खंड 4

एक चर अभीष्टीकरण

खंड 4 परिचय

खंड 4 में हम अर्थशास्त्र में अतिमहत्वपूर्ण संकल्पना-अभीष्टीकरण में अवकलन गणित का प्रयोग करना समझा रहे हैं। पिछले तीन खंडों में चर्चित विचार ही आपको वर्तमान खंड की विषय वस्तु को समझने योग्य बना सकते हैं। इस खंड में दो इकाईयां हैं। **इकाई 11 अवतल और उत्तल फलनों** से संबंधित हैं–यहाँ फलनों की ये दो विशेषताएं ही विस्तारपूर्वक समझाई गई है। इसमें इकाई 10 के उच्चतर कोटि के अवकलजों की संकल्पना का प्रयोग किा गया है। फलन की यही दो विशेषताएं अभीष्टीकरण को समझने के लिए अतिउपयोगी हैं – हम अगली इकाई (इकाई 11) में यही कार्य करने जा रहे हैं।

इकाई 12 का शीर्षक है। **अभीष्टीकरण प्रविधियां** है। यहां फलनों का अभीष्टीकरण समझाया जाएगा अभीष्टीकरण में अधिकतम करना और न्यूनतम करना – दोनों ही विचार निहित होते हैं। हमारी यही इकाई अवकलन का प्रयोग कर 'स्थानिक' और 'व्यापक' अभीष्टी के ज्यॉमितिक निरूपण कर रही है, साथ ही यहीं हम अर्थशास्त्र में अभीष्टीकरण की तकनीकों के प्रयोग भी समझा रहे हैं।

इकाई 11 अवतल तथा उत्तल फलन*

संरचना

11.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप; निम्नलिखित से भली-भांति अवगत हो जाएंगे :

- उत्तल समुच्चयों के कुछ महत्वपूर्ण ज्यामितीय गुणधर्मों से;
- एक उत्तल समुच्चय और उत्तल एवं अवतल फलनों के बीच संबंध से;
- उत्तल एवं अवतल फलनों तथा उनकी विशिष्टताओं से;
- अर्ध-अवतलता एवं अर्ध उत्तलता की अवधारणाओं से; तथा
- अर्थशास्त्र में उत्तलता एवं अवतलता के कुछ अनुप्रयोगों से।

11.1 विषय-प्रवेश

पिछली इकाई में जब हम उच्च (एक से अधिक) कोटि के अवकलनों का अध्ययन कर रहे थे तो हमने अवतल तथा उत्तल फलनों की चर्चा भी की थी। हमने देखा कि अवतल एवं उत्तल फलनों को उनके द्वितीय कोटि के अवकलनों के पद में परिभाषित किया गया। इस इकाई में हमें उत्तलता तथा अवतलता की उस चर्चा को आगे बढ़ाएंगे। परंतु इस अध्याय में हम इन फलनों के साथ-साथ उत्तल समुच्चयों की चर्चा भी करेंगे। हम उत्तलता के महत्व को समझने का भी प्रयास करेंगे। यद्यपि अर्थशास्त्र में उत्तलता के महत्व को हम अधिक विस्तार से तभी जान पाएंगे जब हम अभीष्टीकरण (optimisation) से संबंधित इकाई का अध्ययन करेंगे इस इकाई में हम अपना ध्यान इस पर केंद्रित करेंगे कि किस प्रकार किसी फलन की उत्तलता अथवा अवतलता की

***श्री सौगतो सेन**

जानकारी, उस फलन के वक्र के आकार के निर्धारण में हमारी सहायता करती है। हम यह भी देखेंगे कि किसी फलन की उत्तलता अथवा अवतलता का निर्धारण, फलन के द्वितीय कोटि के अवकलन ज्ञात करके किया जा सकता है। हम उत्तलता की संकल्पना का संबंध, अर्ध-उत्तलता की महत्वपूर्ण संकल्पना से भी जोड़ने का प्रयास करेंगे। पूरी इकाई में हम बार-बार अर्थशास्त्र में उत्तलता के महत्वपूर्ण अनुप्रयोगों का वर्णन करेंगे। हम अपने उदाहरण मुख्यतः व्यष्टि अर्थशास्त्र से लेंगे क्योंकि आपने इस सेमेस्टर में 'व्यष्टि अर्थशास्त्र के सिद्धांत' पर एक पाठ्यक्रम को पढ़ा भी है। हम जाँच करेंगे कि इस पाठ्यक्रम में पढ़े गए महत्वपूर्ण फलनों में से कौन से फलन उत्तल थे तथा कौन से अवतल। हम यह भी देखेंगे कि उत्तलता एवं अवतलता किस प्रकार हमारे फलनों को प्रभावित करते हैं।

इस इकाई का प्रारंभ हम उत्तल समुच्चयों एवं उत्तल फलनों की चर्चा से करेंगे और उनके मध्य संबंध भी स्पष्ट करेंगे। इस इकाई में हम उत्तल समुच्चयों के प्रासंगिक ज्यामितीय गुणों का अध्ययन करेंगे। इसके पश्चात् इस इकाई में अवतल एवं उत्तल फलनों की प्रकृति तथा उनके गुणों की विस्तार पूर्वक चर्चा की गई है। इस इकाई में अर्ध-उत्तलता की संकल्पना की व्याख्या भी की गई है और उत्तलता से उसके संबंध की भी। इन सैद्धांतिक चर्चा के पश्चात्, इस इकाई में उत्तलता के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोगों की व्याख्या की गई है।

11.2 उत्तल समुच्चय तथा उत्तल फलन [Convex Set and Convex Functions]

फलनों के ज्यामितीय गुणों को भली भांति समझने के लिए हम कुछ ज्यामितीय परिभाषाओं से प्रारंभ करेंगे। परंतु इससे पूर्व कि हम इन परिभाषाओं पर चर्चा करें, पाठकों से अनुरोध है कि वे समुच्चयों की परिभाषा और उनके गुणों को स्मरण करें। साथ ही, विभिन्न समुच्चय-सैद्धांतिक (समुच्चयों पर आधारित) फलनों को भी स्मरण करें जिनका परिचय आप पर चुके हैं। पिछली इकाई में, हमने फलनों की उत्तलता का अर्थ समझा। हमें उत्तल समुच्चयों की संकल्पना को भी समझने की आवश्यकता है। यद्यपि उत्तल फलन तथा उत्तल समुच्चय की संकल्पनाएं परस्पर संबंधित हैं तथापि वे भिन्न/पृथक संकल्पनाएं हैं। हमें इन दोनों संकल्पनाओं के बीच अंतर स्पष्ट रूप से समझ लेना चाहिए।

आइए, हम पहले उत्तल समुच्चयों की संकल्पना को समझने का प्रयास करें। R^2 या R^3 के बिंदुओं का एक समुच्चय S एक उत्तल समुच्चय कहलाता है यदि इस समुच्चय के किन्हीं भी दो बिंदुओं के लिए, इन बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड पूर्णतया इसी समुच्चय में स्थित हो। इस परिभाषा के अनुसार प्रत्येक सरल रेखा एक उत्तल समुच्चय है। इसी प्रकार केवल एक बिंदु वाला प्रत्येक समुच्चय भी एक उत्तल समुच्चय है। उत्तलता की यह ज्यामितीय परिभाषा त्रिआयामी ज्यामितीय आकृतियों के लिए भी सत्य है। उदाहरण के लिए, एक ठोस घन एक उत्तल समुच्चय है परंतु एक खोखला बेलन उत्तल समुच्चय नहीं है।

तीन से अधिक आयामों के लिए ज्यामितीय गुणों का प्रत्यक्षिकरण (visualisation) इतना सहज नहीं है।

11.2.1 उत्तल संयोजन तथा उत्तल समुच्चय [Convex Combination and Convex Sets]

अब हम बिंदुओं के उत्तल संयोजन की संकल्पना पर विचार करेंगे। दो बिंदुओं u और v का रैखिक संयोजन k_1u+k_2v के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ k_1 तथा k_2 वास्तविक संख्याएं हैं। यदि k_1 और k_2

दोनों संवृत अंतराल [0,1] में स्थित हों तथा उनका योग 1 के बराबर हो, तो रैखिक संयोजन, एक उत्तल संयोजन कहलाता है तथा इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।

$$k_1u+(1-k_1)v,\ 0\le k_1\le 1$$

इस संकल्पना के आधार पर, एक उत्तल समुच्चय को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है :

एक समुच्चय S एक उत्तल समुच्चय कहलाता है यदि और केवल यदि समुच्चय के प्रत्येक दो बिंदुओं $u\in S$ और $v\in S$ तथा किसी भी संख्या $\theta\in[0,1]$ के लिए, $w=\theta u+(1-\theta)v\in S$ सत्य हो। दूसरे शब्दों में, एक समुच्चय θ उत्तल होगा यदि θ के सभी बिंदुओं v_0 और v_1 के लिए और अंतराल [0,1] में स्थित प्रत्येक बिंदु λ के लिए, बिंदु $(1-\lambda)v_0+\lambda v_1$ भी समुच्चय θ का एक अवयव हो। गणितीय आगमन के सिद्धांत से, कोई समुच्चय θ उत्तल होता है यदि और केवल यदि θ के अवयवों का प्रत्येक उत्तल संयोजन, θ में स्थित हो। परिभाषा के अनुसार, किसी सदिश समष्टि (वेक्टर स्पेस) के किसी, अनुक्रमित उपसमुच्चय $\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ का उत्तल संयोजन, $v_0, v_1, \ldots, v_D$ के सभी ऐसे पदों का भारित औसत $\lambda_0v_0+\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_Dv_D$ होता है जहाँ $\{\lambda_D\}$ अऋणात्मक वास्तविक संख्याओं का एक अनुक्रमित समुच्चय है तथा प्रतिबंध $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_D=1$ को संतुष्ट करता है।

उत्तल समुच्चय की परिभाषा से यह निष्कर्ष निकालना सरल है कि दो उत्तल समुच्चयों का उभयनिष्ठ (intersection) पुनः एक उत्तल समुच्चय होता है। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि उत्तल समुच्चयों के किसी समूह का उभयनिष्ठ पुनः एक उत्तल समुच्चय होता है।

कोई भी आकृति जो कि खोखली अथवा पिचकी हुई (dented) हो उत्तल नहीं हो सकती। (रेखाचित्र 11.1 देखें) रेखाचित्र 11.1 (a) में, समुच्चय Q उत्तल है क्योंकि इस समुच्चय के किन्ही भी दो बिंदुओं (जैसे कि v_0 और v_1) को मिलाने वाला रेखाखंड पूर्णतयः समुच्चय Q के अंदर स्थित है। दूसरी ओर, रेखाचित्र 11.1 (b) में दिया हुआ समुच्चय R उत्तल नहीं है। हम देख सकते हैं कि समुच्चय R में यह आवश्यक नहीं है कि दो बिंदुओं के प्रत्येक युग्म के लिए (जैसे कि x_2 तथा x_3), उनको मिलाने वाला रेखाखंड पूर्णतयः R के भीतर ही स्थित हो यह देख पाना कठिन नहीं है कि रिक्त समुच्चय उत्तल होता है।

(a) एक उत्तल समुच्चय (b) गैर–उत्तलसमुच्चय

रेखाचित्र 11.1

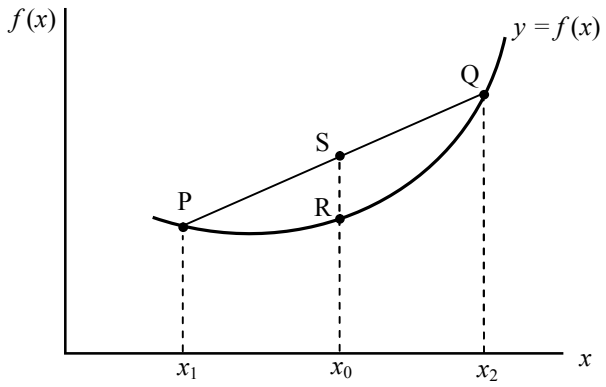
11.2.2 उत्तल समुच्चय, उत्तल एवं अवतल फलन [Convex Sets, Convex and Concave functions]

उत्तल समुच्चय की परिभाषा की तुलना, उत्तल फलन की परिभाषा से करने पर हम पाते हैं कि यद्यपि दोनों परिभाषाओं में विशेषण 'उत्तल' का प्रयोग किया गया है तथापि इस शब्द का अर्थ दोनों संदर्भों में अलग-अलग है। फलन के संदर्भ में शब्द 'उत्तल' दर्शाता कि वक्र या सतह किस तरह मुड़े हुए हैं अर्थात् यह विशेषण वक्र के उभार को वर्णित करता है। दूसरी ओर एक समुच्चय के संदर्भ में, शब्द उत्तल यह निर्दिष्ट करता है कि समुच्चय में बिंदु किस प्रकार व्यवस्थित हैं अर्थात् समुच्चय कितना सघन है। यद्यपि गणितीय रूप से उत्तल समुच्चय एवं उत्तल फलन अलग-अलग संकल्पनाएं है तो भी ये सर्वथा असंबंधित नहीं है। हम जानते हैं कि कोई फलन उत्तल तभी होता है जब उसका प्रांत उत्तल हो। एक उत्तल फलन एक ऐसा फलन होता है जिसमें फलन के ग्राफ पर स्थित तथा उसके ऊपर वाले बिंदु एक उत्तल समुच्चय बनाएं। ऊपर दी गई परिभाषा के पदों में, एक फलन उत्तल फलन कहलाता है यदि फलन के ग्राफ पर स्थित किसी भी दो बिंदुओं को मिलाने वाली जीवा, ग्राफ पर अथवा उसके ऊपर स्थित हो (रेखाचित्र 11.2 देखें)। किसी भी उत्तल फलन के लिए, फलन पर और उससे ऊपर स्थित बिंदुओं का समुच्चय उत्तल होता है।

बीजगणितीय शैली में उत्तल फलनों का वर्णन इस प्रकार किया जा सकता है : एक प्रदत्त फलन f उत्तल होगा यदि और केवल यदि

$f\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right)\le \alpha f\left(x_1\right)+(1-\alpha)f\left(x_2\right)$ हो, जहाँ x_1, x_2 और $\propto$ वास्तविक संख्याएं है, तथा $0 \le \propto \le 1$ है। ऊपर दिए व्यंजक में यदि असमता विशुद्ध हो (अर्थात् '$\le$' के स्थान पर '$<$' हो) तो फलन f विशुद्ध सुनिश्चित उत्तल फलन कहलाता है। उत्तल फलनों का एक महत्वपूर्ण गुणधर्म यह है कि दो उत्तल फलनों का योग भी एक उत्तल फलन ही होता है। इसी प्रकार यदि किसी उत्तल फलन को एक धनात्मक अचर से गुणा किया जाए, तो हमें एक और उत्तल फलन प्राप्त होता है।

अवतल फलन के लिए, फलन के नीचे स्थित बिंदुओं का समुच्चय उत्तल होना चाहिए। साथ ही, ध्यान रहे कि एक अवतल फलनमें असमता उल्टी हो जाती है अर्थात् '$\le$' के स्थान पर '$\ge$' हो जाता है। आने वाले अनुच्छेदों में हम इसके बारे में विस्तार से पढ़ेंगे।



रेखाचित्र 11.2 : उत्तल फलन

ऊपर दिए रेखाचित्र पर ध्यान दीजिए। फलन $y = f(x)$ में मान लीजिए f एक उत्तल अवकलनीय फलन है। मान लीजिए $x_1 < x_2$ है और $0 < \alpha < 1$ है तथा $x_o = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ है। अब, मान लीजिए कि P,Q, R और S, xy –तल में चार बिंदु हैं जैसे कि रेखाचित्र 11.2 में दर्शाया गया है। क्योंकि f एक उत्तल फलन है, बिंदु R बिंदु S से ऊपर नहीं हो सकता। अतः जीवा PR की ढाल जीवा PQ की ढाल से अधिक नहीं हो सकती। यह असमिका तब भी सत्य होगी जब α, 1 की ओर अग्रसर हो। ध्यान दें कि इस स्थिति में (अर्थात् जब α,1 की ओर अग्रसर होता है) तो R, वक्र के साथ–साथ चलते हुए P की ओर जाता है तथा PR की ढाल बिंदु P पर वक्र की ढाल की ओर अग्रसर होती है। अतः, बिंदु P पर वक्र की ढाल, जीवा PQ की ढाल से कम होगी।

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

इसी प्रकार, जब α, 0 की ओर जाता है, हम पाते है कि

$$f'(x_2) \ge \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

इस प्रकार हम अवकलनीय उत्तल फलनों का एक महत्वपूर्ण गुणधर्म प्राप्त करते हैं :

गुणधर्म 1 : यदि f एक अवकलनीय उत्तल फलन है, प्रत्येक a और h के लिए तो,

$f(a+h) \ge f(a) + hf'(a)$ होगा।

अवकलनीय उत्तल फलनों का एक और गुणधर्म इस प्रकार है :

गुणधर्म 2 : एक अवकलनीय फलन उत्तल होगा यदि और केवल यदि $f'(a) \le f'(b)$ हो जब भी $a \le b$ है। अगले अनुच्छेद में हम अवकलन गणित का प्रयोग करते हुए, उत्तल और अवतल फलनों पर और अधिक चर्चा करेंगे। परंतु आईए हम इस खंड को समाप्त करने से पूर्व ज्यामितीय दृष्टिकोण से अवतल फलनों पर कुछ चर्चा करें।

हम जानते हैं कि एक दिया हुआ फलन अवतल होता है यदि फलन के ग्राफ पर स्थित तथा उसके नीचे स्थित सभी बिंदुओं का समुच्चय एक उत्तल समुच्चय हो। हम वह कह सकते हैं कि एक फलन f अवतल होता है यदि और केवल यदि फलन $-f$ उत्तल हो।

अतः, हम सरलता से देख सकते हैं कि अवतल फलनों के गुणधर्म उत्तल फलनों के संगत गुणधर्मों से प्राप्त किए जा सकते हैं। अर्थात्, एक फलन f अवतल फलन होगा यदि और केवल यदि

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

हो। तथा यदि फलन f एक अवकलनीय अवतल फलन है तो

$$f(a+h) \le f(a) + hf'(a)$$

इसी प्रकार, हम कह सकते हैं कि फलन f विशुद्ध अवतल फलन होगा यदि $-f$ विशुद्ध उत्तल फलन हो। अगले अनुच्छेद में हम उत्तल एवं अवतल फलनों की चर्चा अवकलन गणित के आधार पर करेंगे, विशेष रूप से द्वितीय कोटि के अवकलनों के आधार पर। हम देखेंगे कि यदि एक अवकलनीय फलन किसी दिए हुए अंतराल पर विशुद्ध उत्तल है, तो इस फलन का उस अंतराल पर द्वितीय कोटि का अवकलन धनात्मक होगा। हम यह भी देखेंगे कि यदि एक अवकलनीय फलन किसी दिए हुए अंतराल पर विशुद्ध अवतल है तो इस अंतराल पर फलन का द्वितीय अवकलन ऋणात्मक होगा।

बोध प्रश्न 1

1) उत्तल संयोजन से आप क्या समझते हैं? उत्तल संयोजन का प्रयोग करते हुए एक उत्तल समुच्चय की संकल्पना की व्याख्या कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

2) उत्तल समुच्चय के संदर्भ में शब्द/विशेषण 'उत्तल' का प्रयोग, इस के उत्तल फलन के संदर्भ में प्रयोग से किस प्रकार भिन्न है?

.....

.....

.....

.....

.....

3) एक उत्तल फलन और एक उत्तल समुच्चय में क्या संबंध है?

.....

.....

.....

.....

.....

11.3 अवतल और उत्तल फलन एवं उनके गुणधर्म [Concave and Convex Functions and their Characteristics]

पाठकों से अनुरोध है कि पिछली इकाईयों में अवकलन की जिन विधियों एवं गुणधर्मों का अध्ययन किया है उन्हें स्मरण करें। इससे उन्हें इस खंड में होने वाली चर्चा को समझने में सहायता मिलेगी। हमने पिछले अनुच्छेद में उत्तल समुच्चय के संदर्भ में उत्तल फलन की संक्षेप में चर्चा की थी। इस अनुच्छेद में हम उत्तल एवं अवतल की विस्तृत चर्चा अवकलन गणित के माध्यम से करेंगे और देखेंगे कि एक उत्तल फलन की

संकल्पना में किसी प्रकार का गहन गणितीय अर्थ छुपा है, अनुप्राणित है तथा यह किस प्रकार अर्थशास्त्र में फलनों को समझने में सहायक होगा।

आईए हम, प्रस्तावना के माध्यम से, यह उल्लेख कर दें कि उत्तल एवं अवतल फलनों का संबंध फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलनों से है। हम जानते हैं कि यदि हमारे पास एक फलन $y = f(x)$ है तो $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ भी x का फलन होता है। अब यदि हम $f'(x)$ का अवकलन लें तो यह y के प्रथम अवकलन का अवकलन होगा तथा इसे y का द्वितीय अवकलन कहते हैं। इसे अनेक प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है जैसे कि :

$$\frac{d(dy/dx)}{dx} \text{ या } \frac{d[f'(x)]}{dx} \text{ या } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ या } f''(x)$$

जिस प्रकार प्रथम अवकलन एक फलन है और उसका अवकलन ज्ञात किया जा सकता है (जिसे उसका द्वितीय अवकलन कहा जाता है) उसी प्रकार द्वितीय अवकलन भी एक फलन है जिसका अवकलन ज्ञात किया जा सकता है और उसे $f(x)$ का तृतीय अवकलन कहते है तथा $f'''(x)$ से व्यक्त करते हैं।

यदि किसी फलन के प्रथम दो अवकलनों का अस्तित्व हो तो उसे दो बार अवकलनीय फलन कहते हैं। दो बार अवकलनीय फलन अर्थशास्त्र में अत्यंत उपयोगी हैं।

11.3.1 अवतल एवं उत्तल फलन [Concave and Convex Functions]

आईए सर्वप्रथम हम यह समझने का प्रयास करें कि किस प्रकार किसी फलन $f(x)$ के प्रथम अवकलन का चिह्न यह निर्धारित करता है कि फलन वर्धमान है अथवा ह्रासमान : (a,b) पर $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (a,b)$ पर $f(x)$ वर्धमान है और (a,b) पर $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (a,b)$ पर $f(x)$ ह्रासमान है। यहाँ चिह्न $\Leftrightarrow$ व्यंजक 'यदि और केवल यदि' के लिए प्रयोग किया गया है। अब द्वितीय अवकलन प्रथम अवकलन का अवकलन है। यदि ऊपर दिए कथनों के सादृश्य देखें तो किसी अंतराल में द्वितीय अवकलन के अऋणात्मक होने का अर्थ होगा कि उस अंतराल में प्रथम अवकलन वर्धमान होगा। हम द्वितीय अवकलन के चिह्न और प्रथम अवकलन के व्यवहार (वर्धमान या ह्रासमान होने के संदर्भ में) को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

(a,b) पर $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow (a,b)$ पर $f'(x)$ वर्धमान है तथा (a,b) पर $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow (a,b)$ पर $f'(x)$ ह्रासमान है स्मरण करें कि किसी फलन $f(x)$ के लिए किसी बिंदु पर प्रथम अवकलन, उस बिंदु पर f के वक्र पर स्पर्शरेखा की ढाल को निरूपित करता है। अतः, प्रथम अवकलन के वर्धमान होने का अर्थ है कि स्पर्श रेखा की ढाल वर्धमान है। इसका अर्थ है कि जैसे–जैसे x का मान बढ़ता है वैसे–वैसे वक्र $f(x)$ पर स्पर्श रेखा की ढाल उत्तरोत्तर रूप से अधिक होती जाती है। स्पर्शरेखा की प्रवणता में यह परिवर्तन हमें द्वितीय अवकलन के प्रयोग से उत्तलता की संकल्पना की ओर ले जाता है।

आईए हम एक फलन $f(x)=x^2$ पर विचार करें। इसका प्रथम अवकलज $2x$ है तथा दूसरा अवकलज 2 है। प्रांत $x < 0$ में, $f'(x) = 2x$ है परंतु चूंकि $x < 0$ है, $2x < 0$ होगा। अतः प्रांत $x < 0$ में $f(x) = x^2$ एक ह्रासमान फलन है। जब x का मान बढ़ता है, ढाल का निरपेक्ष मान कम होता है। इसका अर्थ है कि, चूंकि ढाल ऋणात्मक है, ढाल का मान वास्तव में x के मान के साथ बढ़ रहा है। अतः, द्वितीय अवकलन धनात्मक है। हम

कहते हैं कि कोई दो बार अवकलनीय फलन $f(x)$ उत्तल होता है यदि अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर $f''(x) > 0$ हो। कोई दो बार अवकलनीय फलन विशुद्ध उत्तल फलन होता है यदि अपने प्रांत के बिंदुओं पर $f''(x) > 0$ हो, संभवतः एक बिंदु को छोड़कर। उदाहरण के लिए फलन $f(x) = x^4$ लीजिए। इसका द्वितीय अवकलज $12x^2$ है जो धनात्मक है सिवाय $x = 0$ पर जहाँ द्वितीय अवकलज शून्य हो जाता है। अब हम फलन $f(x) = 10 - x^2$ पर विचार करते हैं। हम देख सकते हैं कि इसका प्रथम अवकलज $-2x$ तथा द्वितीय अवकलज -2 है। यह फलन, $f(x) = 10 - x^2$ प्रत्येक $x > 0$ के लिए ह्रासमान है तथा प्रत्येक $x < 0$ के लिए वर्धमान। परंतु इसकी ढाल x के प्रत्येक मान के लिए कम हो रही है (अर्थात् ह्रासमान है)। इसका अर्थ है कि जब $f'(x) > 0$ है तो फलन कम ढालू (steep) हो रहा है तथा जब $f'(x) < 0$ है तो फलन निरपेक्ष मान में अधिक ढालू हो रहा है परंतु फलन की ढाल अधिक ऋणात्मक हो रही है। क्योंकि फलन $f(x) = 10 - x^2$ का द्वितीय अवकलन ऋणात्मक है, इसके गुण एक उत्तल फलन से एकदम विपरीत होंगे। यह एक अवतल फलन है। कोई दो बार अवकलनीय फलन $f(x)$ अवतल फलन होता है यदि प्रांत के प्रत्येक बिंदु के लिए $f''(x) \leq 0$ हो। इसी प्रकार कोई दो बार अवकलनीय फलन विशुद्ध अवतल होगा यदि अपने प्रांत के सभी बिंदुओं पर $f''(x) < 0$, संभवतः एक बिंदु को छोड़ कर।

यहाँ दो बिंदु ध्यान देने योग्य हैं। पहला, एक रैखिक फलन एक उत्तल फलन तथा एक अवतल फलन दोनों के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है क्योंकि इसका द्वितीय अवकलज 0 के बराबर होता है। दूसरा, क्योंकि -1 से गुणा करने पर एक असमिका पलट जाती है, हम कह सकते है कि $f(x)$ अवतल होगा यदि $-f(x)$ उत्तल है और $f(x)$ विशुद्ध अवतल होगा यदि $-f(x)$ विशुद्ध उत्तल है।

मान लीजिए I एक अंतराल है और मान लजिए कि $f(x)$ अंतराल I में संतत है तथा I के अंतःस्थ में दो बार अवकलनीय है I के अंतःस्थ का अर्थ है कि अंतराल I के परिसीमा बिंदुओं को छोड़ कर शेष सभी बिंदुओं का समुच्चय। इसे I^0 से व्यक्त किया जाता है। अब हम निम्नलिखित परिभाषाएं दे सकते हैं :

फलन f अंतराल I पर उत्तल है $\Leftrightarrow I^0$ के सभी बिंदुओं के लिए $f''(x) \geq 0$ है।

फलन f अंतराल I पर अवतल है $\Leftrightarrow I^0$ के सभी बिंदुओं के लिए $f''(x) \leq 0$ है।

अभी तक हमने किसी दिए हुए अंतराल I पर उत्तल तथा अवतल फलनों पर विचार किया। यह जानना रोचक होगा कि किसी बिंदु पर उत्तलता और अवतलता के बारे में क्या कहा जा सकता है। किसी बिंदु $x = a$ पर द्वितीय अवकलन का चिह्न उपयोगी जानकारी उपलब्ध करवाता है। यदि $f''(a)$ धनात्मक है, तो $f(x)$ बढ़ती हुई दर से परिवर्तित होता है जब x, a से होता हुआ बढ़ता है और वक्र $y = f(x)$ पर स्पर्श रेखा की ढाल बढ़ती है जैसे ही हम बिंदु $x = a$ से होकर निकलते हैं। वक्र पर स्पर्श रेखा वामावर्त दिशा में मुड़ता है और यदि हम इस बिंदु से देखें तो वक्र नीचे से उत्तल है। दूसरी ओर, यदि $f''(a)$ ऋणात्मक है, तो $f(x)$ घटती हुई दर से परिवर्तित होता है, स्पर्श रेखा दक्षिणावर्त घूमती है, और बिंदु $x = a$ पर वक्र नीचे से अवतल है। द्वितीय अवकलन से संबंधित ये परिणाम $f'(a)$ के मान पर निर्भर नहीं हैं और इस पर भी निर्भर नहीं है कि वक्र की बिंदु $x = a$ पर ढाल शून्य है, बढ़ता हुआ या कम होता हुआ है। इसलिए

a) $f''(a) \geq 0$ उपलक्षित करता है कि जब फलन बिंदु a से होकर गुजरता है तो वह बढ़ती हुई दर से परिवर्तित होता है और बिंदु $x = a$ पर नीचे से उत्तल है।

b) $f''(a) \leq 0$ उपलक्षित करता है कि जब फलन बिंदु a से होकर गुजरता है तो वह घटती हुई दर से परिवर्तित होता है और बिंदु $x = a$ पर नीचे से अवतल है।

$f''(a)$ का संख्यात्मक मान यह दर्शाता है कि $f(x)$ के मान में परिवर्तन कितनी तेज़ी से होता है और बिंदु $x = a$ पर वक्र/फलन $y = f(x)$ की वक्रता कितनी अधिक है।

11.3.2 नतिवर्तन बिंदु [Point of Inflection]

अर्थशास्त्र में हम कई ऐसे फलनों का भी अध्ययन करते हैं जो अपने प्रांत के कुछ हिस्से में उत्तल होते हैं तथा कुछ हिस्से में अवतल। ऐसे बिंदु, जहाँ कोई फलन उत्तल से अवतल अथवा अवतल से उत्तल फलन में परिवर्तित होता है, नतिवर्तन बिंदु कहलाते हैं। ऐसे बिंदुओं पर वक्र स्पर्शरेखा के एक ओर से दूसरी ओर आ जाता है। संक्षेप में, $x = k$ एक नतिवर्तन बिंदु कहलाता है यदि $x = k$ पर $f''(x)$ अपना चिह्न बदलता है। बिंदु $[k, f(k)]$ फलन के आलेख वक्र पर नतिवर्तन बिंदु कहलाता है। बिंदु x दो बार अवकलनीय फलन f का नतिवर्तन बिंदु होता है यदि एक ऐसा अंतराल (a, b) हो जिसमें k स्थित हो तथा नीचे दिए गए प्रतिबंधों में से एक सत्य हो :

i) $a < x < k$ के लिए $f''(x) \geq 0$ हो तथा $k < x < b$ के लिए $f''(x) \leq 0$ हो

ii) $a < x < k$ के लिए $f''(x) \leq 0$ हो तथा $k < x < b$ के लिए $f''(x) \geq 0$ हो

एक नतिवर्तन बिंदु का सबसे महत्वपूर्ण गुण यह है कि यह फलन की वक्रता में परिवर्तन को दर्शाता है। जैसे ही हम वक्र पर नतिवर्तन बिंदु के बाएं से दाएं ओर चलते हैं फलन या तो उत्तल से अवतल हो जाता है अथवा अवतल से उत्तल। वक्रता में परिवर्तन के अतिरिक्त, नतिवर्तन बिंदु का एक ओर महत्वपूर्ण गुणधर्म यह है कि यह (नतिवर्तन) बिंदु सदा फलन की स्पर्श रेखा की ढाल के चरम (अधिकतम या न्यूनतम) बिंदु से संबद्ध होता है। अगली इकाई में हम फलनों के अधिकतम तथा न्यूनतम बिंदुओं के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे। किसी भी फलन $f(x)$ के लिए, जिस बिंदु पर फलन का मान अधिकतम या न्यूनतम होता है, वहाँ $f'(x) = 0$ होता है। नतिवर्तन बिंदु पर फलन की स्पर्श रेखा की ढाल अधिकतम अथवा न्यूनतम होती है। अब यदि फलन $f(x)$ है तो $f(x)$ पर स्पर्श रेखा की ढाल $f'(x)$ से प्राप्त होती है। इसका अवकलज $f''(x)$ होगा। अतः किसी बिंदु को $f(x)$ का नतिवर्तन बिंदु होने के लिए $f''(x) = 0$ होना चाहिए। साथ ही जब हम वक्र पर नतिवर्तन बिंदु की एक ओर से दूसरी ओर जाते हैं तो $f''(x)$ के चिह्न में परिवर्तन होना अनिवार्य है हम किसी बिंदु के लिए नतिवर्तन होने के मापदंड पुनः इस प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

i) यदि k एक नतिवर्तन बिंदु है तो $f''(k) = 0$ होगा

ii) यदि $f''(k) = 0$ है तथा $f''(x)$, k के बाएं से दाएं जाते हुए अपना चिह्न बदलता है तो, k एक नतिवर्तन बिंदु है।

इनमें से पहला प्रतिबंध k के नतिवर्तन बिंदु होने के लिए अनिवार्य प्रतिबंध है और दूसरा एक पर्याप्त प्रतिबंध है। यदि $f(x)$ का तृतीय अवकलन भी अस्तित्व रखता हो तो नतिवर्तन बिंदु का एक वैकल्पिक मापदंड तृतीय अवकलन के पदों में प्राप्त किया जा सकता है। यदि $x = k$ पर $f''(k) = 0$ है तथा $f'''(k)$ ऋणात्मक है, तो $f'(x)$ का मान $x = k$ पर अधिकतम होगा (ध्यान दें कि यहाँ $f(x)$ नहीं, $f'(x)$ अधिकतम है)। यदि $f''(k) = 0$ है तथा $f'''(x)$ धनात्मक है, तो $x = k$ पर $f'(x)$ का मान न्यूनतम होगा।

11.4 अर्ध-अवतलता तथा अर्ध-उत्तलता [Quasi-Concavity and Quasi-Convexity]

आईए अब हम अर्ध-अवतलता तथा अर्ध-उत्तलता की संकल्पनाओं पर चर्चा करें। अगले अनुच्छेद में हमें अर्थशास्त्र में किसी फलन की अवतलता और उत्तलता के अनुप्रयोगों के बारे में जानेंगे। उससे पूर्व हम अनेक अर्थशास्त्रीय स्थितियों के लिए एक दुर्बल प्रतिबंध की चर्चा करते हैं। ये प्रतिबंध अर्ध-अवतलता तथा अर्ध-उत्तलता कहलाते हैं। अर्ध-अवतलता और अर्ध-उत्तलता, अवतलता और उत्तलता की तरह ही, सुनिश्चित अथवा अनिश्चित हो सकती है। परंतु अर्ध-अवतलता तथा अर्ध-उत्तलता का अर्थ क्या है? आईए हम इस ज्यामितीय दृष्टि से देखें :

मान लीजिए x और y एक फलन f के प्रांत में दो भिन्न बिंदु हैं और मान लीजिए कि फलन के प्रांत में रेखाखंड xy, फलन के आलेख पर एक चाप CD बनाता है। मान लीजिए बिंदु D की ऊँचाई, बिंदु C की ऊँचाई के बराबर या उससे अधिक है। फलन f अर्ध-अवतल कहलाता है यदि चाप CD पर स्थित सभी बिंदु (C और D के अतिरिक्त) बिंदु C जितनी ऊँचाई पर या उससे अधिक ऊँचाई पर स्थित हों। फलन f अर्ध-उत्तल होगा यदि चाप CD पर स्थित सभी बिंदु, D जितनी ऊँचाई पर या उससे कम ऊँचाई पर स्थित हों। फलन f विशुद्ध अर्ध-अवतल (अर्ध-उत्तल) होगा यदि चाप के सभी बिंदु, C से अधिक (D से कम) ऊँचाई पर हों। यह देखना सरल है कि प्रत्येक विशुद्ध अर्ध-अवतल (विशुद्ध अर्ध-उत्तल) फलन अर्ध-अवतल (अर्ध-उत्तल) होता है परंतु इसका विलोम/विपरीत कथन सत्य नहीं है। सामान्यतः, एक अर्ध-अवतल फलन जो अवतल नहीं है एक घंटी के आकार का या घंटी के एक हिस्से के आकार का होता है और एक अर्ध-उत्तल फलन जो उत्तल नहीं है, एक उल्टी घंटी के आकार का होता है। एक अवतल फलन कुछ-कुछ एक गुंबद के आकार का तथा एक उत्तल फलन उल्टे गुबंद आकार का होगा।

आईए अब हम इस ज्यामितीय निरूपण को अर्ध-उत्तलता तथा अर्ध-अवतलता की बीजगणितीय परिभाषा में रूपान्तरित करें एक फलन f अर्ध-अवतल होता है यदि और केवल यदि f के उत्तल समुच्चय प्रांत में किन्हीं भी दो भिन्न बिंदुओं x और y के लिए और $0 < \lambda < 1$ के लिए

$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f[\lambda x + (1-\lambda)y] \geq f(x)$$

एक फलन f अर्ध-उत्तल होता है यदि f के उत्तल समुच्चय प्रांत में किन्हीं भी दो भिन्न बिंदुओं x और y के लिए और $0 < \lambda < 1$ के लिए

$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f\left[\lambda x + (1-\lambda)y\right] \leq f(y)$$

इन परिभाषाओं को विशुद्ध-अवतलता और विशुद्ध-उत्तलता के अनुकूल बनाने के लिए, दुर्बल/अनिश्चित असमिकाओं ($\leq$ और $\geq$) को विशुद्ध असमिकाओं ($<$ और $>$) में बदल दें। इन परिभाषाओं से हम नीचे दिए तीन परिणाम सरलता से ज्ञात कर सकते है :

परिणाम 1 : यदि $f(x)$ अर्ध-अवतल (विशुद्ध अर्ध-अवतल) है तो $-f(x)$ अर्ध-उत्तल (विशुद्ध अर्ध-उत्तल) होगा।

परिणाम 2 : प्रत्येक अवतल (उत्तल) फलन अर्द्ध-अवतल (अर्द्ध-उत्तल) होता है परंतु इसका विलोम/विपरीत कथन सत्य नहीं है। इसी प्रकार प्रत्येक विशुद्ध अवतल (विशुद्ध उत्तल) फलन विशुद्ध अर्द्ध-अवतल (विशुद्ध अर्द्ध-उत्तल) होता है परंतु इसका विलोम/विपरीत कथन सत्य नहीं है।

परिणाम 3 : यदि $f(x)$ एक रैखिक फलन है तो वह अर्द्ध-अवतल भी होगा और अर्ध-उत्तल भी।

बोध प्रश्न 2

1) अऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित निम्नलिखित फलनों की उत्तलता/अवतलता पर टिप्पणी कीजिए।

   i) $f(x) = -\left(\frac{2}{5}\right)x^2 + 5x - 10$

   ii) $f(x) = 5x^2 - 7x$

   iii) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

2) फलन $f(x) = 7x^3 - 42x^2 + 12x + 97$ के प्रांत में फलन की अवतलता तथा/या उत्तलता का वर्णन कीजिए।

   .....

   .....

   .....

   .....

3) अर्द्ध-अवतलता की धारणा, अवतलता की धारणा से कमज़ोर/दुर्बल है। क्या आप इस कथन से सहमत है?

   .....

   .....

   .....

   .....

4) p और q के किस मान के लिए फलन $f(x) = px^3 + qx^2$ का आलेख बिंदु $(-1, 1)$ से होकर निकलता है और $x = \frac{1}{2}$ उसका एक नतिवर्तन बिंदु है।

.....

.....

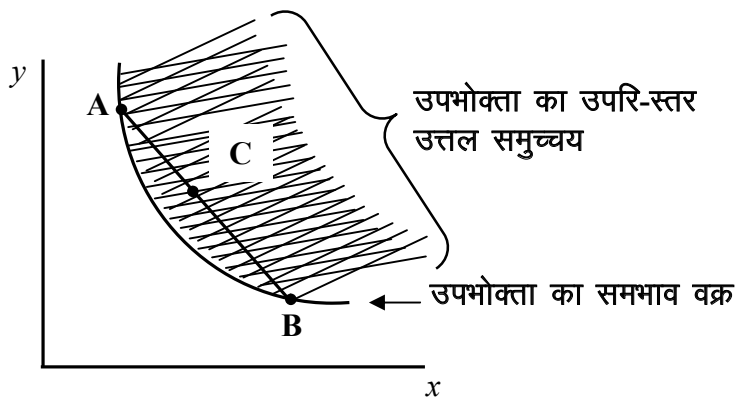
.....

.....

.....

11.5 उत्तलता और अवतलता के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग [Economic Applications of Convexity and Concavity]

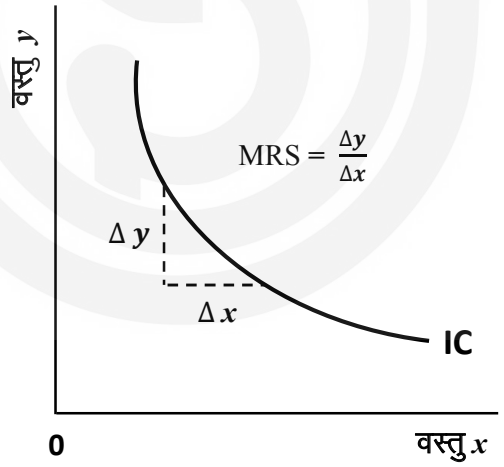
उत्तलता अर्थशास्त्र में प्रयोग में आने वाली सबसे अधिक महत्वपूर्ण संकल्पनाओं में से एक है। उदाहरण के लिए, उपयोगिता अधिकतमीकरण समस्याओं में वस्तुओं की एक अभीष्ट टोकरी होती है जिसमें उपभोक्ता का उत्तल वरीयता समुच्चय उसके बजट प्रतिबंधों द्वारा समर्थित होता है। एक दिए हुए उपयोगिता फलन और किसी संदर्भित संयोजन X (x, y) के लिए, जहाँ x और y दो वस्तुएं हैं, उन सभी संयोजनों का समुच्चय जो कि कम से कम संयोजन X जितने अच्छे हैं एक उपरि स्तर समुच्चय माना जाता है। यह समुच्चय एक उत्तल समुच्चय है। इस उपरि स्तर समुच्चय में एक समभाव वक्र तथा उसके ऊपर स्थित सभी x और y का समुच्चय सम्मिलित होते हैं (रेखाचित्र 11.3 में छायारंजित क्षेत्र देखें)। इस समुच्चय को उत्तल मानने का अर्थ है कि उपभोक्ता आत्यानितक संयोजनों की बजाय दो वस्तुओं के उत्तल संयोजन के उपभोग से अधिक उपयोगिता प्राप्त करता है, अर्थात्, यदि उपभोक्ता दो संयोजनों A और B में कोई अंतर नहीं करता (अर्थात् तटस्थ है) तो वह एक औसत A या B के स्थान पर संयोजन C को वरीयता देगा जिसका मान λ A + $(1 - \lambda)$ B हो जहाँ $\lambda \in [0, 1]$ है। उत्तल वरीयताओं के फलस्वरूप हमें ऐसे समभाव वक्र प्राप्त होते हैं जो मूलबिंदु की ओर उत्तल होते हैं। उत्तलता द्वारा हम पाते हैं कि C = λ A + $(1 - \lambda)$ B, जहाँ $\lambda \in [0, 1]$ है, एक ऊँचे समभाव वक्र पर स्थित होगा।



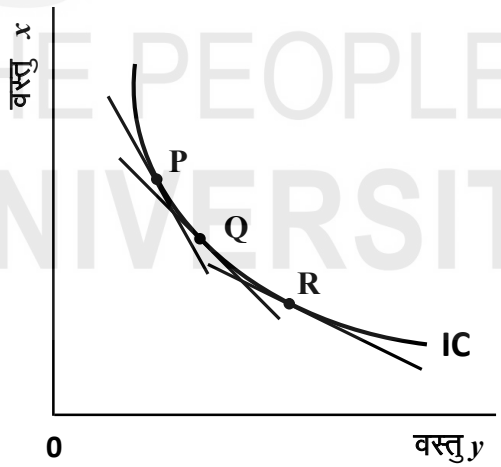
रेखाचित्र11.3 : समभाव वक्र और उत्तल समुच्चय

यदि वरीयता समुच्चय (preference set) उत्तल है, तो उपभोक्ता के अभीष्ट निर्णयों का समुच्चय एक उत्तल समुच्चय होगा, उदाहरण के लिए, एक अद्वितीय अभीष्ट समुच्चय

(या फिर अभीष्ट समुच्चयों की सरल रेखा) यदि वरीयता समुच्चय उत्तल नही है, तो कुछ कीमतों पर एक ऐसा बजट प्राप्त हो सकता है जो दो अलग-अलग अभीष्ट उपभोग निर्णयों का समर्थन करता हो (उदाहरण के लिए यह तब हो सकता है जब उपभोक्ता के पास दो विकल्पों में चयन की सुविधा उपलब्ध हो। इस स्थिति में समभाव वक्र दो वस्तुओं, जिन्हें यहाँ x और y लिया गया है, के अलग-अलग संयोजन दर्शाता है जो कि उपभोक्ता को समान संतुष्टि (या उपयोगिता) प्रदान करते हैं। ध्यान दे कि यह वक्र कम होती है (ऋणात्मक) ढाल का तथा उत्तल है। किसी समभाव वक्र की ढाल को सीमांत प्रतिस्थापन की दर (Marginal Rate of Substitution - MRS) कहते हैं। यह वह दर है जिस पर एक उपभोक्ता वस्तुओं x और y में परस्पर प्रतिस्थापन करने को तैयार है, $\text{MRS} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ या $\frac{dy}{dx}$ या $\frac{MU_x}{MU_y}$ जहाँ MU_x और MU_y क्रमशः वस्तु x तथा वस्तु y की अतिरिक्त इकाईयों के उपभोग कसे प्राप्त सीमांत उपयोगिता को व्यक्त करते हैं, [उपयोगिता फलन $U(x, y)$ के लिए, $MU_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ और $MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$ है] (रेखाचित्र 11.4 देखें) समभाव वक्र (IC) की घटती हुई या ऋणात्मक ढाल यह दर्शाती है कि संतुष्टि का स्तर स्थिर रखने के लिए, यदि एक वस्तु उपभोग में वृद्धि की जा रही है, तो दूसरी वस्तु के उपभोग में कमी करनी पड़ेगी। एक वक्र की उत्तलता उसके सीमांत प्रतिस्थापन की घटती हुई दर को दर्शाती है। इसका सीधा अर्थ यह है कि जैसे-जैसे एक वस्तु का उपभोग बढ़ता जाता है, उपभोक्ता दूसरी वस्तु के त्याग की मात्रा कम और कमतर करता जाएगा अर्थात् $\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0$ होगा। इसका अर्थ है कि जैसे-जैसे हम समभाव वक्र पर नीचे की ओर जाते है वक्र पर स्पर्श रेखा की ढाल कम होती जाती है (रेखाचित्र 16.5 देखें)



रेखाचित्र 11.4 : समभाव वक्र की ढाल

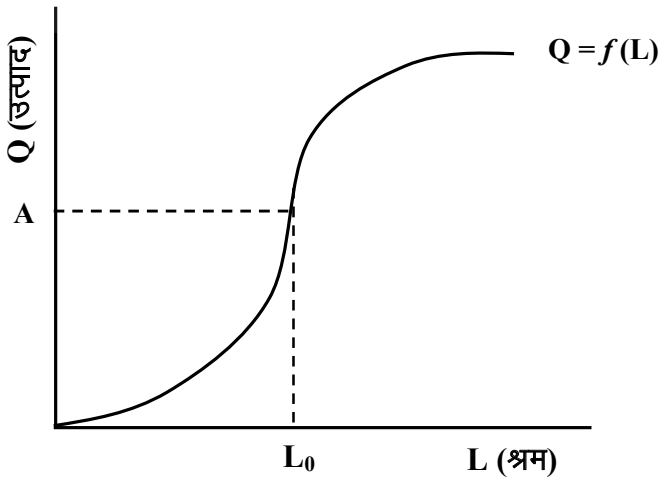


रेखाचित्र 11.5 : सीमान्त प्रतिस्थापन की घटती हुई दर

घटती ढाल वाले एक उत्तल वक्र का यह गुणधर्म समउत्पाद वक्र (isoquant) में भी सत्य सिद्ध होता है। समउत्पाद वक्र दो आगतों (या साधन) जैसे कि श्रम (L) और पूंजी (K), के विभिन्न संयोजन दर्शाता है जो उत्पाद का समान स्तर देते हैं। इस स्थिति में ढाल सीमांत तकनीकी प्रतिस्थापन की दर (MRTS) को दर्शाती है– पूंजी (K) की मात्रा, जिसे कोई फर्म त्यागने को तैयार है, श्रम (L) की अतिरिक्त मात्रा को नियोजित करने के लिए, जिससे उत्पादन का स्तर समान रहे। घटती हुई ढाल धनात्मक सीमांत उत्पादकता की मान्यता के परिमाणस्वरूप प्राप्त होती है। इसका अर्थ है कि एक साधन

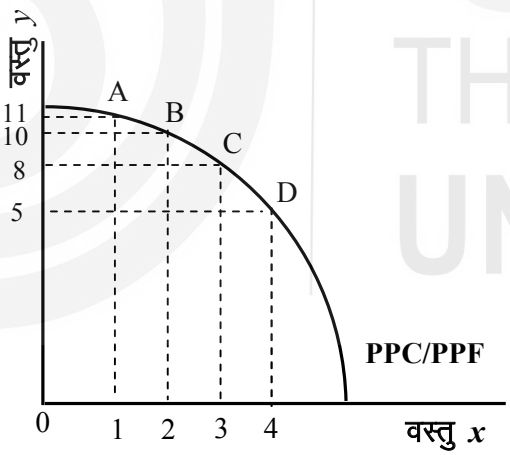
की मात्रा में वृद्धि से उत्पादन में वृद्धि होती है। अतः, एक समउत्पाद वक्र में उत्पादन के स्तर को स्थिर रखने के लिए, एक साधन की मात्रा में वृद्धि हो तो दूसरे साधन की मात्रा कम होनी चाहिए। एक समउत्पाद वक्र की उत्तलता घटती हुई सीमांत तकनीकी प्रतिस्थापन दर (MRTS) के नियम के फलस्वरूप प्राप्त होती है अर्थात् यदि हम समउत्पाद वक्र में नीचे की ओर चलें तो सीमांत तकनीकी प्रतिस्थापन दर (MRTS) कम होती है।

अब हम अर्थशास्त्र में अवतलता के एक अन्य अनुप्रयोग पर विचार करते हैं। एक उत्पादन फलन $Q = f(L, K)$, उत्पाद Q की मात्रा को दर्शाता है जब आगतों (श्रम L और पूंजी K) की मात्रा ज्ञात हो। अल्पकाल उत्पादन में एक आगत को स्थिर मान लिया जाता है (यहाँ, हम K को स्थिर मान रहे हैं) और दूसरे आगत की जो कि यहाँ L है, की विभिन्न मात्राओं के अनुरूप कुल उत्पादन की मात्रा दर्शाता है, अर्थात् $Q = f(L)$ होता है। अल्पकाल उत्पादन फलन की ढाल, अर्थात् $\frac{dQ}{dL}$ श्रम का सीमांत उत्पाद (MP) कहलाती है)। यह एक इकाई श्रम बढ़ाने पर हुए अतिरिक्त उत्पादन को व्यक्त करता है। वक्र की धनात्मक ढाल यह दर्शाती है कि सीमांत उत्पाद (MP) कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता (रेखाचित्र 11.6 देखें)। उत्पादन के परिसर के प्रारंभ में, अर्थात् बिंदु A तक, श्रम में वृद्धि से प्रतिफल में वृद्धि होती है, अर्थात् सीमांत उत्पाद (MP) बढ़ता है। यह विशेषज्ञता/विशिष्टीकरण (specialization) का परिणाम हो सकता है। परंतु, बिंदु A के पश्चात् श्रम की अतिरिक्त इकाईयाँ प्रतिफल को कम करती हैं, अर्थात् सीमांत उत्पाद (MP) गिरने लगता है। इसका चित्रण बिंदु A के पश्चात् उत्पादन फलन के अवतल आकार से किया गया है। इसे घटते प्रतिफल का नियम कहते हैं। जैसे–जैसे कोई फर्म एक कारक (यहाँ L) की मात्रा बढ़ाती है जबकि दूसरे कारक की मात्रा को स्थिर रखतरी है (यहाँ K), तो जिस कारक की मात्रा बढ़ाई जा रही है, कुछ समय के पश्चात् उसका सीमांत उत्पाद (MP) कम होने लगता है। सीमांत उत्पाद में इस गिरावट का कारण यह हो सकता है कि जैसे–जैसे श्रम बढ़ाया जाता है, और अधिक श्रमिक पूंजी की उस स्थिर मात्रा को आपस में बांटने लगते हैं। अतः, प्रत्येक श्रमिक अंततः कम उत्पादक हो जाएगा।



रेखाचित्र 11.6 : अल्पावधि उत्पादन फलन

एक और महत्वपूर्ण अवतल फलन उत्पादन संभावना वक्र PPC है, जिसे उत्पादन संभावना सीमांतक (production possibility frontier) भी कहते हैं। यह दो वस्तुओं (यहाँ, x और y) के उन सभी संभव संयोजनों को निरूपित करता है जिनका उत्पादन एक अर्थव्यवस्था में संसाधनों के कुशल उपयोग द्वारा किया जा सकता है जबकि साधनों की मात्राएं और तकनीक का स्तर दिया हुआ हो। ऐसा एक वक्र रेखाचित्र 11.7 में दर्शाया गया है। किसी दिए हुए बिंदु पर संभव उत्पादन सीमांतक, PPF, की ढाल $(\frac{dy}{dx})$, वस्तु y की वह मात्रा है जिसे वस्तु x की एक अतिरिक्त इकाई का उत्पादन करने के लिए त्यागना पड़ेगा। दूसरे शब्दों में, यह वस्तु x की एक अतिरिक्त इकाई को प्राप्त करने की अवसर लागत (opportunity cost) है। यह अवसर लागत PPF की ढाल के निरपेक्ष मान के बराबर होती है। घटती हुई ढाल वाला PPF इस तथ्य पर प्रकाश डालता है कि दो वस्तुओं के बीच समन्वयन किया गया है। यह दुर्लभता के नियम को दर्शाता है, जिसके अनुसार वस्तु x के अधिक उत्पादन के लिए, संसाधनों को वस्तु y के उत्पादन से हटाना पड़ता है जिससे वस्तु y के उत्पादन में कमी आती है। वक्र का अवतल आकार बढ़ती हुई अवसर लागत के नियम (law of increasing opportunity cost) को स्पष्ट करता है। इस नियम के अनुसार जैसे–जैसे कोई अर्थव्यवस्था अपने PPF पर, एक विशिष्ट वस्तु के अधिक उत्पादन की ओर बढ़ती है, उस वस्तु की अतिरिक्त इकाईयों की अवसर लागत बढ़ती जाएगी अर्थात् दूसरी वस्तु को और अधिक त्यागना पड़ेगा। रेखाचित्र में ध्यान दें कि जैसे A से चलकर B और C से होते हुए D की ओर जाते हैं, वस्तु x की अतिरिक्त इकाईयों के लिए, वस्तु y की त्यागी जाने वाली इकाईयों की मात्रा बढ़ती जा रही है।



रेखाचित्र 11.7 : उत्पादन संभावना वक्र

बोध प्रश्न 3

1) नीचे दिए उपयोगिता फलनों के लिए निर्धारित कीजिए कि क्या वे घटती दर के सीमांत प्रतिस्थापन (diminishing MRS) की शर्तों/मान्यताओं का पालन करते हैं?

   i) $U(x, y) = 5x + y$

   ii) $U(x, y) = \sqrt{xy}$

   .....

   .....

.....

.....

.....

2) एक ऐसे व्यक्ति पर विचार कीजिए जो सीमान्तकों को औसत से बेहतर मानता है। उसका समभाव वक्र कैसा दिखेगा? क्या यह वक्र घटती सीमान्त प्रतिस्थापन की दर दर्शाएगा?

.....

.....

.....

.....

.....

3) उत्पादन संभावना वक्र (production possibility curve) घटती ढाल का तथा अवतल क्यों होता है?

.....

.....

.....

.....

.....

11.6 सार-संक्षेप

यह इकाई इस पाठ्यक्रम के चौथे खंड की दो इकाइयों में से पहली इकाई थी। यह खंड एक-चर अभीष्टीकरण पर केंद्रित है और इस में उन संकल्पनाओं और विचारों को सम्मिलित किया गया है जो पाठकों को अभीष्टीकरण विधियों पर केन्द्रित अगली इकाई के लिए तैयार करेंगी। इस इकाई में उत्तल समुच्चयों एवं उत्तलता जैसी महत्वपूर्ण संकल्पनाओं पर विस्तार से चर्चा की गई। अवतल एवं उत्तल फलनों की आवश्यकता अर्थशास्त्र में बार-बार पड़ती है। अभीष्टीकरण, जो कि अर्थशास्त्र में केंद्रीय तथा बार-बार प्रयुक्त होने वाली संकल्पना है, का तो ये आधार ही हैं। इकाई का प्रारंभ एक उत्तल संयोजन की संकल्पना की व्याख्या से प्रारंभ हुआ। तत्पश्चात् इसे एक उत्तल समुच्चय की संकल्पना को समझने में प्रयोग किया गया। इसके पश्चात् इकाई में, एक उत्तल फलन तथा एक उत्तल समुच्चय के बीच संबंध का वर्णन किया गया। अगले अनुच्छेद में द्वितीय अवकलनों की सहायता से उत्तल तथा अवतल फलनों की अवकलन गणित पर आधारित चर्चा की गई। यह पाया गया कि उत्तल एवं अवतल फलन वर्धमान अथवा ह्रासमान हो सकते हैं। फलनों की उत्तलता अथवा अवतलता तय करने के प्रतिबंध एवं निकष प्रस्तुत किए गए। इस इकाई में नतिवर्तन बिंदुओं की भी चर्चा की गई, जो कि ऐसे बिंदु होते हैं जिन पर दूसरा अवकलज शून्य होता है और वक्र की वक्रता उत्तल से अवतल में या अवतल से उत्तल में परिवर्तित होती है।

इसके बाद वाले अनुच्छेद में एक ऐसा गुणधर्म का उल्लेख किया गया जो कि कुछ फलनों में उपस्थित हो सकता है और जो कुछ अर्थशास्त्रीय प्रतिबंधों के लिए सापेक्ष रूप से कमज़ोर आवश्यकताएं उपलब्ध करवाता है। यह अर्द्ध-अवतलता तथा अर्द्ध-उत्तलता की संकल्पना थी। अर्द्ध-अवतलता तथा अर्ध-उत्तलता की संकल्पनाओं की ज्यामितीय तथा बीजगणितीय दोनों व्याख्याएं दी गईं। अंततः, इकाई में समभाव वक्रों, समउत्पाद वक्रों, अल्पावधि उत्पादन फलन, उत्पादन संभावना वक्र इत्यादि के उदाहरणों द्वारा अर्थशास्त्र में अवतलता तथा उत्तलता के अनुप्रयोग प्रस्तुत किए गए।

11.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

1) एक सदिश समष्टि के एक अनुक्रमित उपसमुच्चय $\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ का उत्तल संयोजन, अऋणात्मक संख्याओं के किसी अनुक्रमित समुच्चय $\{\lambda_D\}$ का कोई भी ऐसा भारित औसत $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_D v_D$ होता है जो समीकरण $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_D = 1$ को संतुष्ट करे। एक ऐसा समुच्चय जिसका प्रत्येक उत्तल संयोजन समुच्चय के भीतर स्थित हो, एक उत्तल समुच्चय कहलाता है।

2) यद्यपि उत्तल फलन तथा उत्तल समुच्चय संबंधित संकल्पनाएं हैं, तथापि वे एक-दूसरे से पृथक हैं। फलन का वर्णन करते हुए 'उत्तल' शब्द यह व्यक्त करता है कि वक्र या पृष्ठ/सतह किस प्रकार मुड़े हुए हैं अर्थात् यह शब्द/विशेषण वक्र या सतह के उभार को वर्णित करता है। जबकि एक समुच्चय के संदर्भ में, शब्द 'उत्तल' यह निर्दिष्ट करता है कि समुच्चय के बिंदु किस प्रकार व्यवस्थित हैं अर्थात् समुच्चय कितना सघन है।

3) एक उत्तल फलन एक ऐसा फलन है जिसमें वे बिंदु जो समुच्चय के आरेख पर या उससे ऊपर स्थित हों, एक उत्तल समुच्चय बनाएं। एक उत्तल समुच्चय की परिभाषा के पदों में, जैसा कि हमने अभी देखा, एक फलन उत्तल फलन कहलाता है यदि इसमें यह गुणधर्म हो कि इसके आरेख पर स्थिति किन्हीं भी दो बिंदुओं को मिलाती हुई जीवा, उसके आरेख पर या उससे ऊपर स्थित हो। एक उत्तल फलन के लिए, फलन से ऊपर स्थित बिंदुओं का समुच्चय अवश्यंभावी रूप से उत्तल होना चाहिए।

बोध प्रश्न 2

1) (i) विशुद्ध अवतल (ii) विशुद्ध उत्तल (iii) विशुद्ध अवतल।

सकेत : $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, अर्थात् अऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए फलन के द्वितीय अवकलज का मान ऋणात्मक है।

2) **सकेत :** $f'(x) = 21x^2 - 84x + 12$ and $f''(x) = 42x - 84$ उत्तलता के लिए, $f''(x) > 0 \Longrightarrow 42x - 84 > 0 \Longrightarrow x > 2$ अतः, $x > 2$ के लिए फलन एक विशुद्ध फलन उत्तल है और $x < 2$ के लिए एक विशुद्ध अवतल फलन है।

3) हाँ, अर्द्ध-अवतलता की धारणा, अवतलता की धारणा से दुर्बल है। हम ऐसा इसलिए कह सकते है क्योंकि प्रत्येक अवतल फलन, अर्द्ध-अवतल होता है परंतु प्रत्येक अर्द्धअवतल फलन अवतल नहीं होता।

4) हमें यह दिया है कि f का आलेख $(-1,1)$ से होकर जाता है।

$$\Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow -p + q = 1 \qquad \ldots(1)$$

अब, $f'(x) = 3px^2 + 2qx$ और $f''(x) = 6px + 2q$ है।

$f(x)$ का $\frac{1}{2}$ पर एक नतिवर्तन बिंदु है $\Rightarrow f''(\frac{1}{2}) = 0$

$$\Rightarrow 3p + 2q = 0 \qquad \ldots(2)$$

समीकरणों (1) और (2) को हल करने पर हम पाते हैं कि

$p = -\frac{2}{5}, q = \frac{3}{5}$ है।

बोध प्रश्न 3

1) i) नहीं, दिया हुआ उपयोगिता फलन, सीमान्त प्रतिस्थापन की स्थिर दर दर्शाता है।

संकेत : $\text{MRS} = \frac{MU_x}{MU_y} \Rightarrow \frac{5}{1}$

ii) हाँ, इस उपयोगिता फलन के लिए सीमांत प्रतिस्थापन की दर घटती हुई है।

संकेत : $\text{MRS} = \frac{MU_x}{MU_y} \Rightarrow \frac{y}{x}$.

जैसे–जैसे हम समभाव वक्र पर नीचे की ओर चलते है अर्थात् जैसे–जैसे हम उस वक्र पर नीचे की ओर चलते हैं अर्थात् जैसे–जैसे वस्तु x का उपभोग बढ़ता है, हर का मान बढ़ता जाता है तथा फलस्वरूप MRS का मान कम होने लगता है।

2) ऐसे व्यक्ति के लिए समभाव वक्र, मूलबिंदु से दूर की ओर मुड़ता है, मूलबिंदु की ओर नही, अर्थात् यह उत्तल आकार का न होकर अवतल–आकार का होगा। MRS, समभाव वक्र पर अब घटता हुआ न होकर बढ़ने लगता है।

3) अनुच्छेद 11.5 को पढ़े और उत्तर दें।

इकाई 12 अभीष्टीकरण की विधियाँ*

संरचना

12.0 उद्देश्य

इस इकाई का प्रमुख उद्देश्य अभीष्टतम बिंदुओं चिह्नित करना है जिन्हें क्रांतिक बिंदु भी कहते हैं और वे शर्त तय करना है जो किसी बिंदु को अभीष्टतम बिंदु होने के लिए संतुष्ट करनी होती हैं। अभीष्टतम का अर्थ होता है उच्चिष्ठ (उच्चतम) अथवा अल्पिष्ठ (निम्नतम)। किसी फलन के अभीष्टतम बिंदु ज्ञात करने की प्रक्रिया को अभीष्टी कहते हैं। मूल विचार यह है कि किसी निर्णय करने वाले (जैसे कि कोई उपभोक्ता या कोई फर्म) के समक्ष एक उद्देश्य फलन है, जिसके अभीष्टीकरण का अर्थात् उसका उच्चतम या निम्नतम ज्ञात करने का वह प्रयास कर रहा है।

इस इकाई में हम केवल एक निर्णय चर वाले उद्देश्य फलनों पर विचार करेंगे। 'स्थानीय अभीष्टतम' तथा 'सार्वत्रिक अभीष्टतम' में भेद स्पष्ट किया जाएगा। इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप निम्नलिखित से भली-भाँति अवगत हो जाएंगे :

- एक अभीष्टतम बिंदु की संकल्पना से;
- उद्देश्य फलन तथा निर्णय चर की संकल्पना से;
- किसी बिंदु को उच्चतम अथवा निम्नतम के रूप में वर्गीकृत करने के मापदंडों से; तथा
- अर्थशास्त्र में अभीष्टीकरण के कुछ अनुप्रयोगों से।

12.1 विषय-प्रवेश

पहला प्रश्न जिसका उत्तर हमें सर्वप्रथम तलाशना चाहिए, वह है : अर्थशास्त्र के संदर्भ में 'अभीष्टतम की स्थिति निर्धारण करने का क्या महत्त्व है? यह प्रक्रम इसलिए महत्वपूर्ण है

*श्री सौगतो सेन

कि एक अर्थशास्त्रीय इकाई (जैसे कि उपभोक्ता, उत्पादक इत्यादि) का सामना अक्सर ऐसी स्थितियों से होता है जहाँ अनेक विकल्प उपलब्ध होते हैं।। उदाहरण के लिए उपभोक्ता को कई अलग-अलग वस्तु-समूहों में से चुनाव करना होता है या किसी उत्पादक को विभिन्न आगत कारकों जैसे कि श्रम, पूँजी इत्यादि के विभिन्न संयोजनों में किसी एक को चुनने की आवश्यकता होती है। एक अर्थशास्त्रीय कर्ता को एक विशेष विकल्प चुनना होता है जो कि या तो किसी को अधिकतम कर दे (जैसे कि एक उत्पादक अपना लाभ अधिकतम करना चाहेगा या एक उपभोक्ता अपनी उपयोगिता को अधिकतम करना चाहेगा) या न्यूनतम कर दे (जैसे कि किसी उत्पाद की दी हुई मात्रा के उत्पादन की लागत) अर्थशास्त्र में यह उच्चतम अथवा निम्नतम ज्ञात करने की प्रक्रिया 'अभीष्टीकरण का प्रक्रम' अथवा 'सर्वश्रेष्ठ की खोज' कहलाती है।

एक अभीष्टीकरण की समस्या को हल करने के लिए एक अर्थशास्त्रीय कर्ता का पहला काम, एक 'उद्देश्य फलन' बनाना होता है। इस फलन के निर्भर चर को 'लक्ष्य' कहा जा सकता है जिसे अधिकतम या न्यूनतम करना है। इस फलन के स्वतंत्र चर ही निर्णय चर कहलाते हैं। कर्ता दिए हुए 'लक्ष्य' को पूरा करने के लिए उन निर्णय चरों पर अपने हस्तकौशल का प्रयोग कर सकता है।

अभीष्टीकरण की प्रक्रिया में हम स्वतंत्र चर का वह मान ज्ञात करने का प्रयास करते हैं तो दिए हुए उद्देश्य फलन के निर्भर चर का अभीष्टतम (उच्चतम अथवा निम्नतम) मान प्रदान करे। आने वाले अनुच्छेदों में हम अभीष्टतम मान (उच्चतम अथवा न्यूनतम) ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे। हम केवल अवकलन गणित के प्रयोग द्वारा अभीष्टतम मान ज्ञात करने की विधि की चर्चा करेंगे। सरलीकरण के लिए हम केवल एक स्वतंत्र चर वाले उद्देश्य फलनों पर विचार करेंगे।

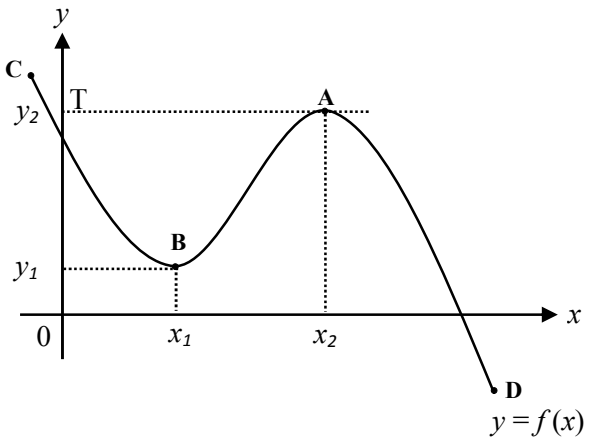
12.2 सार्वत्रिक तथा स्थानीय अभीष्टतम [GLOBAL AND LOCAL OPTIMA]

नीचे दिए उद्देश्य फलन

$$y = f(x) \qquad \text{...(i)}$$

पर विचार कीजिए जहाँ f एक संतत अवकलनीय फलन है। मान लीजिए y और x के बीच संबंध एक आलेख से निरूपित किया जा सकता है जैसा कि रेखचित्र 12.1 में दर्शाया गया है। वह बिंदु जहाँ फलन का ग्राफ/आलेख बढ़ना समाप्त करता है और कम होना प्रारंभ करता है (बिंदु A देखिए), एक पर्वत की चोटी के समान प्रतीत होता है और इस बिंदु पर फलन जो मान लेता है वह वो उन मानों मे सबसे बड़ा मान है जो फलन इस बिंदु के आस-पास लेता है। इसके विपरीत, फलन पर स्थित वह बिंदु (बिंदु B देखें) जहाँ फलन कम होना समाप्त करता है तथा बढ़ना प्रारंभ करता है, एक घाटी के समान प्रतीत होता है। दिखता है और इस बिंदु पर फलन का मान, इस बिंदु के आस-पास के सभी मानों में न्यूनतम है।

परिभाषा 1 : यदि $f(x_0) \geq f(x)$ है, x के उन सभी मानों के लिए जो x_0 के पर्याप्त रूप से समीप हों, तो $f(x_0)$ को एक सापेक्षिक उच्चतम कहते हैं। यदि $f(x_0) \leq f(x)$ है, x के उन सभी मानों के लिए जो x_0 के पर्याप्त रूप से समीप हों, तो $f(x_0)$ को एक सापेक्षिक निम्नतम कहते हैं। वे मान जो सापेक्षिक उच्चतम या सापेक्षिक निम्नतम हों, उन्हें सापेक्षिक चरम मान कहते हैं।

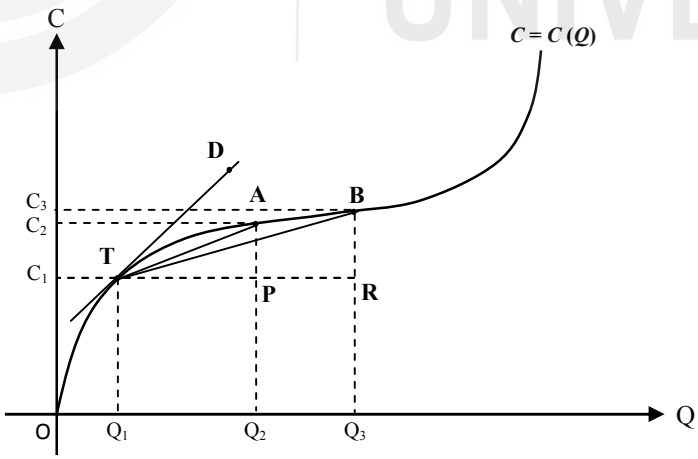


रेखाचित्र 12.1

यहाँ विशेषण 'सापेक्षिक' पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है। यह आवश्यक नहीं है कि एक 'सापेक्षिक' या 'स्थानीय' उच्चतम, चरम या सार्वत्रिक उच्चतम भी हो। इसी प्रकार, यह आवश्यक नहीं है कि एक सापेक्षिक या स्थानीय निम्नतम, चरम या सार्वत्रिक निम्नतम भी हो। रेखाचित्र 12.1 में बिंदुओं A (x_2, y_2) तथा C में तुलना करने पर, हम पाते हैं कि यद्यपि बिंदु A एक सापेक्षिक उच्चतम की श्रेणी में आता है, तो भी यह फलन $y = f(x)$ द्वारा लिया गया सार्वत्रिक उच्चतम मान नहीं है। इसी प्रकार, बिंदु B (x_1, y_1) और बिंदु D की तुलना करे जहाँ B एक सापेक्षिक निम्नतम है परंतु फलन द्वारा लिया जाने वाला सार्वत्रिक निम्नतम मान नही है।

12.2.1 फलन की ढाल [Slope of a Function]

किसी फलन के सापेक्षिक चरम मान को, फलन की ढाल के पदों में भी वर्णित किया जा सकता है। मान लीजिए किसी उत्पादक द्वारा लगाई गई कुल लागत (C) केवल उत्पाद की मात्रा (Q) पर निर्भर करतीर है। कुल लागत और उत्पाद की मात्रा के बीच संबंध को उल्टे S-आकार के वक्र द्वारा निरूपित किया जा सकता है जैसा कि रेखाचित्र 12.2 में दर्शाया गया है।



रेखाचित्र 12.2

मान लीजिए, प्रारंभ में, उत्पादक द्वारा किए जा रहे उत्पादन का स्तर OQ_1 है तथा इसकी लागत OC_1 है। उत्पाद-लागत का यह संयोजन, कुल लागत वक्र पर बिंदु T द्वारा निरूपित है। उत्पादन में Q_1 Q_3 की अतिरिक्त वृद्धि के लिए, उत्पादक को अपनी लागत में राशि C_1 C_2 के बराबर वृद्धि करनी पड़ती है। अतः, $\Delta C/\Delta Q = C_1C_3 \ / \ Q_1Q_3$

है। ज्यामितीय रूप में, यह दो रेखाखंडों का अनुपात BR/TR है और जीवा TB की ढाल के बराबर है। यह अनुपात, उत्पादन में किसी विशिष्ट परिवर्तन के सापेक्ष, लागत में होने वाले औसत परिवर्तन की दर वो दर्शाता है। यदि हम उत्पादन में होने वाले परिवर्तन के परिमाण को बदलें, इस अंतर को कम करें, तो कुल लागत पर क्या प्रभाव पड़ेगा? उदाहरण के लिए, यदि उत्पादक अपने उत्पादन को OQ_3 करने के बजाए केवल OQ_2 करता है, तो लागत में वृद्धि का अंतर कम होकर C_1C_2 हो जाता है। इस स्थिति में $\Delta C/\Delta Q = C_1C_2 \ / \ Q_1Q_2$ = नई जीवा TA की ढाल, हो जाता है। अब, मान लीजिए कि ΔQ को निरूपित करने वाला अंतराल उत्तरोत्तर रूप से कम होता है (अर्थात् $\Delta Q \to 0$ है), तो यह एक अकेले बिंदु की ओर अग्रसर होता है जो कि हमारे उदाहरण में Q_1 से निरूपित है। इसके परिणाम स्वरूप उत्पादन में होने वाले परिवर्तन को रेखाखंड TD की ढाल से, अर्थात् कुल लागत वक्र के बिंदु T पर स्पर्श रेखा द्वारा मापा जा सकता है। दूसरे शब्दों में,

$$Q_1 \text{ पर } \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{dC}{dQ} = \text{ बिंदु T पर लागत वक्र की ढाल}$$

$$= \text{स्पर्श रेखा TD की ढाल होगी।}$$

व्यापक रूप में, किसी फलन $f(x)$ के किसी बिंदु पर फलन की ढाल, उस बिंदु पर फलन के प्रथम अवकलज (जिसे प्रतीकात्मक रूप में $f'(x)$ से व्यक्त किया जाता है) के समान होती है और यह अपेक्षित बिंदु पर फलन की स्पर्श रेखा की ढाल के बराबर होती है। किसी फलन का प्रथम अवकलज, फलन के चरम बिंदुओं का निर्धारण करने में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है और इसके लिए फलन का आलेख बनाने की भी आवश्यकता नहीं होती। अब हम उच्चतम तथा निम्नतम की एक अन्य परिभाषा देने के लिए तैयार हैं :

12.2.2 प्रथम अवकलज परीक्षण और सापेक्षिक अभीष्टतम [First Derivative Test and Local Optima]

यदि एक फलन $f(x)$ का $x = x_0$ पर प्रथम अवकलज शून्य है, अर्थात् $f'(x_0) = 0$ है, तो फलन का x_0 पर मान अर्थात् $f'(x_0)$

i) एक सापेक्षिक उच्चतम होगा यदि बिंदु x_0 के तत्काल बाईं से तत्काल दाईं ओर जाते हुए $f'(x)$ का चिह्न धनात्मक से ऋणात्मक में परिवर्तित हो जाता है।

ii) एक सापेक्षिक निम्नतम होगा यदि बिंदु x_0 तत्काल बाईं ओर से तत्काल दाईं ओर जाते हुए, $f'(x)$ का चिह्न ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित हो जाता है।

iii) न तो सापेक्षिक उच्चतम, न ही सापेक्षिक न्यूनतम होगा यदि $f'(x)$ का चिह्न, x_0 के तत्काल बाईं तथा तत्काल दाईं, दोनों ओर समान रहता है।

स्वतंत्र चर का वह मान, जहाँ पर फलन का प्रथम अवकज शून्य हो अर्थात् x_0, xका क्रांतिक मान कहलाता है। फलन का क्रांतिक बिंदु पर मान अर्थात् $f(x_0)$ को फलन का स्थिर/स्तब्ध मान कहलाता है। बिंदु $[x_0, f(x_0)]$ स्थिर/स्तब्ध बिंदु कहलाता है।

यदि हम रेखाचित्र 12.1 को पुनः देखें, तो यह सुस्पष्ट हो जाता है कि बिंदु A और B फलन के स्थिर बिंदु (*stationary point*) हैं। बिंदु A एक सापेक्षिक उच्चतम है क्योंकि x_2 के तत्काल बाईं ओर के सभी मानों x के लिए, फलन वर्धमान है (अर्थात् $f(x)$ का

प्रथम अवकलज धनात्मक है) और x_2 के तत्काल दाईं ओर के सभी मानों x के लिए फलन ह्रासमान है (अर्थात् $f(x)$ का प्रथम अवकलज ऋणात्मक है)। केवल x_2 पर (अर्थात् क्रांतिक बिंदु पर, फलन का प्रथम अवकलज शून्य है और $f(x_2)$ उसके संगत स्तब्ध/स्थिर मान हैं ध्यान दें कि फलन के बिंदु A पर स्पर्श रेखा अर्थात् AT, x–अक्ष के समानांतर है तथा इसकी ढाल शून्य है। तुलनात्मक रूप में हम देख सकते हैं कि बिंदु B एक सापेक्षिक न्यूनतम बिंदु है।

किसी फलन के चरम मानों को ज्ञात करने की प्रक्रिया को स्पष्ट रूप से समझने के लिए, आईए हम कुछ उदाहरण लें :

उदाहरण 1 :

$$y = 50 + 90x - 5x^2$$

चरण 1 : दिए हुए फलन का प्रथम अवकलज ज्ञात करें।

$$f'(x) = 90 - 10x$$

या $10(9-x)$

चरण 2 : प्रथम अवकलज को शून्य के बराबर रखें।

$$10(9-x) = 0$$

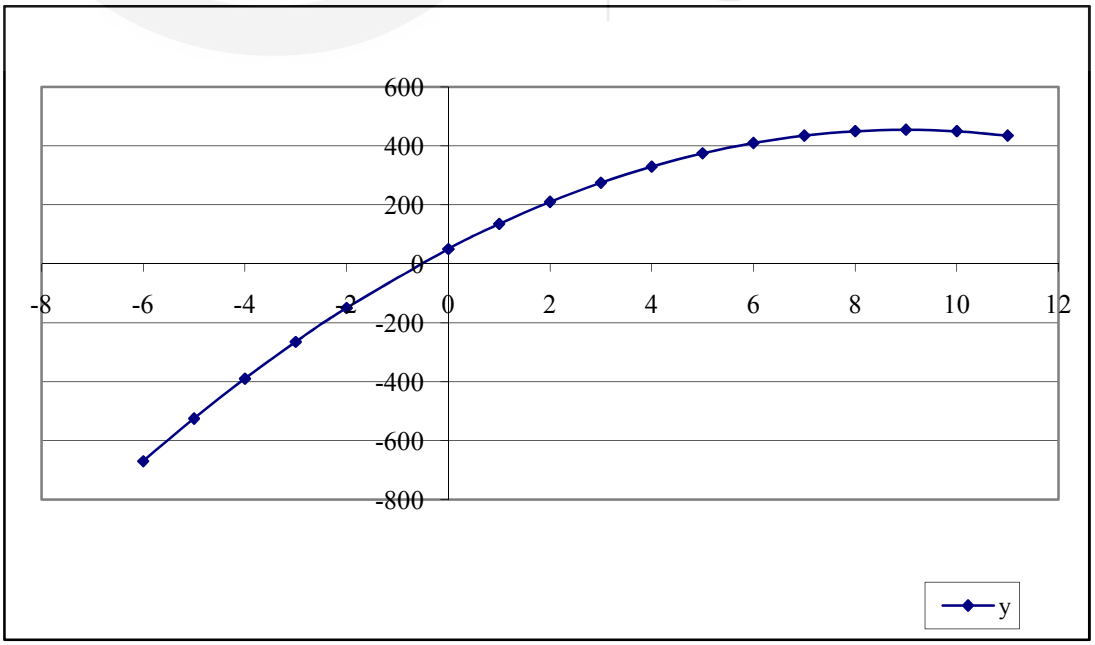
चरण 3 : इस प्रकार प्राप्त समीकरण को x के लिए हल करें तथा क्रांतिक मान ज्ञात करें।

फलन का क्रांतिक मान $x = 9$ है तथा इसके संगत स्तब्ध मान $y = f(9) = 455$ है।

आईए हम उदाहरण 1 में दिए फलन का आलेख बनाएं।

x	–6	–3	0	3	6	9	10	11
y	–670	–265	50	275	410	455	450	435

इस फलन का आलेख रेखाचित्र 12.3 में दर्शाया गया है।



रखाचित्र 12.3: $y = 50 + 90x - 5x^2$

यह सरलता से स्थापित किया जा सकता है कि $x = 9$ के प्रतिवेश में बाईं ओर के सभी बिंदुओं के लिए फलन वर्धमान है, अर्थात् इसका अवकलज धनात्मक है। इसी प्रकार, $x = 9$ के प्रतिवेश में दाईं ओर के सभी बिंदुओं के लिए फलन ह्रासमान है, अर्थात् इसका अवकलज ऋणात्मक है इस प्रकार दिया हुआ फलन प्रथम अवकलज परीक्षण की शर्त (i) को संतुष्ट करता है। इससे यह सिद्ध होता है कि क्रांतिक बिंदु $x = 9$ पर (जो कि वक्र में पर्वत के शीर्ष पर स्थित है) एक सापेक्षिक उच्चतम है। इसके संगत स्तब्ध/स्थिर मान $y = 455$ है।

उदाहरण 2 :

$$y = x^3 - 3x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

चरण 1 : ऊपर दिए फलन का प्रथम अवकलज ज्ञात करें।

चरण 2 : प्रथम अवकलज को शून्य के बराबर रखें।

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

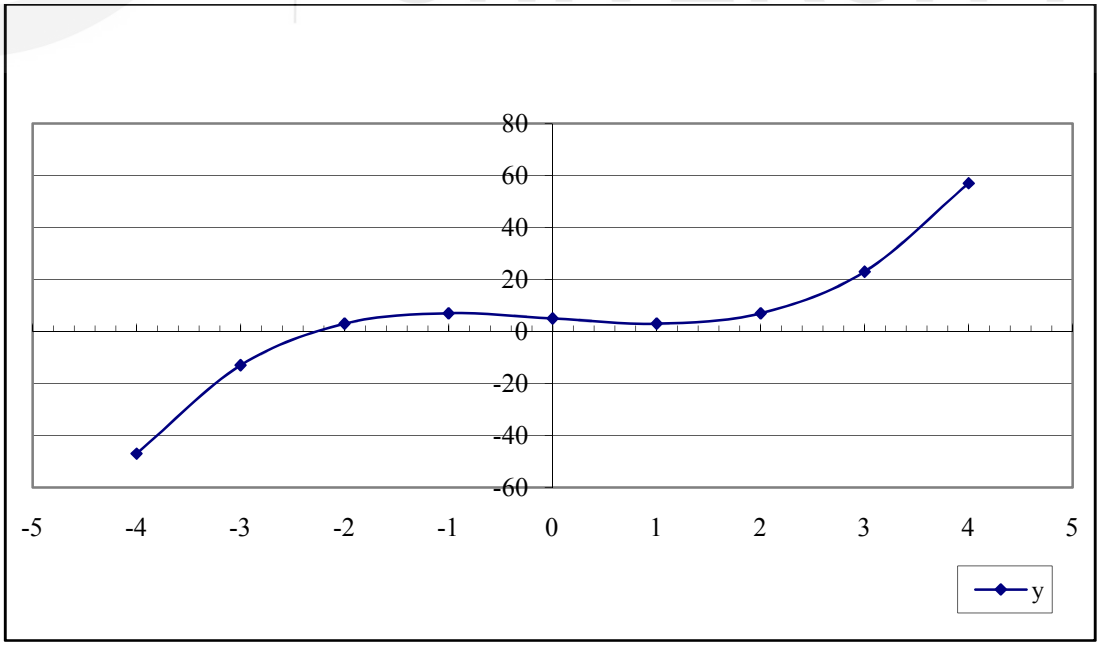
या $3(x^2 - 1) = 0$

चरण 3 : इस प्रकार प्राप्त को x के लिए हल करें तथा क्रांतिक मान ज्ञात करें।

फलन के क्रांतिक मान $x = +1$ और $x = -1$ हैं। इनके संगत y के स्तब्ध/स्थिर मान क्रमशः $f(+1) = 3$ और $f(-1) = 7$ हैं। सापेक्षिक उच्चतम तथा सापेक्षिक निम्नतम में अंतर स्पष्ट रूप से देखने के लिए, आईए हम उदाहरण 2 में दिए हुए फलन का आलेख बनाएं।

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–13	3	7	5	3	7	23

x और y के बीच संबंध को रेखाचित्र 12.4 में आलेख द्वारा निरूपित किया गया है।



रेखाचित्र 12.4: $y = x^3 - 3x + 5$

यह सत्यापित करना सरल है कि ($x = -1$ के तत्काल/सन्निकट प्रतिवेश में,) $x < -1$ के लिए $f'(x) > 0$ है तथा $x < -1$ के लिए $f(x) < 0$ है।

अतः, फलन का संगत मान $f(-1)$, जो कि 7 है, एक सापेक्षित उच्चतम के रूप में स्थापित हो जाता है। इसी प्रकार ध्यान दें कि $x = 1$ के निकटतम/सन्निकट/तत्काल प्रतिवेश में, $x < 1$ के लिए $f(x) < 0$ है और $x > 1$ के लिए $f(x) > 0$ है। इसके परिणाम स्वरूप, फलन का संगत मान $f(1)$, जो कि 3 है, एक सापेक्षित निम्नतम के रूप में स्थापित होता है।

चेतावनी : फलन की ढाल शून्य होना एक सापेक्षिक अभीष्टतम के लिए अनिवार्य शर्त है परंतु पर्याप्त नहीं। यदि एक फलन $f(x)$ का x में किसी मान (मान लीजिए) x_0 के लिए प्रथम अवकलज शून्य है तो यह स्वतः ही सुनिश्चित नहीं हो जाता है कि x_0 फलन एक सापेक्षिक अभीष्टतम है। इसे ठीक से समझने के लिए हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : नीचे दिए हुए फलन,

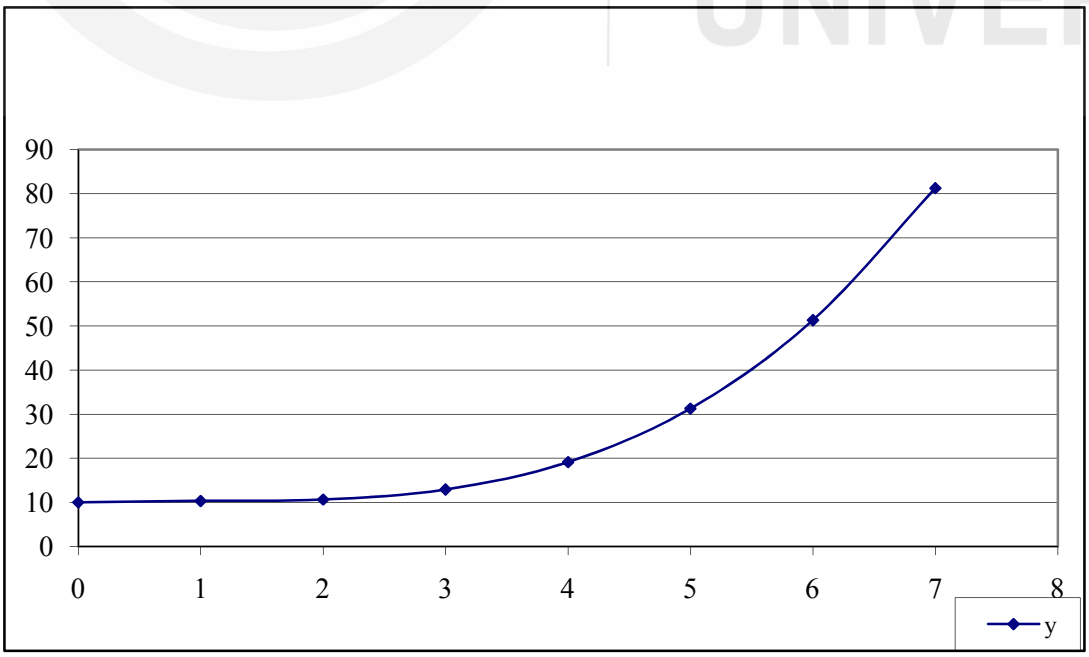
$$y = (1/3)x^3 - x^2 + x + 10$$

जिसका प्रांत, अंतराल $[0, \alpha)$ है पर विचर कीजिए। x के सापेक्ष इसका प्रथम अवकलज ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि

$$x^2 - 2x + 1 \quad \text{or} \quad (x-1)^2$$

है। प्रथम अवकलज को शून्य रखने पर हम पाते हैं कि $x = 1$ फलन का एक क्रांतिक बिंदु है। इसके संगत y का स्तब्ध मान 10.33 है। यह निश्चित करने के लिए कि यह स्तब्ध मान, फलन का एक सापेक्षिक अभीष्टतम भी है अथवा नहीं, हम इस पर प्रथम-कोटि परीक्षण लगाते हैं। इस फलन का आलेखीय निरूपण रेखाचित्र 12.5 में दिया है।

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	10.33	10.66	13	19.33	31.66	52



रेखाचित्र 12.5 : $y = (1/3)x^3 - x^2 + x + 10$

$x = 1$ पर फलन की ढाल शून्य है। यद्यपि $f'(1)$ शून्य है जिससे यह तो तय होता है कि $f(1)$

एक स्थिर/स्तब्ध मान है, परंतु यह अवकलज बिंदु $x = 1$ के किसी भी प्रतिवेश में बाईं से दाईं ओर जाते हुए अपना चिह्न नहीं बदलता। यह देखा जा सकता है कि $x = 1$ के आस-पास दोनों ओर $\frac{dy}{dx} = (x-1)^2$ धनात्मक है। अर्थात् $x = 1$ के दोनों ओर फलन वर्धमान है। अतः, प्रथम अवकलज परीक्षण के आधार पर यह कहा जा सकता है कि स्थिर/स्तब्ध मान $f(1) = 10.33$ न तो सापेक्षिक उच्चतम है, नही सापेक्षिक न्यूनतम। संक्षेप में, हम कह सकते हैं कि एक सापेक्षिक अभीष्टतम निश्चित रूप से एक स्तब्ध/स्थिर मान होगा परंतु इसका विपरीत कथन सत्य नहीं है। एक दिए हुए फलन का सापेक्षिक उच्च या निम्नतम ज्ञात करने के लिए, सर्वप्रथम हमें निर्भर चर के क्रांतिक मान ज्ञात करना होगा, जहाँ पर फलन का प्रथम अवकलज शून्य के बराबर होता है। इससे हमें फलन के स्तब्ध मान ज्ञात हो जाएंगे। यह सुनिश्चित करने के लिए कि यह स्तब्ध मान एक सापेक्षिक उच्चतम अथवा सापेक्षिक निम्नतम बिंदु भी है, हमें प्रथम अवकलज परीक्षण की आवश्यकता पड़ती है।

बोध प्रश्न 1

1) फलनों $y = x^3 - 3x^2 + 2$ तथा $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$ के निम्नतम तथा उच्चतम मान ज्ञात कीजिए।

.....

.....

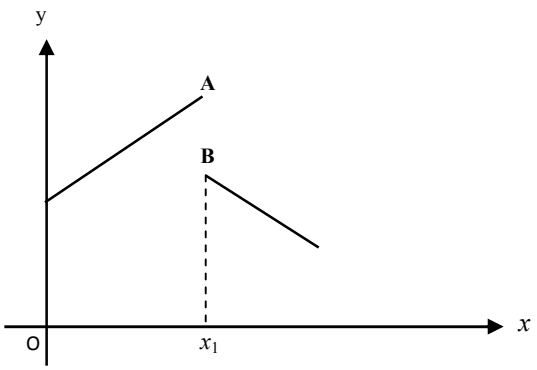
.....

.....

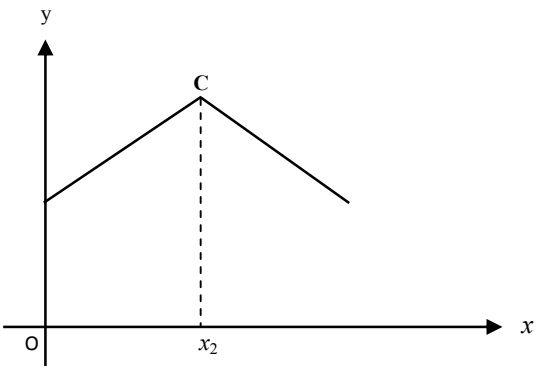
.....

12.3 अनअवकलनीयता की समस्या [PROBLEM OF NON-DIFFERENTIABILITY]

अभी तक हम यह मानकर चलते रहे हैं कि दिया हुआ फलन एक संतत तथा अवकलनीय फलन है। इस अनुच्छेद में हम दो ऐसी स्थितियों पर विचार करेंगे जिनमें यह शर्तक मान्यता हटा दी गई है।



रेखाचित्र 12.6



रेखाचित्र 12.7

रेखाचित्र 12.6 और 12.7 में हमने x और y के बीच ऐसे संबंधों को निरूपित किया है जो दो विशेष प्रकार की अनियमितताओं को दर्शातें हैं। रेखाचित्र 12.6 में, फलन x_1 पर असंतत है। x_1 पर आलेख में एक पूर्ण विच्छिन्नता या असंतता AB है। समस्या यह है कि इस असंतता के कारण, फलन का प्रथम अवकलज परिभाषित ही नहीं है। इन बिंदुओं, A और B, पर वक्र की पर कोई अद्वितीय स्पर्श रेखा बनानी संभव नहीं है। परंतु ध्यान दें कि A पर फलन का एक उच्चतम मान बिंदु है अर्थात् x_1 पर, निर्भर चर y अधिकतम संभव मान को प्राप्त करता है। लगभग इसी प्रकार की स्थिति रेखाचित्र 12.7 में दर्शाए गए फलन में देखने को मिलती है। इस स्थिति में, फलन के आलेख में बिंदु C पर, जो कि x_2 को निरूपित करता है, एक आकस्मिक मोड़ (नुकीला) है। इस बिंदु (मोड़) पर फलन का प्रथम अवकलज परिभाषित नहीं है और वक्र पर x_2 पर कोई अद्वितीय स्पर्श रेखा नहीं है। ध्यान दे कि यहाँ पर भी फलन x_2 के संगत इस बिंदु C पर एक उच्चतम मान को प्राप्त करता है। दूसरे शब्दों में, असंतता और आकस्मिक मोड़ की उपस्थिति में अवकलज परिभाषित नहीं होता और इसलिए इस स्थिति में, ऊपर दिए गए, अवकलज पर आधारित, अभीष्टतम ज्ञात करने के मापदंड को लगाना संभव नहीं है। अब तक हमने किसी फलन के केवल प्रथम अवकलज का प्रयोग किया है। अगले अनुच्छेद में हम किसी फलन के द्वितीय अवकलज को परिभाषित करेंगे और तत्पश्चात् यह देखेंगे कि किसी फलन के सापेक्षिक अभीष्टतम के निर्धारण में यह किस प्रकार उपयोगी सिद्ध होता है।

12.4 द्वितीय-कोटि अवकलज तथा अभीष्टतम की लिए द्वितीय-कोटि शर्त/मापदंड [THE SECOND ORDER DERIVATIVE AND SECOND-ORDER CONDITION]

यह मानते हुए कि प्रथम-कोटि अवकलज स्वयं x का एक फलन है, फलन का द्वितीय अवकलज फलन का x के सापेक्ष एक बार और अवकलन ज्ञात करके प्राप्त किया जा सकता है। प्रतीकात्मक रूप में, $f(x)$ का द्वितीय-कोटि अवकलज $f''(x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। चिह्न ′ का दो बार प्रयोग अर्थात् ′′यह दर्शाता है कि फलन का x के सापेक्ष दो बार अवकलन किया गया है। चिह्न ′′ के बाद व्यंजक (x) यह दर्शाता है कि द्वितीय अवकलज भी x का एक फलन है। यदि द्वितीय अवकलज $f''(x)$, फलन के प्रांत के सभी मानों के लिए अस्तित्व रखता हो, तो हम कहते हैं कि फलन $f(x)$ दो बार अवकलनीय है। इसके अतिरिक्त, यदि $f''(x)$ संतत हो, तो फलन दो बार संतत रूप से अवकलनीय कहलाता है।

उदाहरण 4 : नीचे दिए फलन का द्वितीय अवकलज ज्ञात कीजिए।

$$y = f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 10$$

चरण 1 : ऊपर दिए **फलन/समीकरण** का x के सापेक्ष प्रथम अवकलज ज्ञात करें। ऐसा करने पर हम पाते हैं कि

चरण 2 : ऊपर प्राप्त **फलन/समीकरण** का पुनः अवकलन करने पर हम दिए हुए मूल

$$f'(x) = 12x^2 + 10x - 3$$

फलन का द्वितीय अवकलज प्राप्त करते हैं जो कि इस प्रकार है :

$$f''(x) = 24x + 10$$

12.4.1 द्वितीय-कोटि अवकलज की व्याख्या [Interpretation of the Second Derivative]

किसी फलन $f(x)$ का अवकलज, अर्थात् $f'(x)$, फलन की ढाल (या फलन में परिवर्तन की दर) का माप है। यदि यह प्रथम अवकलज धनात्मक हो, अर्थात् $f(x) > 0$ हो, तो फलन वर्धमान होता है, और यदि $f'(x) < 0$ हो, तो फलन ह्रासमान होता है।

तुलनात्मक रूप से द्वितीय अवकलज, अर्थात्, $f''(x)$, प्रथम अवकलज $f'(x)$ के परिवर्तन की दर का माप है। यदि द्वितीय अवकलज धनात्मक हो, अर्थात् यदि $f''(x) > 0$ हो, तो परिवर्तन की दर वर्धमान होगी, और यदि $f''(x) < 0$ हो, तो परिवर्तन की दर ह्रासमान होगी। दूसरे शब्दों में, द्वितीय अवकलज मूल फलन में परिवर्तन की दर के परिवर्तन की दर है। ध्यान दें कि यदि $f'(x) > 0$ और $f''(x) > 0$ हो, तो इसका अर्थ होगा कि फलन की ढाल धनात्मक होगी जो कि बढ़ती हुई दर पर परिवर्तित हो रही है। दूसरे शब्दों में, फलन $f(x)$ बढ़ती हुई दर पर बढ़ता हुआ फलन कहलाता है। दूसरी ओर, यदि $f'(x) < 0$ तथा $f''(x) < 0$ हो, तो इसका अर्थ होगा फलन $f(x)$ की ढाल ऋणात्मक होगी जो कि घटती हुई दर पर परिवर्तित हो रही है। दूसरे शब्दों में, फलन $f(x)$ घटती हुई दर पर घटता हुआ फलन कहलाता है।

12.4.2 द्वितीय-कोटि अवकलज परीक्षण [The Second Derivative Test]

इस परीक्षण में दिए हुए फलन के द्वितीय अवकलज का प्रयोग किया जाता है। इसीलिए इसे द्वितीय अवकलज परीक्षण कहते हैं।

मान लीजिए कि $f(x_0) = 0$ है (अर्थात् x_0 एक क्रांतिक बिंदु है। तो,

1) यदि $f''(x_0) > 0$ हो, तो $f(x_0)$ एक सापेक्षिक निम्नतम मान होगा।

2) यदि $f''(x_0) < 0$ हो, तो $f(x_0)$ एक सापेक्षिक उच्चतम मान होगा।

जैसा कि हम पहले उल्लेख कर चुके हैं कि शून्य ढाल शर्त, अर्थात् $x = x_0$ पर $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0)$ के एक सापेक्षिक अभीष्टतम होने के लिए कए 'आवश्यक शर्त' है। क्योंकि यह शर्त फलन के प्रथम अवकलज पर आधारित है, इसे प्रथम-कोटि शर्त कहा जाता है। एक बार अगर हम यह सत्यापित कर लें कि फलन प्रथम-कोटि शर्त को पूरा करता है, तो $x = x_0$ पर $f''(x_0)$ का चिह्न ऋणात्मक (धनात्मक) होना यह सुनिश्चित करने के लिए पर्याप्त है कि x_0 एक सापेक्षिक उच्चतम (निम्नतम) के संगत बिंदु है। क्योंकि यह पर्याप्त शर्त फलन के द्वितीय अवकलज पर आधारित है, इसे ही द्वितीय-कोटि शर्त कहते हैं।

स्पष्ट रूप से यह समझने के लिए कि द्वितीय अवकलज किस प्रकार हमें यह निर्धारित करने में सहायता करता है कि एक स्तब्ध मान एक 'सापेक्षिक उच्चतम' है अथवा 'सापेक्षिक निम्नतम', आईए हम फिर से एक बार रेखाचित्र 12.1 को देखें। स्मरण करें कि इस फलन के अभीष्टतम मान या तो पर्वत की घाटी (बिंदु B) पर या पर्वत की चोटी (बिंदु A) पर। आलेख पर सापेक्षिक उच्चतम के संगत बिंदु (बिंदु A) के आस–पास, आलेख नीचे की ओर अवतल है। यह ऊपर की गई चर्चा के अनुरूप है, क्योंकि A (x_2, y_2), x_2 के आस-पास एक अंतराल में आलेख पर उच्चतम बिंदु है। अतः, आलेख का चोटी से नीचे की ओर मुड़ना आवश्यंभावी है, जिससे वह नीचे की ओर अवतल हो जाएगा। यदि हम आलेख पर इस क्षेत्र में कोई भी दो बिंदु लें, तो इन दोनों

बिंदुओं को मिलाती हुई रेखा, पूरी तरह से आलेख के नीचे होगी सिवाय वक्र पर स्थित इस रेखाखंड के शीर्ष बिंदुओं के।

यह सुनिश्चित करता है कि $x = x_2$ के लिए $f''(x_2) < 0$ सत्य है। इसी प्रकार रेखाचित्र 12.1 में ही आलेख पर स्थित बिंदु B (x_1, y_1) के आस–पास, आलेख ऊपर की ओर उत्तल है। पुनः, यह भी ऊपर की गई चर्चा के अनुरूप है। यह बिंदु आलेख पर स्थित बिंदु x, के आस-पास एक अंतराल में निम्नतम है। अतः, आलेख का बिंदु (x_1, y_1) से ऊपर की ओर मुड़ना अवश्यंभावी है। यदि हम इस क्षेत्र में आलेख पर कोई भी दो बिंदु लें, तो इन बिंदुओं को मिलाती हुई रेखा, पूरी तरह से आलेख के ऊपर स्थित होगी सिवाय वक्र पर स्थित इस रेखाखंड के शीर्ष बिंदुओं के। यह सुनिश्चित करता है कि $x = x_1$ पर $f''(x_1) > 0$ सत्य है।

आईए अब हम उदाहरण 2 में दिए हुए फलन पर यह परीक्षण करें। हमारे पास दो क्रांतिक बिंदु $x = +1$ और $x = -1$ हैं और फलन का प्रथम अवकलज, $f'(x) = 3x^2 - 3$ है। दूसरा अवकलज $f''(x) = 6x$ है। दोनों क्रांतिक बिंदुओं पर द्वितीय–कोटि अवकलज परीक्षण लगाने पर हम पाते हैं कि $f''(1) = 6 > 0$ है, जिससे $f(1) = 3$ एक सापेक्षिक निम्नतम बन जाता है और $f''(-1) = -6 < 0)$ है, जिससे $f(-1) = 7$ एक सापेक्षिक उच्चतम बन जाता है।

इसी प्रकार, द्वितीय-कोटि शर्त बिना फलन का आलेख बनाए, यह निर्धारित करने में अत्यंत उपयोगी सिद्ध होता है कि क्या उदाहरण 3 में दिए फलन का स्थिर/स्तब्ध/क्रांतिक बिंदु एक सापेक्षिक अभीष्टतम है। इस उदाहरण में, हमने प्रथम अवकलज $f'(x) = x^2 - 2x + 1$ प्राप्त किया और क्रांतिक बिंदु $x = +1$ इस फलन का द्वितीय अवकलज $f''(x) = 2x - 2$ है। इस क्रांतिक बिंदु पर द्वितीय अवकलज परीक्षण करने पर हम पाते हैं कि $f''(+1) = 2 - 2 = 0$ है। दूसरे शब्दों, में, क्रांतिक बिंदु $x = +1$ पर द्वितीय–कोटि शर्त लागू नहीं है जिससे यह सिद्ध होता है कि स्थिर/स्तब्ध मान $f(+1) = 10.33$ न तो सापेक्षिक उच्चतम है, न ही सापेक्षिक निम्नतम।

बोध प्रश्न 2

1) निम्नलिखित फलनों के लिए, द्वितीय-अवकलज परीक्षण द्वारा y का सापेक्षिक उच्चतम और सापेक्षिक निम्नतम ज्ञात कीजिए :

अ) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 3$

ब) $y = \frac{(x-1)^2}{x} \qquad (x \neq 0)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) यदि एक एकाधिकारी की कुल लागत $C = ax^2 + bx + c$ है और यदि माँग सिद्धांत $p = \beta - \alpha x^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए की अधिकतम आगम के लिए उत्पाद

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + 3\alpha(\beta - b)}}{3\alpha} - \frac{a}{3\alpha}$$ होगा।

.....

.....

.....

.....

12.5 अभीष्टीकरण के अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोग [Economic Applications of Optimisation]

प्रथम और द्वितीय-कोटि शर्तों/मापदंडों, [जिन पर हमने पिछले अनुच्छेद में चर्चा की है] का उपयोग हम यह निर्धारित करने के लिए कर सकते हैं कि कोई उत्पादक अपने उत्पादन का स्तर क्या रखे कि उसका लाभ अधिकतम हो जाए, अर्थात् इन शर्तों की सहायता से एक उत्पादक के अभीष्टतम उत्पाद का निर्धारण किया जा सकता है। मान लीजिए, किसी एकाधिकारी के समक्ष किसी उत्पाद की माँग, केवल उत्पाद की कीमत का फलन है अर्थात् $Q = f_1(P)$ है। अतः, कुल आगम जो एकाधिकारी को प्राप्त होगा वह $R = P.Q = R(Q)$ है। साथ ही, एकाधिकारी के लिए उत्पादन की कुल लागत, उत्पादन की मात्रा का फलन है, अर्थात् $C = C(Q)$ है। इस स्थिति में, परिभाषा के अनुसार, एकाधिकारी को प्राप्त होने वाला लाभ, कुल आगम में से उत्पादन की कुल लागत को घटा कर प्राप्त होगा अर्थात् $\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$ होगा। एकाधिकारी का लक्ष्य उत्पादन के उस स्तर का निर्धारण करना है जिस पर उसका लाभ अधिकतम/उच्चतम हो। अब प्रश्न यह है कि वह उत्पादन के इस अभीष्टतम स्तर का निर्धारण किस प्रकार करेगा।

प्रथम-कोटि शर्त के अनुसार यह आवश्यक है कि अभीष्टतम/क्रांतिक बिंदु पर लाभ फलन की ढाल शून्य हो।

चरण 1 : लाभ फलन का Q के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए तथा इसे शून्य के बराबर रखिए। इससे हम प्राप्त करते हैं कि

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \Pi'(Q) = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC}{dQ} = 0$$

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{dC}{dQ}$$ या $MR = MC$

जहाँ MR, एकाधिकारी द्वारा अर्जित सीमांत आगम में (Q) में वृद्धि के फलस्वरूप आगम (R) में होने वाली वृद्धि को दर्शाता है। इसी प्रकार, सीमांत लागत, जिसे MC द्वारा व्यक्त किया गया है, एकाधिकारी द्वारा वहन की जाने वाली अतिरिक्त लागत को दर्शाता है जो उसे अतिरिक्त उत्पादन करने के लिए करनी पड़ेगी। अधिकतम/उच्चतम लाभ ज्ञात करने के लिए प्रथम-कोटि शर्त दर्शाता है कि एक उत्पादन स्तर के अभीष्टतम होने के लिए यह आवश्यक है कि उस बिंदु पर $MR = MC$ हो।

द्वितीय-कोटि शर्त से हम प्राप्त करते है कि

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = \Pi''(Q) = \frac{d^2R}{dQ^2} - \frac{d^2C}{dQ^2} < 0$$

$$\text{या } \frac{d^2R}{dQ^2} < \frac{d^2C}{dQ^2}$$

होना चाहिए।

अर्थात् उत्पादन के अभीष्टतम स्तर पर MR की ढाल $< MC$ की ढाल होनी चाहिए। संक्षेप में, अधिकतम लाभ के लिए अनिवार्य एवं पर्याप्त शर्त यह है कि एकाधिकारी तब तक उत्पादन जारी रखे जब तक वह उस स्तर/बिंदु तक न पहुँच जाए जहाँ सीमांत आगम और सीमांत लागत बराबर हो जाएं और साथ ही सीमांत आगम फलन की ढाल, सीमांत लागत फलन की ढाल से कम हो जाए। एक उदाहरण

प्रश्न : एक एकाधिकारी के लिए उत्पादन का अभीष्टतम स्तर ज्ञात कीजिए जबकि उसका माँग फलन $Q = 50 - 0.5P$ तथा कुल लागत फलन $C = 50 + 40Q$ है। साथ ही, यह भी ज्ञात कीजिए कि इस स्तर पर एकाधिकारी द्वारा अर्जित किया गया अधिकतम लाभ क्या होगा?

हल : दिए हुए रैखिक माँग फलन को पुनः $P = 100 - 2Q$ के रूप में लिखा जा सकता है। अतः, एकाधिकारी का कुल आगम फलन होगा :

$$R = P.Q = Q(100 - 2Q) = 100Q - 2Q^2$$

उसका, $MR = \frac{dR}{dQ} = 100 - 4Q$ होगा।

कुल लागत फलन $C = 50 + 40Q$ है।

अतः, पाते हैं कि

$$MC = \frac{dC}{dQ} = 40$$

है। अभीष्टतम Q ज्ञात करने के लिए, हम अधिकतम लाभ के लिए आवश्यक प्रथम-कोटि शर्त को लगाते हैं और MR तथा MC को बराबर रखते है।

अतः, हम पाते हैं कि

$$100 - 4Q = 40 \quad \text{or} \quad Q = 15$$

है। उत्पादन के इस स्तर पर, यह सुनिश्चित करने के लिए कि अधिकतम लाभ के लिए द्वितीय-कोटि शर्त भी सत्य है, हमें MR और MC दोनों का Q के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करना पड़ेगा। ऐसा करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

MR की ढाल $= \frac{d^2R}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(100 - 4Q) = -4$ तथा MC की ढाल $= \frac{d^2C}{dQ^2} = 0$ है। इस प्रकार हम देख सकते हैं कि उत्पादन का यह स्तर द्वितीय–कोटि शर्त $\frac{d^2R}{dQ^2} < \frac{d^2C}{dQ^2}$ को भी संतुष्ट करता है क्योंकि $-4 < 0$ है।

अतः, $Q = 15$ उत्पादन का अभीष्टतम स्तर होगा। एकाधिकारी के आगम तथा लागत फलनों में उत्पादन का यह अभीष्टतम स्तर अर्थात् $Q = 15$ प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं कि इस बिंदु पर लाभ

$\Pi = R(Q) - C(Q) = 1050 - 650 = 400$ है।

अतः, इस प्रश्न का उत्तर $Q = 15$ इकाई तथा $\pi = 400$ रू. है।

बोध प्रश्न 3

1) यह मानते हुए कि एक व्यवसायी का अल्पकालिक कुल लागत फलन

$C = q^3 - 10q^2 + 17q + 66$ है, यदि उत्पाद की कीमत 5रू. प्रति इकाई है तो उत्पादन का वह स्तर निर्धारित कीजिए, जिसके लिए व्यवसायी का लाभ अधिकतम होगा।

.....

.....

.....

.....

.....

2) एक रेडियो निर्माता प्रति सप्ताह x रेडियो सेट्स का उत्पादन कुल लागत

$\frac{1}{5}x^2 + 13x + 500$ पर करता है। वह एक एकाधिकारी है। उसकी बाजार माँग फलन $x = 75 - \frac{3}{5}p$ द्वारा व्यक्त की जा सकती है जहाँ p एक रेडियो सेट का कीमत है। यह सिद्ध कीजिए कि निर्माता को अधिकतम शुद्ध लाभ तब प्राप्त होगा जब वह प्रति सप्ताह 30 रेडियो सेट्स का निर्माण करेगा। एकाधिकार कीमत भी ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

3) एक **पूर्ण/शुद्ध** प्रतियोगिता फर्म का केवल एक ही आगत चर L(श्रम) है तथा वेतन की दर W_0 प्रति समयावधि है। फर्म के स्थिर आगतों की लागत F रू. प्रति समयावधि आती है। उत्पाद कीमत P_0 है।

अ) फर्म का उत्पादन फलन, आगम फलन, कुल लागत फलन तथा लाभ फलन ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

ब) अधिकतम लाभ के लिए प्रथम-कोटि शर्त क्या होगी? इस शर्त की अर्थशास्त्रीय व्याख्या कीजिए।

.....

.....

.....

.....

स) कौन सी अर्थशास्त्रीय स्थितियां यह सुनिश्चित करेंगी कि लाभ अधिकतम हो जाए, न कि न्यूनतम?

.....

.....

.....

.....

12.6 सार-संक्षेप

इस इकाई में हमने देखा कि किसी फलन के स्तब्ध/स्थिर/क्रांतिक बिंदु किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। हमने पाठकों का परिचय एक वास्तविक मान फलन के अभीष्टीकरण से करवाया। हमने केवल एक स्वतंत्र चर वाले फलनों की चर्चा की है। इस इकाई में सापेक्षिक अभीष्टतम मानों की संकल्पना पर चर्चा की गई। अभीष्टतम के लिए प्रथम-कोटि शर्त की भी चर्चा की गई। अन-अवकलनीयता की समस्या पर भी विचार किया गया। तत्पश्चात्, इस इकाई में द्वितीय-कोटि अवकलजों और द्वितीय–कोटि शर्तों पर भी चर्चा की गई। अंत में, अभीष्टीकरण के कुछ अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोगों की चर्चा की गई। इस चर्चा को भी हमने एक स्वतंत्र चर वाले फलनों तक ही सीमित रखा है।

12.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) क) निर्णायक बिंदु 0 और 2 होंगे। रेखाचित्रीय विश्लेषण के बाद आपको 'अधिकतम' $x = 0$ बिंदु पर मिलेगा जहाँ फलन का अधिकतम मान '2' है, 'न्यूनतम' की प्राप्ति '2' पर होती है और वहाँ फलन का न्यूनतम मान –2 होगा।

ख) निर्णायक बिंदु –1, 0 और 2 हैं। यहाँ $x = -1$ तथा $x = 2$ पर फलन के मान 'न्यूनतम' होंगे, जो क्रमशः –3 और –30 हैं। $x = 0$ पर फलन का मान 'अधिकतम' होगा जो '2' है।

बोध प्रश्न 2

1) क) निर्णायक बिंदु $x = 1$ और $x = 5$ हैं। $x = 1$ पर फलन स्थानिक अधिकतम मान पाता है जो $\frac{-14}{3}$ है तथा $x = 5$ फलन स्थानिक न्यूनतम मान पाता है जो $\frac{-16}{3}$ है।

ख) निर्णायक बिंदु $x = -1$ और $x = 1$ हैं। फलन $x = -1$ पर स्थानिक अधिकतम मान प्राप्त करता है, जो -4 है तथा $x = 1$ पर स्थानिक न्यूनतम पाता है जो 0 के समान है।

नोट : ध्यान रहे कि एक स्थानिक न्यूनतम फलन का ''न्यूनतम संभव'' मान नहीं है। इसी प्रकार स्थानिक अधिकतम भी फलन का ''अधिकतम संभव'' मान नहीं होता।

2) भाग 12.4 पढ़कर उत्तर लिखें। आप को ध्यान होगा कि एकाधिकारी फर्म उस समय संतुलन प्राप्त करती है जब उसका उत्पादन उस स्तर पर हो जहाँ आगम अधिकतम होता है और उस स्थिति में सीमांत आगम (MR) = सीमांत लागत (MC)।

बोध प्रश्न 3

1) $q = 6$

2) $p = 75$

3) क) आगम फलन (R) : $R(Q) = QP$; कुल लागत फलन (C) : $C(Q) = F + QV$; लाभ फलन (π): $\pi(Q) = R(Q) - C(Q) = QP - (F + QV) = Q(P - V) - F$

ख) अधिकतम लाभ की प्रथम कोटि शर्त :

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow \frac{dR(Q)}{dQ} - \frac{dC(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow MR = MC$$

अतः एक अधिकतम लाभ कमाने वाली प्रतियोगी फर्म उस Q का चुनाव करेगी जहाँ उसकी सीमांत आगम सीमांत लागत के समान हो।

ग) यह निश्चित करने के लिए कि लाभ अधिकतम है – न्यूनतम नहीं, हम द्वितीय कोटि की शर्त की जाँच करते है, अर्थात् MC वक्र के ढाल का मान MR वक्र के ढाल से अधिक होना चाहिए। याद करें कि एक प्रतियोगी फर्म की सीमांत आगम (MR) तो स्थिर होती है और कीमत (P) के समान भी। अतः सीमांत आगम वक्र क्षैतिज एवं कीमत या औसत आगम वक्र के साथ चिपकता हुआ होगा। इसीलिए संतुलन बिंदु पर सीमांत लागत वक्र ऊपर की ओर उठता हुआ होना चाहिए, अर्थात् :

$$\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2} < 0 \Rightarrow \frac{dMR}{dQ} < \frac{dMC}{dQ}$$