खंड 3

अवकलन गणित

खंड 3 परिचय

तीसरे खंड में पहले दो खंडों में चर्चित विषय वस्तुओं का आगे विकास किया गया है। यहां मुख्य अन्तर्धारा आर्थिक परिवर्तन के विश्लेषण से जुड़ी है। अधिक सटीक रूप से यहां यह जानने का प्रयास किया जाएगा कि किसी फलन के स्वतंत्र चर में परिवर्तन के कारण निर्भर (अन्तर्जात) चर पर किस प्रकार प्रभाव पड़ते हैं। गणित की इस प्रशाखा को अवकलन कहा जाता है तथा इस प्रक्रिया का नाम ही अवकलन है। इसी से इस खंड के शीर्षक का नामकरण किया गया है। इस खंड में 4 इकाइयां हैं। पहली इकाई अर्थात् **इकाई 7** का शीर्षक परिसीमांए है– और यह अनुक्रम/श्रृंखला के विचार को ही और आगे बढ़ा रही है। यहां समझाया गया है कि कोई अनुक्रम किसी मान विशेष की ओर अभिसृत कैसे होता है–जिसे हम 'अभिसृति मान' कहते हैं। यहीं पर बायीं और दाहिनी ओर की सीमाओं, तथा सीमाओं के आंकलन पर भी चर्चा की गई है सीमाओं के विचार को समझना इसलिए भी महत्वपूर्ण होता है कि अवकलन की सरलतम व्याख्या तो किसी स्वतंत्र चर x में परिवर्तन के शून्यगामी होने पर उसपर निर्भर चर y के मान की सीमा का आकंलन ही है। यही 'सीमा' उपयोगी होती है।

आठवीं इकाई –'सातत्य' – या अविछिन्नता' है – यहां पर एक चर के फलन के सातत्य पर विचार किया गया है – साथ है। सातत्य पूर्ण और सातत्यहीन फलनों के अनुप्रयोगों का वर्णन भी किया गया हैं इस इकाई में एक अतिमहत्वपूर्ण प्रमेय–'मध्यवर्ती मान प्रमेय' पर भी चर्चा की गई है। यह अवकलन गणित की एक महत्वपूर्ण प्रमेय है। किसी फलन की अवकलनीयता के लिए उसका सातत्य आवश्यक होता है – सातत्वहीन फलन का अवकलन नहीं हो सकता। हां, अर्थशास्त्र मे कुछ फलन सातत्यहीन होते हैं, उन पर भी हम यहीं विचार कर रहे हैं।

खंड की शेष दो इकाइयां, **9** और **10** है **''प्रथम अनुक्रम (कोटि) अवकलन''** और **''उच्चतर अनुक्रम (कोटि) अवकलन''** – यही इस खंड की मुख्य अन्तर्वस्तु है। आपको यह बताया जाएगा कि अवकलन करना क्या है तथा किसी फलन को किस प्रकार अवकलित किया जाता है। साथ ही एक अवकलज का और आगे अवकलन ही इकाई 10 में समझाया गया है – यही उच्चतर कोटि का अवकलन है। इन दो इकाइयों में ही हम अवकलज और अवकल की परिभाषा किसी वक्र की स्पर्श रेखा के रूप में अवकलज की व्याख्या, अवकलनीयता की शर्तें, अवकलन के नियम, ऊतलता, अवतलता तथा अध्यअवतलता टेलर श्रृंखला सूत्र और माध्यमान प्रमेय पर चर्चा करने जा रहे हैं।

इकाई 7 सीमाएं*

संरचना

7.0 उद्देश्य

7.1 विषय-प्रवेश

7.2 किसी अनुक्रम की सीमा [Limits of a Sequence]

7.3 एक फलन की सीमा [Limit of a Function]

7.4 सीमाओं के अभिकलन की बीजगणितीय विधि [Algebraic Approach to Computation of Limits]

7.4.1 सीमा के परिकलन के नियम [Rules for Evaluating a Limit]

7.4.2 कुछ मानक सीमाएं [Some Standard Limits]

7.4.3 परिमित तथा अपरिमित सीमाएं [Finite and Infinite Limits]

7.5 सार-संक्षेप

7.6 बोध-प्रश्नों के उत्तर /संकेत

7.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात्; आप निम्नलिखित से भली-भांति अवगत हो जाएंगे :

- किसी अनुक्रम की सीमा की संकल्पना से;
- किसी फलन की सीमा की परिभाषा से;
- किसी फलन की बाएं-पक्ष तथा दाएं-पक्ष की सीमा के परिकलन की विधियों से; तथा
- सीमा ज्ञात करने की संख्यात्मक, बीजगणितीय तथा आलेखीय विधियों से।

7.1 विषय-प्रवेश

आगे आने वाली इकाइयों में आप देखेंगे कि सीमा, अवकलन गणित के लिए एक आधारभूत संकल्पना है। अवकलन गणित की कई संकल्पनाएं, जैसे कि अवकलन, समाकलन इत्यादि सीमाओं पर आधारित हैं। सीमा की मूलभूत अवधारणा को समझने के लिए औसत गति एंव तात्कालिक गति के परिकलन की विधि पर ध्यान दीजिए। मान लीजिए कि आप एक बिंदु A से बिंदु B की ओर जा रहे हैं। A से B तक अपनी औसत गति ज्ञात करने के लिए, आप मात्र बिंदुओं A और B के बीच की दूरी और इस दूरी को तय करने में लगे समय का अनुपात ज्ञात करते हैं। उदाहरण के लिए, मान लीजिए $s(t)$ एक ऐसा फलन है जो किसी गतिशील वस्तु की समय 't' की स्थिति को व्यक्त करता है। मान लीजिए समय t_0 पर, वह वस्तु बिंदु A पर A [$= s(t_0)$] है तथा समय t_1 पर (जहाँ $t_1 > t_0$ है), वह बिंदु B [$= s(t_1)$] पर है। इस प्रकार बिंदु A से बिंदु B तक पहँचने मे लगने वाला समय Δt ($= t_1 - t_0$), से व्यक्त किया जा सकता है जहाँ Δ का प्रयोग 'में होने वाला अंतर' को व्यक्त करने के लिए किया गया है। इन बिंदुओं के बीच की दूरी $s(t_1) - s(t_0)$ से प्राप्त की जा सकती है। अतः, समय अवधि $[t_0, t_1]$ में औसत गति होगी :

*श्री अनूप चटर्जी

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{\Delta t} \qquad \ldots(1)$$

इसे अवधि $[t_0, t_1]$ में फलन $s(t)$ की स्थिति में हुए परिवर्तन की औसत दर के रूप मे भी समझा जा सकता है।

किसी गतिशील वस्तु की तात्कालिक गति किसी क्षण विशिष्ट में वस्तु की गति होती है। जैसे-जैसे हम समय अंतराल, Δt $(= t_1 - t_0)$ को कम और कमतर करते जाते है, वैसे–वैसे ही हम उस वस्तु की समय (क्षण) t पर गति के समीप और समीपतर आते जाते हैं, अर्थात् हमें गतिशील वस्तु की तात्कालिक गति प्राप्त होती है। यह सीधे-सीधे सीमा की संकल्पना का एक अनुप्रयोग है। ऊपर (1) में दिए फलन में, तात्कालिक गति का अर्थ होगा, फलन (1) का मान, जब Δt, 0 के समीप और समीपतर होता जाए (Δt, 0 की ओर अग्रसर होता है)(Δt को 0 के निकट के मान दिए जाते हैं) अर्थात्, समय t पर तात्कालिक गति निम्नलिखित सीमा

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{\Delta t}$$

से प्राप्त होती है, यदि यह सीमा परिभाषित हो अर्थात् सीमा का अस्तित्व हो। हम इस स्थिति को पुनः निरूपित करते हैं। मान लीजिए बिंदुओं A और B के मध्य में एक बिंदु C भी है जिस पर से होकर के आपको जाना है। बिंदु C पर तात्कालिक गति ज्ञात करने के लिए, हम C से C के निकट बिंदुओं तक जाने की औसत गति परिकलित कर सकते है। इस स्थिति में इन बिंदुओं और C के बीच की दूरी बहुत कम होगी। साथ ही C से इन बिंदुओं तक पहुँचने का समय भी बहुत कम होगा। अब यदि आप इस अनुपात का मान ज्ञात करेंगे, तो यही C पर तात्कालिक गति होगी। आपके शहर में पुलिसकर्मियों के पास उपलब्ध ट्रैफिक राडार में इसी विधि द्वारा किसी वाहन की गति निर्धारित करते है।

सीमा की संकल्पना में किसी बिंदु या मान तक बिना पहुँचे , यादृच्छिक रूप से उसके समीप जाना सन्निहित होता है। सहज बोध से, यह संभव है कि यह संकल्पना बहुत महत्त्वपूर्ण प्रतीत न हो। परंतु अवकलन गणित के अध्ययन के लिए इस संकल्पना का ज्ञान अत्यंत आवश्यक है। हम पहले एक अनुक्रम की सीमा की संकल्पना की चर्चा करेंगे तथा उसके पश्चात् एक/किसी फलन की सीमा की। हम उन आधारभूत संकल्पनाओं की भी चर्चा इस इकाई में करेंगे जो किसी फलन की सीमा को समझने के लिए आवश्यक है।

7.2 किसी अनुक्रम की सीमा [Limits of a Sequence]

सीमा का विचार किसी ऐसे गतिमान बिंदु के व्यवहार से उत्पन्न होता है जो किसी नियत बिंदु की ओर अग्रसर हो रहा है अर्थात् उस के समीप और समीपतर जा रहा हो। मोटे तौर पर, जब कोई गतिमान बिंदु किसी नियत बिंदु की ओर अग्रसर होता है और उनके बीच की दूरी निरंतर/उत्तरोत्तर रूप से कम होती जाती है परंतु कभी समाप्त नहीं होती, तो हम कहते हैं कि वह बिंदु एक सीमा की ओर प्रवृत है (अग्रसर है)। आईए हम इस संकल्पना को एक अनुक्रम की सीमा के माध्यम से समझने का प्रयास करें। नीचे दिए संख्याओं के दो अनुक्रमों पर विचार कीजिए:

(i) $S_1 = \{1,2,3,4,5\ldots.\}$ (ii) $S_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots\}$

पहले अनुक्रम में, पहली संख्या से प्रारंभ करते हुए, आगे आने वाली प्रत्येक संख्या, पिछली संख्या में 1 जोड़ कर प्राप्त की गई है। इस प्रकार, इस अनुक्रम में उपस्थित संख्याएं लगातार बढ़ती चली जाती हैं। इनमें किसी नियत मान के समीप आने की प्रवृत्ति दृष्टिगोचर नहीं होती।

दूसरे अनुक्रम में, पहली संख्य से प्रारंभ करते हुए, आगे आने वाली प्रत्येक संख्या अंश और हर, दोनों में 1 जोड़ कर ज्ञात की गई है। इस अनुक्रम में भी यद्यपि संख्याएं बढ़ती हुई प्रतीत हो रही हैं, परंतु यह स्थिति पिछले अनुक्रम की स्थिति से भिन्न है। इस अनुक्रम की संख्याएं क्रमशः/धीरे-धीरे एक नियत संख्या 1 के समीप आ रही हैं। इसे और अधिक स्पष्ट रूप में समझने के लिए, आइए हम इस अनुक्रम की संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त करें। इससे इस अनुक्रम का यह रूप हो जाता है :

$S_2 = \{0.888,\ 0.9000,\ 0.909,\ 0.916, 0.923, 0.928, 0.933, 0.937, \ldots$

यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है की इसमें आने वाली प्रत्येक क्रमिक/उत्तरवर्ती संख्या, पीछे वाली संख्या की तुलना में, 1 के अधिक समीप है। पहली संख्या और 1 के मध्य का अंतर 0.5 है जबकि 999वें स्थान पर आने वाली संख्या $\frac{999}{1000}$ को देखें तो इसका 1 से अंतर मात्र 0.001 रह जाता है। इससे हम देख सकते हैं कि जैसे-जैसे हम इस अनुक्रम में अंतहीन रूप से आगे बढ़ते हैं तो आने वाली संख्याएं, उत्तरोत्तर रूप से 1 के उतना समीप आती जाएंगी, जितना हम चाहें। अर्थात् इस अनुक्रम की संख्याएं, (बिना मान 1 धारण किए भी), निरंतर रूप से 1 के समीप और समीपतर आती हुई दिखाई दे रही है। इस स्थिति में हम कहते हैं कि अनुक्रम 1 की ओर अग्रसर या प्रवृत है तथा संख्या 1 को इस अनुक्रम की सीमा कहते हैं। इस उदाहरण में अनुक्रम 1 की ओर नीचे से आता है अर्थात् 1 से कम संख्याओं की ओर से। हालाँकि कोई अनुक्रम, अपनी सीमा की ओर अन्य प्रकार से भी आ सकता है। उदाहरण के तौर पर, कोई अनुक्रम अपनी सीमा की ओर ऊपर की ओर से भी आ सकता है अर्थात् सीमा से बड़ी संख्याओं के माध्यम से। या सीमा के दोनों ओर प्रदोलित होते हुए भी सीमा पर अभिसरित (converge) हो सकता है। ध्यान देने योग्य महत्वपूर्ण बिंदु यह है कि अनुक्रम की प्रवृति एक नियत परिमित मान की ओर अग्रसर होने की होनी चाहिए।

व्यापक रूप में एक अनुक्रम

i) अनंत रूप से, समान अथवा बढ़ती हुई दर से

$$S = \{0, -1, -3, -8, -15 \ldots\}$$

या $S = \{1, 5, 10, 17, 26, \ldots\}$

ii) घटती हुई दर से बढ़ता हुआ (वर्धमान) या घटता हुआ (ह्रासमान) हो सकता है जैसे कि

$$S = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5} \ldots\}$$

या $S = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5} \ldots\}$

iii) बढ़ते हुए अंतर से प्रदोलित होता हुआ हो सकता है , जैसे कि

$$S = \{-1, 5, -7, 17, -31 \ldots\}$$

iv) कम होते हुए अंतर से प्रदोलित होता हुआ हो सकता है जैसे कि

$S = \{-1, 1, -1, 1, -1 ...\}$

v) बिना अंतर बढ़ाए या कम किए प्रदोलिता होते हुआ, जैसे कि

$S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16} ...\}$

ऊपर दिए हुए गुणों के आधार पर अनुक्रमों को निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है :

i) अनंत की ओर (∞ या $-\infty$ की ओर) जाता हुआ

ii) किसी सीमित संख्या की ओर जाता हुआ, जो कि धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकती है

iii) कहीं न जाता हुआ (किसी मान की ओर न जाता हुआ)

ऊपर की गई टिप्पणियाँ हमें किसी अनुक्रम की सीमा की व्याख्या करने में सहायता करेंगी।

मान लीजिए $\{x_n\}_{n\geq 1}$ संख्याओं का एक अनुक्रम है। यदि ये संख्याएं किसी संख्या L के समीप और समीपतर होती जाएं (अर्थात् $x_n \approx L$ हो) तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{x_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम है तथा इसकी सीमा L है।

इसे हम इस प्रकार व्यक्त कर सकते है :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

या, $$\underset{n\to\infty}{Lt}\, x_n = L$$

या, $$x_n \to L \text{ when } n \to \infty.$$

जब हम $n \to \infty$ लिखतें है तो इससे हमारा आशय होता है कि n निरंतर बड़ा होता जा रहा है। यदि कोई अनुक्रम अभिसारी न हो तो उसे अपसारी अनुक्रम कहते हैं।

अब हम किसी अनुक्रम की सीमा की औपचारिक परिभाषा देते हैं। हमने ऊपर देखा कि कोई अनुक्रम $\{x_n\}_{n\geq 1}$ अभिसारी होता है यदि एक ऐसी संख्या L प्राप्त हो सके कि जैसे–जैसे n का मान बढ़ाया जाए संख्याएं x_n, L के समीप और समीपतर होती जाएं। अर्थात्

i) हम चाहते हैं कि $x_n \approx L$ हो

ii) हम यह सुनिश्चित करना चाहते हैं कि $|x_n - L| < \varepsilon$ हो, जहाँ ε, 0 से बड़ी कोई बहुत ही छोटी संख्या है।

iii) कथन (ii) तब सही होगा जब हम एक ऐसा पूर्णांक $N \geq 1$ प्राप्त हो सके कि प्रत्येक $n \geq N$ के लिए $|x_n - L| < \varepsilon$ हो।

ध्यान दें कि ε ग्रीक वर्णमाला का एक अक्षर है जिसे 'एपसाइलन' कहते हैं। यह एक यादृच्छिक छोटी धनात्मक राशि को निरूपित करता है। यह x_n और L की बीच के

अंतर पर प्रतिबंध लगाता है। दूसरी ओर पूर्णांक N हमें यह बताता है कि अनुक्रम कितनी तेज़ी से सीमा की ओर अग्रसर होता है।

अतः, हम कह सकते हैं कि अनुक्रम $\{x_n\}_{n\geq 1}$ संख्या L की ओर अभिसरित होता है, यदि और केवल यदि, प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए, एक संख्या $N \geq 1$ प्राप्त हो जाएं कि प्रत्येक $n \geq N$ के लिए, $|x_n - L| < \varepsilon$ हो।

7.3 एक फलन की सीमा [Limit of a Function]

अब हम अनुक्रम की सीमा की संकल्पना का विस्तार किसी फलन की सीमा ज्ञात करने के लिए कर सकते है। आईए हम एक स्वतंत्र चर वाले फलन $y = f(x)$ पर विचार करें। हमारी रूचि यह जानने में है कि यदि, $x \to a$ अर्थात् किसी संख्या 'a' की ओर जाता है (बिना इस मान तक पहुँचे हुए) तो क्या y किसी परिमित मान 'b' की ओर जाता है अर्थात् क्या $y \to b$ होता है? यदि ऐसा होता है तो हम कहते हैं कि जब x, a की ओर जाता है तो y की सीमा b होगी। ध्यान दें कि इस परिभाषा में a का एक परिमित संख्या होना आवश्यक नहीं है)

इसे हम सांकेतिक रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

अतः, सीमा L वह मान होता है जिसकी ओर फलन $f(x)$ प्रवृत होता है (अर्थात् $f(x) \to L$) जबकि x, a की ओर जा रहा हो। इसे सांकेतिक रूप में $\lim_{x\to a} f(x) = L$ से व्यक्त किया जा सकता है।

बाएं एवं दाएं पक्ष की सीमाएं

x किसी संख्या की ओर 2 प्रकार से जा सकता है :

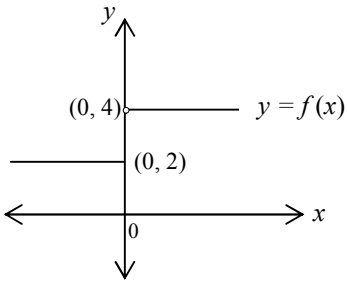
a से छोटे मानों की ओर से अर्थात् a के बाई ओर से या a से बड़े मानों की ओर से अर्थात् a के दाई ओर से।

जब x दाएं पक्ष की ओर से a के समीप/निकट आता है और y एक परिमित मान, [मान लीजिए L] की ओर आता है तो हम L_1 को $f(x)$ की दाएं पक्ष की सीमा कहते है और इसे $\lim_{x\to a^+} f(x)$ से व्यक्त करते हैं।

इसी प्रकार जब x बाएं पक्ष की ओर से एक परिमित संख्या L_2 के समीप/निकट आता है तो हम L_2 को $f(x)$ की बाएं पक्ष की सीमा कहते हैं और इसे $\lim_{x\to a^-} f(x)$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

उदाहरण के लिए, रेखाचित्र 7.1 में दिए एक फलन $f(x)$ के आलेख पर विचार कीजिए जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 4, & x > 0 \end{cases} \quad \text{है}$$



रेखाचित्र 7.1

यहाँ यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है कि जब x बाई ओर से 0 के निकट आता है तो $y \to 2$ हो जाता है। अतः, y के बाएं पक्ष की सीमा 2 है

अर्थात् $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ दूसरी ओर, यदि x दाई ओर से 0 की ओर जाता है तो $y \to 4$ हो जाता है अतः, हम पाते हैं कि y की दाएं पक्ष की सीमा 4 है अर्थात् $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$ है।

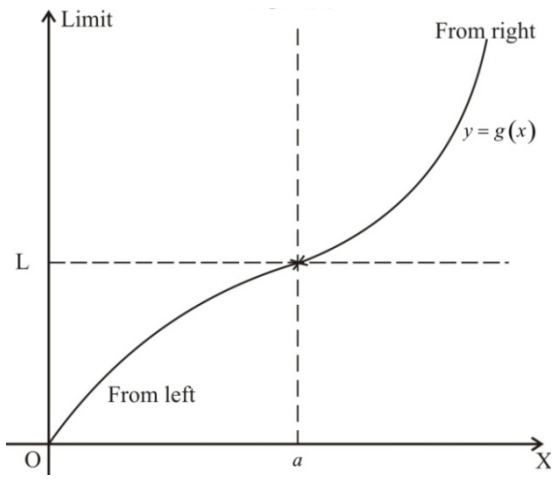
हमने अभी देखा कि यदि y की एक सीमा है जबकि x, a की ओर जाता है तो यह सीमा प्राप्त की जा सकती है जब x, a की ओर या तो बाएं पक्ष की ओर से जाएं या दाएं पक्ष की ओर से। अब एक महत्वपूर्ण प्रश्न उठता है। क्या किसी दिए हुए फलन की सीमा है अथवा नहीं। इस प्रश्न का उत्तर इस प्रकार है:

1) एक दिए हुए फलन की सीमा होती है यदि और केवल यदि दोनों सीमाएं (दाएं पक्ष की तथा बाएं पक्ष की) एक समान हो और उनका मान एक परिमित संख्या हो अर्थात् दोनों सीमाओं का अस्तित्व हो और वे एक दूसरे के समान हों।

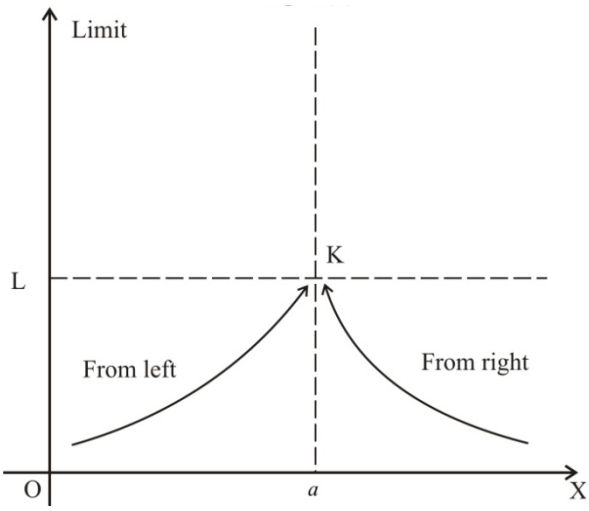
2) जब प्रत्येक सीमा (दाएं पक्ष की सीमा तथा बाएं पक्ष की सीमा) या तो $[+\infty]$ हो या $[-\infty]$ इस स्थिति में हम कहते हैं कि फलन की सीमा अनंत होती है।

टिप्पणी : हम सामान्यतः केवल परिमित सीमा पर ही विचार करते हैं। यदि सीमा $-\infty$ या ∞ के ओर अग्रसर हो हम केवल एक पक्ष पर ही विचार करते हैं, इससे समय की बचत होती है। अतः, किसी फलन $y=f(x)$ की सीमा का अस्तित्व, जब x, a की ओर जाता है तभी होता है यदि $\lim_{x\to a^+} y = \lim_{x\to a^-} y = L$ (जहाँ L कोई परिमित संख्या है)

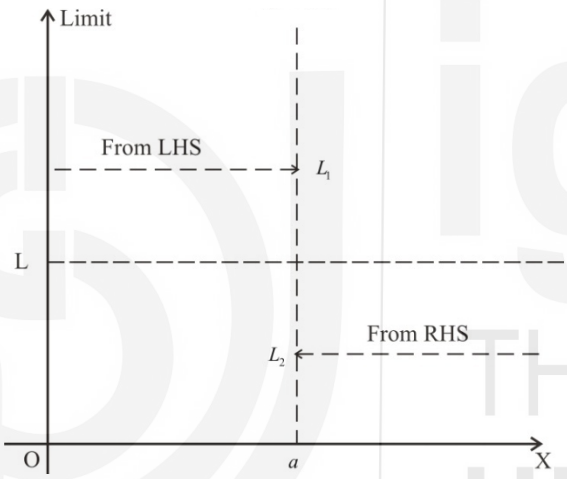
आईए नीचे दिए रेखाचित्रों 7.2, a, b, c, d में x के a के समीप जाने की विभिन्न परिस्थितियों पर विचार करें।



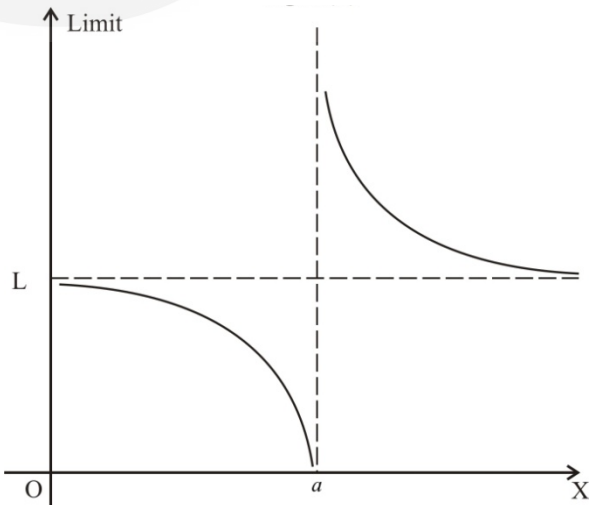
रेखाचित्र 7.2 (a)



रेखाचित्र 7.2 (*b*)



रेखाचित्र 7.2 (*c*)



रेखाचित्र 7.2 (*d*)

इस रेखाचित्र के भाग (*a*) में फलन $y=f(x)$ को निरूपित करने वाला एक निष्कोण वक्र दर्शाया गया है। जैसे-जैसे चर x क्षैतिज अक्ष पर किसी भी ओर से मान a के समीप आता है, तो चर y ऊर्ध्वाधर अक्ष पर L के समीप आता है। अतः, इस फलन की बाएं पक्ष की तथा दाएं पक्ष की, दोनों सीमाएं अस्तित्व रखती हैं तथा एक दूसरे के बराबर है। अतः इस स्थिति में, जब x, a की ओर जाता है तो y की सीमा अस्तित्व रखती है तथा इसका मान L है।

भाग (*b*) में दर्शाया गया वक्र निष्कोण नहीं है। इसमें x-अक्ष पर स्थित बिंदु a के ठीक ऊपर बिंदु x पर वक्र नुकीला है। परंतु फिर भी इस स्थिति में भी x के a के समीप आने पर y का मान L के समीप जाता है। अतः, जब x, a के समीप आता है तो y की सीमा का अस्तित्व होता है तथा उसका मान L के बराबर है।

भाग (c) में एक सोपान फलन दर्शाया गया है। यहाँ हम देख सकते हैं कि यदि x बाई ओर से a के समीप आता है तो y, L_1 के समीप आता अर्थात् y की (बाएं पक्ष की) सीमा L_1 है और यदि x दाई ओर से a के समीप आता है तो y, L_2 के समीप आता है अर्थात् y की (दाएं पक्ष की) सीमा L_2 है। इस स्थिति में यद्यपि y की (जब $x \to a$ है) दाएं और बाएं पक्ष की दोनों सीमाओं का अस्तित्व है परंतु वे समान नहीं हैं। अतः, परिभाषा के अनुसार जब $x \to a$ है तो y की सीमा का अस्तित्व नहीं है। अंत में, भाग (*d*) में एक समकोणीय अतिपरवलय दर्शाया गया है यहाँ जैसे–जैसे x बाई ओर से a के समीप आता है, तो y, $-\infty$ की ओर जाता है। दूसरी ओर यदि x दाई ओर से a के समीप आता है, तो y, $+\infty$ की ओर जाता है।

इस स्थिति में बाएं पक्ष की तथा दाएं पक्ष की सीमाओं से कोई भी सीमा अस्तित्व नहीं रखती। अतः, जब x, a के समीप आता है तो y की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

7.4 सीमाओं के परिकलन की बीजगणितीय विधि [Algebraic Approach to Computation of Limits]

हमने सीमा की संकल्पना का अध्ययन किया है। अब हम कुछ नियमों का प्रयोग करके किसी फलन की सीमा के परिकलन की वास्तविक प्रक्रिया के बारे में जानेंगे।

7.4.1 सीमा के परिकलन के नियम [Rules for Evaluating a Limit]

सीमाएं बीजगणित के सामान्य नियम जैसे योग, व्यवकलन, गुणा तथा भाग इत्यादि का पालन करती हैं। आईए, दो फलनों $y=f(x)$ और $y=g(x)$ के लिए नीचे दिए नियमों पर विचार करें जबकि हमें ज्ञात है कि $\underset{x\to a}{Lt}\, f(x) \to L_1$ और $\underset{x\to a}{Lt}\, g(x) \to L_2$ है।

1) एक अचर फलन $f(x)=c$ की सीमा अचर होती है

$$\underset{x\to a}{Lt}\, c = c$$

2) दो फलनों के योग/अंतर की सीमा, उनकी सीमाओं के योग/अंतर के बराबर होती है।

$$\underset{x\to a}{Lt}\left\{f(x) \pm g(x)\right\} = \underset{x\to a}{Lt}\, f(x) \pm \underset{x\to a}{Lt}\, g(x) = L_1 \pm L_2$$

अतः, एक अचर तथा एक फलन के योग की सीमा उनकी सीमाओं के योग के बराबर होती है

$$\underset{x\to a}{Lt}\{c+f(x)\}=\underset{x\to a}{Lt}\,c+\underset{x\to a}{Lt}\,f(x)=c+L_1$$

3) दो फलनों के गुणनफल की सीमा, उनकी सीमाओं के गुणनफल के बराबर होती है।

$$\underset{x\to a}{Lt}\{f(x)\cdot g(x)\}=\underset{x\to a}{Lt}\,f(x)\times\underset{x\to a}{Lt}\,g(x)=L_1\times L_2$$

4) दो फलनों के भागफल की सीमा, उनकी सीमाओं के भागफल के बराबर होती है, यदि हर में उपस्थित फलन की सीमा शून्य न हो।

$$\underset{x\to a}{Lt}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\underset{x\to a}{Lt}\,f(x)}{\underset{x\to a}{Lt}\,g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$ यदि $L_2\neq 0$ हो।

5) किसी फलन के विलोम की सीमा, फलन की सीमा के विलोम के बराबर होती है, यदि फलन की सीमा शून्य न हो।

$$\underset{x\to a}{Lt}\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}=\frac{1}{\underset{x\to a}{Lt}\,g(x)}=\frac{1}{L_1}$$ यदि $L_1\neq 0$ हो।

6) किसी फलन के वर्गमूल को n से गुणा करने पर प्राप्त होने वाले फलन की सीमा, फलन की सीमा के वर्गमूल को n से गुणा कर के प्राप्त की जा सकती है, यदि फलन की सीमा शून्य या शून्य से अधिक हो।

$$\underset{x\to a}{Lt}\,n\sqrt{f(x)}=n\cdot\underset{x\to a}{Lt}\sqrt{f(x)}=n\sqrt{L_1}$$ यदि $L\geq 0$ हो।

7.4.2 कुछ मानक सीमाएं [Some Standard Limits]

नीचे कुछ महत्वपूर्ण सीमाएं दी जा रही हैं जो आपको इस पाठ्यक्रम के अध्ययन में सहायता करेंगी, अतः इन्हें ठीक प्रकार से सीख लें। इनकी उपपत्ति इस पाठ्यक्रम के विषय–क्षेत्र से बाहर है।

1) $$\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^n-a^n}{x-a}\right]=na^{n-1},a>0$$

2) $$\underset{x\to\infty}{Lt}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x=e=2.71828$$

3) $$\underset{x\to 0}{Lt}\left[1+x\right]^{1/x}=e=2.71828$$

4) $$Lt_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a,\ a>0$$

5) $$Lt_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\log_e e=1$$

[**टिप्पणीः** $\log_e a$ को l_{na} भी लिखा जाता है]

7.4.3 परिमित तथा अपरिमित सीमाएं [Finite and Infinite Limits]

ऐसी सीमाएं जिनका मान एक परिमित संख्या हो, परिमित सीमाएं कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, $\underset{x\to 2}{Lt}(5x+7)=17$ जहाँ 17 एक सीमित संख्या है। इसी प्रकार, ऐसी सीमाएं जिनका मान एक परिमित संख्या न होकर, $+\infty$ या $-\infty$ हो, अनंत सीमाएं कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, $\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{5}{x^2}\right)=\frac{5}{(0)^2}=\frac{5}{0}=\infty$

उदाहरण 1 : यदि $y=x^2+1$ है, तो $\lim_{x\to 0} y$ ज्ञात कीजिए।

हल : बाएं पक्ष की सीमा ज्ञात करने के लिए, आईए हम एक–एक करके दिए हुए फलन में x के स्थान पर ऋणात्मक संख्याएं $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\ldots$ रखें। हम पाते है कि x^2 (जो कि एक धनात्मक संख्या है) का मान कम और कमतर होता जाता है और 0 की ओर जाता है। परिणामस्वरूप, x^2+1 का मान निरंतर कम होता है और 1 की ओर जाता है। अतः, फलन $y=x^2+1$ की बाएं पक्ष की सीमा 1 है। इसी प्रकार x के स्थान पर धनात्मक संख्याएं $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\ldots$ रखने पर हम पाते है कि x^2, 0 की ओर जाता है। परिणामस्वरूप x^2+1 का मान निरंतर कम होते हुए, संख्या 1 की ओर जाता है। अतः, फलन $y=x^2+1$ की दाएं पक्ष की सीमा भी 1 है। इस प्रकार हम पाते हैं कि $y=x^2+1$की दोनों पक्षों की सीमाएं समान हैं। अतः, इस फलन की सीमा अस्तित्व रखती है और 1 के बराबर है। हम इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं : $\underset{x\to 0}{Lim}\ y=1$

उदाहरण 2 : $\underset{x\to 3}{Lim}\ \frac{x^3-2x^2+2x-6}{5x^2-13x+3}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम इस सीमा को ज्ञात करने के लिए सीमाओं से संबंधित विभिन्न नियमों का उपयोग करेंगे।

$$\underset{x\to 3}{Lim}\ \frac{x^3-2x^2+2x-6}{5x^2-13x+3}$$

$$=\frac{\underset{x\to 3}{Lim}\left(x^3-2x^2+2x-6\right)}{\underset{x\to 3}{Lim}\left(5x^2-13x+3\right)}$$

$$=\frac{\underset{x\to 3}{Lim}\ \left(x^3\right)-\underset{x\to 3}{Lim}\ \left(2x^2\right)+\underset{x\to 3}{Lim}\ (2x)-\underset{x\to 3}{Lim}\ (6)}{\underset{x\to 3}{Lim}\ \left(5x^2\right)-\underset{x\to 3}{Lim}\ (13x)+\underset{x\to 3}{Lim}\ (3)}$$

$$=\frac{\underset{x\to 3}{Lim}\ x^3-2\ \underset{x\to 3}{Lim}\ x^2+2\ \underset{x\to 3}{Lim}\ x-\underset{x\to 3}{Lim}\ 6}{5\ \underset{x\to 3}{Lim}\ x^2-13\ \underset{x\to 3}{Lim}\ x+\underset{x\to 3}{Lim}\ 3}$$

$$=\frac{27-2(9)+2(3)-6}{5(9)-13(3)+3}$$

$$=1$$

उदाहरण 3 : एक व्यक्ति ने 1000 रू. का निवेश 5 प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर से 2 वर्ष के लिए किया। यदि ब्याज सतत रूप से लगाया जा रहा हो, तो ज्ञात कीजिए कि उस व्यक्ति को दो वर्ष पश्चात् कितनी राशि प्राप्त होगी? इस निवेश की प्रभावी ब्याज दर क्या होगी?

हल : इस प्रश्न को हल करने के लिए, हम पहले चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के सूत्र के बारे में चर्चा करते हैं। हम जानते हैं कि यदि राशि P का निवेश 1 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर $100r\%$ की वार्षिक दर से किया गया है, तो 1 वर्ष के पश्चात् प्राप्त होने वाली कुल राशि A होगी $A = P(1+r)$ यदि ब्याज की यही दर वर्ष में m बार व्यवकलित/संयोजित की जाती है, तो 1वर्ष पश्चात् प्राप्त होने वाली राशि होगी, $A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$ यहाँ व्यंजक $\frac{r}{m}$ यह दर्शाता है कि यदि ब्याज की वार्षिक दर $100r\%$ है तो प्रत्येक संयोजन अवधि में ब्याज की दर $\frac{100r}{m}\%$ लागू होगी। सूत्र में उपस्थित घातांक m यह दर्शाता है कि ब्याज एक वर्ष में m बार संयोजित होता है। अब, इसी वार्षिक संयोजन बारंबारता m के लिए, t वर्ष के पश्चात् प्राप्त होने वाली राशि A होगी, $A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$ जहाँ घातांक mt, t वर्षों में होने वाले संयोजनों की संख्या को व्यक्त करता है। हम इसे, इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते है :

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = P\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

जहाँ $n = \frac{m}{r}$ है। यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है कि जब $m \to \infty$ हो तो n भी ∞ की ओर जाएगा।

दिए हुए प्रश्न में ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है। परिणामस्वरूप, समांजन बारंबरता

अनन्त की ओर जाती है। अतः, अपेक्षित राशि $m \to \infty$ के लिए, $P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$ की सीमा होगी।

यह सीमा है

$$A = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = \lim_{m\to\infty} P\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt} = \lim_{n\to\infty} P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

जब $n \to \infty$ तो $P[(1+\frac{1}{n})^n]^{rt}$ की सीमा $n \to \infty$ के लिए $(1+\frac{1}{n})^n$ की सीमा पर निर्भर करती है।

अर्थात्

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt} = P\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

हम जानते हैं कि $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ होती है। अतः

$A = P\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt} = Pe^{rt}$ होगा।

हमें दिया है कि P = 1000रू, r = ब्याज की दर प्रतिशत / 100

$$= \frac{5}{100} = 0.05$$

तथा $t =$ 2 वर्ष है। इसलिए,

$A = 1000\,(e^{0.05(2)}) = 1000\,(2.71828)^{0.1}$ होगा।

[क्योंकि $e = 2.71828\ldots$ होता है]

दोनों पक्षों का लघुगणक (log) लेने पर हम पाते है कि

$\log A = \log 1000 + 0.1\times \log 2.71828$

$= 3 + 0.1\times 0.4343$

$= 3.04343$

दोनों पक्षों का प्रतिलघुगणक लेने पर हम पाते हैं कि

A = antilog 3.04343

= 1105 (लगभग)

अतः, अपेक्षित राशि 1105रू के बराबर होगी।

किसी निवेश पर प्रस्तावित / उद्धृत वार्षिक ब्याज दर को सांकेतिक दर (*nominal rate*) कहते हैं। वार्षिक ब्याज दर को सांकेतिक दर कहते हैं। वार्षिक ब्याज दर, जिस पर कोई दी हुई धन राशि वास्तविक रूप से बढ़ती है, इस पर निर्भर होती है कि ब्याज वर्ष भर में कितनी बार संयोजित किया जाता है। इस दर को ब्याज की प्रभावी या वास्तविक दर कहते हैं। अतः, ब्याज की प्रभावी / वास्तविक दर किसी सांकेतिक / प्रस्तावित ब्याज दर को वर्ष में दी हुई संख्या के बराबर, मान लीजिए m बार, संयोजित करने पर प्राप्त समतुल्य वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज के बराबर होती है। संतत चक्रवृद्धि ब्याज अब, यदि राशि P का t वर्ष तक 100 $r\%$ की दर से निवेश करने पर, राशि A प्राप्त होती है, तो हम पाते हैं कि यह होगी

$$A = Pe^{rt} \tag{1}$$

यदि प्रभावी / वास्तविक ब्याज दर 100 $i\%$ है, तो हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं

$$A = P(1+i)^t \tag{2}$$

समीकरणों (1) और (2) से हम पाते हैं कि

$$(1+i)^t = e^{rt}$$

या $$1+i = e^r \tag{3}$$

समीकरण (2) को हल करके हम प्रभावी ब्याज दर 100 $i\%$ ज्ञात कर सकते है।

हमें $r = 0.05$ दिया है इस मान को (3) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$1 + i = e^{0.05}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक / log लेने पर

$$\log(1+i) = 0.05 \times \log 2.71828$$

$$= 0.021715$$

दोनों पक्षों का antilog / प्रतिलघुगणक लेने पर

$$1 + i = \text{antilog}(0.021715)$$

or $1 + i = 1.052$

or $i = 0.052$

अतः ब्याज प्रभावी दर 5.2% है।

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए :

a) $\underset{x \to -2}{Lt} \left(x^2 + 5x\right)$

b) $\underset{x \to 0}{Lt} \left[\dfrac{3x+1}{5x-1}\right]$

c) $\underset{x \to 4}{Lt} \left[\dfrac{2x^{3/2} - \sqrt{x}}{x^2 - 15}\right]$

d) $\underset{x \to a}{Lt}\ Ax^n$

e) $\underset{x \to 1}{Lim} \dfrac{4x^2 - 3}{2x^2 + 1}$

f) $lim_{x \to -1} \frac{x^2+x-6}{x+2}$

.....

.....

.....

.....

.....

2) एक फर्म के उत्पादन की कुल लागत फलन $C = 4q + 2$ से व्यक्त की जा सकती है। क्या इस फर्म की औसत लागत किसी परिमित मान की ओर जाएगी यदि उत्पाद ∞ की ओर जाए? यदि हाँ, तो वह मान ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) एक व्यापारी ने किसी साहूकार से कुछ धनराशि उधार ली। उसने साहूकार को 4 वर्ष पश्चात् 5000रू लौटाने का वादा किया है। यदि ब्याज 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से सतत रूप से संयोजित होता है तो ज्ञात कीजिए कि व्यापारी ने कितनी धनराशि उधार ली? यह भी ज्ञात कीजिए कि व्यापारी द्वारा दिए गए ब्याज की प्रभावी दर क्या होगी?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ऊपर की गई चर्चा में हमने L (फलन की सीमा) को एक परिमित संख्या माना है। परंतु यह अनंत भी हो सकती है।

यदि किसी स्थिति में किसी फलन $f(x)$ के लिए $\lim_{x \to N} f(x) = \infty$ या $-\infty$ हो, तो इस फलन के लिए सीमा के वास्तविक अर्थ में फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं होता। जैसा कि आप देख सकते हैं कि $f(x) \to \infty$ का अर्थ है कि फलन का मान निरंतर बढ़ता जाएगा, अतः इसकी सीमा नहीं होगी। साथ ही, यदि x का मान अनंत (∞ या $-\infty$) की ओर जाए, तो ऊपर दी गई बाएं पक्ष तथा दाएं पक्ष की सीमाएं भी अर्थहीन हो जाती हैं और हम केवल एक ही पक्ष की सीमा ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए यदि हम फलन $f(x)$ की सीमा ज्ञात करना चाहते हो जब $x \to -\infty$ की ओर जाए, तो $f(x)$ की केवल दाएं पक्ष की सीमा ही प्रासंगिक होगी। इसी प्रकार यदि हम फलन $f(x)$ की सीमा $x \to +\infty$ के लिए ज्ञात करना चाहते हैं तो केवल बाएं पक्ष की सीमा ही प्रासंगिक होगी। इससे पहले की हम फलनों की सीमा ज्ञात करने के कुछ उदाहरण लें, इस ओर ध्यान देना उपयोगी होगा कि जब हम किसी सीमा का अनुमान लगाते हैं जबकि $x \to N$ हो अर्थात् x, N की ओर जाता हो, तो हमारी रूचि उन मानों में होती है जो N के निकट हों, $x = N$ पर नहीं। यदि हम फलन $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ पर विचार करें तो हम पाएंगे कि इस फलन का मान $x = 1$ पर ज्ञात नहीं किया जा सकता क्योंकि, $x = 1$ पर इसका हर 0 हो जाता है। परंतु इस फलन का मान $x = 1$ के अतिरिक्त प्रत्येक बिन्दु के लिए ज्ञात किया जा सकता है। इसलिए इस फलन के लिए हमारे समक्ष प्रश्न यह है कि यदि $x \to 1$ हो, इस फलन की सीमा क्या होगी? ध्यान दें कि $x \to 1$ का अर्थ होता है कि x,1 की ओर जा रहा है, $x = 1$ नहीं। हम इस फलन की

सीमा आगे आने वाले उदाहरणों में ज्ञात करेंगे। पाठक ध्यान दें कि जिस संख्या पर हम फलन की सीमा ज्ञात करना चाहते हैं, उस संख्या को फलन में प्रतिस्थापित कर देना ही सीमा ज्ञात करने की उचित विधि नहीं है। हमें फलनों की सीमा ज्ञात करते हुए इसका ध्यान रखना चाहिए।

आईए अब हम सीमाओं के संदर्भ में कुछ विशिष्ट स्थितियों पर एक नज़र डालें जिनमें सीमा या तो 0 है या/अथवा अनिर्धार्य है तथा व्यापक रूप में कोई निष्कर्ष निकालना संभव नहीं है।

1) जब $Lt\, f(x) = A, Lt\, g(x) = \infty$ हो, तो $Lt\, f(x) + Lt\, g(x) = A + \infty = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

2) जब $Lt\, f(x) = A, Lt\, g(x) = +\infty$ हो, तो $Lt\, f(x) - Lt\, g(x) = A - \infty = -\infty$ होगी। (अनंत सीमा, $-\infty$)

3) जब $Lt\, f(x) = \infty, Lt\, g(x) = \infty$ हो, तो $Lt\, f(x) + Lt\, g(x) = \infty + \infty = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

4) जब $Lt\, f(x) = \infty, Lt\, g(x) = +\infty$ हो, तो $Lt\, f(x) - Lt\, g(x) = \infty - \infty$ होगी।

5) जब $Lt\, f(x) = A, Lt\, g(x) = 0$ हो, तो $\frac{Lt\, f(x)}{Lt\, g(x)} = \frac{A}{0} = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

6) जब $Lt\, f(x) = 0, Lt\, g(x) = 0$ हो, तो $\frac{Lt\, f(x)}{Lt\, g(x)} = \frac{0}{0}$ होगी। (यह एक अनिर्धार्य स्थिति है तथा कोई निष्कर्ष निकालना संभव नहीं है)

7) जब $Lt\, f(x) = A,\ Lt\, g(x) = \infty$ हो, तो $\frac{Lt\, f(x)}{Lt\, g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ होगी। (यह एक अनिर्धार्य स्थिति है तथा कोई निष्कर्ष निकालना संभव नहीं है)

8) जब $Lt\, f(x) = \infty,\ Lt\, g(x) = \infty$ हो, तो $\frac{Lt\, f(x)}{Lt\, g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ होगी। (यह एक अनिर्धार्य स्थिति है तथा कोई निष्कर्ष निकालना संभव नहीं है)

9) जब $Lt\ f(x) = A, Lt\ g(x) = \infty$ हो, तो $Lt\ f(x) \times Lt\ g(x) = A \times \infty = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

10) जब $Lt\ f(x) = \infty, Lt\ g(x) = \infty$ हो, तो $Lt\ f(x) \times Lt\ g(x) = \infty \times \infty = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

अनिर्धार्य सीमाओं को ज्ञात करने की कुछ विधियाँ

सीमाओं के परिकलन में निम्नलिखित विधियाँ उपयोगी सिद्ध होती हैं :

i) गुणनखंडन

ii) परिमेयीकरण

iii) सरलीकरण

iv) अन्य विधियाँ

इन विधियों से हम विभिन्न अनिर्धार्य सीमाओं के मान ज्ञात कर सकते हैं जैसे कि

i) $0 \times \infty$

ii) $\frac{0}{0}$

iii) $\frac{\infty}{\infty}$

iv) $\infty - \infty$

v) $|0| + |\infty|$

आईए अब हम सीमाओं के कुछ उदाहरण ले :

उदाहरण 4 : $\lim_{x\to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ है।

हल : हम देख सकते हैं कि यह फलन $x = 1$ के लिए परिभाषित नहीं है। अतः हम पहले इस फलन को सरलीकृत कर लेते हैं :

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1)$$

अब $\lim_{x\to 1}(x+1)$ ज्ञात करने के लिए हम इस फलन $x + 1$ में x के स्थान पर $x = 1$ रख सकते हैं। इस प्रकार हम प्राप्त करते है कि अभीष्ट सीमा $(1+1) = 2$ है।

उदाहरण 5 : $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+x}$ है।

हल : यदि हम $f(x) = \frac{x}{1+x}$. में x के स्थान पर ∞ रखें तो यह फलन $\frac{\infty}{\infty}$ बन जाता है जो कि अनिर्धार्य है। अतः हम इसका सरलीकरण करते हैं। यदि हम अंश और हर दोनों को x से भाग करें तो हम पाते हैं कि $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{(1/x)+1}$ है। इसमें x को ∞ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$f(x) = \frac{1}{(1/\infty)+1} = \frac{1}{(0+1)} = \frac{1}{1} = 1$$

अतः, $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1$

उदाहरण 6 : $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \frac{1+2x}{1+3x}$ है।

हल : हम देख सकते हैं कि यदि इस फलन में x के स्थान पर ∞ रखा जाएं तो हमें $\frac{\infty}{\infty}$ प्राप्त होता है जो कि अनिर्धार्य है। अतः हम इस फलन को सरल करते हैं।

$f(x) = \frac{1+2x}{1+3x} = \left(\frac{1}{x}+2\right) \div \left(\frac{1}{x}+3\right)$ (अंश और हर दोनों को x से भाग करने पर)

क्योंकि $x \to \infty$ के लिए $\frac{1}{x} \to 0$ होता है, अतः

$\lim_{x\to\infty} \frac{1+2x}{1+3x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}+2\right) \div \left(\frac{1}{x}+3\right) = \frac{2}{3}$

उदाहरण 7 : $\lim_{x\to 0} f(x)$ ज्ञात कीजए, जहाँ $f(x) = \frac{[(x+1)^2-1]}{x}$ है।

हल : पुनः, इस फलन में भी $x = 0$ रखने पर हमें $\frac{0}{0}$ प्राप्त होता है जो कि अनिर्धार्य है। अतः हमें इस फलन का सरलीकरण करना होगा। हम दिए हुए फलन को इस प्रकार लिख सकते है :

$$f(x) = \frac{\left[(x+1)^2-1\right]}{x} = \frac{1+x^2+2x-1}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = (x+2)$$

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं कि

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x+2) = 2$$

उदाहरण 8 : निम्नलिखित फलनों के व्यवहार का परीक्षण कीजिए (इनकी सीमा निर्धारित कीजिए) यदि (a) $x \to \infty$ है (b) $x \to -\infty$ है।

(i) $\frac{5x^2+x+1}{x^2+2}$ (ii) $\frac{1-x^5}{x^4+x+1}$ (अनिर्धार्य रूप)

i) हमें इस फलन का सरलीकरण करना होगा जिससे सीमा ज्ञात की जा सके। इसके लिए हम फलन के अंश तथा हर दोनों को फलन में उपस्थित x की अधिकतम घात वाले पद से विभाजित करते हैं। इस प्रश्न में यह x^2 है।

$$\underset{x\to\infty}{Lt} \frac{5x^2+x+1}{x^2+2} = \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \underset{x\to\infty}{Lt} \left[\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}\right]$$

अब $x = \infty$ रखें। इससे हम प्राप्त करते हैं $\frac{5+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{2}{\infty^2}} = \frac{5+0+0}{1+0} = \frac{5}{1} = 5$

इसी प्रकार $\underset{x\to-\infty}{Lt} \frac{5x^2+x+1}{x^2+2} = \frac{5+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{(-\infty)^2}}{1+\frac{2}{(-\infty)^2}} = \frac{5-0+0}{1+0} = \frac{5}{1}$

ii) $$\underset{x\to\infty}{Lt} \frac{1-x^5}{x^4+x+1} = \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{\frac{1}{x^5}-1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}} = \frac{\frac{1}{(\infty)^2}-1}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{(\infty)^4}+\frac{1}{(\infty)^5}}$$

$$= \frac{0-1}{0+0+0} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$x \to -\infty$ के लिए भी हमें यही सीमा प्राप्त होगी। पाठकों से अनुरोध है कि वे $x \to -\infty$ के लिए इस सीमा को स्वयं ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 9 : सीमा $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{1/x^2}{1/x^4}$ ज्ञात कीजिए

हल : यदि हम दिए हुए फलन में $x=0$ रखें तो हमें $\dfrac{1/0}{1/0} = \dfrac{\infty}{\infty}$ प्राप्त होता है जो कि अनिर्धार्य रूप में है।

हम बीजगणितीय संक्रियाओं के द्वारा दिए हुए फलन को सरल करते हैं तथा $x=0$ रखते हैं। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है कि

$$\underset{x\to 0}{Lt} \frac{1/x^2}{1/x^4} = \underset{x\to 0}{Lt} \frac{1}{x^2} \times \frac{x^4}{1} \quad \underset{x\to 0}{Lt} \left(x^2\right) = (0)^2 = 0$$

उदाहरण 10 : यदि $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$ तथा $g(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$ है तो $f(x) + g(x)$ की सीमा ज्ञात कीजिए जबकि $x \to 0$ है।

हल : $\underset{x\to 0}{Lt}\left[f(x)+g(x)\right] = \underset{x\to 0}{Lt}\left[\left(3+\dfrac{1}{x}\right)+\left(5-\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$$= \underset{x\to 0}{Lt}\left(3+\frac{1}{x}\right) + \underset{x\to 0}{Lt}\left(5-\frac{1}{x}\right) = \infty + \infty$$

यह एक अनिर्धार्य स्थिति है। परंतु यदि हम ध्यानपूर्वक देखें तो इस सीमा को बहुत सरलता से ज्ञात किया जा सकता है दि हम दोनों सीमाओ को एक साथ एक कोष्ठक में रखकर, प्राप्त व्यंजक को सरलीकृत कर लें । अर्थात्

$$\underset{x\to 0}{Lt}\left[3+\frac{1}{x}+5-\frac{1}{x}\right] = \left[3+\cancel{\frac{1}{x}}+5-\cancel{\frac{1}{x}}\right] \underset{x\to 0}{Lt}\, 8 = 8$$

अतः, $f(x)+g(x)$ की सीमा 8 होगी।

उदाहरण 11 : निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए।

a) $\underset{x\to 1}{Lt} \dfrac{x-1}{2x^2-7x+5}$

b) $\underset{x\to 1}{Lt} \dfrac{x^4-3x^3+2}{x^3-5x^2+3x+1}$

हल : a) यदि हम दिए हुए व्यंजक/फलन में $x=1$ रखें तो हम पाते हैं कि $\underset{x\to 1}{Lt}\ \dfrac{x-1}{2x^2-7x+5}$ बन जाता है $\dfrac{1-1}{2(1)^2-7(1)+5}=\dfrac{0}{0}$ जो कि अनिर्धार्य है।

इसलिए हमें इस व्यंजक का सरलीकरण करना होगा। हम यहाँ गुणनखंडन की विधि का प्रयोग करते हैं।

क्योंकि $2x^2-7x+5=(x-1)(2x-5)$ है, अतः हम पाते हैं कि

$$\underset{x\to 1}{Lt}\ \frac{(x-1)}{(x-1)(2x-5)}=\underset{x\to 1}{Lt}\ \frac{1}{(2x-5)}=\frac{1}{2(1)-5}=\frac{-1}{3}$$

b) यदि हम व्यंजक $\dfrac{x^4-3x^3+2}{x^3-5x^2+3x+1}$ में $x=1$ रखें, तो हम पाते हैं कि

$$\frac{(1)^4-3(1)^3+2}{(1)^3-5(1)^2+3(1)+1}=\frac{1-3+2}{1-5+3+1}=\frac{0}{0}$$

जो कि अनिर्धार्य है।

अतः हम बीजगणितीय संक्रियाओं के द्वारा इस व्यंजक का सरलीकरण करते हैं। इसके लिए हम, अंश और हर दोनों का गुणनखंडन करते हैं :

$$\underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{x^4-3x^3+2}{x^3-5x^2+3x+1}\right]=\underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{(x-1)(x^3-2x^2-2x-2)}{(x-1)(x^2-4x-1)}\right]$$

(संकेत : यदि $x = a$ किसी दिए हुए फलन $f(x)$ का शून्य है, अर्थात् यदि $f(a) = 0$ है, तो $(x-a)$, फलन $f(x)$ का एक गुणनखंड होगा इसके पश्चात् फलन $f(x)$ को $(x-a)$ से लंबी भाग विधि द्वारा भाग करके इसके अन्य गुणनखंड ज्ञात किए जा सकते हैं।

$$=\underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{x^3-2x^2-2x-2}{x^2-4x-1}\right]$$

$$=\frac{(1)^3-2(1)^2-2(1)-2}{(1)^2-4(1)-1}=\frac{1-2-2-2}{1-4-1}=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$$

उदाहरण 12 : निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए

a) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$

b) $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-3x+4}\right)$

हल (*a*) : इस उदाहरण में दिया हुआ फलन एक अपरिमेय व्यंजक है अतः हम इसे परिमेयीकरण की विधि द्वारा सरलीकृत करते हैं।

यदि हम इस व्यंजक में $x = 0$ रखें तो हम पाते है कि

$$\therefore \quad \underset{x\to 0}{Lt} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$$ (जो कि अनिर्धार्य है)

परिमेयीकरण करने पर हम पाते है कि दिया हुआ व्यंजक

$$= \frac{\left[\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}\right]\left[\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right]}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}$$

$$= \frac{2-x-2-x}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)} = \frac{-2x}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)} = \frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}$$

के समान हो जाता है। इसमें $x\to 0$ लेने पर हम पाते हैं कि

$$\underset{x\to 0}{Lt} \frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}} = \frac{-2}{\sqrt{2-0}+\sqrt{2+0}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

b) हम यह देख सकते हैं कि यदि दिए हुए फलन/व्यंजक में $x\to\infty$ लिया जाएं तो हम पाते हैं कि $\underset{x\to\infty}{Lt} \sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-3x+4} = \infty-\infty$ (जो कि अनिर्धार्य है)

अतः हम इस व्यंजक का परिमेयीकरण करते हैं तथा

सूत्र $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ का प्रयोग करके पाते है कि

$$= \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}-\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}+\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]}{\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}+\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]}$$

$$= \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{x^2+5x+4-x^2+3x-4}{\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}+\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]}$$

$$= \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{8x}{\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}+\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]}$$

(अंश और हर दोनों को x से भाग करने पर/ध्यान दें कि x, वर्गमूल के चिह्न के अंदर जाकर x^2 हो जाता है)

$$= \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{8}{\left[\sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}\right]}$$

$$= Lt_{x\to\infty} \frac{8}{\left[\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\right]}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0-0}} = \frac{8}{1+1} = 4$$

उदाहरण 13 : नीचे दी हुई सीमाएं ज्ञात कीजिए :

$a)$ $\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{x+1}{3x-1}+\frac{2x+1}{x-1}\right)$ और (b) $Lt_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

हल *a*) : $\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{x+1}{3x-1}+\frac{2x+1}{x-1}\right)=\underset{x\to\infty}{Lt}\left[\frac{x+1}{3x-1}\right]+\underset{x\to\infty}{Lt}\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]$

$$\underset{x\to\infty}{Lt}\left[\frac{1+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}\right]+\underset{x\to\infty}{Lt}\left[\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right]=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}+\frac{2+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{3-0}+\frac{2+0}{1-0}$$

$$=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

हल b) : $\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)\cdot\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

$=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$ [भाग (a) देखें]

उदाहरण 14 : यदि $x\to a$ है तो $\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ की सीमा ज्ञात कीजिए।

हल : यदि हम दिए हुए व्यंजक में $x=a$ रखें तो हम $\frac{0}{0}$ प्राप्त होता जो कि अनिर्धार्य है। हम ज्ञात है कि $\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}$ एक मानक सीमा है।

[इस मानक सीमा का प्रयोग करने के लिए हम दिए हुए व्यंजक के अंश और हर दोनों को $x-a$ से विभाजित करते हैं]

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^m-a^m}{x-a}\times\frac{x-a}{x^n-a^n}\right]=\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^m-a^m}{x-a}\times\frac{1}{\frac{x^n-a^n}{x-a}}\right]$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^m-a^m}{x-a}\div\frac{x^n-a^n}{x-a}\right]=ma^{m-1}\div na^{n-1}=\frac{m}{n}a^{m-n}$$

बोध प्रश्न 2

1) फलन $y=\frac{x^2+x-56}{x-7}$, $(x\neq 7)$ के लिए, बाएं पक्ष तथा दाएं पक्ष की सीमाएं ज्ञात कीजिए यदि $x\to 7$ है। क्या इस प्रकार प्राप्त सीमाओं से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि $x\to 7$ हो तो y की सीमा अस्तित्व रखती है।

.....

.....

.....

2) फलन $y=\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}$, $(x\neq 2)$ के लिए y की सीमा ज्ञात कीजिए यदि $x\to 2$ हो।

.....

.....

.....

3) एक माँग फलन $p = \dfrac{5}{q+2}$ लें। यदि माँग की मात्रा $q \to \infty$ हो तो कुल राजस्व क्या होगा?

.....

.....

.....

.....

ल हॉपिटल का नियम

यदि *f(x)* और *g(x)* दो ऐसे अवकलनीय फलन हैं कि उनका भागफल/विभाजन द्वारा प्राप्त फलन $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ अनिर्धार्य रूप $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ को प्राप्त करता है यदि x किसी मान *'a'* की ओर जाता है तो एल हॉपिटल नियम द्वारा $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ की सीमा ज्ञात की जा सकती है। यह नियम इस प्रकार है

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$: जहां अंश और हर का अवकलन अलग-अलग किया जाता है – एक अनुपात के रूप में नहीं।

इस नियम को इस प्रकार लागू किया जाता है :

i) यदि $\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ अनिर्धार्य रूपों $\frac{0}{0}$ अथवा $\frac{\infty}{\infty}$ में है तो दोनों फलनों *f(x)* और *g(x)* के अवकलनों के भागफल की सीमा ज्ञात कीजिए।

ii) यदि $\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ भी अनिर्धार्य है ($\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$) तो *f''(x)* और *g''(x)* ज्ञात करें तथा

$\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ ज्ञात करें। इसी प्रकार यह प्रक्रिया जारी रखें जब तक सीमा प्राप्त न हो जाए।

टिप्पणी : i) हम देख चुके हैं कि कोई सीमा अनिर्धार्य कहलाती है यदि वह निम्न रूपों में से किसी भी प्रकार की हो :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^\infty, \text{ और } 1^\infty$$

परंतु एल हॉपिटल नियम प्रत्यक्ष रूप से केवल तभी लग सकता है जब स्थिति $\frac{0}{0}$ अथवा $\frac{\infty}{\infty}$ के रूप में हो। अनिर्धार्य रूपों के अन्य प्रकारों पर

यदि हम एल हॉपिटल नियम लगाना चाहते हैं तो हमें इन्हें $\frac{0}{0}$ अथवा $\frac{\infty}{\infty}$ के रूप मे परिवर्तित करना होगा।

ii) एल हॉपिटल नियम एक–पक्षीय (बाएं तथा दाएं पक्ष की) सीमाओं में तथा $x \to \pm\infty$ की स्थिति में भी वैध है।

उदाहरण 15 : एल हॉपिटल के नियम का प्रयोग करके निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए।

a) $\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^4-a^4}{x-a}\right]$ b) $\underset{x\to 0^+}{Lt}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]$ c) $Lt_{x\to 0^+} x^x$

हल : सीमा $\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^4-a^4}{x-a}\right]$ मानक रूप $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$ के प्रकार की है।

यहाँ, $n=4$ है, अतः अभीष्ट सीमा $4a^{4-1}=4a^3$ है।

b) $\underset{x\to 0^+}{Lt}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]=\frac{0}{0}$

अतः, एल हॉपिटल के नियम का प्रयोग करने के लिए हम $\frac{d}{dx}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]$ ज्ञात करते हैं

इसका मान होगा $\left(a^x\log a-b^x\log b\right)$ अब, एल हॉपिटल नियम द्वारा हम पाते हैं कि

$$\underset{x\to 0^+}{Lt}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]=\underset{x\to 0^+}{Lt}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]\right\}=\underset{x\to 0^+}{Lt}\left(a^x\log a-b^x\log b\right)$$

$$=a^0\log a-b^0\log b=\log a-\log b=\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

c) ध्यान दें कि $Lt_{x\to 0^+} x^x$ अनिर्धार्य है तथा इसका प्रकार 0^0 है। इसे इस प्रकार सरलीकृत किया जा सकता है :

$$x^x = e^{lnx^x} = e^{xlnx} = xlnx$$

अब, $$Lt_{x\to 0^+} x^x = Lt_{x\to 0^+} xlnx$$

$$\underset{x\to 0^+}{Lt}\, xlnx = \underset{x\to 0^+}{Lt}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

अतः अब हम एल हॉपिटल नियक का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\underset{x\to 0^+}{Lt}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \underset{x\to 0^+}{Lt}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \underset{x\to 0^+}{Lt}(-x) = 0$$

7.5 सार-संक्षेप

इस इकाई में हमने एक फलन की सीमा की अत्यंत महत्वपूर्ण संकल्पना के बारे में चर्चा की। हमने देखा कि सीमा का संबंध किसी चर के किसी मान की ओर जाने से फलन के मान के किसी संख्या के समीप आने से है। इस इकाई में हमने पहले सीमा की

आधारभूत संकल्पना को सहज बोध से समझा तथा उसके पश्चात् उसकी औपचारिक गणितीय परिभाषा भी दी। हमने अनुक्रमों और फलनों, दोनों की सीमाओं की संकल्पनाओं का अध्ययन किया।

इस इकाई में बाएं पक्ष की तथा दाएं पक्ष की सीमाओं की भी विस्तृत रूप से चर्चा की गई। इसके पश्चात् सीमाओं के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मों की चर्चा के साथ-साथ, उन नियमों पर भी प्रकाश डाला गया जिनका उपयोग किसी फलन की सीमा ज्ञात करने के लिए किया जाता है। ऐसा एक उपयोगी नियम एल हॉपिटल का नियम है। हमने कई उदाहरणों के माध्यम से पाठकों को किसी फलन की सीमा ज्ञात करने विभिन्न विधियों से भी अवगत करवाया। परिमित सीमाओं के साथ-साथ अपरिमित सीमाओं की चर्चा भी इस इकाई में की गई हैं।

7.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

a) $\underset{x\to -2}{Lt}\left(x^2+5x\right)=\underset{x\to -2}{Lt}\,x^2+5\,\underset{x\to -2}{Lt}\,x=(-2)^2+5(-2)=4-10=-6$

b) $\underset{x\to 0}{Lt}\left[\dfrac{3x+1}{5x-1}\right]=\dfrac{\underset{x\to 0}{Lt}(3x+1)}{\underset{x\to 0}{Lt}(5x-1)}=\dfrac{3(0)+1}{5(0)-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$

c) $\underset{x\to 4}{Lt}\left[\dfrac{2x^{3/2}-\sqrt{x}}{x^2-15}\right]=\dfrac{\underset{x\to 4}{Lt}\left(2x^{3/2}-\sqrt{x}\right)}{\underset{x\to 4}{Lt}\left(x^2-15\right)}=\dfrac{2(4)^{3/2}-\sqrt{4}}{(4)^2-15}$

$=\dfrac{2\times 4\times 2-2}{1}=14$

d) $\underset{x\to a}{Lt}\,Ax^n=\underset{x\to a}{Lt}\,A\cdot\underset{x\to a}{Lt}\,x^n=A\cdot(a)^n$

e) $\frac{1}{3}$

f) -6

2) औसत लागत (AC) $=4+\frac{2}{q}$.

अतः, $\lim_{q\to\infty} 4+\frac{2}{q}=4$

3) मूलधन $=3357$ (लगभग) ब्याज की प्रभावी दर $=10.5\%$

बोध प्रश्न 2

1) 15

2) 0

3) (a) -1 ; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $\frac{2}{5}$

4) 5

इकाई 8 सांतत्य*

संरचना

8.0 उद्देश्य

8.1 विषय–प्रवेश

8.2 एक चर वाले फलनों का सांतत्य [Continuity of a Function of One Variable]

8.2.1 एक/किसी फलन का एक बिंदु पर सांतत्य [Continuity of a Function at a Point]

8.2.2 एक बिंदु पर सांतत्य का मापदंड [Criterion for Continuity at a Point]

8.2.3 संवृत स्वरूप फलन [Closed-form Functions]

8.2.4 सरलीकरण द्वारा किसी सीमा का मान ज्ञात करना [Evaluating a Limit using Simplification]

8.2.5 एक फलन का एक अंतराल पर सांतत्य [Continuity of a Function over an Interval]

8.3 असंतत फलन [Discontinuous Functions]

8.3.1 असांतत्य के प्रकार [Types of Discontinuity]

8.4 संतत और असंतत फलनों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग [Economic Applications of Continuous and Discontinuous Functions]

8.5 मध्यवर्ती मान प्रमेय [Intermediate-Value Theorem]

8.6 सार-संक्षेप

8.7 बोध-प्रश्नों के उत्तर/संकेत

8.0 उद्देश्य

यह इकाई पिछली इकाई का विस्तार है। पिछली इकाई में हमने सीमाओं का अध्ययन किया तथा उनके महत्व पर बल दिया था जबकि वर्तमान इकाई फलनों के सांतत्य से संबंधित है। इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप निम्नलिखित अवधारणाओं से भली-भांति अवगत हो जाएंगे :

- किसी फलन का सांतत्य;
- किसी फलन की सीमा और उसके सांतत्य में संबंध;
- असांतत्यता की संकल्पना;
- असांतत्यता के विभिन्न प्रकार;
- मध्यवर्ती मान प्रमेय; तथा
- संतत और असंतत फलनों के विभिन्न अनुप्रयोग।

8.1 विषय-प्रवेश

संतत फलनों के महत्व को समझने के लिए हम थोड़ा रूक कर यह देखते हैं कि हम इस पाठ्यक्रम में कहाँ तक पहुँचे हैं और हमें आगे कहाँ तक जाना है। पहली इकाई में हमने समुच्चों के बारे में जाना कि समुच्चय वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह होते हैं। ये वस्तुएं वास्तविक संख्याएं भी हो सकती हैं, उनके क्रमिक युग्म अथवा उनके n-टपल

*श्री अनूप चटर्जी

भी। अतः, एक प्रकार से समुच्चयों की संकल्पना से हमें अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाली राशियों और उनके मापों को वर्गीकृत कर सके। अगली इकाई में समुच्चयों के गुणन के नियमों की व्याख्या की गई और उन नियमों की भी जिनके द्वारा एक समुच्चय के अवयवों को किसी दूसरे समुच्चय के अवयवों से संबद्ध किया जा सकता है। इन नियमों को फलन कहते हैं। इकाई 3 तर्कशास्त्र पर केंद्रित थी तथा इस इकाई में हमारा लक्ष्य पाठकों का परिचय कथन, प्रमेय, उपपत्ति, अनिवार्य एवं पर्याप्त प्रतिबंधों, इत्यादि संकल्पनाओं से करवाना था। एक प्रकार से, इस अध्याय में हमने अपने तर्क को प्रबलता से रखना सीखा। इकाई 4 में विभिन्न विशिष्ट फलनों जैसे कि रैखिक, बहुपद, चरघातांकीय, लघुगणकीय, और घातांक तथा अतिपरवलय फलनों की चर्चा की गई। पाँचवी इकाई में इकाई 4 में प्रस्तुत की गई संकल्पनाओं का विस्तार किया गया। इसमें फलनों और समीकरणों का किसी समतल पर ज्यामितीय चित्रण, कार्तीय निर्देशांकों के माध्यम से किया गया। इकाई 6 में विशेष प्रकार के फलनों, अनुक्रमों, का अध्ययन किया गया। हमने यह जाना कि किसी अनुक्रम के पदों के योग द्वारा हमें किस प्रकार एक श्रेणी प्राप्त होती है। पिछली अर्थात् सातवीं इकाई में हमने सीमाओं की चर्चा की, और यह जाना कि किस प्रकार अनुक्रम और फलन किसी विशिष्ट मान की ओर अभिसारित होते हैं। इस इकाई में हम इसी चर्चा को आगे बढ़ाते हैं। यह इकाई फलनों के एक विशिष्ट गुण पर केंद्रित हैं और वह गुण है : सांत्यता। सहज रूप से समझें तो एक फलन संतत होता है यदि उसके आलेख को हम बिना फलन/पेन उठाएं आरेखित कर सकें। परंतु इतना साधारण सा प्रतीत होने वाला यह गुण इतना महत्वपूर्ण क्यों है? वास्तव में, बात यह है कि यदि कोई फलन संतत न हो, तो वह अवकलनीय नहीं होगा। अवकलनीयता के बारे में हम अगली दो इकाईयों में अध्ययन करेंगे और इकाई 11 में हम अवकलनीय फलनों के एक विशेष गुणों के बारे में पढ़ेंगे जिसे 'उत्तलता' कहते है। मान लीजिए हमारे पास एक चर y है जो एक चर x का फलन है अर्थात् y, x पर निर्भर करता है। मान अवकलन, x में अतिसूक्ष्म वृद्धिशील अथवा सीमात परिवर्तन के फलस्वरूप y में होने वाले परिवर्तन का विवेचन करता है। और कोई फलन अवकलनीय नहीं होगा यदि वह संतत न हो। इसीलिए सांतत्य का अध्ययन महत्वपूर्ण है। अवकलन के पश्चात् हम अभीष्टीकरण (optimization) की ओर बढ़ते हैं : x के किस मान के लिए निर्भर चर का मान अधिकतम अथवा न्यूनतम है। आपने 'व्यष्टि अर्थशास्त्र के नियम' पाठ्यक्रम के अंतर्गत में यह जाना होगा कि इस प्रकार के निर्णय अर्थशास्त्र के अध्ययन में अत्यंत महत्वपूर्ण होते हैं। इस प्रकार हम सांतत्य के महत्व को समझ सकते हैं।

इस इकाई का गठन इस प्रकार किया गया है : अगले अनुच्छेद में सांतत्य तथा उसके गुणों पर और संतत फलनों की विशेषताओं तथा उनके गुणधर्मों पर विस्तार से चर्चा की गई है। सामान्यतः, अर्थशास्त्र में हमें ऐसे फलनों से सामना नहीं करना पड़ता जो संतत न हों। परंतु हमें ज्ञात होना चाहिए कि ऐसे फलन अवकलनीय नहीं होते। इसके बाद वाले अनुच्छेद में असांतत्य की व्याख्या की गई है तथा इसके विभिन्न प्रकारों की चर्चा की गई है। इससे अगले अनुच्छेद में संतत फलनों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है क्योंकि अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाले अधिकतर फलन, और वे फलन जिनकी चर्चा चौथी और पाँचवी इकाई में की गई हैं, संतत हैं। अंत में , इस इकाई में एक अत्यंत महत्वपूर्ण प्रमेय, जिसे मध्यवर्ती–मान प्रमेय कहते हैं, की चर्चा की गई है तथा मांग और आपूर्ति संतुलन तथा अतिरिक्त मांग फलनों में इस प्रमेय के अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है।

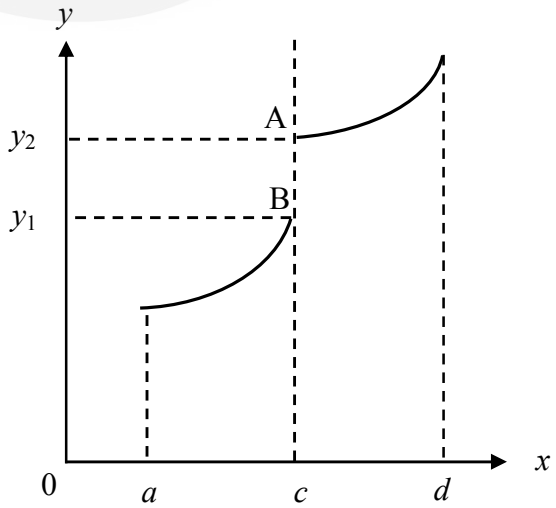
8.2 एक चर वाले फलन का सांतत्य [Continuity of a Function of One Variable]

एक ऐसा चर जो संख्या रेखा पर संतत रूप से (बिना व्यवधान के) परिवर्तित होने की क्षमता रखता है एक संतत चर कहलाता है। आईए हम एक फलन $y = f(x)$ पर विचार करें जहाँ x और y दो संतत चर हैं। इस फलन के संतत फलन होने के लिए यह आवश्यक है कि न केवल दोनों चर, x और y, व्यक्तिगत रूप से संतत व्यतिक्रम (continuous variation) की योग्यता रखते हों, अपितु x में संतत व्यतिक्रम के फलस्वरूप y में होने वाला परिवर्तन भी संतत हो। यह सुस्पष्ट है कि एक संतत फलन का वक्र भी संतत होगा अर्थात् इसमें कोई विच्छिति (gap) नहीं होगी।

8.2.1 एक फलन का एक बिंदु पर सांतत्य [Continuity of a Function at a Point]

सांतत्य ऐसे परिवर्तनों से संबद्ध है जो आकस्मिक न होकर अत्यंत धीमी गति से होते हैं।

इसका एक संतत फलन की संकलपना से सीधा संबंध है। एक फलन $y = f(x)$ संतत कहलाता है यदि स्वतंत्र चर (जिसे हमने यहाँ x लिया है) में छोटा सा परिवर्तन, निर्भर चर (जिसे हमने यहाँ y लिया है) में भी एक छोटा/लघु परिवर्तन उत्पन्न करता है। ज्यामितीय दृष्टि से एक फलन संतत होता है यदि उसका आलेख जुड़ा हुआ हो उसमें कोई विच्छेद अथवा आकस्मिक परिवर्तन न हो। दूसरे शब्दों में, फलन का आलेख बिना कलम को उठाएं बनाया जा सके। ऐसे वक्र भी जिनमें तीक्ष्ण मोड़ हों (अर्थात् जो यकायक अपना पथ बदलते हों) संतत होते हैं। परंतु वे वक्र नहीं जिनमें किसी बिंदु पर विच्छेद अथवा प्लुति (jump) हो। यदि किसी फलन में किसी बिंदु पर प्लुति (jump) हो, तो फलन उस बिंदु पर असंतत होता है। इसका अर्थ है कि जब हम उस बिंदु से होकर निकलते हैं तो फलन के मान में एक आकस्मिक परिवर्तन होता है। एक ऐसी स्थिति रेखाचित्र 8.1 में दर्शायी गई है जहाँ बिंदु $x=c$ पर एक प्लुति (jump) है।

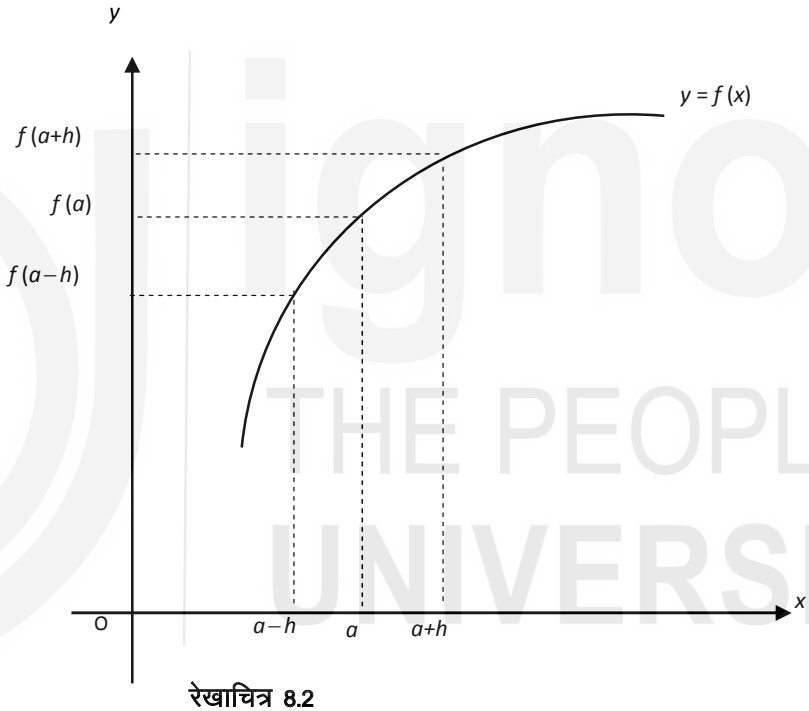


रेखाचित्र 8.1

ध्यान दें कि इस फलन में जब x एक ऐसा मान लेता है जो c से थोड़ा सा कम है, तो फलन का मान y_1 है और जैसे ही x का मान c से थोड़ा सा बड़ा होता है, फलन का मान यकायक उत्प्लवन करके y_2 तक पहुँच जाता है। यह इस तथ्य को दर्शाता है कि यह फलन $x = c$ पर असंतत है।

8.2.2 एक बिंदु पर सांतत्य का मापदंड [Criterion for Continuity at a Point]

हम एक फलन के सांतत्य को परिभाषित करने के लिए सीमा की संकल्पना का प्रयोग करेंगे। यदि एक फलन $y = f(x)$ की सीमा का अस्तित्व है जबकि x फलन के प्रांत के किसी बिंदु a की ओर अग्रसर हो और यदि यह सीमा $f(a)$ के बराबर हो अर्थात् $x = a$ पर फलन के मान के बराबर हो, तो फलन a पर संतत कहलाता है। हम सांतत्य के इस मापदंड की व्याख्या रेखाचित्र 8.2 की सहायता से करेंगे।



रेखाचित्र 8.2

एक फलन $y = f(x)$ लीजिए। मान लीजिए x का मान a से $a + h$ हो जाता है, जहाँ h एक लघु धनात्मक संख्या है। इसके संगत फलन के मान में परिवर्तन $f(a + h) - f(a)$ के बराबर होगा। फलन $y = f(x)$ बिंदु $x = a$ पर संतत होने के लिए यह आवश्यक है कि h के छोटे मानों के लिए $f(a + h) - f(a)$ का मान भी छोटा हो। अर्थात्

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h) - f(a)\} = 0$$

या $$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \qquad (1)$$

समीकरण (1) से यह उपलक्षित होता है कि फलन की $x = a$ पर दाएं पक्ष की सीमा फलन के इस बिंदु पर मान के बराबर होनी चाहिए। इसी प्रकार हम, फलन के बाएं पक्ष से $x = a$ पर सांतत्य का प्रतिबंध भी हम प्राप्त कर सकते हैं। यह होगा

$$\lim_{h\to 0} f(a-h) = f(a) \qquad (2)$$

(1) और (2) से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी फलन के संतत होने की तीन आवश्यकताएं है :

i) दिए हुए बिंदु पर फलन की सीमा का अस्तित्व

ii) दिए हुए बिंदु पर फलन के मान का अस्तित्व

iii) उस बिंदु पर फलन की सीमा तथा फलन के मान का समान होना

ध्यान दें कि यदि किसी फलन की किसी बिंदु पर बाएं और दाएं पक्ष की सीमाएं बराबर होती हैं तो उस बिंदु पर फलन की सीमा का अस्तित्व होता है।

अतः, हम और स्पष्ट रूप से कह सकते हैं कि एक फलन $f(x)$ के एक बिंदु a पर संतत होने के लिए निम्नलिखित कथन/प्रतिबंध सत्य होने चाहिए :

1) बिंदु a फलन के प्रांत में होना चाहिए, अर्थात् $f(a)$ परिभाषित होना चाहिए,

2) फलन की सीमा, जब x, a की ओर अग्रसर हो, का आस्तित्व होना चाहिए अर्थात् $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होना चाहिए, और

3) सीमा का मान फलन के मान $f(a)$ के बराबर होना चाहिए अर्थात्

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

8.2.3 संवृत स्वरूप फलन [Closed-form Functions]

एक संवृत स्वरूप फलन एक ऐसा फलन होता है जो विभिन्न फलनों जैसे कि अचर फलन, घातांक फलन, चर घातांकीय फलन, मूलीय फलन, लघुगणकीय फलन इत्यादि को विभिन्न अंकगणितीय संक्रियाओं तथा फलनों के संयोजन द्वारा संयोजित करके एक गणितीय सूत्र के रूप में लिखकर प्राप्त किया गया हो। संवृत स्वरूप फलन के कुछ उदाहरण हैः

$$3x^2 - x + 1; \quad \frac{\left(x^2-1\right)^{1/2}}{6x-2}; \quad e^{\left(x^2-1\right)^{1/2/x}}; \quad \left(\log_3\left(4x^2 - e^x\right)\right)^{2/3}$$

ऐसे फलन अत्यंत जटिल भी हो सकते है। दूसरी ओर, नीचे दिया हुआ फलन एक संवृत स्वरूप फलन नहीं है।

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < -1 \\ x^2 + x & \text{if } -1 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{if } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

क्यों? क्योंकि $f(x)$ एक अकेले गणितीय व्यंजक के रूप में निर्दिष्ट नहीं है।

संवृत स्वरूप फलनों का सांतत्य

एक संवृत स्वरूप फलन सदैव अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत होता है। अतः, एक संवृत स्वरूप फलन के प्रांत में स्थित किसी भी बिंदु पर फलन की सीमा, फलन में उस बिंदु के मान को रख कर (प्रतिस्थापित करके) ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 1 : $f(x) = \frac{x^2-3x}{4x+3}$

एक संवृत स्वरूप फलन है और $x=2$ इसके प्रांत में स्थित है। अतः $\lim_{x\to 2} f(x)$ ज्ञात करने के लिए हम $f(x)$ में x के स्थान पर 2 रखते हैं :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{4x+3} = f(2) = -\frac{2}{11}$$

आईए अब हम एक संवृत स्वरूप फलन $f(x)$ ले जो $x=a$ पर परिभाषित नहीं है। इस बिंदु

$x=a$ पर $f(x)$ की सीमा ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित में से कोई प्रक्रिया अपना सकते हैं :

a) सरलीकरण या किसी अन्य विधि का प्रयोग करें जिससे हम $f(x)$ को एक ऐसे फलन से प्रतिस्थापित करते है (बदलते हैं) जो कि $f(x)$ के समान हो तथा $x=a$ पर परिभाषित हो। ऐसा करने से नए फलन में $x=a$ रखने पर हमें फलन की सीमा प्राप्त हो जाएगी।

b) सीमा को आलेख की सहायता से या संख्यात्मक रूप से (संख्यानुसार) ज्ञात करने का प्रयास करें। इस प्रकार हमें सीमा का एक अनुमान मिल सकता है।

कभी-कभी हमें *a*) और *b*) दोनों विधियों का प्रयोग करने की आवश्यकता पड़ती है।

8.2.4 सरलीकरण द्वारा किसी सीमा का मान ज्ञात करना [Evaluating a Limit using Simplification]

आईए हम $\lim_{x\to -2} f(x)$ ज्ञात करें जहाँ $f(x) = \frac{3x^2+x-10}{x+2}$ है।

हम निम्नलिखित प्रश्नों पर विचार करते हैं :

1) क्या $f(x)$ एक संवृत स्वरूप फलन है?

   इसका उत्तर है, हाँ। क्योंकि $\frac{3x^2+x-10}{x+2}$ एक अकेला गणितीय सूत्र है।

2) क्या बिंदु $x=-2$ फलन $f(x)$ के प्रांत में है?

   इसका उत्तर है, नहीं। क्योंकि $f(-2) = \left(3(-2)^2+(-2)-10\right)\Big/\left((-2)+2\right)$ परिभाषित नहीं है।

   अतः हमें इस फलन का सरलीकरण करना होगा। ऐसा करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{3x^2+x-10}{x+2} = \frac{(x+2)(3x-5)}{(x+2)}$$

$$= 3x-5.$$

क्योंकि अब हमें एक संवृत स्वरूप फलन प्राप्त हो चुका है जो कि $x=-2$ पर परिभाषित है, हम इस बिंदु पर सीमा का मान x के स्थान पर -2 प्रतिस्थापित करके (रख कर) ज्ञात कर सकते हैं :

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+x-10}{x+2}=\lim_{x\to-2}3x-5=3(-2)-5=-11$$

उदाहरण 2 : आईए अब हम ज्ञात करें कि क्या $f(x)=3x-2$ बिंदु $x=3$ पर संतत है?

हल : प्रदत्त फलन है : $f(x)=3x-2$

चरण 1 : जब हम $x=3$ रखते हैं, तो हम पाते हैं कि $f(x)=3\times3-2=7$ है। अतः, फलन $x=3$ पर परिभाषित है।

चरण 2. $f(x)=3x-2$ की सीमा का अस्तित्व है जबकि $x\to3$ है ओर इसका मान 7 है।

चरण 3. साथ ही, $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}(3x-2)=7=f(3)$.

अतः, यह फलन $x=3$ पर संतत है। वास्तव में, यह फलन अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है। विद्यार्थी अन्य बिंदुओं पर इस फलन के संतत होने की पुष्टि स्वयं कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : फलन $f(x)=x^3+3x-4$ के सांतत्य का परीक्षण बिंदु $x=1$ पर कीजिए।

चरण 1 : $x=1$ पर $f(x)$ का मान $f(1)=(1)^3+3(1)-4=1+3-4=0$ है। अतः, फलन $f(x)$, बिंदु $x=1$ पर परिभाषित है।

चरण 2 : $\underset{x\to1}{Lt}\ (x^3+3x-4)=(1)^3+3(1)-4=0$ है। अर्थात् $x\to1$ के लिए फलन की सीमा का अस्तित्व है।

चरण 3 : अतः, हम पाते हैं कि $f(1)=\underset{x\to1}{Lt}\ f(x)=0$ है, अर्थात् फलन $f(x)=x^3+3x-4$, $x=1$ पर एक संतत फलन है।

उदाहरण 4 : निर्धारित कीजिए की निम्नलिखित फलन x के किन मानों के लिए संतत हैं :

a) $$f(x)=\frac{x^4+3x^2-1}{(x-1)(x+2)}$$

b) $$f(x)=(x^2+2)\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^4+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

हल : a) यहाँ $f(x)=\dfrac{x^4+3x^2-1}{(x-1)(x+2)}$ दिया है। यह एक परिमेय फलन है। अतः, यह सभी बिंदुओं के लिए संतत है सिवाय उनके जहाँ पर इस फलन का हर शून्य है। अर्थात् जब $(x-1)(x+2)=0$ है। इससे हमें दो स्थितियाँ प्राप्त होती हैं :

i) $x-1=0$ अर्थात् $x=1$ इस बिंदु पर $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\to\infty$ जो कि अपरिभाषित है।

ii) $x+2=0$ अर्थात् $x=-2$ हम देख सकते हैं कि $\lim\limits_{x\to -2} f(x)\to\infty$ जो कि अपरिभाषित है।

क्यों कि $x=1$ और $x=-2$ के लिए फलन की सीमा अस्तित्व नहीं रखती, यह फलन $x=1$ और $x=-2$ पर संतत नहीं हो सकता।

b) यहाँ $f(x)=(x^2+2)\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^4+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ है। इस फलन में पद $\dfrac{1}{x}$, $x=0$ पर परिभाषित नहीं हैं क्योंकि $\lim\limits_{x+\infty}\frac{1}{x}=\infty$ होती है। इसी प्रकार पद $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ केवल उन्हीं बिंदुओं के लिए परिभाषित है जिनके लिए $(x+1)>0$ हो अर्थात् $(x+1)>0$ हो। अतः, हम पाते हैं कि यह फलन केवल अंतराल $(-1,0)$ में तथा अंतराल $(0,\infty)$ में परिभाषित है, अन्य वास्तविक संख्याओं के लिए नहीं। इसलिए यह फलन केवल $(-1,0)$ तथा $(0,\infty)$ में आने वाले बिंदुओं पर ही संतत होगा।

8.2.5 एक फलन का एक अंतराल पर सांतत्य [Continuity of a Function over an Interval]

एक फलन $y=f(x)$ एक अंतराल (a,b) पर संतत कहलाता है यदि यह इस अंतराल के प्रत्येक बिंदु x पर संतत है। अर्थात् यदि यह

1) $x=a$ पर

2) $x=b$ पर

3) a और b के बीच के प्रत्येक बिंदु पर

संतत है।

उदाहरण 5 : सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $x=-2$ से लेकर $x=-1$ तक के सभी बिंदुओं पर संतत है अर्थात् अंतराल $[-2,-1]$ पर संतत हैं।

हल : यह सिद्ध करने के लिए कि दिया हुआ फलन अंतराल $[-2,-1]$ पर संतत है, हम सिद्ध करेंगे कि यह फलन :

1) $x=-2$ पर संतत है

2) $x=-1$ पर संतत है

3) $x=-2$ और $x=-1$ के बीच के प्रत्येक बिंदु, जैसे कि -1.5 इत्यादि, पर संतत है।

1) हम पहले $\lim_{x\to -2} f(x)$ ज्ञात करते हैं :

दाएं पक्ष की सीमा का आँकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-2+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{-2+h-2}\right] = \frac{-1}{4}$$

बाएं पक्ष की सीमा का आँकलन करने पर हम पाते हैं कि

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-2-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{-2-h-2}\right] = \frac{-1}{4}$ क्योंकि

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{-1}{4}$ हम पाते हैं कि

$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{-1}{4}$ है। अतः, फलन $f(x), x = -2$ पर संतत है।

2) इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि दिया हुआ फलन $f(x), x = -1$ पर संतत हैं। पाठकों से अनुरोध है इस भाग को स्वयं करें।

3) अब हम $\lim_{x\to -\frac{3}{2}} f(x)$ ज्ञात करते हैं।

दाएं पक्ष की सीमा का आँकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(-\frac{3}{2}+h\right) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+h-2}\right] = \frac{-2}{7}$$

बाएं पक्ष की सीमा का आँकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(-\frac{3}{2}-h\right) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{-\frac{3}{2}-h-2}\right] = \frac{-2}{7}$$

क्यों कि $\lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x) = \frac{-2}{7}$

हम पाते हैं कि $\lim_{x\to -\frac{3}{2}} f(x) =$है। अतः, हम पाते हैं कि फलन $f(x), x = -\frac{3}{2}$ पर संतत है, जो कि -2 और -1 के बीच का एक बिंदु है। इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि दिया हुआ फलन -2 और -1 के बीच के प्रत्येक बिंदु पर संतत है।

इस प्रकार हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह फलन अंतराल $[-2,-1]$ पर संतत है।

बोध प्रश्न 1

1) एक फलन $f(x) = x^2 + 3$ दिया है। इस फलन का सांतत्य $x = 1$ पर निर्धारित कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) एक बैंक 10000 रू. तक के ऋण के लिए 10 प्रतिशत प्रतिवर्ष ब्याज की दर से ब्याज लेता है। यदि ऋण 10000 रू. से अधिक हो तो बैंक ब्याज की दर 5 प्रतिशत बढ़ा देता है। बैंक के (कुल) ब्याज फलन के लिए एक व्यंजक ज्ञात कीजिए तथा इस फलन के सांतत्य का निर्धारण कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए :

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}}{2x-3}$

ii) $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x+3}{x+3}$

4) निम्नलिखित सीमा ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^3+1)(x-1)}{x^2+3x+2}$$

8.3 असंतत फलन [Discontinuous Functions]

यदि सीधे शब्दों में कहें तो कोई फलन जो संतत न हो असंतत फलन कहलाता है। हम जानते हैं कि किसी फलन के संतत होने के लिए निम्नलिखित शर्तें सत्य होनी चाहिए :

i) $f(a)$ परिभाषित हो

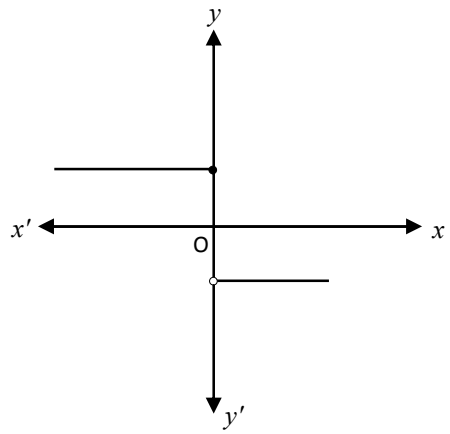
ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होना चाहिए अर्थात् $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+}$ तथा

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ है।

स्पष्टतयः, किसी फलन के लिए यदि इनमें से कोई भी कथन असत्य हो तो वह फलन असंतत होगा।

8.3.1 असांतत्य के प्रकार [Types of Discontinuity]

असांतत्य के विभिन्न प्रकार होते हैं। सर्वप्रथम किसी फलन के आलेख में किसी बिंदु पर विच्छिति अथव प्लुति (jump) हो सकती है। उदाहरण के लिए, फलन $f(x) = \begin{cases} +1, & x \le 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ स्पष्ट रूप से असंतत है, क्योंकि इस में बिंदु $x=0$ पर एक विच्छिति/प्लुति (breah/jump) है। यदि हम $x=0$ की ओर बाएं और दाएं पक्ष से जाएं तो हमें अलग–अलग मान (सीमा) प्राप्त होती है (रेखाचित्र 8.3 देखें)

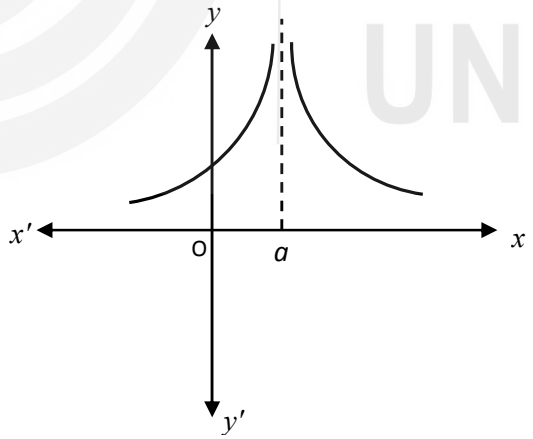


रेखाचित्र 8.3

अनंतस्पर्शी फलन एक और प्रकार के असंतत फलन हैं। आईए पहले हम यह जान लें किसी फलन की अनंतस्पर्शी रेखा क्या होती है। मान लीजिए $y=f(x)$, $x \in R$ एक फलन है। मान लीजिए कि जब x दाएं अथवा बाएं पक्ष से a की ओर अग्रसर होता है, तो y अपरिसीमित हो जाता है। इस स्थिति में हम कहते हैं कि रेखा $x=a$ फलन $y=f(x)$ की एक अनंतस्पर्शी रेखा है। यदि किसी फलन की कोई अनंतस्पर्शी रेखा हो तो उसे अनंतस्पर्शी फलन कहा जा सकता है। अनंतस्पर्शी फलन असंतत होते हैं। किसी फलन $f(x)$ के लिए रेखा $x=a$ एक ऊर्ध्वा अनंतस्पर्शी रेखा कहलाती है यदि नीचे दिए कथनों में से कोई भी एक सत्य हो (रेखाचित्र 8.4 देखें) :

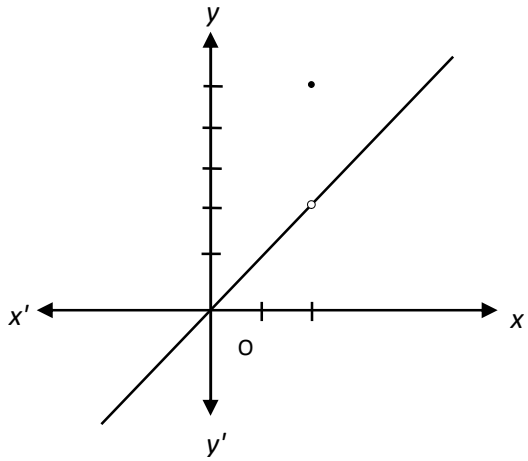
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



रेखाचित्र 8.4

एक अन्य स्थिति जिसमें एक दिया हुआ फलन असंतत होता है वह होती है जिसमें फलन में एक छिद्र हो। फलन $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ पर विचार कीजिए। यद्यपि यह फलन $x = 2$ पर परिभाषित है और $x = 2$ पर फलन के दाएं और बाएं पक्ष की सीमाएं बराबर हैं, तो भी इस फलन के लिए $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ सत्य नहीं है (रेखाचित्र 8.5 देखें)



रेखाचित्र 8.5

रेखाचित्र में इस फलन का आलेख दिया जिसमें यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है कि यह फलन $x=2$ पर असंतत है इस फलन के आलेख में $x=2$ पर एक छिद्र है।

सामान्यतः, हम असांतत्य के प्रकारों को दो वर्गों में बाँट सकते हैं :

a) अनिवारणीय असांतत्य फलन $f(x)$ का बिंदु $x=a$ पर असांतत्य अनिवारणीय होता है यदि $x \to a$ के लिए फलन की सीमा, का अस्तित्व न हो।

b) निवारणीय सांतत्य : बिंदु $x=a$ पर किसी फलन का असांतत्य निवारणीय कहलाता है यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व हो अर्थात् $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ हो परंतु $\lim_{x\to a} f(x)$ का मान $f(a)$ के मान के बराबर न हो।

अर्थात् $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ हो ।

इस प्रकार के असांतत्य को दूर किया जा सकता है।

उदाहरण 6 : फलन $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ के सांतत्य का बिंदु $x=1$ पर परीक्षण कीजिए।

हल : 1) $x=1$ के लिए, $f(1)=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ है जो कि अनिर्धारणीय (indeterminate) है। यह फलन $x=1$ असंतत प्रतीत होता है। हम इस फलन की $x \to 1$ के लिए सीमा ज्ञात करते हैं। सरलीकरण करने पर हम पाते है कि

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=(x+1) \text{ है।}$$

अतः $\underset{x\to 1}{Lt}\ (x+1)=1+1=2$ है अर्थात् $x \to 1$ के लिए, फलन $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व है।

अतः हम पाते है कि इस फलन के लिए $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ है

परंतु फलन $x=1$ पर परिभाषित नहीं है। अर्थात् यह फलन $x=1$

पर असंतत है और असांतत्य का प्रकार निवारणीय है।

उदाहरण 7 : दिया हुआ इस फलन

यदि $x \leq 3$ है $f(x) = x + 2$

यदि $x > 3$ है $= x + 3$

को सांतत्य का $x = 3$ पर निर्धारण कीजिए।

हल : जब $x = 3$ है तो फलन का मान

$$f(3) = x + 2 = 3 + 2 = 5$$

बाएं पक्ष की सीमा ज्ञात करने के लिए हम फलन $f(x) = x + 2$ लेते हैं। इस प्रकार हमें यह सीमा 5 प्राप्त होती है।

अतः जब x,3 की ओर, 3 से कम मानों की ओर से अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का मान 5 की ओर आता है।

$$\therefore \lim_{x \to 3^-} = 5$$

इसी प्रकार दाएं पक्ष की सीमा के लिए हम फलन $f(x) = x + 3$ लेते हैं और सीमा 6 प्राप्त करते हैं। अतः यदि x, 3 की ओर, 3 से बड़े मानों की ओर से अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का मान 6 की ओर आता है।

$$\therefore \lim_{x \to 3^+} = 6$$

क्योंकि $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$ है

$\lim_{x \to 3} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

अतः यह फलन $x = 3$ पर असंतत है और यह असांतत्यता अनिवारणीय प्रकार की है।

उदाहरण 8 : x के वह मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए फलन

$y = \dfrac{x+2}{(x+1)(x+3)}$ असंतत है।

हल : यह एक परिमेय फलन है। अतः, यह सभी बिंदुओं पर संतत होगा सिवाय उन बिंदुओं के जहाँ $(x+1)(x+3) = 0$ है।

अब $(x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow$ $x+1=0$ या $x+3=0$ होगा

$\Rightarrow$ $x=-1$ या $x=-3$ होगा

यदि $x=-1$ है तो $\underset{x \to -1}{Lt} f(x) = \infty$

यदि $x=-3$ है तो $\underset{x \to -3}{Lt} f(x) = -\infty$

अर्थात् $x=-1$ तथा $x=-3$ दोनों बिंदुओं पर सीमा का अस्तित्व नही है। (परिभाषित नहीं है)

अतः फलन $f(x)$ $x=-1$, और $x=-3$ पर असंतत है तथा असांतत्य का प्रकार अनिवारणीय है।

बोध प्रश्न 2

1) दिया हुआ फलन है

$$f(x) = 4 - x \qquad \text{for } x \neq 3$$
$$= 0 \qquad \text{for } x = 3$$

फलन का सांतत्य $x = 3$ पर ज्ञात कीजिए

.....

.....

.....

2) फलन $y = |x|$ का $x = 0$ पर सांतत्य निर्धारित कीजिए।

.....

.....

.....

3) असंतत फलन क्या होते हैं। असांतत्य के विभिन्न प्रकार क्या होते हैं।

.....

.....

.....

4) अर्थशास्त्र से संबंधित कुछ संभाव्य फलन निर्मित कीजिए जो असंतत हों।

.....

.....

.....

8.4 संतत तथा असंतत फलनों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग [Economic Applications of Continuous and Discontinuous Functions]

इस अनुच्छेद में हम संतत और असंतत फलनों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे। अब जबकि हम संतत फलनों से भली भांति परिचित हो चुके हैं तो हम देख सकते हैं कि हमने इकाई 2 और इकाई 4 में (विशेषकर इकाई 4 में) जिन फलनों की चर्चा थी उनमें से अधिकांश फलन संतत थे। अतः यदि आप इकाई 4 को पुनः पढ़े तो आप संतत फलनों के अनुप्रयोंगों से स्वतः ही परिचित हो जाएंगे।

सांतत्य का अध्ययन सामान्यतः अवकलनीयता के संदर्भ में किया जाता है। अगली दो इकाइयों में अवकलनीयता के अध्ययन के साथ-साथ, हम संतत फलनों के बारे में भी और अधिक पढेंगे। अतः, इस खंड को हम असंतत फलनों पर केंद्रित कर रहे हैं। अर्थशास्त्र में असंतत फलनों के अनेक उदाहरण स्वभाविक रूप से सामने आते हैं। यद्यपि सिद्धांतों के अध्ययन को सरल बनाने के लिए कई बार हम यह मान लेते है कि

अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाले फलन संतत हैं। परंतु फिर भी कई स्थितियों में, यदि फलन असंतत है तो उसे असंतत रूप में लेना ही अधिक उचित होता है क्योंकि यह संभव है कि फलन को संतत मान लेने से अर्थशास्त्रीय संबंधों का विकृत रूप सामने आए या सही रूप सामने न आए।

एक ऐसी स्थिति पर विचार कीजिए जिसमें एक आगत x द्वारा एक उत्पाद y प्राप्त होता है। अतः, उत्पादन फलन $y = f(x)$ प्रकार का होगा। यदि हम यह कहें कि $f(x)$ किसी बिंदु $x = a$ पर संतत है, तो इसका अर्थ होगा कि $f(x)$ वास्तविक संख्याओं के एक विवृत अंतराल पर, जिसमें बिंदु a भी सम्मिलित हो, परिभाषित है। इसका अर्थ है कि x अनंत रूप से विभाज्य है। परंतु उत्पादन में ऐसी स्थितियां हो सकती हैं आगत और उत्पाद असंतत हों। उदाहरण के लिए कारों के उत्पादन में प्रयोग किए जाने वाले नट-बोलटों की संख्या असंतत होती है। इस प्रकार के अन्य उदाहरण भी देखे जा सकते हैं। मान लीजिए कि एक फर्म बिक्री कर्मचारियों की भर्ती करती है। मान लीजिए कि फर्म इनका भुगतान नीचे दिए गए नियम के अनुसार करती है– किसी भी बिक्री कर्मचारी के वेतन के तीन हिस्से होंगे : *a*) 800 रू. की एक आधारभूत राशि, b) 10% कमीशन तथा c) यदि कर्मचारी 20000 रू से ऊपर की बिक्री करता है तो 500 रू का एकमुश्त बोनस यदि हम मान लें कि किसी बिक्री कर्मचारी का वेतन P से तथा उसके द्वारा की गई बिक्री S से निरूपित की जाती है, तो उसके द्वारा की गई बिक्री और उसके वेतन के मध्य संबंध को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$P = 800 + 0.1S, \text{ यदि } S < 20{,}000$$

$$P = 800 + 0.1S, \text{ यदि } S \geq 20{,}000$$

$$800 + 0.1S + 500, \text{ यदि } S \geq 20{,}000$$

यह फलन बिंदु 20000 पर असंतत है।

एक और उदाहरण के तौर पर आईए हम एक आय समर्थन (income support programme) कार्यक्रम पर विचार करें। कई देशों में सरकारें गरीब बेरोज़गार व्यक्तियों को आर्थिक सहायता के रूप में एक मुश्त मासिक भुगतान करती है। जैसे ही व्यक्ति की किसी अन्य स्रोत से आय प्रारंभ होती है यह सहायता राशि बंद कर दी जाती है। मान लीजिए हमारे सामने यह स्थिति है। एक स्त्री जो एकल-अभिभावक है सरकार से 2000 रू. प्रति माह की सहायता राशि पाती है, यदि उसके पास आय का कोई और साधन नहीं हो। परंतु यदि उसे कोई नौकरी मिल जाएं तो यह सहायता-राशि बंद कर दी जाती है। मान लीजिए वह नौकरी/काम मिलने पर 80रू प्रतिदिन कमा लेती है। अब यदि उसने महीने में d दिन काम किया तो उसकी कुल मासिक आय, y निम्नलिखित रूप से व्यक्त की जा सकती है :

$$y(d) = 2000 \text{ if } d = 0$$

$$y(d) = 80d \text{ if } d > 0$$

यह फलन बिंदु 0 पर असंतत है।

8.5 मध्यवर्ती-मान प्रमेय [Intermediate-Value Theorem]

इस अनुच्छेद में हम संतत फलनों से संबंधित एक अत्यंत महत्वपूर्ण प्रमेय, जिसे मध्यवर्ती-मान प्रमेय कहते हैं, के बारे में चर्चा करेंगे। इस प्रमेय के अर्थशास्त्र तथा अन्य

विषयों में भी अनेक अनुप्रयोग हैं। अर्थशास्त्र में हम इस प्रमेय का प्रयोग संतुलन जैसी महत्वपूर्ण संकल्पना के अध्ययन में करते हैं। आप 'व्यष्टि अर्थशास्त्र के नियम' के अध्ययन से जानते ही हैं कि 'संतुलन' अर्थशास्त्र की प्रमुख अवधारणाओं में से एक है। हम पहले इस प्रमेय से पाठकों का परिचय करवाते हैं और उसके पश्चात् देखेंगे कि यह किस प्रकार से संतुलन के अध्ययन में उपयोगी है।

प्रमेय का कथन

हम प्रमेय की एक सरल व्याख्या से प्रारंभ करते हैं। मान लीजिए फलन $y = f(x)$ अंतराल $[a, b]$ पर संतत है, जहाँ $b > a$ है। इससे हम पाते हैं कि फलन $f(x), f(a)$ और $f(b)$ के बीच का प्रत्येक मान लेगा, जहाँ $f(a)$ और $f(b)$ अंतराल $[a, b]$ के अंत्यबिंदुओं a और b पर फलन $f(x)$ के मान हैं। यह परिणाम मध्यवर्ती-मान प्रमेय कहलाता है क्योंकि $x = a$ तथा $x = b$ के मानों के बीच x के मान के लिए फलन $f(a)$ और $f(b)$ के मध्य का प्रत्येक मान लेता है। यदि फलन असंतत है तो इस प्रमेय का सत्य होना आवश्यक नहीं है। अब हम इस प्रमेय को औपचारिक रूप में प्रस्तुत करते हैं :

मान लीजिए $f(x)$, एक संवृत अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित एक संतत फलन है तथा $f(a) \neq f(b)$ है। ऐसी अवस्था में, $f(x)$ और $f(b)$ के मध्य किसी भी मान $\overline{y}$ के लिए, x का a और b के मध्य कम से कम एक ऐसा बिन्दु, $x = d$ (मान लीजिए) अवश्य होगा जिसके लिए $\overline{y} = f(d)$ हो।

संतुलन विश्लेषण में मध्यवर्ती मान प्रमेय का अनुप्रयोग

मध्यवर्ती-मान प्रमेय का उपयोग अर्थशास्त्र में किसी चर के विशिष्ट मान के अस्तित्व को दर्शाने के लिए बहुधा किया जाता है। आईए हम एक सरल मांग-आपूर्ति प्रतिमान पर विचार करें। मान लीजिए $q = D(p)$ एक मांग फलन है और $q = S(p)$ एक आपूर्ति फलन, जहाँ p वस्तु के प्रति इकाई कीमत को तथा q वस्तु की मात्रा को निरूपित करता है। ऐसे प्रतिमान में संतुलन कीमत, वह कीमत है जिस पर मांग और आपूर्ति की मात्रा समान हो। दूसरे शब्दों में, $p = p^* \geq 0$ संतुलन कीमत होगी यदि $D(p^*) = S(p^*)$ है। मांग या आपूर्ति फलन में से किसी में भी p^* का मान रख कर हम संतुलन मात्रा, q^*,ज्ञात कर सकते हैं। आलेखीय रूप में, हम कर सकते हैं कि संतुलन उस बिंदु (p^*, q^*) पर होगा जहाँ मांग वक्र, आपूर्ति वक्र को काटता है तथा p^* तथा q^* दोनों धनात्मक होते हैं।

कभी-कभी, मांग फलन और आपूर्ति फलन दोनों पर अलग-अलग विचार करने के स्थान पर इन्हें मिलाकर एक नया फलन $z(p) = D(p) - S(p)$ प्राप्त किया जा सकता है जिसे अतिरिक्त-मांग फलन कहा जाता है। ध्यान दें कि यदि $z(p) > 0$ है तो $z(p)$ का मान $S(p)$ पर $D(p)$ के आधिक्य को निरूपित करता है। इसी प्रकार यदि $z(p) < 0$ है तो $z(p)$ का निरपेक्ष मान $D(p)$ पर $S(p)$ के अधिक्य को निरूपित करता है। अतः, अतिरिक्त मांग फलन के संदर्भ में हम कह सकते है। कि $z(p^*) = 0$ होगा यदि $D(p^*) = S(p^*)$ हो तथा $z(p) \leq 0$ होगा यदि $D(p^*) = S(p^*)$ हो। अर्थात्, संतुलन कीमत वह कीमत $p^* > 0$ है जिसके लिए $z(p^*) = 0$ हो

आईए हम उन प्रतिबंधों पर विचार करें जो संतुलन कीमत के अस्तित्व को सुनिश्चित करने के लिए पर्याप्त हैं। इन्हें प्राप्त करने के लिए हमें मध्यवर्ती मान प्रमेय का उपयोग करेंगे। मान लीजिए हम एक ऐसी वस्तु लेते हैं जिसके लिए 0 कीमत पर आपूर्ति भी 0

है। अब मान लीजिए कि मांग 0 से अधिक है। अतः, 0 कीमत पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$z(0) = D(0) - S(0) > 0$$

अब मान लीजिए किसी बहुत अधिक कीमत, $\hat{p}$, पर कंपनियाँ इस वस्तु के उत्पादन को लाभकारी पाती हैं परंतु इस कीमत को ग्राहक बहुत अधिक पाते हैं। अतः, इस कीमत पर आपूर्ति, मांग से अधिक हो जाएगी। अर्थात् इस कीमत पर हम पाते है कि

$$z(\hat{p}) = D(\hat{p}) - S(\hat{p}) < 0.$$

अब ध्यान दें कि किस प्रकार हम यहाँ मध्यवर्ती–मान प्रमेयका उपयोग करते हैं। यदि मांग और आपूर्ति फलन, कीमतों के इस अंतराल $[0, \hat{p}]$ पर संतत हैं, तो $z(p)$ भी इस अंतराल $[0, \hat{p}]$ पर संतत होगा क्योंकि दो संतत फलनों के योग अथवा अंतर से प्राप्त फलन भी एक संतत फलन होता है। अब, मध्यवर्ती–मान प्रमेय के अनुसार z(0) और $z(\hat{p})$ के बीच का कोई भी मान, 0 और $\hat{p}$ के बीच किसी न किसी मान p पर प्राप्त किया जा सकता है। यहाँ क्योंकि $z(0) > 0$ तथा $z(\hat{p}) < 0$ है, तो हमें 0 और $\hat{p}$ के मध्य p का एक ऐसा मान, $p = c$ अवश्य मिलेगा जिस के लिए $z(c) = 0$ होगा। परंतु परिभाषा के अनुसार यह कीमत एक संतुलन कीमत है। अर्थात् $p^* = c$ है। अतः, हमने एक संतुलन कीमत सुनिश्चित कर ली है।

ऊपर की गई चर्चा को हम इस प्रकार सारबद्ध कर सकते हैं : यदि मांग एवं पूर्ति फलन संत हैं, तो अतिरिक्त मांग फलन भी संतत होगा। साथ ही इस स्थिति में नीचे दिए दोनों प्रतिबंध भी सत्य होंगे।

a) कीमत 0 पर मांग 0 से अधिक हो, तथा

b) कोई ऐसी 0 से बड़ी कीमत हो जिस पर आपूर्ति, मांग से अधिक हो जाए, अर्थात् अतिरिक्त मांग फलन शून्य से छोटा हो जाएं।

तो, हमें एक ऐसी कीमत, जो कि 0 से अधिक हो, प्राप्त हो जाएगी जिस पर अतिरिक्त मांग शून्य हो, अर्थात् हमें एक संतुलन कीमत प्राप्त हो जाएगी। स्वभाविक रूप से, यह तभी सत्य होगा यदि अतिरिक्त मांग फलन संतत होगा।

बोध प्रश्न 3

1) मध्यवर्ती–मान प्रमेय की व्याख्या कीजिए।

.....

.....

.....

2) नीचे दो बाज़ार मांग और आपूर्ति फलन दिए है :

$D(p) = 50 - 2p;$ $\quad$ $S(p) = -10 + p$

इस बाज़ार के लिए संतुलन कीमत (p^*) तथा संतुलन मात्रा ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि ये मांग एवं आपूर्ति फलन एक धनात्मक संतुलन कीमत के अस्तित्व के लिए पर्याप्त प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

.....

.....

8.6 सार-संक्षेप

इस इकाई में हमने सीमाओं पर केंद्रित पिछली इकाई में की गई चर्चा को आगे बढ़ाया है। हमने देखा कि कोई फलन संतत होता है यदि उसके आलेख में कोई विच्छिति या फिर प्लुति न हो। औपचारिक रूप से, एक फलन $f(x)$ किसी बिंदु $x=a$ पर संतत कहलाता है यदि $x=a$ पर $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व हो तथा इस सीमा का मान $f(a)$ के बराबर हो। किसी फलन की सीमा तथा उसका सांतत्य ज्ञात करने के लिए हम संख्यात्मक अथवा बीजगणितीय विधियों का प्रयोग कर सकते हैं।

इस इकाई में संतत फलनों की विशेषताओं तथा गुणधर्मों की विस्तार से चर्चा की गई। किसी फलन के अवकलनीय होने के लिए उसके संतत होने की अनिवार्यता पर प्रकाश डाला गया। अगली दो इकाईयों में हम अवकलनीय फलनों के बार में विस्तार से पढ़ेंगे। इस इकाई में हमने सांतत्य की संकल्पना को औपचारिक तथा अनौपचारिक दोनों प्रकार से समझा। इसके पश्चात् इकाई में असांतत्य की अवधारणा पर विचार किया गया और इसके विभिन्न प्रकारों पर प्रकाश डाला गया। अर्थशास्त्र में संतत और असंतत फलनों के कुछ अनुप्रयोगों की भी चर्चा की गई। यद्यपि अर्थशास्त्र में फलनों को संतत मान लिया जाता है ताकि सिद्धांतों को सरलता से समझा जा सके, तथापि हमने देखा कि हमें अर्थशास्त्र में अक्सर असंतत फलनों का प्रयोग भी करना पड़ता है। अंत में इस इकाई में हमने संतत फलनों से संबंधित एक महत्वपूर्ण प्रमेय, मध्यवर्ती–मान प्रमेय, की व्याख्या की और इसके अनुप्रयोग के रूप में संतुलन विश्लेषण पर चर्चा की।

8.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) $f(x)$ बिन्दु $x=1$ पर संतत है

2) अनुच्छेद 8.2 पढ़े और उत्तर लिखें

3) (i) $-\frac{1}{3}$; (ii) ∞

4) $$lim_{x\to -1}\frac{(x^3+1)(x-1)}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3+1)(x-1)}{x^2+x+2x+2}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3+1)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+1-x)(x-1)}{(x+2)(x+1)}$$
$$=\frac{[(-1)^2+1+1](-2)}{1}=-6$$

बोध प्रश्न 2

1) फलन $x=3$ पर असंतत है क्योंकि $\lim_{x\to 3} f(x)\neq f(3)$

2) फलन $x=0$ पर असंतत है

3) अनुच्छेद 8.3 देखें और उत्तर लिखें।

4) अनुच्छेद 8.3 देखें और उत्तर लिखें।

बोध प्रश्न 3

1) अनुच्छेद 8.5 पढ़ें और उत्तर लिखें।

2) $q^*=10; p^*=20$

इकाई 9 प्रथम-कोटि अवकलज*

संरचना

9.0 उद्देश्य

9.1 विषय-प्रवेश

9.2 अवकलज [Derivatives]

9.3 स्पर्श रेखा अवकलज के रूप में [Tangent Line as Derivative]

9.4 अवकलन के नियम [Rules of Differentiation]

9.5 अर्थशास्त्र में प्रथम कोटि अवकलजों के उपयोग [Use of first-order derivatives in Economics]

9.6 सार-संक्षेप

9.7 बोध-प्रश्नों के उत्तर/संकेत

9.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप कर पाएंगे :

- अवकलज एवं अवकल की संकल्पनाओं का वर्णन;
- किसी वक्र की स्पर्श रेखा के परिसीमन मान के रूप में अवकलज की परिभाषा;
- अवकलनीयता की शर्तें और इन शर्तों के संततता से संबंध; तथा
- अवकलन के कुछ महत्वपूर्ण नियमों का वर्णन।

9.1 विषय-प्रवेश

हमने इकाई 7 में सीमाओं तथा इकाई 8 में संततता के बारे में पढ़ा है। हमने देखा कि किन स्थितियों में किसी अनुक्रम की तथा किसी फलन की सीमा का अस्तित्व होता है। सीमा की संकल्पना के आधार पर, हमनें संततता पर चर्चा की। इस इकाई में हमने उल्लेख किया कि किसी फलन के अवकलज के अस्तित्व के लिए संततता महत्वपूर्ण है। वास्तव में संततता किसी फलन के अवकलज के अस्तित्व के लिए अनिवार्य है। यह इकाई फलनों के अवकलज ज्ञात करने से संबद्ध है। किसी फलन का अवकलज ज्ञात करने की प्रक्रिया को अवकलन कहते हैं। हम देखेंगे, कि अवकलज, अर्थशास्त्रीय घटनाओं को समझने के लिए एक अत्यन्त महत्वपूर्ण, बल्कि केंद्रीय, अवधारणा है। आईए हम अब अवकलजों का अध्ययन प्रारंभ करें। यहाँ हम यह उल्लेख कर सकते हैं कि यह इकाई केवल प्रथम-कोटि अवकलजों से संबद्ध है। अगली इकाई में हम अवकलजों के अवकलज और उनके भी अवकलजों अर्थात् उच्च-कोटि अवकलजों का अध्ययन करेंगे।

इस इकाई के अगले अनुच्छेद में हम अवकलजों की ज्यामितीय व्याख्या करेंगे। हम देखेंगे कि अवकलज किसी वक्र की जीवा के सीमांत मान के रूप में देखा जा सकता है क्योंकि सीमांत स्थिति में जीवा उस वक्र की एक स्पर्श रेखा बन जाती है। अगले अनुच्छेद में, हम अवकलज की औपचारिक भाषा देंगे और अवकल की महत्वपूर्ण संकल्पना की भी चर्चा करेंगे। इससे अगले अनुच्छेद में, हम अवकलनीयता की शर्तों पर बात करेंगे, अर्थात् किसी अवकलज के अस्तित्व के लिए कौन सी शर्तें आवश्यक हैं।

*श्री सौगतो सेन

उसके पश्चात्, इस इकाई में कुछ विशिष्ट फलनों के अवकलज ज्ञात करने के नियमों पर चर्चा की जाएगी। अंत में, इस इकाई में अर्थशास्त्र में प्रथम-कोटि अवकलजों के उपयोग के कुछ उदाहरण प्रस्तुत किए जाएंगे।

9.2 अवकलज [DERIVATIVES]

हम सीमा और संततता की संकल्पनाओं से पहले से ही परिचित हैं। ये संकल्पनाएं अवकलन गणित की प्रमुख विषयवस्तु, अर्थात्, एक फलन के अवकलज, की पृष्ठभूमि बनाती हैं। इस अनुच्छेद में हम अवकलजों का अध्ययन करेंगे।

अंतर अनुपात

एक फलन $y = f(x)$ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि जब स्वतंत्र चर x अपना मान x_1 से बदलकर x_2 करता है, निर्भर चर y अपना मान $y_1 = f(x_1)$ से बदल कर $y_2 = f(x_2)$ कर लेता है। x के मान में परिवर्तन, अंतर $x_2 - x_1$ से प्राप्त किया जा सकता है। गणित में किसी भी परिवर्तन को ग्रीक भाषा के बड़े अक्षर Δ (जिसे डेल्टा कहते हैं) से व्यक्त किया जाता है। अतः, x में होने वाले परिवर्तन को $\Delta x = x_2 - x_1$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसी प्रकार y में होने वाले परिवर्तन को $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ के रूप में लिखा जा सकता है। जब x, Δx से परिवर्तित होता है, तो हम पाते हैं कि y, Δy से परिवर्तित होता है।

इसलिए, x में हुए प्रति इकाई परिवर्तन के सापेक्ष y में हुए परिवर्तन को इस अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ से व्यक्त किया जाता है। क्योंकि यह भागफल दो अंतरों का अनुपात है, इसे अंतर अनुपात कहा जाता है। यह स्पष्ट है कि यह अंतर अनुपात, अंतराल (x_1, x_2) पर y में हुए औसत परिवर्तन का माप है। आईए हम एक फलन $y = f(x)$ पर विचार करें जहाँ y एक निर्भर चर तथा x एक स्वतंत्र चर है। मान लीजिए x में एक अति सूक्ष्म (infinitesimal)

परिवर्तन Δx है तथा y में (x में होने वाले इस परिवर्तन Δx के सापेक्ष) होने वाला आति सूक्ष्म परिवर्तन Δy है इस प्रकार की स्थितियाँ व्यापक रूप तथा अर्थशास्त्र संबंधी समस्याओं में अक्सर पाई जाती है। इसके लिए, फलन का संतत होना आवश्यक है। कोई फलन केवल तभी अवकलनीय होता है (अर्थात् उसके अवकलज का अस्तित्व होता है तथा उसे प्राप्त किया जा सकता है) जब वह संतत हो। और कोई फलन संतत होता है जब उसमें कोई विच्छेद (*break*) नहीं होता अर्थात् इसे बिना पेन/पेंसिल उठाए कागज़ पर बनाया जा सकता है।

यदि फलन $y = f(x)$ की संततता दी हुई है तो हम स्वतंत्र चर (x) में होने वाले परिवर्तन के सापेक्ष, निर्भर चर (y) में होने वाले परिवर्तन को ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं। दूसरे शब्दों में, हम दिए हुए फलन $y = f(x)$ से एक और फलन ज्ञात करना चाहते हैं, एक ऐसा फलन जो

x और y में होने वाले परिवर्तनों के बीच संबंध को व्यक्त करें। इस नए फलन को दिए हुए फलन का अवकलज कहते हैं और इसे अनेक चिह्नों, जैसे कि $y_1, y', \frac{dy}{dx}$ या $f'(x)$ से व्यक्त किया जाता है।

किसी अवकलज $\frac{dy}{dx}$ (अर्थात् अवकल गुणांक) को ज्ञात करने की प्रक्रिया को फलन का अवकलन कहते हैं। गणित की वह शाखा जो फलनों और उनके अवकलजों (अथवा उनकी अवकलनीयता) से संबंधित अध्ययन करती है, अवकलन गणित कहलाती है। ध्यान रहे एक फलन के अवकलज का अस्तित्व केवल तभी होता है जब वह फलन अवकलनीय हो। और यह तभी संभव होगा यदि फलन अपने प्रांत पर संतत हो।

एक फलन $f(x)$ का, चर x के सापेक्ष अवकल गुणांक, x में परिवर्तन के फलस्वरूप $f(x)$ में हुए परिवर्तन की तात्कालिक दर के बराबर होता है।

आईए हम फलन $y = f(x)$ ...(1) लें।

मान लीजिए x में एक सूक्ष्म परिवर्तन Δx, है, जिसके फलस्वरूप y में Δy परिवर्तन होता है, अर्थात्,

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर हम प्राप्त करते है।

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

दोनों पक्षों को Δx से भाग करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, जो कि अंतर अनुपात कहलाता है, $\frac{dy}{dx}$ की ओर जाता है, जब $\Delta x \to 0$ की ओर जाए। $\frac{dy}{dx}$ को y का x के सापेक्ष अवकलज या अवकलन गुणांक कहते हैं।

प्रतीकात्मक रूप में, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

इसको इस प्रकार पढ़ते हैं, $\frac{dy}{dx}$, जो कि $y = f(x)$ का अवकल गुणांक कहलाता है, अंतर अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ या $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ का सीमांत मान है।

प्रथम सिद्धांत द्वारा अवकलज

अवकलन के प्रथम सिद्धांत को स्पष्ट करने के लिए, आईए हम एक सरल सा फलन लें

$$y = x^2 \qquad \ldots(1)$$

मान लीजिए x में Δx वृद्धि होती है और इसके फलस्वरूप y में Δy परिवर्तन होता है।

अतः, फलन $y = f(x)$ से प्राप्त होत है।

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (4) में से (3) घटाने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

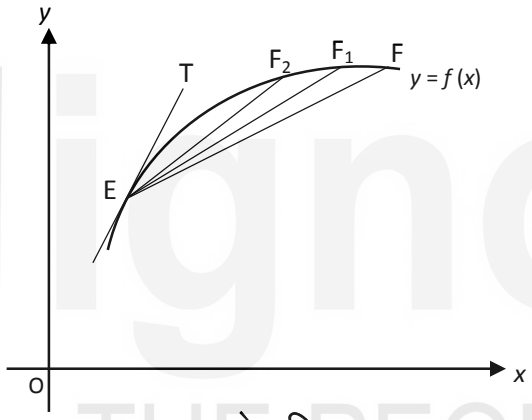
या $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$ (दोनों पक्षों को Δx से विभाजित करने पर)

$$= \frac{\cancel{x^2} + \Delta x^2 + 2x \cdot \Delta x - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{2x \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

या $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$$

9.3 स्पर्श रेखा अवकलज के रूप में [TANGENT LINE AS DERIVATIVE]

यद्यपि अवकलज मूलतः कलन की एक संकल्पना है, इसका एक रोचक ज्यामितीय निर्वचन है। आईए रेखाचित्र 9.1 पर विचार करें और अवकलज के इस ज्यामितीय प्रतिरूप को समझें।



रेखाचित्र 9.1

मान लीजिए, E और F, एक फलन $y = f(x)$ द्वारा वर्णित वक्र पर दो बिंदु हैं। मान लीजिए E के निर्देशांक (x_1, y_1) तथा F के निर्देशांक $(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ हैं। हम यह भी मान लेते हैं कि E एक स्थिर बिंदु है तथा F एक गतिमान बिंदु जो कि वक्र के साथ-साथ बिंदु E की ओर अग्रसर है। यदि हम बिंदुओं E और F को एक सरल रेखा द्वारा मिला दे ंतो रेखा $E\ F$ एक जीवा कहलाती है। जैसे-जैसे बिंदु F, बिंदु E की ओर जाता है, जीवा $E\ F$ की स्थिति निरंतर बदलती है। उदाहरण के लिए, F_1 पर, इसकी स्थिति EF_1 हो जाती है और F_2 पर EF_2 हो जाती है। हम इस रेखाचित्र में देख सकते हैं कि जैसे-जैसे बिंदु F, बिंदु E की ओर जाता है, जीवा E के सापेक्ष पर वामावर्त घूमती है। इस घूमने की प्रक्रिया में, यह जीवा निरंतर छोटी होती जाती है तथा जीवा और वक्र की चाप के मध्य का क्षेत्रफल निरंतर कम होता जाता है। वास्तव में, जब बिंदु F, बिंदु E तक पहुँचता है, जीवा EF, वक्र के बिंदु E पर एक स्पर्श रेखा (मान लीजिए ET) बन जाती है। अतः, स्पर्श रेखा ET की व्याख्या जीवा EF की सीमांत स्थिति के रूप मे की जा सकती है जबकि E बिंदु F की ओर जाता हो। परंतु, यह सीमांत स्थिति का अस्तित्व केवल तभी होगा जब वह वक्र बिंदु E पर संतत हो।

आईए अब हम इसकी जाँच करें कि जैसे-जैसे बिंदु F, बिंदु E की ओर जाता है तो जीवा EF की ढाल (या प्रवणता) किस प्रकार प्रभावित होती है। हम जानते हैं कि दो बिंदुओं के बीच किसी रेखा की ढाल, y के मान में परिवर्तन और x के मान में परिवर्तन के अनुपात से प्राप्त होती है। अतः, यदि गतिमान बिंदु की मूल स्थिति F है, तो जीवा EF की ढाल E और F के दिए हुए निर्देशांकों से प्राप्त की जा सकती है। इसका मान

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ प्राप्त होता है। रेखाचित्र से यह स्पष्ट है कि जैसे-जैसे बिंदु F बिंदु E की ओर बढ़ता है तो Δx और Δy के मानों में परिवर्तन होता है जिसके फलस्वरूप जीवा EF की विभिन्न स्थितियों मे लिए इसकी ढाल $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ भी परिवर्तित होती रहती है। अंततः, जब बिंदु F, बिंदु E तक पहुँचता है और $\Delta x \to 0$ की ओर जाता है, यह ढाल एक सीमा की ओर पहुँचती है जो कि $\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा प्राप्त होती है और जैसा कि हमने पहले भी चर्चा की है, यह सीमा $\frac{dy}{dx}$ कहलाती है। ध्यान दे कि जब F, E की ओर जाता है तो Δx का मान निरंतर कम होता जाता है अर्थात् Δx , 0 की ओर जाता है जिसे हम $\Delta x \to 0$ से व्यक्त करते हैं।

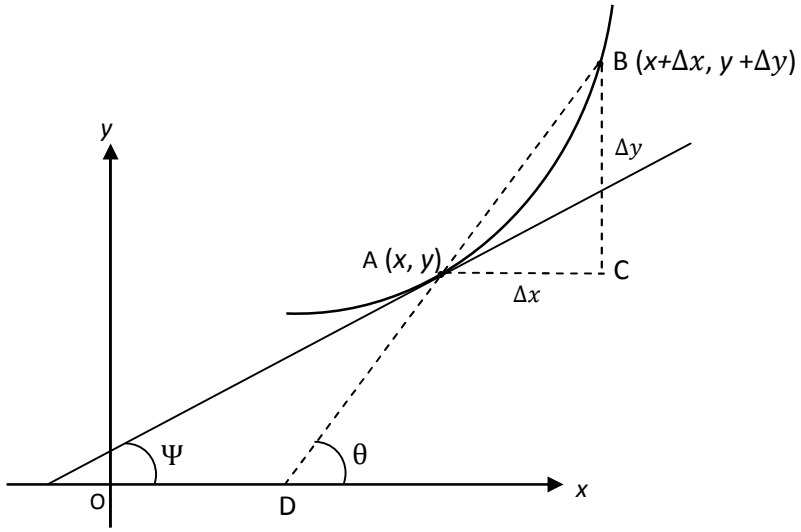
ऊपर की गई चर्चा को हम संक्षेप में इस प्रकार रख सकते हैं। जैसे-जैसे बिंदु F, बिंदु E की ओर जाता है, दो राशियाँ/मात्राएं (quantities) एक साथ अपनी-अपनी सीमाओं की ओर जाती हैं : जीवा EF एक सीमांत स्थिति की ओर जाती है जो कि वक्र के बिंदु E पर एक स्पर्श रेखा है और जीवा EF की ढाल $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ भी अपनी सीमा की ओर जाती है जो कि $\frac{dy}{dx}$ के बराबर है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि सीमा पर स्पर्श रेखा की ढाल $\frac{dy}{dx}$ है। हमें यह पहले से ही ज्ञात है कि $\frac{dy}{dx}$, x के किसी फलन y का अवकलज है। अतः, फलन $y = f(x)$ का $x = x_1$ पर अवकलज का निर्वचन दिए हुए फलन $y = f(x)$ के वक्र के $x = x_1$ के संगत बिंदु पर स्पर्श रेखा की ढाल के रूप में किया जा सकता है। परंतु, अवकलज तथा स्पर्श रेखा दोनों के अस्तित्व के लिए यह आवश्यक है कि फलन और वक्र दोनों ही x के दिए हुए मान पर संतत हो।

रेखाचित्र 9.2 में एक फलन $y = f(x)$ का वक्र दर्शाया गया है। इस वक्र पर, एक दूसरे के समीप, $A(x, y)$ और $B[(x+\Delta x),(y+\Delta y)]$ दो बिंदु लिए गए हैं। AB को मिलाकर आगे बढ़ाया गया है जिससे यह रेखा, x–अक्ष को बिंदु D पर काटती है तथा x-अक्ष के साथ कोण θ बनाती है।

A और B को मिलाती हुई इस रेखा AB की ढाल

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ अर्थात् लंब/आधार है।}$$

अब, मान लीजिए Δx , 0 की ओर जाता है अर्थात् $(\Delta x \to 0)$ है। इससे बिंदु B बिंदु A की ओर जाएगा (अर्थात् B → A होगा) और धीरे–धीरे रेखा AB , वक्र के बिंदु $A(x, y)$ पर एक स्पर्श रेखा बन जाएगी जो कि विस्तार करने पर x–अक्ष के साथ एक नया कोण, ψ , बनाएगी। इस स्पर्श रेखा की ढाल $\tan\psi$ है जो कि $\tan\theta$ का सीमांत मान है जब $\Delta x(= AC) \to 0$ हो।



रेखाचित्र 9.2

सांकेतिक रूप में इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$\tan \Psi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

इसे इस प्रकार पढ़ा जाता है।

किसी फलन $y = f(x)$ का अवकल गुणांक या अवकलज, अंतर अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ का सीमांत मान होता है जबकि Δx शून्य की ओर जाता है।

फलन $y = f(x)$ के किसी भी बिंदु A पर, $\frac{dy}{dx}$ उस बिंदु पर स्पर्श रेखा की ढाल ($\tan\psi$) के बराबर होता है। और यदि किसी बिंदु $x = a$ पर अंतर अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ की सीमा का अस्तित्व हो तो हम कह सकते हैं कि

- $f(x)$ फलन $x = a$ पर फलन $y = f(x)$ की सीमा है।
- फलन $y = f(x)$, $x = a$ पर संतत है।
- फलन $y = f(x)$, $x = a$ पर अवकलनीय है

हम इस इकाई में संततता के बारे में और विस्तार से पढ़ेंगे।

संततता और अवकलनीयता

हमने ऊपर देखा कि किसी फलन के स्वतंत्र चर के किसी मान पर अवकलज के अस्तित्व के लिए स्वतंत्र चर के उस मान पर फलन का संतत होना आवश्यक है। ज्यामितीय रूप में, इसका अर्थ है कि दिए हुए फलन के वक्र पर संगत बिंदु पर स्पर्श रेखा के अस्तित्व के लिए वक्र उस बिंदु पर संतत होना चाहिए। संततता अवकलनीयता के लिए एक अनिवार्य शर्त है परंतु पर्याप्त नहीं। एक ऐसा फलन जो संतत भी हो और अवकलनीय भी, एक मसृण (smooth) फलन कहलाता है।

बोध प्रश्न 1

1) किसी फलन की जीवा और फलन की स्पर्श रेखा में क्या अंतर है?

.....

.....

.....

.....

.....

2) किसी फलन $y = f(x)$ के लिए अवकलज की संकल्पना किस प्रकार फलन के वक्र की स्पर्श रेखा के रूप में समझी जा सकती है, व्याख्या कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

9.4 अवकलन के नियम [RULES OF DIFFERENTIATION]

अवकलज की संकल्पना को समझने के पश्चात् अब हम अवकलज ज्ञात करना सीखेंगे। कुछ नियमों का पालन करके अवकलज ज्ञात करने की प्रक्रिया को काफी हद तक सरल बनाया जा सकता है। आईए, अब हम इन नियमों का उल्लेख करें। इस नियमों की उपपत्ति हमारे पाठ्यक्रम के विषय क्षेत्र से बाहर है।

बीजगणितीय फलन

सर्वप्रथम, हम अपना ध्यान बीजगणितीय फलनों पर केन्द्रित करते हैं। मान लीजिए हमें चर x के दो फलन $f(x)$ और $g(x)$ दिए हैं। हम मान कर चलते हैं कि दोनों फलन अवकलनीय हैं।

नियम 1 : एक अचर का अवकलज

एक अचर का अवकलज शून्य होता है। माना $f(x) = C$ है, जहाँ C एक अचर है। इस स्थिति में

$$\frac{d}{dx}(C) = 0 \text{ होता है।}$$

नियम 2 : घातांक फलन का अवकलज

मान लीजिए $f(x) = x$ है, जहाँ n कोई भी वास्तविक संख्या है। तब, $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$ होगा।

नियम 3 : एक योग या अंतर का अवकलज

दो फलनों के योग (अंतर) का अवकलज, दोनों फलनों के अवकलजों के योग (अंतर) के बराबर होता है।

अर्थात्

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) \pm g(x)$$

नियम 4 : एक गुणनफल का अवकलज – गुणनफल नियम

दो फलनों के गुणनफल का अवकलज, पहले फलन और दूसरे फलन के अवकलज के गुणनफलन तथा दूसरे फलन और पहले फलन के अवकलज के गुणनफल के योग के बराबर होता है।

यदि $y = u.v$ है जहाँ $u = f(x)$ तथा $v = g(x)$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

टिप्पणी : यदि फलन में दो से अधिक फलनों का गुणनफल है, तो हम किन्हीं भी दो फलनों के गुणनफलों को पहला फलन तथा शेष बचे फलन (फलनों के गुणनफल) को दूसरा फलन मान लेते हैं और उन पर गुणनफल नियम लगाते है।

$$\frac{dy}{dx} = [f(x)\cdot g(x)]\cdot L'(x) + L(x)\cdot\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]$$

जहाँ $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$ है।

नियम 5 : भागफल नियम

दो फलनों के भागफल का अवकलज, अंश के अवकलज ओर हर के गुणनफल मे से हर के अवकलज और अंश के गुणनफल को घटाने पर प्राप्त हुए परिणाम को हर के वर्ग से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

माना $y = \frac{u}{v}$, है जहाँ $u = f(x)$ तथा $v = g(x)$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

नियम 6 : फलन के फलन का अवकलज – श्रंखला नियम

अभी तक हमने एक फलन का अवकलज ऐसे स्वतंत्र चर के सापेक्ष ज्ञात करना सीखा है जो फलन को प्रत्यक्ष रूप से प्रभावित करता है। अब हम एक फलन का अवकलन ऐसे स्वतंत्र चर के सापेक्ष ज्ञात करने पर विचार करेंगे जो फलन को प्रत्यक्ष रूप से नहीं अपितु अप्रत्यक्ष रूप से प्रभावित करता है। मान लीजिए y, u का फलन है और u, x का फलन है, तो x, y को अप्रत्यक्ष रूप में u के माध्यम से प्रभावित करता है। इस स्थिति में y का x के सापेक्ष अवकलज, y के u के सापेक्ष अवकलज और u के x के सापेक्ष अवकलज के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

नियम 7 : एक प्रतिलोम फलन का अवकलज

मान लीजिए $y = f(x)$ है। यदि हम इस फलन की सहायता से x को y के फलन के रूप में व्यक्त करें, तो यह फलन y का प्रतिलोम फलन कहलाता है। सांकेतिक रूप में हम इसे $x = f^{-1}(y)$ के रूप में लिखते हैं। एक फलन के प्रतिलोम फलन का अवकलज, मूल फलन के अवकलज के व्युत्क्रम के बराबर होता है बशर्ते दोनों फलनों का अस्तित्व हो। अर्थात्,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

नियम 8 : लघुगणकीय फलनों के अवकलज

आधार e वाले लघुगणकीय फलन के अवकलज का सूत्र ज्ञात करना अधिक सुविधाजनक है। इसलिए पहले हम इसी को लेते हैं। इस लघुगणक को हम संकेत $\log_e x$ से व्यक्त करते हैं (हमें यहाँ ध्यान देना चाहिए आधार e के लघुगणक फलन के लिए एक अन्य संकेत $\ln x$ का भी प्रयोग किया जाता है, जहाँ ln प्राकृतिक लघुगणक के लिए प्रयुक्त होता है)।

माना $y = \log_e x$ है। तो, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}(x) = \frac{1}{x}$ होता है।

ऊपर दिए परिणामों के आधार पर हम प्राप्त करते हैं।

$$\frac{d}{dx}(\log_e x^n) = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{d}{dx}(x^n)$$
$$= \frac{1}{x^n} \cdot nx^{n-1} = \frac{n}{x}$$

आईए, अब हम e के अतिरिक्त अन्य आधार वाले लघुगणक फलनों का अवकलज ज्ञात करें।

माना $y = \log_a x$ है जहाँ $a > 0$ है। $\log_a x$ का अर्थ आधार a पर, x का लघुगणक है।

इस स्थिति में

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log_e a} \text{ है।}$$

नियम 9 : चरघातांकीय फलनों के अवकलज

प्रारंभ करने के लिए, आईए हम आधार e वाले चरघातांकीय फलन पर विचार करें। माना $y = e^x$ है।

इस स्थिति में,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \text{ है।}$$

ऊपर प्राप्त परिणामों के आधार पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = e^{ax} \cdot \frac{d}{dx}(ax) = e^{ax} \cdot a = ae^{ax}$$

अब हम ऐसे चरघातांकीय फलनों के अवकलज पर विचार करेंगे जिनका आधार e न होकर कोई अन्य धनात्मक संख्या है। माना $y = a^x$ है जहाँ $a > 0$ हैं तो,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a \text{ होगा।}$$

आईए अब हम इन नियमों पर आधारित कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : यदि $y = x^5$, है, तो $\frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$ होगा। (नियम 1)

उदाहरण 2 : यदि $y = 10x$ है, तो $\frac{dy}{dx} = 10\frac{d}{dx}(x) = 10 \times 1 = 10$ होगा। (नियम 2)

उदाहरण 3 : यदि $y = 100x^3$ है, तो

$\frac{dy}{dx} = 100\frac{d}{dx}(x^3) = 100 \times 3x^{3-1} = 300x^2$ होगा। (नियम 3)

उदाहरण 4 : यदि $y = 100$ है, तो $\frac{dy}{dx} = 0$ होगा। (नियम 4)

उदाहरण 5 : यदि $y = ax^5 + bx^4 - cx^2$ है, तो

$\frac{dy}{dx} = a.\frac{d}{dx}(x^5) + b.\frac{d}{dx}(x^4) - c.\frac{d}{dx}(x^2)$ (नियम 3)

$$= a.5x^{5-1} + b.4.x^{4-1} - c.2.x^{2-1}$$

$$= 5ax^4 + 4bx^3 - 2cx \text{ होगा।}$$

उदाहरण 6 : यदि $y = 3x^6 + 2x^5 - 7x^3 + 3x^2 + 10$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = 3\cdot\frac{d}{dx}\left(x^6\right) + 2\cdot\frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 7\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + 3\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}(10) \quad \text{(नियम 3)}$$

$$= 3\times6\times x^{6-1} + 2\times5\times x^{5-1} - 7\times3\times x^{3-1} + 3\times2\times x^{2-1} + 0$$

$$= 18x^5 + 10x^4 - 21x^2 + 6x \text{ होगा।}$$

उदाहरण 7 : यदि $y = x^2 \log x$ है, तो

$\frac{dy}{dx} = x^2.\frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\frac{d}{dx}(x^2) = x^2.\frac{1}{x} + \log x \times 2x$ (नियम 4)

$$= x + 2x\log x$$

$$= x(1 + 2\log x) \text{ होगा।}$$

उदाहरण 8 : यदि $y = x^3 e^{2x}$ है, तो गुणनफलन नियम से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dy}{dx} = x^3\cdot\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right) + e^{2x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3\right) \quad \text{(नियम 4)}$$

$$= x^3\cdot2\cdot e^{2x} + e^{2x}\cdot3\cdot x^{3-1} = 2x^3e^{2x} + 3x^2e^{2x}$$

$$= x^2e^{2x}(2x+3)$$

उदाहरण 9 : यदि $y = e^x \cdot \log x$ है, तो गुणनफलन नियम से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dy}{dx} = e^x\cdot\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\cdot\frac{d}{dx}\left(e^x\right) \quad \text{(नियम 4)}$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot e^x = e^x\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

उदाहरण 10 : यदि $y = \frac{\log x}{x^2}$ है, तो भागफल नियम से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\log x) - \log x \cdot \frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2} \qquad \text{(नियम 5)}$$

$$= \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \log x \cdot 2 \cdot x}{x^4} = \frac{x - 2\log x(x)}{x^4}$$

$$= \frac{x[1 - 2\log x]}{x^4} = \frac{1 - 2\log x}{x^3}$$

उदाहरण 11 : यदि $y = \frac{20}{3x^4}$ है, तो भागफल नियम से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 \times \frac{d}{dx}(20) - 20 \times \frac{d}{dx}(3x^4)}{(3x^4)^2} = \frac{0 - 20 \times 12x^3}{9x^8} \qquad \text{(नियम 5)}$$

$$= \frac{-240x^3}{9x^8} = \frac{-80}{3x^5}$$

उदाहरण 12 : $y = \sqrt{1 - x^2}$ का x के सापेक्ष, श्रृंखला नियम का प्रयोग करते हुए, अवकलज ज्ञात कीजिए। हमें $y = (1 - x^2)^{1/2}$ दिया है।

$1 - x^2 = u$ रखें जिससे $y = u^{\frac{1}{2}}$ हो जाए।

और $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}$ प्राप्त होता है।

क्योंकि $u = 1 - x^2$ है, अतः, $\frac{du}{dx} = -2x$ है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \times -2x = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

उदाहरण 13 : श्रृंखला नियम के प्रयोग द्वारा $(3x^3 - 5x^2 + x - 1)^5$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

माना $u = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$ है। इससे हम पाते हैं कि $y = u^5$ है तथा $\frac{du}{dx} = 9x^2 - 10x + 1$ है।

साथ ही,

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(3x^3 - 5x^2 + x - 1)^4$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (9x^2 - 10x + 1) \times 5(3x^3 - 5x^2 + x - 1)^4$$

$$= 5(3x^3 - 5x^2 + x - 1)(9x^2 - 10x + 1)$$

उदाहरण 14 : यदि $y=a^{x \ln x}$ है, तो सूत्र $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ का प्रयोग करते हुए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

$u=x \ln x$ रखें। अतः $\frac{du}{dx}=x.\frac{1}{x}+\ \ln x = 1+\ln x$ होगा।

साथ ही, $y=a^u$ है और $\frac{dy}{du}=a^u \ln a$ है। अतः, हम पाते हैं कि

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ =(a^{x \ln x} \ln a)\,(1+\ln x)$ होगा।

अस्पष्ट अथवा निहित फलनों के अवकलज

एक अस्पष्ट अथवा निहित फलन एक ऐसा फलन है जो दो चरों x और y में परस्पर निर्भरता को व्यक्त करता है। x के प्रत्येक मान के लिए y का एक पूर्वनिर्धारित अथवा निश्चित मान होता है तथा इसका विलोम कथन भी सत्य होता है। एक चर कामान दूसरे चर के मान से ज्ञात किया जा सकता है। ऐसे फलन का एक उदाहरण है :

$$f(x,y): 2x^2+3xy+10y^2+5=0$$

आईए अब हम इसका x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करें।

$$4x+3x\cdot\frac{dy}{dx}+y\times 3+20y\cdot\frac{dy}{dx}+0=0$$

$$\Rightarrow\ 4x+3x\frac{dy}{dx}+20y\cdot\frac{dy}{dx}+3y=0 \qquad (\frac{dy}{dx} \text{ वाले पदों को एक साथ लिखने पर})$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}(3x+20y)+(4x+3y)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}(3x+20y)=-(4x+3y)$$

या $$\frac{dy}{dx}=-\frac{(4x+3y)}{(3x+20y)}$$

आईए हम एक और फलन $xy+(x+y+6)^4=0$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात करें। ध्यान रहे यहाँ हम y को x का फलन मान रहे हैं। अब, x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$x.\frac{dy}{dx}+y.1+4(x+y+6)^3\times\frac{d}{dx}(x+y+6)=0$$

$$x\frac{dy}{dx}+y+4(x+y+6)^3\times\left(1+\frac{dy}{dx}+0\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}[x+4(x+y+6)^3]=-[y+4(x+y+6)^3]$$

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{y+4(x+y+6)^3}{x+4(x+y+6)^3}\right]$$

प्राचलिक समीकरण और उनके अवकलज

दो चरों x और y के बीच $x = f(t)$ और $y = f(t)$ के रूप में व्यक्त संबंध को प्राचलिक रूप में व्यक्त संबंध कहते हैं। यहाँ चरों x और y के बीच स्पष्ट संबंध नहीं होता अपितु वे एक अन्य चर, जैसे कि यहाँ t, के माध्यम से संबंधित होते हैं। तीसरे चर t को प्राचल (parametric) कहते हैं। ऐसी स्थिति में $\frac{dy}{dx}$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

उदाहरण : यदि $x = 8t^2 + t + 7$ तथा $y = t^2 + 10t + 2$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $x = 8t^2 + t + 7$ तथा $y = t^2 + 10t + 2$ है अतः

$$\frac{dx}{dt} = 16t + 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t + 10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+10}{16t+1}$$

बोध प्रश्न 2

1) $y = 3x^{m+1} + 6x^m$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

2) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) यदि $y = \sqrt{(1+x^2)}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $y\frac{dy}{dx} - x = 0$ है।

.....

.....

.....

.....

.....

4) $y = 4x^2 + 2$ से $\frac{dx}{dy}$ ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

5) $y = \log\sqrt{2+x^2}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

6) $y = e^{2x}\log(2x+1)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

7) $y = 2m^2 + 6m + 1$ का अवकलज $m^2 + 5$ के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

9.5 अर्थशास्त्र में प्रथम कोटि अवकलजों के उपयोग [USE OF FIRST ORDER DERIVATIVES IN ECONOMICS]

अर्थशास्त्र में एक कुल मात्रा फलन के परिवर्तन की दर $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ उसके सीमांत फलन को निरूपित करती है। अर्थात्

सीमांत फलन $= \frac{d}{dx}$ (कुल फलन)

उदाहरण के लिए,

1) सीमांत उपयोगिता (MU) $= \frac{d}{dx}$ [कुल उपयोगिता (TU)]

2) सीमांत लागत (MC) $= \frac{d}{dx}$ [कुल लागत (TC)]

3) सीमांत आगम (MR)$= \frac{d}{dx}$ [कुल आगम (TR)]

4) सीमांत उत्पाद (MP)$= \frac{d}{dx}$ [कुल उत्पाद (TP)]

अवकलज एवं सीमांत विश्लेषण

अर्थशास्त्र तथा अन्य संबंधित विषयों में, हमारी रूचि अक्सर दो राशियों x और y के बीच फलनिक संबंध में होती है। उदाहरण के लिए, हमारी दिलचस्पी लागत और उत्पादन के बीच संबंध जानने में हो सकती है। सामान्यतः इस प्रकार के संबंधों के अध्ययन में दो प्रकार की संकल्पनाओं का उपयोग किया जाता है : औसत की संकल्पना तथा सीमांत की संकल्पना। औसत की संकल्पना कुल राशियों x और y पर केन्द्रित होती है। अतः, यदि हमें उत्पादन की कुल लागत तथा कुल उत्पाद दिया हो, तो हम उत्पादन की औसत लागत का निर्धारण कर सकते हैं जो एक प्रकार से हमें कुल उत्पाद के लिए प्रति इकाई लागत का अनुमान देती है। दूसरी ओर सीमांत की संकल्पना का संबंध सीमा पर y और x के मानों में परिवर्तन से है। अतः, हम अक्सर सीमांत लागत को उत्पाद की एक अतिरिक्त इकाई की वृद्धि के सापेक्ष, कुल लागत में होने वाले परिवर्तन के रूप में परिभाषित करते है। यदि कुल लागत में परिवर्तन को ΔC से व्यक्त किया जाएं तथा उत्पाद में परिवर्तन के Δq से व्यक्त किया जाएं, तो सीमांत लागत $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ से मापी जाएगी। यद्यपि, सीमांत लागत का ठीक–ठीक माप उत्पादन में वृद्धि को (जितना कम हो सके) कम करके प्राप्त किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में, सीमांत लागत का मान $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ की सीमा के बराबर होगा जबकि $\Delta q \to 0$ हो। यदि हम अनुच्छेद 9.2 में की गई चर्चा को स्परण करें तो पाएंगे कि सीमांत लागत वास्तव में परिवर्तन की तात्कालिक दर है और एक अवकलज के रूप में व्यक्त की जा सकती है। यदि कुल लागत फलन $C = f(q)$ भृषण है, तो सीमांत माँग उत्पाद के सापेक्ष कुल लागत के अवकलज के रूप में परिभाषित की जाती है तथा इसे $\frac{dC}{dq}$ से व्यक्त किया जाता है। अर्थशास्त्र तथा व्यवसायिक अध्ययन में बहुधा प्रयोग होने वाली कुछ और सीमांत संकल्पनाएं नीचे दी गई हैं :

सीमांत उपयोगिता : यदि कुल उपयोगिता (U) उपयोग की गई वस्तु का मात्रा (q) का एक फलन है, तो सीमांत उपयोगिता $\frac{dU}{dq}$ द्वारा प्राप्त होगी।

सीमांत उत्पाद : यदि उत्पादन फलन कुल उत्पाद (Q) उत्पादन के किसी कारक (x) के फलन के रूप में निरूपित है, तो उत्पादन के उस कारक के लिए सीमांत उत्पाद $\frac{dQ}{dx}$ से प्राप्त होता है।

सीमांत आगम : यदि कुल आगम (R), बिक्री की गई उत्पाद की मात्रा (q) का फलन है, तो सीमांत आगम $\frac{dR}{dq}$ द्वारा प्राप्त होगा।

उदाहरण : यदि माँग का नियम $p = \frac{10}{q} - 5$ है, जहाँ p कीमत और q माँग की मात्रा है, तो सिद्ध कीजिए कि जैसे–जैसे उत्पादन q बढ़ता है कुल संप्राप्ति कम होती है यदि सीमांत आगम एक ऋणात्मक अचर हो।

हल : मान लीजिए कि कुल आगम R है। तो

$$R = pq = \left(\frac{10}{q} - 5\right)q = \left(\frac{10 - 5q}{q}\right)q = 10 - 5q \text{ होगा।}$$

हम यह स्पष्टतः देख सकते हैं कि जैसे–जैसे q बढ़ता है, $10 - 5q$ कम होता जाता है। अतः, जैसे–जैसे उत्पादन q बढ़ता है, कुल आगम R कम होता जाता है।

साथ ही, सीमांत आगम

$\text{MR} = \frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(10 - 5q) = -5$ है। अतः, सीमांत आगम (MR) एक ऋणात्मक अचर है।

उदाहरण : एक वस्तु के उत्पादन की लागत फलन $C = 100 + 3q + \frac{1}{25}q^2$ द्वारा निरूपित है, जहाँ C कुल लागत तथा q उत्पाद की मात्रा है। उत्पादन का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर औसर लागत और सीमांत लागत बराबर हो जाएं।

हल : सीमांत लागत, $MC = \frac{dC}{dq} = \frac{d}{dq}\left(100 + 3q + \frac{1}{25}q^2\right) = 3 + \frac{2}{25}q$ है।

औसत लागत, $AC = \frac{C}{q} = \frac{100}{q} + 3 + \frac{q}{25}$ है। q का वह मान प्राप्त करने के लिए जिसके लिए $AC = MC$ होगा, हम लिखते हैं :

$$\frac{100}{q} + 3 + \frac{q}{25} = 3 + \frac{2q}{25}$$

$$\text{या} \quad \frac{100}{q} = \frac{q}{25}$$

या $q^2 = 2500$

या $q = 50$ (q के ऋणात्मक मानों पर हम विचार नहीं करते)

फलन की लोच

मान लीजिए हमें एक फलन $y = f(x)$ दिया है और हम, x में एक ज्ञात परिवर्तन के सापेक्ष y की संवेदनशीलता के माप में रूचि रखते हैं। x के सापेक्ष y की लोच जिसे हम सामान्यतः η (ग्रीक अक्षर ईटा) से निरूपित करते हैं सरलता से ज्ञात की जा सकती है। किसी फलन की लोच निर्भर चर में अनुपातिक परिवर्तन के स्वतंत्र चर में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित की जाती है।

ध्यान रहे कि कभी-कभी वाक्याँश 'अनुपातिक परिवर्तन' के स्थान पर 'प्रतिशत परिवर्तन' का भी प्रयोग किया जाता है। मान लीजिए कि स्वतंत्र चर के मूल मान x में Δx के बराबर परिवर्तन होता है और इसके परिणाम स्वरूप, निर्भर चर के मूल मान में Δy के बराबर परिवर्तन हो जाता है। इस प्रकार स्वतंत्र अचर में अनुपातिक परिवर्तन $\frac{\Delta x}{x}$ तथा निर्भर चर में अनुपातिक परिवर्तन $\frac{\Delta y}{y}$ है। अतः फलन की लोच

$$\eta_{yx} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \times \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

होगी। लोच का यह माप बिंदु लोच कहलाती है क्योंकि यह फलन के वक्र पर एक दिए हुए बिंदु पर लोच का माप प्रदान करती है। यह स्पष्ट है कि लोच का ठीक-ठीक माप, हम x में होने वाले परिवर्तन को जितना संभव हो उतना छोटा करके प्राप्त कर सकते हैं। इस स्थिति में बिंदु लोच का मान हो जाता है।

$$\eta_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{y} \times \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \times \frac{dy}{dx}$$

अतः, एक फलन $y = f(x)$ की बिंदु लोच को x और y के प्रारंभिक मानों के अनुपात और y के x के सापेक्ष अवकलज के गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। सांकेतिक रूप में इस निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\eta_{yx} = \frac{x}{y} \times \frac{dy}{dx}$$

हम अर्थशास्त्र और व्यवसायिक अध्ययन में लोच की संकल्पना का प्रयोग अक्सर करते हैं। आईए हम अर्थशास्त्र में पाएं जाने वाले कुछ फलनों की लोच ज्ञात करें।

1) माँग की कीमत लोच

माँग की कीमत लोच, कीमत में परिवर्तन के सापेक्ष माँग की मात्रा की संवेदनशीलता का माप है। सामान्यतः माँग की लोच का अर्थ माँग की कीमत लोच ही होता है। इसे माँग की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन और कीमत में

अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। मान लीजिए, $q = f(p)$ एक दिया हुआ माँग फलन है, जहाँ q माँग की मात्रा तथा p, कीमत को निरूपित करता है। इस स्थिति में माँग की कीमत लोच $\eta_{qp} = -\frac{p}{q} \times \frac{dq}{dp}$ से व्यक्त की जाती है। चूँकि माँग की मात्रा और कीमत में प्रतिलोम संबंध होता है, $\frac{dq}{dp}$ ऋणात्मक होगा। इसलिए लोच के माप को धनात्मक बनाने के लिए, हम इसके सूत्र में ऋण चिह्न लगाते हैं।

औसत आगम, सीमांत आगम और माँग की कीमत लोच में संबंध

आईए हम एक माँग फलन $q = f(p)$ पर विचार करें। मान लीजिए R ($= pq$) कुल आगम, AR औसत आगम, MR सीमांत आगम तथा η_{qp} माँग की कीमत लोच है तो हम पाते हैं कि

$$MR = \frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(pq) = p + q\frac{dp}{dq}$$

इस समीकरण के दाएं पक्ष को p से गुणा तथा विभाजित करने पर हम पाते हैं कि

$$MR = p\left(\frac{p}{p} + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right) = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right) = p\left(1 + \frac{1}{\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}}\right)$$

अब हम जानते हैं कि $\eta_{qp} = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ तथा $AR = \frac{R}{q} = \frac{pq}{q} = p$ है। इन व्यंजकों को ऊपर दिए MR के सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि

$$MR = AR\left(1 - \frac{1}{\eta_{qp}}\right)$$

$$or\ \frac{MR}{AR} = 1 - \frac{1}{\eta_{qp}}$$

$$or\ \frac{1}{\eta_{qp}} = 1 - \frac{MR}{AR} = \frac{AR - MR}{AR}$$

$$\therefore \eta_{qp} = \frac{AR}{AR - MR}$$

2) **आपूर्ति की कीमत लोच**

आपूर्ति की कीमत लोच, कीमत में परिवर्तन के सापेक्ष आपूर्ति की गई मात्रा में परिवर्तन की संवेदनशीलता का माप है। इसे केवल आपूर्ति की लोच भी कहा जाता है। इसे एक वस्तु की आपूर्ति की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन और कीमत में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। मान लीजिए, $q = f(p)$ एक दिया हुआ आपूर्ति फलन है, जहाँ q पूर्ति की मात्रा तथा p वस्तु की कीमत है। इस स्थिति में, आपूर्ति की कीमत लोच

$$\eta_{qp} = \frac{p}{q} \times \frac{dq}{dp}$$

के द्वारा व्यक्त होती है।

3) **माँग की आय लोच**

माँग की आय लोच, आय में परिवर्तन के सापेक्ष माँग की संवेदनशीलता का माप है। इसे किसी वस्तु की माँग में अनुपातिक परिवर्तन और उपभोक्ता की आय में अनुपातिक परिवर्तन और उपभोक्ता की आय में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। मान लीजिए, q, माँग की मात्रा तथा y, आय है। तो, माँग की आय लोच होगी :

$$\eta_{qy} = \frac{y}{q} \times \frac{dq}{dy}$$

यहाँ हमने माँग के अन्य निर्धारक तत्वों को नजर अंदाज कर दिया है।

4) **लागत की लोच**

लागत की लोच उत्पाद में परिवर्तन के सापेक्ष कुल लागत की संवेदनशीलता का माप है। इसे उत्पाद की कुल लागत में अनुपातिक परिवर्तन और उत्पाद के अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। मान लीजिए कि कुल लागत फलन $C = f(q)$ है जहाँ C कुल लागत तथा q उत्पाद की मात्रा है। इस स्थिति में लागत की लोच का माप नीचे दिए सूत्र से व्यक्त होगा :

$$\eta_{cq} = \frac{q}{C} \times \frac{dC}{dq}$$

उदाहरण : यदि माँग का नियम $q = \frac{20}{p+1}$ और $p = 3$ है, तो माँग की कीमत लोच ज्ञात कीजिए।

हल : माँग की कीमत लोच, सूत्र $\eta_{qp} = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ द्वारा प्राप्त होती है। अब हमें, $q = \frac{20}{p+1}$ दिया है। अतः, हम पाते हैं कि

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{20}{p+1}\right) = \frac{(p+1)\frac{d}{dp}(20) - 20\frac{d}{dp}(p+1)}{(p+1)^2} = \frac{-20}{(p+1)^2}$$

$$\therefore \eta_{qp} = -\frac{p}{q} \times \frac{-20}{(p+1)^2} = \frac{20p}{q(p+1)^2}$$

है। इस व्यंजक में $q = \frac{20}{p+1}$ रखने पर हम प्राप्त करते है :

$$\eta_{qp} = \frac{20p}{q(p+1)^2} = \frac{(p+1)20p}{20(p+1)^2} = \frac{p}{p+1}$$

जब $p = 3$ है, तो $\eta_{qp} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} = 0.75$ होगा।

अतः, $p = 3$ पर माँग की कीमत लोच 0.75 है।

उदाहरण : एक थोक विक्रेता 500 किग्रा. आलू की आआपूर्ति 10रू. प्रति किलो की कीमत पर करता है। यदि कीमत में 10 प्रतिशत की वृद्धि होती है, तो वह 510 किग्रा. की आआपूर्ति करता है। मान लीजिए कि उत्पादक का आपूर्ति फलन रैखिक है उत्पादक की प्रारंभिक कीमत के स्तर पर आपूर्ति की लोच ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए आपूर्ति की मात्रा q तथा वस्तु की कीमत p है। क्योंकि आपूर्ति फलन रैखिक है, इसका समीकरण $q = a + bp$ के प्रकार का होगा जहाँ a और b अचर हैं। यह समीकरण a और b के प्रत्येक मान के लिए एक सरल रेखा को व्यक्त करता है। हमें दिया है कि जब वस्तु की कीमत में 10 प्रतिशत की वृद्धि होती है, तो नई कीमत 11रू. प्रति किग्रा. हो जाती है।

जब कीमत 10रू. प्रति किग्रा. है तो आपूर्ति की मात्रा 500 किग्रा. है। इन मानों को आपूर्ति फलन $q = a + bp$ में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$500 = a + 10b$$

जब कीमत 11रू. प्रति किग्रा. है, तो आपूर्ति की मात्रा 510 किग्रा. है। इन मानों को आपूर्ति फलन में रखने पर हम पाते हैं कि

$$510 = a + 11b$$

है। इन समीकरणों को a और b के लिए हल करने पर हम पाते हैं कि $a = 400$ तथा $b = 10$ है।

अतः, आपूर्ति फलन

$$q = 400 + 10p$$

बन जाता है। हमें ज्ञात है कि आपूर्ति की लोच सूत्र $\eta_{qp} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ द्वारा प्राप्त होती है। उक्त पूर्ति फलन से हम पाते हैं कि

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d}{dp}(400 + 10p) = 10$$

है। प्रारंभिक कीमत $p = 10$ पर $q = 500$ है। इन मानों को ऊपर प्राप्त आपूर्ति की लोच के व्यंजक में रखकर हम प्राप्त करते हैं :

$$\eta_{qp} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{10}{500} \times 10 = \frac{1}{5} = 0.2$$

अतः, 10रू. प्रति किग्रा. प्रारंभिक कीमत पर आपूर्ति की लोच 0.2 है।

उदाहरण : एक वस्तु की माँग, x, में इसके कीमत p में परिवर्तन के सापेक्ष नियम $p = \beta - \alpha x$ (जहाँ $\alpha, \beta > 0$ हैं) द्वारा परिवर्तित होती है। माँग की लोच ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि माँग (x) कीमत (p) पर निर्भर है, इसलिए $x = f(p)$ है। $p = \beta - \alpha x$ से हम प्राप्त करते हैं

$$x = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{p}{\alpha}. \quad \Rightarrow x = \tfrac{1}{\alpha}(\beta - p)$$

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dp} = 0 - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

परिभाषा के अनुसार, माँग की लोच $\eta_{xp} = -\left(\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}\right)$ है।

$$\eta_{xp} = -\left(-\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{p}{\frac{1}{\alpha}(\beta - p)}\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha p}{\beta - p} = \frac{p}{\beta - p}$$

उदाहरण : एक वस्तु का आपूर्ति फलन $x = a\sqrt{p-b}$ है, जहाँ p वस्तु की प्रति इकाई कीमत, x माँग की मात्रा तथा a, b धनात्मक अचर हैं। आपूर्ति की लोच ज्ञात कीजिए। वस्तु की कीमत तथा आपूर्ति की लोच में हमें किस प्रकार का संबंध प्राप्त होता है?

हल : i) दिए हुए आपूर्ति फलन से हम प्राप्त करते हैं :

$$x = a\sqrt{p-b} = a(p-b)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{dp} = a \cdot \frac{1}{2}(p-b)^{-\frac{1}{2}} \times 1 = \frac{a}{2(p-b)^{1/2}}$$

$$\eta_{xp} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = \frac{a}{2(p-b)^{1/2}} \times \frac{p}{a(p-b)^{1/2}} = \frac{\cancel{a}p}{2\cancel{a}(p-b)} = \frac{p}{2(p-b)}$$

ii) p और η_{xp} में एक स्पष्ट संबंध प्राप्त करने के लिए हम $\frac{p}{2(p-b)}$ को इस प्रकार लिखते हैं

$$\frac{(p-b)+b}{2(p-b)} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{b}{p-b}\right]$$

अब, जब p (जो कि हर में उपस्थित है) बढ़ता है तो $(p-b)$ का मान भी बढ़ता है, अतः $\frac{b}{p-b}$ का मान कम होता है और पूरे व्यंजक $\frac{1}{2}\left[1 + \frac{b}{p-b}\right]$ जो कि η_{xp} को निरूपित करता है, का मान कम हो जाता है। अतः, कीमत के स्तर में वृद्धि से आपूर्ति की लोच कम होती है।

उदाहरण : सोफासेट्स की माँग (x) नियम $x = 100 + 1.5M$ से प्राप्त होती है जहाँ M उपभोक्ता की आय है। $M = 10{,}000$ के लिए माँग की कीमत लोच ज्ञात कीजिए।

हल : हम आय- माँग फलन $x = 100 + 1.5M$ दिया है।

$$\therefore \frac{dx}{dM} = 0 + 1.5 = 1.5$$

अतः, माँग की आय लोच होगी

$$e_M = \frac{dx}{dM} \times \frac{M}{x} = 1.5 \times \frac{M}{100 + 1.5M}$$

$$= \frac{1.5M}{100 + 1.5M}$$

$M = 10{,}000$ के लिए

$$e_M = \frac{1.5(10{,}000)}{100 + 1.5(10{,}000)} = \frac{15000}{15100} = \frac{15}{151} = 0.0993 \text{ है।}$$

उदाहरण : रैखिक माँग नियम फलन $p = 100 - .5x$ के लिए संबंध $e = \frac{AR}{AR - MR}$ की जाँच कीजिए।

हल : दिया हुआ माँग फलन $p = 100 - .5x$ है।

औसत आगम, $AR = p = 100 - .5x$ है,

कुल आगम $TR = px = 100x - .5x^2$ है, तथा

सीमांत आगम $MR = \frac{d}{dx}(100x - .5x^2) = 100 - x$ है।

अतः, $e = \frac{AR}{AR - MR} = \frac{100 - .5x}{100 - .5x - 100 + x} = \frac{100 - .5x}{0.5x}$ ...(5) है

अब हम लोच, सूत्र $e = -\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$ द्वारा ज्ञात करते हैं।

दिए हुए फलन से हम पाते हैं कि $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dx}{dp}} = \frac{-1}{.5}$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{1}{0.5} \times \frac{100 - .5x}{x} = \frac{100 - .5x}{0.5x} \qquad \ldots(6)$$

समीकरण (5) और (6) से हम पाते हैं कि संबंध $e = \frac{AR}{AR - MR}$ दिए हुए माँग फलन के लिए सत्य है।

उदाहरण : माँग फलन $p = ax^{\beta}\ (a > 0)$ के लिए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें :

i) सीमांत आगम (MR) क्या है?

ii) माँग की लोच ज्ञात कीजिए।

iii) किन स्थितियों में, किसी माँग फलन की लोच 1 होगी?

हल : हमें दिया है कि $AR: p = ax^{\beta}$ $(a > 0)$ है।

i) कुल आगम, $TR = px = ax^{\beta+1}$ तथा $MR = \frac{d}{dx}(TR) = a(\beta+1)x^{\beta}$

$= (\beta+1)ax^{\beta} = (\beta+1)p$ है।

ii) माँग की लोच सूत्र $e = -\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$ से प्राप्त होती है।

यहाँ $p = ax^{\beta}$ है। अतः, $\frac{dp}{dx} = a\beta x^{\beta-1}$ होगा।

$$= -\frac{1}{a\beta x^{\beta-1}} \cdot \frac{p}{x} = -\frac{1}{a\beta x^{\beta-1}} \cdot \frac{ax^{\beta}}{x} = -\frac{1}{\beta}$$

$$\Rightarrow e = -\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$$

अर्थात् माँग की लोच, $e = -\frac{1}{\beta}$ है।

iii) यदि $e = 1$ है, तो $-\frac{1}{\beta} = 1$ होगा।

अर्थात् $\beta = -1$ होगा।

बोध प्रश्न 3

1) एक एकाधिकारी उद्योगपति के लिए माँग फलन $p = 15 - \frac{1}{5}q$ है, जहाँ p कीमत तथा q माँग की मात्रा है। सीमांत आगम ज्ञात कीजिए।
क्या इस स्थिति में औसत आगम, सीमांत आगम तथा लोच के मध्य का संबंध सत्य होगा? किस कीमत पर सीमांत आगम शून्य के बराबर होगी।

.....

.....

.....

.....

2) एक उत्पादक के लिए लागत फलन $C = 100q - \frac{10}{3}q^2 + \frac{q^3}{9}$ दिया है, जहाँ C, उत्पादन की लागत तथा q, उत्पादन का स्तर है। उत्पादन का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिसके लिए सीमांत लागत, औसत लागत के बराबर हो।

.....

.....

.....

3) एक उत्पादक का उत्पादन x, श्रम बल की मात्रा L से संबंध $X = 91\,L + 16\,L^2 - L^3$ से वर्णित है।

i) सीमांत उत्पाद फलन तथा औसत उत्पाद फलन ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

ii) श्रम का सीमांत उत्पाद MP_L तथा औसत सीमांत उत्पाद AP_L ज्ञात कीजिए यदि यह दिया हो कि उत्पादक 200 श्रमिकों को नियुक्त करने का निर्णय लेता है।

.....

.....

.....

.....

.....

iii) यदि उत्पादक चाहता हो कि $MP_L = 1200$ इकाई हो, तो उसे कितने श्रमिक नियुक्त करने चाहिए?

.....

.....

.....

.....

iv) यदि मज़दूरी की दर 50रू. प्रति श्रमिक हो, तो सीमांत लागत को श्रम के फलन के रूप मे ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

9.6 सार-संक्षेप

किसी फलन का अवकलज, अवकलन गणित की केंद्रीय संकल्पना है। यह मूलतः एक सीमा है और इसका मूल्यांकन फलन की संततता पर आधारित होता है। यह इकाई अवकलजों पर चर्चा से प्रारंभ हुई। एक फलन के अवकलज को परिभाषित करने के लिए सीमा की संकल्पना को अंतर भागफल पर लगाया गया। किसी फलन $y = f(x)$ का अंतर भागफल $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा प्राप्त किया जाता है। यह x के आस–पास किसी अंतराल

में, x के प्रति इकाई परिवर्तन के सापेक्ष, y में होने वाले औसत परिवर्तन का माप होता है। जब हम अंतर भागफल की सीमा निकालते हैं जबकि $\Delta x \to 0$ हो (Δx, 0 की ओर जाता हो), तो हमें x के सापेक्ष y का अवकलज प्राप्त होता है और इसे हम $\frac{dy}{dx}$ से व्यक्त करते हैं। यह x में होने वाले अति सूक्ष्म परिवर्तन के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को दर्शाता है। एक प्रकार से यह x के किसी मान के लिए y में होने वाला अति सूक्ष्म या सीमांत परिवर्तन है। ज्यामितीय रूप में, x के किसी मान के लिए, फलन $y = f(x)$ का अवकलज, दिए हुए फलन के वक्र के संगत बिंदु पर स्पर्श रेखा की ढाल के रूप में देखा जा सकता है। किसी फलन के किसी दिए हुए बिंदु पर अवकलज के अस्तित्व के लिए, उस बिंदु पर फलन की संततता, एक अनिवार्य शर्त है। परंतु यह एक पर्याप्त शर्त नहीं है। अर्थशास्त्र तथा अन्य संबंधित विषयों में प्रयोग होने वाली 'सीमांत' संकल्पना अवकलज का एक महत्वपूर्ण प्रतिरूप है।

अवकलज गणित में हम मूलतः एक दिए हुए फलन से एक नया फलन प्राप्त करते हैं। इस प्रकार प्राप्त फलन को दिए हुए फलन का अवकलज कहते हैं तथा उसको अनेक प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है। अतः, प्रतिकात्मक रूप में, यदि $y = f(x)$ एक प्रदत्त फलन है, तो उसका अवकलज या अवकलन गुणांक $y_1, y', \frac{dy}{dx}$ अथवा $f'(x)$ इत्यादि प्रतीकों से व्यक्त किया जा सकता है। किसी फलन का अवकलज ज्ञात करने की इस प्रक्रिया को अवकलन कहते हैं। इसके पश्चात् इस इकाई में अवकलज ज्ञात करने के विभिन्न मानक नियमों की चर्चा की गई जिनमें फलनों के योग या अंतर का अवकलन, गुणनफल का नियम, भागफल का नियम, श्रेणी नियम इत्यादि सम्मिलित हैं।

अंत में हमने देखा कि किस प्रकार अवकलन का प्रयोग अर्थशास्त्र में सीमांत फलन जेसे कि सीमांत आगम, सीमांत लागत इत्यादि को ज्ञात करने में तथा लोच की संकल्पना को समझने में किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, इस इकाई में, प्रथम–कोटि अवकलजों के अर्थशास्त्र में होने वाले अन्य अनुप्रयोगों की चर्चा भी की गई।

9.7 बोध-प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) भाग 9.3 पढ़ें और उत्तर लिखें।

2) भाग 9.3 पढ़ें और उत्तर लिखें।

बोध प्रश्न 2

1) $3(m+1)\,x^m + 6m\,x^{m-1}$

2) $\frac{-2}{(x+1)^3}$

3) भाग 9.4 पढ़ें और उत्तर लिखें।

4) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{8x}$

5) $\frac{x}{2+x^2}$

6) $2e^{2x}\left[\frac{1}{(2x+1)} + \log(2x+1)\right]$

7) $\frac{2m+3}{m}$

बोध प्रश्न 3

1) भाग 9.5 पढ़ें और उत्तर लिखें।

2) भाग 9.5 पढ़ें और उत्तर लिखें।

3) i) $MP_L = 91 + 32\,L - 3\,L^2$; $AP_L = 91 + 16\,L - L^2$

ii) अधिकतम के लिए रखें : $\frac{d(AP_L)}{dL} = 0 \Rightarrow 16 - 2L = 0 \Longrightarrow L = 8$

iii) अधिकतम के लिए रखें : $\frac{d(MP_L)}{dL} = 0 \Rightarrow 32 - 6L = 0 \Longrightarrow L = 6$ अब द्वितीय अवकलज का आँकलन करें यहां $\frac{d^2(MP_L)}{dL^2} = -6 < 0$ । एक ऋणात्मक मान 'अधिकतम' का संकेत करता है।

ह्रासमान सीमांत प्रति प्राप्ति का क्रम के अधिकतम स्तर की प्राप्ति के बाद प्रारंभ होता है– अर्थात् जब हम 6 से अधिक व्यक्तियों को काम पर रखते हैं।

4) सीमांत लागत = मजदूर / $MP_L = \frac{50}{91 + 32\,L - 3\,L^2}$

इकाई 10 उच्च-कोटि अवकलज*

संरचना

10.0 उद्देश्य

10.1 विषय-प्रवेश

10.2 अवकलजों के अवकलज [Derivatives of Derivatives]

10.3 उत्तलता एवं अवतलता [Convexity and Concavity]

10.4 टेलर श्रृंखला सूत्र तथा औसत मान प्रमेय [Taylor Series formula and Mean Value Theorem]

10.5 सार-संक्षेप

10.6 बोध-प्रश्नों के उत्तर संकेत

10.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात्, आप निम्नलिखित संकल्पनाओं से भली-भाँति अवगत हो जाएंगे :

- एक अवकलज के अवकलज की संकल्पना;
- उत्तलता, अवतलता की परिभाषाएं;
- टेलर श्रृंखला सूत्र; तथा
- औसत-मान प्रमेय।

10.1 विषय-प्रवेश

पिछली इकाई में हमने गणित के एक बहुत महत्वपूर्ण विषय, अवकलन, के बारे में जाना। हमने देखा कि अवकलन की सहायता से हमें स्वतंत्र चर में परिवर्तन के फलस्वरूप निर्भर चर में होने वाले परिवर्तन को समझने में सहायता मिलती है। स्वतंत्र चर में अति सूक्ष्म परिवर्तन के फलस्वरूप निर्भर चर में होने वाले परिवर्तन को निर्भर चर का अवकलज कहते हैं। यदि y निर्भर चर तथा x स्वतंत्र चर है, तो $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, y का अवकलज है। यह गणितीय विधियों की केंद्रीय संकल्पनाओं में से एक है और अर्थशास्त्रीय विश्लेषण की आधारशिला है। अर्थशास्त्र में ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं जहाँ अर्थशास्त्रीय घटनाएं फलनों के माध्यम से चरों के बीच संबंधों से के रूप में परिभाषित होती हैं। दो चरों की स्थिति में हम कहते हैं कि निर्भर चर y, स्वतंत्र चर x पर निर्भर करता है। परंतु केवल y की x पर निर्भरता का ज्ञान पर्याप्त नहीं होता। परिवर्तन का परिणाम निर्धारित करना बेहतर होगा। यह जानना बेहतर होगा कि यदि x के मान में एक इकाई की वृद्धि होती है तो (अर्थात् x के मान में अति सूक्ष्म वृद्धि होने पर) y में कितना परिवर्तन होगा।

अवकलज हमें इस प्रकार की अंतर्दृष्टि प्रदान करता है। इसके अतिरिक्त, अवकलज का चिह्न हमें यह भी बतलाता है फलन वर्धमान है या ह्रासमान।

***श्री सौगतो सेन**

यहाँ तक हम जान चुके हैं। अब हमें यह देखना है कि यदि हम अवकलज का अवकलज लें तो क्या होता है? जब हम पहली बार एक फलन का अवकलज लेते हैं तो यह प्रथम-कोटि अवकलज कहलाता है और इसका अध्ययन हम पिछली इकाई में कर चुके हैं। हम जानते हैं कि फलन का अवकलज, स्वयं में एक फलन होता है। इस इकाई में हमें एक अवकलज के अवकलज ज्ञात करने की विधियाँ और उसके परिणामों का अध्ययन करेंगे। ये उच्च-कोटि के अवकलज कहलाते हैं। उच्च-कोटि अवकलज यह जानने में हमारी सहायता करते हैं कि y में परिवर्तन की दर क्या है। प्रथम-कोटि अवकलज हमें मात्र यहीं बताता है कि x में प्रति इकाई परिवर्तन के सापेक्ष y में कितना परिवर्तन होता है।

दूसरे शब्दों में, हम यह जानना चाहते हैं कि x के मान बड़े होने की स्थिति में जब x परिवर्तित होता है, y भी तेज़ी से बदलता है अथवा नहीं।

इस इकाई के अगले अनुच्छेद, अनुच्छेद 10.2, में हम एक अवकलज के अवकलज (और उससे भी अधिक कोटि के अवकलजों) के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे। उससे अगले अनुच्छेद, अर्थात् अनुच्छेद 10.3 में हम वक्रों अर्थात् फलनों के ज्यामितीय गुणधर्मों की, जैसे कि उत्तलता तथा अवतलता की चर्चा करेंगे। अंत में, इस इकाई में, उच्च–कोटि अवकलजों के प्रयोग से दो अत्यंत महत्वपूर्ण संकल्पनाओं, टेलर श्रृंखला और औसत मान प्रमेय पर चर्चा की गई है।

10.2 अवकलजों के अवकलज [DERIVATIVES OF DERIVATIVES]

यह किसी दिए हुए फलन के अवकलज का अवकलज होता है। उदाहरण के लिए यदि $y = f(x)$ है, तो इसका प्रथम-कोटि अवकलज $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ होता है। इस फलन का द्वितीय-कोटि अवकलज $\frac{d}{dx} f'(x) = f''(x)$ होगा। इसे $f_2(x)$ या $\frac{d^2y}{dx^2}$ से भी व्यक्त किया जाता है।

द्वितीय-कोटि अवकलन के लिए भी वही नियम/सिद्धांत लागू होते हैं जो कि प्रथम-कोटि अवकलन की स्थिति में प्रयोग होते हैं। आईए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : यदि $y = x^5, \frac{dy}{dx} = 5x^4$ है, तो और $\frac{d^2y}{dx^2} = 5 \times 4 \times x^3 = 20x^3$ होगा।

उदाहरण 2 : यदि $y = 10x^3, \frac{dy}{dx} = 30x^2$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2} = 30 \times 2 \times x = 60x$ होगा।

उदाहरण 3 : यदि $y = 100, \frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ होगा।

उदाहरण 4 : यदि $y = ax^5 + bx^4 - cx^2$, $\frac{dy}{dx} = 5ax^4 + 4bx^3 - 2cx$ है, तो

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 20ax^3 + 12bx^2 - 2c \text{ होगा।}$$

उदाहरण 5 : यदि $y = x^2 \log x$, है, तो $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 2x \quad = x + 2x \log x$ है। अतः

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x + 2x \log x) = 1 + 2x.\frac{1}{x} + 2.\log x$$
$$= 1 + 2 + 2\log x = 3 + 2\log x \text{ होगा।}$$

उदाहरण 6 : यदि $y = e^x \cdot \log x$, है, तो $\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot e^x$ अतः

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot e^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^x \cdot \frac{1}{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\log x \cdot e^x\right)$$

$$= \left[e^x.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}.\frac{d}{dx}(e^x)\right] + \left[\log x.\frac{d}{dx}(e^x) + e^x.\frac{d}{dx}(\log x)\right]$$

$$= -\frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x} + e^x \log x = -e^x\left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \log x\right] \text{ होगा।}$$

उच्च-कोटि अवकलज

यदि फलन अवकलनीय है, तो हम तृतीय अवकलज (y_3 या $\frac{d^3y}{dx^3}$) चतुर्थ अवकलज (y_4 या $\frac{d^4y}{dx^4}$), पाँचवा अवकलज,..... nवाँ अवकलज (y_n या $\frac{d^ny}{dx^n}$) इत्यादि ज्ञात कर सकते हैं। ये सभी अवकलज, उच्च–कोटि अवकलज कहलाते हैं। अर्थशास्त्र में हमें कभी-कभी तृतीय-कोटि अवकलजों की आवश्यकता पड़ती है। अधिकतमीकरण एवं न्यूनतमीकरण समस्याओं में बहुधा केवल प्रथम-कोटि तथा द्वितीय-कोटि अवकलज ही प्रयोग होते हैं।

बोध प्रश्न 1

1) $y = 3x^5 + 23x^2 + 19x$ का तृतीय-कोटि अवकलज ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

2) $y = e^{3x+2}$ का द्वितीय-कोटि अवकलज ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

10.3 अवतलता और उत्तलता [CONCAVITY AND CONVEXITY]

इस अनुच्छेद में हम ऐसे फलनों के ज्यामितीय गुणधर्मों की चर्चा करेंगे जो किसी फलन के द्वितीय-कोटि अवकलज हैं और चूंकि अवकलज भी एक फलन होता है, इसीलिए एक द्वितीय-कोटि अवकलज भी एक फलन होगा। दूसरे शब्दों में, यदि y, x का एक फलन है, तो $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ भी x के फलन होंगे।

एक बढ़ता हुआ/वर्धमान या एक घटता हुआ/ह्रासमान फलन, जिसके बढ़ने या घटने की दर समान, बढ़ती हुई या घटती हुई हो, या तो

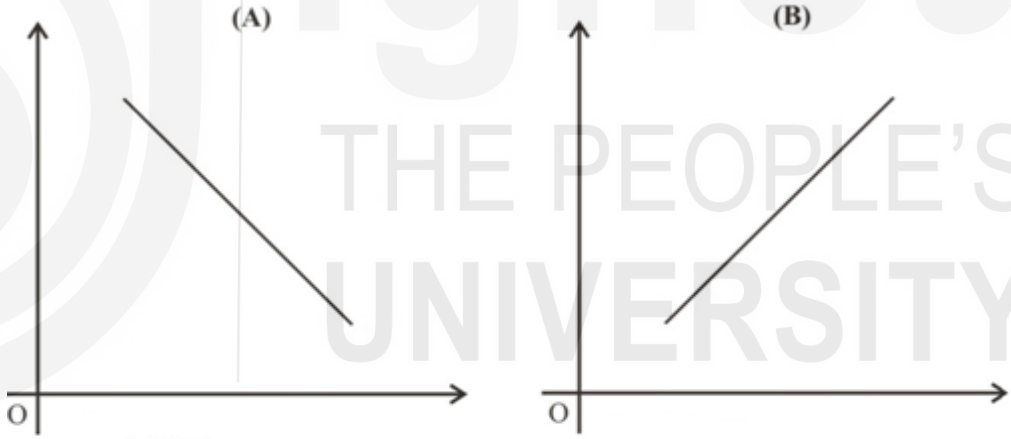
a) रैखिक

अथवा

b) अरैखिक हो सकता है।

हम नीचे ऐसे फलनों के आलेखीय निरूपण प्रस्तुत कर रहे हैं (रेखाचित्र 10.1– A, B, C, D, E और F देखें)

रेखाचित्र 10.1



i) रैखिक

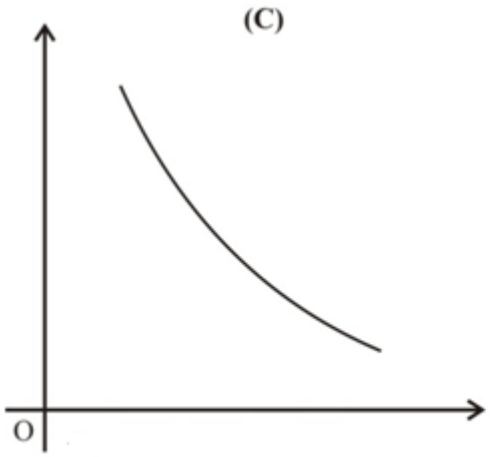
ii) घटता हुआ/ह्रासमान

iii) समान दर पर

i) रैखिक

ii) बढ़ता हुआ/वर्धमान

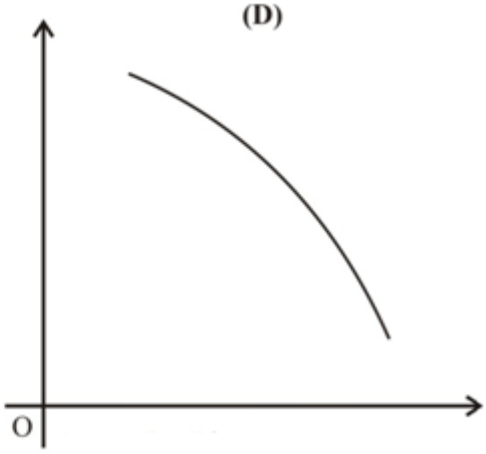
iii) समान दर पर



i) अरैखिक

ii) घटता हुआ/ह्रासमान

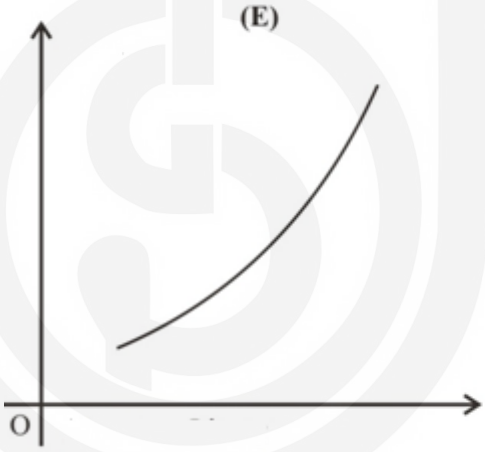
iii) घटती हुई दर पर



i) अरैखिक

ii) घटता हुआ/ह्रासमान

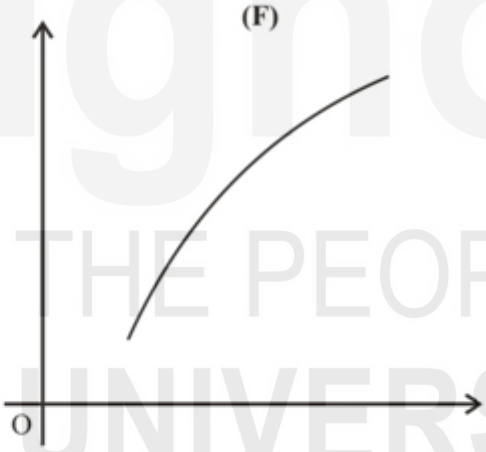
iii) बढ़ती हुई दर पर



i) अरैखिक

ii) बढ़ता हुआ/वर्धमान

iii) बढ़ती हुई दर पर



i) अरैखिक

ii) बढ़ता हुआ/वर्धमान

iii) घटती हुई दर पर

प्रथम-कोटि तथा द्वितीय कोटि अवकलज के चिह्न हमें अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में उपयोगी विभिन्न प्रकार की परिस्थितियों की पहचान करने में सहायता करते हैं। इनमें निम्नलिखित स्थितियाँ सम्मिलित हैं :

a) एक उत्तल फलन जैसे कि समभाव वक्र,

b) एक अवतल फलन जैसे की उत्पादन संभावना वक्र,

c) किसी फलन का उच्चिष्ठ, जैसे की कुल उत्पाद का अधिकतमीकरण,

d) नतिवर्तन बिंदु इत्यादि।

टिप्पणी : आप अगली इकाई में उत्तल एवं अवतल फलनों के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे।

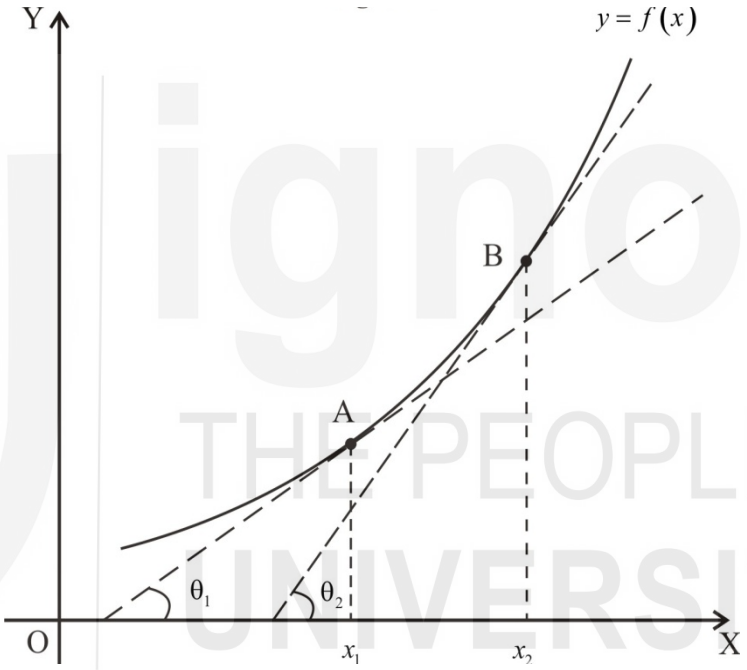
आईए, अब हम प्रथम और द्वितीय-कोटि अवकलजों के चिह्नों के विभिन्न संयोजनों को विस्तार से समझ लें। मान लीजिए $y = f(x)$ एक ऐसा फलन है जो कम से कम दो बार अवकलनीय है। निम्नलिखित स्थितियाँ फलन के आलेख और विशिष्टताओं को, उसके प्रथम और द्वितीय-कोटि अवकलजों के चिह्न के आधार पर, चित्रित करती हैं।

स्थिति I: $\boxed{\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f''(x) > 0 \end{matrix}}$ ⇨ ***x*–अक्ष के सापेक्ष उत्तल**

i) $f'(x) > 0$ का अर्थ है, फलन वर्धमान है

ii) $f''(x) > 0$ का अर्थ है, फलन बढ़ती हुई दर से बढ़ रहा है ($\theta_2 > \theta_1$ है)।

बढ़ती हुई दर से बढ़ता हुआ फलन है। रेखाचित्र (10.2 A देखें)



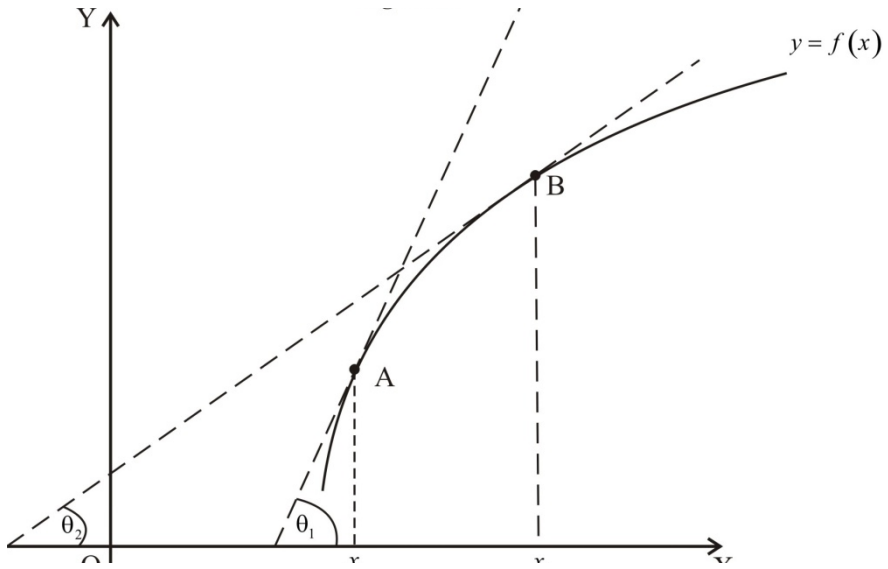
रेखाचित्र 10.2 A

स्थिति II : $\boxed{\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{matrix}}$ ⇨ ***x*–अक्ष के सापेक्ष अवतल**

i) $f'(x) > 0$ का अर्थ है कि फलन बढ़ता हुआ है।

ii) $f''(x) < 0$ का अर्थ है कि फलन घटती हुई दर पर बढ़ता है ($\theta_2 < \theta_1$ है)।

(i) और (ii) दोनों को एक साथ देखने पर हम पाते हैं कि यह फलन घटती हुई दर से बढ़ता हुआ फलन है (रेखाचित्र 10.2 B देखें)



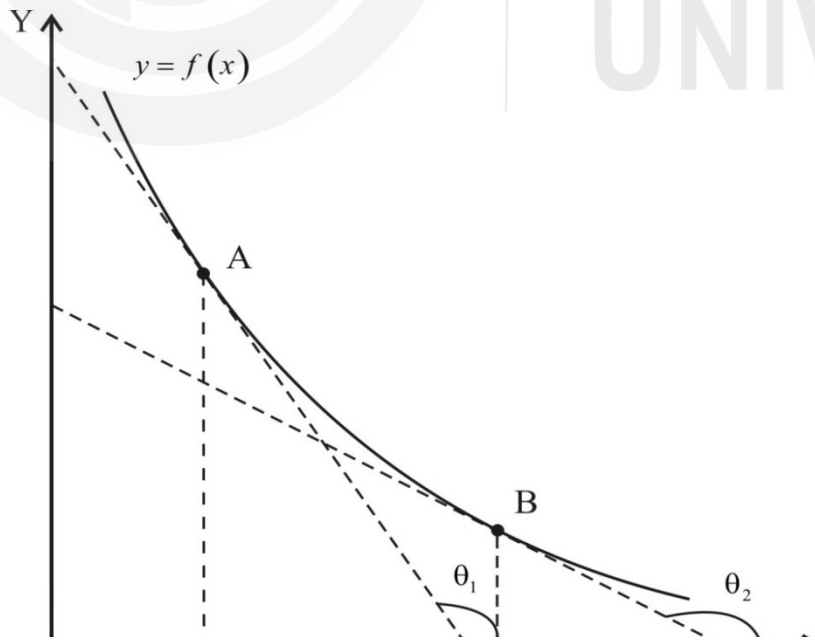
रेखाचित्र 10.2 B

स्थिति III : $\boxed{\begin{matrix} f'(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \end{matrix}}$ ⇨ **मूलबिंदु के सापेक्ष उत्तल**

i) $f'(x) < 0$ का अर्थ है कि फलन घटता हुआ। ह्रासमान है।

ii) $f''(x) > 0$ का अर्थ है, फलन बढ़ती हुई दर से घट रहा है ($\theta_2 > \theta_1$ है)।

(i) और (ii) दोनों को एक साथ देखने पर हम पाते हैं कि यह फलन बढ़ती हुई से घटता हुआ फलन है (रेखाचित्र 10.2 C देखें)



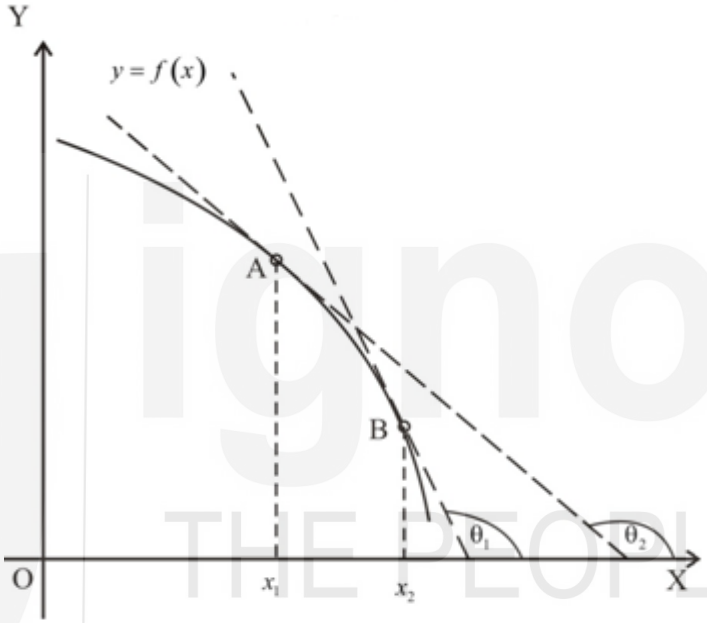
रेखाचित्र 10.2 C

स्थिति IV : $\boxed{\begin{matrix} f'(x) < 0 \\ f''(x) < 0 \end{matrix}}$ ⇨ **मूलबिंदु के सापेक्ष अवतल**

i) $f'(x) < 0$ का अर्थ है कि फलन घटता हुआ। ह्रासमान है।

ii) $f''(x) < 0$ का अर्थ है कि फलन घटती हुई दर पर बढ़ता है ($\theta_2 < \theta_1$ है)।

(i) और (ii) को एक साथ देखने पर हम पाते हैं कि वक्र की ढाल ऋणात्मक है तथा यह घटती हुई दर से घटती है। अर्थात्, स्पर्श रेखा/रेखाओं का आनति कोण गिरता है/कम होता है (रेखाचित्र 10.2 D देखें)। मूलबिंदु के सापेक्ष वक्र नीचे की ओर अवतल या ऊपर से उत्तल है। उत्पादन संभावना वक्र इस प्रकार का एक उपयुक्त उदाहरण है।



रेखाचित्र 10.2 D

स्थिति V : $\boxed{\begin{matrix} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{matrix}}$ ⇨ **अल्पिष्ठ बिंदु**

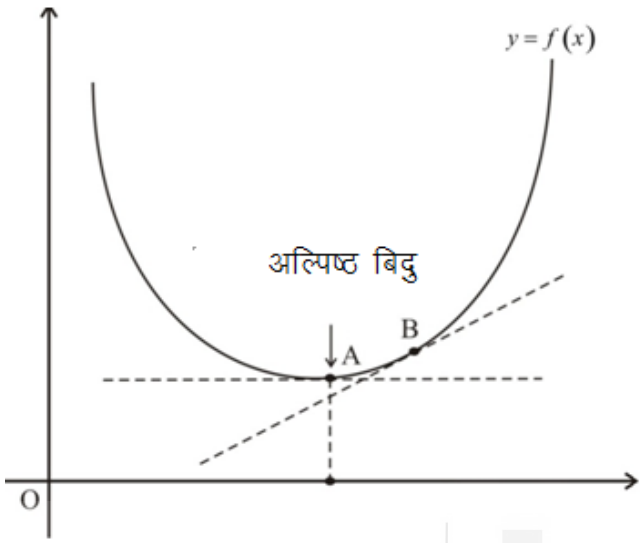
i) यह एक स्तब्ध बिंदु (stationary point) है। इसे क्रांतिक बिंदु (critical point) भी कहते हैं। यह तय करने के लिए हमें द्वितीय कोटि-अवकलज की आवश्यकता होती है।

ii) $f''(x) > 0$ का अर्थ है कि A के किसी प्रतिवेश (neighbourhood) में A अल्पिष्ठ बिंदु/न्यूनतम मान बिंदु है। वक्र $y = f(x)$ U – आकार का है जिसकी तीन अवस्थाएं है :

a) **ह्रासमान अवस्था :** बिंदु A के बाईं ओर, बिंदु A तक वक्र ह्रासमान/गिरता हुआ है (अर्थात् इसकी ढाल ऋणात्मक है)। वक्र के इस भाग में $f'(x) < 0$ है।

b) बिंदु A पर वक्र का मान न्यूनतम है।

c) **वर्धमान अवस्था :** बिंदु A के पश्चात् (बिंदु A के दाईं ओर) वक्र वर्धमान है (अर्थात् इसकी ढाल धनात्मक है)। वक्र के इस भाग में $f'(x) > 0$ है (रेखाचित्र 10.2 E देखें)



रेखाचित्र 10.2 E

शर्त $f'(x) = 0$ को प्रथम-कोटि शर्त या अल्पनिष्ठ बिंदु के लिए अनिवार्य शर्त कहते हैं। ध्यान रहे $f'(x) = 0$ सभी चरम मानों के लिए (उच्चिष्ठ, अल्पिष्ठ और नतिपरिवर्तन बिंदु) अनिवार्य शर्त है। यह जानने के लिए कि कौन सी स्थिति है, हम द्वितीय-कोटि अवकलज शर्त का प्रयोग हैं। उदाहरण के लिए अल्पिष्ठ (न्यूनतम मान) बिंदु के लिए $f''(x) > 0$ होना चाहिए। यह एक पर्याप्त शर्त है और प्रकृति से पुष्टिकारी है। आईए हम अर्थशास्त्र से एक उदाहरण लें। मान लीजिए $y = f(x)$ औसत लागत वक्र (AC) है। मान लीजिए यह संबंध $\text{AC} = 5x^2 - 20x + 170$ से निरूपित है। आईए हम इसका न्यूनतम मान बिंदु (अल्पिष्ठ) ज्ञात करें। अल्पिष्ठ AC के लिए स्तब्ध बिंदु ज्ञात करने के लिए प्रथम–कोटि की अनिवार्य शर्त है :

$$\frac{d}{dx}(\text{AC}) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(5x^2 - 20x + 170) = 0$$

$$10x - 20 = 0$$

$$10x = 20$$

$$x = 2$$

यह तय करने कि लिए कि यह बिंदु उच्चिष्ठ है या अल्पिष्ठ द्वितीय-कोटि या पर्याप्त शर्त है :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\text{AC}\right) > 0$$

$$\frac{d}{dx}(10x - 20) > 0$$

$$10 > 0$$

अतः, फलन का न्यूनतम मान $x = 2$ पर है।

आईए अब हम AC का न्यूनतम मान ज्ञात करें। इसके लिए हम AC फलन में $x = 2$ रखते हैं।

∴ न्यूनतम AC= $5(2)^2 - 20(2) + 170 = 151$

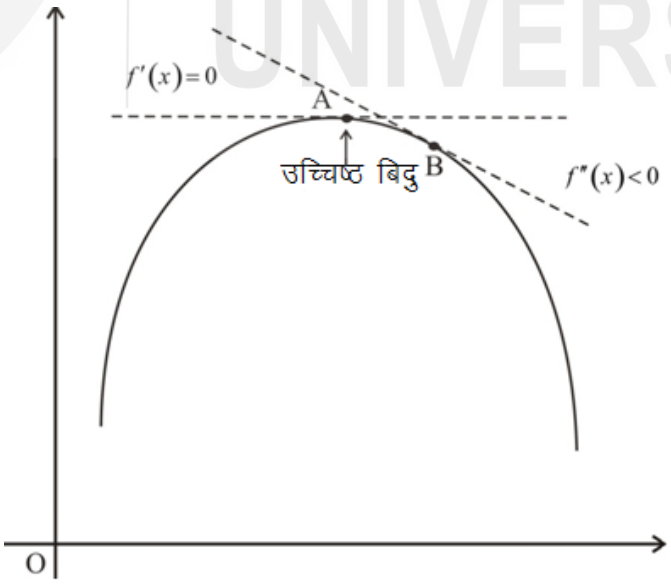
स्थिति VI : $\boxed{\begin{matrix} f'(x)=0 \\ f''(x)<0 \end{matrix}}$ ⇨ **उच्चिष्ठ बिंदु**

i) जैसा कि हमने स्थिति V में देखा $f'(x)=0$ का अर्थ है कि एक विशिष्ट बिंदु पर फलन न तो वर्धमान है, न ही ह्रासमान। रेखाचित्र 10.2 E में बिंदु A पर स्पर्शरेखा क्षैतिज है। इसका अर्थ है कि स्पर्श रेखा की ढाल शून्य है।

यह एक स्तब्ध बिंदु है जो या तो एक अधिकतम मान बिंदु हो सकता है या न्यूनतम मान बिंदु अथवा एक नति परिवर्तन बिंदु। जैसा कि हमने पहले देखा, $f'(x)=0$ का अर्थ है कि एक विशिष्ट बिंदु पर फलन न तो वर्धमान है, न ही ह्रासमान। रेखाचित्र 10.2 E में बिंदु A पर स्पर्शरेखा क्षैतिज है। इसका अर्थ है कि स्पर्श रेखा की ढाल शून्य है।

ii) $f''(x)<0$ का अर्थ है कि A के किसी प्रतिवेश में A उच्चिष्ठ बिंदु [अधिकतम मान बिंदु] है। फलन $y=f(x)$ द्वारा निरूपित वक्र उल्टे U के आकार का है जिसका अधिकतम मान बिंदु A पर है।

इसे स्पष्ट करने के लिए, आईए हम अर्थशास्त्र से एक उदाहरण लें। मान लीजिए $\pi = 500 + 160x - 2x^2$ एक लाभ फलन है, जहाँ x विज्ञापन पर किया गया खर्च है। हम जानना चाहते हैं कि विज्ञापन पर किया जाने वाला खर्च (x) कितना हो कि लाभ अधिकतम हो जाए।



रेखाचित्र 10.2 F

अधिकतम लाभ (π) के लिए स्तब्ध बिंदु ज्ञात करने के लिए प्रथम-कोटि/अनिवार्य शर्त है:

$$\frac{d}{dx}(\pi) = 0.$$

$$\frac{d}{dx}(500 + 160x - 2x^2) = 0$$

$$160 - 4x = 0$$

$$x = 40$$

बिंदु के अधिकतम मान बिंदु होने के लिए पर्याप्त शर्त है :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\pi\right) < 0$$

$$\frac{d}{dx}(160 - 4x) < 0$$

$$-4 < 0$$

$\therefore$ यदि विज्ञापन पर खर्च (x) 40 इकाई के बराबर है तो लाभ अधिकतम होगा।

अतः अधिकतम लाभ

$$\pi = 500 + 160(40) - 2(40)^2 = 500 + 6400 - 3200 = 3700$$

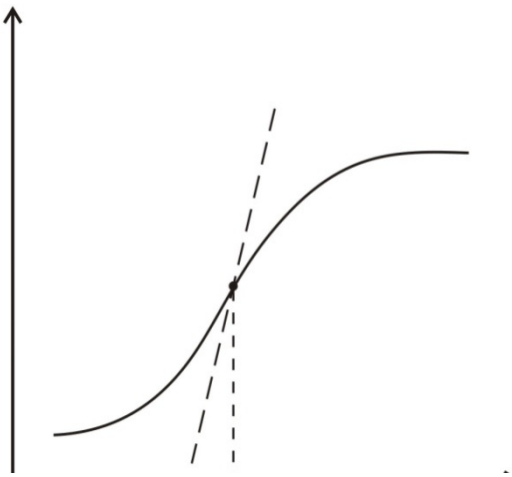
होगा। अतः, हम पाते हैं कि यदि विज्ञापन पर 40 इकाई खर्च किया जाएं तो लाभ अधिकतम होगा जो कि 3700 रू. के बराबर है।

स्थिति VII : $\boxed{\begin{matrix} f'(x) = 0 \\ f''(x) = 0 \end{matrix}}$ ⇨ **नतिपरिवर्तन बिंदु**

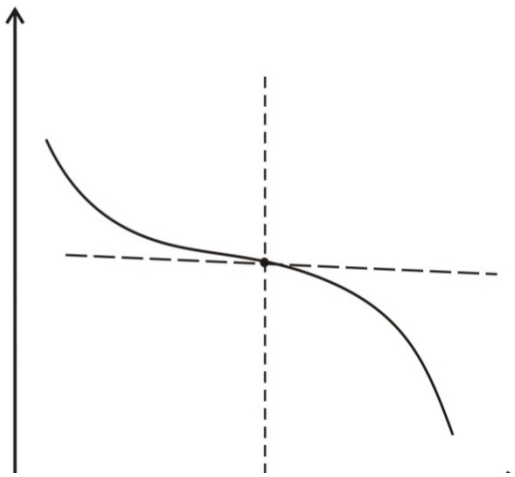
किसी एक चर के फलन $y = f(x)$ के लिए, एक नतिपरिवर्तन बिंदु वह बिंदु है जहाँ पर वक्र स्पर्श रेखा की एक ओर से दूसरी ओर चला जाता है। एक नतिपरिवर्तन बिंदु वक्रता में परिवर्तन को दर्शाता है। जब वक्र किसी नतिपरिवर्तन बिंदु में से होकर गुजरता है तो उसकी वक्रता या तो उत्तल से अवतल या अवतल से उत्तल हो जाती है। रेखाचित्र 10.3 के सभी भाग यह दर्शा रहे हैं।

नतिपरिवर्तन बिंदुओं के दो वर्ग

वर्ग I : वक्रता का उत्तल से अवतल में परिवर्तन, चाहे स्पर्श रेखा की ढाल कुछ भी (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) हो, (रेखाचित्र 10.3 A और B देखें)

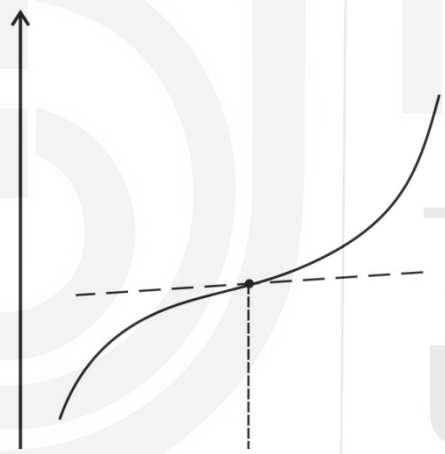


रेखाचित्र 10.3 A



रेखाचित्र 10.3 B

वर्ग II : वक्रता में अवतल से उत्तल में परिवर्तन, चाहे स्पर्श रेखा की ढाल कुछ भी हो (धनात्मक या ऋणात्मक) (रेखाचित्र 10.3 C और D देखें)



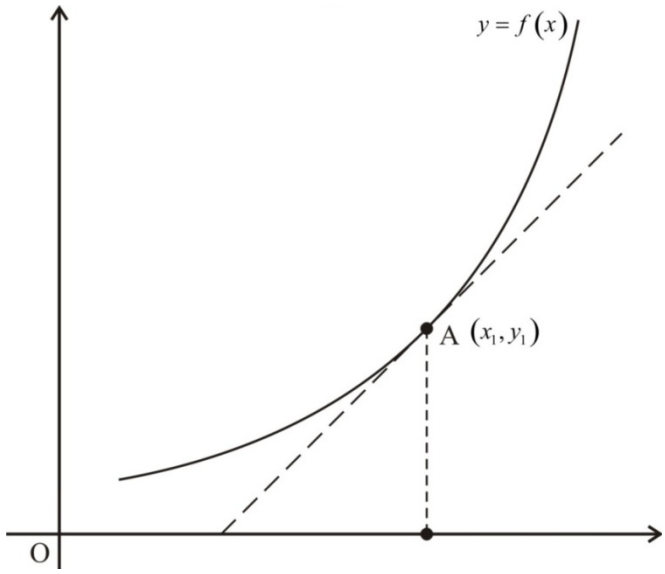
रेखाचित्र 10.3 C

रेखाचित्र 10.3 D

स्पर्शरेखा का समीकरण

किसी फलन $y = f(x)$ के अवकलन गुणांक $\frac{dy}{dx}$ का एक अत्यंत महत्वपूर्ण प्रयोग, फलन के वक्र पर स्थित किसी बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करना है।

(रेखाचित्र 10.4 देखें)



रेखाचित्र 10.4

यह समीकरण बिंदु ढाल समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है जिसका अध्ययन हम निर्देशांक ज्यामिती में कर चुके हैं। यह समीकरण है :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

जहाँ m स्पर्श रेखा की ढाल है तथा $A(x_1, y_1)$, स्पर्श रेखा का फलन $y = f(x)$ के वक्र से स्पर्श बिंदु है। हम जानते है कि किसी बिंदु पर वक्र की ढाल, फलन के प्रथम-कोटि अवकलज $\frac{dy}{dx}$ के बराबर होती है।

अतः, स्पर्श रेखा के समीकरण को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

यदि स्पर्श बिंदु $A(a, b)$ है, स्पर्श रेखा का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$y - b = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

आईए, अब हम एक परवलय $y = x^2 + 3x - 2$ के एक बिंदु $A(2, 3)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें हम जाते हैं कि स्पर्श रेखा की ढाल $\frac{dy}{dx}$ के बराबर होता है।

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

इसलिए, अभीष्ट समीकरण है :

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \qquad y - y_1 = (2x + 3)(x - x_1)$$

इस समीकरण में बिंदु $A\,(2, 3)$ अर्थात् x_1=2 तथा y_1=3 रखने पर पाते है कि

ढाल $\frac{dy}{dx} = 2 \times 2 + 3 = 7$

स्पर्श रेखा $y = 3 + 7(x - 2)$

या $y = 3 + 7x - 14$ या $y = 7x - 11$

बोध प्रश्न 2

1) किसी फलन के लिए एक

   a) क्रांतिक बिंदु

   b) अल्पिष्ट मान

   c) उच्चिष्ठ मान बिंदु

   होने की क्या शर्तें है।

   .....

   .....

   .....

   .....

2) किसी फलन की अवतलता या उत्तलता के आधार पर फलन के परिवर्तन की दर के बारे में क्या कहा जा सकता है।

   .....

   .....

   .....

   .....

10.4 टेलर श्रृंखला सूत्र तथा औसत मान प्रमेय [TAYLOR SERIES FORMULA AND MEAN VALUE THEOREM]

हम जानते हैं कि अवकलक $dy = f'(x)dx$ का प्रयोग, चर x में एक दिए हुए परिवर्तन, $dx \equiv \Delta x$ के सापेक्ष चर y में होने वाले परिवर्तन $dy \cong \Delta y$ का सन्निकटन प्राप्त करने के लिए किया जा सकता है। y में वास्तविक परिवर्तन Δy के स्थान पर dy को एक सन्निकटन के रूप में प्रयोग करने के कारण होने वाली प्रतिशत त्रुटि को स्वेच्छ रूप से छोटा किया जा सकता है यदि हम x में स्वेच्छ रूप में छोटे परिवर्तन लेने के लिए तैयार हों। परंतु, यह संभव है कि हम इस शर्त को स्वीकार करने के तैयार न हों कि Δx अति सूक्ष्म हो और यदि चर x में परिवर्तन अति सूक्ष्म न हो, तो y के प्राप्त होने वाले सन्निकटन का परिशुद्ध होना आवश्यक नहीं होगा।

टेलर श्रृंखला का विस्तार हमें इस विषय पर गहन अध्ययन में सहायता करता है। टेलर श्रृंखला सूत्र की पृष्ठभूमि में मुख्य बिंदु यह है कि यदि हमें किसी फलन $y = f(x)$ का किसी विशिष्ट बिंदु $x = a$ पर मान ज्ञात हो तथा साथ ही फलन $f(x)$ के अवकलज का मान भी इस बिंदु x पर ज्ञात हो, तो हम बिंदु $x = a$ के किसी प्रतिवेश में स्थित

किसी अन्य बिंदु $x = x_0$ पर फलन का मान ज्ञात कर सकते हैं। मान लीजिए f एक ऐसे विवृत अंतराल पर परिभाषित एक फलन है जिसमें बिंदु a और x सम्मिलित हैं। साथ ही यह भी मान लीजिए कि f इस अंतराल पर $(n+1)$ – बार अवकलनीय है। तो टेलर प्रमेय के अनुसार

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(a)(x-a)^4}{4!} + \ldots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{(n)!} + R_n(x)$$

होगा, जहाँ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ है और c, a और x के बीच में स्थित कोई बिंदु है। ऊपर दिए गए सूत्र को टेलर श्रृंखला विस्तार सूत्र का शेषफल स्वरूप भी कहते हैं, जहाँ $R_n(x)$ को शेषफल पद कहते हैं। ध्यान रहे $f^{(n)}(a)$ का प्रयोग, f के nवें अवकलज के बिंदु a पर मान के लिए किया गया है और यह माना गया है कि इसका अस्तित्व है। हम इसी सूत्र को पुनः, संकलन चिह्न का प्रयोग करते हुए, इस प्रकार लिख सकते हैं।

$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\dfrac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}\right] + R_n(x)$ फलन $f(x)$ के $(n+1)$ –कोटि तक सभी अवकलजों का अस्तित्व है, यह माना गया है। जब हमें यह सूत्र ज्ञात है तो हम देख सकते है कि यदि हमें फलन $f(x)$ का मान $x = x_0$ पर ज्ञात हो और हम इस सूत्र

$f(x_0) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\dfrac{f^k(a)(x_0-a)^k}{k!}\right] + R_n(x_0)$ का प्रयोग, फलन का मान किसी और बिंदु $x = x_0$ पर ज्ञात करने के लिए करें तो यह, यह ज्ञात करने के समान होगा कि x में $\Delta x = x_0 - a$ के बराबर परिवर्तन के फलस्वरूप, फलन f में किस प्रकार परिवर्तन होता है। ऊपर प्राप्त व्यंजक में पद $f(a)$ को बाईं ओर स्थानांतरित करके यह सरलता से देखा जा सकता है, क्योंकि $f(x_0) - f(a) \equiv \Delta y$ होगा।

टेलर श्रृंखला सूत्र की सहायता से औसत मान प्रमेय का पुनर्कथन

हम ऊपर दिए टेलर श्रृंखला सूत्र में केवल एक पद लेकर अर्थात् $n = 0$ लेकर, अवकलज के लिए औसत मान प्रमेय को स्पष्ट कर सकते है : $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$ जहाँ c, x और a के बीच कोई बिंदु है। इस प्रकार हम औसत मान प्रमेय प्राप्त करते है :

यदि $f(x)$ एक ऐसा फलन है जो अंतराल $[a, b]$ पर संतत तथा अंतराल (a, b) पर अवकलनीय है, तो ऐसा एक बिंदु $c \in (a, b)$ अवश्य मिलेगा जिसके लिए

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ सत्य हो।}$$

पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$ यह एक प्रकार से $n = 0$ के लिए टेलर प्रमेय ही है।

बोध प्रश्न 3

1) टेलर श्रृंखला सूत्र की व्याख्या कीजिए। इसका क्या महत्व है?

.....

.....

.....

2) औसत मान प्रमेय तथा टेलर श्रृंखला सूत्र में क्या संबंध है?

.....

.....

.....

10.5 सार-संक्षेप

इस इकाई में हमने पिछली इकाई में अवकलजों पर की गई चर्चा को आगे बढ़ाया। यह इकाई उच्च-कोटि अवकलजों पर केंद्रित थी। हमने इस इकाई में अवकलजों के अवकलज ज्ञात करने सीखे तथा उच्च कोटि अवकलजों के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा की। इसके पश्चात् हमने फलनों के अत्यंत महत्वपूर्ण ज्यामितीय गुणधर्मों, उत्तलता तथा अवतलता, की चर्चा की। हमने देखा कि यदि किसी फलन के द्वितीय अवकलज का चिह्न ऋणात्मक है तो फलन उत्तल होगा। इस इकाई में हमने फलनों के अवतल या उत्तल होने के तात्पर्य। प्रभाव को समझने का प्रयास किया। अंततः, इस इकाई में हमने दो ऐसे महत्वपूर्ण परिणामों की चर्चा की जो हमें किसी फलन का किसी बिंदु पर सन्निकटन ज्ञात करने में सहायता करते हैं। ये दो महत्वपूर्ण परिणाम थे : टेलर श्रृंखला तथा औसरत मान प्रमेय।

10.6 बोध-प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) 180

2) $9e^{3x+2}$

बोध प्रश्न 2

1) a) $f'(x)=0$

b) $f'(x)=0$ और $f''(x)>0$

c) $f'(x)=0$ और $f''(x)<0$

2) भाग 10.3 पढ़े और उत्तर लिखें।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 10.4 पढ़ें और उत्तर लिखें।

2) भाग 10.4 पढ़ें और उत्तर लिखें।