खंड 5
समाकलन

खंड 5 परिचय

पाठ्यक्रम का पांचवा खंड '**समाकलन**' को समार्पित है–यह भी कलन गणित की एक महत्वपूर्ण प्रशाखा है। हमने खंड 3 और 4 में अवकलन सीखा है– यह हम समाकलन से परिचित होंगे। इस खण्ड में दो इकाइयां हैं। **इकाई 13** में अनिश्चित समाकलों पर चर्चा करते हुए यह दिखाया गया है कि किस रुप में समाकलन अवकलन की विपरीत क्रिया होती है। वास्तव में अनिश्चित समाकलन को कई बार प्रतिअवकलन भी कह देते है। इकाई में समाकलों के गुण धर्मों पर चर्चा की गई है। आपको यही समाकलन की कुछ तकनीकों – प्रतिस्थापन द्वारा, खण्डों द्वारा आदि से परिचित कराया गया है। पाठ्यक्रम की अन्य इकाइयों की ही भांति यहां भी अर्थशास्त्र इन विधियों के अनुप्रयोग समझाए गए हैं।

इकाई 14 का शीर्षक निश्चित समाकल है–यह समाकलन के प्रति एक अन्य दृष्टिकोण ही है जिसमें समाकल की किसी योग फल को परिश्रमिक मान के रूप में व्याख्या की जाती है। ये निश्चित समाकल किसी वक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल के आंकलन में बहुत उपयोगी रहते है। यहीं हम एक विशेष प्रकार के निश्चित समाकल–'रीमन समाकल' पर भी चर्चा कर रहे है। निश्चित समाकलो के गुणधर्मों के साथ साथ अर्थशास्त्र में उपभोक्ता के अतिरेक, डोमर के संवृद्धि प्रतिमान आदि अवधारणाओं में हम इनके अनुप्रयोगो पर भी यहीं चर्चा कर रहे हैं।

इकाई 13 अनिश्चित समाकलन*

संरचना

13.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप, सक्षम होंगे –

- समाकलन की संकल्पना की व्याख्या करने में;
- अनिश्चित समाकलन को अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम के रूप में समझाने में;
- अनिश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्मों का वर्णन करने में;
- अनिश्चित समाकलनों को ज्ञात करने की कुछ विशिष्ट विधियों, जैसे प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन, खंडशः समाकलन तथा आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन इत्यादि का प्रयोग करने में; तथा
- समाकलन के कुछ विशिष्ट अनुप्रयोगों के विषय में चर्चा कर पाने में।

13.1 विषय-प्रवेश

इकाई 7 से इकाई 10 में आपने अवकलन गणित (डिफरेंशल कैल्कुलस) के बारे में पढ़ा तथा खंड 4 में इसका उपयोग अभीष्टतमीकरण के लिए किया है। आपने यह देखा कि किसी फलन $F(x)$ का अवकलज एक अन्य फलन $F'(x)$ होता है। दूसरे शब्दों में, $F'(x) = f(x)$ होता है। क्या यह प्रक्रम उत्क्रमणीय है? अर्थात् यदि हमें फलन $f(x)$ दिया हो, तो क्या हम उससे वह मूल फलन $F(x)$ ज्ञात कर सकते है कि $F'(x) = f(x)$ हो ? अवकलन के ऐसे प्रतिवर्ती कार्य को प्रति-अवकल या समाकलन कहते हैं। ऐतिहासिक रूप में समाकलन की संकल्पना अवकलन की संकल्पना से पहले विकसित हुई है। यह तो बहुत समय पश्चात् सामने आया कि अवकलन और समाकलन एक-दूसरे की प्रतिवर्ती क्रियाएँ हैं। इस इकाई में हम इकाई में हम प्रति अवकलन की संकल्पना का परिचय दे रहे हैं। इस इकाई का ध्येय पाठक को साधारण समाकलन के विषय में कुछ प्रारंभिक विचारों से परिचित करवाना है।

*श्री सौगतो सेन

अगले भाग में, हम समाकलन को अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम के रूप में विस्तार से समझेंगे। यहाँ यह जान लेना महत्त्वपूर्ण है कि इस विधि को समाकलन कहते हैं जबकि यह संकल्पना समाकल के नाम से जानी जाती है। इस भाग में कुछ महत्त्वपूर्ण फलनों के समाकलन भी बताए गए हैं। साथ ही, इस खंड में समाकलन की कुछ महत्त्वपूर्ण विधियों के बारे में भी बताया गया है जिसमें किसी फलन का समाकलन उस स्थिति में प्राप्त किया जा सके जब उसका समाकलन प्रत्यक्ष विधि से आकलित नहीं हो पा रहा हो। ऐसी तीन प्रमुख विधियाँ, जिनके बारे में यहाँ चर्चा की गई है, वे हैं : प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन, खंडशः समाकलन तथा आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन। अंततः, इस इकाई में अनिश्चित समाकलन के अर्थशास्त्र में होने वाले कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा भी की गई है।

13.2 समाकलन, अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम के रूप में (Integral as Anti-Derivative)

याद करें कि इकाई 9 में हमने पढ़ा था कि यदि एक फलन $F(x)$ का अवकलन किया जाए तो हमें फलन $f(x)$ प्राप्त होता है। प्रतीकात्मक रूप से इसे $F'(x) = f(x)$ लिखा जा सकता है। इस इकाई में, हम इसके व्युत्क्रम प्रक्रम का अध्ययन करेंगे : एक दिए हुए फलन $f(x)$ के लिए, हम एक ऐसा फलन $F(x)$ ज्ञात करना चाहेंगे जिसका अवकलज $f(x)$ के बराबर हो, अर्थात्

$$F'(x) = f(x)$$

परिभाषा 1 : एक फलन $F(x)$, एक दिए हुए फलन $f(x)$ का अंतराल [a, b] पर प्रति अवकलज कहलाता है यदि अंतराल के प्रत्येक बिंदु के लिए $F'(x) = f(x)$ हो।

उदाहरण : फलन $f(x) = x^2$ का प्रति अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : परिभाषा 1 से हम देख सकते हैं कि $F(x) = \frac{x^3}{3}$, फलन $f(x)$ का एक प्रति अवकलज है, क्योंकि $F'(x) = f(x)$ है।

$$\frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{dx} = x^2$$

किन्तु हम सरलता से यह भी देख सकते हैं कि यदि किसी दिए हुए फलन $f(x)$ का प्रति अवकलज अस्तित्व रखता है तो वह अद्वितीय नहीं होता। उपरोक्त उदाहरण में निम्नलिखित फलनों को भी $f(x) = x^2$ के प्रतिअवकलज के रूप में लिया जा सकता है :

$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 9$ या, $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ व्यापक रूप में (जहाँ C स्वेच्छ अचर है)

चूँकि $\frac{d\left(\frac{x^3}{3} + C\right)}{dx} = x^2$ होता है, $\frac{x^3}{3} + C$ प्रकार के फलन में x^2 के सभी प्रति अवकलज सम्मिलित हैं।

व्यापकतः, यदि किसी दिए हुए फलन $F(x)$ का एक प्रति अवकलज $f(x)$ ज्ञात हो जाए तो उसके किसी भी प्रति अवकलज का प्रारूप $F(x) + C$ होगा जहाँ C एक अचर है।

उपरोक्त चर्चा में हमने देखा कि समाकलन, अवकलन का व्युत्क्रम प्रक्रम है। यह योग करने का प्रक्रम है। इस प्रक्रम की दो मूलभूत संकल्पनाएं हैं।

क) अनिश्चित समाकलन

ख) निश्चित समाकलन

निश्चित समाकलन पर हम अगली इकाई में चर्चा करेंगे। इस इकाई में हम अपनी चर्चा अनिश्चित समाकलनों तक सीमित रखेंगे।

परिभाषा 2 : ***अनिश्चित समाकलन***– यदि फलन $F(x)$, फलन $f(x)$ का प्रतिअवकलज है, अर्थात्, यदि $F'(x) = f(x)$, है, तो व्यंजक $F(x)+C$, फलन $f(x)$ का अनिश्चित समाकलन होता है, तथा इसे समाकलन के चिन्ह $\int$ से व्यक्त करते हैं। अतः, परिभाषा के अनुसार

$$\int f(x)\ dx\ = F(x) + C$$

टिप्पणियाँ :

i) जिस प्रकार $\frac{d}{dx}$ या $\frac{dy}{dx}$ अवकलन के चिन्ह हैं, उस प्रकार $\int$ समाकलन का चिन्ह है। यह अंग्रेज़ी के अक्षर 'S' का विकृत रूप है जो अंग्रेज़ी के शब्द "sum" (योग) का प्रथम अक्षर है। वास्तव में, सर्वप्रथम, समाकलन को एक निश्चित अनंत श्रृंखला के योग के रूप में परिभाषित किया गया था।

ii) फलन $f(x)$, जिसका समाकलन किया जाना है, समाकल्य कहलाता है। इसी प्रकार, x समाकलन का चर तथा C समाकलन का अचर कहलाता है।

iii) ध्यान रहे कि dx, d और x के गुणनफल को नहीं व्यक्त करता अपितु यह इस बात का प्रतीक है कि समाकलन x के सापेक्ष किया जाना है।

iv) $\int f(x)dx$ का अर्थ फलन $f(\mathrm{x})$ का (x के सापेक्ष) समाकलन है अर्थात् यह समाकल्य $f(\mathrm{x})$ का समाकलन है।

v) किसी फलन का समाकल निकालने की प्रक्रिया को समाकलन कहते हैं।

vi) समाकलन की प्रति अवकलज के रूप में परिभाषा से यह स्पष्ट है कि

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

अर्थात् किसी फलन के समाकलन का अवकलज स्वयं वह फलन ही होता है। प्रसंगवश, यह समाकलन का पहला नियम है। चूँकि $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ है इसलिए $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx$ या $\int 2x\,dx = 2\times\frac{x^2}{2} = x^2$ है।

vii) एक अनिश्चित समाकलन $y = F(x) + C$ के प्रकार के फलनों का परिवार होता है। ज्यामितीय दृष्टिकोण से, एक अनिश्चित समाकलन ऐसे वक्रों का समूह है, जिनमें से प्रत्येक किसी एक वक्र को, y-अक्ष के सापेक्ष, ऊपर या नीचे, अपने समानांतर स्थानांतरित करने से प्राप्त किया जा सकता है।

यहाँ पर एक प्रश्न उठता है : क्या प्रत्येक फलन $f(x)$ के प्रति अवकलज या अनिश्चित समाकलन विद्यमान होते हैं? उत्तर है नहीं। तथापि यदि कोई फलन किसी अंतराल [a, b] पर संतत होता है, तो इस फलन का प्रति अवकलज (अतः अनिश्चित समाकलन) निश्चित रूप से होता है।

यदि किसी प्राथमिक फलन का अवकलज एक प्राथमिक अवकलज हो, तो यह आवश्यक नहीं है कि उस प्राथमिक फलन के प्रति अवकलज को प्राथमिक फलनों की सीमित संख्या द्वारा निरूपित किया जा सके।

सारांश रूप में :

1) किसी अनिश्चित समाकलन का अवकलज, समाकल्य के बराबर होता है, अर्थात् यदि $F'(x) = f(x)$ है, तो

$$\left(\int f(x)\ dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$$

सरल भाषा में, किसी प्रति अवकलज का अवकलज, समाकल्य के बराबर होता है।

2) किसी अनिश्चित समाकलन का अवकलन करने से हमें समाकलन के चिन्ह के भीतर का व्यंजक प्राप्त होता है। अर्थात्

$$d\left(\int f(x)\ dx\right) = f(x)$$

ध्यान दें कि यह परिणाम ऊपर बिंदु (1) में दिए गए व्यंजक से सीधे-सीधे ज्ञात किया जा सकता है।

3) किसी फलन के अवकलन का अनिश्चित समाकलन, उस फलन तथा एक अचर

$$\int d\,F(x)\ dx = F(x)\ + C$$

के योग के बराबर होता है :

यह हम ऊपर दिए गए व्यंजक के दोनों पक्षों का अवकलन करके सिद्ध कर सकते हैं।

13.3 समाकलन के कुछ नियम (Some Rules of Integrals)

अब हम समाकलन के कुछ मूलभूत नियमों का उल्लेख उन्हें प्रमाणित किए बिना कर रहे हैं। पाठकों से अपेक्षा है कि वे इन्हें भली-भाँति समझकर, आवश्यकतानुसार इनका प्रयोग करेंगे।

नियम 1 : किसी फलन के समाकलन का अवकलज, स्वयं फलन ही होता है, प्रतीकतः,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

नियम 2 : किसी फलन और किसी अचर 'k' के गुणनफल का समाकलन, फलन के समाकलन तथा अचर k के गुणनफल के बराबर होता है। प्रतीकतः,

$$\int k\,f\,(x)dx = k \times \int f(x)dx$$

नियम 3 : दो फलनों के योग अथवा अंतर का समाकलन, उन फलनों के समाकलनों के योग अथवा अंतर के बराबर होता है। प्रतीकतः

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\pm\psi(x)+\ldots\right]dx=\left[\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx\pm\int\psi(x)\,dx+\ldots\right]$$

अब हम नीचे कुछ मानक फलनों के समाकलज दे रहे हैं जो समाकलन के प्रक्रम में बहुत उपयोगी साबित होंगे। क्योंकि इन समाकलनों का प्रयोग हमें बार-बार करना पड़ेगा, हमें इन्हें अच्छे से कंठस्थ कर लेना चाहिए।

1) चूँकि $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]=x^n$, इसलिए $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$

2) चूँकि $\frac{d}{dx}[\log x]=\frac{1}{x}$, इसलिए $\int\frac{1}{x}dx=\log x+c$

3) चूँकि $\frac{d}{dx}[e^x]=e^x$, इसलिए $\int e^n dx=e^n+c$

4) चूँकि $\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{ax}}{a}\right]=e^{ax}$, इसलिए $\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+c$ या $\frac{e^{ax}}{\frac{d}{dx}(ax)}+c$

5) चूँकि $\frac{d}{dx}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}\right]=(ax+b)^n$, इसलिए

$$\int(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)}+c=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\times\frac{d}{dx}(ax+b)}+c,\quad n\neq-1$$

6) चूँकि $\frac{d}{dx}a^x=a^x\log a$, इसलिए $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+c,\;\; a>0$

7) चूँकि $\frac{d}{dx}\left[\frac{\log(ax+b)}{a}\right]=\frac{1}{ax+b}$, इसलिए

$$\int\frac{1}{(ax+b)}dx=\frac{\log(ax+b)}{a}\qquad\left[or=\frac{\log(ax+b)}{\frac{d}{dx}(ax+b)}\right]$$

8) चूँकि $\frac{d}{dx}(x)=1$, इसलिए $\int 1\,dx=x+c$

अब हम ऊपर दिए सूत्रों के आधार पर कुछ उदाहरण लेते हैं :

1) $\int x^5dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+c=\frac{x^6}{6}+c$

2) $\int e^{3x}dx=\frac{e^{3x}}{\frac{d}{dx}(3x)}+c=\frac{e^{3x}}{3}+c$

3) $$\int e^{(3x+5)}dx = \frac{e^{(3x+5)}}{\frac{d}{dx}(3x+5)} + c = \frac{e^{(3x+5)}}{3} + c$$

4) $$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{4x^4} + c$$

5) $$\int 7dx = 7\int 1\ dx = 7x + c$$

6) मान ज्ञात कीजिए

$$\int\left[3x^4 + 5x^{-3} - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{9}{x}\right]dx$$

$$I = 3\int x^4 dx + 5\int x^{-3}dx - 3\int x^2 dx + \int x^{\frac{-1}{2}}dx + 9\int \frac{1}{x}dx$$

$$= 3\times\frac{x^{4+1}}{4+1} + 5\times\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - 3\times\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 9\log x + c$$

$$= \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{3}{3}x^3 + \frac{x^{+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 9\log x + c$$

$$= \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{2x^2} - x^3 + 2x^{\frac{1}{2}} + 9\log x + c$$

7) मान ज्ञात कीजिए

$$I = \int(2-7x)(5-3x)(7-2x)\,dx$$

$$I = \int(2-7x)(6x^2 - 31x + 35)\quad dx = \int(12x^2 - 62x + 70 - 42x^3 + 217x^2 - 245x)dx$$

$$= 12\int x^2 dx - 62\int x\,dx + \int 70dx - 42\int x^3 dx + 217\int x^2 dx - 245\int x\,dx$$

$$= \left(12\times\frac{x^3}{3}\right) - \left(62\times\frac{x^2}{2}\right) + 70x - \left(42\times\frac{x^4}{4}\right) + \left(217\times\frac{x^3}{3}\right) - \left(245\times\frac{x^2}{2}\right) + c$$

$$= 4x^3 - 31x^2 + 70x - \frac{21x^4}{2} + \frac{217x^3}{3} - \frac{245x^2}{2} + c$$

$$= -\frac{21x^4}{2} + \frac{229x^3}{3} - \frac{307x^2}{2} + 70x + c$$

8) समाकलन कीजिए

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$I=\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3 dx = \int\left(x^6+\frac{1}{x^6}+3x^4\cdot\frac{1}{x^2}+3x^2\cdot\frac{1}{x^4}\right)dx$$

$$=\int\left(x^6+\frac{1}{x^6}+3x^2+\ldots\right.$$

$$=\frac{x^7}{7}-\frac{x^{-5}}{5}+\frac{3x^3}{3}-3x^{-1}+c$$

$$=\frac{x^7}{7}-\frac{1}{5x^5}+x^3-\frac{3}{x}+c$$

9) $\int(e^{\log x^a}+e^{\log a^x})\,dx$ ज्ञात कीजिए

$$I=\int\left(x^a+a^x\right)dx=\int x^a dx+\int a^x dx$$

[टिप्पणी : $e^{\log_e x}=x$ और हम यह मान रहे हैं कि 'log' आधार 'e', पर निकाला गया है]

समाकलन के ज्ञात सूत्रों के आधार पर हम प्राप्त करते हैं कि $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+c,\ \ a>0,$

अतः, हम पाते हैं कि $I=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+\dfrac{a^x}{\log a}+c$

10) $\int(7x-2)\sqrt{3x+2}\ \ dx$ ज्ञात कीजिए।

हम $7x-2$ को $3x+2$ के पद में लिखते हैं। इसके लिए हमें $(3x+2)$ को $\dfrac{7}{3}$ से गुणा करना होगा तथा व्यंजक को संतुलित करने के लिए $\dfrac{-20}{3}$ जोड़ना होगा।

$$I=\int\left\{(3x+2)\cdot\frac{7}{3}-\frac{20}{3}\right\}(3x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\int\left[\frac{7}{3}(3x+2)(3x+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{20}{3}(3x+2)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{7}{3}\int(3x+2)^{\frac{3}{2}}\,dx-\frac{20}{3}\int(3x+2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{7}{3}\times\frac{(3x+2)^{\frac{5}{2}}}{3\left(\frac{5}{2}\right)}-\frac{20}{3}\left(\frac{(3x+2)^{\frac{3}{2}}}{3\times\frac{3}{2}}\right)+c$$

यह परिवर्तन हमने सूत्र $\int(ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a\,(n+1)}$ का उपयोग करते हुए किया है।

This transformation is meant to use the standard integration form

$$\int (ax+b)^n = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$$

$$= \frac{7}{3}(3x+2)^{\frac{5}{2}} \times \frac{2}{15} - \frac{20}{3}(3x+2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{9} + c$$

$$= \frac{14}{45}(3x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{40}{27}(3x+2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{7}{5}(3x+2) - \frac{20}{3}\right] + c$$

11) मान ज्ञात कीजिए $I = \int \frac{(3x+4)}{\sqrt{2x+7}}dx$ $(3x+4)$ को $2x+7$ के पद में व्यक्त कीजिए जिससे $(ax+b)^n$ के समाकलन के सूत्र का प्रयोग किया जा सके

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+7) - \frac{13}{2}}{(2x+7)^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+7)}{(2x+7)^{\frac{1}{2}}} dx - \frac{\frac{13}{2}}{(2x+7)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$= \frac{3}{2}\int (2x+7)^{\frac{1}{2}} dx - \frac{13}{2}\int (2x+7)^{\frac{-1}{2}} dx$ [दोनों समाकल्य $(ax+b)^n$ के प्रकार के हैं]

$$= \frac{3}{2} \times \frac{(2x+7)^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot \frac{d}{dx}(2x+7)} - \frac{13}{2} \cdot \frac{(2x+7)^{-\frac{1}{2}+1}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)\cdot \frac{d}{dx}(2x+7)} + c$$

$$= \frac{1}{2}(2x+7)^{3/2} - \frac{13}{2}(2x+7)^{1/2} + c$$

12) $\frac{x^3}{2x+1}$ का समाकलन कीजिए

हल :

$$I = \int \frac{x^3}{2x+1} dx$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{4}x & +\frac{1}{8} & \\
\hline
2x+1 & x^3 & & & \\
 & x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & & \\
 & - & - & & \\
\hline
 & & -\frac{1}{2}x^2 & & \\
 & & -\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{4}x & \\
 & & + & + & \\
\hline
 & & & \frac{1}{4}x & \\
 & & & \frac{1}{4}x & +\frac{1}{8} \\
 & & & - & - \\
\hline
 & & & & -\frac{1}{8}
\end{array}$$

(ध्यान दें कि यह एक ऐसा बीजीय व्यंजक है जिसके अंश में x की घात, हर में x की घात से अधिक है। अतः, हम x^3 को $(2x + 1)$ से लंबी भाग विधि द्वारा विभाजित करते हैं, जो कि एक सरल तथा उपयोगी विधि $I = \int \frac{x^3}{2x+1} dx$ है)

$$I = \int [(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}) + (-\tfrac{1}{8} \times \tfrac{1}{(2x+1)})] dx$$

[∵ भाज्य / भाजक = भागफल + शेष × 1 / भाजक]

$$= \frac{1}{2}\int x^2 dx - \frac{1}{4}\int x\, dx + \tfrac{1}{8}\int 1\, dx - \tfrac{1}{8}\int \tfrac{1}{2x+1} dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} \times \tfrac{x^3}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{4} \times \tfrac{x^2}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{8}x\right) - \left(\tfrac{1}{8}\tfrac{\log(2x+1)}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{8} - \frac{\log(2x+1)}{16} + c$$

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित समाकलन आकलित कीजिए :

क) $\int \left(e^{-5x} + e^{5x}\right) dx$

ख) $\int (x - 4x^{\frac{1}{4}})\, dx$

ग) $\int \frac{dx}{s-2x}$ (जहाँ S एक स्थिर अंक है)

घ) $\int 10x(1-x) dx$

2) निम्नलिखित समाकलन ज्ञात कीजिए :

i) $\int \left(x^3 + 15\right) dx$

ii) $\int 15\ x^5\, dx$

iii) $\int \frac{1}{x^5} dx$

iv) $\int \left(3e^{3x} + 2^x\right) dx$

v) $\int 5^x\, dx$

13.4 समाकलन की विधियाँ (Techniques of Integration)

भाग 13.3 में हमने कुछ मानक फलनों के समाकलन के बारे में चर्चा की थी। इनमें अधिकतर वे फलन सम्मिलित थे जो कुछ फलनों के अवकलज हैं, अतः उनके समाकलन सरलतापूर्वक ज्ञात किए जा सकते हैं। ऐसी स्थिति में समाकलन कुछ प्रमाणिक सूत्रों से ज्ञात किए जा सकते हैं। परंतु सभी फलनों के समाकलन इस प्रकार नहीं निकाले जा सकते। फिर भी ऐसी कई स्थितियाँ होती हैं जहाँ दिए हुए

समाकल्य/समाकलनों को प्रामाणिक सूत्रों के रूप में परिवर्तित करके उनके समाकलन ज्ञात किए जा सकते हैं। इस भाग में हम ऐसी कुछ विधियों के बारे में जानेंगे जिनमें दिए हुए समाकल्य को इस प्रकार परिवर्तित किया जा सके कि समाकलन के प्रामाणिक सूत्रों का उपयोग किया जा सके। ये विधियाँ हैं –

i) प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन

ii) खंडशः समाकलन

iii) आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन

आइए, हम एक-एक करके इन विधियों को उदाहरणों द्वारा समझें :

13.4.1 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

यह विधि उन समाकल्यों में उपयोगी होती है जिनमें दो फलन सम्मिलित होते हैं। ऐसी स्थिति में, हम दिए हुए एक चर को एक नए चर से इस प्रकार प्रतिस्थापित करते हैं कि नए व्यंजक का समाकलन सरल हो जाए। उदाहरणार्थ, यदि दिया हुआ समाकल्य $y = f(x)$ है तो हम $x = g(z)$ मान सकते हैं तथा नीचे दिए हुए सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\int f(x)dx = \int g(z)\cdot g'(z)dz$$

अर्थात्, दिए हुए फलन $f(x)$ का समाकलन एक अन्य फलन $g(z)$ और उसके अवकलज $g'(z)$ के गुणनफल के समाकल्य के बराबर होता है। आइए हम चरणबद्ध रूप में नीचे दिए फलनों के समाकलन ज्ञात करें :

1) $I = \int (5x+7)^5\, dx$

हल :

चरण :	1)	भीतर वाले व्यंजक को हम एक नए चर, मान लीजिए, t के बराबर रखते हैं	1)	$5x+7=t$
	2)	$\frac{dt}{dx}$ ज्ञात करें	2)	$\frac{dt}{dx}=5$
	3)	dx को $\underline{dt}$ के पद में ज्ञात कीजिए	3)	$dx=\frac{dt}{5}$
	4)	समाकलप्य में $(5x + 7)$ तथा dx का मान t तथा dt के रूप में रखें	4)	$I=\int t^5\cdot\frac{dt}{5}=\frac{1}{5}\int t^5 dt$
	5)	I का समाकलन t के रूप में ज्ञात करें	5)	$=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^6}{6}+c=\frac{t^6}{30}+c$

6) प्राप्त परिणाम को वापस x के रूप में लिखें	6) $= \frac{1}{30}(5x+7)^6 + c$ अपेक्षित उत्तर है

2) e^{8x+5} का समाकलन ज्ञात करें

हल : $8x+5=t$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$\frac{dt}{dx} = 8$ अर्थात् $dx = \frac{dt}{8}$

$$I = \int e^t \frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int e^t dt = \frac{1}{8}e^t + c = \frac{1}{8}e^{8x+5} + c$$

3) समाकलनों (क) $\int \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3} dx$ तथा (ख) $\int (4x+2)\sqrt{x^2+x+1}\ dx$ का मान ज्ञात कीजिए –

हल : क) $I = \int \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3} dx$

$t = x^2 + 1$ रखें

अर्थात् $t-1 = x^2$ तथा $\frac{dt}{dx} - 0 = 2x$

अथवा $x\,dx = \frac{dt}{2}$ आइए, हम $\int \frac{x^3}{(x^2+1)} dx$ को $\int \frac{x^2}{(x^2+a)^3} \times x\,dx$ के रूप में लिखें

$$I = \int \frac{t-1}{t^3} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^3} dt = \frac{1}{2}\left[\int \frac{t}{t^3} dt - \int \frac{1}{t^3} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-2} dt - \frac{1}{2}\int t^{-3} dt = \frac{1}{2}\frac{t^{-1}}{(-1)} + \frac{1}{2}\frac{t^{-2}}{2} + c = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^2} + c$$

अथवा $= -\frac{1}{2t}\left(1 - \frac{1}{2t}\right) + c$.

हल : ख) $\int (4x+2)\sqrt{x^2+x+1}\ dx$

$t^2 = x^2 + x + 1$ रखने पर हमें प्राप्त होता है $2t \cdot \frac{dt}{dx} = 2x+1$

अथवा $(2x+1)dx = 2t \cdot dt$ हम 't' का मान प्रतिस्थापित कर अंतिम हल ज्ञात कर सकते हैं।

हम लिख सकते हैं कि $I = 2\int (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{1/2} dx$

$$\text{अथवा } I = 2\int t\cdot 2t\ dt = 4\int t^2 dt = 4\ \times\frac{t^3}{3} + c = \frac{4t^3}{3} + c$$

$t = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}}$ रखने पर हम पाते हैं कि $\frac{4}{3}\left(x^2 + x + 1\right)^{3/2} + c$

4) $\int\left[\frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{x^{10} + 10^x}\right] dx$ ज्ञात करें।

हल: ध्यान दें कि इस व्यंजक में अंश हर का अवकलज है तथा $\frac{d}{dx}\left(10^x\right) = 10^x \log_e 10$.

अतः, हम $t = x^{10} + 10^x$ रखते हैं। इसके परिणामस्वरूप हम पाते हैं कि

$$\frac{dt}{dx} = 10x^9 + 10^x \log_e 10 \text{ अथवा } dt = (10x^9 + 10^x \log_e 10)\, dx$$

इस प्रकार हम देख सकते हैं कि

$$I = \int\frac{dt}{t} = \log t + c = \log(x^{10} + 10^x) + c$$

13.4.2 खंडशः समाकलन (Integration by Parts)

समाकलन की यह विधि प्रतिस्थापन विधि से भी अधिक सशक्त है। यह अवकलन के गुणनफल सूत्र पर आधारित है। इस विधि में हम दिए हुए समाकल्य को एक ऐसे समाकल्य में रूपांतरित करते हैं जिसका समाकलन सरलता से ज्ञात किया जा सके। खंडशः समाकलन का सूत्र है :

$$\int f(x).\, g(x)dx = f(x) \times \int g(x)dx - \int\left[f'(x) \times \int g(x)dx\right]dx$$

शब्दों में इस सूत्र को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

दो फलनों के गुणनफल का समाकलन, पहले फलन को दूसरे फलन के समाकलन से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल में से पहले फलन के अवकलन तथा दूसरे फलन के समाकलन के गुणनफल के समाकलन को *घटाकर प्राप्त होता है*। अर्थात्

दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = (प्रथम फलन) × (द्वितीय फलन का समाकलन) – [(प्रथम फलन का अवकलन गुणांक) × (द्वितीय फलन का समाकलन)] का समाकलन

जहाँ f और g दो अवकलनीय फलन हैं।

इस विधि से समाकलन प्राप्त करने के कुछ उदाहरण देने से पूर्व, हम पाठकों का ध्यान कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदुओं की ओर दिलाना चाहेंगे।

1) यह विधि उन समाकल्यों के लिए उपयोगी होती है जो किसी चर x में दो अवकलनीय फलनों के गुणनफल रूप में दिए हों।

2) पहले फलन के रूप में x की घात अथवा x में बहुपद को लें तथा दूसरा फलन ऐसा चुनें जिसका समाकलन सरलता से ज्ञात किया जा सके।

3) हम समाकल्य में दिए हुए दो फलनों में से किसी को भी सुविधा के अनुसार, प्रथम तथा द्वितीय फलन के रूप में ले सकते हैं।

4) यदि दिया हुआ समाकल्य दो फलनों का गुणनफल न भी हो तो भी हम इसे 1 से गुणा करके, 1 को द्वितीय फलन ले सकते हैं। अर्थात् हम $\int f(x)dx = \int f(x) \times 1dx$ लिख सकते हैं। हम देखेंगे कि ऐसा करना कई स्थितियों में उपयोगी सिद्ध होता है।

5) जब समाकल्य में दिए हुए फलनों में निम्नलिखित फलनों में से कोई उपस्थित हो : (I) प्रतिलोम, (L) लघुगणकीय फलन, (A) बीजीय फलन, (T) त्रिकोणमितीय फलन, (E) चरघातांकीय फलन, तब प्रथम फलन के रूप में उस फलन के चुना जाएगा जो इस क्रम ILATE में पहले आता हो।

6) यदि कोई समाकल्य में ऐसे फलन हों जिनका समाकलन ज्ञात न हो तो हम फलन का कोई ऐसा भाग (गुणनखंड) ढूंढ़ने का प्रयास करते हैं जिसका समाकलन हमें ज्ञात हो।

आइए, अब हम खंडशः समाकलन विधि को कुछ उदाहरणों की सहायता से समझने का प्रयास करें –

1) निम्नलिखित फलनों को खंडशः समाकलन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

a) x^3e^x b) $x\log x$ c) $\frac{\log x}{x^2}$ d) $x^4\log x$

हल :

क) $I = \int x^3e^x dx$

ILATE (आइलेट) नियम के अनुसार, हम x^3 को प्रथम फलन चुनते हैं। अतः,

$$I = x^3 \cdot \int e^x dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x^3) \cdot \int e^x\, dx \right] dx$$

$$= x^3e^x - \int 3x^2 \cdot e^x dx = x^3 \cdot e^x - 3\int x^2 \cdot e^x dx$$

अंतिम व्यंजक के दूसरे भाग में एक बार पुनः ILATE नियम लगाने पर, हम पाते हैं कि

$$I = x^3e^x - 3\left[x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx \right]$$

$$= x^3e^x - 3[x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x)]$$

$$= x^3e^x - 3[x^2e^x - 2(xe^x - e^x)] + c$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x + c$$

ख) $I = \int x \log x \, dx$

$\log x$ को पहला फलन लेने पर, हम पाते हैं कि

$$I = \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left[\frac{1}{x} \int x \, dx \right] dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + c .$$

ग) $I = \int \frac{\log x}{x^2} \; dx$ को $\int \log x \cdot \frac{1}{x^2} \; dx$ के रूप में लिखा जा सकता है।

हम $\log x$ को प्रथम तथा $\frac{1}{x^2}$ को द्वितीय फलन के रूप में लेते हैं। अतः

$$I = \log x \cdot \int x^{-2} dx - \int [\frac{d}{dx} (\log x) \times \int x^{-2} dx] \, dx$$

$$= \log x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} dx$$

$$= -x^{-1} \log x + \int x^{-2} dx = -\frac{\log x}{x} + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-\log x}{x} - \frac{1}{x} + c = -\frac{1}{x} (\log x + 1) + c$$

घ) $I = \int x^4 \log x \; dx$

यहाँ हम $\log x$ को प्रथम तथा x^4 को दूसरे फलन के रूप में लेते हैं

$$I = \log x \times \frac{x^5}{5} - \int [\frac{d}{dx} (\log x) \int x^4 dx] \, dx$$

$$= \frac{1}{5} x^5 \log x - \int \left[\frac{1}{x} \times \frac{x^5}{5} \right] dx$$

$$= \frac{1}{5} x^5 \log x - \frac{1}{5} \int x^4 dx$$

$$= \frac{1}{5} x^5 \log x - \frac{1}{5} \times \frac{x^5}{5} + c \quad = \frac{x^5}{5} \left[\log x - \frac{1}{5} \right] + c$$

आइए, अब हम कुछ मानक समाकलनों की चर्चा करें।

1) $I=\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)}-\frac{1}{(x+a)}\right]dx$ [सर्वसमिका : $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$]

$$=\frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}dx-\int \frac{1}{x+a}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log(x-a)-\log(x+a)\right]+c$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{(x-a)}{(x+a)}+c\,.$$

2) $I=\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{(a+x)}+\frac{1}{(a-x)}\right]dx$ [सर्वसमिका: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$]

$$=\frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{a+x}dx+\int \frac{1}{a-x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log(a+x)+\frac{\log(a-x)}{-1}\right]+c$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log(a+x)-\log(a-x)\right]+c$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{(a+x)}{(a-x)}+c\,.$$

3) $I=\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$x+\sqrt{x^2+a^2}=t$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{d}{dx}\left[x+\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)^{-½}\cdot 2x=\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow 1+\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}}=\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}+x}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}}=\frac{dt}{dx} \quad \text{or} \quad dx=\frac{dt}{\sqrt{(x^2+a^2)}+x}\times\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}$$

$$\therefore \quad I=\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}}\times\frac{dt\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}+x}=\int \frac{dt}{t}=\log t+c$$

$$=\log\left[x+\sqrt{\left(x^2+a^2\right)}\right]+c$$

4) $$I=\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}dx$$

हम $t=x+\sqrt{(x^2-a^2)}$ रखते हैं जिसमें $\frac{dt}{dx}=1+\frac{1}{2}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\times 2x$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx}=1+\frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)}+x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{t}$$ या $dx=\frac{dt}{t}\cdot(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}\times\frac{dt}{t}\times\sqrt{(x^2-a^2)}=\int\frac{dt}{t}=\log t+c$$

$$=\log\left[x+\sqrt{(x^2-a^2)}\right]+c$$

13.4.3 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ में दो बहुपद हैं। अतः, $\frac{f(x)}{g(x)}$ एक **परिमेय भिन्न रूपी फलन** होगा। किसी परिमेय भिन्न रूपी फलन का समाकलन, उसे दो या दो से अधिक आंशिक भिन्नों में विभाजित करके सरलता से किया जा सकता है। आइए, हम इस विधि के विभिन्न चरणों को समझें। उदाहरण के रूप में, हम साथ-साथ चरणशः $\int\frac{x+1}{x^2+4x-5}\,dx$ का भी समाकलन करेंगे जिससे विधि के प्रत्येक चरण को स्पष्ट रूप से समझा जा सके।

चरण 1: परिमेय फलन की हर के गुणनखंड कीजिए। ये गुणनखंड दो या दो से अधिक हो सकते हैं।	$x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$
चरण 2 : दिए हुए समाकल्य को, जो कि एक भिन्न के रूप में है, दो या दो से अधिक भिन्नों के योगफल के रूप में लिखिए। प्रत्येक भिन्न में हर के रूप में चरण 1 में प्राप्त एक गुणनखंड होगा तथा अंश के रूप में वास्तविक अचर A, B,... इत्यादि होंगे, जिनका मान हमें ज्ञात करना होगा।	$\frac{x+1}{(x-1)(x+5)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+5)}$
चरण 3 : वज्रगुणन करें। ऐसा करने पर बाएं और दाएं दोनों पक्षों के परिमेय व्यंजकों में हर समान होगा। अतः, उनके अंश भी समान होंगे। इस प्रकार, हमें एक समीकरण प्राप्त	$x+1=\frac{A(x-1)(x+5)}{(x-1)}+\frac{B(x-1)}{x+}$ या :

होता है जिसमें दाईं ओर अचर A, B,... इत्यादि होंगे जैसा कि हम उदाहरण में देख सकते हैं।

$x+1 = A(x+5) + B(x-1)$

चरण 4: अब एक-एक करके A,B,.. इत्यादि का मान ज्ञात करें। इसकी एक सरल विधि यह है : A का मान ज्ञात करने के लिए एक ऐसी संख्या चुनिए जिससे A को छोड़कर बाकी सभी अचरों के गुणांक शून्य हो जाएं। और इसे चरण 3 में प्राप्त समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं।)

x - 1, B का गुणांक है। यदि हम $x - 1 = 0$ या $x = 1$ लेंगे तो A का मान प्राप्त हो जाएगा।

इसी प्रकार, $x + 5 = 0$ अर्थात् $x = 5$ लेने पर हमें B का मान प्राप्त हो जाएगा।

क) $x-1=0, \quad x=1$

ख) $x+5=0, \quad x=-5$

चरण 5: इस प्रकार, प्राप्त अचर A,B,.. इत्यादि के मान को चरण 2 में रखने पर हमें समाकल्य का आंशिक भिन्नों में अपेक्षित विभाजन प्राप्त हो जाएगा।

क) $1+1 = A(1+5) + B(1-1)$

अथवा $2 = 6A$ या

$A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ख) $-5+1 = A(-5+5) + B(-5-$

अथवा $-4 =$ - $6B$ या $B = \frac{-4}{-6}$

$\frac{2}{3}$

चरण 6 : चरण 5 में आंशिक भिन्नों के योग का समाकलन ज्ञात करें। हमें प्रत्येक भिन्न का समाकलन अलग-अलग ज्ञात करना होगा।

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+5}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log(x-1) + \frac{2}{3}\log(x+5) + c$$

उदाहरण (1) : $I = \int \frac{4x-2}{x^3 - x^2 - 2x} \; dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए फलन के हर को $x(x+1)(x-2)$ के रूप में लिखा जा सकता है।

अब, $\frac{4x-2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$

अथवा $4x - 2 = \frac{x(x+1)(x-2)A}{x} + \frac{x(x+1)(x-2)B}{x+1} + \frac{x(x+1)(x-2)C}{x-2}$

$$4x-2 = (x+1)(x-2)A + x(x-2)B + x(x+1)C \qquad \dots(1)$$

क) समीकरण (1) में $x=0$ रखने पर हम पाते हैं कि

$-2=(0+1)(0-2)A+0+0$

अथवा $-2=-2A$ या $A=1$

ख) समीकरण (1) में $x+1=0$ अर्थात् $\Rightarrow$ $x=-1$ रखने पर हम पाते हैं कि

: $4(-1)-2=0+\ -1(-1-2)B+0$

$-6=3B$ या $B=\frac{-6}{3}=-2$

ग) समीकरण (1) में $x-2=0$ अर्थात् $x=2$ रखने पर हम पाते हैं कि :

$4(2)-2=0+0+C\times2\times3$

अथवा $6=6C$ या $C=\frac{6}{6}=1$

अब,

$$\frac{4x-2}{x(x+1)(x-2)}=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)}+\frac{1}{(x-2)}$$

$$\int\frac{(4x-2)}{x(x+1)(x-2)}dx=\int\frac{1}{x}dx-2\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{(x-2)}dx$$

$$=\log x-2\log(x+1)+\log(x-2)+c$$

उदाहरण (2) : $\int\frac{x}{(x-1)(2x+1)}dx$ का मान ज्ञात करें

हल : माना $\frac{x}{(x-1)(2x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(2x+1)}$ ...(1)

$\Rightarrow$ $x=A(2x+1)+B(x-1)$ (वज्र गुणन द्वारा) ...(2)

अब, समीकरण (2) में $x-1=0$ अर्थात् $x=1$ रखें।

$1=A(2\times1+1)+B(0)$ or 3A=1 or $A=\frac{1}{3}$

इसी प्रकार, समीकरण (2) में $(2x+1)=0$ अर्थात् $x=-\frac{1}{2}$ रखें

अथवा $-\frac{1}{2}=0+B\left(-\frac{1}{2}-1\right)$ or $-\frac{3}{2}B=-\frac{1}{2}$

अथवा $B=\frac{1}{-2}\times\frac{-2}{3}$ or $B=\frac{1}{3}$

अतः, $A=B=\frac{1}{3}$, A और B के मान को (1) में, रखने पर हम पाते हैं कि

$$\int\frac{x}{(x-1)(2x+1)}dx=\int\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)}dx+\int\frac{\frac{1}{3}}{(2x+1)}dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(2x+1)}dx\right] = \frac{1}{3}\left[\log(x-1) + \frac{\log(2x+1)}{2}\right] + c$$

$$= \frac{1}{3}\log(x-1) + \frac{1}{6}\log(2x+1) + c$$

उदाहरण (3) : $\int \frac{7x^2+3x+1}{x^2+x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। ...(1)

हल क्योंकि दिए हुए परिमेय फलन में अंश और हर दोनों ही द्विघातीय बहुपद है, अतः हम पहले लंबी भाग द्वारा भागफल ज्ञात करते हैं। अतः

$$\frac{7x^2+3x+1}{x^2+x} = 7 + \frac{1-4x}{x^2+x} = 7 + \frac{1-4x}{x(x+1)} \quad ...(2)$$

आइए, अब हम $\frac{1-4x}{x(x+1)}$ को $\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)}$ के रूप में लिखें। वज्रगुणन द्वारा हम पाते हैं कि

$$1-4x = A(x+1) + Bx \quad ...(3)$$

अब समीकरण (3) में $x=0$ रखने पर हम पाते हैं

$$1-4\times 0 = A(0+1) + B(0)$$

अथवा $1 = A$

इसी प्रकार, $x+1=0$ अर्थात् $x=-1$ रखने पर हम पाते हैं :

$$1-4(-1) = A(-1+1) + B(-1) \text{ or } 5 = -B \text{ or } B = -5$$

A और B के मान समीकरण (1) और (2) में रखने पर, हम देखते हैं कि

$$\int \frac{7x^2+3x+1}{x^2+x}dx = \int\left[7 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x+1}\right]dx$$

$$= 7\int 1\cdot dx + \int \frac{1}{x}dx - 5\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= 7x + \log x - 5\log(x+1) + C$$

उदाहरण (4) : आंशिक भिन्नों की विधि द्वारा $\int \frac{1}{x^2-x-6}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हर के गुणनखंड करने पर

$$x^2-x-6 = x^2-3x+2x-6 \quad = x(x-3) + 2(x-3)$$

अथवा $(x+2)(x-3)$

अब, $\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)}$ ...(1)

वज्रगुणन करने पर, हम पाते हैं :

$$1 = A(x-3) + B(x+2) \qquad \ldots(2)$$

अब समीकरण (2) में $x-3=0$ अर्थात् $x=3$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$1 = A(3-3) + B(3+2) \text{ अथवा } 1 = 5B \text{ या } B = \frac{1}{5}$$

इसी प्रकार, समीकरण (2) में $x+2=0$ अर्थात् $x=-2$ रखने पर हम पाते हैं :

$$1 = A(-2-3) + B(-2+2)$$

अथवा $1 = -5A$ या $A = \frac{1}{5}$

समीकरण (1) में A और B का मान रखने पर, हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+2} + \frac{\frac{1}{5}}{x-3} = \frac{1}{5(x-3)} - \frac{1}{5(x+2)}$$

या
$$\int \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\log(x-3) - \log(x+2)\right] + C$$

$$= \frac{1}{5}\log\frac{(x-3)}{(x+2)} + C.$$

उदाहरण (5) : आंशिक भिन्नों की विधि द्वारा $\int \frac{dx}{1-e^x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम सर्वप्रथम दिए हुए समाकल्य $\frac{1}{1-e^x}$ में e^x को t द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं। ऐसा करने पर हमें चर t में एक परिमेय फलन प्राप्त होता है जिसका समाकलन आंशिक भिन्नों की विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। आइए, देखें :

$$e^x = t,\ \frac{dt}{dx} = e^x\, dx = \frac{dt}{t}$$

अतः, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{1-e^x} = \int \frac{1}{1-t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t(1-t)}\,dt$$

अब, हम $\frac{1}{t\,(1-t)}$ को आंशिक भिन्नों में परिवर्तित करते हैं।

माना, $\frac{1}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(1-t)} \qquad (1)$

वज्रगुणन द्वारा हम पाते हैं :

$$1 = A(1-t) + Bt \qquad \ldots(2)$$

अब, समीकरण (2) में $t=0$ रखने पर, हमें पाते हैं : $1 = A(1-0) + B(0)$ या $A=1$

इसी प्रकार, समीकरण (2) में $1-t=0$ अर्थात् $t = 1$ रखने पर हम पाते हैं कि $1 = A(1-1) + B(1)$ अथवा $1 = B$ या $B = 1$

A और B का मान समीकरण (1) में रखने पर हमें मिलता है :

$$\frac{1}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{(1-t)}$$

इसलिए, $\int \frac{1}{t(1-t)} = \int \frac{1}{t}\, dx + \int \frac{1}{(1-t)}\, dx$

$$= \log t + \log(1-t) \times (-1) + C$$

$$= \log t - \log(1-t) + C = \log\left[\frac{t}{1-t}\right] + C$$

इस प्रकार, प्राप्त परिणाम में, पुनः $t = e^x$ रखने पर, हम पाते हैं –

$$\int \frac{dx}{1-e^x} = \log\left[\frac{e^x}{1-e^x}\right] + C$$

उदाहरण (6) : समाकलन $\int \frac{(x-1)}{(x-2)(x-3)} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\frac{(x-1)}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$. $\qquad \ldots(1)$

वज्रगुणन करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$(x-1) = A(x-3) + B(x-2) \qquad \ldots(2)$$

अब समीकरण (2) में $x-3=0$ अर्थात् $x=3$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$3-1 = A(3-3) + B(3-2) \quad \Rightarrow \quad 2 = B$$

इसी प्रकार, समीकरण (2) में $x-2=0$ अर्थात् $x=2$ रखने पर, हम पाते हैं

$$2-1 = A(2-3) + B(2-2) \text{ or } 1 = -A \text{ or } A = -1$$

A और B का मान समीकरण (1) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{-1}{(x-2)}dx + \int \frac{2}{(x-3)}dx$$

$$= -\log(x-2) + 2\log(x-3) + C$$

$$= \log(x-3)^2 - \log(x-2) + C = \log\frac{(x-3)^2}{(x-2)} + C$$

उदाहरण (7) : $\int \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)(x-6)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : मान लीजिए

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)(x-6)} = 1 + \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-5)} + \frac{C}{(x-6)} \quad \ldots(1)$$

व्ज्रगुणन से हम प्राप्त करते हैं :

$$(x-1)(x-2)(x-3) = (x-4)(x-5)(x-6) + A(x-5)(x-6) +$$
$$B(x-4)(x-6) + C(x-4)(x-5) \quad \ldots(2)$$

अब, समीकरण (2) में $(x-4)=0$ अर्थात् $x=4$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$(4-1)(4-2)(4-3) = 0 + A(4-5)(4-6) +$$
$$B(4-4)(4-6) + C(4-4)(4-5)$$

$$6 = 2A \quad \text{या} \quad A = 3$$

इसी प्रकार समीकरण (2) में $(x-5)=0$ अर्थात् $x=5$ रखने पर हमें मिलता है –

$$(5-1)(5-2)(5-3) = 0 + A(5-5)(5-6) +$$
$$B(5-4)(5-6) + C(5-4)(5-5)$$

$$24 = -B \quad \text{या} \quad B = -24$$

तथा समीकरण (2) में $(x-6)=0$ अर्थात् $x=6$ रखने पर हम पाते हैं–

$$(6-1)(6-2)(6-3) = 0 + A(6-5)(6-6) +$$
$$B(6-4)(6-6) + C(6-4)(6-5)$$

$$60 = 2C \quad \text{या} \quad C = 30$$

A, B और C का मान समीकरण (1) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\int \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)(x-6)}dx = \int \left[1+\frac{3}{(x-4)}-\frac{24}{(x-5)}+\frac{30}{(x-6)}\right]dx$$

$$= \int 1dx + 3\int \frac{1}{(x-4)} - 24\int \frac{1}{(x-5)}dx + 30\int \frac{1}{(x-6)}dx$$

$$= x + 3\log(x-4) - 24\log(x-5) + 30\log(x-6) + c$$

उदाहरण (8) : $\int \frac{1}{2x^2+x-1}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$ ...(1)

वज्रगुणन करने पर, हम पाते हैं,

$1 = A(x+1) + B(2x-1)$ ...(2)

अब समीकरण (2) में $x+1=0$ अर्थात् $x=-1$ रखने पर, हम पाते हैं,

$1 = A(-1+1) + B[(2 \times -1) - 1]$ या $1 = 0 + B(-3)$

या $B = -\frac{1}{3}$

इसी प्रकार समीकरण (2) में $2x - 1 = 0$ अर्थात् $x = \frac{1}{2}$ रखने पर हम पाते हैं,

$\therefore \quad 1 = A\left(\frac{1}{2}+1\right) + B(0) \quad \Rightarrow \quad 1 = A \times \frac{3}{2}$

या $A = \frac{2}{3}$

A और B का मान समीकरण (1) में रखने पर हम पाते हैं कि

$$\therefore \int \frac{1}{2x^2+x-1}dx = \int \frac{\frac{2}{3}}{2x-1}dx - \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{2x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\log(2x-1)}{2} - \frac{1}{3}\log(x+1) + C$$

$$= \frac{1}{3}\log(2x-1) - \frac{1}{3}\log(x+1) + C$$

$$= \frac{1}{3}\left[\log(2x-1) - \log(x+1)\right] + C$$

$$=\frac{1}{3}\log\left[\frac{(2x-1)}{(x+1)}\right]+C$$

उदाहरण (9) : $\int\frac{5}{(p+3)(p-2)}dp$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : माना, $\frac{5}{(p+3)(p-2)}=\frac{A}{(p+3)}+\frac{B}{(p-2)}$ …(1)

वज्रगुणन करने पर हम प्राप्त करते हैं,

$5 = A\,(p-2) + B\,(p+3)$ …(2)

अब समीकरण (2) में $(p-2)=0$ अर्थात् $p=2$ रखने पर हम पाते हैं,

$5 = A(2-2) + B(2+3)$ या $b = 1$

इसी प्रकार, समीकरण (2) में $p+3=0$ अर्थात् $p=-3$ रखने पर, हम प्राप्त करते है

$5 = A(-3-2) + B(-3+3)$ या $A = -1$

A और B का मान समीकरण (1) में रखने पर हम पाते हैं,

$$\int\frac{5}{(p+3)(p-2)}dp=\int\frac{-1}{(p+3)}dp+\int\frac{1}{(p-2)}dp$$

$$=\int\frac{1}{(p-2)}dp-\int\frac{1}{p+3}dp$$

$$=\log(p-2)-\log(p+3)+C$$

$$=\log\frac{(p-2)}{(p+3)}+C$$

बोध प्रश्न 2

1) प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए :

क) $\int e^{3x+4}dx$ ख) $\int\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

ग) $\int\frac{2x-7}{3\left(x^2-7x+6\right)^2}dx$ घ) $\int\frac{1}{\sqrt{x}+x}dx$

2) $\int x\left(x^2+4\right)^5 dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

3) किसी समाकलन विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए :

क) $x^2e^{3x}dx$ ख) $\int(4x+7)^{1/2}\,dx$ ग) $\int\frac{dx}{(7+3x)^5}$

4) नीचे दिए फलनों का समाकलन प्रतिस्थापन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए –

क) $\frac{1}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$ ख) $x\sqrt{(1+x)}$

5) खंडशः समाकलन विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए :

क) $\int\log(1+x)^{(1+x)}\,dx$ ख) $\int x^2e^{ax}dx$

ग) $\int\frac{1+x^2}{e^x}\,dx$ घ) $\int\log(x+2)\,dx$

6) नीचे दिए फलनों को आंशिक भिन्नों में विभाजित करें, तथा इस प्रकार उनका समाकलन ज्ञात करें :

क) $\frac{1}{x-x^3}$ ख) $\frac{x^3-2x^2-13x-12}{x^2-3x-10}$

13.5 समाकलन के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोग (SOME ECONOMIC APPLICATIONS OF INTEGRATION)

अर्थशास्त्र के विद्यार्थियों को समाकलन का महत्त्व बताने के लिए तथा इसमें उनकी रुचि पैदा करने के प्रयास में अब हम अर्थशास्त्र के क्षेत्र में समाकलन के कुछ अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे।

हम जानते हैं कि सीमांत आगम (Marginal Revenue) को कुल आगम (Total Revenue) के परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित किया जाता है। अर्थात्, MR (सीमांत आगम), TR (कुल आगम) का अवकलज होता है। अतः, हमारे पास एक फलन $F(x) = \text{TR}$ है। जिसका $F'(x) = \text{MR}$ अवकलज है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि

$$\text{TR} + C = \int MRdx$$

जहाँ C एक अचर है जिसका मान इस तथ्य का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है कि जब x=0 हो तो TR = 0 होगा।

इसी प्रकार, हम कुल लागत भी निम्नलिखित सूत्र के अनुसार ज्ञात कर सकते हैं।

$$\text{TC} + C = \int MCdx$$

जहाँ, TC (Total Cost) कुल लागत के लिए और सीमांत लागत (MR) के लिए प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (1) : मान लीजिए $\int \frac{60}{(x+3)^2}-2$ MR फलन के रूप में दिया है।

TR ज्ञात कीजिए तथा मांग फलन की व्युत्पत्ति कीजिए।

$$TR + C = \int\left(\frac{60}{(x+3)^2}-2\right)dx = \int\frac{60}{(x+3)^2}dx - \int 2dx$$

हल :

$$TR + C = \frac{-60}{0+3} - 2(0)$$

C ज्ञात करने के लिए हम इस तथ्य का प्रयोग करेंगे कि यदि $x = 0$ हो तो कुल आगम शून्य होगा।

$$\therefore\ 0 + C = \frac{-60}{0+3} - 2(0) \text{ or } C = \frac{-60}{3} = -20$$

$$\therefore\ TR = \frac{-60}{(x+3)} - 2x + 20 = \frac{20x}{(x+3)} - 2x$$

हम जानते हैं कि, मांग फलन = औसत आगम (AR) फलन अतः

$$AR = \frac{TR}{x} = \frac{20}{(x+3)} - 2 = \text{मांग फलन}$$

उदाहरण 2 : मान लीजिए कि सीमांत मांग फलन $MC = 4 + 6x + 30x^2$ है। कंपनी का कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए यदि स्थिति लागत (Fixed Cost) रु.500/– दी हुई है।

हल : कुल लागत+ $C = \int (4 + 6x + 30x^2)\, dx$

$$= 4x + 3x^2 + 10x^3$$

हम जानते हैं कि जब उत्पादन शून्य हो तो उत्पादन की कुल लागत को स्थिर लागत कहते हैं।

$\therefore 500 + C = 4(0) + 3(0)^2 + 10(0)^3$ अथवा $C = -500$

अतः, कुल लागत= $10x^3 + 3x^2 + 4x + 500$

टिप्पणी : यदि किसी कुल लागत फलन को एक बहुपद द्वारा व्यक्त किया जा सके तो समाकलन का अचर C, स्थिर लागत को निरूपित करता है।

उदाहरण 3 : एक कंपनी को रु.110/– की हानि होती है यदि उसका कोई भी उत्पाद न बिके। इसके सीमांत आगम तथा सीमांत लागत वक्र निम्नलिखित फलनों द्वारा व्यक्त किए जा सकते हैं–

$$MR = 50 - 4x \qquad \text{तथा} \qquad MC = -10 + x$$

कंपनी का लाभ फलन तथा *उत्पादन का संतुलन बिंदु* ज्ञात कीजिए। साथ ही, अधिकतम लाभ तथा *लाभ-अलाभ* उत्पाद भी ज्ञात कीजिए।

हल : लाभ फलन : $\pi(x) =$ कुल राजस्व – कुल लागत

$$\therefore \pi(\mathrm{x}) + \mathrm{C} = \int [(50 - 4x) - (-10 + x)]dx$$

$$= \int (60 - 5x)dx = 60x - \frac{5x^2}{2}$$

हम जानते हैं कि शून्य उत्पाद पर कंपनी को रु.110/– की हानि होती है, अर्थात् $\pi(0) = -110$

$$\therefore -110 + C = 0 \quad \text{या} \quad C = 110$$

अतः लाभ फलन बन जाता है $\pi(x) = 60x - \frac{5x^2}{2} - 110$

हमें ज्ञात है कि किसी कंपनी का संतुलन बिंदु तब होता है जब MR = MC हो।

$$\therefore 50 - 4x = -10 + x$$

या $\quad 5x = 60$

अर्थात् $x = 12$ संतुलन उत्पाद होगा।

किसी कंपनी का अधिकतम लाभ संतुलन बिंदु पर होता है।

क्योंकि कंपनी को धनात्मक लाभ तभी मिलने लगता है जब उत्पादन 2

$$\therefore \pi(12) = 60 \times 12 - \frac{5 \times 144}{2} - 110 = Rs.250/-$$

से अधिक होगा। इसलिए $\pi(x) = 0$ उत्पाद का लाभ-अलाभ स्तर $x = 2$ होगा।

$$\Rightarrow 60x - \frac{5x^2}{2} - 110 = 0$$

या $\quad x^2 - 24x + 44 = 0$

या $\quad x = 2$ या $x = 22$

सारांश

क) कुल उपयोगिता (TU) + $C = \int$ सीमांत उपयोगिता $dx = \int MU\, dx$

ख) कुल लागत (TC) $= \int$ सीमांत लागत $dx = \int MC\, dx$

ग) कुल आगम (TR) $= \int$ सीमांत आगम $dx = \int MR\, dx$

घ) कुल उत्पाद (TP-Total Product) $= \int$ सीमांत उत्पाद $dx = \int MP\, dx$

बोध प्रश्न 3

1) एक कंपनी का सीमांत आगम फलन निम्नलिखित है :

$$MR = \frac{ab}{(x-b)^2}$$

सिद्ध कीजिए कि माँग वक्र का प्रतिलोम/व्युत्क्रम रूप $p = \frac{a}{b-x}$ होगा।

2) यदि सीमांत लागत फलन $MC = \frac{4}{\sqrt{3x+36}}$ तथा स्थिर लागत =रु.20 है तो 15 इकाइयों के उत्पादन की औसत लागत क्या होगी

3) $MR = 20x - 2x^2$ तथा $MC = 81 - 16x + x^2$ दिया है। स्थिर लागत अचर मानते हुए अधिकतम लाभ उत्पाद तथा उत्पाद के इस स्तर पर लाभ ज्ञात कीजिए।

13.6 सार-संक्षेप

यह इकाई समाकलन की दो इकाईयों में से पहली है। अगली इकाई में हम निश्चित समाकलनों के बारे में चर्चा करेंगे। हम यह जानेंगे कि निश्चित समाकलन क्या है तथा वे अनिश्चित समाकलनों से किस प्रकार भिन्न है। यह इकाई अनिश्चित समाकलनों पर केंद्रित थी। हमने देखा कि समाकलन को अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम के रूप में जाना जा सकता है। दूसरे शब्दों में, समाकलन, अवकलन की विपरीत प्रक्रिया है। हमने देखा कि यदि हम किसी फलन का अवकलज निकाले तो हमें एक नया फलन प्राप्त होता है। अब यदि इस नए प्राप्त फलन को समाकलित किया जाए, तो हमें मूल फलन प्राप्त हो जाएगा।

इस इकाई में हमने कुछ मानक फलनों के समाकलन ज्ञात करना सीखा तथा समाकलनों के कुछ नियमों तथा गुणधर्मों के बारे में भी पढ़ा। तत्पश्चात् हमने समाकलन की कुछ विशिष्ट विधियों के बारे में चर्चा की। ये विधियाँ हैं : प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन, खंडशः समाकलन और आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन। अंत में हमने देखा कि समाकलन के अर्थशास्त्र में अनेक अनुप्रयोग है। समाकलन की सहायता से हम किसी सीमांत फलन से संबंधित कुल फलन ज्ञात कर सकते हैं। हमने सीमांत उपयोगिता से कुल उपयोगिता तथा सीमांत लागत से कुल लागत ज्ञात करने के कुछ उदाहरणों की चर्चा की।

13.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) क) $-\frac{1}{5}e^{-5x} + \frac{1}{5}e^{5x}$

ख) $\frac{x^2}{2} - \frac{16}{5}x^{\frac{5}{4}} + c$

ग) $\frac{-1}{2}\log(s-2x) + c$

घ) $5x^2 - \frac{10}{3}x^3 + c$

2) क) $\frac{x^4}{4} + 15x + c$

ख) $\frac{5}{2}x^6 + c$

ग) $\frac{-x^{-4}}{4} + c$

घ) $e^{3x} + \frac{2^x}{\log 2} + c$

ङ) $\frac{5^x}{\log 5} + c$

बोध प्रश्न 2

1) क) $\frac{e^{3x+4}}{3} + c$

ख) $\frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + c$ (संकेत : $t^3 = x^2 + 1$ रखें)

ग) $\frac{-1}{3(x^2-7x+6)} + c$ (संकेत : $t = x^2 - 7x + 6$ रखें)

घ) $2\log(1+\sqrt{x}) + c$ (संकेत : $\frac{1}{\sqrt{x}+x} = 2.\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}$ जहाँ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ तो $(1+\sqrt{x})$ का अवकल है।)

अतः, $t = 1 + \sqrt{x}$ रखें। फिर तो कलनीय पद का स्वरूप यह हो जाएगा : $2\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$)

2) $\frac{(x^2+4)^6}{12} + c$ (संकेत : $t = x^2 + 4$ रखें)

3) क) $\frac{e^{3x}}{3}\left[x^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)\right] + c$

ख) $\frac{(4x+7)^{\frac{3}{2}}}{6} + c$ (संकेत : $t^2 = 4x + 7$ रखें)

ग) $\frac{-1}{12(7+3x)^4} + c$

4) क) $\frac{\log x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} + c$

(संकेत : $t^2 = x^2 - a^2 \Rightarrow t = \sqrt{x^2 - a^2}$ रखें; साथ ही $x^2 = t^2 + a^2$। अब हमारे पास है $t^2 = x^2 - a^2$। दोनों ओर अवकलन करने पर हमें मिलेगा $2t\frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow tdt = xdx \Rightarrow \frac{tdt}{x^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{tdt}{t^2+a^2} = \frac{dx}{x}$ । अतः $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx$ हो जाता है $\int \frac{t}{(t^2+a^2)t}\, dt$)

ख) $2\left[\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]+c$ (संकेत : $t^2=1+x$ रखें)

5) क) $\frac{(1+x)^2}{2}\left[\log(1+x)-\frac{1}{2}\right]+c$

(संकेत : $\log(1+x)^{(1+x)}$ को $(1+x)\log(1+x)$ लें। अब $t=(1+x)$ रखें। फिर लघुगुणक को पहला फलन मान कर अंशों द्वारा कलन करें।)

ख) $\frac{e^{ax}}{a}\left[x^2-\frac{2}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)\right]+c$ (संकेत : x^2 को पहला फलन मानें)

ग) $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-3e^{-x}+c$

घ) $(x+2)\log(x+2)-(x+2)+c$

(संकेत : $t=(x+2)$ रखें। फिर लघुगुणक को पहला फलन मानकर कलन करें।)

6) क) $\log x-\frac{1}{2}\log(1-x)-\frac{1}{2}\log(1+x)+c$

(संकेत : $\frac{1}{x-x^3}$ को परिवर्तित कर लें : $\frac{1}{x(1-x)(1+x)}$)

ख) $\frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{7}\left[\log\frac{(x-5)}{(x+2)}\right]+c$

(संकेत : इस व्यंजक को लम्बी भजन क्रिया द्वारा सरल करें : $\frac{x^3-2x^2-13x-12}{x^2-3x-10}=(x+1)-\frac{2}{x^2-3x-10}=(x+1)-\frac{2}{(x+2)(x-5)}$)

बोध प्रश्न 3

1) भाग 13.5 देखें।

2) रुपये 1.4 (लगभग)

3) अधिकतम लाभ उत्पादन = 9 इकाइयाँ; फर्म इस स्तर पर अलाभ-हानि की दशा में होगी, अर्थात् उसका लाभ शून्य होगा।

इकाई 14 निश्चित समाकलन*

संरचना

14.0 उद्देश्य

पिछली इकाई में आपको समाकलन के आधारभूत विचार से परिचित कराया गया था। हमने देखा था कि समाकलन को अवकलन के विपरीत अनुक्रिया के रूप में भी दिखाया जा सकता है। इसी कारण से समाकलनों को कभी-कभी प्रतिअवकलन भी कहा जाता है। इस इकाई में हम निश्चित समाकलनों के बारे में जानेंगे। इसे पढ़ने के पश्चात् आप निम्नलिखित को भली-भांति समझने में सक्षम होंगे–

- निश्चित समाकलन की संकल्पना;
- रीमन समाकलन;
- निश्चित समाकलन : एक योगफल की सीमा के रूप में;
- निश्चित समाकलन एक वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल के रूप में;
- निश्चित समाकलनों के गुणधर्म; और
- अर्थशास्त्र में निश्चित समाकलनों के अनुप्रयोग।

14.1 विषय-प्रवेश

पिछली इकाई में आपका परिचय समाकलन की मूलभूत संकल्पना से हुआ। हमने समाकलन को अवकलन की विपरीत प्रक्रिया के रूप में देखा। इस इकाई में हम समाकलन पर अपनी चर्चा को एक अलग रूप में आगे बढ़ाएंगे। वास्तव में, अब हम निश्चित समाकलन की बात करेंगे। निश्चित और अनिश्चित समाकलन में मूलभूत अंतर यह है कि अनिश्चित के दिए हुए फलन का समाकलन पुनः एक समाकलन होता है।

*श्री सौगतो सेन

हमने देखा कि यदि हम एक फलन का अवकलन करते हैं तो हमें एक नया फलन प्राप्त होता है। यदि हम इस प्रकार प्राप्त नए फलन का समाकलन करें तो हमें पुनः वही पुराना फलन मिलता है। जिससे हमने प्रारंभ किया था। अतः, एक फलन का अनिश्चित समाकलन एक फलन होता है। दूसरी ओर, जैसा कि हम देखेंगे, जब हम किसी फलन का निश्चित समाकलन ज्ञात करते हैं तो हमें केवल एक संख्या प्राप्त होती है। निश्चित समाकलन गणित की एक महत्त्वपूर्ण संकल्पना है और इसके अनेक अनुप्रयोग है, न केवल गणित के अन्य क्षेत्रों में बल्कि अर्थशास्त्र में भी।

इस इकाई को इस प्रकार व्यवस्थित किया गया है : अगले खंड में हम निश्चित समाकलन की अवधारणा/संकल्पना की चर्चा विस्तार से करेंगे। हम देखेंगे कि किसी फलन का निश्चित समाकलन एक अद्वितीय संख्या के बराबर होता है। अनुगामी खंडों में हम यह भी देखेंगे कि निश्चित समाकलन किस प्रकार वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफलों को समझने और ज्ञात करने में सहायक सिद्ध होता है। इस इकाई में हम निश्चित समाकलन की एक अन्य संकल्पना की भी चर्चा करेंगे जिसे इस अवधारणा के प्रवर्त्तक गणितज्ञ रीमन के नाम पर, रीमन समाकलन के नाम से जाना जाता है। तत्पश्चात्, इस इकाई में हम निश्चित समाकलन के कुछ गुणधर्मों का उल्लेख करेंगे तथा उन पर संक्षेप में चर्चा भी करेंगे। अंत में, हम निश्चित समाकलनों के अर्थशास्त्र में होने वाले कुछ विशेष अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे।

14.2 निश्चित समाकलन की अवधारणा/संकल्पना (Concept of Definite Integral)

आइए, सबसे पहले हम यह जानने का प्रयास करें कि निश्चित और अनिश्चित समाकलन में मूलभूत अंतर क्या है। हम एक सतत् फलन $f(x)$ लेते हैं, जहाँ, x एक वास्तविक संख्या है। जब हम इसका (अनिश्चित) समाकलन ज्ञात करते हैं तो हमें एक फलन $F(x)$ तथा एक समाकलन अचर c प्राप्त होता है अर्थात् :

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad \ldots(1)$$

यदि हम F के प्रांत में कोई दो ऐसे बिंदु a और b लेते हैं कि $(a < b)$ हो, तथा उपरोक्त समीकरण (1) के दाएं पक्ष में $x = a$ तथा $x = b$ प्रतिस्थापित करके उनका अंतर लें तो हम पाते हैं :

$$[F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)] \qquad \ldots(2)$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि हमें एक विशिष्ट संख्यात्मक मान मिलता है जो चर x तथा समाकलन अचर c दोनों से स्वतंत्र है अर्थात् इन दोनों में से किसी पर निर्भर नहीं है। समाकलन का यह विशिष्ट मान, फलन $f(x)$ का, a से b तक निश्चित समाकलन कहलाता है। बिंदु a को समाकलन की निम्न सीमा तथा b को समाकलन की उच्च सीमा कहते हैं। समाकलन की सीमाएँ दर्शाने के लिए हम निश्चित समाकलन के लिए चिन्ह $\int_a^b$ का प्रयोग करते हैं। समीकरण (1) और (2) से हम पाते हैं कि

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad \ldots(3)$$

चिन्ह $\int_a^b$ का अर्थ है कि $f(x)$ से प्राप्त अनिश्चित समाकलन $F(x)$ में x के स्थान पर क्रमशः a और b को प्रतिस्थापित करके $F(b)$ और $F(a)$ के मान ज्ञात करें तथा अंतर

$F(b) - F(a)$ ज्ञात करें जैसा कि उपरोक्त समीकरण (3) के दाएं पक्ष में दर्शाया गया है। यह समीकरण किसी फलन f का a से b तक, जहाँ $a < b$ है, f का निश्चित समाकलन ज्ञात करने का सूत्र है। स्वाभाविक है कि हमने पहले f का अनिश्चित समाकलन $F(x)$ ज्ञात करना पड़ेगा। ध्यान दें कि इस सूत्र में, समाकलन अचर c को नहीं लिखा गया है। वास्तव में, यदि हम $F(x)$ के स्थान पर $F(x)+c$ भी लें तो भी जब हम इसका मान b और a पर निकाल कर अंतर लेंगे तो c स्वतः समाप्त हो जाएगा क्योंकि $[F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(c)$ होता है। आइए, हम निश्चित समाकलन को ज्ञात करने की विधि को उदाहरणों द्वारा समझें।

उदाहरण :

$$\int_1^5 3x^2 dx = x^3]_1^5 = (5)^3 - (1)^3 = 125 - 1 = 124$$

उदाहरण :

$$\int_a^b ke^x\, dx$$

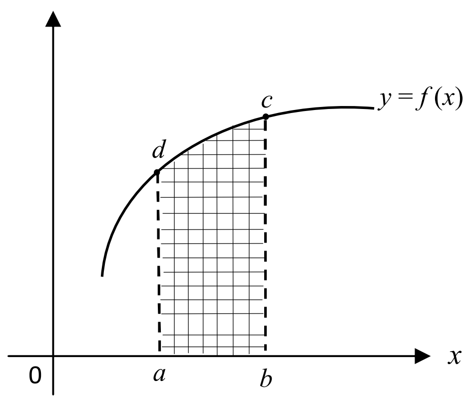
का मान ज्ञात कीजिए।

इस उदाहरण में समाकलन की सीमाओं के लिए निश्चित संख्याओं के स्थान पर a और b दिए हैं। अतः इस समाकलन का मान भी a और b के पदों में ही आएगा :

$$\int_a^b ke^x dx = ke^x]_a^b = k(e^b - e^a)$$

14.2.1 निश्चित समाकलन : एक वक्र से घिरे क्षेत्रफल के रूप में (Definite Integral as area under a Curve)

वास्तव में, समाकलन को योग ज्ञात करने की प्रक्रिया के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है। इसका शाब्दिक अर्थ है ''छोटे भागों को मिलाकर एक संपूर्ण बनाना''। हम निश्चित समाकलन को एक योग की सीमा के रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं। निश्चित समाकलन की यह व्याख्या हमें $y = f(x)$ जैसे वक्रों से घिरे/वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करने में सहायक सिद्ध होती है। जब हम किसी फलन का बिंदु a से बिंदु b तक निश्चित समाकलन ज्ञात करते हैं तो हमें वक्र के नीचे, x-अक्ष के ऊपर तथा $x = a$ तथा $x = b$ के मध्य का क्षेत्रफल प्राप्त होता है जैसा कि नीचे रेखाचित्र 14.1 में दर्शाया गया है।

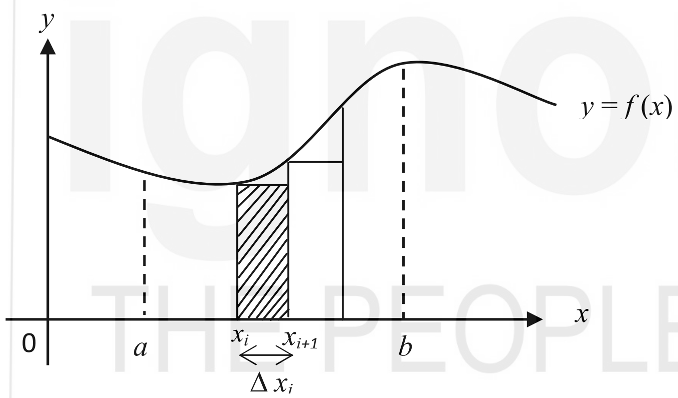


रेखाचित्र 14.1

यदि $\int f(x)\,dx = g(x)$ है, तो $f(x)$ का किसी दिए हुए अंतराल $[a,b]$ पर निश्चित समाकलन वक्र से घिरे 0 से b तक के क्षेत्रफल में से 0 से a तक का क्षेत्रफल घटाने पर प्राप्त होता है। इसे तकनीकी रूप से निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:

$$\int_a^b f(x) = \left|g(x)\right|_a^b \quad \text{or} \quad g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a), \text{ जहाँ } b > a$$

आइए, हम इस बिंदु पर और विचार करें। मान लीजिए कि $y = f(x)$ एक सतत् फलन है और इसका वक्र रेखाचित्र 14.2 में दर्शाए गए वक्र जैसा है। मान लीजिए a और b इस फलन के प्रांत में दो बिंदु हैं और हमें इस फलन के वक्र और x-अक्ष के बीच का क्षेत्रफल, बिंदु a से बिंदु b तक ज्ञात करना है। इस क्षेत्र को Δx_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ चौड़ाई वाली n पट्टियों में विभाजित किया जा सकता है। ऐसी दो पट्टियाँ रेखाचित्र में दर्शायी गई है। वक्र से घिरे क्षेत्रफल लगभग, अंतराल $[a, b]$ में ली गई, इन n पट्टियों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा। ध्यान दें कि इन पट्टियों की चौड़ाई जितनी कम होगी, इनके क्षेत्रफलों का योग वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल के उतना ही अधिक निकट होगा। हम देख सकते हैं कि चौड़ाई Δx_i जितनी कम होगी, n उतना ही बड़ा होगा।



रेखाचित्र 14.2

पट्टी I के क्षेत्रफल A_i (जिसे छायांकित क्षेत्र द्वारा दर्शाया गया है) का सन्निकटन Δx_i $(= x_{i+1} - x_i)$ चौड़ाई तथा $y_i = f(x_i^*)$ ऊँचाई वाले आयात के क्षेत्रफल से किया जा सकता है, जहाँ x_i^* अंतराल $[x_i, x_{i+1}]$ में किसी बिंदु को निरूपित करता है। अतः सभी पट्टियों से प्राप्त कुल क्षेत्रफल होगा :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

ध्यान दें कि उपरोक्त व्यंजक में, यदि n अनंत की ओर जाता है या दूसरे शब्दों में, पट्टियाँ जितनी संकीर्ण होंगी, हम वक्र, x-अक्ष और कोटियों $x{=}a$ तथा $x{=}b$ से घिरे क्षेत्रफल के उतना ही निकट होंगे।

दिया है : $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$

अर्थात् हम कह सकते हैं कि $\int_a^b f(x)dx$ तो योगफल की सीमा है, जबकि $f(x)$ हो और उसे a से b परिकलित किया जा सकता है। सांकेतिक रूप में हम इस निश्चित समाकलन को, इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

टिप्पणी :

i) यदि दिया हुआ फलन $f(x)$ सतत है तो यह सीमा चयन किए गए बिंदु x_i^* पर निर्भर नहीं करती।

ii) हमने यहाँ $f(x)$ को x-अक्ष के ऊपर लिया था, अर्थात् यह माना था कि $f(x)$ धनात्मक है। यदि $y = f(x)$, x-अक्ष के नीचे स्थित हो, अर्थात् यदि ऋणात्मक हो तो इसके निश्चित समाकलन का मान ऋणात्मक होगा।

14.2.2 रीमान समाकलन (Riemann Integral)

अनिश्चित समाकलन जिसका अध्ययन हमने पिछली इकाई में किया और जिसे हम प्रतिअवकलज के रूप में जानते हैं, लीबनिज़-न्यूटन समाकलन (Leibniz-Newton integral) कहलाता है। गणित में अनेक प्रकार के समाकलन परिभाषित हैं। किसी सतत् फलन के लिए ये सभी प्रकार के समाकलन एक ही परिणाम देते हैं। इस उपखंड में हम रिमान समाकलन के बारे में चर्चा करेंगे और देखेंगे जिस निश्चित समाकलन का अध्ययन हम कर रहे हैं, वह वास्तव में रीमान समाकलन ही है।

मान लीजिए कि $g(x)$ अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित एक परिबद्ध फलन है और n एक प्राकृतिक संख्या है। हम $[a, b]$ में बिंदु इस प्रकार चुनते हैं कि

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

ये बिंदु $[a, b]$ को n भागों (उप-अंतरालों) में विभाजित करते हैं। क्रम $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ लेते हैं, जहाँ $i = 1,2 \ldots, n$ है। प्रत्येक अंतराल $[x_i, x_{i+1}]$ में कोई भी संख्या μ_i चुनिए।

योगफल $$g(\mu_1)\Delta x_1 + g(\mu_2)\Delta x_2 + \cdots + g(\mu_n)\Delta x_n$$

दिए हुए फलन से संबद्ध रीमन योगफल कहलाता है। यह योगफल, फलन $g(x)$ के साथ-साथ चुने गए अंतःविभाजनों पर भी निर्भर करता है। यह μ_i' के चयन पर भी निर्भर करता है।

मान लीजिए कि n अनंत की ओर अग्रसर है तथा संख्याओं $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$ में से सबसे बड़ी संख्या शून्य की ओर जाती है, तो इस योगफल की सीमा का अस्तित्व सुनिश्चित है। इस स्थिति में हम कहते हैं कि फलन $g(x)$ अंतराल $[a, b]$ में रीमन-समाकलनीय है तथा यह समाकलन इस प्रकार ज्ञात करते हैं :

$$\int_a^b g(x)dx = lim \sum_{i=1}^{n} g(\mu_i)\Delta x_i$$

इस समाकलन का संख्यात्मक मान μ_i के चयन पर निर्भर नहीं करता। यह सिद्ध किया जा सकता है कि प्रत्येक सतत फलन रीमन-समाकलनीय होता है, यद्यपि यह इस पाठ्यक्रम के विषय क्षेत्र से बाहर है।

बोध प्रश्न 1

1) इन निश्चित समाकलनों का मूल्यांकन करें :

क) $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

ख) $\int_1^2 (\frac{1}{y^2}) dy$

ग) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{3-x} dx$

घ) $\int_0^1 e^{2x} dx$

....
....
....
....
....

2) इनका मूल्यांकन करें –

क) $\int_0^2 (5x^2 - 3x + 1)dx$

ख) $\int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)dx$

ग) $\int_{-2}^{-1} (z^2 + 2z + 2)dz$

....
....
....
....
....

3) आप रीमैन योग से क्या समझते हैं?

....
....
....
....
....

14.3 निश्चित समाकलनों के गुणधर्म (Properties of Definite Integral)

पिछले इकाई में हमने अनिश्चित समाकलन के गुणधर्मों की चर्चा की। ये सभी गुणधर्म निश्चित समाकलनों के लिए भी सत्य है। तथापि निश्चित समाकलनों के कुछ विशिष्ट गुणधर्म भी है जिनमें से अधिकतमर समाकलन की सीमाओं से संबंधित हैं। हम नीचे इनमें से कुछ गुणधर्मों का उल्लेख उदाहरणों के साथ करेंगे।

गुणधर्म 1 : किसी निश्चित समाकलन की सीमाओं को परस्पर बदल देने से समाकलन का चिन्ह बदल जाता है।

$$i.e.\ \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad b > a$$

उदाहरण 1 :

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore\ \int_1^2 x^2 dx = -\left[\int_2^1 x^2 dx = \frac{7}{3}\right]$$

गुणधर्म 2 : किसी निश्चित समाकलन में चर को बदलने से समाकलन का मान नहीं बदलता।

अर्थात् $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

यहाँ x या t तदर्थ चरों जैसे हैं अर्थात् समाकलन चर या उसके नाम पर निर्भर नहीं करता।

उदाहरण 2 :

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \qquad \int_1^2 x^2 dx = \int_1^2 t^2 dt$$

गुणधर्म 3 : यदि किसी निश्चित समाकलन की सीमाओं और के मध्य कोई बिंदु है, तो इस समाकलन को दो निश्चित समाकलनों (a से c तक तथा c से b तक) के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

अर्थात् $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (a < c < b)$

उदाहरण 3 :

$$\int_0^2 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx \qquad (0 < 1 < 2)$$

L.H.S/बायाँ पक्ष : $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 0 = \frac{8}{3}$

R.H.S/दायाँ पक्ष :

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{(2)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

गुणधर्म 4 : $\int_a^b [-f(x)]dx = -\int_a^b f(x)dx$

उदाहरण 4 : माना $f(x) = x^2$

L.H.S/बायाँ पक्ष:

$$\int_1^2 -[f(x)]dx = \int_1^2 -x^2 dx = -\int_1^2 x^2 dx = -\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{-7}{3}$$

R.H.S/ दायाँ पक्ष: $-\int_1^2 f(x)dx = -\int_1^2 x^2 dx = -\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = -\frac{7}{3}$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उपरोक्त गुणधर्म की एक परिस्थिति के रूप में हम पाते हैं कि, $\int_a^a f(x)dx = 0$

गुणधर्म 5 : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

गुणधर्म 6 : $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

गुणधर्म 7 : $\int_0^a f(x)dx = 2\int_0^{a/2} f(x)dx,$ यदि $f(a-x) = f(x)$ है

$= 0$ यदि $f(a-x) = -f(x)$ हैं

गुणधर्म 8 : $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि f एक समफलन है अर्थात् यदि $f(-x) = f(x)$ है

$= 0,$ यदि f एक विषम फलन है अर्थात् यदि $f(-x) = -f(x)$ है।

निश्चित समाकलनों का प्रतिस्थापन विधि द्वारा मूल्यांकन

प्रतिस्थापन विधि द्वारा निश्चित समाकलनों के मूल्यांकन में हमें इन चरणों से गुजरना होता है :

i) जैसे कि हमने इकाई–13 में सीखा था, पहले समाकलनीय व्यंजक में किसी उपयुक्त प्रतिस्थापन द्वारा उसे समाकलन-सरल बनाएं।

ii) प्रतिस्थापित मानों के अनुसार उस व्यंजक की परिसीमाएं भी परिवर्तित करें– उसके बाद समाकलन करें।

iii) अब परिणामतः प्राप्त समाकल मूल्यों को उच्चतम एवं न्यूनतम परिसीमा मूल्यों पर आंकलित कर उनका अन्तर ज्ञात कर लें।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 5 : मान ज्ञात करें $\int_2^3 \left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

हल : रखें $t = x^2 + 1$ । अब दोनों ओर अवकलन के बाद हमें मिलता है :

$$\frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dt}{2} = xdx$$

जब $x = 2, t = 5,\ x = 3, t = 10$ । अतः चर x के स्थान पर t रखने पर नई परिसीमाएं हैं 5 और 10

इसलिए, $\int_2^3 (\frac{x}{x^2+1}) dx = \frac{1}{2}\int_5^{10} (\frac{1}{t}) dt$

$$= \frac{1}{2} \log t|_5^{10}$$

$$= \frac{1}{2}(\log 10 - \log 5)$$

$$= \frac{1}{2} \log 2$$

बोध प्रश्न 2

1) मान निकालें $\int_{-2}^{2} \frac{xe^{x^2}}{1+x^2} dx$

....

....

....

....

....

2) इनके मान ज्ञात करें :

क) $\int_{-5}^{5} |x+2| dx$

ख) $\int_{-2}^{3} f(x) dx$, दिया है $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{if } x > 1 \\ 3x^2 & \text{if } x \leq 1 \end{cases}$

....

....

....

....

....

3) प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग कर इन निश्चित समाकलनों के मान ज्ञात करें :

क) $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

ख) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

ग) $\int_1^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} dx$

....

....

....

14.4 अर्थशास्त्र में निश्चित समाकलनों के अनुप्रयोग (Economic Applications of Definite Intergral)

इस खंड में हम अर्थशास्त्र में निश्चित समाकलनों के कुछ अनुप्रयोगों के बारे में चर्चा करेंगे। व्यष्टि अर्थशास्त्र के सिद्धांत में उपभोक्ता व्यवहार तथा उत्पादन फलन विश्लेषण आदि विषयों के अंतर्गत आपका परिचय उपभोक्ता आधिक्य तथा उत्पादक आधिक्य जैसी संकल्पनाओं से हुआ है। अब हम समाकलन का उपयोग इन संकल्पनाओं को एक नए ढंग से समझने में करेंगे।

14.4.1 उपभोक्ता आधिक्य/आधिक्य (Consumer Surplus)

उपभोक्ता आधिक्य (consumer surplus) की संकल्पना सर्वप्रथम एल्फर्ड मार्शल ने दी थी। यह उन मूल्यों के अंतर का मौद्रिक माप है जो एक उपभोक्ता किसी वस्तु या सेवा के लिए चुकाने को तैयार है तथा जो उसे वास्तव में चुकाना पड़ता है जबकि उसकी आय और वस्तुओं की कीमतें ज्ञात हों। मूलतः, यह किसी उपभोक्ता द्वारा किसी वस्तु या सेवा का उपभोग करने पर प्राप्त हुआ 'शुद्ध लाभ' है।

उपभोक्ता आधिक्य (CS) = कीमत जो कोई उपभोक्ता देने को तैयार है – कीमत जो उसे वास्तव में देना पड़ता है

उपभोक्ता आधिक्य (CS) तथा सीमांत उपयोगिता (MU) : किसी उपभोक्ता के लिए भुगतान की तत्परता का उसके उपयोगिता फलन के साथ सीधा संबंध है। वास्तव में, यह सीमांत उपयोगिता का एक फलन है जिसे नीचे दिए सूत्रों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

एक इकाई के लिए, उपभोक्ता आधिक्य (CS) = सीमांत उपयोगिता (MU) – कीमत

कुल उपभोक्ता आधिक्य (CS) = सीमांत उपयोगिताओं का कुल योग ($\sum$MU) – कीमत $\times$ उपभोग की गई अथवा खरीदी गई इकाइयों की कुल संख्या

समाकलन के रूप में, यदि में सीमांत उपयोगिता फलन (MU), कीमत (P) तथा उपभोग की गई (मांग की गई अथवा खरीदी गई) इकाइयों की संख्या (x) ज्ञात हो तो हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके उपभोक्ता आधिक्य (CS) मान ज्ञात कर सकते हैं :

$$CS = \int_0^x MUdx - px$$

उदाहरण 6 :

सीमांत उपयोगिता फलन MU(x) = 25 – 2x के लिए उपभोक्ता आधिक्य ज्ञात कीजिए यदि यह दिया हो कि उपभोक्ता किसी वस्तु की 10 इकाइयाँ, रु.5/– प्रति इकाई की कीमत पर खरीदता है।

हल :

$$CS = \int_0^x MUdx - px = \int_0^{10} (25-2x)\,dx - 5\times 10$$

$$= \int_0^{10} 25dx - 2\int_0^{10} x \cdot dx - 50$$

$$= |25x|\,_0^{10} - 2\left|\frac{x^2}{2}\right|\,_0^{10} - 50$$

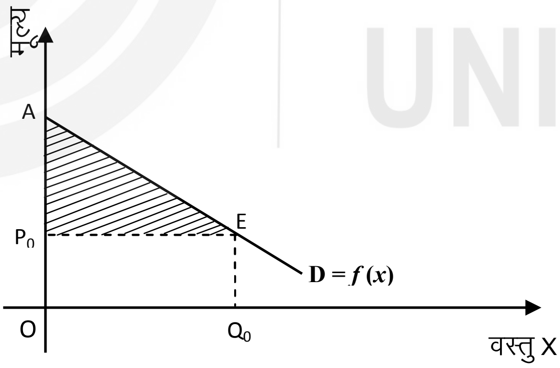
$$= 250 - 25(0) - 2\left(\frac{10^2}{2}\right) + 2\left(\frac{0^2}{2}\right) - 50 = 100$$

उपभोक्ता आधिक्य तथा माँग वक्र : किसी वस्तु या सेवा के लिए भुगतान की तत्परता वास्तव में उपभोक्ता के मांग वक्र में उपभोग की गई मात्रा के द्वारा परिलक्षित कीमत ही है। अतः, उपभोक्ता आधिक्य को मांग वक्र द्वारा दर्शा गई भुगतान की तत्परता तथा बाज़ार कीमत के अंतर के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है।

रेखाचित्र 14.3 पर ध्यान दें। इसमें एक सरल रेखीय माँग फलन AD लिया गया है। कीमत OP_o पर उपभोक्ता एक वस्तु **X** की OQ_o मात्रा खरीदता है। वस्तु Q_o इकाइयों के लिए, उपभोक्ता क्षेत्र $OAEQ_o$ के बराबर मूल्य का भुगतान करने को तैयार है, जो कि मांग वक्र तथा x-अक्ष के बीच 0 से लेकर Q_o तक का क्षेत्रफल है। क्योंकि बाज़ार कीमत OP_o है, उपभोक्ता को केवल क्षेत्रफल OP_oEQ_o के बराबर भुगतान करना पड़ा। परिणामस्वरूप, इस खरीद में उपभोक्ता को त्रिभुज ΔAP_oE के क्षेत्रफल के बराबर 'लाभ' हुआ, जिसे हम उपभोक्ता आधिक्य कहते हैं, इसे रेखाचित्र में छायांकित क्षेत्र के रूप में दर्शाया गया है। यह मांग वक्र के नीचे वाले परंतु मूल्य रेखा के ऊपर वाले क्षेत्र के बराबर है। हम इस समाकलन का उपयोग करके सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

उपभोक्ता आधिक्य (CS) = क्षेत्रफल ΔAP_oE = क्षेत्रफल AOQ_oE – क्षेत्रफल P_oOQ_oE

$$= \int_0^{Q_o} f(x)dx - OP_o \times OQ_o$$



रेखाचित्र 14.3

उदाहरण 7 :

एक उपभोक्ता का मांग फलन $(Dd), p = 90 - x^2$ है। यदि वह x की 5 इकाइयाँ, रु. 50/– प्रति इकाई के भाव से खरीदता है तो उपभोक्ता आधिक्य ज्ञात कीजिए।

हल :

$$CS = \int_0^5 (Dd)\,dx - px = \int_0^5 \left(90 - x^2\right)dx - px$$

$$= \int_0^5 90dx - \int_0^5 x^2 dx - 50 \times 5$$

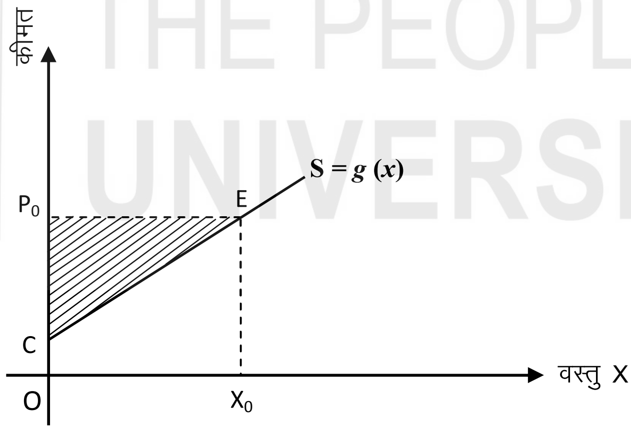
$$= 90\int_0^5 1 \cdot dx - \int_0^5 x^2 dx - 250 = 90|x|_0^5 - \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^5 - 250$$

$$= (90 \times 5 - 0) - \frac{1}{3}(5)^3 - 250 = 450 - \frac{125}{3} - 250 = 158.33$$

14.4.2 उत्पादक आधिक्य (Producer Surplus)

जिस प्रकार उपभोक्ता आधिक्य बाज़ार की गतिविधियों में भाग लेने पर एक उपभोक्ता द्वारा किसी वस्तु अथवा सेवा की खरीद पर प्राप्त लाभ है, उसी प्रकार, उत्पादक आधिक्य किसी वस्तु या सेवा की बिक्री पर उत्पादक को होने वाला 'लाभ' है। इसका निर्धारण किसी उत्पादक या विक्रेता को किसी वस्तु या सेवा की बिक्री से प्राप्त होने वाले कुल आगम तथा जिस राशि पर वह उस वस्तु को बेचने के लिए तैयार है, के अंतर से किया जाता है। ध्यान रहें कि कोई उत्पादक या विक्रेता किसी उत्पाद या सेवा को जिस कीमत पर बेचने के लिए तैयार होता है, उसे उत्पादक/विक्रेता के आपूर्ति वक्र में उस उत्पाद की लागत से ज्ञात किया जा सकता है।

रेखाचित्र 14.4 में दिए सरल रेखीय आपूर्ति वक्र [सीमांत लागत फलन $g(x)$] पर ध्यान दीजिए जिसे सरल रेखा CS से दर्शाया गया है। इस रेखाचित्र में हमने स्थिर लागत को शून्य तथा सीमांत लागत को वर्धमान अर्थात् बढ़ता हुआ माना है। P_0 वह कीमत है जिस पर बाज़ार में वस्तु की X_0 इकाई की मात्रा की बिक्री होती है। यहाँ उपभोक्ता आधिक्य हमें रेखाचित्र में दिए छायांकित क्षेत्र द्वारा ज्ञात होगा जो कि सीमांत लागत (आपूर्ति) वक्र के ऊपर का परंतु कीमत रेखा के नीचे का भाग (रेखाचित्र 14.4 देखें) है।



रेखाचित्र 14.4

हम जानते हैं कि सीमांत लागत वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल कुल लागत के बराबर होगा। कुल आगम हमें दी हुई प्रति इकाई कीमत P_0 तथा मात्रा X_0 के गुणनफल से प्राप्त होता है। अतः, उत्पादक को प्राप्त होने वाला आधिक्य हम इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :

उत्पादक आधिक्य (PS) = बाज़ार कीमत × बेची गई मात्रा कुल लागत

= OP_0EX_0 का क्षेत्रफल − $OCEX_0$ का क्षेत्रफल

$$= P_0 \times X_0 - \int_0^{X_0} g(x)dx = P_0X_0 - \int_0^{X_0} MC\, dx$$

क्योंकि हमने स्थिर लागत को शून्य माना है, समाकलन $\int_0^{X_0} g(x)dx$ का मान कुल परिवर्ती लागत के बराबर होगा। अतः, उत्पादक आधिक्य को कुल आगम तथा कुल परिवर्ती लागत के अंतर के रूप में देखा जा सकता है।

उदाहरण 8 :

एक वस्तु का आपूर्ति फलन $p = \sqrt{9+x}$ दिया है। उत्पादक ने इस वस्तु की 7 इकाइयाँ बेचीं। उसका आधिक्य ज्ञात कीजिए।

हल :

जब $X_0 = 7$ है तो प्रति इकाई कीमत $P_0 = \sqrt{9+7} = 4$ होगी।

$\therefore$ उत्पादक आधिक्य

$$PS = 4 \times 7 - \int_0^7 \left(\sqrt{9+x}\right)dx$$

$$28 - \frac{2(9+x)^{3/2}}{3} \Big]_o^7 = 28 - \frac{128}{3} + \frac{54}{3}$$

$$= 10/3 \text{ इकाई}$$

उदाहरण 9 :

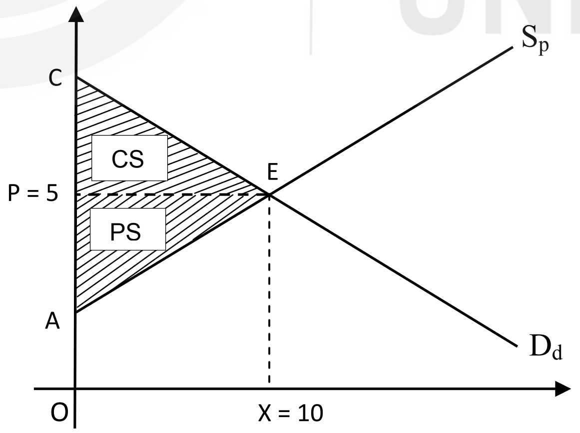
निम्नलिखित का उत्पादक आधिक्य ज्ञात कीजिए

1) मांग फलन : $p = 25 - 2x$

2) आपूर्ति फलन : $4p = 10 + x$ or $p = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}x$

हल :

हम सबसे पहले दिए हुए आपूर्ति तथा मांग फलनों से कीमत तथा मात्रा ज्ञात करेंगे। इसके लिए हमें मांग फलन को आपूर्ति फलन के बराबर रखने पर प्राप्त हुए समीकरण को हल करना होगा। आप इसे हल करके देख सकते हैं कि हमें $p = 5$ तथा $x = 10$ इकाइयाँ प्राप्त होती हैं।



रेखाचित्र 14.5

अब उत्पादक आधिक्य ज्ञात करने के लिए हमें केवल आपूर्ति फलन का प्रयोग करने की आवश्यकता है। साथ ही हम ऊपर प्राप्त संतुलन कीमत (5) और मात्रा (10) का भी उपयोग करेंगे

$$PS = px - \int_0^x Sp \cdot dx = 5\times 10 - \int_0^{10}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{4}x\right)dx$$

$$= 50 - (\tfrac{5}{2}\int_0^{10} dx + \tfrac{1}{4}\int_0^{10} x)dx$$

$$= 50 - \tfrac{5}{2}|x|\,{}_0^{10} - \tfrac{1}{4}\left|\tfrac{x^2}{2}\right|{}_0^{10}$$

$$= 50 - \tfrac{5}{2}\times 10 + 0 - \tfrac{1}{4}\times\tfrac{100}{2} + 0$$

$= 50 - 25 - 12.5 = 12.5$ इकाइयाँ

उदाहरण 10 :

यदि मांग फलन $p = 20-5x$ तथा आपूर्ति फलन $p = 4+3x$ है, तो उपभोक्ता आधिक्य तथा उत्पादक आधिक्य ज्ञात कीजिए।

हल :

मांग फलन तथा आपूर्ति फलन को बराबर रखने पर, हमें $x = 2,\ p = 10$ प्राप्त होता है–

क) $\text{CS} = \int_0^2 DD\,dx - px = \int_0^2 (20-5x)dx - 10\times 2 = 20\int_0^2 dx - 5\int_0^2 x\,dx - 20$

$= 20|x|\,{}_0^2 - 5\left|\frac{x^2}{2}\right|{}_0^2 - 20 = 20\times 2 - 0 - 5\times\frac{2^2}{2} + 0 - 20$

$= 40 - 10 - 20 = 10$

ख) $PS = px - \int_0^2 Sp\ \ dx = 10\times 2 - \int_0^2 (4+3x)dx = 20 - 4\int_0^2 dx - 3\int_0^2 x\,dx$

$$= 20 - 4|x|_0^2 - 3\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 20 - 4\times 2 - 3\left(\frac{4}{2}\right).$$

$$= 20 - 8 - 6 = 6$$

14.4.3 अधिकतम लाभ (Profit Maximisation)

हमने अधिकतम लाभ इत्यादि का विश्लेषण इससे पहले भी अवकल गणित का अध्ययन करते हुए किया है। अवकल गणित के अनुप्रयोगों में, हमें कुल आगम या औसत आगम तथा कुल लागत दी होती है और हमें अधिकतम लाभ ज्ञात करना होता है। परंतु यदि इनके स्थान पर हमें सीमांत आगम और सीमांत लागत दिए हों, तो हमें पहले समाकलन की सहायता से कुल आगम (TR) तथा कुल लागत (TC) इत्यादि ज्ञात करने पड़ेंगे। इसके पश्चात् अधिकतम लाभ ज्ञात करने के लिए हम अवकल गणित का प्रयोग करते हैं। प्रक्रिया वही है– पहले लाभ फलन $(\pi = TR - TC)$ ज्ञात करें तथा उसके पश्चात् प्रथम अवकलज परीक्षण अथवा द्वितीय अवकलज परीक्षण, स्थिति अनुसार जो भी सुविधाजनक हो, का प्रयोग करके अधिकतम लाभ ज्ञात करें।

उदाहरण 11 :

एक कंपनी का औसत आगम (AR) फलन $p = 50 - x^2$ तथा सीमांत लागत (MC) फलन $1 + x^2$ है। उपभोक्ता आधिक्य ज्ञात कीजिए, यदि

क) बाज़ार में पूर्ण प्रतियोगिता की अवस्था हो

ख) बाज़ार में एकाधिकार की अवस्था हो

हल :

क) पूर्ण प्रतियोगिता में आपूर्ति वक्र, सीमांत लागत (MC) के समान होता है। अतः संतुलन मात्रा तथा संतुलन कीमत ज्ञात करने के लिए हम AR (माँग फलन) को MC (आपूर्ति फलन) के बराबर रखते हैं।

$$50-x^2=1+x^2 \;\Rightarrow\; 2x^2=49 \quad \text{or} \quad x^2=\frac{49}{2} \quad \text{or} \quad x=\pm\frac{7}{\sqrt{2}}$$

ऋणात्मक मान की उपेक्षा करने पर हम पाते हैं कि $x=+\frac{7}{\sqrt{2}}$ है।

इससे संबंधित p का मान होगा।

$$p=50-x^2=50-\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2=50-\frac{49}{2}=\frac{51}{2}$$

अतः, संतुलन बिंदु होगा $\left[x=\frac{7}{\sqrt{2}}, p=\frac{51}{2}\right]$

$$\text{CS}=\int_0^{\frac{7}{\sqrt{2}}} \text{DD}\, dx - px = \int_0^{\frac{7}{\sqrt{2}}} (50-x^2)dx - \frac{51}{2}\times\frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$=50\int_0^{\frac{7}{\sqrt{2}}} dx - \int_0^{\frac{7}{\sqrt{2}}} x^2 dx - \frac{357}{2\sqrt{2}}$$

$$=50|x|_0^{\frac{7}{\sqrt{2}}} - \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{7}{\sqrt{2}}} - \frac{357}{2\sqrt{2}} = 50\times\frac{7}{\sqrt{2}} - 0 - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{357}{2\sqrt{2}} = \frac{343}{3\sqrt{2}}$$

ख) एकाधिकार की स्थिति में, अधिकतम लाभ तथा संतुलन बिंदु तब प्राप्त होते हैं जब $MR=MC$ हो।

अब, सीमांत आगम (MR) = $\frac{d}{dx}$(TR)

जहाँ, कुल आगम(TR) = प्रति इकाई मूल्य (AR) × मात्रा (x)

$$MR=\frac{d}{dx}(x\cdot AR)=\frac{d}{dx}(50x-x^3)=50-3x^2$$

अब, हमें दिया है $MR=50-3x^2$ और $MC=1+x^2$

संतुलन के लिए $MR=MC \quad \Rightarrow \quad 50-3x^2=1+x^2$

$$\Rightarrow \quad 4x^2=49 \quad \text{or} \quad x^2=\frac{49}{4} \quad \text{or} \quad x=\sqrt{\frac{49}{4}}=\pm\frac{7}{2}$$

ऋणात्मक मान की उपेक्षा करने पर हम पाते हैं कि $x=\frac{7}{2}$ है। x के इस मान से संबंधित p का मान होगा।

$$p = 50 - x^2 = 50 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 50 - \frac{49}{4} = \frac{151}{4}$$

अतः $\left[x = \frac{7}{2},\ \ p = \frac{151}{4}\right]$

अब $CS = \int_0^x (dd)\,dx - px$

अर्थात् $CS = \int_0^{\frac{7}{2}} (50 - x^2) - \frac{151}{4} \times \frac{7}{2} = 50\int_0^{\frac{7}{2}} dx - \int_0^{\frac{7}{2}} x^2 dx - \frac{1057}{8}$

$$= 50|x|_0^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3}|x^3|_0^{\frac{7}{2}} - \frac{1057}{8} = 50 \times \frac{7}{2} - 0 - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^3 + 0 - \frac{1057}{8}$$

$$= 175 - \frac{343}{24} - \frac{1057}{8} = 175 - 14.291 - 132.125 = 28.584$$

उदाहरण 12

एक फर्म की स्थिर लागत रु.50/– तथा सीमांत आगम रु.50/– है। यदि सीमांत लागत फलन $10+\frac{x}{10}$ हो तो (क) वह उत्पाद ज्ञात कीजिए जिसके लिए लाभ अधिकतम होगा तथा (ख) अधिकतम लाभ की राशि ज्ञात कीजिए।

हल

$TR = \int MR\ dx = \int 50dx = 50x + C$ [यहाँ $C = 0$ है क्योंकि $x = 0$ पर TR = 0 होगा]

$\therefore\ TR = 50x$

$TC = \int MC\ dx = \int (10 + \frac{x}{10})dx = 10x + \frac{x^2}{20} + k$

अब, जब $x=0$ है तो TC कुल स्थिर लागत के बराबर हो जाएगी जो कि रु. 50/– दी हुई है।

अर्थात् $TC = 10x + \frac{x^2}{20} + 50$

क) अधिकतम लाभ उत्पाद (π) : लाभ फलन का मान होगा –

$$\pi = TR - TC = 50x - 10x - \frac{x^2}{20} - 50 = 40x - \frac{x^2}{20} - 50$$

अधिकतम लाभ के लिए प्रथम अवकलज परीक्षण : $\frac{d\pi}{dx} = 0$

$$\frac{d\pi}{dx} = 40 - \frac{2}{20}x - 0 = 0 \quad \text{or} \quad 40 - \frac{x}{10} = 0 \quad \text{or} \quad x = 400$$

अधिकतम लाभ के लिए द्वितीय अवकलज परीक्षण : $\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$

$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -\frac{1}{10} < 0$ अतः, अधिकतम लाभ $x = 400$ की बिक्री पर होगा।

ख) अधिकतम लाभ $(\pi) = 40x - \frac{x^2}{20} - 50 = 40 \times 400 - \frac{(400)^2}{20} - 50$

$$=16000 - 8000 - 50 = Rs\ 7950$$

उदाहरण 13

एक कंपनी का सीमांत लागत (MC) फलन $81 - 16x + x^2$ है। यदि इसका सीमांत आगम (MR) फलन $20x - 2x^2$ है तो ज्ञात कीजिए कि उत्पादन के किस स्तर पर कंपनी का लाभ उच्चतम होगा तथा अधिकतम लाभ की कुल राशि क्या होगी?

हल

संतुलन के लिए $MR = MC$ होना चाहिए। अतः,

$$20x - 2x^2 = 81 - 16x + x^2 \Rightarrow 3x^2 - 36x + 81 = 0$$

अथवा $x^2 - 12x + 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-9) = 0 \quad \text{or} \quad x = 3,\ x = 9$

हमें परीक्षण करना होगा कि अधिकतम लाभ कहाँ होगा $x = 3$ अथवा $x = 9$ पर। इसके लिए हम द्वितीय अवकलज परीक्षण का उपयोग करेंगे। हम देखना चाहते हैं कि x के किस मान के लिए $\frac{d^2R}{dx^2} < \frac{d^2C}{dx^2}$ होगा।

अर्थात् $\frac{d}{dx}(MR) < \frac{d}{dx}(MC)$ होगा।

स्थिति 1 : जब $x = 3,\ \frac{d}{dx}(MR) = 20 - 4x = 20 - 4 \times 3 = 8$ है

और $\frac{d}{dx}(MC) = -16 + 2x = -16 + 2 \times 3 = -10$

हम पाते है कि इस स्थिति में द्वितीय अवकलज परीक्षण असफल रहता है। अतः, लाभ $x = 3$ के लिए अधिकतम नहीं है।

स्थिति 2 : जब $x = 9,\ \frac{d}{dx}(MR) = 20 - 4x = 20 - 4 \times 9 = -16$ है

और $\frac{d}{dx}(MC) = -16 + 2x = -16 + 2 \times 9 = -16 + 18 = 2$

हम पाते हैं कि $x = 9$ के लिए द्वितीय अवकलज परीक्षण सफल रहता है। अतः, $x = 9$ पर लाभ उच्चतम/अधिकतम होगा।

अधिकतम लाभ की गणना : $x = 9$

लाभ $(\pi) = \text{TR} - \text{TC}$ [जहाँ $\text{TR} = \int_0^9 \text{MR}\, dx$ और $\text{TC} = \int_0^9 \text{MC}\, dx$]

$$= \int_0^9 \left(20x - 2x^2\right) - \left(81 - 16x + x^2\right) dx$$

$$= \int_0^9 \left(20x - 2x^2 - 81 + 16x - x^2\right) dx = \int_0^9 \left(36x - 3x^2 - 81\right) dx$$

$$= 36 \int_0^9 x\, dx - 3 \int_0^9 x^2 dx - 81 \int_0^9 dx = 36 \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^9 - 3\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^9 - 81|x|_0^9$$

$$= 18(9)^2 - (9)^3 - 81 \times 9 = 1458 - 729 - 729 = 0$$

$x = 9$ पर कुल लाभ $= 0$

बोध प्रश्न 3

1) एक वस्तु के लिए उपभोक्ता का माँग फलन है : $p = 20 - 2x - x^2$ । यदि वह वस्तु की 3 इकाइयाँ खरीद रहा हो तो उस उपभोक्ता का आधिक्य आंकलित करें।

....
....
....
....
....

2) यदि संतुलन कीमत रुपये 36 और आपूर्ति फलन $p = x^2$ हो तो उपभोक्ता का आधिक्य क्या होगा?

....
....
....
....
....

3) एक एकाधिकारी के समक्ष माँग फलन है : $x = 210 - 3p$ जहाँ $p =$ कीमत और $x =$मांगी गई मात्रा। उसका सकल लागत वक्र है : $x^2 + 6x + 10$। संतुलन की स्थिति में उपभोक्ता का आधिक्य क्या होगा?

....
....
....
....
....

4) यदि मांग फलन हो $x = \frac{25}{4} - \frac{1}{8}\, p$ तथा आपूर्ति फलन हो $p = 5 + x$ तो उपभोक्ता और उत्पादक के आधिक्य क्या होंगे?

....

....

....

....

....

14.5 सार-संक्षेप

यह समाकलन पर दूसरी इकाई थी। इस इकाई में हमने निश्चित समाकलनों के बारे में पढ़ा। हमने देखा कि निश्चित समाकलन, अनिश्चित समाकलन से किस प्रकार भिन्न होते हैं। निश्चित समाकलनों में हल के रूप में संख्याएँ प्राप्त होती हैं। ऐसा इसलिए है क्योंकि निश्चित समाकलनों में समाकलन की सीमाएं होती हैं। इस इकाई में हमने देखा कि किस प्रकार एक निश्चित समाकलन को एक वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल के रूप में देखा जा सकता है। यदि हम xy-तलमें एक वक्र का आलेख बनाते हैं तो x-अक्ष पर किसी दिए हुए अंतराल, x-अक्ष और वक्र से घिरे हुए क्षेत्रफल को एक निश्चित समाकलन से परिकलित किया जा सकता है। हमने यह भी देखा कि निश्चित समाकलन में जिस चर के सापेक्ष समाकलन किया जाता है, वह एक निमित्त या तदर्थ चर होता है। यद्यपि, प्रारंभ में हम एक निश्चित समाकलन को उसी प्रकार हल करते हैं जिस प्रकार एक अनिश्चित समाकलन को तथापि अंततः वह चर, जिसके सापेक्ष में समाकलन ज्ञात किया गया है, क्रमशः समाकलन की उच्च एवं निम्न सीमा द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाता है तथा उनका अंतर ज्ञात कर लिया जाता है। इस इकाई में, हमने कई उदाहरण भी देखें। हमने रीमन समाकलन की संकल्पना की भी व्याख्या की और यह भी जाना कि किसी फलन के लिए रीमन समाकलनीय होने का क्या अर्थ होता है।

तत्पश्चात्, पाठकों को निश्चित समाकलनों के कुछ विशिष्ट गुणधर्मों से भी अवगत करवाया गया। हमने देखा कि यह गुणधर्म प्रमुखतः समाकलन की सीमाओं से संबद्ध हैं। साथ ही, अनिश्चित समाकलनों के सामान्य गुणधर्म, निश्चित समाकलनों पर भी लागू होते हैं। अंत में, इस इकाई में निश्चित समाकलनों के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोगों पर चर्चा की गई जिनमें उपभोक्ता आधिक्य, उत्पादक आधिक्य तथा अधिकतम लाभ ज्ञात करना प्रमुख थे।

14.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) क) 2

ख) $\frac{1}{2}$

ग) $\log\frac{5}{4}$

घ) $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

2) क) $\frac{28}{3}$

ख) $\frac{64}{3}$

ग) $\frac{4}{3}$

3) देखें भाग 14.2.2 और उत्तर लिखें।

बोध प्रश्न 2

1) 0; यहाँ $f(-x) = f(x)$ अतः हमारे पास x का एक विषम फलन है। विशेषता–8 से हम जानते हैं कि $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$; जब कि $f(x)$ विषम हो।

2) क) 29

हल : हमारे पास हैं : $|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{if } x \geq -2 \\ -x-2, & \text{if } x < -2 \end{cases}$

$\therefore \int_{-5}^{5}|x+2|dx = \int_{-5}^{-2}|x+2|dx + \int_{-2}^{5}|x+2|dx$ (विशेषता 3 का प्रयोग कर)

$$= \int_{-5}^{-2}(-x-2)dx + \int_{-2}^{5}(x+2)dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-5}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{5}$$

$= 29$ (उपर्युक्त मानों का प्रयोग कर उनका अन्तर लेने पर)

ख) 21

हल : हम लिख सकते हैं, $\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$ (विशेषता 3 का प्रयोग कर)

$$= \int_{-2}^{1} 3x^2 dx + \int_{1}^{3} 6\, dx$$

$$= x^3\Big|_{-2}^{1} + (6x)\Big|_{1}^{3}$$

$$= 21$$

3) क) $\frac{1}{2}(e-1)$ (संकेत : रखें Put $x^2 = t$)

ख) $\sqrt{2} - 1$ (संकेत : रखें $t = \sqrt{1+x^2}$)

ग) (c) $2(\sqrt{7} - \sqrt{3})$

बोध प्रश्न 3

1) उपभोक्ता का आधिक्य $= 27$ इकाइयाँ

(संकेत : $x = 3$ पर बाज़ार कीमत P_0 का मान हम मांग फलन में $x = 3$ रखकर ज्ञात कर सकते हैं, अर्थात्, $\therefore P_0 = 20 - 6 - 9 = 5$ इकाइयाँ)

2) उपभोक्ता का आधिक्य $= 144$

(संकेत : हम कीमत पर $p = 36$ पर बिक्रित इकाइयों (x) का आंकलन आपूर्ति फलन में $p = 36$ रखकर ज्ञात कर सकते हैं। अतः $x = \sqrt{\mathbf{36}} = 6$)

3) उपभोक्ता का आधिक्य $= 96$

(संकेत : एकाधिकार में संतुलन की शर्त का प्रयोग कर हम जान सकते हैं कि संतुलन उत्पादन $= 24$ और संतुलन कीमत $= 62$)

4) उपभोक्ता का आधिक्य $= 100$, उत्पादक का आधिक्त $= 12.5$

(संकेत : यहाँ मांग फलन है $x = f(p)$। अपने उपभोक्ता एवं उत्पादक के आधिक्य के सूत्रों का प्रयोग करने के लिए हमें पहले इसे विलोम मांग वक्र $p = f(x)$ में परिवर्तित करना होगा। अतः हमारा मांग फलन हो जाएगा : $p = 50 - 8x$)।