खंड 2

एक स्वतंत्र चर के फलन

खंड 2 परिचय

दूसरे खंड का शीर्षक हैः ''**एक स्वतंत्र चर के फलन**'', इसमें भी पहले खंड की भांति तीन इकाइयां हैं। इस खंड में फलन के पूर्व परिचित विचार को आगे विकसित किया जा रहा है। यहां विशेष प्रकार के फलनों और उन पर अनुक्रियाओं पर चर्चा होगी। इस खंड की प्रथम इकाई, इकाई 4 हैः '**फलनों के प्राथमिक प्रकार**' और यह **इकाई 2, खंड 1** की चर्चा को ही आगे बढ़ा रही है। वर्तमान इकाई में आप का परिचय बीजगणितीय और गैरबीजगणितीय फलनों से कराया जाएगा। हम रैखिक फलनों से चर्चा प्रारंभ करेंगे – फिर अन विचरों का वर्ग एव घनमान फलनों तक प्रसार किया जाएगा। आप यह भी जानेंगे कि एक बहुपद क्या होता है। गैर बीजगणितीय फलनों में ही लघुगणकीय और घातांकीय, गुणांकीय, त्रिकोणमितीय और अति परवलयात्मक फलन भी सम्मिलित हैं। इन संकल्पनाओं की चर्चा के साथ साथ इनके अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोग भी बताए गए हैं।

'**विश्लेषणात्मक ज्यॉमिति**' **इकाई 5** खंड की विषय वस्तु है जहां आपको विभिन्न फलनों की ज्यॉमितिक व्याख्या विधि समझाई जाएगी। एक सरल से उदाहरण के रूप में एक रैखिक फलन को सरल रेखा को एक द्विघात फलन को परवलय द्वारा दिखाया जा सकता है। साथ ही, हम यह भी बता रहे हैं कि किस प्रकार किसी ज्यॉमितिक रचना को एक समीकरण सूत्र के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अतः आप सीखेंगे कि किसी वृत या किसी अतिपरवलय को समीकरण निरूपण कैसे होगा। सभी विचारों के अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोग तो होंगे ही।

इकाई 6 '**अनुक्रम की श्रृंखलाएं**' है– यहां अनुक्रम की रचना करने वाले फलनों पर चर्चा की जाएगी। यह प्रांत के अवयवों का प्राकृतिक संख्याओं के समुच्च में परिचित्रण ही है। अर्थशास्त्र में तो अनुक्रमों और श्रृंखलाओं का बहुत बार प्रयोग होता है। किसी देश के सकल घरेलू उत्पाद की कई वर्षों की क्रमबद्ध जानकारी एक अनुक्रम ही बन जाती है। यही बात समय की विभिन्न अवधियों में मिले भुगतान दिखाते हैं। एक अनुक्रम अभिसृत या अपसृत हो सकता है – इसीलिए हम यहीं पर अभिसरण और अपसरण के विचारों पर भी चर्चा कर रहे है। इसी इकाई में श्रृंखलाओं के गुणधर्मों और अनुप्रयोगों पर चर्चा की गई है।

इकाई 4 फलनों के आधारभूत प्रकार*

संरचना

4.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित अवधारणाओं से भली भाँति अवगत/परिचित हो जाएंगे :

- चर, अचर और प्राचल की परिभाषा से;
- स्वतंत्र और निर्भर चर की संकल्पना से;
- रैखिक समीकरण और रैखिक फलन के बीच अंतर से;
- द्विघातीय फलन की परिभाषा से;
- त्रिघातीय एवं बहुपदीय फलनों की विशेषताओं से;
- कई अन्य फलनों से जैसे कि चरघातांकीय फलन, लघुगणकीय फलन, घात फलन तथा अतिपरवलीय फलन इत्यादि तथा
- ऊपर दिए फलनों के अर्थशास्त्र में उपयोग से।

4.1 विषय-प्रवेश

इस इकाई का अध्ययन इकाई 2 के विस्तार के रूप में करना चाहिए। इकाई 2 में हमने फलनों के बारे में जाना और देखा कि किस प्रकार एक समुच्चय (जिसे फलन का प्रांत

*श्री सौगतो सेन

कहते हैं) के अवयवों को, एक अन्य समुच्चय (जिसे फलन का परिसर कहते हैं) के अवयवों पर ले जाता है। परिसर के अवयवों को, प्रांत के अवयवों के प्रतिबिंब कहते हैं। इस इकाई में फलन को चरों के बीच संबंध की भांति निरूपित किया गया है।

दो या दो से अधिक चरों के बीच के संबंध को एक फलन कहा जा सकता है यदि एक या एक से अधिक चरों के मानों से एक चर के एक अद्वितीय मान का निर्धारण किया जा सके। यदि हमें किसी संबंध के गणितीय रूप की ठीक–ठीक जानकारी न हो, ऐसे फलन को हम एक व्यापक रूप में लिख सकते हैं उदाहरण के लिए, एक माँग फलन का व्यापक रूप $Q_d = f(P)$ है। माँग फलन का इस प्रकार का व्यापक रूप यह दर्शाता है कि किसी वस्तु की माँग की मात्रा (Q_d) उसके प्रति इकाई मूल्य अथवा कीमत (P) पर निर्भर करती है। यहाँ चिह्न $f(P)$ का अर्थ f और P का गुणनफल नहीं है। इसका अर्थ है f, P का एक फलन है। इस स्थिति में हम P को एक 'स्वतंत्र चर' कहते हैं क्योंकि इसका मान दिया होता है और यह Q_d के मान पर निर्भर नहीं करता अर्थात् यह बहिर्जात रूप से निर्धारित होता है। दूसरी ओर, Q_d एक 'निर्भर चर' है क्योंकि इसका मान P के मान पर निर्भर करता है। आर्थिक प्रतिरूप सामान्यतः बहिर्जात चरों और अंतर्जात चरों के मानों को जोड़ते है।। अर्थशास्त्र में जिन चरों का अध्ययन किया जाता है वे गुणात्मक भी हो सकते हैं और परिमाणात्मक भी। गुणात्मक चर कुछ विशिष्ट अभिलक्षणों, जैसे कि पुरूष या स्त्री, कार्यरत या बेरोज़गार इत्यादि को निरूपित करते हैं। किसी गुणात्मक चर के मानों में संबंध संख्यात्मक नहीं होते। दूसरी ओर, परिमाणात्मक चरों को संख्यात्मक रूप में मापा जा सकता है। रूपयों में राष्ट्रीय आय, बैरल में आयातित तेल, उपभोक्ता कीमत स्तर तथा रूपया–डॉलर विनिमय दर, इत्यादि परिमाणात्मक चरों के कुछ उदाहरण हैं। किसी फलन में स्वतंत्र चरों की संख्या एक से अधिक भी हो सकती है। उदाहरण के लिए, उत्पादन फलन का व्यापक रूप $Q = f(K, L)$ हमें बताता है कि उत्पाद (Q) दो स्वतंत्र चरों पूँजी (K) तथा श्रम (L) के मानों पर निर्भर करता है। हम इस पाठ्यक्रम में इस प्रकार के फलनों का अध्ययन नहीं कर पाएंगे, परंतु पाठकों को अगले सेमेस्टर में, 'अर्थशास्त्र के लिए गणित' पाठ्यक्रम के अंतर्गत इस प्रकार के फलनों के बारे में जानने का अवसर मिलेगा।

किसी फलन के विशिष्ट रूप से हम जान सकते है कि स्वतंत्र चर अथवा चरों के मानों से निर्भर चर का मान किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है। अर्थशास्त्र में फलनों के अनुप्रयोगों में कई बार हमें फलन के प्रांत को सीमित करना पड़ता है अर्थात् चरों के संभावित मानों को सीमित करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, कीमत या उत्पाद को निरूपित करने वाले चरों के मान अऋणात्मक लिए जाते हैं। दूसरे शब्दों में प्रांत स्वतंत्र चरों के मानों को सीमाबद्ध करता हैं और परिसर निर्भर चर के मान को नियंत्रित करता है।

किसी फलन के रूप को परिभाषित करते हुए यह निश्चित कर लेना अत्यंत महत्वपूर्ण है कि स्वतंत्र चर के प्रत्येक मान (स्वतंत्र चरों के मानों के प्रत्येक संयोजन) के लिए, निर्भर चर का एक अद्वितीय मान हो। अन्यथा यह एक फलन न होकर केवल एक संगति मात्र होगी। समीकरण

$$y = 80 + x^{0.5}$$

पर विचार कीजिए। यह समीकरण एक फलन नहीं है क्योंकि यहाँ x के किसी भी दिए हुए मान के संगत हमें y के दो संभव मान प्राप्त होते हैं। यदि $x = 25$ है तो 25 की

घात 0.5= 5 या −5 होगा। अतः, y = 75 या 85 होगा। परंतु यदि हम $y = 80 + x^{0.5}$ for $x^{0.5} \geq 0$ लेते हैं, तो यह समीकरण एक फलन को निरूपित करेगा। यदि प्रांत निर्दिष्ट न हों तो आर्थिक चरों को निरूपित करने वाले फलनों का परिसर हमें बुद्धिमता पूर्वक चुनना चाहिए।

प्रतिलोम फलन

किसी फलन का प्रतिलोम, फलन के संबंध को उल्टा कर देता है। यदि हम अपनी चर्चा केवल एक स्वतंत्र चर, x, वाले फलनों तक सीमित रखें तो हम पाएंगे कि यदि y,x का फलन है, अर्थात् यदि $y = f(x)$ है तो इसके प्रतिलोम फलन में x,y का फलन होगा अर्थात् $x = g(y)$ होगा। ध्यान दें कि यहाँ हमने f न लेकर g लिया है जो यह दर्शाता है कि इस फलन g का रूप दिए हुए फलन f के रूप से भिन्न होगा।

फलनों के स्वरूप (की प्रकृति) के इस सामान्य परिचय के पश्चात् आईए अब हम विभिन्न प्रकार के फलनों का अध्ययन करें। इस इकाई के प्रत्येक अनुच्छेद में हम पाठकों का परिचय एक अलग प्रकार के फलन से करवाएंगे। हम देखेंगे कि इनमें से कुछ फलन रैखिक तथा अन्य अरैखिक कहलाते हैं। इसी प्रकार कुछ फलन बीजीय होते हैं जबकि कुछ अबीजीय। अगला अनुच्छेद रैखिक फलनों पर केंद्रित है। इस अनुच्छेद में, प्रारंभ करने के लिए, हमने चर, अचर तथा प्राचल इत्यादि को भी परिभाषित कर दिया है यद्यपि पाठक इन अवधारणाओं से पहले से ही परिचित हो सकते हैं और हमने भी विषय का परिचय देते हुए इस शब्दावली का प्रयोग पहले ही कर लिया है। इसके पश्चात् इस अनुच्छेद में हमने रैखिक फलनों की विशेषताओं और उनके गुणधर्मों की चर्चा भी की है। पाठकों को इस अनुच्छेद में रैखिक समीकरणों एवं रैखिक फलनों में अंतर जानने का अवसर भी मिलेगा। इससे अगले अनुच्छेद में द्विघातीय समीकरणों एवं द्विघातीय फलनों पर चर्चा की गई है। इसके पश्चात् आने वाले अनुच्छेद में त्रिघातीय और बहुपदीय फलनों पर विचार किया गया है। तत्पश्चात् चरघातांकीय तथा लघुगणकीय फलनों के साथ–साथ घातीय फलनों एवं अतिपरवलीय फलनों पर भी चर्चा की गई है। आईए अब हम एक–एक करके विभिन्न प्रकार के फलनों का अध्ययन करें।

4.2 रैखिक फलन [Linear Functions]

इस खंड में हम फलनों का अध्ययन आरंभ करेंगे। सरलतम भाषा में हम कह सकते हैं एक फलन, दो चरों के बीच के संबंध को दर्शाता है। आईए हम पहले चर की संकल्पना को समझें। गणित में चर एक ऐसा प्रतीक होता है जो सामान्यतः एक ऐसी संख्या को निरूपित करता है जिसका मान हमें पूरी तरह से स्पष्ट नहीं होता अर्थात् यह दिए हुए कई मानों में से एक हो सकता है। इसे साधारणतयः अंग्रेज़ी माला के वर्णों x,y,z या किसी अन्य वर्ग से व्यक्त किया जाता है। संक्षिप्त में, एक चर एक ऐसा प्रतीक या इकाई है जो विभिन्न मान ले सकता है।

दूसरी और अचर एक निश्चित संख्या होती है या कोई ऐसा प्रतीक जिसका मान निश्चित हो। अतः एक ऐसे परिमाण को अचर कहा जा सकता है जो परिवर्तित नहीं होता। किसी समीकरण के संदर्भ में, जब कोई अचर किसी चर के साथ संलग्न होता है, तो उस अचर को संगत चर का गुणांक कहते हैं। कभी–कभी एक समीकरण में कोई **गुणंक/अचर** एक संख्या के बजाय, वर्णमाला के अक्षर से व्यक्त किया गया होता है। यह अक्षर एक अचर को निरूपित करता है परंतु इसका कोई नियत मान नहीं होता।

यह मान स्थिति के अनुसार विभिन्न मान ले सकता है। इस प्रकार के **गुणांक/अचर** को प्राचल (पैरामीटर) कहते हैं। कोई भी ऐसा गणितीय व्यंजक जिसमें '=' का चिह्न उपस्थित हो, एक समीकरण कहलाता है। कुछ समीकरण ऐसे कथनों को निरूपित करते हैं जो केवल विशिष्ट स्थितियों में ही सत्य/सही होते हैं, जैसे कि $x^2 = 9$ यह कथन केवल तभी सत्य होगा जब $x = +3$ या $x = -3$ है। दूसरी ओर कुछ समीकरण चर (चरों) के प्रत्येक मान के लिए सत्य होते हैं जैसे कि

$$a + a + a + b + b + b = 3a + 3b$$

इस प्रकार के समीकरणों को सर्वसमिकाएं कहा जाता है और इन संबंधों में $'='$ के स्थान पर $'\equiv'$ का प्रयोग किया जाता है।

अब जब कि हम समीकरण के बारे में विस्तार से चर्चा कर चुके हैं, आईए हम देखें कि रैखिक समीकरण क्या होते हैं। किसी समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं यदि इसमें प्रयुक्त चरों में से प्रत्येक की घात एक हो तथा कोई दो या अधिक चर आपस में गुणा न हो रहे हों। उदाहरण के लिए समीकरण $x + 3 = 9$ एक रैखिक समीकरण है क्योंकि इसमें उपस्थित चर x की घात 1 है। इसी प्रकार, $y = 3x - 5$ एक रैखिक समीकरण है क्योंकि इसमें उपस्थित दोनों चरों, x और y, की घात 1 है तथा इस समीकरण में xy जैसा कोई भी पद नहीं है। इसके विपरीत, $x^2 - 4 = 16$ एक अरैखिक समीकरण है। इसी प्रकार, $y = x^{1/2} + 5$ और $xy = 6$ भी अरैखिक समीकरण हैं।

एक चर में एक रैखिक समीकरण का सामान्य रूप

$$ax + b = c$$

होता है जहाँ x एक अज्ञात चर है तथा a, b और c अनिर्दिष्ट प्राचल (पैरामीटर) हैं। किसी दिए हुए निर्दिष्ट समीकरण में a, b और c कोई विशिष्ट मान ले सकते हैं, पर यहाँ हम रैखिक समीकरण के सामान्य स्वरूप की बात कर रहे हैं। हम ऊपर दिए रैखिक समीकरण मे x का मान प्राचलों के पद में व्यक्त करके ज्ञात कर सकते हैं ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$x = \frac{c - b}{a}$$

रैखिक समीकरण के सामान्य रूप में x एक अंतर्जात चर है और a, b, c प्राचल हैं। इस समीकरण को हल करने का अर्थ है, दिए हुए अंतर्जात चर को प्राचलों के पद में व्यक्त करना।

रैखिक समीकरण की जानकारी प्राप्त करने के पश्चात् आईए हम एक रैखिक फलन के बारे में चर्चा करें। एक रैखीक फलन क्या है और इसका रैखिक समीकरण से क्या संबंध है? यह समझने के लिए आईए हम नीचे दिए समीकरण पर विचार करें :

$$y = 2x + 1$$

यह समीकरण एक रैखिक समीकरण है परंतु इसमें दो चर, x और y, तथा दो अचर, 2 और 1, हैं। x और y का केवल एक-एक मान ही नहीं अपितु कई मान (युग्म), इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं। उदाहरण के लिए, यदि हम, $x = 1$ लें, तो $y = 3$ प्राप्त होता है। वास्तव में, हम x का कोई भी इच्छित मान चुन कर , y का एक ऐसा मान ज्ञात कर सकते हैं कि x और y इस समीकरण को संतुष्ट करें।

मुख्य बिंदु यह है कि इस समीकरण का कोई अद्वितीय हल नहीं है। दो चरों में इस प्रकार के समीकरण को फलन कहते हैं। फलन हमें एक अद्वितीय नहीं बल्कि दो (या दो से अधिक) चरों के बीच संबंध को दर्शाता/का वर्णन करता है। इस अनुच्छेद में हम रैखिक फलनों पर चर्चा करेंगे। सामान्यतः, किसी फलन में, बाई ओर लिखे गए चर को निर्भर चर तथा दाईं ओर लिखे गए चर को स्वतंत्र चर कहते हैं। ऊपर दिए फलन/समीकरण में x एक स्वतंत्र चर तथा y एक निर्भर चर है। हम इसे इस प्रकार भी कह सकते हैं कि y का मान, x के मान पर निर्भर करता है।

अगली इकाई में हम विभिन्न प्रकार के रैखिक व अरैखिक **समीकरणों/फलनों** के आलेखों के बारे में विस्तारपूर्वक चर्चा करेंगे। अनुच्छेद 5.5 रैखिक फलनों के आलेखों पर ही केंद्रित है। यहाँ हम अब रैखिक फलनों के कुछ गुणधर्मों के बारे में संक्षेप में चर्चा करेंगे। किसी रैखिक फलन के लिए व्यापक समीकरण

$$y = ax + b$$

होता है, जहाँ a और b अचर हैं।

हम a को वक्र (रेखा) का ढाल तथा b को उसका y-अन्तः खंड कहते हैं। हम x के मानों को क्षैतिज अक्ष पर तथा y के मानों को ऊर्ध्व अक्ष पर अंकित करते हैं। ये दोनों जिस बिंदु पर मिलते है वहाँ x और y दोनों का मान 0 होता है तथा इस बिंदु को मूलबिंदु कहते हैं। इन अक्षों के काटने से तल चार चतुर्थांशों में विभाजित हो जाता है। इस तल में प्रत्येक बिंदु (चाहे वह किसी भी अक्ष पर अथवा किसी भी चतुर्थांश में स्थित हो) को x और y के एक अद्वितीय युग्म से निरूपित किया जा सकता है जिसमें x के मान को पहले स्थान पर तथा y के मान को दूसरे स्थान पर लिखा जाता है। (स्मरण करें कि हम इकाई 2 में R^2 अर्थात् वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों के समुच्चय पर चर्चा कर चुके हैं)।

हम पुनः सरल रेखा के समीकरण $y = ax + b$ पर लौटते हैं, जहाँ b वह बिंदु है जिस पर रैखिक फलन को निरूपित करने वाला समीकरण (जो कि एक सरल रेखा है) y-अक्ष को काटता है। $y = ax + b$ में $x = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि $y = b$, यदि $y = 0$ तो हमें $x = -b/a$ प्राप्त होता है। अतः यह रेखा (जो रैखिक फलन का आलेख है) x-axis को $-b/a$ पर काटती है। रेखा $y = ax + b$ का ढाल (जो कि यहाँ a द्वारा निरूपित है, रेखा पर स्थित दो बिंदुओं के y मानों के अंतर तथा x मानों के अंतर के अनुपात के बराबर होता है अर्थात् $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ जहाँ (x_1, y_1) और (x_2, y_2) रेखा $y = ax + b$ पर स्थित कोई भी दो बिंदु हैं।

रैखिक फलनों में स्मरण रखने योग्य महत्वपूर्ण बिंदु इस प्रकार हैं :

a) सभी चरों की घात 1 होती है, और कोई नहीं

b) कोई भी दो या दो से अधिक चर कभी गुणा नहीं होते

c) आलेख (रेखा) का ढाल सभी बिंदुओं पर समान होता है।

ये एक सरल रेखा की महत्वपूर्ण विशेषताएं हैं। रैखिक फलनों और उनके आलेखों के बारे में और अधिक जानकारी के लिए आप सीधे अनुच्छेद 5.5 पर जा सकते हैं।

एक स्वतंत्र चर के फलन

उदाहरण : यह दिया हुआ है कि एक वस्तु की कीमत 3.50 रू. प्रति इकाई है, यदि माँग 350 इकाई है। यदि माँग केवल 50 इकाई की है तो कीमत बढ़कर 5.50 रू. प्रति इकाई हो जाती है। माँग और कीमत में रैखिक माँग फलन ज्ञात कीजिए।

हल : माना रैखिक माँग फलन $p = a + bx$ है। इस फलन में $p = 3.5$ तथा $x = 250$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$3.5 = a + 250b \qquad \ldots(1)$$

इसी प्रकार $p = 5.5$ तथा $x = 50$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$5.5 = a + 50b \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) घटाने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$200b = -2 \text{ or } b = -0.01$$

समीकरण (1) में $b = -0.01$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$3.5 = a + (250)(-0.01)$$

$$3.5 = a - 2.5$$

$\therefore$ $a = 6$ और $b = -0.01$

अतः, माँग फलन $p = 6 - 0.01x$ है।

ध्यान दें कि उपरोक्त उदाहरण में हमने व्यापक रैखिक फलन को $y = a + bx$, लिया। यहाँ, a, y –अन्तः खण्ड तथा b ढाल है जबकि पहले हमने इस फलन के समीकरण $y = ax + b$ लिया था। हम अपने फलन को इनमें से किसी भी रूप में ले सकते हैं। केवल इतना ध्यान रहे कि चर x का गुणंक फलन का ढाल होता है और स्वच्छंद अचर y – अन्तः खंड (y – intercept)

4.3 द्विघात फलन [Quadratic Functions]

पिछले अनुच्छेद में हमने रैखिक समीकरणों तथा रैखिक फलनों के बारे में जाना। हमने देखा कि किसी रैखिक समीकरण का सामान्य रूप $ax + b = c$ होता है, जहाँ x एक चर अथवा अज्ञात इकाई है तथा a, b और c अचर अथवा प्राचल हैं। इस समीकरण को रैखिक कहते हैं क्योंकि इसमें उपस्थित चर x की घात 1 होती है, न कम, न अधिक। किसी रैखिक फलन का सामान्य रूप $y = ax + b$ होता है। इसका आलेख एक सरल रेखा होता है तथा इसका ढाल प्रत्येक बिंदु पर समान रहता है। इसका अर्थ यह भी है कि x के मान में एक इकाई के बराबर परिवर्तन करने पर y का मान, समान मात्रा में बढ़ता या घटता है (ध्यान रहे कि ढाल ऋणात्मक भी हो सकता है)।

यह अर्थशास्त्र में पाए जाने वाले कुछ संबंधों के लिए सही हो सकता है, जैसे कि रैखिक माँग वक्र या रैखिक आपूर्ति वक्र। परंतु अर्थशास्त्र में ऐसी कई परिस्थितियाँ उत्पन्न होती है जब हमारा सामना अरैखिक संबंधों से होता है, ऐसी स्थितियाँ जहाँ x में दिया हुआ परिवर्तन करने पर सदा y में समान परिवर्तन नहीं होता। इस अनुच्छेद में हम एक सरल अरैखिक फलन की चर्चा करेंगे जिसे द्विघात फलन कहते हैं। हम द्विघात समीकरणों की चर्चा भी करेंगे। जब हम किसी द्विघात फलन का आलेख बनाते हैं तो हमें एक U के आकार का वक्र प्राप्त होता है। हम द्विघात समीकरणों का हल ज्ञात

करना भी सीखेंगे। हम अर्थशास्त्र में द्विघात फलनों के कुछ अनुप्रयोगों का भी वर्णन करेंगे।

एक द्विघात समीकरण में एक अज्ञात चर x होता है जिसकी घात 2 के बराबर होती है अर्थात् किसी द्विघात समीकरण में x^2 की उपस्थिति अनिवार्य है। इसमें x की घात 1 वाला पद अर्थात् x भी हो सकता है। एक द्विघात समीकरण का सामान्य रूप

$$ax^2 + bx + c = 0$$

होता है जहाँ a, b और c अचर होते हैं।

इस समीकरण को हल करने के लिए हम x^2 के गुणांक a को कोष्ठक के बाहर लाते हैं। ऐसा करने से हमें प्राप्त होता है :

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

इसके पश्चात् हम कोष्ठक के अंदर उपस्थित पद $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ के गुणनखंड करते हैं।

मान लीजिए ये गुणनखंड $(x + C)$ तथा $(x + D)$ हैं, जहाँ C और D दो संख्याएं हैं। यदि ये गुणनखंड हैं तो गुणनखंड की परिभाषा के अनुसार

$$(x + C)(x + D) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

होगा।

इस समीकरण के दोनों पक्षों को a से गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$a(x + C)(x + D) \equiv ax^2 + bx + c$$

क्योंकि यह एक सर्वसमिका है, जब बाईं ओर का व्यंजक शून्य के बराबर होगा तो दाईं ओर का पक्ष भी शून्य हो जाएगा। परंतु बायाँ पक्ष तभी शून्य होगा जब $x = -C$ अथवा $x = -D$ हो। यही मान द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के हल हैं। इन्हें द्विघात समीकरण के मूल कहते हैं।

किसी दिए हुए द्विघात समीकरण को हल करने के लिए एक व्यापक सूत्र भी है। एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के हल (मूल) नीचे दिए सूत्र से प्राप्त किए जा सकते हैं :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

द्विघात समीकरणों के बारे में चर्चा करने के पश्चात्, आईए हम द्विघात फलनों की ओर चलें। जैसा कि हम देख चुके हैं, किसी फलन को दो चरों में एक समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है। आईए अब हम देखें कि किसी द्विघात फलन का स्वरूप कैसा होता है। किसी भी द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $y = ax^2 + bx + c$ के प्रकार का होता है जहाँ a, b, और c अचर हैं। यदि हम किसी द्विघात फलन का आलेख बनाएं तो हम

पाएंगे कि यह एक U-आकार का वक्र है जिसे परवलय (पैराबोला) कहते हैं। आप अगली इकाई में परवलय की विशेषताओं और उसके गुणधर्मों के बारे में पढ़ेंगे। ध्यान दें कि x^2 सदैव धनात्मक होगा चाहे x ऋणात्मक हो अथवा धनात्मक। यदि हम परवलय $y = x^2$ की बात करें, तो y भी सदैव धनात्मक होगा। इस परवलय में यदि x शून्य है तो y भी शून्य होगा। साथ ही x के मानों x_i और $-x_i$ दोनों के लिए ही y का मान समान होगा। इन कारणों से हम देख सकते हैं कि $y = x^2$ का आलेख एक U–आकार का वक्र होगा। वास्तव में, प्रत्येक परवलय का आलेख U-आकार का एक वक्र होगा। किसी द्विघात फलन के आलेख की कुछ अन्य विशेषताएं इस प्रकार हैं :

1) पद x^2 की उपस्थिति से फलन का आलेख लगभग U-आकार का होता है जिसे एक परवलय कहते हैं।

2) यदि प्राचल a धनात्मक हो, तो आलेख U जैसा दिखेगा और यदि a ऋणात्मक है तो आलेख उल्टे U की तरह, अर्थात् ∩ की तरह दिखेगा। x^2 के गुणांक a के निरपेक्ष मान से इस बात का निर्धारण होता है कि वक्र कितनी तीव्रता से वक्र ऊपर या नीचे जाता है।

3) अचर पद, c से वक्र द्वारा y-अक्ष पर बनाए गए खंड की लंबाई का निर्धारण होता है।

4) अचर पद b परवलय को ऊपर या नीचे विस्थापित करता है। यदि प्राचल b धनात्मक हो तो $x > 0$ होने पर वक्र ऊपर खिसक जाता है तथा $x < 0$ होने पर नीचे की ओर खिसकता है। प्राचल b का निरपेक्ष मान उक्त विस्थापन प्रभाव की प्रबलता का निर्धारण करता है।

आईए अब हम अर्थशास्त्र में द्विघात समीकरणों के दो अनुप्रयोगों के बारे में जानें। पहला अनुप्रयोग माँग एवं आपूर्ति विश्लेषण के संदर्भ में है। हम रैखिक प्रतिलोम माँग फलन के बारे में बात कर चुके हैं। आईए अब हम एक द्विघाती प्रतिलोम माँग फलन पर विचार करें (जबकि प्रतिलोम आपूर्ति फलन रैखिक ही हो। मान लीजिए प्रतिलोम माँग फलन $p_d = 1.5q^2 - 15q + 35$ है और आपूर्ति फलन $p_s = 2q + 7$ है। संतुलन की स्थिति में माँग और आपूर्ति बराबर होते हैं, अतः हम पाते हैं कि

$$1.5q^2 - 15q + 35 = 2q + 7$$

$$1.5q^2 - 17q + 28 = 0$$

इस द्विघात समीकरण से हम पाते हैं कि $q = 2$ या $9\frac{1}{3}$ है। हम q के मान $9\frac{1}{3}$ को छोड़ देते हैं क्योंकि यह मान तब प्राप्त होता है जब द्विघाती माँग फलन ऊपर की ओर बढ़ते हुए, रैखिक आपूर्ति फलन को (नीचे से) दूसरी बार काटता है।

द्विघात समीकरणों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग के रूप में हम लागत तथा आगम (राजस्व) के संबंध में चर्चा करते हैं। आईए हम किसी फर्म की कुल लागत (जिसे हमें TC = Total Cost लिखते हैं) और इसके उत्पाद q के बीच संबंध का अध्ययन करें। आईए हम इसे

$$TC = f(q)$$

के रूप में लिखें। इस फलन का आकार कैसा होगा? अर्थात् कुल लागत वक्र कैसा दिखेगा? कुल लागत फलन या वक्र रैखिक भी हो सकता है, जैसे कि $TC = aq + b$ जहाँ b निश्चित स्थिर लागत है तथा aq कुल परिवर्तनीय लागत है। उदाहरण के लिए, $TC = 1.5q + 100$ एक रैखिक लागत फलन है। एक विचारणीय बात यह है कि इस फलन से यह प्रतीत होता है कि फर्म अपना उत्पाद जितना चाहे बढ़ा सकती है। परंतु ऐसा नहीं होता। यदि हम एक छोटे अंतराल में देखें तो किसी भी फर्म की उत्पादन क्षमता सीमित होती है। इसके अनेक कारण हो सकते हैं जैसे कि कारखाने मशीनरी और अन्य उपकरणों का परिमाण इत्यादि। इसी प्रकार $TC = 0.02q^2 + 1.5q + 100$ एक द्विघातीय लागत फलन है। यह फलन ऊपर दिए रैखिक फलन जैसा ही है सिवाय इसके कि इसमें एक दो घात वाला पद $0.02q^2$ भी सम्मिलित है। इस कारण से यह एक परवलय के आकार का वक्र बन जाता है जिसमें उत्पाद बढ़ने से लागत में तेज़ी से ऊपर की ओर वृद्धि होती है। यह वक्र हमें इस तथ्य से अवगत करवाता है कि यदि किसी फर्म की उत्पादक क्षमता बढ़ाई जाए तो उसकी लागत भी तेज़ी से बढ़ती है। आईए अब हम इस फर्म के राजस्व या आगम पक्ष पर नज़र डालें। मान लीजिए यह फर्म एक एकाधिकारी फर्म है अर्थात् किसी विशेष उत्पाद की यह अकेली आपूर्तिकर्ता या उत्पादक है। हम पाते हैं कि यदि यह फर्म उत्तरोत्तर उत्पाद की कीमत को कम करती है तो इसकी आगम बढ़ जाएगी। कुछ समय पश्चात् इसका आगम बढ़ेगा परंतु उसके बढ़ने की दर कम हो जाएगी। तत्पश्चात्, एक सीमा के बाद आगम कम होना शुरू हो जाता है क्योंकि कम कीमत पर सामान बेचने से होने वाली आगम की हानि, अधिक मात्रा में होने वाली बिक्री से प्राप्त आगम की तुलना में अधिक होने लगती है। इस प्रकार के आगम फलन को ठीक-ठीक निरूपित करने वाला एक फलन, द्विघाती आगम फलन, $TR = aq^2 + bq$ है। हम यहाँ a को एक ऋणात्मक प्राचल के रूप में लेते हैं। साथ ही यहाँ कोई अचर पद नहीं लिया गया अर्थात् $c = 0$ है, क्योंकि हम मानते हैं कि यदि उत्पाद की बिक्री शून्य होगी तो फर्म को कोई आगम प्राप्त नहीं होगी। अतः, यदि $q = 0$ है, तो $TR = 0$ होगा। इस प्रकार के कुल आगम फलन का एक उदाहरण है :

$$TR = -0.12q^2 + 10q.$$

यदि हम इस फलन का आलेख बनाएं तो हम पाएंगे कि कुल आगम अधिकतम होती है जब उत्पाद q लगभग 42 हो। यह सीमांत आगम को 0 के बराबर रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

बोध प्रश्न 1

1) एक रैखिक समीकरण और एक रैखिक फलन के बीच अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

2) किसी रैखिक फलन की ऐसी दो विशेषताएं बताईए जो इसे एक अरैखिक फलन से अलग करती हैं।

....

....

....

....

....

....

3) एक द्विघात फलन के आलेख की विशेषताओं का वर्णन कीजिए।

....

....

....

....

....

....

4.4 त्रिघातीय एवं बहुपदीय फलन [Cubic and Polynomial Functions]

इस अनुच्छेद में उन स्थितियों की चर्चा करेंगे जिनमें चर की घात 3 या अधिक होती है। उपअनुच्छेद 4.4.1 में, हम घात 3 वाले फलनों एवं उपअनुच्छेद 4.4.2 में व्यापक बहुपद फलनों की चर्चा करेंगे।

4.4.1 त्रिघातीय फलन [Cubic Functions]

एक त्रिघातीय फलन एक त्रिघातीय समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है जिसका व्यापक रूप हैं

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

जहाँ a, b, c और d अचर हैं। किसी त्रिघातीय (घात 3 वाले) समीकरण को हल करने का व्यापक सूत्र उपलब्ध नहीं है। परंतु इसका आलेख बनाकर इस प्रकार प्राप्त वक्र के अक्षों के साथ उभयनिष्ठ बिंदु ज्ञात करके इसका निकटतम हल निकाला जा सकता है। घात 3 वाले/त्रिघातीय फलनों के प्रमुख गुण इस प्रकार हैं :

1) किसी त्रिघातीय फलन के आलेख में या तो कोई भी turning point नहीं होगा या दो turning point होंगे।

2) एक त्रिघातीय फलन का एक मूल होगा या फिर तीन मूल होंगे।

द्विघातीय फलन की तरह त्रिघातीय फलन के गुणनखंड करना सरल नहीं होता। एक त्रिघातीय फलन का आलेख सामान्यतः एक S-आकार का वक्र होता है। अर्थशास्त्र में

ऐसे कई संदर्भ आते हैं जहाँ त्रिघातीय फलन उपयोगी सिद्ध होते हैं। जिस प्रकार हमने पिछले अनुच्छेद में एक द्विघातीय लागत फलन का उदाहरण लिया, उसी प्रकार हम त्रिघातीय लागत फलन भी ले सकते हैं। उदाहरण के लिए निम्न प्रकार का कुल लागत फलन लीजिए :

$$TC = 2q^3 - 15q^2 + 50q + 50$$

इस फलन का आलेख एक वर्धमान फलन होगा। प्रारंभ में q के छोटे मानों के लिए (लगभग q = 1.5 तक) इसका ढाल कम होगा अर्थात् यह थोड़ा क्षैतिज होगा परंतु q के मानों के एक अंतराल में (लगभग q = 1.5 से लेकर q = 2.5 तक) इसका ढाल अधिक हो जाएगा अर्थात् इस अंतराल में उत्पादन अधिक होगा। q के और बढ़े मानों के लिए (विशेषकर $q = 5$ के पश्चात्) इसका ढाल अत्यंत अधिक हो जाएगा।

4.4.2 व्यापक बहुपद फलन [General Polynomial Functions]

द्विघातीय तथा त्रिघातीय फलन, फलनों के एक विशेष वर्ग में आते हैं जिन्हें बहुपद कहा जाता है। एक चर में किसी बहुपद फलन का व्यापक रूप

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots a_1 x^1 + a_0 x^0$$

होता है, जहाँ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ अचर हैं। किसी बहुपद की घात उसमें उपस्थित चर, जैसे कि x, की अधिकतम घात के बराबर होती है। अतः, एक द्विघाती फलन घात 2 का बहुपद है और त्रिघाती फलन घात 3 का बहुपद। शब्द 'बहुपद' का अर्थ अनेक पद वाला होता है। यदि n=0 हो तो $y=a_0$ होगा। यदि n=1 है तो $y=a_0+a_1\, x$ होगा। इसी प्रकार n=2 लेने पर हमें $y=a_0+a_1\, x+a_2x^2$ प्राप्त होता है। इनमें से पहले फलन को अचर फलन कहते हैं, दूसरे को रैखिक फलन तथा तीसरे को द्विघाती फलन कहते हैं। हम यहाँ बहुपद फलनों पर और विस्तार से चर्चा नहीं कर पाएंगे परंतु पाठकों को यह ज्ञात होना चाहिए कि बहुपद फलनों के आलेख सतत होते हैं इनमें किसी प्रकार के विखंडन या उछाल नहीं होते। अतः, इन फलनों के आलेख ज्ञात बिंदुओं को मिलाकर सरलता से बनाए जा सकते हैं और इन आलेखों की मदद से इनके मूल तथा वर्तन बिन्दु प्राप्त किए जा सकते हैं।

बोध प्रश्न 2

1) एक त्रिघाती फलन से आप क्या समझते हैं? इन फलनों के हल (मूल) ज्ञात करने की विधियों के बारे में बताईए?

....

....

....

....

....

....

....

2) बहुपद क्या होते हैं?

....

....

....

....

....

3) किसी त्रिघाती फलन का आकार कैसा होता है? किस प्रकार के अर्थशास्त्रीय संबंधों को त्रिघातीय फलनों से व्यक्त किया जा सकता है।

....

....

....

....

....

4.5 चरघातांकीय, लघुगणकीय तथा घातीय फलन [Exponential, Logarithmic and Power Functions]

इस अनुच्छेद में हम फलनों के एक अलग वर्ग की ओर चलते हैं। हम अब दो फलनों, चरघातांकीय फलन तथा लघुगणकीय फलन की बात करेंगे। ये दोनों ही फलन अबीजीय फलन हैं क्योंकि न तो ये रैखिक फलन हैं, न ही बहुपदीय फलन। चरघातांकीय तथा लघुगणकीय फलनों को transcendent (बीजातीत) फलन भी कहा जाता है क्योंकि ये बीजीय संबंधों से परे हैं। इस अनुच्छेद में सम्मिलित किए गए तीसरे प्रकार के फलन घातीय फलन हैं। ये फलन चरघातांकीय फलनों से संबंधित हैं फिर भी बीजीय फलन हैं। आईए हम चरघातांकीय फलनों से प्रारंभ करें।

4.5.1 चरघातांकीय फलन [Exponential Functions]

एक चरघातांकीय फलन में स्वतंत्र चर एक घातांक के रूप में उपस्थित होता है। एक चर वाले एक चरघातांकीय का व्यापक रूप

$$y = f(x) = b^x$$

के प्रकार का होता है जहाँ b को आधार कहते हैं तथा इसे 1 से बड़ी संख्या माना जाता है, अर्थात् $b > 1$ होता है और $x \in R$ होता है। जब $x = 0$ हो तो किसी भी आधार b के लिए $y = b = 1$ होगा। जब $b > 1$ हो, तो x का मान बढ़ने पर b^x का मान भी बढ़ता है।

टिप्पणी : यहाँ हमने $b > 1$ लेकर, b पर प्रतिबंध लगाया है। ध्यान दें कि $b = 0$ या $b = 1$ लेने पर हमें अचर फलन क्रमशः $y = 0$ तथा $y = 1$ प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार यदि हम $b < 0$

लें तो हमें $\sqrt{-b}$ के प्रकार का एक समिश्र मान वाला फलन प्राप्त हो सकता है। इसके अतिरिक्त, यदि $0 < b < 1$ हो तो हम b^x को एक ऐसे व्यंजक में बदल सकते हैं जिसमें $b < 1$ हो। उदाहरण के लिए यदि $b = 0.5$ और $x = 2$ है तो इन मानों को चरघातांकीय फलन में रखने पर हमें प्राप्त होता है $y = (0.5)^2$ जिसे हम $(½)^2 = 2^{-2}$ के रूप में लिख सकते है। इस प्रकार $b = 2 > 1$ तथा $x < 0$ हो जाता है। क्योंकि $x \in R$ है, यह चरघातांकीय फलन की एक मान्य स्थिति है।

चरघातांकीय फलनों की अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में एक विशेष भूमिका है। इस फलन का उपयोग समय के सापेक्ष किसी चर की वृद्धि को व्यक्त करने के लिए अक्सर किया जाता है। चरघातांकीय फलन एक अन्य संबंधित समस्या का हल ढूंढने भी एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। वह है – भविष्य में किए जाने वाले किसी भुगतान का वर्तमान मान ज्ञात करना। चरघातांकीय फलन आवश्यक रूप से एक दिष्ट होते हैं, अतः ये फलन सदा एकैकी होते हैं। हम जानते हैं कि प्रत्येक एकैकी फलन का प्रतिलोम होता है। एक चरघातांकीय फलन के प्रतिलोम फलन को लघुगणकीय फलन कहते हैं। अगले उपअनुच्छेद में हम लघुगणकीय फलनों के बारे में चर्चा करेंगे। अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में लघुगणकीय फलनों के अनेक उपयोग हैं जिनमें अरैखिक **संबंधों/समीकरणों** को रैखिक व्यंजकों में परिवर्ति करना विशेष रूप से उल्लेखनीय है क्योंकि रैखिक समीकरणों के हल ज्ञात करना अपेक्षाकृत सरल होता है। इसी प्रकार अचर लोच वाले किसी अर्थशास्त्रीय फलन के निरूपण में भी लघुगणकी फलन सहायक सिद्ध होते हैं।

4.5.2 लघुगणकीय फलन [Logarithmic Functions]

प्रत्येक चरघातांकीय फलन का प्रतिलोम होता है, क्योंकि चरघातांकीय फलन निरंतर एकदिष्ट होने के कारण सदा एकैकी होते हैं। किसी भी चरघातांकीय फलन के प्रतिलोम फलन को लघुगणकीय फलन कहते हैं। इस प्रकार हमें चरघातांकीय फलनों के सापेक्ष, लघुगणकीय फलनों का वर्ग प्राप्त होता है। अर्थशास्त्र में लघुगणकीय फलन अनेक प्रकार से उपयोगी सिद्ध होते हैं। इस अनुच्छेद में हम इन फलनों को परिभाषित करेंगे तथा अर्थशास्त्र में उनके होने वाले अनुप्रयोगों के उदाहरणों के माध्यम से उनके उपयोगी गुणधर्मों को स्पष्ट करेंगे।

चरघातांकीय फलन $y = b^x$ पर किसी बिंदु (i, j) के सापेक्ष, लघुगणकीय फलन $y = log_b(x)$ पर एक बिंदु (j, i) होता है। किसी चरघातांकीय फलन की भाँति ही, प्रत्येक लघुगणकीय फलन भी निरंतर एक दिष्ट (strictly monotonic) तथा वर्धमान है। लघुगणकीय फलन सर्वत्र अवतल होते हैं जबकि चरघातांकीय फलन सर्वत्र उत्तल होते हैं। हम इकाई 10 और 11 में उत्तल तथा अवतल फलनों का विस्तृत अध्ययन करेंगे। लघुगणकीय फलनों का प्रांत धनात्मक वास्तविक संख्याओं तक सीमित होता है जबकि इनका परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है। यह चरघातांकीय फलनों से बिल्कुल विपरीत स्थिति है। अंततः, क्योंकि प्रत्येक चरघातांकीय फलन $y = b^x$, y-अक्ष को बंदु (0,1) पर काटता है, उसी प्रकार प्रत्येक लघुगणकीय फलन $y = log_b(x)$ x-अक्ष को बिंदु (1,0) पर काटता है।

एक लघुगणकीय फलन को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है : यदि $b > 1$, एक वास्तविक संख्या है तो $y = log_b(x)$ होगा, यदि $b^y = x$ हो। फलन $y = log_b(x)$ को लघुगणकीय फलन कहते हैं। $y = log_b(x)$ को इस प्रकार पढ़ते हैं 'आधार b पर, x का

लघुगणक y है। लघुगणक की इस परिभाषा से हम देख सकते है कि किसी भी आधार b के लिए $log_b\, b$=1 होगा, क्योंकि $b^1 = b$ होता है। इसी प्रकार $\log_b b^x = x$ होगा। साथ ही, प्रतिलोम फलन की परिभाषा के अनुसार हम देख सकते हैं कि $b^{\log_b(x)} = x$ होगा।

अर्थशास्त्रीय प्रतिमानों (Economic models) में प्रायः चरों को लघुगणकीय रूपान्तरण द्वारा परिवर्तित किया जाता है। एक लघुगणकीय रूपान्तरण में एक चर को, जिसके मान धनात्मक वास्तविक संख्याएं हो, उनके लघुगणकों में परिवर्तित किया जाता है। इस अनुच्छेद में हम लघुगणकीय रूपांतरणों के गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे और देखेंगे कि ये किस प्रकार अर्थशास्त्रियों के लिए उपयोगी हैं। अर्थशास्त्रीय प्रतिमानों में अक्सर अरैखिक संबंधों से सामना होता है। उदाहरण के लिए वास्तविक मौद्रिक शेष को सांकेतिक मौद्रिक शेष (M) और कीमत स्तर (P) के अनुपात M/P से निरूपित किया जाता है और वास्तविक विनिमय दर, मौद्रिक विनिमय दर (E) तथा बाह्य/विदेशी कीमत स्तर (P^*) के गुणनफल को घरेलू कीमत स्तर (P) से भाग कर के प्राप्त होती है (अर्थात् EP^*/P के बराबर हेाती है)।

चरों के बीच अरैखिक संबंधों को उनके लघुगणकों के बीच रैखिक संबंधों से व्यक्त किया जा सकता है। चरों में रैखिक संबंध वाले बहु-समीकरण प्रतिमानों की तुलना में ऐसे बहु-समीकरण प्रतिमानों को हल करना अधिक कठिन होता है जिनमें गुणनफल या भागफल सम्मिलित हो। अतः, ऐसे प्रतिमानों में सम्मिलित चरों को उनके लघुगणकों के पदों में व्यक्त करना विश्लेषण को सरल बनाने में उपयोगी सिद्ध होता है। हम सर्वप्रथम दो चरों के लघुगणकों और उनके गुणनफल के लघुगणकों के बीच के संबंध से प्रारंभ करते हैं। किसी फर्म, R, का आगम उसके द्वारा उत्पादित वस्तु की कीमत P तथा उस वस्तु की बेची गई मात्रा Q के गुणनफल के बराबर होता है। हम सुविधा के लिए चरों को बड़े अक्षरों तथा उनके लघुगणकों को छोटे अक्षरों से व्यक्त करते हैं। अतः, $q = \log_b (Q)$ तथा $p = \log_b (P)$ लेते हैं। लघुगणकों की परिभाषा के अनुसार हम पाते हैं कि $Q = b^q$ और $P = b^p$ होगा। अतः, हमें प्राप्त होता है :

$$R = PQ = b^p b^q = b^{p+q}$$

आधार b पर दोनों पक्षों का लघुगणक ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\log_b PQ = \log_b (b)^{p+q}$$

$$\log_b (PQ) = p + q \quad [\because \log_b b^x = x\,]$$

$$\therefore \log_b PQ = \log_b(P) + \log_b(Q)$$

व्यापक नियम इस प्रकार है :

किसी गुणनफलन का लघुगणकीय रूपांतरण किन्हीं दो धनात्मक चरों X और Y के लिए

$$\log_b (XY) = \log_b (X) + \log_b (Y). \_$$

इसी प्रकार हम दो चरों के भागफल के लघुगणकों के लिए भी नियम ज्ञात कर सकते हैं। इस नियम को स्पष्ट करने के लिए हम, वास्तविक मौद्रिक शेष M/P, सांकेतिक मौद्रिक शेष M के लघुगणक, $m = \log_b (M)$ तथा कीमत, P के लघुगणक $p = \log_b$

(P) के बीच संबंध निर्धारित करते है। ध्यान दें कि $M = b^m$ तथा $P = b^p$ है। वास्तविक संतुलन को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\frac{M}{P} = \frac{b^m}{b^p} = b^{m-p}$$

जिससे हमें प्राप्त होता है :

$$\log_b(M/P) = \log_b(M) - \log_b(P)$$

व्यापक नियम इस प्रकार है :

किसी भागफल का लघुगणकीय रूपांतरण : किन्हीं भी दो धनात्मक चरों X और Y के लिए

$$\log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_b(X) - \log_b(Y)$$

इसी प्रकार चरघातांक भी अर्थशास्त्रीय प्रतिरूपण में अक्सर प्रयोग किए जाते हैं। कॉब–डगलस उत्पादन फलन जो कि प्रति मज़दूर उत्पाद (Q) और प्रति मज़दूर पूँजी (K) के बीच संबंध दर्शाता है, निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$Q = K^{\alpha}$$

इसे गहन कॉब–डगलस उत्पादन फलन भी कहा जाता है

इस संबंध का लघुगणकीय रूपांतरण लघुगणक की परिभाषा तथा ऊपर दिए नियमों के अनुसार प्राप्त किया जा सकता है। एक चर Z लीजिए जो K^{α} के आधार b पर लघुगणक के बराबर हो। अर्थात्

$$Z = \log_b\left(K^{\alpha}\right)$$

अब मान लीजिए

$$k = \log_b(K)$$

है। अतः लघुगणकों के नियमों के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$K = b^k$$

अब, $\log_b(K^{\alpha})$ लीजिए और इस व्यंजक में $K = b^k$ रखिए। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\log_b(b^k)^{\alpha}$$
$$= \log_b(b^{\alpha k})$$
$$= \alpha k \qquad [\because \log_b b^x = x]$$
$$= \alpha \log_b(K)$$

अतः, हम अंततः प्राप्त करते हैं : $\log_b(K^{\alpha}) = \alpha \log_b(K)$

इस नियम का व्यापक रूप इस प्रकार है :

किसी चरघातांक का लघुगणक : किसी भी धनात्मक चर X और किसी भी मान λ के लिए,

$$\log_b\left(X^{\lambda}\right)=\lambda\log_b\left(X\right)$$

ऊपर दिए नियमों को आवश्यकता अनुसार मिलाया भी जा सकता हैं। उदाहरण के लिए, वास्तविक विनिमय दर (*RER*) $RER = EP^*/P$ का लघुगणक

$\log_b\left(RER\right)=\log_b\left(E\right)+\log_b\left(P^*\right)-\log_b\left(P\right)$ है। इसी प्रकार, जब उत्पादन (*Y*) को तकनीक

(*A*), श्रम (*L*) और पूँजी (*C*) के पदों में व्यक्त किया जाता है तो हमें फलन $Y = AL^{\alpha}C^{\beta}$ प्राप्त होता है। अतः, तकनीक, श्रम और पूँजी लघुगणकों में निम्नलिखित संबंध होता है

$$\log_b Y=\log_b A+\alpha\log_b L+\beta\log_b C$$

विभिन्न आधारों पर लघुगणकों में संबंध

अभी तक दिए गए नियम उन लघुगणकों से संबंधित है जो एक ही आधार पर हों। हम विभिन्न आधार वाले लघुगणकों के बीच में भी संबंध प्राप्त कर सकते हैं। मान लीजिए $\log_J H$, चर H का आधार J पर तथा $\log_W H$, चर H का आधार W पर लघुगणक है। मान लीजिए $H = J^S$ है। अतः $s = \log_J H$ होगा। अब आधार W पर H का लघुगणक, $\log_W H$ इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\log_W H = \log_W J^s$$

$$\log_W H = s\log_W J$$

का मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\log_W H=\log_W J.\log_J H$$

जिसे

$$\frac{\log_W H}{\log_J H}=\log_W J$$

के रूप में लिखा जा सकता है।

इस प्रकार हमें एक व्यापक नियम प्राप्त होता है जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

यदि $W<J$ है, तो

$$\log_W J>1$$

होगा। अतः,

$$\frac{\log_W H}{\log_J H}\geq 1$$

अर्थात्

$$\left|\log_W H\right|\geq\left|\log_J H\right|$$

यहाँ $|x|$ का प्रयोग x के निरपेक्ष मान के लिए किया गया है।

प्राकृतिक लघुगणक

यदि किसी लघुगणक का आधार e लिया जाए तो इस लघुगणक को प्राकृतिक लघुगणक कहते हैं। किसी चर x के प्राकृतिक लघुगणक को $\log_e(x)$ या अधिकांश $\ln(x)$ के रूप में लिखा जाता है। प्राकृतिक लघुगणक, अर्थशास्त्र में के कई अनुप्रयोगों में विशेष रूप से उपयोगी सिद्ध होता है।

ऊपर दिए गए लघुगणकों के सभी नियम प्राकृतिक लघुगणकों के लिए भी मान्य हैं क्योंकि प्राकृतिक लघुगणक भी एक लघुगणक ही है। केवल इसमें आधार एक विशेष संख्या e को लिया जाता है। इसलिए प्राकृतिक लघुगणकों के लिए हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त होते हैं।

प्राकृतिक लघुगणकों के नियम : किसी भी चर Z तथा किन्ही भी धनात्मक चरों X और Y के लिए :

i) $\ln\left(e^{Z}\right) = Z$

ii) $e^{\ln X} = X$

iii) $\ln XY = \ln X + \ln Y$

iv) $\ln\left(\dfrac{X}{Y}\right) = \ln X - \ln Y$

iv) $\ln X^{Z} = Z \ln X$

4.5.3 घातांकीय फलन [Power Functions]

एक घातांकीय फलन का व्यापक रूप $f(x) = kx^{r}$ होता है जहाँ k और r कोई भी अचर हो सकते हैं। प्राचल r को फलन का घातांक (exponent) कहते हैं। हमें घातांकीय फलन और चलघातांकीय फलन के अंतर को स्पष्ट रूप से समझ लेना चाहिए। एक चरघातांकीय फलन में, आधार एक अचर होता है जबकि घातांक (exponent) एक चर होता है। अर्थात् इस फलन में चर घातांक के रूप में उपस्थित होता है। दूसरी ओर एक घातांकीय फलन में आधार चर तथा घातांक एक प्राचल होता है अर्थात् इस फलन में स्वतंत्र चर आधार में होता है। घातांकीय फलन का उपयोग करने में घातांक से संबंधित नियम सहायक सिद्ध होते हैं।

4.6 अतिपरवलय फलन [Hyperbolic Functions]

अतिपरवलय की आधार भूत संकल्पना इस प्रकार हैः कोई भी फलन जो समीकरण $y = \dfrac{a}{bx+c}$ से व्यक्त किया जाता है, एक अतिपरवलय फलन कहलाता है। यहाँ a, b और c अचर हैं। $y = \dfrac{1}{x}$ अतिपरवलय फलन का सरलतम रूप है। ध्यान दें कि इस फलन में $a = 1$, $b = 1$ तथा $c = 0$ है। यह एक समकोणीय अतिपरवलय फलन कहलाता है। $y = \dfrac{1}{x}$ का आलेख बनाने से पूर्व ध्यान दें कि यह फलन $x = 0$ के लिए परिभाषित नहीं है अर्थात् $x = 0$ के लिए y का कोई भी मान प्राप्त नहीं होगा। अतः इस फलन के

आलेख पर कोई भी ऐसा बिंदु नहीं हो सकता जिसमें $x = 0$ हो। अर्थात् इस फलन का वक्र x-अक्ष को कभी नहीं काटेगा। इसी प्रकार हम यह भी देख सकते हैं कि यह वक्र y-अक्ष को भी कभी नहीं काटता। यदि हम $x = 0$ के पास x के कुछ मान लें तो हमें y के विभिन्न मान प्राप्त होंगे। नीचे दी गई तालिका में x के कुछ मान और उसके संगत y के कुछ मान दिए गए हैं :

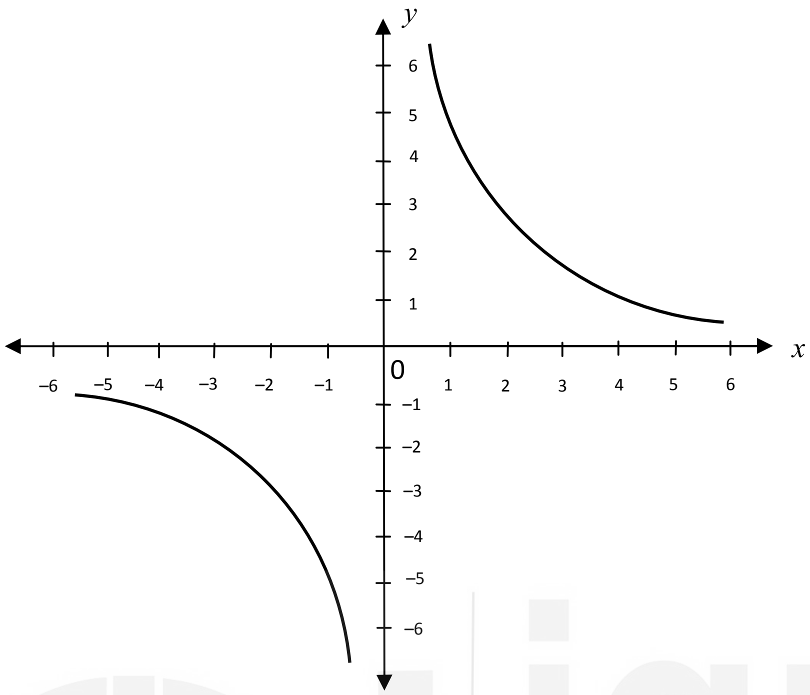
तालिका : x के दिए हुए मानों के सापेक्ष y के मान

x	$y = \frac{1}{x}$
-2	-0.5
-1.5	-0.67
-1	-1
-0.5	-2
0	undefined
0.5	2
1	1
1.5	0.67
2	0.5

इस तालिका में हमने स्पष्ट रूप में दर्शाया है कि $x = 0$ के लिए y अपरिभाषित है। यह $y = \frac{1}{x}$ का एक विशेष गुण है। इसी प्रकार समकोणीय अतिपरवलय के समीकरण $y = \frac{1}{x}$ में हम इसकी एक और विशिष्टता देख सकते हैं। यह गुणधर्म है कि x और y विलोम रूप से संबंधित हैं।

x का मान जितना छोटा होगा, y का मान उतना ही अधिक होगा। यह परिणाम x के ऋणात्मक मानों के लिए भी सत्य है। ऐसा इसलिए है कि x के बड़े निरपेक्ष मान के संगत y का निरपेक्ष मान छोटा होता है। जब x धनात्मक होता है, तो जैसे–जैसे x का मान बढ़ता है, y

का मान वैसे-वैसे ही कम होता जाता है। अतः वक्र x-अक्ष के समीप आता जाता है। परंतु यह वक्र कभी x-अक्ष को स्पर्श नहीं करता। x का मान कितना भी बड़ा हो जाए, y का मान 0 से बड़ा ही रहता है, यह कभी 0 के बराबर नहीं होता। x-अक्ष को स्पर्श करने के लिए y=0 होना चाहिए। हम y को x-अक्ष के जितना चाहें पास ला सकते हैं, परंतु कभी भी 0 नहीं बना सकते। अतः, हम कह सकते है कि जब y, 0 की ओर आता है अर्थात् जब x, ∞ की ओर जाता है तो y की सीमा 0 के बराबर होती है। अर्थात् y की सीमा 0 है (हम इकाई 7 में सीमाओं के बारे में अध्ययन करेंगे। यही परिणाम x के ऋणात्मक, मानों के लिए भी सत्य होगा। रेखाचित्र 4.1 में यह देखा जा सकता है। इस रेखाचित्र में हम देख सकते हैं कि x-अक्ष एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी रेखा है और y-अक्ष इसकी एक ऊर्ध्वा अनंतस्पर्शी रेखा है।



रेखाचित्र 4.1

किसी वक्र की अनंतस्पर्शी रेखा एक ऐसी रेखा होती है जिसकी वक्र से दूरी 0 की ओर जाती है। इसी प्रकार हम रेखाचित्र 4.1 में यह भी देख सकते हैं कि समकोणीय अतिपरवलय का वक्र $x = 0$ पर संतत नहीं है। (हम इकाई 8 में संतत एवं असंतत फलनों के बारे में पढ़ेंगे)।

अतिपरवलय फलन का व्यापक रूप $y = \frac{a}{bx+c}$ होता है। इसका आलेख भी $y = \frac{1}{x}$ के प्रकार का ही होता है। परंतु $y = \frac{a}{bx+c}$ का वक्र $bx + c = 0$ अर्थात् $x = \frac{-c}{b}$ पर परिभाषित नहीं होता। $y = \frac{a}{bx+c}$ के प्रकार फलन औसत लागत वक्र तथा आपूर्ति एवं माँग फलनों को चित्रित करने में उपयोगी सिद्ध होते हैं। समकोणीय अतिपरवलय अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोगों में अक्सर देखने को मिलते हैं। प्रतिलोम माँग फलन $p = \frac{15}{q^D}$ पर विचार करें। यह एक अतिपरवलय फलन है। माँग फलन में कीमत को ऊर्ध्वा अक्ष पर तथ माँग की मात्रा x-अक्ष पर अंकित किया जाता है। x-अक्ष और y-अक्ष इस वक्र के लिए अनंतस्पर्शी रेखाएं हैं। यहाँ से अर्थशास्त्रीय की दृष्टि से तीन महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त कर सकते हैं। पहला, कीमत जितनी भी अधिक हो जाए, उपभोक्ता उपभोग को कभी भी शून्य नहीं करेगा और वस्तु की कुछ न कुछ मात्रा अवश्य खरीदेगा। दूसरे, चाहे किसी वस्तु की कीमत कम होने पर उसकी कुछ अधिक मात्रा अवश्य खरीदेगा। वह कभी भी संतृप्त नहीं होता।

तीसरे बिंदु को माँग फलन के समीकरण

$$p = \frac{k}{q^d}$$

में देखा जा सकता है। इस समीकरण को q^d से गुणा करने पर हमें $pq^d = k$ प्राप्त होता है। अतः, हम देख सकते हैं कि कुल व्यय, अर्थात् कीमत और उपभोग की गई मात्रा का गुणनफलन सदैव समान रहता है। यह वस्तु की कीमत और उपभोग की गई मात्रा के साथ नहीं बदलता। हम व्यष्टि अर्थशास्त्र के नियमों से भी यह जानते हैं कि ऐसे माँग वक्र के सभी बिंदुओं पर माँग की लोच समान रहती है।

बोध प्रश्न 3

1) चरघातांकीय तथा घातांकीय फलनों में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

....

2) लघुगणक से आप क्या समझते हैं? एक लघुगणकीय फलन तथा एक चरघातांकीय फलन में क्या संबंध है?

....

....

....

....

....

3) अतिपरवलय फलन से आप क्या समझते हैं? किसी अतिपरवलय माँग फलन की विशिष्टताएं बताईए।

....

....

....

....

....

4.7 सार-संक्षेप

इस इकाई का लक्ष्य गणित तथा अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाले विभिन्न प्रकार के फलनों से पाठक को अवगत करवाना था। इस इकाई में हमने इकाई 2 में की गई चर्चा को आगे बढ़ाया। इकाई 2 में फलनों के सामान्य रूप और गुणों की चर्चा की गई थी। इस

इकाई में हमने फलनों को चरों के बीच संबंध के रूप में देखा। हमने इस इकाई का प्रारंभ चर, अचर तथा प्राचल की परिभाषा से किया। समीकरणों और सर्वसमिकाओं की भी व्याख्या की गई। इसी प्रकार अंतर्जातीय तथा बहिर्जातीय चरों को भी परिभाषित किया गया, तथा एक समीकरण और एक फलन के बीच अंतर भी स्पष्ट किया गया।

इसके पश्चात् इस इकाई में विभिन्न प्रकार के फलनों की चर्चा की गई। फलनों को दो प्रकार से वर्गीकृत किया गया : रैखिक एवं अरैखिक फलन तथा बीजीय तथा अबीजीय फलन। हमने यह भी जाना कि किसी फलन का ढाल तथा अक्ष- अन्तः खंड क्या होते हैं। हमने देखा कि किसी रैखीय फलन का ढाल प्रत्येक बिंदु पर समान होता है। यह एक ऐसा विशिष्ट लक्षण है जो एक रैखिक फलन को एक अरैखिक फलन से अलग करता है। एक रैखिक फलन में चरों की घात केवल 1 हो सकती है और कुछ नहीं। इसके पश्चात् हमने ऐसे फलनों का अध्ययन किया जिनमें चरों की घात दो (द्विघातीय फलन), तीन (त्रिघातीय फलन) या और अधिक (व्यापक बहुपद फलन) हो सकती है।

इसके पश्चात्, अन्य अनुच्छेदों में हमने, चरघातांकीय फलनों के बारे में चर्चा की जिनमें स्वतंत्र चर एक घातांक के रूप में होता है। चरघातांकीय फलनों में एक निश्चित आधार का एक चर घातांक होता है। ये फलन घातांकीय फलनों से भिन्न होते है। जिन्हें हमने इस इकाई में बाद में पढ़ा। इस इकाई में लघुगणकीय फलनों के बारे में विस्तार से चर्चा की गई। लघुगणकीय फलन, चरघातांकीय फलनों के प्रतिलोम फलन होते हैं। चरघातांकीय फलन $y = a^x$ का प्रतिलोम फलन $x = a^y$ है। लघुगणकीय फलन $y = \log_a x$ को चरघातांकीय फलन $x = a^y$ के समतुल्य परिभाषित किया गया। चरघातांकीय तथा लघुगणकीय फलन, अबीजीय फलनों के उदाहरण हैं क्योंकि यह बीजीय संबंधों से परे हैं। अंत में हमने अतिपरवलय फलनों और अर्थशास्त्र में उनके अनुप्रयोगों पर चर्चा की। पाठकों से आग्रह है कि वे इस इकाई के साथ इकाई 5 भी अवश्य पढ़ें। दो इकाईयों को साथ–साथ पढ़ने से उन्हें विषय और विभिन्न संकल्पनाओं को और ठीक से समझने में सहायता मिलेगी।

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) $ax + b = c$ द्वारा दर्शाए गए रैखिक समीकरण से x का अद्वितीय मान a,b,c नामक प्राचलों के रूप में मिल जाता है। किंतु रैखिक फलन प्रायः $y = ax + b$ के रूप में होता है। यहां x का कोई एक अद्वितीय मान नहीं होता, वस्तुतः x और y के अनेक संयोजन इस फलन को संतुष्ट कर सकते है।

2)

रैखिक फलन	गैर-रैखिक फलन
1. चर x की घात केवल इकाई होती है	1. चर x की घात इकाई से कम या अधिक होती है
2. इसका रेखांकन स्थिर ढाल वाली सरल रेखा होगा- x में एक इकाई की कमी या वृद्धि से y में एक समान इकाइयों का परिवर्तन होता है।	2. रेखांकन सरल रेखीय नहीं रहता और x में एक इकाई परिवर्तन से y में होने वाले परिवर्तन भी एक समान नहीं रहते।

3) भाग 4.3 देखें ओर अपना उत्तर लिखें।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 4.4.1 देखें और उत्तर लिखें

2) भाग 4.4.2 देखें और उत्तर लिखें

3) प्रायः घन घातीय फलन S आकार का वक्र बनाता है। अर्थशास्त्र में इसके अनेक उदाहरण है : कुल उत्पाद फलन, कुल लागत फलन

बोध-प्रश्न 3

1) एक घातांकीय फलन को $y = x^n$ द्वारा दर्शाते हैं जहाँ x आधार तथा n उसका घातांक होता है। इसके विपरीत चरघातीय फलन $y = n^x$ में चर को घातांक और स्थिर अंक को आधार माना जाता है।

2) भाग 4.5.2 देखकर पहले भाग का उत्तर लिखें। समीकरण $y = \log_b x$ वस्तुतः $x = b^y$ के समतुल्य ही है, जहाँ $b > 0, b \neq 1$

3) देखें भाग 4.6 और अपना उत्तर लिखें।

इकाई 5 वैश्लेषिक ज्यामिति*

संरचना

5.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप :

- कोटि, भुज आदि के अर्थों की व्याख्या के बारे में जान पाएंगे और उनका आलेख/निरूपण कर पाएंगे;
- दूरी सूत्र तथा विभाजन सूत्र से अवगत हो पाएंगे तथा उनका प्रयोग करना सीख पाएंगे;
- सरल रेखा के समीकरण के विभिन्न रूपों से भली-भाँति परिचित हो पाएंगे; तथा
- वृत्त, परवलय तथा समकोणीय अतिपरवलय इत्यादि के बारे में जानकारी प्राप्त कर पाएंगे।

5.1 विषय-प्रवेश

निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह शाखा है जो एक तल में दिए गए बिंदु की स्थिति तथा दो अंकों के युग्म में एक निश्चित संबंध स्थापित करती है। अंकों के इस युग्म को दिए हुए बिंदु के निर्देशांक कहते हैं। दो से अधिक आयामों वाली निर्देशांक ज्यामिति भी उपलब्ध है परंतु हम अपनी चर्चा को द्वि-आयामी निर्देशांक ज्यामिति तक ही सीमित रखेंगे क्योंकि अपने उद्देश्य की प्राप्ति के लिए हमें केवल इसी की आवश्यकता पड़ेगी। किसी बिंदु के निर्देशांकों को कार्तीय निर्देशांक भी कहा जाता है। यह नाम प्रसिद्ध गणितज्ञ रेने द कार्ते के नाम पर आधारित है जिसने सबसे पहले निर्देशांक ज्यामिति की संकल्पना दी तथा इसको विकसित किया था।

निर्देशांक ज्यामिति, जिसे वैश्लेषिक ज्यामिति भी कहा जाता है, बीजगणितीय तथा ज्यामितीय संकल्पनाओं के बीच संबंध स्थापित करती है। यह ज्यामिति की बिंदु, रेखा और वक्र जैसी संकल्पनाओं को परिमाणात्मक आयाम देती है। इस प्रकार यह अर्थशास्त्र

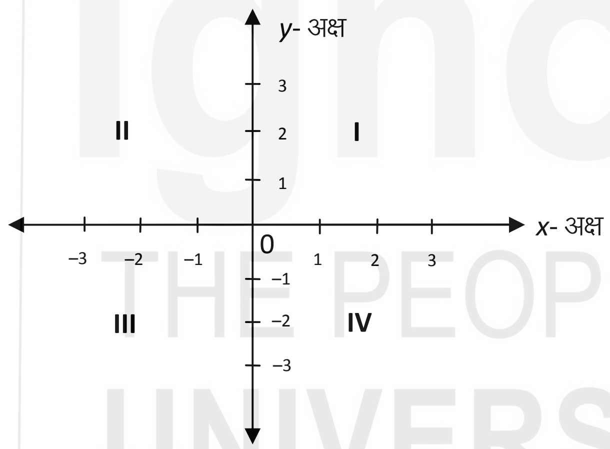
*श्री सौगतो सेन

से संबंधित चरों के परिमाण के चित्रण में उपयोगी उपकरण (tools) उपलब्ध करवाती है। साथ ही, यह अर्थशास्त्रीय चरों के बीच संबंध दर्शाने में हमारी सहायता करती है।

5.2 कार्तीय निर्देशांक पद्धति (The Cartesian Co-ordinate System)

जिस प्रकार संख्या रेखा एक चर वाले कथनों से जुड़ी समस्याओं को हल करने में सहायक होती है, उसी प्रकार कार्तीय निर्देशांक पद्धति दो चरों वाले कथनों से जुड़े प्रश्नों को प्रभावी रूप से हल करने में सहायक सिद्ध होती है।

कार्तीय निर्देशांक पद्धति (देखें रेखाचित्र 5.1) के लिए हम एक तल में एक क्षैतिज तथा एक ऊर्ध्वा संख्या रेखा इस प्रकार लेते हैं कि दोनों संख्या रेखाओं के O बिंदु एक ही स्थान पर हों। वह बिंदु, जहाँ ये दोनों रेखाएं मिलती हैं, मूलबिंदु कहलाता है। क्षैतिज रेखा को x-अक्ष तथा ऊर्ध्वा रेखा को y-अक्ष कहा जाता है। ये दोनों रेखाएं पूरे तल को चार भागों में विभाजित करती हैं। इनमें से प्रत्येक भाग को चतुर्थांश कहते हैं। इन चतुर्थांशों को घड़ी के विपरीत क्रम में चतुर्थांश I, चतुर्थांश II, चतुर्थांश III और चतुर्थांश IV कहा जाता है, जैसा कि रेखाचित्र 1 में दिखाया गया है।



रेखाचित्र 5.1

कार्तीय निर्देशांक पद्धति में, तल का प्रत्येक बिंदु वास्तविक संख्याओं के एक क्रमिक युग्म से निरूपित किया जा सकता है, विलोम अर्थ में वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक क्रमिक युग्म, तल के एक बिंदु को निरूपित करता है।

किसी बिंदु को निरूपित करने वाले वास्तविक संख्याओं के युग्म में से प्रत्येक को उस बिंदु के निर्देशांक कहते हैं। पहली संख्या को, प्रथम निर्देशांक या x-निर्देशांक अथवा भुज कहते हैं। दूसरी संख्या को, बिंदु का द्वितीय निर्देशांक या y-निर्देशांक अथवा कोटि कहते हैं।

कार्तीय निर्देशांक पद्धति में किसी युग्म (a, b) का स्थान निर्धारित करने के लिए हम पहले मूलबिंदु x-अक्ष पर a इकाई का स्थान तय करते हैं तथा उसके पश्चात् ऊर्ध्वा दिशा में y-अक्ष के साथ-साथ b इकाई तक चलते हैं। यदि b धनात्मक हो तो हम ऊपर की दिशा में जाते हैं और ऋणात्मक हो तो नीचे की दिशा की ओर। इसी प्रकार, ध्यान

रहे, कि यदि a धनात्मक है तो हम मूलबिंदु से x-अक्ष पर दाईं ओर जाएंगे और यदि ऋणात्मक है तो बाईं ओर।

पहले अध्याय में, आपने फलनों के बारे में पढ़ा था। एक वास्तविक फलन को, जिसमें आश्रित तथा स्वतंत्र दोनों ही चर वास्तविक संख्याएं होती हैं, निर्देशांक ज्यामिति की सहायता से आलेख के रूप में निरूपित किया जा सकता है। किसी फलन f का आलेख ऐसे बिंदुओं (x, y) का समूह होता है जिनमें x को f के प्रांत से लिया गया है तथा $y = f(x)$ है। दूसरे शब्दों में, यह फलन से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय है।

बोध प्रश्न 1

1) बिंदुओं (3, 4), (0,0), (–2, 5), (4,3) और (2,–2) को कार्तीय निर्देशांक पद्धति के अनुसार कार्तीय तल पर आरेखित कीजिए।

2) बिंदुओ (2, 5), (0, –4), (7, 0) और (–6, –3) को कार्तीय निर्देशांक के अनुसार कार्तीय तल पर आरेखित कीजिए।

3) मान लीजिए f एक ऐसा फलन है जिसमें

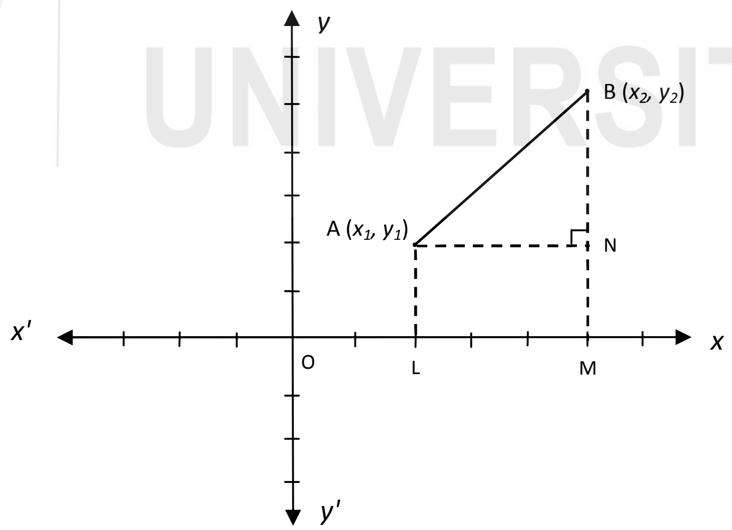
$f(x) = x^2$ तथा इसका प्रांत (–2, –1, 0, 1, 2, 3) है।

f का आलेख बनाइए।

5.3 दो बिंदुओं के बीच की दूरी (The Distance between two points)

अब हम निर्देशांक पद्धति का उपयोग दो डिपार्टमेंटल स्टोर्स/बहुविभागी भंडारों या दो शहरों के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए करेंगे। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए पहले हमें दिए हुए शहरों A और B के निर्देशांक ज्ञात होने चाहिए। मान लीजिए, शहर A के निर्देशांक (x_1, y_1) तथा शहर B के निर्देशांक (x_2, y_2) हैं। यदि A और B के x-निर्देशांक (भुज) समान हों, अर्थात् यदि $x_1 = x_2$ हो, तो उनके बीच की दूरी $y_1 - y_2$ के बराबर होती है, यदि $y_2 > y_1$ है और $y_1 - y_2$ के बराबर होती है यदि $y_2 < y_1$ है। अतः शहर A(20, 25) और शहर B(20, 40) के बीच की दूरी मात्र 40 – 25 = 15 किलोमीटर होगी तथा A(15, 20) और B(15, –5) के बीच की दूरी (20 – (–5) = 25 कि.मी. होगी। इसी प्रकार यदि $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ के y-निर्देशांक (कोटि) समान हों, अर्थात् यदि $y_1 = y_2$ हो, तो A और B के बीच की दूरी $x_2 - x_1$ होगी यदि $x_2 > x_1$ है और $x_1 - x_2$ होगी $x_2 < x_1$ है। अतः A(10, 15) और B(25, 15) की बीच की दूरी 25–10= 15 कि.मी. है तथा A(15, 20) और B(–5, 15) के बीच की दूरी 15–(–5)=20 कि.मी. है। ध्यान दें कि दूरी का माप सदैव धनात्मक होता है।

अब हम दूरी की अवधारणा का विस्तार करेंगे जिससे ऐसे बिंदुओं A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) के बीच की दूरी भी ज्ञात की जा सके जिनमें न तो भुज समान हों न कोटि। ज्यामिती के प्रसिद्ध *पाइथागोरस प्रमेय* के अनुप्रयोग से एक तल में दिए हुए दो बिंदुओं के बीच की दूरी एक समकोण त्रिभुज की रचना करके सरलता से मापी जा सकती है। पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार किसी भी समकोण त्रिभुज में कर्ण की लंबाई का वर्ग, त्रिभुज की शेष दो भुजाओं की लंबाइयों के वर्ग के योग के बराबर होता है।



रेखाचित्र 5.2

रेखाचित्र 5.2 में A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) निर्देशांक तल में दो बिंदु हैं। AL और BM क्रमशः A और B से x-अक्ष पर डाले गए लंब हैं। इसी प्रकार, AN बिंदु A से रेखा BM पर खींचा गया लंब है। इसी प्रकार प्राप्त त्रिभुज ANB एक समकोण त्रिभुज है जिसमें समकोण बिंदु N पर स्थित है। ध्यान दें कि भुजाओं AN और NB की लंबाइयाँ इस प्रकार हैं :

$$AN = LM = OM - OL = x_2 - x_1$$

तथा $NB = MB - NM = y_2 - y_1$

पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$(AB)^2 = (AN)^2 + (NB)^2$, और इसीलिए

$$AB = \sqrt{(AN)^2 + (NB)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

अतः, A (x_1, y_1) से B (x_2, y_2) की दूरी जबकि $x_1 \neq x_2$ और $y_1 \neq y_2$ है,

$$d\,(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

से व्यक्त की जा सकती है। ध्यान दें कि d (A, B) बिंदुओं A और B के बीच की दूरी को निरूपित करता है।

उदाहरण : A (18, 8) और B (10, 2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $x_1 = 18$, $y_1 = 8$, $x_2 = 10$ तथा $y_2 = 2$ है। दूरी सूत्र में x_1, y_1, x_2 तथा y_2 का मान रखने पर हम पाते हैं कि

$$d\,(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(18 - 10)^2 + (2 - 8)^2}$$
$$= \sqrt{(8)^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

गतिविधि 1 : निम्नलिखित बिंदुओं के युग्म में दूरी ज्ञात कीजिए : A (8, 10) तथा B (20, 15)।

गतिविधि 2 : सिद्ध कीजिए कि बिंदुओं P $(\alpha, -\beta)$ तथा Q $(-\alpha, \beta)$ के बीच की दूरी $d[P, Q] = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ है।

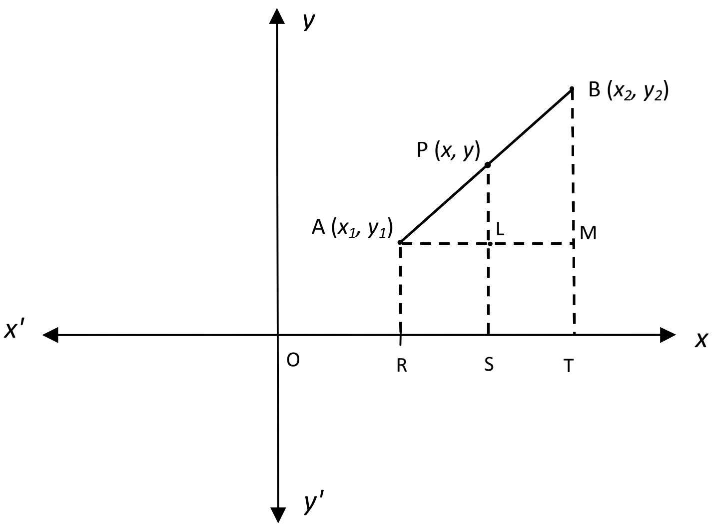
5.4 विभाजन सूत्र (Section Formula)

अब हम उस बिंदु P(x, y) के निर्देशांक ज्ञात करेंगे जो किसी रेखा खंड AB को एक दिए हुए अनुपात में विभाजित करता है।

रेखाचित्र 5.3 पर ध्यान दीजिए। इसमें बिंदु P(x, y), बिंदुओं A(x_1, y_1) तथा B(x_2, y_2) को मिलाते हुए रेखाखंड को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है, अर्थात्

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n},$$

जहाँ m और n धनात्मक पूर्णांक हैं।



रेखाचित्र 5.3

इस रेखाचित्र में AR, PS और BT क्रमशः बिंदुओं A, P और B से x-अक्ष पर डाले गए लंब हैं। AM रेखा BT पर एक लंब है जो कि PS को बिंदु L पर काटता है। ΔAMB में, LP भुजा MB के समानांतर है।

अतः $$\frac{AL}{LM} = \frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \quad \text{(दिया है)}$$

अथवा $$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

ध्यान दें कि $AL = RS = x - x_1$ और $LM = ST = x_2 - x)$

उपरोक्त समीकण से x का मान ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

इसी प्रकार, यह देखा जा सकता है कि

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

यदि P, AB का मध्य बिंदु हो, अर्थात् यदि $m = n$ हो तो, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{और} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

उदाहरण : बिंदुओं (3, 5) और (–1, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : इस प्रश्न में $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = -1$ तथा $y_2 = 4$ है। साथ ही $m = 2$ तथा $n = 3$ है।

मान लीजिए, वांछित बिंदु के निर्देशांक (x, y) हैं।

अतः,
$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

$$= \frac{3 \times 3 + 2 \times (-1)}{2 + 3} = \frac{7}{5}$$

इसी प्रकार,

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

$$y = \frac{3 \times 5 + 2 \times 4}{2 + 3} = \frac{23}{5}$$

अतः, वांछित बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{7}{5}, \frac{23}{5}\right)$

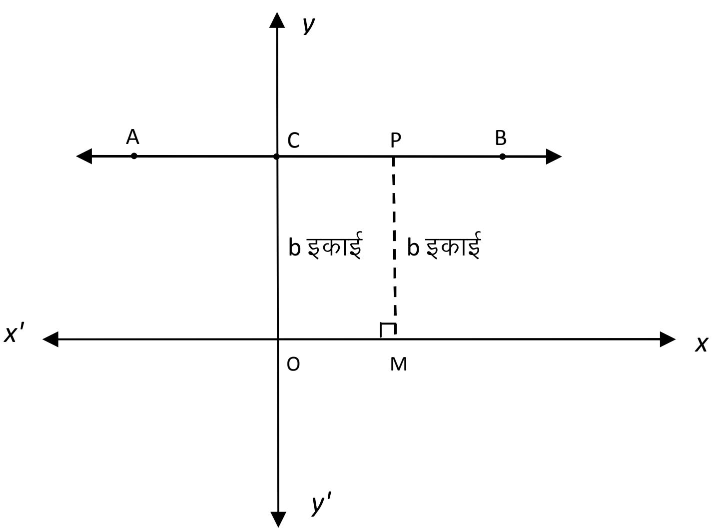
अभ्यास : बिंदुओं (4, 7) और (3, –5) को मिलाने वाले रेखाखंड को 3 : 4 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

5.5 सरल रेखा (The Straight Line)

एक सरल रेखा को दो बिंदुओं के बीच सबसे कम (न्यूनतम) दूरी वाले पथ के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। किसी सरल रेखा को पूर्णतयः निर्धारित किया जा सकता है, यदि हमें दो ऐसे बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात हों जो रेखा पर स्थित हों। यदि किसी रेखापर स्थित एक बिंदु के निर्देशांक तथा रेखा की ढाल (slope) ज्ञात हो तो भी रेखा पूर्णतः निर्धारित की जा सकती है। एक सरल रेखा को एक बीजगणितीय समीकरण के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। x-अक्ष अथवा y-अक्ष के समानांतर रेखाओं का समीकरण के रूप में निरूपण अत्यंत सरल है। इसलिए हम ऐसी रेखाओं से प्रारंभ करते हैं तथा उनके समीकरण ज्ञात करते हैं।

कथन 1 : x-अक्ष के समानांतर तथा इससे $|b|$ दूरी पर स्थित सरल रेखा का समीकरण $y = b$ होता है।

मान लीजिए कि एक सरल रेखा AB x-अक्ष के समानांतर है और y-अक्ष को बिंदु C को इस प्रकार काटती है कि OC = b इकाई है (रेखाचित्र 5.4)। AB पर कोई भी यादृच्छिक बिंदु P लीजिए तथा इस बिंदु से x-अक्ष पर एक लंब PM डालिए। यहाँ MP = OC = b इकाइयाँ हैं। रेखा AB ऐसे बिंदुओं का बिंदुपथ है जो x-अक्ष से b इकाई की दूरी पर है।



रेखाचित्र 5.4

यदि b धनात्मक है तो रेखा AB x-अक्ष के ऊपर होगी और यदि b ऋणात्मक है तो रेखा AB x-अक्ष के नीचे होगी।

कथन 2 : y-अक्ष के समानांतर तथा इससे $|a|$ दूरी पर स्थित सरल रेखा का समीकरण $x = a$ होता है

यदि a धनात्मक है तो रेखा y-अक्ष के दाईं ओर होगी और यदि a ऋणात्मक है तो रेखा y-अक्ष के बाईं ओर होगी।

y-अक्ष के समानांतर अर्थात् x = अचर प्रकार की रेखाओं के अतिरिक्त प्रत्येक रेखा को $y = mx + b$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ m और b अचर होते हैं। यदि $x = 0$ तो y का मान $y = m.0 + b = b$ होगा जिससे हमें ज्ञात होता ह कि बिंदु (0, b) x-अक्ष के समानांतर तथा उससे b इकाई की दूरी वाली रेखा के आलेख पर स्थित है। क्योंकि यह रेखा y-अक्ष को बिंदु (0, b) पर काटती है, b को इस रेखा का y-*अंतःखंड* कहते है। संख्या m रेखा का ढाल कहलाती है। किसी रेखा के ढाल उसके x-अक्ष पर झुकाव के माप को व्यक्त करती है। यदि (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2), रेखा $y = mx + b$ पर स्थित दो बिंदु हैं तो हम पाते हैं कि

$$y_1 = mx_1+b$$

और $$y_2 = mx_2+b$$

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से घटाने पर हमें प्राप्त होता है :

$$y_2 - y_1 = (mx_2+b) - (mx_1+b)$$

अथवा $$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\therefore \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

अतः, बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का ढाल होता है।

$$\text{ढ ाल} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{बिंदुओं के बीच की उर्ध्वाधर दूरी}}{\text{बिंदुओं के बीच की क्षैतिज दूरी}} = \frac{y \text{ में परिवर्तन}}{x \text{ में परिवर्तन}}$$

यह देखना सरल है कि यदि कोई रेखा बाएं से दाएं, ऊपर की ओर जाती है तो उसका ढाल धनात्मक होता है, क्योंकि

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y \text{ में धनात्मक परिवर्तन}}{x \text{ में धनात्मक परिवर्तन}}$$

और, यदि रेखा बाएं से दाएं नीचे की ओर जाती है तो उसका ढाल ऋणात्मक होता है, क्योंकि

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y \text{ में ऋणात्मक परिवर्तन}}{x \text{ में धनात्मक परिवर्तन}}$$

किसी क्षैतिज (x-अक्ष के समांतर) रेखा के लिए

$$m = \frac{y \text{ में परिवर्तन}}{x \text{ में परिवर्तन}} = \frac{0}{x \text{ में परिवर्तन}} = 0$$

अतः, एक क्षैतिज रेखा का ढाल सदैव 0 होता है, तथा एक ऊर्ध्वाधर रेखा का ढाल अपरिभाषित होता है।

रेखा के समीकरण का ढाल–*अंतःखंड* रूप :

$$y = mx + c$$

जहाँ m रेखा की ढाल तथा c उसका y-अंतःखंड है।

उदाहरण :(क) रेखा $2x - 3y = 6$ का ढाल तथा y-अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

(ख) ढाल 3 तथा y-अंतःखंड $\frac{6}{7}$ वाली रेखा का समीकरण क्या होगा?

हल : (क) दिए हुए समीकरण को प्रवणता-अंतःखंड रूप में लिखें –

$$2x - 3y = 6$$

अथवा $$-3y = -2x + 6$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

इस रूप में लिखे समीकरण से हम सरलता से देख सकते हैं कि रेखा का ढाल $\frac{2}{3}$ तथा इसका y-अंतःखंड –2 है।

(ख) यदि $m = 3$ तथा $b = \frac{6}{7}$ है, तो हम $y = mx + b$ से प्राप्त करते हैं :

$$y = 3x + \frac{6}{7}$$

टिप्पणी : हमें सरल रेखा के समीकरण के अन्य रूपों के बारे में भी जानकारी होनी चाहिए क्योंकि अनेक बार हमें रेखा के बारे में जानकारी किसी दूसरे रूप में भी दी जा सकती है।

यदि हमें किसी रेखा के ढाल m तथा उस पर स्थित एक बिंदु (x_1, y_1) दिया हो, तो हम इसका समीकरण ज्ञात करने के लिए ढाल की परिभाषा का उपयोग कर सकते हैं। यदि करें कि किसी रेखा की प्रवणता उस पर दिए दो बिंदुओं के y-निर्देशांकों तथा x-निर्देशांकों के अंतर का अनुपात होता है। यदि (x, y) रेखा पर एक सामान्य बिंदु है तथा (x_1, y_1) एक ज्ञात बिंदु है, तो

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \text{ अथवा } y - y_1 = m(x - x_1)$$

यह रेखा के समीकरण का एक उपयोगी रूप है।

रेखा के समीकरण का बिंदु-ढाल रूप

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

जहाँ (x_1, y_1) रेखा पर स्थित एक ज्ञात बिंदु है तथा m रेखा का ढाल है।

व्यावहारिक स्थितियों में हमें सामान्यतः दो बिंदु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) दिये होते हैं। यदि चरों x और y के मध्य एक रैखिक संबंध हो तो उनको मिलाती हुई रेखा का ढाल दोनों बिंदुओं के y-अक्षों के अंतर को उनके x-अक्षों के अंतर से विभाजित करके निकाला जा सकता है। तत्पश्चात् बिंदु-ढाल सूत्र का उपयोग कर हम इस रेखा का समीकरण ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार हमें रेखा के समीकरण का दो-बिंदु रूप प्राप्त होता है।

रेखा के समीकरण का दो-बिंदु रूप

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

जहाँ (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) रेखा पर दो भिन्न बिंदु हैं जिनमें $x_1 \neq x_2$ है तथा $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ रेखा का ढाल है।

कृपया ध्यान दें किसी भी रेखा के समीकरण का सामान्य रूप $Ax + By + C = 0$ होता है, जहाँ A, B तथा C वास्तविक संख्याएँ हैं तथा A और B दोनों एक साथ शून्य नहीं हो सकते।

सरल रेखा के समीकरण का सामान्य रूप :

$$Ax + By + C = 0; \quad A \neq 0, B \neq 0$$

जहाँ A, B और C निश्चित स्थिरांक हैं, एक सरल रेखा के समीकरण का सामान्य रूप है।

ध्यान दें कि विभिन्न रेखाओं के लिए A, B और C का मान अलग-अलग होगा।

समीकरण $Ax + By + C = 0$ को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

$$By = -Ax - C$$

अथवा $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि यदि किसी रेखा का समीकरण सामान्य रूप में दिया है, तो रेखा का ढाल

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

उदाहरण : ढाल –5 वाली और बिंदु (3, 7) से होकर निकलने वाली रेखा का समीकरण क्या होगा?

हल : किसी रेखा के समीकरण के बिंदु-ढाल रूप से हमें प्राप्त होता है कि

$$y - 7 = -5\,(x - 3)$$

अथवा $$y - 7 = -5x + 15$$

$$\therefore \quad y = -\,5x + 22$$

उदाहरण : XYZ मार्केटिंग कंपनी एक नए उपभोक्ता उत्पाद के विज्ञापन अभियान की व्यवस्था करती है। घर-घर जाकर होने वाले इस विज्ञापन अभियान पर होने वाले खर्च तथा नए उत्पाद की प्रारंभिक बिक्री में रैखिक संबंध पाया गया। यदि विज्ञापन पर रु. 500/- खर्च करने पर उत्पाद की 100 इकाइयों की बिक्री होती है तथा रु. 1200/- खर्च करने पर 240 इकाइयों की तो, रु.750/- खर्च करने पर उत्पाद की कितनी इकाइयों की बिक्री होगी।

हल : यदि x = विज्ञापन पर खर्च किए गए रुपयों की संख्या और y = उत्पाद की प्रारंभिक बिक्री है तो (500, 100) और (1200, 240) अभीष्ट रेखा पर स्थित दो बिंदु हैं। रेखा के समीकरण के दो-बिंदु रूप का उपयोग करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$y - 100 = \frac{240 - 100}{1200 - 500}(x - 500)$$

अथवा $$y - 100 = \frac{1}{5}(x - 500)$$

अथवा $$y = \frac{1}{5}x - 100 + 100$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{5}x$$

इस समीकरण में $x = 750$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$x = \frac{1}{5} \times 750 = 150 \text{ इकाइयां}$$

अर्थात् हम पाते हैं कि यदि विज्ञापन पर रु. 750/- खर्च किए जाएं तो उत्पाद की 150 इकाइयों की बिक्री होगी।

गतिविधि 1 : ढाल-9 वाली तथा बिंदु (4, 9) से होकर निकलने वाली रेखा का समीकरण क्या होगा?

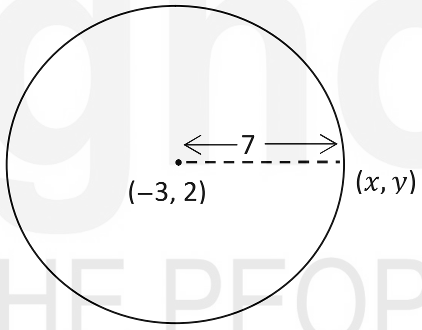
गतिविधि 2 : एक विविध वस्तु भंडार की बिक्री एक सरल रेखा से निरूपित की जा सकती है। इस भंडार की जनवरी मास की बिक्री रु. 4,50,000/- तथा

मई मास की बिक्री रु. 7,50,000/- रही। बिक्री में वृद्धि का निरूपण एक सरल रेखीय समीकरण द्वारा कीजिए। यह मानते हुए कि वृद्धि की यही रेखीय प्रवृत्ति आगे भी जारी रहेगी, नवंबर मास में होने वाली अनुमानित वृद्धि ज्ञात कीजिए।

5.6 वृत्त (The Circle)

वृत्त, तल के उन बिंदुओं (x, y) का समूह होता है जो तल के एक स्थिर बिंदु (h, k) से समान दूरी पर होते हैं। स्थिर बिंदु को वृत्त का *केंद्र* तथा स्थिर बिंदु की *वृत्त* के किसी भी बिंदु की दूरी को वृत्त की *त्रिज्या* कहते हैं।

दिए हुए केंद्र व त्रिज्या वाले वृत्त का समीकरण हम दूरी-सूत्र का उपयोग करके प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात्, हम ऐसा समीकरण ज्ञात कर सकते हैं जिसे तल के केवल वही बिंदु संतुष्ट करते हैं जो वृत्त पर स्थित हैं। तल का कोई भी और बिंदु इस समीकरण को संतुष्ट नहीं करता। आइए इसी कथन की पुष्टि के लिए एक उदाहरण का प्रयोग करें। हम ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात करेंगे जिसका केंद्र (–3, 2) तथा त्रिज्या 7 इकाई हो (देखें रेखाचित्र 5.5)।



रेखाचित्र 5.5

रेखाचित्र में वृत्त का केंद्र (–3, 2) है तथा (x, y) वृत्त पर स्थित कोई भी बिंदु है। क्योंकि वृत्त की त्रिज्या 7 है, बिंदु (x, y) की वृत्त के केंद्र (–3, 2) से दूरी 7 के बराबर होनी चाहिए। अतः दूरी सूत्र का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 7$$

यह केंद्र (–3, 2) तथा त्रिज्या 7 वाले वृत्त का समीकरण है। दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हम समीकरण के समरूप निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 49$$

ठीक इसी विधि का प्रयोग करके, हम केंद्र (h, k) और त्रिज्या r वाले वृत्त के समीकरण का सामान्य रूप प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ h, k और r निर्दिष्ट (दी हुई) वास्तविक संख्याएँ हैं तथा साथ ही r गैर-ऋणात्मक है। इस समीकरण को ज्ञात करने के लिए हम पुनः वृत्त पर कोई बिंदु (x, y) लेते हैं। अब (x, y) और (h, k) की सहायता से व्यक्त करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-\mathrm{k})^2} = r$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें वृत्त के समीकरण का मानक रूप प्राप्त होता है :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

जहाँ, (h, k) वृत्त के केंद्र के निर्देशांक हैं तथा r वृत्त की त्रिज्या है।

यदि वृत्त का केंद्र तल का मूलबिंदु है, तो $h = 0$ तथा $k = 0$ होगा। अतः वृत्त का मानक रूप और भी सरल हो जाता है :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

जहाँ (0, 0) वृत्त का केंद्र तथा r वृत्त की त्रिज्या है।

यदि हम वृत्त के समीकरण के मानक रूप $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ का सरलीकरण करें तथा एक जैसे पदों को एक साथ लिखें, तो हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

अथवा $$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

जहाँ A, B, C, D और E निर्दिष्ट (दी हुई) वास्तविक संख्याओं को निरूपित करते हैं।

उपरोक्त दोनों समीकरणों से हमें प्राप्त होता है $A = B = 1$, $C = -2h$, $D = -2k$ and $E = h^2 + k^2 - r^2$. यदि हमें एक द्विघातीय समीकरण दिया हो जिसमें $A = B$ हो तथा A, B शून्य न हों, तो हम कोष्ठकों को पूर्ण वर्ग बनाकर दिए हुए समीकरण को ऊपर दिए मानक रूप में लिख सकते हैं।

उदाहरण : उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए

क) जिसका केंद्र (2, –3) हो तथा जिसकी त्रिज्या 5 हो।

ख) जिसका केंद्र मूलबिंदु हो तथा जिसकी त्रिज्या 4 हो।

हल : क) हम वृत्त के समीकरण के मानक रूप का उपयोग करेंगे। हमें $(h, k) = (2, -3)$ तथा $r = 5$ दिया है।

अतः, अभीष्ट समीकरण है : $(x-2)^2 + [y-(-3)]^2 = 5^2$

अथवा $$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

ख) पुनः, वृत्त के समीकरण के मानक रूप में $(h, k) = (0, 0)$ तथा $r = 4$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4^2$$

अथवा $$x^2 + y^2 = 16$$

टिप्पणी : ध्यान दें कि भाग (क) में समीकरण का विस्तार किया जा सकता है।

अर्थात् $(x-2)^2 + (y^2+3)^2 = 25 \rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 25$

अथवा सरलीकरण करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

अगले उदाहरण में हम देखेंगे कि इसकी जाँच कैसे की जाएं कि एक दी हुई समीकरण का आलेख एक वृत्त है।

उदाहरण :

दर्शाइए कि समीकरण $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ का आलेख एक वृत्त है। इसके केंद्र तथा त्रिज्या का आंकलन भी करें।

हल : हम एक जैसी घात वाले चरों का एक साथ संकलित करते हैं तथा प्रत्येक चर के लिए कोष्ठकों के पूर्ण वर्ग बनाते हैं :

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) = 6$$

अथवा $$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 6 + 1 + 9$$

इस समीकरण को पुनः मानक रूप में लिखते हैं

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

हम देख सकते हैं कि $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$ का आलेख एक वृत्त है क्योंकि यह केंद्र (1, – 3) तथा त्रिज्या 4 वाले वृत्त का मानक रूप में समीकरण है।

बोध प्रश्न 2

1) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए –

क) जिसका केंद्र (3, –4) और जिसकी त्रिज्या 7 है।

ख) जिसका केंद्र मूलबिंदु तथा त्रिज्या 5 है।

....

....

....

....

....

2) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $2x^2 + 2y^2 - 16x - 20y + 64 = 0$ का आलेख एक वृत्त है तथा इसका केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

....

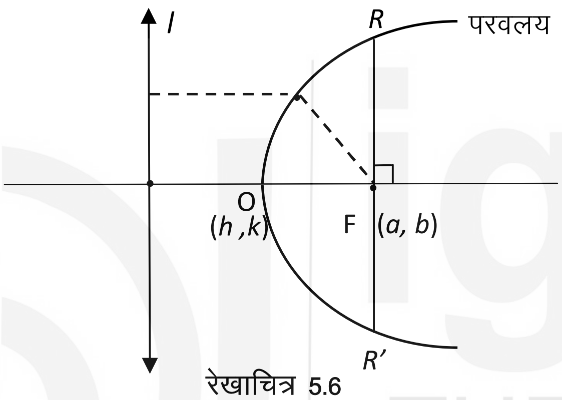
....

....

....

5.7 परवलय (The Parabola)

एक *परवलय* कार्तीय तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्च्य है जो तल में स्थित एक निश्चित बिंदु F (a, b) और एक निश्चित सरल रेखा l से समान दूरी पर है। इस निश्चित बिंदु F (a, b) को परवलय की नाभि (फ़ोकस) तथा निश्चित l रेखा को परवलय की नियता (डायरेक्ट्रिक्स) कहते हैं। परवलय की नाभि F से निकलने वाली उस रेखा को जो नियता पर लंब हो, परवलय का अक्ष कहा जाता है। परवलय के अक्ष पर वह बिंदु O (h, k) जो परवलय की नाभि और नियता के मध्य में होता है, परवलय का शीर्ष कहलाता है। ध्यान दें कि यह बिंदु परवलय पर स्थित होता है क्योंकि यह नाभि और नियता से समान दूरी पर है। दूसरे शब्दों में परवलय का शीर्ष वह बिंदु है जहाँ परवलय अपने अक्ष को काटता है। परवलय की वह जीवा जो परवलय की नाभि से होकर जाती है तथा परवलय के अक्ष के लंबवत् होती है, परवलय की नाभि लंब जीवा है। रेखाचित्र 6 में RR' दिए हुए परवलय की नाभि लंब जीवा है।

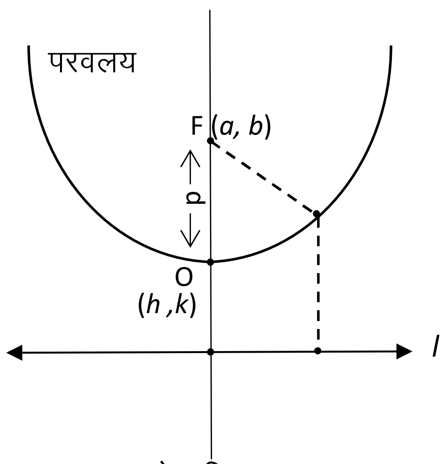


रेखाचित्र 5.6

शीर्ष (h, k) वाले परवलय का सामान्य समीकरण जिसकी नियता x-अक्ष के समानांतर है, निम्नवत् होता है

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k) \qquad \ldots(1)$$

जहाँ p परवलय की नाभि और उसके शीर्ष के बीच की दूरी है। यह वक्र अक्ष (जो कि परवलय का y-अक्ष कहलाता है) के सापेक्ष सममित होता है। इसकी नियता का समीकरण $y = \pm a$ होता है (रेखाचित्र 5.7 देखें)।



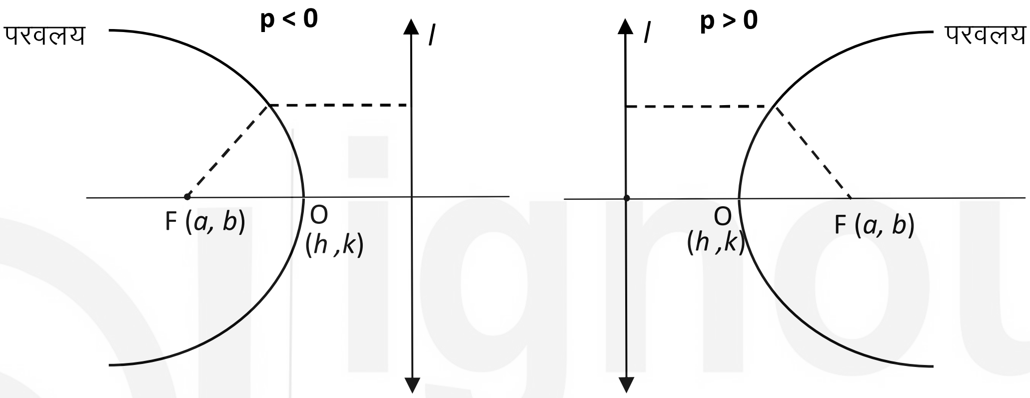
रेखाचित्र 5.7

जब परवलय की नियता y-अक्ष के समानांतर हो, तब यह समीकरण बन जाता है :

$$(y-k)^2 = 4\,\mathrm{p}\,(x-h) \quad \ldots(2)$$

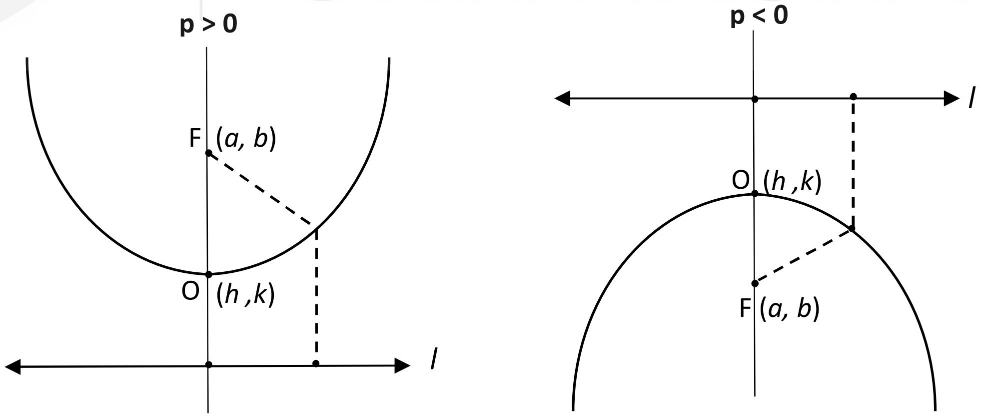
यह वक्र x-अक्ष (जो कि परवलय का अक्ष कहलाता है) के सापेक्ष सममित होता है। इसकी नियता का समीकरण $x = \pm\, a$ होता है (रेखाचित्र 5.6 देखें)।

यदि हम समीकरण 2 का विस्तार करें तथा y के लिए हल करें, तो हम देखेंगे कि हमें एक द्विघात समीकरण प्राप्त होात है। अतः, इस परवलय का आलेख एक U-आकार का वक्र होगा जो दाईं ओर खुलता है यदि $p > 0$ है, तथा बाईं ओर खुलता है यदि $p < 0$ हो (देखें रेखाचित्र 5.8)।



रेखाचित्र 5.8

इसी प्रकार समीकरण $(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k)$ चर x में द्विघातीय है और इसका आलेख U-आकार का एक वक्र हो जो ऊपर की ओर खुलेगा यदि $p > 0$ है तथा नीचे की ओर खुलेगा यदि $p < 0$ है (देखें रेखाचित्र 5.9)।

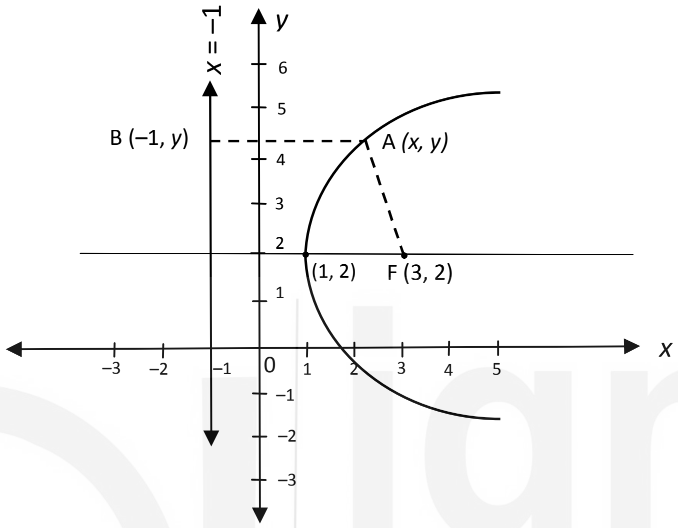


रेखाचित्र 5.9

निम्नलिखित उदाहरण में हम परवलय की परिभाषा की सहायता से उसका समीकरण ज्ञात करेंगे।

उदाहरण : एक परिवलय की नाभि (3, 2) और उसकी नियता $x = -1$ है। परिवलय की परिभाषा का प्रयोग करते हुए इसका समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, हम दी हुई जानकारी की मदद से एक रेखाचित्र बनाते हैं। परवलय की नाभि (3, 2) पर स्थित है तथा इसकी नियता $x = -1$ है (रेखाचित्र 5.10 देखें)। अब हम परवलय के शीर्ष का निर्धारण करते हैं जो कि नाभि एवं नियता के मध्य में अर्थात् बिंदु (1, 2) पर स्थित है।



रेखाचित्र 5.10

परवलय की परिभाषा के अनुसार, इस पर स्थित कोई भी बिंदु (x, y) नाभि F (3, 2) तथा नियता $(x = -1)$ से बराबर दूरी पर होगा। अतः,

$$AF = AB$$

दूरी सूत्र के उपयोग से हम पाते हैं कि

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = [x-(-1)]^2 + (y-y)^2$$

इस समीकरण का सरलीकरण करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1$$

अथवा $y^2 - 4y = 8x - 12$

द्विघातीय व्यंजक में वर्ग पूर्ण करने पर तथा पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^2 - 4y + 4 = 8x - 12 + 4$$

अथवा $(y-2)^2 = 8x - 8$

अथवा $(y-2)^2 = 8(x-1)$

ध्यान दें कि शीर्ष (1, 2) तथा नाभि (3, 2) के बीच की दूरी $p = 2$ इकाई है।

अतः, अभीष्ट समीकरण है

$$(y-2)^2 = 4.(2)\ (x-1)$$

जो कि $(y-k)^2 = 4p\ (x-h)$ प्रकार का समीकरण है जहाँ $p = 2$ तथा नाभि $(h, k) = (1, 2)$ है।

उदाहरण : सिद्ध कीजिए कि $y^2 + 4x = -8$ एक परवलय है।

हल : हम दिए समीकरण को पुनः निम्न रूप में लिखते हैं :

$$y^2 = -4x - 8$$

अथवा $y^2 = -4\ (x+2)$

अथवा $y^2 = 4(-1)\ (x+2)$

अतः, यह दिये हुए समीकरण का परवलय का है जो कि x-अक्ष के सापेक्ष सममित है। इसकी नाभि (–2, 0) पर स्थित है और $p = -1$ है। क्योंकि p का मान ऋणात्मक है, इसलिए यह परवलय बाईं ओर खुलेगा।

उदाहरण : उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष y-अक्ष है, जिसकी नाभि मूलबिंदु पर स्थित है तथा जो बिंदु (–4, 2) से होकर जाता है। इस परवलय की नाभिलंब जीवा की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई जानकारी के अनुसार, परवलय का समीकण का रूप

$(x-h)^2 = 4p\ (y-k)$ के साथ $(h, k) = (0, 0)$

होगा, जहाँ $(h, x) = (0, 0)$ है।

अतः यह समीकरण होगा :

$$x^2 = 4py$$

बिंदु (–4, 2) परवलय पर स्थित है, अतः इसके निर्देशांक उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

अतः $(-4)^2 = 4p\ (2)$

इस समीकरण से हमें प्राप्त होता है

$$p = \frac{16}{8} = 2$$

अतः, अभीष्ट समीकरण है

$$x^2 = 8y$$

इस परवलय का अक्ष y-अक्ष है। अतः, इसकी नाभि y-अक्ष पर स्थित होगी और उसकी नाभि (0, 0) से दूरी 2 इकाई के बराबर होगी। ध्यान दें कि

नाभिलंब जीवा, जो कि नाभि से होकर जाती है, परवलय को बिंदुओं (–4, 2) तथा (4, 2) पर काटेगी। इस जीवा की लंबाई 8 इकाई होगी, जो कि $4p$ के मान के बराबर है। अतः, यहाँ पर एक निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि *नाभिलंब जीवा की लंबाई* $|4a|$ के बराबर होती है।

अतः, परवलय का समीकरण $x^2 = 8y$ है तथा इसकी नाभिलंब जीवा की लंबाई 8 इकाई है।

बोध प्रश्न 3

1) नीचे दिए विवरण के अनुसार परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा उसका आलेख खींचिये। आलेख में नाभि, शीर्ष तथा नियता को चिन्हित कीजिए :

क) नाभि= $(0, 2)$, नियता : $x = -2$

ख) नाभि= $(2, 1)$, नियता : $y = 4$

....

....

....

....

....

....

....

2) सिद्ध कीजिए की निम्नवत् समीकरण एक परवलय को निरूपित करते हैं :

क) $x^2 - 8y = 0$

ख) $y^2 = 8x + 4$

ग) $y^2 - 4y - 2x = 0$

घ) $x^2 + 6x = 3 + 6y$

....

....

....

....

....

....

....

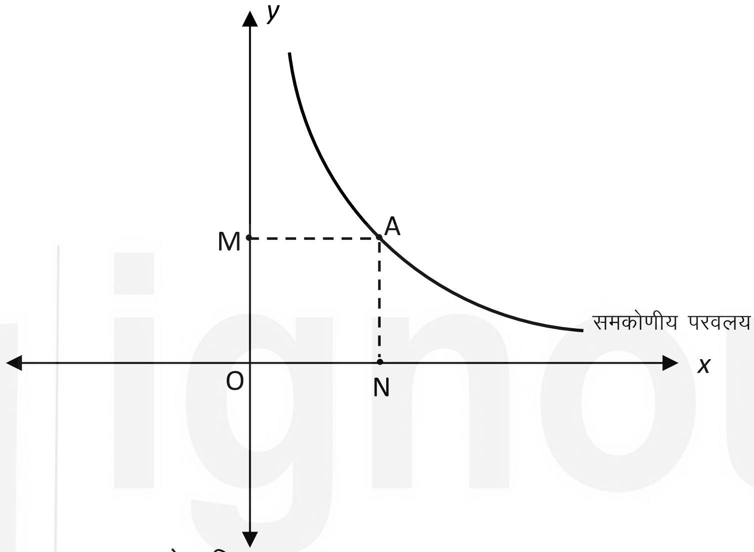
....

....

....

5.8 समकोणीय अतिपरवलय (The Rectangular Hyperbola)

समकोणीय अतिपरवलय एक समतल में ऐसे बिंदुओं का बिंदुपथ है जिनकी, दो दी हुई निश्चित लम्बवत् रेखाओं से, दूरियों का गुणनफल अचर होता है। ये दो निश्चित लम्बवत् रेखाओं से, दूरियों का गुणनफल अचर होता है। ये दो निश्चित लंबवत् रेखाएँ समकोणीय अतिपरवलय की अनंतस्पर्शी रेखाएँ कहलाती हैं। अनंतस्पर्शी रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु समकोणीय अतिपरवलय का केंद्र कहलाता है। नीचे दिए रेखाचित्र 11 पर ध्यान दें।



रेखाचित्र 5.11

इस रेखाचित्र 5.11 में बिंदु A, xy तल में एक बिंदु पथ अनुरेखित करता है। क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाएँ दो परस्पर लंबवत् अनंतस्पर्शी *रेखाएँ* हैं। चित्र में AN, A की क्षैतिज अनंतस्पर्शी से दूरी है तथा AM, A की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी से दूरी है। समकोणीय अतिपरवलय की भाषा के अनुसार इस वक्र पर A की विभिन्न स्थितियों के लिए AM और AN का गुणनफल समान रहता है। दूसरे शब्दों में, एक समकोणीय अतिपरवलय को अनुरेखित करने वाले बिंदु के लिए एक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि आयत ONAM का क्षेत्रफल सदैव समान रहता है। ध्यान रहे, समकोणीय अतिपरवलय की एक शाखा ($-x$, $-y$) तल (अर्थात्, दक्षिण-पश्चिमी या तीसरे) चतुर्थांश में भी अनुरेखित की जा सकती है। क्या आप समझ पा रहे हैं कि ऐसा क्यों होगा? (**संकेत** : दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होता है)।

5.9 सार-संक्षेप

यह इकाई इस पाठ्यक्रम का एक महत्त्वपूर्ण हिस्सा है। हमें आशा है कि इसका अध्ययन करने के पश्चात् पाठक गणित की उन कई संकल्पनाओं से भली-भांति परिचित हो चुके होंगे जिनका प्रयोग अर्थशास्त्र में किया जाता है। आपने बहुत से ऐसे ज्यामिति वक्रों और आकारों (आकृतियों) का अध्ययन कर लिया होगा जो विभिन्न अर्थशास्त्रीय संबंधों को आरेखित करने में हमारी सहायता करेंगे। आपने विभिन्न अर्थशास्त्रीय संबंधों के आलेख बनाना सीखा। लेकिन उतनी ही महत्त्वपूर्ण यह भी है कि हमने यह जाना कि ज्यामितीय आकृतियों और वक्रों का एक बीजगणितीय प्रतिरूप भी है। किसी तल के

बिंदुओं को निर्देशांकों से व्यक्त/निरूपित किया जा सकता और इस प्रकार रेखाओं, वृत्तों, परवलयों तथा अतिपरवलयों के बीजगणितीय समीकरण भी ज्ञात किए जा सकते हैं। तल के दो बिंदुओं के बीच की दूरी भी निर्धारित की जा सकती है। इस इकाई का प्रारंभ हमने कार्तीय निर्देशांक पद्धति की संकल्पना की व्याख्या से किया। इस इकाई में हमें बताया गया है कि भुज और कोटि का क्या अर्थ है और किसी तल में बिंदु कैसे आलेखित किए जाते हैं। इसके पश्चात् इस इकाई में दो बिंदुओं की बीच की दूरी, विभाजन सूत्र अर्थात् दो बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को दिए हुए अनुपात में बांटने वाले बिंदु को निकालने के सूत्र इत्यादि की चर्चा की गई। तत्पश्चात् हमने एक-एक करके विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों को निरूपित करने वाले समीकरणों के बारे में जाना। सरल रेखा, वृत्त, परवलय तथा अतिपरवलय के समीकरण ज्ञात किए गए।

5.10 बोध प्रश्नों के उत्तर एवं संकेत

बोध प्रश्न 1

1) भाग 5.2 देखें।

2) भाग 5.2 देखें।

3) f का आलेख इन बिंदुओं का समुच्चय होगा $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$ और $(3,9)$। ध्यान दें कि हमने इन बिन्दुओं को मिलाया नहीं है, क्योंकि हमारे आरेख f में केवल ये 6 बिन्दु हैं – इसीलिए आरेख पर भी केवल 6 बिन्दु ही होंगे।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 5.6 देखें।

2) भाग 5.6 देखें।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 5.7 देखें।

2) भाग 5.7 देखें।

इकाई 6 अनुक्रम तथा श्रेणियाँ*

संरचना

6.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप निम्नलिखित संकल्पनाओं से अवगत हो जाएंगे:

- एक अनुक्रम की परिभाषा;
- अनुक्रम और श्रेणी में संबंध;
- समांतर तथा गुणोत्तर अनुक्रम;
- किसी अनुक्रम के अभिसरण की संकल्पना;
- किसी अनुक्रम की सीमा की आधारभूत संकल्पना; और
- अनुक्रमों और श्रेणियों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग।

6.1 विषय-प्रवेश

स्मरण करें कि इकाई 2 में हमने फलन की अवधारणा के बारे में पढ़ा था। हम जानते है कि प्रत्येक फलन का एक प्रांत तथा एक सहप्रांत होता है आईए अब हम एक ऐसे फलन पर विचार करें जिसका प्रांत प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय हो। इस प्रकार का

*श्री सौगतो सेन

फलन अपने प्रांत के प्रत्येक अवयव (अर्थात् प्रत्येक प्राकृतिक संख्या से) को अपने सहप्रांत के एक अवयव से संबद्ध करवाएगा। ऐसे फलन को हम एक अनुक्रम कहते हैं। अनुक्रम का सामान्य अर्थ है पहले यह, फिर यह, उसके पश्चात् यह इत्यादि। किसी वर्ष के महीने अनुक्रम कहलाते हैं। इसी प्रकार सप्ताह के दिन भी एक अनक्रम बनाते है। अतः किसी अनुक्रम के अवयवों सदस्यों को हम पहला सदस्य, दूसरा सदस्य, तीसरा सदस्य, ... के रूप में क्रमबद्ध कर सकते हैं।

आप सोच रहे होंगे कि इस प्रकार के फलनों का अर्थात् अनुक्रमों का ऐसा क्या विशेष महत्व है कि एक पूरी इकाई उन पर केंद्रित हो। पाठकों को यह जानकर आश्चर्य होगा कि इस साधारण सी दिखने वाली संकल्पना से हमें गणित की अनेक महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं को विकसित करने में मदद मिलती है जिनके अर्थशास्त्र में महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग है। इस इकाई में अनुक्रमों के साथ-साथ श्रेणी जैसी महत्त्वपूर्ण संकल्पना की चर्चा भी की गई है। हम कुछ विशिष्ट प्रकार की श्रेणियों के बारे में भी जानकारी प्राप्त करेंगे। अनुक्रमों एवं श्रेणियों के गुणधर्मों की चर्चा भी इस इकाई में की गई है। कोई अनुक्रम कब और कैसे अभिसृत होता है, इसकी जानकारी भी हम प्राप्त करेंगे। इसके अतिरिक्त सीमा की महत्त्वपूर्ण संकल्पना के बारे में भी इस इकाई में संकेत किया गया है। क्योंकि सीमा की संकल्पना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है, अगली पूरी इकाई इसी पर केंद्रित की गई है। सीमा अवकलन गणित का आधार है जिसका अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में बहुत बड़ा योगदान है।

इस इकाई का गठन इस प्रकार किया गया है : अगले अनुच्छेद में अनुक्रम की संकल्पना की व्याख्या विस्तारपूर्वक की गई है। इसमें अनुक्रमों के अर्थशास्त्र में संभव अनुप्रयोगों के बारे में भी संकेत किया गया है। हमने अनुक्रम को एक फलन के रूप में प्रस्तुत किया है तथा इसकी सहज तथा औपचारिक दोनों परिभाषाएं दी हैं। इससे अगले अनुच्छेद में एक श्रेणी की संकल्पना की चर्चा की गई है। उसके पश्चात् इस इकाई में श्रेढ़ियों की चर्चा की गई है जो विशेष प्रकार की श्रेणियाँ है जिनमें विभिन्न पद सतत् रूप से बढ़ते अथवा कम होते है। इस अनुच्छेद में हम दो महत्त्वपूर्ण श्रेढ़ियों : समांतर श्रेढ़ी तथा गुणोत्तर श्रेढ़ी, के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। तत्पश्चात् इस इकाई में किसी अनुक्रम के अभिसरण तथा अपसरण की संकल्पना की विस्तृत चर्चा की गई है। अभिसारी अनुक्रम की अवधारणा के साथ ही, इस इकाई में सीमा की संकल्पना की चर्चा भी प्रारंभ की गई है। अंत में, इस इकाई में अर्थशास्त्र के क्षेत्र में अनुक्रम और श्रेणियों के अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है।

6.2 अनुक्रम [Sequences]

हम प्रायः इस प्रकार के वाक्यांश सुनते हैं : ये चीजे घटनाएं एक अनुक्रम में पाई जाएंगी/ घटित होंगी या 'पत्तों का एक अनुक्रम'। अनुक्रम का अर्थ क्या है? एक अनुक्रम और कुछ नहीं केवल संख्याओं का एक उत्तरवर्तन/अनुक्रम है। उदाहरण के लिए 2,4,6,8,......................... एक सम संख्याओं का अनुक्रम है। इसी प्रकार 1,4,9,16,........ .... प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अनुक्रम है।

एक अनुक्रम की औपचारिक परिभाषा इस प्रकार है : 'एक अनुक्रम एक ऐसे फलन को कहते हैं जिसका प्रांत प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय हों। आईए इस कथन का अर्थ समझने का प्रयास करें। इसका सीधा-सीधा अर्थ यह है कि यदि हम किसी अनुक्रम के

उत्तरोत्तर पदों को क्रमबद्ध रूप में देखें/लिखें तो हम उन्हें पहला पद, दूसरा पद, तीसरा पद के रूप में इंगित कर सकते हैं। अर्थात् हम पहले पद से पूर्णांक +1, दूसरे पद से पूर्णांक +2, तीसरे पद से पूर्णांक +3 संबद्ध करते हुई इसी क्रम में आगे बढ़ सकते हैं। उदाहरण के लिए, सम संख्याओं के अनुक्रम 2,4,6,8,.................. में हमें पहले पद 2 से संख्या +1 संबद्ध करते हैं, दूसरे पद 4 से संख्या +2 तथा इसी क्रम में प्रत्येक पद से एक प्राकृतिक संख्या संबद्ध करते हुए बढ़ते हैं। इसी प्रकार, धनात्मक पूर्णांकों के घनों के अनुक्रम में हमें पहले पद 1 से पूर्णांक +1 संबद्ध करते हैं, दूसरे पद 8 से पूर्णांक +2, तीसरे पद 27 से पूर्णांक +3 इत्यादि।

गणित की भाषा में एक अनुक्रम को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता हैः

यदि प्रत्येक प्राकृतिक संख्या $n \in \mathrm{N}$, जहाँ N प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय को निरूपित करता है, के लिए एक वास्तविक संख्या a_n नियत की जाए, तो $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ एक अनुक्रम कहलाता है। अनुक्रम के सदस्य $a_1, a_2, a_3, \ldots$ इत्यादि अनुक्रम के पद कहलाते है। a_n को अनुक्रम a_1, a_2, $a_{n,\ldots}$ का n वाँ पद कहते हैं।

अनुक्रम अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में उपयोगी सिद्ध होते हैं, विशेषकर उन स्थितियों में जहाँ घटनाएं समय के साथ क्रमिक रूप में घटित होती हैं। ऐसी चरों की राशियाँ या परिमाण जो विभिन्न समय अंतरालों पर निर्भर हों, अनुक्रमों की सहायता से सरलतापूर्वक व्यक्त की जा सकती हैं। उदाहरण के लिए, भारत में 10 साल के समय अंतराल में गेहूँ के वार्षिक उत्पादन के आंकड़े एक (10 पदों वाले) अनुक्रम से व्यक्त किए जा सकते हैं या मान लीजिए, हमें वर्ष 2000 से 2008 का अंतराल दिया है। मान लीजिए हमें इन 9 वर्षों के लिए भारत का सकल राष्ट्रीय उत्पाद (GNP) ज्ञात है। इसे एक अनुक्रम के 9 पदों से व्यक्त किया जा सकता है। यदि हम पहले वर्ष को 1 से व्यक्त करें तो अंतिम वर्ष को 9 से व्यक्त किया जाएगा। मान लीजिए हम सूचकांक वर्ष को t से तथा सकल राष्ट्रीय उत्पाद (GNP)को Y से व्यक्त करते हैं। मान लीजिए वर्ष t के सकल राष्ट्रीय उत्पाद (GNP) $\mathrm{Y_t}$ से किया जाता है। अतः, वर्ष 2000 के GNP को $\mathrm{Y_1}$ से तथा वर्ष 2008 के GNP को Y_9 से व्यक्त किया जाएगा। इसे व्यापक रूप में समझने के लिए, मान लीजिए हमें एक चर x दिया है। मान लीजिए पहली सीमा-अवधि में (या पहले समय बिंदु पर) इसका मान x है। मान लीजिए समय को सूचकांक t से व्यक्त किया जाए और कुल T समय-अवधियाँ (समय बिंदु) दिए हों, तो हमें x_1, x_2, ... x_t ,..., x_T. अनुक्रम प्राप्त होगा। एक अनुक्रम जिसका पहला और अंतिम पद दिया हो, सांकेतिक रूप में $\{x_t\}_1^T$ से व्यक्त किया जा सकता है। यहाँ धनुकोष्ठक के बाहर लिखे 1 और T यह दर्शाते हैं कि अनुक्रम का पहला पद 1 तथा अंतिम पद T है। अक्षर t को सामान्यतः समय (वर्ष) के सूचकांक के रूप में प्रयोग किया जाता है। कभी–कभी हम आवश्यकतानुसार प्रथम समय-अवधि को 0 (शून्य) भी लेते हैं। इस स्थिति में अनुक्रम को $\{x_t\}_0^T$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यदि हम ऐसी किसी गत्यात्मक प्रक्रिया को निरूपित करना चाहें जो अनिश्चित काल जाती है, तो इसे $\{x_t\}_0^\infty$ के रूप में व्यक्त किया जाता है।

हमने इकाई 2 में देखा कि फलनों को क्रमित युग्मों के रूप में भी लिखा जा सकता है। आईए हम प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N से वास्तविक संख्याओं के समुच्चय, R

तक एक फलन f पर विचार करें। इसे हम $f:N\rightarrow R$ के रूप में लिखते है। फलन f के मानों। प्रतिबिंबों का समूह, R का एक उपसमुच्चय है तथा यह क्रमित है। यदि हम R के इस क्रमित उपसमुच्चय को $S=\{x_1,x_2,x_3,...\}$ के रूप में लिखे, तो S, R में एक अनुक्रम कहलाता है। हम यहाँ संख्याओं का एक ऐसा समुच्चय बन रहे हैं जो एक क्रम का पालन करता है। अर्थात् एक वास्तविक अनुक्रम, वास्तविक संख्याओं का एक जो प्राकृतिक संख्याओं के क्रमबद्ध होता है। अनुक्रम $\{2^n\}_{n\geq 1}$ पर विचार कीजिए। $n=1,2,...$ रखने पर हमें अनुक्रम 2, 4, 8, 16,… प्राप्त होता है। यहाँ प्राप्त क्रम इस प्रकार है:

हम देख सकते है कि $2\leq 4\leq 8\leq 16\leq 32...$ इस अनुक्रम के प्रत्येक पद में संख्याएं निरंतर बढ़ रही हैं। इसी प्रकार ऐसे अनुक्रम भी हो सकते हैं जिनमे संख्याएं निरंतर कम होती जाएं जैसे कि $1\geq \frac{1}{2}\geq \frac{1}{3}\geq \frac{1}{4}\geq ...$, व्यापक रूप में हम देख सकते हैं कि कोई प्रदत्त अनुक्रम

i) निरंतर एक समान रूप से अथवा बढ़ती हुई दर पर बढ़ता या घटता रह सकता है जैसे कि

$S=\{0,-1,-3,-8,-15...\}$

या, $S=\{1,5,10,17,26,...\}$

ii) निरंतर एक समान रूप से अथवा घटती हुई दर पर बढ़ता या घटता रह सकता है जैसे कि

$S=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}...\}$

या $S=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}...\}$

ऐसा हो सकता है कि उसके पद क्रमशः (बारी–बारी से)। प्रत्यावर्ती पद

iii) बढ़ते हुए अंतर के साथ घट या बढ़ रहे हो कि

$S=\{-1,5,-7,17,-31...\}$

iv) ऐसा हो सकता है कि उसके प्रत्यावर्ती पद समान हों जैसे कि

$S=\{-1,1,-1,1,-1...\}$

v) ऐसा हो सकता है कि उसके प्रत्यावर्ती पद घटते हुए अंतर के साथ घट–बढ़ रहे हों जैसे कि

$S=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16}...\}$

अतः यह आवश्यकता नहीं है कि प्रत्येक अनुक्रम एकदिष्ट रूप से बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम में होगा।

अब हम अनुक्रम से संबंधित कुछ मूलभूत परिभाषाओं की चर्चा करेंगे। सर्वप्रथम, एक अनुक्रम परिबद्ध अथवा अपरिबद्ध (परिसीमित अथवा अपरिसीमित) हो सकता है। एक अनुक्रम $\{a_n\}_{n\in N}$ परिबद्ध कहलाता है यदि एक ऐसी सीमित संख्या $K>0$ विद्यमान हो कि किसी प्राकृतिक संख्या N के लिए निम्नलिखत कथन सत्य हो :

$a_n < K$ प्रत्येक $n > N$ के लिए (1)

और

$$a_n > -K \text{ प्रत्येक } n > N \text{ के लिए } (2)$$

यदि किसी अनुक्रम के लिए कथन (1) सत्य हो तो वह अनुक्रम उपरि–परिबद्ध कहलाता है।

यदि किसी अनुक्रम के लिए कथन (2) सत्य हो तो वह अनुक्रम अद्यः परिबद्ध कहलाता है।

कोई अनुक्रम परिबद्ध तभी कहलाता है जब वह ऊपर तथा नीचे दोनों ओर से परिबद्ध हो अर्थात् वह उपरि-परिबद्ध भी हो और अद्यःपरिबद्ध भी हो। दूसरे शब्दों में प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का एक उपरि-परिबंध तथा अद्यःपरिबंध अवश्य होता है। हम आगे परिबंध का प्रयोग अनुक्रमों के अभिसरण की संकल्पना के अध्ययन में करेंगे।

6.3 श्रेणियाँ [Series]

एक श्रेणी की संकल्पना को समझने के लिए हमें अनुक्रम के साथ योग का संयोजन करने की आवश्यकता पड़ती है। योग मात्र दी हुए संख्याओं के मानों की जोड़ने की प्रक्रिया है। किसी चर के विभिन्न मानों के योग को व्यक्त करने के लिए ग्रीक वर्ण/अक्षर/चिह्न 'Σ' (सिग्मा) का प्रयोग सार्वत्रिक रूप से किया जाता है। स्मरण रहे कि हमारी रूचि किसी चर, मान लीजिए x के विभिन्न मानों जैसे कि x_1, x_2, x_3, ... इत्यादि का योग करने में है न कि विभिन्न चरों के योग में जैसे कि $x\, y, z$ इत्यादि। उदाहरण के लिए, यदि किसी फर्म का किसी वस्तु का कुल उत्पादन अनेक यंत्रों/कारखानों के उत्पादनों के योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

योग को समझने के लिए, आईए एक उदाहरण लें। मान लीजिए x वार्षिक आय को निरूपित करता है तथा पादांकित चिह्न $x_1, x_2, \ldots x_T$ क्रमशः वर्ष 1, 2,..., T, में आय को निरूपित करते हैं। इस स्थिति में सभी T वर्षों की कुल संयोजित आय को

$$\sum_{t=1}^{T} x_t = x_1 + x_2 + \ldots + x_T .$$

से व्यक्त किया जाएगा।

योग 'Σ' के कुछ आधारभूत नियम इस प्रकार हैं

1) $\sum_{t=1}^{T} k = kT$,जहाँ k एक अचर है। किसी अचर k का T बार योग, k और T के गुणनफल के बराबर होता है।

2) $\sum_{t=1}^{T} kx_t = k\sum_{t=1}^{T} x_t$ एक चर और एक अचर के गुणनफल का योगफल, चर के (विभिन्न मानों के) योगफल तथा अचर के गुणनफल के बराबर होता है।

3) $\sum_{t=1}^{T} (x_t + y_t) = \sum_{t=1}^{T} x_t + \sum_{t=1}^{T} y_t$.दो चरों के योग के मानों का योगफल उन चरों के मानों के योगफलों के योगफल के बराबर होता है। असतत् गत्यात्मक प्रक्रियाओं तथा असतत् गत्यात्मक इष्टतमीकरण (optimisation) को व्यक्त करने में योग की अवधारणा अत्यंत उपयोगी सिद्ध होती है।

एक श्रेणी किसी दिए हुए अनुक्रम के पहले n पदों से प्राप्त होती हैं। अतः, यदि $\{a_t\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ एक अनुक्रम है, तो $S_n = \sum_{t=1}^{n} a_t$ एक श्रेणी कहलाती है। अब हम दो विशेष प्रकार की श्रेणियों का वर्णन करेंगे परंतु उससे पूर्व हम उनके संगत दो विशेष प्रकार के अनुक्रमों की चर्चा करेंगे। अनुक्रमों के ये प्रकार है : समांतर अनुक्रम तथा गुणोत्तर अनुक्रम। समांतर अनुक्रम एक ऐसा अनुक्रम होता है जिसके प्रत्येक दो क्रमिक पदों का अंतर समान होता है, अर्थात् प्रत्येक $n \in N$ के लिए $a_{n+1} - a_n = d$, जहाँ d एक अचर है और a_n अनुक्रम के nवें पद की व्यक्त करता है।

6.4 श्रेढ़ियाँ [PROGRESSIONS]

एक श्रेढ़ी एक ऐसे श्रेणी अनुक्रम को कहते हैं जिसके पद एकदिष्ट रूप से बढ़ते हुए अथवा घटते हुए क्रम में हों। क्योंकि एक श्रेणी और कुछ नहीं बल्कि एक अनुक्रम के पदों का योग होती है, इसलिए श्रेढ़ी शब्द का प्रयोग अनुक्रम के लिए भी किया जाता है।

6.4.1 समांतर श्रेढ़ी [Arithmetic Progression]

एक समांतर श्रेढ़ी (जिसे संक्षेप में A.P.लिखा जाता है) सँख्याओं का एक ऐसा अनुक्रम है जिसमें प्रथम पद से प्रारंभ करके, आगे के सभी पद, पिछले पद में एक नियत संख्या को जोड़ कर प्राप्त किए जा सकते हैं। इस नियत संख्या को श्रेढ़ी का सार्वअंतर कहते हैं। उदाहरण के लिए अनुक्रम 4, 7, 10, 13,... एक ऐसी समांतर श्रेढ़ी है जिसमें सार्वअंतर 3 है। ध्यान दें कि यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद तथा सार्व अंतर ज्ञात हो तो वह श्रेढ़ी पूर्ण रूप से ज्ञात की जा सकती है। वास्तव में,

यदि

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

एक समांतर श्रेढ़ी है जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d के बरार दिया हो, तो परिभाषा के अनुसार

$$\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 + d = a + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a + (n-2)\,d + d = a + (n-1)d
\end{aligned}$$

अतः, हम देख सकते हैं कि प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d वाली किसी समांतर श्रेढ़ी का

nवाँ पद सूत्र

$$a_n = a + (n-1)d$$

से प्राप्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार, यदि इस श्रेढ़ी के प्रथम n पदो के योग को हम S_n से निरूपित करें, तो

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + ... + [a+(n-1)d] \qquad ...(1)$$

होगा।

(1) को उल्टे क्रम में लिखने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + ... + a \qquad ...(2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + ... + [2a+(n-1)d]$$

$$= n\,[2a+(n-1)\,d]$$

$$\therefore \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)\,d]$$

Or

$$= \frac{n}{2}[a+a+(n-1)\,d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a+a_n]$$

अतः उसके पहले n पदों का योग सूत्र

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)\,d] = \frac{n}{2}[a+a_n].$$

द्वारा प्राप्त होता है।

समांतर श्रेढ़ियों के महत्त्वपूर्ण सूत्र

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a सार्व अंतर d है, तो

a) श्रेढ़ी का nवाँ पद होगा :

$$a_n = a + (n-1)d$$

b) श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग होगा

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)\,d]$$

उदाहरण के लिए, मान लीजिए हम 5 साल के लिए 100रू का निवेश साधारण ब्याज पर 15% प्रति वर्ष की दर पर करते हैं। तो प्रत्येक वर्ष के अंत पर प्राप्त होने वाली राशि होगी

$$115, 130, 145, 160, 175$$

इसी प्रकार एक समांतर श्रेढ़ी बनती है।

उदाहरण 1 : एक समांतर श्रेढ़ी का तीसरा पद तथा ग्यारहवाँ पद क्रमशः 21 और 85 है। श्रेढ़ी के पहले पाँच पद लिखिए

हल : सूत्र $a_n = a + (n-1)d$, का प्रयोग करने पर हम प्राप्त करते है :

$a_3 = a + 2d = 21$ और $a_{11} = a + 10d = 85$

पहले समीकरण को दूसरे समीकरण में से घटाने पर हमें प्राप्त होता

$8d = 64$ or $d = 8$

d के इस मान को पहले समीकरण में रखने पर हम पाते हैं कि $a + 16 = 21$ अर्थात् $a = 5$ है।

अतः दी हुई समांतर श्रेढ़ी के पहले पाँच पद

5, 13, 21, 29, 37, ... हैं।

उदाहरण 2 : X ने 24000 रु उधार लिए तथा उसे 2000 रू प्रति माह की 12 किश्तों में तथा शेष मूलधन पर 1.5% ब्याज दर से चुकाने का निर्णय लिया।

X द्वारा दी जाने वाली 10वीं किश्त की राशि क्या होगी?

हल : पहली किश्त = Rs. 2000 + (0.015) (Rs 24000) = Rs. 2360

दूसरी किश्त = Rs. 2000 + (0.015) (Rs 22000) = Rs. 2330

तीसरी किश्त = Rs. 2000 + (0.015) (Rs 20000) = Rs. 2300

हम पाते हैं कि किश्तों में दी जाने वाली राशि एक समांतर श्रेढ़ी बनाती है जिसतें प्रथम पद a = 2360रू तथा सार्वअंतर (d) = 30रू. है।

अतः,

10वीं किश्त = श्रेढ़ी का 10वाँ पद $= a + (10-1)\, d$

$$= \text{Rs } 2360 + 9(-\text{Rs } 30) = \text{Rs } 2090.$$

उदाहरण 3 : एक बिजली का सामान बनाने वाली कंपनी XYZ के पहले साल की बिक्री 2,00,000 रू थी। यदि उसके पश्चात् प्रतिवर्ष कंपनी की बिक्री में 30000 रू की वृद्धि हुई तो कंपनी की 5वें वर्ष की बिक्री ज्ञात कीजिए। साथ ही, पहले पाँच वर्षे में कंपनी की कुल बिक्री भी ज्ञात कीजिए।

हल : कंपनी XYZ की वार्षिक बिक्री एक समांतर श्रेढ़ी बनाती है जिसका प्रथम पद a = 2,00,000 तथा सार्व अंतर d = 30,000 है। अतः, पाँचवें वर्ष में होने वाली बिक्री सूत्र $a_n = a + (n-1)d$ में

$n = 5$ रखकर प्राप्त की जा सकती है। अतः

$a_5 = 2{,}00{,}000 + (5-1)30{,}000 = \text{Rs } 3{,}20{,}000.$

इसी प्रकार की प्रथम पाँच वर्षों में होने वाली बिक्री सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में

$n = 5$ रखकर प्राप्त की जा सकती है। अतः

$$S_5 = \frac{5}{2}[2(2{,}00{,}000) + (5-1)30{,}000]$$

$$= \text{Rs } 13{,}00{,}000.$$

उदाहरण 4 : माना लीजिए X, 32,500 का एक ऋण पहले महीने में 200रू देकर तथा उसके पश्चात् प्रत्येक माह 150रू बढ़ाकर चुकाता है। उसे इस ऋण को चुकाने में कितना समय लगेगा?

हल : क्योंकि X अपनी मासिक किश्त 150रू की नियत राशि से बढ़ाता है, अतः यहाँ d = 150 होगा। साथ ही पहली किश्त a = 200 रू. दी हुई है। इस प्रकार हमें एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है। यदि वह पूरी राशि

मासिक किश्तों में चुकाता है तो हम पाते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

या $$32500 = \frac{n}{2}[2(200) + (n-1)150]$$

या $$65000 = n(250 + 150n)$$

या $$15n^2 + 25n - 6500 = 0$$

$$\therefore \quad n = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4 \times 15 \times (-6500)}}{2 \times 15}$$

$$= \frac{-25 \pm 625}{30} = 20 \text{ or } -21.66$$

क्योंकि n एक धनात्मक पूर्णांक है इसलिए n = −21.66 नही हो सकता। अतः, X को पूरी राशि चुकाने में 20 महीने लगेंगे।

6.4.2 गुणोत्तर श्रेढ़ी [Geometric Progression]

अब हम गुणोत्तर श्रेढ़ियों के बारे में बात करेंगे गुणोत्तर श्रेढ़ियाँ संयोजन तथा बट्टे (compounding and discounting) की संकल्पनाओं को समझने में हमारी सहायता करती हैं। इन संकल्पनाओं के बारे मे हम अगले अनुच्छेद में पढ़ेंगे। एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (जिस हम संक्षेप में G.P.लिखते हैं) संख्याओं का एक ऐसा अनुक्रम है जिसके प्रत्येक दो क्रमिक पदों में एक समान अनुपात होता है जिसे हम G.P.का सार्वअनुपात कहते हैं। दूसरे शब्दों में, एक G.P. के प्रथम पद के पश्चात् प्रत्येक पद पिछले पद को एक अचर r से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है। यदि हम किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद और सार्व अनुपात ज्ञात हो, तो इस गुणोत्तर श्रेढ़ी को पूर्ण रूप से निर्धारित किया जा सकता है। अतः, यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्व अंतर r है तो श्रेढ़ी के विभिन्न पद इस प्रकार होंगे :

$$\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 r = ar \\
a_3 &= a_2 r = ar(r) = ar^2 \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_n &= a_{n-1} r = ar^{n-2}(r) = ar^{n-1}
\end{aligned}$$

अतः, एक ऐसा अनुक्रम, जिसमें प्रत्येक दो क्रमिक पदों का अनुपात समान (तथा शून्येत्तर) हो, एक गुणोत्तर अनुक्रम कहलाता है अर्थात् प्रत्येक $n \in N$ के लिए,

$\frac{an+1}{an} = r, r \neq 0$ n पदों $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}$ के ऐसे अनुक्रम में, प्रत्येक पद पिछले पद को अचर r से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है। इस गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग, S_n इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad ...(3)$$

इस योग को हम एक r सार्व अनुपात वाली गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते हैं। इस योग का सूत्र ज्ञात करने के लिए हम ऊपर दिए गए समीकरण (3) को r से गुणा करते हैं।

इस प्रकार हमें प्राप्त होता हैं

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n \quad ...(4)$$

समीकरण (4) को समीकरण (3) में से घटाने पर हम पाते हैं

$$S_n - rS_n = a - ar^n \quad ...(5)$$

क्योंकि शेष सभी पद रद्द हो जाते हैं। यदि $r = 1$ हो, तो समीकरण (3) से हम पाते हैं कि $S_n = an$ होगा।

यदि $r \neq 1$ हो, तो समीकरण (4) से हम पाते हैं कि

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} \quad (5)$$

अतः, हम एक परिमित गुणोत्तर श्रेढ़ी के योग का सूत्र इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r} \quad ...(6)$$

यदि $r = 1$ हो, तो समीकरण (3) से हम पाते हैं कि

$$S_n = a + a + a + ... + a = na$$

परंतु यदि गुणोत्तर श्रेणी अपरिमित हो अर्थात् यदि n अनंत की ओर जाए $(n \to \infty)$ तो क्या होगा? इस स्थिति में समीकरण (5) का पद r^n, 0 की ओर जाएगा यदि $-1 < r < 1$ हो अर्थात् यदि $| r | < 1$ हो। अतः, इस स्थिति में प्रथम n पदों का योग S_n, $\frac{a}{1-r}$ की ओर जाएगा। लेकिन यदि $r > 1$ या $r \leq -1$ है तो r^n किसी सीमा की ओर नहीं जाएगा।

गुणोत्तर श्रेढ़ियों के महत्त्वपूर्ण सूत्र

यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है, तो

a) उसका nवाँ पद होगा :

$$a_n = ar^{n-1}$$

b) उसके प्रथम n पदों का योग (S_n) होगा :

यदि $r \neq 1$ है, $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$;

यदि $r = 1$ है, तो na

उदाहरण 5 : एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 16 तथा सातवां पद 1 है। श्रेढ़ी का 10वां पद ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र $a_n = ar^{n-1}$, का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$a_3 = ar^2 = 16 \qquad \ldots(6)$$

और $$a_7 = ar^6 = 1 \qquad \ldots(7)$$

समीकरण (7) को समीकरण (6) से भाग करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{1}{16}$$

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं कि $r^4 = 1/16$ या $r = 1/2$ है।

अनुपात r के इस मान को $a_3 \equiv a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 16$ में रखने पर हमें प्राप्त होता है या a = 64

अंततः, $a = 64$, $r = 1/2$, और $n = 10$ से हम पाते है कि

$$a_{10} = 64\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{8}$$

उदाहरण 6 : एक भूमि विकास कंपनी XYZ की प्रारंभ होने के पहले माह की बिक्री 10 लाख रूपये है। यदि उसके पश्चात् प्रत्येक माह में बिक्री 10% की दर से बढ़ती है तो कंपनी की पाँचवें मास की बिक्री तथा पहले पाँच महीनों में हुई कुल बिक्री ज्ञात कीजिए।

हल : कंपनी की मासिक बिक्री एक ऐसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के अनुरूप है जिसका प्रथम पद $a = 1{,}000{,}000$ तथा सार्व अनुपात $r = 1.1$ है। पाँचवें मास की बिक्री सूत्र $a_n = ar^{n-1}$ में $n = 5$ रखकर प्राप्त की जा सकती हैं। अतः,

$$a_5 = 1{,}000{,}000(1.1)^4 = 1{,}464{,}100$$

कंपनी की प्रथम 5 महीने में होने वाली कुल बिक्री सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ में $n = 5$ रखकर प्राप्त की जा सकती है। अतः,

$$S_5 = \frac{1{,}000{,}000[1-(1.1)^5]}{1-1.1} = \text{Rs } 6{,}105{,}100$$

उदाहरण 7 : X ने 1000रू एक बैंक में जमा करवाएं बैक जमा राशि पर 10% प्रति वर्ष की दर से चक्रवृद्धि ब्याज देता है जो कि तिमाही संयोजित होता है। 5 साल पश्चात् X की कुल जमा राशि कितनी हो जाएगी?

हल : X का मूलधन P = 1000 रू है। 10% वार्षिक ब्याज दर, 2.5% तिमाही ब्याज दर के समान है। अतः? प्रथम तिमाही के पश्चात् धनराशि होगी

$$a_1 = 1000 + (1000)(0.025) = 1000(1.025)$$

दूसरी तिमाही के अंत में राशि होगी :

a_2 = [प्रथम तिमाही के अंत में राशि] + [प्रथम तिमाही के अंत में राशि] (0.025)

$$= a_1 + a_1(0.025) = a_1(1.025)$$

$$= 1000\,(1.025)(1.025) = 1000(1.025)^2$$

तीसरी तिमाही के अंत में राशि होगी

a_3 = [दूसरी तिमाही के अंत में राशि] [   ] (0.025)

$$= a_2 + a_2(0.025) = a_2(1.025)$$

$$= 1000\,(1.025)^2\,(1.025)$$

$$= 1000(1.025)^3$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि हमें निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है :

$$1000(1.025),\ 1000(1.025)^2,\ 1000(1.025)^3,\ \ldots$$

जिसमें प्रथम पद $a = 1000(1.025)$ तथा सार्व अनुपात $r = 1.025$ है।

हम 5 वर्ष अर्थात् 20वीं तिमाही के अंत में राशि ज्ञात करना चाहते हैं। यह राशि हमारी श्रेढ़ी के 20वें पद के बराबर होगी। अतः,

$$a_{20} = ar^{20-1} = [1000(1.025)](1.025)^{19}$$

$$= 1000(1.025)^{20} \cong \text{Rs } 1638.62$$

बोध प्रश्न 1

1) प्रथम पद 15 तथा सार्वअंतर 3 वाली समांतर श्रेढ़ी का 15वां पद ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

2) एक फर्म प्रथम वर्ष में 1500 टेलीविजनों का उत्पादन करती है। 15वें वर्ष के अंत तक कंपनी ने कुल 8300 टेलीविज़नों का उत्पादन किया।

   i) ज्ञात कीजिए कि कंपनी के उत्पादन में प्रतिवर्ष कितने टेलीविज़नों की वृद्धि हुई?

   ii) प्रतिवर्ष वृद्धि के इस आंकलन के आधार पर, 10वें वर्ष में कितने टेलीविज़नों का उत्पादन हुआ होगा?

....

....

....

....

....

....

3) फर्नीचर बनाने वाली कंपनी XYZ की प्रारंभ होने के प्रथम मास में होने वाली बिक्री 1,50,000रू की थी। यदि प्रति माह बिक्री में 16000 रू. की वृद्धि दो, तो कंपनी की 7वें महीने में अनुमानित बिक्री तथा पहले सात महीनों में होने वाली कुल बिक्री ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

4) G.P. 4, 8, 16, 32, 64, … का 11वां पद तथा पहले 20 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

5) नीचे दी गई गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए :

49, 7, 1, 1/7, 1/49, …

साथ ही, G. P. के पहले 10 पदों का योग भी ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

6) एक देश की वर्ष 1950 में जनसंख्या 50 करोड़ थी। यदि जनसंख्या 2% की वार्षिक चक्रवृद्धि दर से बढ़ती है तो वर्ष 2000 में उस देश की अनुमानित जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

6.5 अनुक्रमों का अभिसरण [Convergence of sequences]

6.5.1 अनुक्रमों का अभिसरण एवं अपसरण [Concept of convergence and Divergence of a sequence]

हम अनुक्रमों को उनके विशिष्ट गुणों के आधार पर विभिन्न वर्गों में बाँट सकते हैं :

i) ∞ या $-\infty$ की ओर अग्रसर अनुक्रम

ii) किसी सीमित संख्या (धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य) की ओर अग्रसर अनुक्रम

iii) किसी भी मान की ओर अग्रसर न होने वाले अनुक्रम

अतः जब भी हम किसी अनुक्रम $\{a_n\}$ पर विचार करते हैं तो हमें मूल रूप से यह जानने की आवश्यकता पड़ती है कि उसके अनुवर्ती पद, n का मान बढ़ने पर, एक दूसरे के समीप-दर-समीप आते हैं अथवा नहीं। हम जानते हैं कि एक अनुक्रम एक ऐसा फलन होता है जो प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N को किसी समुच्चय X के अवयवों पर ले जाता है। यह समुच्चय X वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R हो सकता है या फिर इसका कोई उपसमुच्चय। अतः जब n बढ़ता है अर्थात् अनुक्रम के अनुवर्ती पदो के लिए हमें यह देखने की आवश्यकता पड़ती है कि (1) क्या प्रत्येक क्रमिक पद पिछले पद से बड़ा है (अर्थात् क्या अनुक्रम के पदों का मान एकदिष्ट रूप से बढ़ रहा है या प्रत्येक क्रमिक पद पिछले पद से छोटा है (अर्थात् क्या अनुक्रम पदों का मान एकदिष्ट रूप से घट रहा है) या कि इन दोनों में से कोई भी सिथिति नहीं है, (1) और (2) कि क्या अनुक्रम लगातार किसी निश्चित मान के समीप और समीप हो रहा है अथवा नहीं। यदि यह अनुक्रम एक निश्चित मान की ओर अग्रसर है तो हम कहते हैं कि यह अनुक्रम उस मान पर अभिसरित होता है।

अनुक्रम के अभिसरण की संकल्पना हमें अनुक्रम की सीमा की ओर ले जाती है। वास्तव में, किसी अनुक्रम के अभिसरण की संकल्पना को औपचारिक रूप से समझने के लिए हमें अनुक्रम की सीमा की संकल्पना को समझने की आवश्यकता होगी।

6.5.2 सीमाओं का प्राथमिक परिचय [An Elementary Introduction to Limits]

आईए हम किसी अनुक्रम की सीमा की संकल्पना को समझने का प्रयास करें।

मान लीजिए $\{x_n\}_{n\geq 1}$ संख्याओं का एक अनुक्रम है। यदि ये संख्याएं (अनुक्रम के पद) निरंतर किसी संख्या L के समीप और समीपतर होते जाएं तो हम कहते हैं कि $\{x_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम है इसकी सीमा L के बराबर है। इस तथ्य को हम इस प्रकार लिख सकते है :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

या $$\underset{n\to\infty}{Lt}\, x_n = L$$

या $$x_n \to L$$

यहाँ $n\to\infty$ इस तथ्य को व्यक्त करता है कि n का मान निरंतर बढ़ता जा रहा है। निश्चित रूप से कभी भी ∞ नहीं होता। अपितु यह ∞ की ओर अग्रसर होता है। यदि कोई अनुक्रम अभिसारी नहीं होता, तो उसे अपसारी अनुक्रम कहते हैं।

अभी हमने यह देखा कि एक प्रदत्त दिया हुआ अनुक्रम अभिसारी होता है यदि कोई ऐसी संख्या L उपलब्ध हो कि n का मान बढ़ने पर संख्याएं (अनुक्रम के पद) x_n संख्या L के समीप और समीपतर होते जाएं। अर्थात्

i) हम चाहते हैं कि $x_n \approx L$ हो जाएं

ii) इसके लिए हमें चाहिए होगा कि शून्य से बड़ी, किसी भी छोटी से छोटी संख्या ε के लिए

$|x_n - L| < \varepsilon$, हो।

iii) कथन (ii) के सत्य होने के लिए, हमें एक संख्या $N\geq 1$ ऐसी प्राप्त होनी चाहिए कि प्रत्येक $n\geq N$ के लिए $|x_n - L| \leq \varepsilon$ हो।

बोध प्रश्न 2

1) किसी अनुक्रम के अभिसरण के लिए क्या आवश्यक है?

....

....

....

....

....

2) किसी अनुक्रम की सीमा से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

....

6.6 अर्थशास्त्र में अनुक्रमों और श्रेणियों के अनुप्रयोग [Economic Applications of Sequences and Series]

6.6.1 साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज [Simple and Compound Interest]

साधारण ब्याज : यदि किसी मूलधन पर किसी समय अवधि का ब्याज परिकलित करते हुए, मूलधन में पिछली समय अवधि का ब्याज न जोड़ा जाए तो इस प्रकार प्राप्त ब्याज को साधारण ब्याज कहते हैं।

यदि राशि P का निवेश 100% साधारण ब्याज दर किया जाएं तो n वर्षों के पश्चात् उपार्जित कुल राशि नीचे दिए गए सूत्र के अनुसार ज्ञात किया जा सकती है :

कुल उपार्जित राशि सूत्र (साधारण ब्याज)

$$A_n = P\,(1 + i.n)$$

सामान्यतः, आधुनिक व्यापार तथा व्यावसायिक स्थितियों में साधारण ब्याज का कोई विशेष महत्व नहीं है क्योंकि अधिकतर व्यवहारिक स्थितियों में सामान्यतः चक्रवृद्धि ब्याज का ही प्रयोग किया जाता है।

चक्रवृद्धि ब्याज : यदि किसी समय अवधि के ब्याज का परिकलन करते हुए पिछली समय अवधियों में प्राप्त ब्याज को भी मूलधन में जोड़ दिया जाएं तो इस प्रकार प्राप्त ब्याज को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए 1000रू का निवेश 10% चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर से किया गया। नीचे दी गई तालिका में प्रत्येक वर्ष के अंत में ब्याज तथा कुल राशि की स्थिति का विवरण दिया गया है :

वर्ष	राशि जिस पर ब्याज परिकलित किया जाना है	उपार्जित ब्याज	कुल उपार्जित राशि
1	Rs 1000	10% of Rs 1000 = Rs 100	Rs 1100
2	Rs 1100	10% of Rs 1100 = Rs 110	Rs 1210
3	Rs 1210	10% of Rs 1210 = Rs 121	Rs 1331
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…

कुल उपार्जित राशि सूत्र (चक्रवृद्धि ब्याज)

$$A_n = P\,(1 + i)^n$$

जहाँ A_n = वर्षों के पश्चात् उपार्जित राशि

P = मूलधन

i = (अनुपातिक) वार्षिक ब्याज दर

n = वर्षों की संख्या

उदाहरण 8 : एक फर्म प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में एक ऐसी राशि का निवेश करने की योजना बनाती है जिससे पाँच वर्ष की समयावधि के पश्चात् 1,00,000 रू. की कुल राशि प्राप्त हो सके। यदि चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर 14% हो तथा ब्याज प्रतिवर्ष संयोजित होता हो, तो प्रतिवर्ष निवेश की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए पाँच वर्ष तक, प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में B रूपयों का निवेश किया गया।

B रू का प्रथम निवेश पाँच वर्ष की अवधि समाप्त होने पर $B(1.14)^5$ हो जाता है, दूसरा निवेश इस समयावधि से अंत में $(1.14)^4$ हो जाता है, ... इत्यादि।

परंतु इन विभिन्न उपार्जित राशियों का योग 100000रू के बराबर होना चाहिए। अर्थात्

$$1{,}00{,}000 = B(1.14)^5 + B(1.14)^4 + \ldots + B(1.14)$$

$$= B[1.14 + (1.14)^2 + \ldots + (1.14)^5]$$

$$= B\left[\frac{1.14\{(1.14)^5 - 1\}}{1.14 - 1}\right] = B(7.5355)$$

$$1{,}00{,}000 = B(7.5355)$$

$$B = \frac{100{,}000}{7.5355} = \text{Rs. } 13270.52$$

उदाहरण 9: एक कार 80000रू. में खरीदी गई। यदि पहले तीन वर्षों के लिए मूल्यह्रास 5% प्रति वर्ष की दर से तथा अगले तीन वर्ष के लिए यह 10% प्रति वर्ष की दर से परिकलित किया जाता है, तो 6 वर्ष के पश्चात् कार का आर्थिक मान ज्ञात कीजिए।

i) पहले वर्ष में होने वाला मूल्यह्रास $= 80{,}000 \times \frac{5}{100}$

अतः, एक वर्ष के अंत में कार का घटा हुआ मूल्य

$$= 80{,}000 - \left(80{,}000 \times \frac{5}{100}\right)$$

$$= 80{,}000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)$$

ii) दूसरे वर्ष में होने वाला मूल्यह्रास

= (प्रथम वर्ष के अंत में ह्रासित मूल्य)×(दूसरे वर्ष में अवमूल्यन की दर)

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)\left(\frac{5}{100}\right)$$

अतः, दूसरे वर्ष के अंत में कार का ह्रासित मूल्य

= (पहले वर्ष के अंत में ह्रासित मूल्य) – (दूसरे वर्ष में मूल्यह्रास)

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right) - 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)\left(\frac{5}{100}\right)$$

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)\left(1 - \frac{5}{100}\right)$$

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$$

इसी प्रकार, तीसरे वर्ष के अंत में कार का ह्रासित मान

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$$

iii) चौथे वर्ष का मूल्यह्रास $= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3\left(\frac{10}{100}\right)$

अतः, चौथे वर्ष के अंत में कार का ह्रासित मान

= (तीसर वर्ष के अंत में ह्रासित मूल्य) – (चौथे वर्ष में मूल्यह्रास)

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3 - 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3\left(\frac{10}{100}\right)$$

इसी प्रकार परिकलन करते हुए हम पाते हैं कि, 6वर्ष के अंत में कार का ह्रासित मूल्य हो जाता है :

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3\left(1 - \frac{10}{100}\right)^3$$

$$\cong \text{Rs } 50224$$

6.6.2 संयोजन एवं बट्टा [Compounding and Discounting]

हम सामान्यतः, भविष्य की बजाय वर्तमान में उपभोग करने को वरीयता देते हैं। मनोवैज्ञानिक रूप से हमारे लिए आज एक रूपये की कीमत कल के एक रूपये की कीमत से अधिक है। मुद्रास्फीति के दौर में वास्तविकता भी यही है। निवेशक वर्तमान में उपभोग न करके निवेश केवल तभी करेंगे यदि भविष्य में उनकी निवेशित राशि के बढ़ने की संभावनाएं अधिक हो। क्योंकि हम धन का निवेश करके, ब्याज अर्जित करना प्रारंभ कर सकते हैं इसलिए आज के एक रूपये की कीमत कल के एक रूपये से अधिक है। निवेशक अपने धन का निवेश करते हैं और भविष्य में धन लाभ प्राप्त करते हैं। इसे 'नकदी प्रवाह' cash flow कहते हैं। यदि हमें धन प्राप्त होता है तो उसे नकदी अंतर्वाह कहते हैं और इसे धनात्मक नकदी प्रवाह समझा जाता है। यदि धन हमें देना पड़े तो उसे बहिर्वाह कहा जाता है और यह नकदी प्रवाह ऋणात्मक होता है। इस अनुच्छेद में हम संयोजन एवं बट्टे के बारे में चर्चा करेंगे परंतु इससे पहले कि हम संयोजन (compounding) की बात करें, हम एक बार पुनः साधारण ब्याज पर विचार करते है। यद्यपि साधारण ब्याज पर पीछे बात कर चुके हैं तो भी साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज के अंतर को और अधिक स्पष्ट करने के लिए यह आवश्यक है।

माना P मूलधन को या किसी व्यक्ति द्वारा बैंक से ऋण के रूप में ली गई राशि या निवेश की गई राशि को निरूपित करता है। माना ब्याज दर r है जिसे प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया गया है तथा t वह अवधि है जिसमें ऋण चुकाया जाना है या निवेश परिपक्व होता है। यदि राशि P का निवेश, $r\%$ प्रति वर्ष साधारण ब्याज दर से t वर्षों के लिए किया जाता है तो प्राप्त होने वाला ब्याज I_n होगा :

$$I_t = \text{p}\times\text{r}\times\text{t}$$

अतः, t वर्ष के अंत में प्राप्त होने वाली कुल राशि A मूलधन P तथा ब्याज I_n के योग के बराबर होगी :

$$A = P + I_t = P + Prt = P\,(1 + rt).$$

हम केवल एक नकदी प्रवाह से प्रारंभ करते हैं। मान लीजिए आपने वर्ष 2008 में 100 रूपये का निवेश किया। आपके निवेश का भविष्य मूल्य 100रू + 10 रू प्रतिवर्ष होगा तब तक के लिए जब तक के लिए आपने 10% की दर निवेश किया है। अतः, यदि आपने 100रू 4 वर्ष के लिए निवेशित किए, तो आपकी राशि 4 वर्ष के अंत में 140 रू हो जाएगी। व्यापक रूप में, यदि आप P रू का निवेश $100r\%$ प्रतिवर्ष की दर से t वर्ष के लिए करें तो आपको t वर्षों के पश्चात्

$$A = P + \Pr t = P(1 + rt)$$

के बराबर राशि प्राप्त होगी, यह हम देख चुके हैं। चक्रवृद्धि ब्याज में स्थिति अधिक रोचक/जटिल है। जब किसी निवेश में ब्याज चक्रवृद्धि होता है तो हमें अपने निवेश में ब्याज पर भी ब्याज मिलता है। दूसरे शब्दों में किसी भी समय अवधि में पिछली समय अवधियों में अर्जित ब्याज पर ब्याज दिया जाएगा। ऊपर दिए गए उदाहरण में, प्रथम वर्ष के अंत में राशि 100रू + 10रू (ब्याज = 100 का 10% = 10 रू.) = 110रू हो जाएगी। यह दूसरे वर्ष के प्रारंभ में मूलधन है। दूसरे वर्ष का ब्याज 110रू का 10% अर्थात् 11रू होगा। अतः, दूसरे वर्ष के अंत में राशि 110+ 11 रू. = 121 रू. हो जाएगी।

व्यापक रूप में, यदि राशि P का निवेश $100r\%$ चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर t वर्ष के लिए किया जाएं तो t वर्षों के अंत में प्राप्त होने वाली कुल राशि होगी

$$A = P(1 + r)^t$$

साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज द्वारा प्राप्त राशियों के सूत्रों में अंतर पर ध्यान दीजिए। साधारण ब्याज में कोष्ठक के अंदर का व्यंजक $1+rt$ है, अर्थात् r और t के गुणनफल में 1 जोड़ा गया है जबकि चक्रवृद्धि ब्याज द्वारा प्राप्त राशि के सूत्र में t एक गुणक के रूप में न होकर घातांक में उपस्थित है। यहाँ t, $(1+r)$ का घातांक है।

मान लीजिए

C_0 प्रारंभिक नकद प्रवाह या निवेश है

r ब्याज या प्रतिफल/लाभ की हुई दर है

t निवेश की अवधि है

C_t राशि C_0 का निवेश करने पर t वर्ष के पश्चात् प्राप्त होने वाली राशि है

तो $C_t = C_0\,(1 + r)^t$

यह संयोजन ज्ञात करने का सूत्र है, जो कि वर्तमान नकदी मूल्य को भविष्य नकदी मूल्य में परिवर्तित करता है। $(1 + r)^t$ भविष्य मूल्य संयोजन घटक कहलाता है और इसे $FVCF_{r,t}$ द्वारा निरूपित किया जाता है यहाँ r और t ऊपर परिभाषित किए गए चर है। अतः

$$C_t = C_0\, FVCF_{r,t}$$

अब हम इसकी विपरीत प्रक्रिया का अध्ययन करते हैं। अर्थात् हम यह ज्ञात करने का प्रयास करते हैं कि यदि किसी राशि का भविष्य नकदी प्रवाह दिया है, तो इसके संगत वर्तमान नकद प्रवाह का मान क्या होगा? इस प्रक्रिया को बट्टा (discounting) कहते हैं। हम एक ही अवधि वाली स्थिति से प्रारंभ करते हैं। भविष्य नकदी मान को वर्तमान मान में परिवर्तित करने के लिए हम बट्टे की प्रक्रिया का प्रयोग करेंगे। इसके लिए हमें केवल संयोजन समीकरण के पदों को निम्नलिखित रूप में पुनः व्यवस्थित करने की आवश्यकता है

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

अतः, बट्टा, संयोजन की विपरीत प्रक्रिया है। ऊपर प्राप्त समीकरण $C_0 = \frac{C_t}{(1+r)^t}$ में $\frac{1}{(1+r)^t}$ वर्तमान मूल्य बट्टा घटक कहलाता है तथा इसे $PVDF_{r,t}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। ध्यान दें कि बट्टा घटक, संयोजन घटक का व्युत्क्रम है।

अब तक हमने संयोजन तथा बट्टे का अध्ययन केवल एक नकदी प्रवाह की स्थिति में किया है। अनेक अर्थसंबंधी समस्याएं एक से अधिक नकदी प्रवाहों से संबंधित होती हैं। आईए हम बट्टे के संदर्भ में एक ऐसी स्थिति पर विचार करें। अनेक नकदी प्रवाहों वाली बट्टे की स्थिति सरल है : हम प्रत्येक व्यक्तिगत नकदी प्रवाह के लिए अलग–अलग वर्तमान मूल्य (PV) ज्ञात करके उनका योग करते हैं। व्यापक स्थिति में इसका सूत्र हम यहाँ दे रहे हैं। ध्यान रहे कि प्रतिवर्ष होने वाले विभिन्न नकदी प्रवाह असमान हो सकते हैं।

$$PV_0 = \frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

हम किसी वार्षिकी (annuity) के वर्तमान मूल्य पर भी विचार करते हैं। एक वार्षिकी एक ऐसी नियत (अचर) राशि है तो प्रतिवर्ष प्राप्त होती है। मान लीजिए, P_0 एक ऐसी वार्षिकी का वर्तमान मूल्य है जो t वर्ष के पश्चात् प्रत्येक वर्ष के अंत में C रू देती हो। हम पाते हैं कि

$$P_0 = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r)^t}$$

$$= C\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^t}\right]$$

कोष्ठक [ ] में लिखें पदों का योग एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में हैं। यह गुणोत्तर श्रेढ़ी r की दर पर t वर्ष के लिए वर्तमान मूल्य वार्षिकी घटक ($PVAF_{r,t}$) कहलाती है। इस अंकन पद्धति में इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$P_0 = C.PVAF_{r,t}$$

जहाँ C अचर भुगतान राशि है। वर्तमान मूल्य वार्षिकी घटक को सूत्र

$$PVAF_{r,t} = \frac{1 - \left[\frac{1}{(1+r)^t} \right]}{r}$$

से भी व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार हम किसी वार्षिकी का भविष्य मूल्य ज्ञात करने के लिए भी सूत्र ज्ञात करते है। यह सूत्र है :

$$FVA_t = C(1+r)^{t-1} + C(1+r)^{t-2} + \ldots + C$$

$$= C\left[\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right]$$

यह भी संभव है कि संयोजन और बट्टे में नकदी प्रवाह वर्ष में एक बार न होकर कई बार हो। मान लीजिए r ब्याज की दर तथा t वर्षों में समय अवधि को निरूपित करता है परंतु अब संयोजन वर्ष में एक बार न होकर m बार होता है।

ऐसी स्थिति में संयोजन सूत्र

$$C_t = C_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

तथा बट्टा सूत्र

$$C_0 = \frac{C_t}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}}$$

प्राप्त होता है।

6.6.3 वर्तमान मूल्य [Present Value]

मान लीजिए कि धन को 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से निवेश किया जा सकता है जब कि ब्याज का संयोजन वार्षिक रूप से होता हो। तो100रू का निवेश एक वर्ष पश्चात् 110 रू हो जाएगा। इसी प्रकार वर्तमान के 100 रू. का मान दो वर्ष के पश्चात् के $100(1.1)^2$ = 121 रू के मान के बाराबर हैं इससे भविष्य में मिलने वाली किसी राशि के वर्तमान मान/मूल्य की अवधारणा का अर्थ स्पष्ट हो जाता है। इसे विधि पूर्वक व्यक्त करने के लिए हम देखते हैं कि यदि निवेश की वर्तमान दर 10% है, तो एक वर्ष पश्चात् मिलने वाले 110 रू का वर्तमान मूल्य $\frac{110}{1.1}$= 100 रू. है।

इसी प्रकार, दो वर्ष पश्चात् मिलने वाले 121 रू. का वर्तमान मूल्य $\frac{121}{1.1^2}$ = 100रू है, इत्यादि। यहाँप्रयुक्त निवेश दर को बट्टा दर भी कहा जाता है नीचे हम वर्तमान मूल्य ज्ञात करने का व्यापक सूत्र दे रहे हैं तथा इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट भी कर रहे हैं।

वर्तमान मूल्य सूत्र

राशि A, का जो कि t वर्ष में प्राप्त होने वाली है, 100i% की बट्टा दर से वर्तमान मूल्य P निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

$$P = \frac{A}{(1+i)^t}$$

जहाँ P = वर्तमान मूल्य है

A = वर्ष पश्चात् प्राप्त होने वाली राशि है

i = बट्टा दर (अनुपातिक रूप में) है

तथा t = वर्षों में समय अवधि है

उदाहरण 10 : एक फर्म ने एक वस्तु 8 वर्ष तक 20000 रू. प्रतिवर्ष भुगतान की योजना के अंतर्गत खरीदी। भुगतान प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में किए जाने हैं। 20% वार्षिक ब्याज दर से भुगतानों के नकदी प्रवाह का कुल वर्तमान मूल्य क्या है?

हल : पहले वर्ष के भुगतान का वर्तमान मूल्य = 20,000रू

दूसरे वर्ष के भुगतान का वर्तमान मूल्य = $\frac{20,000}{1.2}$ रू

तीसरे वर्ष के भुगतान का वर्तमान मूल्य = $\frac{20,000}{(1.2)^2}$ रू

… … … …

… … … …

… … … …

अंतिम वर्ष के भुगतान का वर्तमान मूल्य = $\frac{20,000}{(1.2)^7}$ रू

अतः भुगतान के कुल नकदी प्रवाह का वर्तमान मूल्य होगा

$$20,000\left\{1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{(1.2)^2} + ... + \frac{1}{(1.2)^7}\right\}$$

यह सार्व अनुपात $r = \frac{1}{1.2}$ वाली एक गुणोत्तर श्रेणी है और हमें इसके प्रथम 8 पदों का योग अथवा S_8

ज्ञात करना है

$$S_8 = \frac{a(1 - r^8)}{1 - r}$$

$$= 20,000\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{1.2}\right)^8}{1-\frac{1}{1.2}}\right\}$$

$$= 1,20,000\left[1-\frac{1}{(1.2)^8}\right]$$

$$= 1,20,000\ (1 - 0.23)$$

$$= \text{Rs. } 92,400 \text{ लगभग}$$

निवल वर्तमान मूल्य, जिसे हम संक्षेप में NPV से व्यक्त करते हैं, किसी परियोजना से संबंधित सभी नकदी प्रवाहों के वर्तमान मूल्यों के योग के बराबर होता है। सभी नकदी प्रवाहों को, सामान्यतः, प्रतिवर्ष एक तालिका में सूचीबद्ध कर लिया जाता है जैसा कि नीचे उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 11 : एक ऐसी व्यापारिक परियोजना पर विचार किया जा रहा है जिसकी प्रारंभिक लागत 12000 रूपये है। इसमें आने वाले चार वर्षों में क्रमशः 8000रू, 12000रू, 10000 रू. तथा 6500 रू. का राजस्व/आय अपेक्षित है। यदि परियोजना में अगले चार वर्षों में होने वाली लागत क्रमशः 8500 रू. 3000 रू., 1500 रू. तथा 1500 रू. है और बट्टा दर 18.5% है, तो परियोजना का शुद्ध वर्तमान मूल्य अर्थात् NPV ज्ञात कीजिए।

हल :

वर्ष	अंतर्वाह नकदी प्रवाह (a)	बहिर्वाह नकदी प्रवाह (b)	(a)– (b)	18.5 की दर से बट्टा घटक	वर्तमान मूल्य
1	–	12000	(12000)	1.000 $(=\frac{1}{(1+0.185)^0})$	(12000)
2	8000	8500	(500)	0.8439$(=\frac{1}{(1+0.185)^1})$	(421.95)
3	12000	3000	9000	0.7121	6408.90
4	10000	1500	8500	0.6010	5108.50
5	6500	1500	5000	0.5071	2535.50
				शुद्ध वर्तमान मूल्य	**1630.95**

6.6.4 सिंकिंग फंड (निक्षेप निधि) विधि [Sinking Fund for debt Amortization]

निक्षेप निधि एक ऐसी वार्षिकी होती है जिसका निवेश भविष्य में की गई वित्तीय प्रतिबद्धताओं को पूरा करने के लिए किया जाता है।

निक्षेप निधि का प्रयोग सामान्यतः निम्न उद्देश्यों के लिए किया जाता है :

क) ऋण चुकाने के लिए

ख) किसी विद्यमान/वर्तमान संपत्ति/परिसंपत्ति के पूर्ण रूप से मूल्यह्रास होने के पश्चात् नई संपत्ति/परिसंपत्ति के लिए पूँजी उपलब्ध करवाने के लिए

उदाहरण के लिए, यदि 25,000 रू. का ऋण तीन वर्ष के लिए 12% चक्रवृद्धि ब्याज पर लिया गया हो, तो तीसरे वर्ष के अंत में बकाया ऋण होगा : $25{,}000(1.12)^3$ रू = 35123.20 रू। यदि धन का निवेश 9.5% की दर पर किया जा सकता है, तो हम वार्षिकी A का मान ज्ञात करना चाहेंगे, जिसके निवेश से 3 वर्ष में 35,123.20 की राशि प्राप्त हो सके। A का मान निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात किया जा सकता है :

35,123. 20	=	A	+	$A(1.095)$	+	$A(1.095)^2$
शेष ऋण		तीसरा भुगतान (जो भुगतान तीसरे वर्ष के अंत में किया गया)		दूसरा भुगतान (जिसका निवेश 1 वर्ष के लिए किया गया)		पहला भुगतान (जिसका निवेश 2 वर्ष के लिए किया गया)

अर्थात् $35123.20 = A(1+1.095+1.095^2)$

$$35123.20 = A(3.2940)$$

इसलिए, $A = \dfrac{35123.20}{3.2940}$

$$= 10662.78$$

अतः, निक्षेप निधि में वार्षिक भुगतान 10,662.78 रू. होना चाहिए। इससे 3 वर्ष पश्चात्

9.5% की दर से 35,133.20 रू. प्राप्त हो जाएंगे।

बोध प्रश्न 3

1) साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में क्या अंतर है? उपयुक्त उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

....

2) संयोजन से आप क्या समझते हैं? वर्तमान मूल्य की संकल्पना बट्टे से किस प्रकार संबंधित है?

....

....

....

....

....

....

....

3) एक डिपार्टमेंटल स्टोर के विज्ञापन के अनुसार एक वस्तु 700 रू. देकर, 500 रू. की तीन समान वार्षिक किश्तों में ली जा सकती है। यदि बट्टा दर 7.5% है, तो उस वस्तु का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

4) एक मशीन, जिसकी कीमत 100000 रू. है, की अपेक्षित आयु 5 वर्ष है तथा 5 वर्ष के पश्चात् उसका अवशिष्ट मूल्य 15000 रू. है। यदि इस मशीन से अपेक्षित लाभ प्राप्ति इस प्रकार है : वर्ष 1 में 20,000 रू., वर्ष 2 में 50,000 रू., वर्ष 3 में 35,000 रू., वर्ष 4 में 35,000 रू. तथा वर्ष 5 में 35,000 रू. यह भी ज्ञात है कि इस प्रकार की परियोजना में कम से कम 18% प्रतिलाभ अपेक्षित है। बताईए कि क्या यह मशीन खरीदी जानी चाहिए ?

....

....

....

....

....

5) वार्षिकियों से आप क्या समझते हैं? ऋण शोधन निधि क्या होती है, व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

6.7 सार-संक्षेप

यह इकाई, जो कि इस पाठ्यक्रम की पाँचवी इकाई है, एक विशिष्ट प्रकार के फलन से संबंधित थी जिसे अनुक्रम कहते हैं, यह श्रेणियों से भी संबंधित थी। एक श्रेणी अनुक्रम पर आधारित गणित की एक महत्वपूर्ण अवधारणा है। हमने देखा कि एक अनुक्रम प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय से, किसी समुच्चय तक एक फलन होता है। इसके पश्चात् इस इकाई में श्रेणियों की चर्चा की गई। एक श्रेणी एक दिए हुए अनुक्रम के पदों को जोड़ने पर प्राप्त होती है। इसके पश्चात् इस इकाई में श्रेढ़ियों की अवधारणा की व्याख्या की गई, जो कि अर्थशास्त्र में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती हैं। इस इकाई दो महत्वपूर्ण श्रेढ़ियों, समांतर श्रेढ़ी तथा गुणोत्तर श्रेढ़ी की चर्चा की गई।

इसके पश्चात् इस इकाई में किसी अनुक्रम के अभिसरण की संकल्पना की चर्चा की गई। हमने देखा कि किन स्थितियों में कोई अनुक्रम अभिसारी कहलाता है तथा कब अपसारी कहलाता है। साथ ही इस इकाई में सीमा की संकल्पना की प्रारंभिक जानकारी दी गई। अगली इकाई में हम सीमाओं के बारे में और अध्ययन करेंगे। इकाई के अंत में, अर्थशास्त्र में अनुक्रमों और श्रेणियों के अनुप्रयोगों की चर्चा की गई।

विशेष तौर पर साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज में, संयोजन तथा बट्टे में, वर्तमान मूल्य ज्ञात करने में तथा निक्षेप निधि जैसी संकल्पनाओं में अनुक्रमों, श्रेणियों तथा श्रेढ़ियों के अनुप्रयोगों की चर्चा की गई।

6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) 57

2) (i) 15; (ii) 1635

3) $a_7 = 246000$; $S_7 = 1386000$

4) $a_{11} = 4096$; $S_{20} = 4194300$

5) सांझा अनुपात $(r) = \frac{7}{49} = \frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{7}}{1} = \frac{1}{7}$; $S_{10} = \frac{343}{6}\left[1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{10}\right]$

बोध प्रश्न 2

1) देखें भाग 6.5

2) देखें भाग 6.5.2

बोध प्रश्न 3

1) देखें भाग 6.6.1

2) देखें भाग 6.6.2

3) संकेत : घातांकी विधि से वृद्धि मान जनसंख्या इस सूत्र का अनुसरण करती है :

$P_n = P_0\,(1 + r)^n$

जहाँ P_n = अवधिअंत पर जनसंख्या, P_0 = अवधिआरंभ पर जनसंख्या, r = वार्षिक वृद्धि दर, n = अवधि वर्षों में

4) तीन किश्तों वाले नकद प्रवाह का वर्तमान मूल्य मान :

$$= 500\left\{1 + \frac{1}{(1+0.075)^1} + \frac{1}{(1+0.075)^2}\right\}$$

$$= 500\,\frac{\left[1-\left(\frac{1}{1.075}\right)^3\right]}{1-\frac{1}{1.075}}$$

= रूपये 1361.67 (लगभग)

सारे नकद प्रवाह का वर्तमान मूल्य मान = रूपये 700 + 1361.67

= रूपये 2061.67 (लगभग)

5)

वर्ष	नकद प्रवाह **(a)**	नकद अपवाह **(b)**	निवल नकद प्रवाह **(a)– (b)**	काटा कारक	वर्तमान मूल्य मान
1	20000	–	20000	0.8474 $(=\frac{1}{(1+0.18)^1})$	16948
2	50000	–	50000	0.7181 $(=\frac{1}{(1+0.18)^2})$	35905
3	35000	–	35000	0.6086	21301
4	35000	–	35000	0.5158	18053
5	35000	–	50000	0.4371	21855
	+ 15000 (कबाड़ी मूल्य)			नकद प्रवाहों का वर्तमान मूल्य मान	114062 रूपये

मशीन खरीदने का निवल वर्तमान मूल्य मान = नकद प्रवाहों का वर्तमान मूल्य मान – प्रारंभिक खरीद लागत

= 114062 – 100000

= 14062

निवल वर्तमान मूल्य मान NPV > 0, अतः मशीन खरीदी जानी चाहिए।

6) देखें उपभाग 6.6.4