) $(\neg q) \wedge q$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2) नीचे दिए गए कथनों में से प्रत्येक का निषेधन कीजिए :

   a) A सत्य है या B असत्य है।

   b) A असत्य है और B सत्य है।

c) A सत्य है या B सत्य है।

d) A सत्य है और B सत्य है।

....

....

....

....

....

....

3) एक सत्यमान तालिका बनाकर दर्शाईए कि कथन '(p या q) –नहीं' और कथन 'p– नहीं और q– नहीं' समान हैं।

....

....

....

....

....

3.3 सप्रतिबंध कथन [Implications]

हम गणित में और अर्थशास्त्र में भी, अक्सर 'यदि कथन p तो कथन q' प्रकार के कथनों का प्रयोग करते हैं। इस प्रकार के कथन का अर्थ है कि यदि कथन p सत्य है, तो कथन q भी सत्य होगा। इस प्रकार के कथन को प्रतिबंधी या सप्रतिबंध कथन कहते हैं। यह उपलक्षणा है। हम इसे इस प्रकार भी कह सकते हैं कि p का तात्पर्य है q.

p, q को उपलक्षित करता है और लिखते हैं $p \to q$ ।

3.3.1 पूर्वधारणाएं एवं निष्कर्ष [Assumption and Conclusion]

किसी सप्रतिबंध कथन $p \to q$ में दो भाग होते हैं :

- कथन p जिसे मूलकल्पना/परिकल्पना या पूर्वधारणा कहते हैं, तथा
- कथन q जिसे निष्कर्ष कहते हैं।

अतः, हम कह सकते हैं कि 'यदि पूर्वधारणा सत्य है तो निष्कर्ष भी सत्य होगा'। कभी–कभी p में एक से अधिक कथन हो सकते हैं। इन्हें हम मूलकल्पनाएं/परिकल्पनाएं, पूर्वधारणाएं या प्रतिबंध भी कह सकते हैं।

ध्यान रहे $p \to q$, p अथवा q के सत्य या असत्य होने के बारे में कुछ नहीं बताता।

मान लीजिए $p \to q$ सत्य है। हमारे पास तीन संभावनाएं हैं :

i) p सत्य है और q सत्य है

ii) p असत्य है और q असत्य है

iii) p असत्य है और q सत्य है

यह संभव नहीं है कि p सत्य हो और q असत्य क्योंकि $p \rightarrow q$ का अर्थ है यदि p सत्य है तो

q भी सत्य होगा।

$p \rightarrow q$ की सत्यमान तालिका

अब हम देखते है कि सप्रतिबंध कथन की तालिका कैसी होगी। इसे नीचे दर्शाया गया है :

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

आईए हम इस तालिका को समझने का प्रयास करें यदि p और q दोनों सत्य हों तो स्वभाविक रूप से $p \rightarrow q$ भी सत्य होगा जैसा कि प्रथम पंक्ति में दर्शाया गया है। यदि p सत्य तथा q असत्य है तो $p \rightarrow q$ असत्य होगा जैसा कि दूसरी पंक्ति में दर्शाया गया है। यह सप्रतिबंध कथन की मूल परिभाषा के विरूद्ध है। अंततः, यदि p असत्य है तो $p \rightarrow q$ सदैव सत्य होगा चाहे q सत्य हो अथवा असत्य। अंतिम दोनों पंक्तियाँ इसी तथ्य को दर्शाती हैं।

3.3.2 अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंध [Necessary and Sufficient Conditions]

गणित और अर्थशास्त्र में अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंधों की अवधारणा का प्रयोग अक्सर किया जाता है। आईए हम नीचे दी सारणी के सहायता से इसे समझने का प्रयास करें :

कथन p	कथन q
1) A प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण होता है (p_1)	A परीक्षा में उत्तीर्ण होता है (q_1)
2) A प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण होता है (p_2)	A ने कुल 70% अंक प्राप्त किए (q_2)
3) A प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण होता है (p_3)	A ने कम से कम 60% कुल अंक प्राप्त किए (q_3)

इस सारणी में, हमें पहले स्तंभ में एक कथन p (जिसे हम 'गुण' कह सकते हैं) तथा दूसरे स्तंभ में एक कथन q (जिसे हम प्रतिबंध कह सकते है) दिया है। हम p और q के बीच संबंध पर विचार करते हैं। हम यहाँ यह मान कर चलते हैं कि किसी व्यक्ति को प्रथम श्रेणी पाने के लिए कम से कम 60 प्रतिशत कुल अंक प्राप्त करने होते हैं। यहाँ पर तीन स्थितियाँ दी गई हैं।

पहली स्थिति में कथन 'A परीक्षा में उत्तीर्ण होता है', कथन 'A प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण होता है' का एक तार्किक परिणाम है। अतः, हम कह सकते है कि कथन p_1, कथन q_1, को उपलक्षित करता है। प्रतीकात्मक रूप में इसे, $p_1 \rightarrow q_1$ से व्यक्त करते है। तीसरी

स्थिति में, हम देखते हैं कि कथन 'A ने कम से कम 60% कुल अंक प्राप्त किए' पुनः कथन 'A प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण होता है' का तार्किक परिणाम है। अतः इसे स्थिति में कथन p_3, कथन q_3 को उपलक्षित करता है। प्रतीकात्मक रूप में इसे $p_3 \rightarrow q_3$ से व्यक्त करते हैं। अतः हम पाते हैं कि पहली और तीसरी स्थिति में, कथन q, कथन p का तार्किक परिणाम है। इन स्थितियों में हम कहते हैं कि p, q के लिए एक अनिवार्य प्रतिबंध है। परंतु दूसरी स्थिति में कथन

'A ने कुल 70% अंक प्राप्त किए' कथन 'A प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण होता है' का तार्किक परिणाम नहीं है। इसलिए, इस स्थिति में q, p के लिए अनिवार्य प्रतिबंध नहीं है। आईए, अब हम इस परिस्थितियों को विपरीत दिशा से जांचें। दूसरी स्थिति में, कथन 'A ने कुल 70% अंक प्राप्त किए' का तार्किक परिणाम है। अतः, इस स्थिति में कथन q_2, कथन p_2 को उपलक्षित करता है। प्रतीकात्मक रूप से हम इसे $p_2 \leftarrow q_2$ से व्यक्त करते हैं।

इसी प्रकार, तीसरी स्थिति में, कथन 'A प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण होता है' कथन 'A ने कम से कम 60% कुल अंक प्राप्त किए' का तार्किक परिणाम है। अतः, इस स्थिति में कथन q_3 कथन p_3 को उपलक्षित करता है। प्रतीकात्मक रूप में हम इसे $p_3 \leftarrow q_3$ से व्यक्त करते हैं। अतः, हम पाते हैं कि दूसरी और तीसरी स्थिति में, कथन p कथन q का तार्किक परिणाम है। इन स्थितियों में हम कहते हैं कि q, p के लिए एक पर्याप्त प्रतिबंध है। परंतु पहली स्थिति में कथन 'A प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण होता है' कथन 'A परीक्षा में उत्तीर्ण होता है' का तार्किक परिणाम नहीं है। इसलिए, इस स्थिति में, q, p के लिए एक पर्याप्त प्रतिबंध नहीं है। तीसरी स्थिति में हमने पहले देखा कि q_3, p_3 के लिए एक अनिवार्य प्रतिबंध है और अब हम देखते हैं कि q_3, p_3 के लिए एक पर्याप्त प्रतिबंध है। अतः इन दोनों कथनों को एक साथ लेने पर हम कह सकते हैं कि तीसरी स्थिति में, q_3, p_3 के लिए एक अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंध है। प्रतीकात्मक रूप में हम इसे $p_3 \Leftrightarrow q_3$ से व्यक्त करते हैं। अतः, हम पाते हैं कि ऊपर दी हुई तीन स्थितियों में

$p_1 \rightarrow q_1$	q_1, गुण p_1 के लिए एक अनिवार्य प्रतिबंध है
$p_2 \leftarrow q_2$	q_2, गुण p_2 के लिए एक पर्याप्त प्रतिबंध है
$p_3 \Leftrightarrow q_3$	q_3, गुण p_3 के लिए एक अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंध है

3.3.3 प्रतिलोम और विलोम [Inverse and Converse]

आईए हम इस विचार को और आगे बढ़ाएं। हम अब सप्रतिबंध कथनों अर्थात् $p \rightarrow q$ प्रकार के कथनों के बारे में जानते हैं। अब हम यह जानने का प्रयास करते हैं कि किसी सप्रतिबंध कथन का निषेधन क्या होगा? हमें गहराई से विचार न करें तो, शायद यह कहें कि यह ' p, q को उपलक्षित नहीं करता'। पर ऐसा नहीं है। वास्तव में '$p \rightarrow q$' का निषेधन होगा 'p और q –नहीं अर्थात् p सत्य है पर q असत्य है। अतः हमें इस पर ठीक से विचार करना चाहिए कि जिन सप्रतिबंधित कथनों में ' p –नहीं' 'q –नहीं' या '$q \rightarrow p$' जैसे कथन सम्मिलित हों, तो स्थिति क्या होगी यह विचार हमें प्रतिलोम, विलोम तथा प्रतिधनात्मक कथनों की संकल्पना की ओर ले जाता है। अब हम इन संकल्पनाओं के बारे में चर्चा करते हैं।

आईए, पहले प्रतिलोम कथन पर विचार करें। मान लीजिए किसी अर्थशास्त्री ने कहा कि 'यदि वर्षा नहीं हुई तो फसलों का उत्पादन खराब होगा'। हम इससे यह अनुमान लगा लेते है कि 'यदि वर्षा हुई, तो फसलों का उत्पादन अच्छा होगा'। पर यह आवश्यक नहीं है कि यह निष्कर्ष सही ही हो। वर्षा होने के बावजूद, अन्य कई कारणों से भी फसल खराब हो सकती है। अतः, यदि p 'वर्षा होने' को निरूपित करता है तथा q 'फसल का उत्पादन अच्छा होने' को, तो (p–नहीं) वर्षा न होने की तथा (q–नहीं) फसल का उत्पादन खराब होने की स्थिति को निरूपित करेगा। कथन 'यदि p, तो q' का प्रतिलोम कथन यदि (p–नहीं) तो (q–नहीं) होता है। प्रतीकात्मक रूप में कथन $p \rightarrow q$ का प्रतिलोम कथन $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$ होता है। ध्यान दें कि $p \rightarrow q$ और $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$ समान कथन नहीं हैं, अपितु कथन $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$, कथन '$p \rightarrow q$' का प्रतिलोम कथन है। अतः, ऊपर दिए उदाहरण में यदि $p \rightarrow q$ सत्य दिया है तो '$\neg p \rightarrow \neg q$' का सत्य होना आवश्यक नहीं है। व्यापक रूप में, हम कह सकते है कि '$p \rightarrow q$' की सत्यता से '$(\neg p) \rightarrow (\neg q)$' की सत्यता के बारे में कोई निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता।

अब हम विलोम (विपरीत) विचार करते है। कथन '$p \rightarrow q$' का विपरीत कथन '$q \rightarrow p$' होता है। तर्कशास्त्र, अर्थशास्त्र तथा अन्य अनेक विषयों में ऐसी स्थितियाँ आती हैं जब हम यह जानना चाहते हैं कि यदि हमें कोई सप्रतिबंध कथन दिया हो तो क्या उसका विलोम कथन भी सत्य होगा। यदि कोई सप्रतिबंध कथन तथा उसका विलोम कथन, दोनों सत्य हों तो हम कहते हैं कि ये दोनों कथन समान हैं। अर्थात्, यदि $p \rightarrow q$ तथा $q \rightarrow p$ दोनों सत्य हों तो हम कहते हैं कि p और q समान कथन हैं। इसे सामान्यतः $p \leftrightarrow q$ से व्यक्त किया जाता है।

3.3.4 प्रतिधनात्मक कथन [Contrapositive]

यदि हमें कोई कथन $p \rightarrow q$ दिया है, तो $\neg q \rightarrow \neg p$ को इसका प्रतिधनात्मक कथन कहते हैं। हमने पिछले अनुच्छेद में देखा कि कथन $p \rightarrow q$, कथन $\neg p \rightarrow \neg q$ के समान नहीं होता। लेकिन हम देख सकते हैं कि कथन $p \rightarrow q$ तथा इसका प्रतिधनात्मक कथन $\neg q \rightarrow \neg p$, वास्तव में समान कथन हैं। आईए अब हम सप्रतिबंध कथनों के प्रतिलोम, विलोम तथा प्रतिधनात्मक कथनों के संदर्भ में ऊपर की गई चर्चा को संक्षिप्त रूप से सारबद्ध करें :

कथनों p और q को $\neg$ (नहीं) और $\rightarrow$ (उपलक्षित करता है) संयोजनों के साथ मिलाकर चार प्रकार के समिश्र कथन प्राप्त किए जा सकते हैं :

i) $p \rightarrow q$

ii) $q \rightarrow p$, विलोम;

iii) $\neg p \rightarrow \neg q$, प्रतिलोम;

iv) $\neg q \rightarrow \neg p$, प्रतिधनात्मक;

जो परिणाम हमने प्राप्त किए, वे हैं :

- यदि कथन $p \rightarrow q$ सत्य है, तो इसका प्रतिधनात्मक कथन $\neg q \rightarrow \neg p$ सत्य होगा।
- यदि कथन $p \rightarrow q$ सत्य है, इसके प्रतिलोम कथन $(\neg p \rightarrow \neg q)$ तथा विलोम कथन $(q \rightarrow p)$ सत्य भी हो सकते है और असत्य भी।

- यदि $p \rightarrow q$ और $q \rightarrow p$ दोनों सत्य हों तो हम कहते है कि कथन p और q समान हैं और इसे $p \leftrightarrow q$;k $p \Leftrightarrow q$ के रूप में लिखते हैं।

3.4 परिमाणवाचक वाक्यांश [Quantifiers]

हम इस अनुच्छेद में परिमाणकों की संकल्पना को समझने का प्रयास करेंगे। अनेक परिस्थितियों में हम देखते हैं कि किसी समुच्चय के सभी अवयव किसी दिए हुए गुणधर्म को संतुष्ट करते हैं। कुछ परिस्थितियों में ऐसा भी होता है कि समुच्चय में कम से कम एक ऐसा अवयव होता है जो दिए गुणधर्म को संतुष्ट करें। ऐसी स्थितियों में हम 'प्रत्येक' या 'कुछ/कम से कम एक' जैसे शब्दों का प्रयोग करते हैं। मान लिए एक दिया हुआ कथन है 'x एक सम संख्या है' और हम यह जानना चाहते हैं कि एक समुच्चय के कितने अवयव इस गुण को संतुष्ट करते हैं अर्थात् उसमें कितनी सम संख्याएं हैं। इस स्थिति को व्यक्त करने के लिए हमें परिमाणकों (परिमाणवाचक) वाक्यांशों की आवश्यकता होती है।

3.4.1 सार्वत्रिक परिमाणक

वाक्यांश 'प्रत्येक के लिए' या 'सभी के लिए' सार्वत्रिक परिमाणक कहलाता है। इसे $\forall$ से व्यक्त करते हैं। आईए हम इसे कुछ उदाहरणों द्वारा समझें।

'प्रत्येक $x \in \mathrm{R}$ के लिए, $x^2 \geq 0$ होता है' (1)

इसका अर्थ है कि प्रत्येक वास्तविक संख्या का वर्ग अऋणात्मक होता है। यहाँ हम वाक्यांश 'प्रत्येक के लिए' को $\forall$ से व्यक्त कर सकते हैं। इस प्रकार कथन (1) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\forall x \in \mathrm{R}, x^2 \geq 0$$

आईए, $\forall$ के प्रयोग को स्पष्ट करने के लिए एक और उदाहरण लें। मान लीजिए O, विषम संख्याओं (पूर्णांकों) का समुच्चय है। अब निम्नलिखित कथन लीजिए :

'प्रत्येक विषम संख्या x के लिए $x^2 + 1$ भी एक विषम संख्या है' इसे सार्वत्रिक परिमाणक $\forall$ का प्रयोग करके इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$\forall x \in O,\ x^2 + 1$ एक विषम संख्या है।

ध्यान दें कि वास्तव में यह कथन असत्य है। परंतु हमने यह कथन केवल $\forall$ के प्रयोग पर प्रकाश डालने लिए चुना है। वैसे भी कोई भी कथन (गणितीय कथन) सत्य या असत्य हो सकता है।

3.4.2 अस्तित्व–बोधी परिमाणक

वाक्यांश 'एक ऐसे..... का अस्तित्व है'या 'एक ऐसा...... प्राप्त किया जा सकता है' अस्तित्व–बोधी वाक्यांश कहलाता है। इसे $\exists$ से व्यक्त किया जाता है।

आईए कुछ उदाहरण लें :

i) एक ऐसे $x \in \mathrm{Z}$ का अस्तित्व है जिसके लिए $x^2 = 4$ होगा अथवा

एक ऐसा पूर्णांक x प्राप्त किया जा सकता है जिसका वर्ग 4 के बराबर हो।

इस कथन को हम $\exists$ का प्रयोग करके निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$\exists x \in Z : x^2 = 4$$

स्मरण करें कि चिह्न ' **:** ', जिसके लिए' के स्थान पर प्रयोग किया जाता है। ध्यान दें कि

x के दो मानों, $x = 2$ तथा $x = -2$ के लिए $x^2 = 4$ होता है। अतः, हम देख सकते हैं कि

$\exists x$ का अर्थ यह नहीं होता कि हमें केवल एक ऐसा x मिलेगा वरन् यह होता है कि हमें कम से कम एक ऐसा x अवश्य मिलेगा।

ii) इसी प्रकार निम्नलिखित कथन देखिए :

$$\exists x \in Z : x^2 = 5$$

शब्दों में इसे इस प्रकार लिखा जता है : एक ऐसा पूर्णांक प्राप्त किया जा सकता है (अर्थात् अस्तित्व रखता है) जिसका वर्ग 5 हो।

ध्यान दें कि यह कथन असत्य है।

हम किसी कथन में दोनों परिमाणकों $\forall$ तथा $\exists$ का प्रयोग एक साथ भी कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित कथन लीजिए :

प्रत्येक $x \in Z$ के लिए एक ऐसा $y \in Z$ प्राप्त किया जा सकता है जिसके लिए $y > x$ होगा।

प्रतीकात्मक रूप में इस कथन को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\forall x \in Z, \exists y \in Z : y > x$$

सामान्य शब्दों में इसका अर्थ है कि प्रत्येक पूर्णांक के लिए, उससे बड़ा पूर्णांक प्राप्त किया जा सकता है।

स्मरण रहे कि Z पूर्णांकों के समुच्चय को निरूपित करता है।

परिमाणकों का प्रयोग गणित में विभिन्न संकल्पनाओं को परिभाषित करने के लिए भी किया जा सकता है। उदाहरण के लिए हम एक परिभाषा लेते हैं जिसमें परिमाणकों का प्रयोग किया गया। यह परिभाषा किसी समुच्चय के 'ऊपरी परिबंध' की है :

मान लीजिए S, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का एक उपसमुच्चय है। एक संख्या $u \in$R,

S का 'ऊपरी परिबंध' कहलाती है यदि $\forall s \in S, s \le u$ हो।

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

समुच्चय S का एक ऊपरी परिबंध होगा (या S ऊपरि–परिबद्ध समुच्चय होगा) यदि

$\exists u \in R : \forall s \in S, s \le u$

बोध प्रश्न 2 :

1) परिमाणक की संकल्पना की व्याख्या कीजिए। हमें परिमाणकों की आवश्यकता क्यों पड़ती है? अस्तित्व-बोधी परिमाणक क्या होता है?

....

....

2) किसी सप्रतिबंध कथन के प्रतिलोम तथा विलोम में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

3) अनिवार्य एवं पर्याप्त प्रतिबंधों तथा 'केवल और केवल तभी' कथनों के मध्य संबंध को स्पष्ट कीजिए। आपकी दृष्टि में अनिवार्य एवं पर्याप्त प्रतिबंधों की व्याख्या करने में सप्रतिबंध कथनों की क्या भूमिका हैं?

....

....

....

....

3.5 प्रमेय तथा उपपत्ति [Theorems and Proofs]

इस अनुच्छेद में कथनों से आगे बढ़ते हुए, हम दावों, उक्तियों/उपक्षेपों तथा अभिकथनों/दृढ़कथनों इत्यादि की चर्चा करेंगे जो कि तर्क-वितर्क के मुख्य अवयव हैं। इनसे हमें अर्थशास्त्र के सिद्धांतों को स्थापित करने के साथ-साथ इन सिद्धांतों की संरचना को समझने में भी सहायता मिलेगी। हम यहाँ उपक्षेप, प्रमेयिका, प्रमेय तथा उपप्रमेय इत्यादि संकल्पनाओं के विषय पर चर्चा करेंगे। इन शब्दों का उपयोग गणित और अर्थशास्त्र में बार-बार होता है। उपक्षेप, प्रमेयिका, प्रमेय, उपप्रमेय इत्यादि सभी ऐसे कथन है जो सत्य होते हैं।

प्रमेय और उपक्षेप

प्रमेय अत्यंत महत्वपूर्ण गणितीय कथन हैं। गणित का कोई भी परिणाम/कथन जो विशेष महत्व का है, एक प्रमेय कहलाता है। सामान्यतः हम उन कथनों को उपक्षेप के वर्ग में रखते हैं जो शायद प्रमेय से तो कम महत्वपूर्ण हों परंतु जिनका आंतरिक महत्व होता है। वास्तव में प्रमेय और उपक्षेप के बीच अंतर स्पष्ट करना अत्यंत कठिन कार्य है क्योंकि अलग-अलग लेखक/गणितज्ञ एक ही कथन को अलग–अलग प्रकार से वर्गीकृ त कर सकते हैं।

किसी प्रमेय में सामान्यतः हमें कुछ पूर्वधारणाएं दी होती हैं जिनके आधार हमें एक निष्कर्ष तक पहुँचना होता है। अर्थात् उनका रूप 'यदि .... तो .....' प्रकार का होता है। किसी भी प्रदत प्रमेय में यह पहचान करना कि इसमें पूर्वधारणाएं क्या हैं और निष्कर्ष क्या हैं अर्थात् क्या दिया है और क्या सिद्ध करना है

जिस प्रमेय में पूर्वधारणाएं जितनी कमज़ोर होंगी और निष्कर्ष जितना अधिक शक्तिशाली (strong?) होगा, वह प्रमेय उतना ही अधिक प्रभावी/महत्वपूर्ण /अच्छा होगा।

प्रमेयिका

सामान्यतः प्रमेयिका एक ऐसे कथन को कहते हैं जो एक मुख्य कथन को सिद्ध करने में सहायक होता है। प्रमेयिका को उपक्षेप से कम महत्वपूर्ण माना जाता है परंतु पुनः, दोनों

वर्गों में अंतर सदैव बहुत स्पष्ट नहीं होता। कभी–कभी प्रमेयिकाएं उस कथन से भी अधिक उपयोगी सिद्ध होती है जिनकी उपपत्ति में इनका प्रयोग किया जाता है।

उपप्रमेय

एक ऐसा कथन जिसे किसी प्रमेय अथवा उपक्षेप से निगमित (ज्ञात) किया जा सके, उपप्रमेय कहलाता है।

उपपत्ति

गणितज्ञ प्रश्नों/समस्याओं (problems) को हल करते हैं– उपपत्ति इस बात का प्रमाण है कि दिया गया हल सही है। उपपत्ति किसी कथन की सत्यता की व्याख्या है।

धारणाएं

एक धारणा एक ऐसे कथन को कहते हैं जिसे सत्य माना जाता है परंतु जिसको सिद्ध न किया जा सके।

स्वयंसिद्ध कथन

एक स्वयंसिद्ध कथन किसी गणितीय स्थिति के बारे में कोई मूलभूत पूर्वधारणा होती है। स्वयंसिद्ध कथनों को ऐसे तथ्यों के रूप में देखा जा सकता है जिन्हें सिद्ध करने की आवश्यकता न हो। यूक्लिड ने ज्यामिति पर कार्य करते हुए पाँच स्वयंसिद्ध कथन माने, जैसे कि किन्हीं भी दो बिंदुओं को मिलाती हुई एक रेखा बनाई जा सकती है। इन स्वयंसिद्ध कथनों से उन्होंने अनेक प्रमेय ज्ञात/सिद्ध किए। ध्यान देने योग्य बात यह है कि ये स्वयंसिद्ध कथन ही केवल ऐसे तथ्य थे जिन्हें बिना सिद्ध किए प्रयोग कर लिया गया था। स्वयंसिद्ध कथनों का प्रयोग परिभाषाओं में भी किया जाता है।

3.6 उपपत्ति के विभिन्न प्रकार [Varieties of Proof]

पिछले अनुच्छेद में आपका परिचय तर्कशास्त्र के अत्यंत महत्वपूर्ण अवयवों, जैसे कि, स्वयंसिद्ध कथनों, प्रमेय, प्रमेयिकाओं, उपप्रमेय इत्यादि से करवाया गया। इस अनुच्छेद में हम अपना ध्यान इस बात पर केंद्रित करेंगे कि स्वयंसिद्ध कथनों तथा पूर्वधारणाओं से उपपत्ति तक कैसे पहुँचा जाता है। स्मरण करें कि सप्रतिबंध कथन 'यदि p तो q' प्रकार के होते हैं। एक प्रमेय में भी एक दावा किया जाता है। 'यदि p तो q' में p पर विचार कीजिए। p से प्रारंभ करते हुए हम प्रव्यापक (convincing) एवं तर्कपूर्ण उपपादन की विशिष्ट विधियों का प्रयोग करते हुए q को वैध सिद्ध करते हैं। यही किसी उपपत्ति की प्रकृति/का रूप होती/होता है। पाठकों का उपपत्ति की विभिन्न विधियों से परिचय करवाना, इस अनुच्छेद का उद्देश्य है।

3.6.1 प्रत्येक्ष विधि [Direct Proofs]

सामान्यतः, एक प्रमेय एक '$p \rightarrow q$' प्रकार के कथन के रूप में होता है। परिकल्पना साधारणतयः एक मिश्र कथन होता है और यह भी संभव है कि इसके कुछ घटक स्पष्ट रूप से वर्णित भी न हों। मूलभूत स्तर पर, किसी प्रमेय $p \rightarrow q$ की उपपत्ति करने का अर्थ होता है कि हम यह सिद्ध करें कि $p \rightarrow q$ एक पुनरुक्ति है। तथापि, उपपत्ति सामान्यतः कथनों के रूप में होती है न कि चिह्नों तथा प्रतीकों के श्रृंखला के जोड़–तोड़ के रूप में। हम अपने पहले उदाहरण में उपपत्ति की प्रत्यक्ष विधि का उपयोग करते हैं। प्रत्यक्ष विधि से उपपादित किए गए किसी प्रमेय का कथन तथा उसकी उपपत्ति कुछ इस प्रकार दिखेंगे :

प्रमेय : यदि p, तो q ।

उपपत्ति : मान लीजिए p सत्य है। ..... तो q सत्य होगा।

यहाँ चिह्न .... उपपत्ति तक के पथ को निरूपित करता है। इस पदलोप या शब्दलोप कहते है। किसी प्रमेय की उपपत्ति लिखने का अर्थ है परिकल्पना से निष्कर्ष तक एक तर्कपूर्ण पुल का निर्माण करना। किसी प्रमेय की उपपत्ति की यह विधि सबसे सरल है तथा इसे प्रत्यक्ष विधि कहते हैं। अनेक स्थितियों में कथन 'यदि p, तो q' को कथनों $p \to p_1,\ p \to p_2,$

$\ldots p_{n-1} \to p_n,\ \ p_n \to q$ के रूप में तोड़ा जा सकता है। ऐसी स्थिति में $p \to q$ को सिद्ध करने के लिए हम सिद्ध करते हैं कि $p \to p_1,\ \ p \to p_2, \ldots$ तथा $p_n \to q$ इससे $p \to q$ सिद्ध हो जाता है।

3.6.2 विरोधोक्ति विधि [Proof by Contradiction]

प्रत्यक्ष विधि द्वारा उपपत्ति का अर्थ यह सिद्ध करना है कि $p \to q$ एक पुनरूक्ति है अर्थात् संयुक्त (मिश्र) कथन $p \to q$ का सत्यमान सदैव सत्य है। तथापि, कई बार यह सिद्ध करना अधिक सरल होता है कि $\neg(p \to q)$ एक विरोधोक्ति है। विरोधोक्ति द्वारा किसी प्रमेय $p \to q$ की उपपत्ति करने के लिए हमें पहले कथन $p \to q$ का निषेधन ज्ञात करना चाहिए। इस स्थिति में यह स्मरण रखना उपयोगी सिद्ध होगा कि 'यदि, तो' कथन का एक निरूपण $\neg$ और $\vee$ के पदों में भी है। नामतः, $p \to q$, $\neg p \vee q$ के बराबर/समतुल्य होता है।

अर्थात् $p \to q \equiv \neg p \vee q$ होता है।

अतः $p \to q$ का निषेधन होगा :

$$\neg (p + q) = \neg (\neg p \vee q)$$

$$= \neg (\neg p) \wedge \neg p$$

$$= p \wedge \neg p$$

[यहाँ हमने तर्कशास्त्र के कथन–संबंधी नियमों का प्रयोग किया है]

अतः, विरोधोक्ति द्वारा $p \to q$ को सिद्ध करने का अर्थ है यह दर्शाना कि $p \wedge \neg p$ असंभव है अर्थात् इसका सत्यमान कभी 'सत्य' नहीं हो सकता। विरोधोक्ति विधि द्वारा उपपत्ति का व्यापक रूप इस प्रकार होता है :

प्रमेय : यदि p, तो q।

उपपत्ति : मान लीजिए p और $\neg q$ हैं। तो .....

यह एक विरोधोक्ति है।

अतः $p \to q$ सत्य होगा।

हमने इस इकाई के प्रारंभ में ही देखा कि एक दिया हुआ कथन या तो सत्य होगा अथवा असत्य। इसका कोई और मान नहीं हो सकता। हम इस तथ्य को भी एक विधि के रूप में प्रयोग में ला सकते हैं। हम यह मान लें कि कथन असत्य है और तर्क द्वारा यह सिद्ध करें कि इससे हमें एक ऐसा कथन प्राप्त होता है जो निश्चित रूप से असत्य

होगा (जैसे कि कथन 0=1) या कि चाँद पनीर से बना हुआ है। अतः हमारी पूर्णधारणा निश्चित रूप से असत्य थी अर्थात् दिया हुआ कथन असत्य नहीं हो सकता। इससे हमें प्राप्त होता है कि दिया हुआ कथन सत्य है। विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति की विधि को अर्थहीनता तक प्रह्रासन अथवा विसंगति प्रमाणक (reductio ad absurdum) भी कहा जाता है। यह लैटिन भाषा का एक वाक्यांश है जिसका अर्थ हैं विसंगत अथवा अर्थहीन बनाना।

विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का स्वरूप इस प्रकार होता है :

i) पहले हम यह मानते हैं कि दिया हुआ कथन असत्य है। यह इस बात का पर्याप्त संकेत होता है कि हम उपपत्ति के लिए विरोधोक्ति विधि का प्रयोग करने वाले हैं।

ii) इसके पश्चात् हम निषेधन का प्रयोग करते हुए यह देखते हैं कि कथन के असत्य होने को किस प्रकार व्यक्त किया जाएगा।

iii) हम तब तक आगे बढ़ते है जब तक कि कोई विरोधोक्ति न प्राप्त हो जाएं।

iv) अंततः हम यह दर्शाते हैं कि विरोधोक्ति उभर कर सामने आई है।

3.6.3 'आगमन' द्वारा उपपत्ति [Proof by Induction]

गणितीय आगमन उपपत्ति की एक प्रभावशाली विधि है जिसका उपयोग गणित में अक्सर किया जाता है। यह विधि भ्रामक प्रतीत हो सकती है, क्योंकि कभी–कभी ऐसा आभास होता है कि हमें जो सिद्ध करना है उसी को मान कर चल रहे हैं। लेकिन इस विधि एक लाभ यह है कि यह पहचानना अत्यंत सरल है कि इस विधि को कब लगाया जाए और कैसे लगाया जाए। साथ ही इस विधि को केवल दो ही चरणों में पूरा किया जा सकता है।

प्रतिबंधों की जाँच करने की आवश्यकता होती है। आगमन द्वारा उपपत्ति करते हुए हम दिए हुए कथन को प्रत्यक्ष रूप से सिद्ध नहीं करते। इस विधि की एक साईकिल स्टैंड पर खड़ी साईकलों से समानता की जा सकती है। यदि साइकिलें इस प्रकार खड़ी हों कि किसी भी साईकिल को धक्का देने पर वो अपने से अगली साईकिल को गिरा दे, तो हम देख सकते हैं कि यदि आप पहली साईकिल को धक्का दें तो वह दूसरी साईकिल को गिरा देगी, दूसरी साईकिल तीसरी साईकिल को गिरा देगी और इसी प्रकार एक–एक कर के सभी साईकिलें गिर जाएंगी। आगमन की प्रक्रिया भी कुछ इसी प्रकार की है। हम सिद्ध करते हैं 'यदि कथन k सत्य है तो कथन $k+1$ भी सत्य होगा'। यह एक साईकिल द्वारा अगली साईकिल गिराए जाने के समान है। अतः, यदि कथन 1 सत्य है (अर्थात् पहली साईकिल गिरी) तो सभी कथन सत्य होंगे (अर्थात् सभी साईकिलें गिर जाएंगी) आगमन की विधि तर्कशास्त्र के विद्यार्थियों के लिए एक महत्वपूर्ण अस्त्र है जिसे वे अर्थशास्त्र में प्रभावशाली ढंग से प्रयोग कर सकते हैं।

गणितीय आगमन का नियम

गणितीय आगमन उस स्थिति में लगाया जा सकता है जब हमें कथनों का अनुक्रम दिया हो जो प्राकृतिक संख्याओं द्वारा अनुक्रमित हो। यह नियम इस प्रकार है :

मान लीजिए $A(n)$ कथनों का एक अनंत समूह है जहाँ $n \in N$ है यहाँ N प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय को निरूपित कर रहा है। मान लीजिए,

i) A(1) सत्य है, और

ii) $A(k) \rightarrow A(k+1), \forall k \in N$

तो, $A(n)$ प्रत्येक $n \in N$ के लिए सत्य होगा।

प्रतिबंध (i) की जाँच को प्रारंभिक चरण कहा जाता है तथा प्रतिबंध (ii) को आगमन चरण कहा जाता है। चरण (iii) में यह परिकल्पना कि $A(n)$ किसी प्राकृतिक संख्या x के लिए सत्य है, आगमन परिकल्पना कहलाती है।

आगमन के नियम द्वारा उपपत्ति सरल है और इस विधि को इस प्रकार कार्यान्वित किया जाता है :

i) हम सर्वप्रथम यह घोषित करते हैं कि हम आगमन के नियम का प्रयोग करने जा रहे हैं।

ii) प्रथम चरण की वैद्यता $n = 1$ के लिए जाँच लें।

iii) इसके पश्चात् हम मानते हैं कि किसी प्राकृतिक संख्या k के लिए कथन सत्य है। इस कथन को स्पष्ट रूप से लिख लेने से अगले चरण में सुविधा होती है।

iv) k के लिए कथन की सत्यता का उपयोग करते हुए हम सिद्ध करते हैं कि कथन k +1 के लिए भी सत्य है। इसके लिए हमें अक्सर k +1 के लिए प्राप्त कथन को दो टुकड़ों में बाँट लेना सहायक सिद्ध होता है, जिनमें से एक हिस्सा k के लिए कथन को व्यक्त करता हो। हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि हम किस समय आगमन परिकल्पना का उपयोग करना है।

v) अंत में हम निष्कर्ष को इस प्रकार व्यक्त करते हैं 'गणितीय आगमन के नियम के अनुसार दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए सत्य है। इस प्रकार आगमन द्वारा उपपत्ति की विधि पूर्ण होती है।

3.6.4 प्रतिधनात्मक विधि द्वारा उपपत्ति [Proof using the Contrapositive Method]

प्रतिधनात्मक विधि द्वारा उपपत्ति की तकनीक में हम इस तथ्य का प्रयोग करते हैं कि कथन '$p \rightarrow q$' और कथन '$\neg q \rightarrow \neg p$' समतुल्य हैं। कथन $p \rightarrow q$ का प्रतिधनात्मक कथन $\neg q \rightarrow \neg p$ होता है। वास्तव में प्रतिधनात्मक विधि इन कथनों की समतुल्यता का उपयोग करना ही है। यह एक अप्रत्यक्ष विधि है जिसमें हम $p \rightarrow q$ को सिद्ध करने के लिए $\neg q$ से प्रारंभ करके यह सिद्ध करते हैं कि $\neg p$ भी सत्य है। अतः, प्रतिधनात्मक विधि इस प्रकार कार्य करती है :

हम जानते हैं कि $p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$ के समतुल्य होता है। अतः, $p \rightarrow q$ के रूप के किसी प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम प्रतिधनात्मक विधि अपनाते हुए यह दर्शाते हैं कि $\neg q \rightarrow \neg p$ कथन $\neg q \rightarrow \neg p$ को सिद्ध करना कथन $p \rightarrow q$ को सिद्ध करने के समान ही है। व्यापक रूप में प्रतिधनात्मक विधि द्वारा उपपत्ति इस प्रकार व्यक्त की जा सकती है :

प्रमेय : यदि p, तो q ।

उपपत्ति : माना कि $\neg q$ सत्य है।

अतः $\neg p$ सत्य होगा।

किसी दिए हुए प्रमेय के लिए प्रत्यक्ष विधि अधिक कारगार होगी या प्रतिधनात्मक विधि, इसकी पहचान हमें कई प्रमेयों की उपपत्ति लिखने के अभ्यास से प्राप्त अनुभव से ही हो सकती है।

बोध प्रश्न 3 :

1) स्वयंसिद्ध कथन, उपक्षेप तथा उपप्रमेय की संकल्पनाओं की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

2) आप एक प्रमेय से क्या समझते हैं? उपपत्ति क्या होती है?

....

....

....

....

....

3) विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति तथा प्रतिधनात्मक विधि द्वारा उपपत्ति की चर्चा कीजिए।

....

....

....

....

....

3.7 सार-संक्षेप

इस इकाई का उद्देश्य पाठकों का परिचय तर्कशास्त्र के आधार भूत नियमों तथा विभिन्न विधियों से करवाना था। यह इकाई एक प्रकार से पहली दो इकाईयों में किए गए अध्ययन को ही उसके पूरक के रूप में आगे बढ़ा रही थी। ये पहली तीन इकाईयाँ पाठकों को अमूर्त रूप से विचार करने के कौशल को अर्जित करने का आधार प्रदान करेंगी। इस इकाई का एक लक्ष्य पाठकों को अर्थशास्त्रीय सिद्धांतों को अमूर्त रूप में समझने में समर्थ बनाना भी था। यह पाठ्य सामग्री आपको विभिन्न संकल्पनाओं को आपस में जोड़ने तथा तर्कशास्त्र के नियमों को ध्यान में रखते हुए वैध तर्क करने में सहायक सिद्ध होगी।

यह इकाई एक कथन तथा उसके निषेधन की व्याख्या से प्रारंभ हुई। इसमें सत्यमान तालिकाओं की चर्चा की गई तथा उन्हें बनाने की विधि बताई गई। इसके पश्चात् 'और' तथा 'या' जैसे संयोजकों के माध्यम से मिश्र कथन बनाने पर चर्चा की गई। तत्पश्चात्,

इस इकाई में सप्रतिबंध कथनों पर चर्चा की गई। अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंधों तथा द्विप्रतिबंधी कथनों की चर्चा भी इस इकाई में की गई। अस्तित्वाबोधी तथा सार्वत्रिक परिमाणकों की संकल्पनाओं की व्याख्या के पश्चात् स्वयंसिद्ध कथनों, प्रमेयों और उपपत्ति इत्यादि संकल्पनाओं का भी विस्तृत विवरण दिया गया। अंत में इस इकाई में उपपत्ति की विभिन्न विधियों का विस्तृत वर्णन किया गया जैसे कि प्रत्यक्ष विधि, विरोधोक्ति विधि आगमन के नियम द्वारा उपपत्ति और प्रतिधनात्मक विधि द्वारा उपपत्ति।

3.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1:

1½ क)

p	q	$p \wedge q$	Not $(p \wedge q)$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	F

ग)

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
F	T	F	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	F	T	F	F

घ)

q	$\neg q$	$\neg q \vee q$
F	T	T
T	F	T
F	T	T
T	F	T

2) क) A सत्य नहीं है और B असत्य नहीं है। सामान्यतः ' A या B' नहीं का अर्थ होगा 'न A और न B'

   ख) " A असत्य नहीं है या B सत्य नहीं है"। सामान्यतः " A और B" नहीं का अर्थ होगा 'A नहीं या B नहीं'

   ग) A सत्य नहीं है और B सत्य नहीं है।

   घ) A सत्य नहीं है या B सत्य नहीं है।

3) उपभाग 3.2.2 देखें और उत्तर दें

बोध–प्रश्न 2

1) भाग 3.4 देखें और उत्तर लिखें

2) उपभाग 3.3.3 देखें और उत्तर लिखें

3) भाग 3.3 देखें और उत्तर लिखें

बोध प्रश्न 3

1) भाग 3.5 देखें और उत्तर लिखें

2) भाग 3.5 देखें और उत्तर लिखें

3) भाग 3.6 देखें और उत्तर लिखें