इग्नू
जन–जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ

BECC-104

अर्थशास्त्र में गणितीय विधियाँ–II

इग्नू
जन–जन का
विश्वविद्यालय
इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ

बी.ई.सी.सी.–104

अर्थशास्त्र में गणितीय विधियाँ–II

सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

विशेषज्ञ समिति

प्रो. इन्द्रणी रॉय चौधरी प्राध्यापक जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय	प्रो. एस. के. सिंह रिटायर्ड प्रो. अर्थशास्त्र, इग्नू, नई दिल्ली	प्रो. गोपीनाथ प्रधान रिटायर्ड प्रो. अर्थशास्त्र, इग्नू, नई दिल्ली
डॉ. एस. पी. शर्मा सह प्राध्यापक अर्थशास्त्र श्यामलाल कॉलेज दिल्ली विश्वविद्यालय नई दिल्ली	डॉ. मँजूला सिंह सह प्राध्यापक, सेंट स्टिफेसं कॉलेज दिल्ली विश्वविद्यालय नई दिल्ली	श्री बी.एस. बागला सह प्राध्यापक अर्थशास्त्र पी.जी. डी.ए.वी. कॉलेज दिल्ली विश्वविद्यालय दिल्ली
सुश्री नीति अरोड़ा सह प्राध्यापक अर्थशास्त्र माता सुंदरी कॉलेज दिल्ली विश्वविद्यालय दिल्ली	प्रो. एम.एस.भट्ट प्रो. जामिया मिलिया इस्लामिया नई दिल्ली	प्रो. नारायण प्रसाद प्रो. अर्थशास्त्र इग्नू, नई दिल्ली
प्रो. अनूप चटर्जी रिटायर्ड सह प्राध्यापक ए.आर.एस.डी. कॉलेज नई दिल्ली	प्रो. कौस्तुभ बारिक प्रो. अर्थशास्त्र इग्नू, नई दिल्ली	डॉ. सुराजीत दास सह प्राध्यापक जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय नई दिल्ली
प्रो. बी.एस. प्रकाश प्रो. अर्थशास्त्र इग्नू, नई दिल्ली	श्री सौगतो सेन सह प्राध्यापक अर्थशास्त्र इग्नू, नई दिल्ली	

पाठ्यक्रम संयोजक एवं संपादक : श्री सौगतो सेन

पाठ्यक्रम निर्माण समिति

		इकाई लेखक	संपादक (विषय, आरूप एवं भाषा)
खण्ड 1	**अनेक चरों का फलन**		**श्री सौगतो सेन एचं चैताली अरोड़ा**
इकाई 1	बहुचरीय कलन–I	श्री सौगतो सेन, सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू	
इकाई 2	बहुचरीय कलन– II	श्री सौगतो सेन, सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू	
खण्ड 2	**अवकल समीकरण**		**श्री सौगतो सेन**
इकाई 3	प्रथम कोटि अवकल समीकरण	श्री जगमोहन राय सह प्राध्यापक पी.जी.डी.ए.वी कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय	
इकाई 4	द्वितीय कोटि अवकल समीकरण	श्री जगमोहन राय सह प्राध्यापक पी.जी.डी.ए.वी कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय	
खण्ड 3	**रैखिक बीजगणित**		**श्री सौगतो सेन**
इकाई 5	सदिश एवं सदिश बितान	श्री सौगतो सेन	
इकाई 6	आव्यूह एवं सारणिक	श्री सौगतो सेन	

इकाई 7	रैखिक आर्थिक प्रतिमान	श्री सौगतो सेन	
खण्ड 4	**बहुचर अमीष्टीकरण**		**श्री सौगतो सेन एवं चैताली अरोड़ा**
इकाई 8	संरोधहीन अभीष्टीकरण	डा. एस.पी. शर्मा सह प्राध्यापक, श्यामलाल कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय	
इकाई 9	संरोधित अभीष्टीकरणः समीकरणीय संरोध	श्री सौगतो सेन	
इकाई 10	द्वैतता	श्री सौगतो सेन	

पाठ्यक्रम अनुवाद : श्री जगमोहन राय, सह प्राध्यापक पी.जी. डी.ए.वी कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

सामग्री निर्माण

श्री तिलकराज
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
सा.नि.वि.प्र., इग्नू, नई दिल्ली

श्री यशपाल
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
सा.नि.वि.प्र., इग्नू, नई दिल्ली

सुरेश कुमार
कनिष्ठ सहायक (टंकण)
सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू

नवम्बर, 2020

ISBN:________________

इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय नई दिल्ली की ओर से कुलसचिव, सामग्री निर्माण मुद्रण प्रभाग द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेजर टाइप सेटिंग :

मुद्रित :ऐजूकेशनल स्टोर्स, एस–5 बुलन्दशहर रोड़ इण्डस्ट्रीयल एरिया, साईट–1 गाजियाबाद (उ.प्र.)–201009

पाठ्यक्रम

		पृष्ठ सं.
खण्ड 1	अनेक चरों का फलन	9
इकाई 1	बहुचरीय कलन –I	11
इकाई 2	बहुचरीय कलन –II	36
खण्ड 2	अवकल समीकरण	63
इकाई 3	प्रथम कोटि अवकल समीकरण	65
इकाई 4	द्वितीय कोटि अवकल	79
खण्ड 3	रैखिक बीजगणित	95
इकाई 5	सदिश एवं सदिश बितान	97
इकाई 6	आव्यूह और निर्धारक	112
इकाई 7	रैखिक आर्थिक प्रतिमान	133
खण्ड 4	बहुचर अभीष्टीकरण	151
इकाई 8	संरोधहीन अभीष्टीकरण	153
इकाई 9	संरोधित अभीष्टीकरण : समीकरण संरोध	181
इकाई 10	द्वैतता	202
	शब्दावली	224
	कुछ उपयोगी पुस्तकें	230

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

पाठ्यक्रम : एक परिचय

अर्थशास्त्र में गणितीय प्रविधियों पर दूसरे पाठ्यक्रम में आपका स्वागत है। यहाँ पहुँचने से पूर्व आप इन प्रविधियों विषयक प्रथम पाठ्यक्रम का अध्ययन कर चुके हैं। इसका अर्थ है कि बी.ई.सी.सी.–102 में परिचय के विपरीत अब आप यह कुछ–कुछ अवश्य जानते हैं कि अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग किस प्रकार होता है। आप गणित को अभिव्यक्ति की एक भाषा के रूप में जान चुके हैं। आप यह भी जान चुके हैं कि अर्थशास्त्र के अनेक संकल्पनाओं की व्याख्या में गणित कैसे प्रयोग किया जाता है। आप जान चुके हैं कि आर्थिक विश्लेषण किस प्रकार अपनी व्याख्याओं आदि में गणित की संकल्पनाओं का सहारा लेता है।

यह पाठ्यक्रम आपको उस बिन्दु से आगे साथ लेकर चलेगा जहाँ बी.ई.सी.सी.–102 का समापन हो गया था। इसमें 4 खण्डों में संयोजित 10 इकाइयाँ हैं। प्रथम खण्ड का शीर्षक ही **अनेक चरों के फलन** है। इसकी दो इकाइयाँ हैं : **बहुचरीय कलन–I** और **बहुचरीय कलन–II**। इस प्रथम खण्ड में हम उन अवस्थाओं पर विचार करेंगे जहाँ एक निर्भर चर अनेक स्वतंत्र चरों का फलन है। यह बी.ई.सी.सी.–102 की परिचर्चा से बहुत ही भिन्न स्थिति है। यहाँ पर हम एक या सभी स्वतंत्र चरों में परिवर्तनों के निर्भर चर पर प्रभावों का अध्ययन किया जाएगा। इसके लिए हम अवकलन गणित की कुछ संकल्पनाओं, आंशिक अवकलज, सकल अवकलन तथा सकल अवकलज आदि का प्रयोग करेंगे। पहली इकाई में बहुचरीय कलन की संकल्पनाओं पर चर्चा की गई है तो दूसरी इकाई में इन संकल्पनाओं के व्यष्टि एवं समष्टि अर्थशास्त्र में विभिन्न उपयोगों पर बातचीत की गई है।

दूसरे खण्ड का शीर्षक **अवकल समीकरण** है। आपने बी.ई.सी.सी.–102 के अंतिम खण्ड में अन्तर समीकरणों एवं अर्थशास्त्र मे उनके प्रयोग के बारे में समझा है। अन्तर समीकरणों की भाँति अवकलन समीकरण भी गत्यात्मक प्रक्रियाओं के विश्लेषण में उपयोगी होते हैं – ये प्रक्रियाएँ समयानुसार चलती हैं। किन्तु एक अन्तर हैः अंतर समीकरण असतत गत्यात्मक प्रक्रियाएँ ही दर्शा रहे थे किन्तु सतत् गत्यात्मक प्रक्रियाओं के लिए उपयोगी अवकल समीकरणों में अवकलजों का उपयोग किया जाता है। इस खण्ड की भी दो इकाइयाँ हैं : इकाई 3 तथा इकाई 4। बी.ई.सी.सी.–102 के अंतर समीकरण विषयक खंड की इकाइयाँ रैखिक और ग़ैर–रैखिक समीकरणों के अनुसार संयोजित की गई थीं। वर्तमान पाठ्यक्रम के अवकल समीकरण विषयक खंड की इकाइयाँ क्रमशः प्रथम कोटि एवं द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों से संबद्ध है। इकाई 3 है : प्रथम कोटि अवकल समीकरण तथा इकाई 4 है द्वितीय कोटि अवकल समीकरण।

इस पाठ्यक्रम का तीसरा खण्ड है **रैखिक बीजगणित**। जैसा कि नाम ही सुझा रहा है यहाँ रैखीय समीकरणों, उनके तन्त्रों तथा अंतक्रियाओं एवं समाधानों पर चर्चा होगी। इसमें तीन इकाइयाँ हैं। इकाई 5 का शीर्षक है **सदिश एवं सदिश बितान**, यहाँ संख्याओं के क्रमित n-युग्मों पर चर्चा की गई हैं। इसी इकाई में सदिशों के ज्यामितिक और बीजगणितीय गुणधर्मों पर भी चर्चा हुई है। अगली इकाई **आव्यूहों और सारणिक** पर है। आव्यूह ही रैखिक बीजगणित का आधार है। वर्ग आव्यूह नामक विशेष प्रकार के आव्यूहों के लिए हम निर्धारकों की रचना करते हैं और इनका मान एक संख्या मात्र होता है। खण्ड 3 की अंतिम इकाई (इकाई 7) का शीर्षक रैखिक आर्थिक प्रतिमान है। यहाँ इकाई 5 और 6 की संकल्पनाओं को साथ लाकर अर्थशास्त्र में उनके अनुप्रयोगों को स्पष्ट किया गया है।

पाठ्यक्रम का अंतिम खण्ड (खण्ड 4) **बहुचर अभीष्टीकरण** है। इसमें भी 3 इकाइयाँ हैं। इकाई 8 का शीर्षक **संरोधरहित अभीष्टीकरण** है। इसमें उन फलनों के अभीष्टीकरण पर चर्चा है जिन पर कोई संरोध लागू नहीं होते। इकाई 9 का शीर्षक ही बता रहा है कि उसमें संरोधों के अधीन रहते हुए अभीष्टीकरण समझाया जाएगा। खण्ड की अंतिम इकाई 10 में अभीष्टीकरण, विशेषक बहुचर अभीष्टीकरण, संरोधहीन एवं संरोधसहित से जुड़े कुछ विशेष विषयों पर चर्चा की जाएगी।

खंड 1

अनेक चरों का फलन

खण्ड 1 : एक परिचय

यह कलन गणित पर प्रथम खण्ड है। किन्तु इसमें हम अवलन के बहुचर फलनों पर अनुप्रयोग कर रहे हैं। इस खण्ड का शीर्षक "**अनेक चरों के फलन**" है। इसमें दो इकाइयाँ हैं : **बहुचरीय कलन–I** और **बहुचरीय कलन–II**। इस खण्ड की चर्चा बी.ई.सी.सी.–102 से बहुत अलग है। यहाँ पर हम एक या सभी स्वतंत्र चरों में परिवर्तनों के निर्भर चर पर प्रभावों को समझने का प्रयास करेंगे। इसके लिए अवकलन गणित की आंशिक अवकलज, सकल अवकलन तथा सकल अवकलज जैसी अवधारणाओं का प्रयोग किया जाएगा। पहली इकाई में बहुचर अवकलन का गणित और दूसरी इकाई में व्यष्टि एवं समष्टि अर्थशास्त्र में चर्चित संकल्पनाओं के अनुप्रयोगों पर विचार किया जाएगा।

इकाई 1 बहुचरीय कलन–I*

संरचना

1.0 उद्देश्य

1.1 प्रस्तावना

1.2 बहुचर फलन

1.2.1 दो स्वतंत्र चरों के फलन

1.2.2 स्तर वक्र

1.2.3 व्यापक बहुचर फलन

1.3 आंशिक अवकलज

1.3.1 प्रथम कोटि आंशिक अवकलज

1.3.2 द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज

1.4 संपूर्ण अवकल तथा संपूर्ण अवकलज

1.4.1 संपूर्ण अवकल

1.4.2 संपूर्ण अवकलज

1.5 बहुचर फलनों के लिए श्रृंखला नियम

1.6 अन्तर्निहित फलन तथा अन्तर्निहित फलन प्रमेय

1.7 समघात तथा समस्थित फलन

1.8 सारांश

1.9 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

1.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आपः

- ऐसे फलनों से जिनमें एक निर्भर चर एक से अधिक स्वतंत्र चरों पर निर्भर होता है उनका वर्णन कर सकेंगे;
- आंशिक अवकलज की संकल्पना को स्पष्ट कर सकेंगे;
- आंशिक अवकलज की संकल्पना तथा उन्हें ज्ञात करने की संकल्पना पर चर्चा कर सकेंगे;
- समघात तथा समस्थित फलनों की संकल्पना को स्पष्ट कर सकेंगे; और
- एक से अधिक चरों वाले फलनों के संदर्भ में श्रृंखला नियम को स्पष्ट कर सकेंगे।

* सौगतो सेन, इग्नू

1.1 प्रस्तावना

अर्थशास्त्र में गणितीय विधियाँ पाठ्यक्रम (बी.ई.सी.सी.–102) में, जिसका आपने पिछले सेमेस्टर में अध्ययन किया, हमने अवकलन के बारे में जानकारी प्राप्त की। परन्तु, वहाँ हमने एक विचर फलनों के अवकलन के बारे में अध्ययन किया अर्थात् ऐसे फलनों के लिए जिनमें निर्भर चर केवल एक स्वतंत्र चर पर निर्भर हो। इस इकाई में हम ऐसे फलनों पर विचार करेंगे जिनमें एक से अधिक स्वतंत्र चर हों तथा बहुचर फलनों के अवकल गणित की भी चर्चा करेंगे। इस इकाई में सर्वप्रथम भाग 1.2 में बहुचर फलनों की संकल्पना की चर्चा की गई है। भाग 1.3 आंशिक अवकलजों पर केन्द्रित है, जिसका अर्थ है एक बहुचरीय फलन का एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलन करना, अन्य चरों में बिना कोई परिवर्तन किए। भाग 1.4 में संपूर्ण अवकलन पर भी चर्चा की गई है जिसका अर्थ है कि सभी स्वतंत्र चरों में परिवर्तन के परिणामस्वरूप निर्भर चर में होने वाले परिवर्तन का आंकलन करना। इस भाग में संपूर्ण अवकलजों पर भी चर्चा की गई है। अगले भाग अर्थात् भाग 1.5 में श्रृंखला नियम पर चर्चा की गई है। एक चरीय फलनों के लिए इस नियम का अध्ययन आप पहले ही कर चुके हैं परन्तु बहुचरीय फलनों के लिए यह नियम थोड़ा अलग होगा। भाग 1.6 में हम अन्तर्निहित रूप से परिभाषित फलनों के अवकलन पर चर्चा करेंगे। इस भाग में एक महत्वपूर्ण प्रमेय, अन्तर्निहित फलन प्रमेय पर चर्चा की गई है। अंत में, भाग 1.7 में आपका परिचय एक विशेष प्रकार के बहुचर फलन से करवाया जाएगा जिसे समघात फलन कहते हैं। इस भाग में समघात फलन को परिभाषित करने के अतिरिक्त उनके कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मों पर भी चर्चा की गई है, जिसमें एक महत्वपूर्ण प्रमेय, आयलट का प्रमेय भी सम्मिलित है। साथ ही, इस भाग में समस्थित फलनों को भी परिभाषित करेंगे और उनके तथा अन्तर्निहित फलनों के बीच सम्बन्ध का भी उल्लेख करेंगे।

हम यहाँ स्पष्ट रूप से उल्लेख करना चाहेंगे कि इस इकाई में हम लिए गए विषयों तथा संकल्पनाओं पर केवल गणितीय दृष्टि से विचार करेंगे। अगली इकाई, अर्थात् इकाई 2 पूर्णतया इस इकाई में चर्चित संकल्पनाओं के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोगों पर केन्द्रित है जैसे कि उपभोक्ता, उत्पादक सिद्धान्त, बाजार, समष्टिगत अर्थशास्त्र इत्यादि। अतः आप इस इकाई का अध्ययन ध्यानपूर्वक करेंगे। इससे वे अगली इकाई को भी ठीक प्रकार से समझ सकेंगे और उन संकल्पनाओं को भी जिन्हें उन्होंने व्यष्टिगत तथा समष्टिगत पाठ्यक्रमों में अध्ययन किया है।

1.2 बहुचर फलन

1.2.1 दो स्वतंत्र चरों के फलन

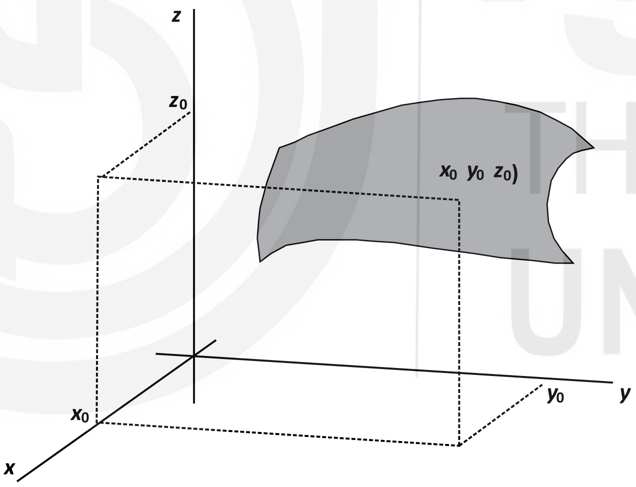
पिछले सेमेस्टर में "अर्थशास्त्र में गणितीय विधियाँ" पाठ्यक्रम में हमने एक चर के फलनों के बारे में विस्तार से चर्चा की अर्थात् ऐसे फलनों पर जिनमें एक चर केवल एक स्वतंत्र चर पर निर्भर होता है। परन्तु वास्तविक जीवन में हमारा सामना ऐसी स्थितियों से होता है जहाँ एक से अधिक स्वतंत्र चर किसी निर्भर चर को प्रभावित करते हैं। चर्चा को सरल बनाने के लिए, आइए हम एक ऐसे फलन से प्रारंभ करें जिसमें एक निर्भर चर, मान लीजिए z, दो स्वतंत्र चरों x और y का फलन है। इसे हम

$$z = f(x, y)$$

द्वारा व्यक्त करते हैं।

इसे हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं, प्रांत D पर, दो वास्तविक चरों x और y का फलन एक ऐसा नियम है जो प्रांत D के प्रत्येक बिन्दु (x, y) से एक विशिष्ट संख्या f(x, y) संबद्ध करता है। इस फलन में x और y फलन f के स्वतंत्र चर कहलाते हैं तथा z निर्भर चर कहलाता है। फलन f का प्रांत, स्वतंत्र चरों के सभी संभव क्रमित युग्मों का समुच्चय होता है तथा परिसर प्रांत के सभी अवयवों के संगत निर्भर चर के मानों का समुच्चय होता है। किसी–किसी संदर्भ में z को अन्तर्निहित तथा x और y को बहिर्जात चर भी कहा जाता है।

चर्चा को सरल करने के अतिरिक्त दो चरों के फलनों से प्रारंभ करने का एक अन्य कारण यह भी है कि इनका आरेख बनाया जा सकता है। हम $f(x, y)$ को त्रिविमीय स्थान (three-dimensional space) में तीन परस्पर लम्बवत् अक्ष Ox, Oy और Oz बना कर एक आरेख के रूप में चित्रित कर सकते हैं। नीचे दिए रेखाचित्र 1.1 में हमने त्रिविमीय स्थान में एक पृष्ठ को चित्रित किया है तथा इस पृष्ठ पर एक बिन्दु (x_0, y_0, z_0) को दर्शाया है।



रेखाचित्र 1.1

अब मान लीजिए कि यह पृष्ठ, फलन $z = f(x, y)$ द्वारा प्राप्त हुआ है तथा इसे xy तल के बिन्दुओं (x, y) के संगत z के मानों को आरेखित करके बनाया गया है। दर्शाया गया है।

1.2.2 स्तर वक्र

यदि हमें फलन $z = f(x,y)$ दिया है तो इस फलन का त्रिविमीय अथवा त्रिआयामी स्थान में आलेख बनाया जा सकता है। हम इस फलन के आलेख तथा xy – तल के समानान्तर विभिन्न तलों के प्रतिच्छेदन की कल्पना कर सकते हैं। फलन के आलेख

तथा $xy-$ तल के समानान्तर विभिन्न तलों के प्रतिच्छेदन से हमें विभिन्न वक्र प्राप्त होंगे जिनका प्रक्षेपण (projection) हम $xy-$ तल पर कर सकते हैं। यदि हमने तल $z=k$ लिया था तो इसके द्वारा $xy-$ तल पर प्राप्त प्रक्षेपण को फलन f का ऊँचाई k का स्तर वक्र या परिरेखा (contour) कहते हैं। यह परिरेखा या स्तर वक्र उन बिन्दुओं का समुच्चय है जो समीकरण $f(x,y)=k$ को संतुष्ट करते हैं।

एक मानचित्र पर विचार कीजिए। यह अक्षांश और देशांतर (latitudes and longitudes) के अनुसार विभिन्न स्थलों की अवस्थिति को दर्शाता है। यहाँ पर किसी भी स्थल की भौगोलिक विशेषता (मान लीजिए ऊँचाई) दिखाने के लिए हम उक्त ऊँचाई विशेष वाले सभी स्थानों को जोड़ते हुए समस्तर बोधक रेखाएँ खींच सकते हैं। मानचित्र में ऊँचाई को समुद्र तल के सापेक्ष अथवा उन्नयन (elevation) दर्शाया जाता है। इस प्रकार एक द्विआयामी मानचित्र (two-dimensional map) में, जहाँ दिशा, अंतर, क्षेत्रफल आदि ही सहज स्पष्ट होते हैं, हम समस्तर वक्रों को अंकित कर ऊँचाई का तीसरा आयाम भी दिखा सकते हैं।

हम इसी विचार का प्रयोग दो स्वतंत्र चरों के फलन के रेखांकन (diagrammatical representation) में करते हैं। ऐसे फलन के रेखांकन को द्विआयामी मानचित्र में अंकित तीसरे आयाम द्वारा दिखाया जा सकता है – यह क्षैतिज तल x-y तल के समानांतर तलों के समुच्चय के रूप में होगा। हम तलों तथा रेखाचित्र के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं का x-y तल पर प्रेक्षण कर सकते हैं।

इस बिन्दु पर पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी. 102 में निर्देशांक ज्यॉमिति (coordinate geometry) नामक इकाई की विषयवस्तु पर ध्यान देना उपयोगी होगा। वहाँ आपने देखा था कि y- अक्ष में समानांतर रेखा $x=c$ तथा x-अक्ष के समानांतर रेखा $y=c$ होती हैं।

वर्तमान संदर्भ में हम एक तल के समीकरण की चर्चा कर रहे हैं – क्योंकि इसके तीन आयाम x–y–z हैं। अतः xy– तल के समानांतर तल को $z=c$ द्वारा दिखाया जाएगा। यह वास्तव में उस तल का $z=c$ ऊँचाई वाली रेखा से प्रतिच्छेदन का प्रक्षेप ही होगा। हम जानते हैं कि $z=f(x,y)$, अतः यह प्रक्षेपण c ऊँचाई पर फलन f का स्तर वक्र (level curve) कहलाता है। इसलिए यह स्तर वक्र इस समीकरण को संतुष्ट करने वाले बिन्दुओं का समूह होगाः

$$f(x,y)=c$$

इस प्रकार एक स्तर वक्र उन बिन्दुओं को मिलाता है जिनके फलन मान समान हों। हमारे उपर्युक्त उदाहरण में स्तर वक्र उन बिन्दुओं को मिलाता है जिनके f मान c के समान हों। यह ऐसे बिन्दुओं का पथ है, अर्थात् उन x और y के संयोजनों से जुड़ा है, जिन पर z का मान स्थिरांक c के समान रहता है।

1.2.3 व्यापक बहुचर फलन

हम ऊपर उपभाग 1.2.1 में दो स्वतंत्र चरों के फलनों के बारे में चर्चा कर चुके हैं। उसी चर्चा को हम ऐसे फलनों तक विस्तृत कर सकते हैं जहाँ एक निर्भर चर कई स्वतंत्र चरों का फलन होता है। आइए, n चरों की एक सूची को $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ द्वारा निर्दिष्ट करें। यहाँ चर x का निदेशन पादांक $i=1, 2, \ldots, n$ द्वारा किया जा सकता

है। यह ऐसे n-चरों का समूह है जहाँ प्रत्येक x_i एक वास्तविक संख्या है। इसे एक "सदिश" (vector) कहा जाता है। एक सदिश एक क्रमित n-युग्म (tuple) होता है। पिछले सेमेस्टर के पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी.–102 की इकाई 1 और 2 में इनके विषय में आपने संक्षेप में अध्ययन किया था। वर्तमान पाठ्यक्रम के खंड 3 में सदिशों पर सविस्तार चर्चा होगी।

आइए, फिर से सदिश $x=(x_1,x_2,...x_n)$ पर ध्यान देते हैं। मान लेते हैं कि कोई चर z इस सदिश के सभी n चरों का फलन है। फिर तो हम इस फलन को इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं:

$$z=f(x_1,x_2,...,x_n).$$

यहाँ एक बात स्वयं ही स्पष्ट हो जाती है : अब आयामों की संख्या n + 1 हो गई है। यदि n = 2 तो हमें उपभाग 1.2.1 वाला ही परिदृश्य प्राप्त हो जाएगा। वहाँ भी n + 1 = 3 ही था और हम उस f को एक रेखाचित्र में दिखाने में सफल हो गए थे। किन्तु n के 2 से अधिक होने पर आयामों की कुल संख्या 3 से अधिक हो सकती है – फिर तो फलन का रेखांकन संभव नहीं रहेगा। अतः हमें फलन का संकल्पनात्मक एवं अमूर्त चिंतन करना होगा। जब एक रेखा को दो आयामों में व्यापन किया जाता है तो हमें एक तल (plane) प्राप्त होता है। उससे अधिक आयाम संख्या हो जाने पर संभावित आकृति को "अतितल" (hyperplane) का नाम दे सकते हैं। उच्च आयामी सतह (general surface in higher dimensions) को "अति सतह" (hypersurface) कहा जा सकता है। ध्यान रखें कि फलन $z=f(x,y)$, जिसे $z=f(x_1,x_2)$ द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है, वस्तुतः $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ का एक विशेष स्वरूप ही है जहाँ n = 2 है।

1.3 आंशिक अवकलज

पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी.–102 में अवकलज का अध्ययन करते समय आपने देखा था कि अवकलन गणित में हम किसी निर्भर चर में उस परिवर्तन को जानने का प्रयास करते हैं जो स्वतंत्र चर में आए अति सूक्ष्म परिवर्तन के परिणामस्वरूप आता है। वहाँ आप केवल एक स्वतंत्र चर के फलनों तक ही सीमित रहे थे। वर्तमान इकाई में हमने ऐसे फलनों पर चर्चा प्रारंभ की है जहाँ निर्भर चर एक साथ कई स्वतंत्र चरों का फलन निरूपित किया जा रहा है। अतः आप यह कल्पना कर सकते हैं कि उन स्वतंत्र चरों में हुए परिवर्तनों के निर्भर चर पर क्या प्रभाव रहे हैं। एक सरलतम बहुचर फलन (simplest multivariate function) $z=f(x_1,x_2)$ पर विचार करें। हम यह जानना चाहेंगे कि z में x_1 तथा x_2 के परिवर्तनों के फलस्वरूप कैसे बदलाव आता है। यहाँ z में दो प्रकार से परिवर्तन आ सकते हैं: पहले तो केवल एक, अर्थात् x_1 अथवा x_2 में बदलाव हो और दूसरे, x_1 तथा x_2 में एक साथ परिवर्तन आए। फिर हम इसी विचार को व्यापक बहुचर फलन $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ तक विस्तारित कर सकते हैं। हमारी शेष इकाई इन्हीं परिवर्तनों से सम्बन्धित है। वर्तमान भाग में हम केवल एक स्वतंत्र चर के अनुरूप फलन का अवकलन करेंगे। अगले भागों में सभी स्वतंत्र चर एक साथ परिवर्तित हो रहे होंगे। जब किसी फलन का केवल एक चर के अनुसार अवकलन किया जाता है तब शेष स्वतंत्र चरों को "अचर" मान लिया जाता है और इस प्रकार प्राप्त अवकलज को आंशिक अवकलज (partial derivative) कहा जाता है। आइए, इन आंशिक अवकलजों के अध्ययन से ही हम अपनी चर्चा को आगे बढ़ाएँ।

1.3.1 प्रथम कोटि आंशिक अवकलज

फलन $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ पर विचार करें। हम यह भी मान लेते हैं कि चर x_i (i = 1, 2, …, n) सभी परस्पर स्वतंत्र हैं, इनमें से किसी भी एक में परिवर्तन का शेष चरों पर कोई प्रभाव नहीं होता। मान लीजिए, कि x_1 में कुछ परिवर्तन Δx_1 हुआ है किन्तु x_2, x_3, … x_n सभी अपरिवर्तित (स्थिर) (remain unchanged - fixed) रहे हैं और परिणामस्वरूप z में Δz के समान परिवर्तन आया है। अतः हम अनुपात (quotient) $\frac{\Delta z}{\Delta x_1}$ को कुछ इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ... x_n)}{\Delta x_1}$$

यदि जैसे जैसे $\Delta x_1 \to 0$, हम $\frac{\Delta z}{\Delta x_1}$ की परिसीमा आंकलित करें तो वह परिसीमा z का x_1 के अनुसार आंशिक अवकलज कह लाएगी। हम "आशिंक" शब्द का प्रयोग यही स्पष्ट करने के लिए करते हैं कि अन्य स्वतंत्र चरों को अपरिवर्तित रखा गया है। हम प्रत्येक स्वतंत्र चर के अनुसार इसी प्रकार के आंशिक अवकलज आंकलित कर सकते हैं। आंशिक अवकलज ज्ञात करने की विधि को ही आंशिक अवकलन (partial differentiation) कहा जाता है।

हमने पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी. 102 में देखा था कि अवकलज को अक्षर (चिन्ह) (symbol) d द्वारा परिसूचित किया जाता है। इसलिए y = f(x) की दशा में हम y का x के अनुसार अवकलज $\frac{dy}{dx}$ द्वारा दिखा पा रहे थे। आंशिक अवकलजों को चिन्ह ∂ द्वारा इंगित किया जाता है। यह निम्न केस वाले ग्रीक अक्षर "डेल्टा" δ का रूपांतरण (variation) है। अतः हम अपने यहाँ चर्चित आंशिक अवकलज को $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ द्वारा दिखा सकते हैं। इसे हम z का x_1 के अनुसार आंशिक अवकलज कहेंगे। सामान्यीकृत स्वरूप में $\frac{\partial}{\partial x_i} z$ द्वारा i वें x के अनुसार z का आंशिक अवकलज दर्शा सकते हैं। यहाँ $\frac{\partial}{\partial x_i}$ भाग को एक "गणितीय संकारक" (mathematical operator) चिन्ह कहते हैं – यह इंगित करता है कि किसी फलन का x_i के अनुसार अवकलन किया जा रहा है। यहाँ पर x_i (i = 1, 2, …, n) का फलन z है। अतः आंशिक अवकलज को हम $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ द्वारा भी व्यक्त कर सकते हैं। आपने देखा है कि जहाँ y = f(x), को $f'(x)$ $\frac{dy}{dx}$ द्वारा भी दर्शाया गया था। कई बार आंशिक अवकलजों $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ को f_i द्वारा भी दर्शा दिया जाता है।

यदि फलन को z =f(x, y, w, v) द्वारा निरूपित किया गया हो तो आंशिक अवकलज f_x, f_y, f_w, f_v या f_1, f_2, f_3, f_4 द्वारा भी दिखाए जा सकते हैं।

संक्षेप में, यदि हमें $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ दिया गया है तो हम x_3 के अनुसार z का अवकलज इनमें से किसी भी चिन्ह द्वारा इंगित कर सकते हैं:

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} \text{ अथवा } \frac{\partial f}{\partial x_3} \text{ अथवा } \frac{\partial}{\partial x_3} f \text{ अथवा } f_3$$

आइए, अब कुछ उदाहरणों की सहायता से आंशिक अवकलजों के आंकलन को समझने का प्रयास करें। सरलता के लिए हम स्वतंत्र चरों की संख्या दो मान लेते हैं। यहाँ आंशिक अवकलज ज्ञात करते समय दो बातों का ध्यान रखना होगाः जब एक स्वतंत्र चर के अनुसार अवकलन करते हैं तो दूसरे चर को स्थिरांक (constant) माना जाता है और एक स्थिरांक का अवकलज तो शून्य के समान होता है। यह भी ध्यान रहें कि यदि किसी चर को स्थिरांक से गुणा किया गया हो तो इस गुणनफल का इस चर के अनुसार अवकलज भी उक्त स्थिरांक से गुणित हो जाएगा। उदाहरण के लिए,

(d [cx]/dx =cdx/dx; और d[cx^2]/dx =2cx)

यही नहीं अवकलन के योग, अंतर, गुणन एवं भजनफल नियम आंशिक अवकलज पर भी उसी रूप में लागू होते हैं।

उदाहरण 1: $f(x, y) = x^3 y + y^4$ दिया गया है।

इसे x के अनुसार आंशिक रूप से अवकलित करने पर हम पाते हैं:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial}(x^3 y) + \frac{\partial}{\partial x}(y^4)$$

यहाँ दाहिनी ओर का प्रथम चर $3x^2 y$ है तथा दूसरा पद शून्य है (क्योंकि y एक स्थिरांक है – इसीलिए स्थिरांक के घात चार भी स्थिरांक रहेगा)।

अतः $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y$

इसी प्रकार

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^4) = x^3 y + 4y^3$$

उदाहरण 2: $z = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2$ दिया गया है।

आंशिक अवकलज करते समय ध्यान रखें कि x_1 के अनुसार अवकलन करते समय x_2 को स्थिरांक माना गया है। यदि x_2 एक योज्य स्थिरांक (additive constant) होता तो यह अवकलन में विलुप्त (शून्य) हो जाता – जैसा कि उक्त प्रश्न के तीसरे पद में किया जा रहा है किन्तु गुणक स्थिरांक (multiplicative constant) के रूप में यह बचा रहता है, जैसे कि दूसरे पद में।

अतः हम पाते हैं:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1 = 8x_1 + x_2$$

इसी प्रकार x_2 के अनुसार अवकलन करते हुए हम x_1 को स्थिरांक मानते हैं और हम पाते हैं:

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = f_2 = x_1 + 6x_2$$

उदाहरण 3: $z = f(w,v) = (w+4)(3w+2v)$ दिया गया है।

हम गुणन नियम द्वारा आंशिक अवकलज प्राप्त कर सकते हैं हाँ w के अनुसार अवकलन करते समय v को स्थिरांक मानना होगा।

अतः हम पाते हैं:

$$f_w = (w+4)(3) + (3w+2v)(1) = 2(3w+v+6)$$

इसी प्रकार v के अनुसार अवकलन में w को स्थिरांक माना जाता है और हम पाते हैं:

$$f_v = (w+4)(2) + 0(3w+2v) = 2(w+4)$$

उदाहरण 4: आइए इस उदाहरण में यह देखें कि भजनफल नियम का प्रयोग किस प्रकार से होता है:

मान लें $z = (3w-2v)/(w^2+3v)$

हमारे पास हैं: $$\frac{\partial z}{\partial w} = f_w = \frac{3(w^2+3v) - 2w(3w-2v)}{(w^2+3v)^2} = \frac{-3w^2+4w \;\; +9v}{(w^2+3v)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_v = \frac{-2(w^2+3v) - 3(w-2v)}{(w^2+3v)^2} = \frac{-w(2w+9)}{(w^2+3v)^2}$$

सभी उपर्युक्त उदाहरणों में हमने प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों (first-order partial derivatives) पर ही विचार किया है। ये सभी दिए गए फलनों के उनके संधारकों के अनुसार किए गए हैं। आइए, इन अवकलजों के विषय में एक आधारभूत तथ्य पर भी विचार करें। ये प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज मूल फलन के संधारकों के फलन होते हैं। दूसरे शब्दों में ये प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज मूल फलन के स्वतंत्र चरों के फलन होते हैं।

मान लें कि हमें $z = f(x_1, x_2)$ दिया गया है:

अतः $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = g(x_1, x_2)$ और

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = h(x_1, x_2)$$

इस उदाहरण में h तथा g फलनों को ही अभिव्यक्त करते हैं।

आइए, अब प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों के विषय में एक अंतिम बिन्दु को भी देखें। मान लीजिए कि हमें दिया गया है: $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ । आइए, अब हम आंकलन करें: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ । इन सभी आंशिक अवकलजों के संयोजन $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के विशिष्ट मानों के लिए n वास्तविक संख्याओं का संयोजन ही है।

यह संयोजन एक n युग्म अथवा सदिश है। इस सदिश को प्रावण्य सदिश (gradient vector) कहते हैं और इसको ∇ अथवा grad f द्वारा दर्शाते हैं।

1.3.2 द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज

हमने पिछले उपभाग में प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों पर चर्चा की थी। आइए, अब हम द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों (second-order partial derivatives) को समझने का प्रयास करें। आइए, हम इस फलन पर विचार करते हैं:

$$z = f(x,y)$$

इस फलन में हमें दों प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज प्राप्त होते हैं: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ और $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

पिछले उपभाग के अंत में हमने कहा था कि प्रायः प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज स्वयं भी x और y के फलन होते हैं, अर्थात्

$f_x = g(x, y)$ और

$f_y = h(x, y)$

इसका अर्थ है कि हम g और h फलनों को भी x और y के अनुसार अवकलित कर सकते हैं – किन्तु ध्यान दें कि f_x स्वयं भी एक आंशिक अवकलज है और इसे x और y के अनुसार आगे अवकलित किया जा सकता है। यही बात f_y पर भी लागू है।

हमारे पास $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$ है और हम *g(x,y)* का के अनुसार अवकलन कर सकते हैं। इसी प्रकार $f_y = h(x,y)$ को भी x और y के अनुसार अवकलित किया जा सकता है:

आइए, हम $f_x = g(x, y)$ का अवकलन करते हैं:

हमें $\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ प्राप्त होता है।

दाहिने पक्ष को हम लिखते हैं: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

फलन z (या फलन f) का x के अनुसार द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज लिख सकते हैं:

f_x अथवा $\frac{\partial f_x}{\partial x}$ अथवा $\frac{\partial f_x}{\partial x}$ अथवा $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

इसी प्रकार, हम z का y के अनुसार द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज भी आंकलित कर सकते हैं। इससे हमें मिलता है : $f_{yy} \equiv \frac{\partial}{\partial y} f_y$ अथवा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

यह f_y की y में परिवर्तन के प्रति परिवर्तन दर दिखाता है, जबकि x का मान स्थिर रखा गया हो।

यह भी ध्यान रखें कि f_x y का फलन है, और f_y भी x का फलन है। अतः

$f_x = g(x, y)$ और $f_y = h(x, y)$

इसलिए हमें दो और द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज प्राप्त हो सकते हैं:

(1) $fxy = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

यहाँ पहले z का y के अनुसार अवकलन किया गया है और फिर उस अवकलज का x के अनुसार अवकलन किया है

(2) $fyx = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

यहाँ पहले z का x के अनुसार और फिर उस अवकलज का y के अनुसार अवकलन किया गया है।

यहाँ हम दो बातें कह सकते हैं:

1) f_{xy} को $\frac{\partial^z z}{\partial y \partial x}$ द्वारा तथा f_{xy} को $\frac{\partial^z z}{\partial y \partial x}$ द्वारा भी दर्शाया जा सकता है।

2) अवकलज का अनुक्रम दाहिने से बायीं ओर (←). (←). दिखाते हैं। उदाहरण के लिए, f_{xy} का अर्थ है कि पहले z का y के अनुसार अवकलन करें और फिर उस अवकलज को x के अनुसार अवकलित करें। इसी प्रकार f_{xy} का अर्थ होगा पहले z का x के अनुसार अवकलन होगा तथा फिर उस अवकलज का y के अनुसार अवकलन किया जाएगा। ये f_{xy} तथा f_{yx} त्रियक आंशिक अवकलज (cross-partial derivatives) कहे जाते हैं।

यंग का प्रमेय (Young's Theorem)

यदि किसी सतत् फलन के आंशिक अवकलज भी सतत् फलन हों तो $f_{xy} = f_{yx}$। यही यंग का प्रमेय है। हम इसे इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं:

त्रियक आंशिक अवकलज के क्रम का कोई महत्व नहीं है। इस बात से कोई अंतर नहीं पड़ता है कि हमने किसी फलन को पहले x और फिर y के अनुसार अवकलित किया है या कि पहले y और बाद में x के अनुसार। सांकेतिक रूप में

$$f_{xy} = f_{yx}$$

यह कथन द्वितीय कोटि के अवकलजों के विषय में है।

बोध प्रश्न 1

1) (क) बहुचर फलन (ख) आंशिक अवकलन की संकल्पनाओं को समझाइये।

....

....

....

....

....

2) दिये गये फलनों का आंशिक अवकलज ज्ञात करें :

(i) $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2$

(ii) $f(x, y) = -10xy^2$

....

....

....

....

....

....

3. निम्नलिखित फलन के सभी प्रथम कोटि एवं द्वितीय कोटि अवलकज ज्ञात करें:

$f(x, y) = 8x^3 - 4x^2y - 10y^2$

....

....

....

....

....

....

....

1.4 संपूर्ण अवकल तथा संपूर्ण अवकलज

आइए, एक बार पुनः फलन $z = f(x, y)$ पर विचार करें।

आंशिक अवकलज हमें z में वह सूक्ष्म सा परिवर्तन दिखाते हैं जो y को स्थिर रखकर x में थोड़े से परिवर्तन या फिर x को स्थिर रखते हुए y में सूक्ष्म से परिवर्तन के कारण होता है। आइए, अब इस बात पर विचार करें कि यदि x और y, दोनों में एक साथ छोटे–छोटे बदलाव आ जाएँ तो z पर क्या प्रभाव होगा। यहाँ हमें अवकलों का अध्ययन करना होगा।

1.4.1 संपूर्ण अवकल

हम केवल एक स्वतंत्र चर के फलन से इस संकल्पना की व्याख्या प्रारंभ कर रहे हैं। फलन $z = f(x)$ है और x में एक परिवर्तन Δx आने पर z में भी Δz के समान परिवर्तन हो जाता है। पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी. 102 में हमने पाया था कि dz/dx वस्तुतः x में छोटे से परिवर्तन के कारण z में आया परिवर्तन है। अतः x में Δx का बदलाव आने पर z में परिवर्तन होगा:

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x$$

dz द्वारा Δz तथा dx द्वारा Δx दर्शाने पर हम पाते हैं:

$$dz = \frac{dz}{dx} dz$$

समीकरण में बायीं ओर के पद dz को z का "अवकल" कहते हैं।

आइए, अब $z = f(x, y)$ पर विचार करें। यहाँ dz के संपूर्ण अवकल का मान होगा:

$$dz = f_x d_x + f_y d_y = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot d_x + \frac{\partial z}{\partial y} d_y \text{ लगभग}$$

आइए, इसकी कुछ व्याख्या करने का प्रयास करें। उपर्युक्त पद में x में परिवर्तन z में आया तात्कालिक परिवर्तन $\frac{\partial z}{\partial x}$ द्वारा दिखाया गया है। अतः z में x में आए परिवर्तन के कारण हुआ परिवर्तन होगा $\frac{\partial z}{\partial x} dx$

इसी प्रकार y में परिवर्तन के कारण z में आया परिवर्तन होगा $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ । अतः x तथा y, दोनों में छोटे–छोटे परिवर्तनों के कारण z में आया संपूर्ण परिवर्तन होगा:

$$dz = f_x d_x + f_y d_y = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot d_x + \frac{\partial z}{\partial y} d_y$$

इसी को z का संपूर्ण अवकल कहा जाता है।

यहाँ dz पद फलन $z = f(x, y)$ में हुए परिवर्तन को दर्शाता है जबकि x तथा y में अति सूक्ष्म परिवर्तन हुए हों। उदाहरण के लिए:

यदि $z = x^3 + y^3$ तो संपूर्ण अवकल होगा

$$dz = f_x d_x + f_y d_y = 3x^2 d_x + 3y^2 d_y$$

हम व्यापक बहुचर फलन (general multivariate function) पर विचार करें तो पाएँगे कि यदि फलन

$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ तो

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n \text{, अथवा}$$

$dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ (यहाँ पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी. 102 में वर्णित योग के नियम और अभिलक्षण प्रयोग किए गए हैं)

आइए, अब अवकलों विषयक कुछ नियमों को जान लें।

अवकलों विषयक नियम

आपको अवकलों के विषय में निम्नलिखित नियम उपयोगी सिद्ध होंगे। मान लीजिए कि z = g(x, y) और w = f(x, y) द्वारा x तथा y चरों के दो फलन दर्शाए जा रहे हैं

और k एक स्थिरांक है।

1. $dk = 0$ (स्थिर फलन नियम)

2. $d(w \pm z) = dw \pm dz$ (योग अंतर नियम)

$$= (f_x dx + f_y dy) \pm (g_x dx + g_y dy)$$

3. $d(wz) = w.dz + z\,dw$

$$w(g_x dx + g_y dy) + z(f_x dx + f_y dy)$$ (गुणन नियम)

4. $d\left(\frac{w}{z}\right) = \frac{z.dw - wdz}{z^2}$

$$= \frac{z(f_x dx + f_y dy) - w(g_x dx + g_y dy)}{z^2}$$ (अनुपात नियम)

5. $d(kz^n) = knz^{n-1}dz$ (घातांकीय फलन नियम)

6. श्रृंखला नियम

u = u(x) तब

$$dz = d(z(u)) = \frac{d}{du}(z)du$$

यहाँ du द्वारा u में कोई आया को परिवर्तन नहीं बल्कि u का अवकल दर्शाया गया है। हमें दिया गया है:

$$du = d(u(x)) = \frac{d}{dx}(u)dx$$ । अतः

$$dz = \left[\frac{d}{du}(z)\right]\left[\frac{d}{dx}(u)dx\right]$$

उदाहरण: यदि $z = u^n$, जहाँ $u = f(x, y)$, तो

$$dz = \frac{d}{dx}(u^n) \cdot du = nu^{n-1} \cdot du$$

आइए, अब संपूर्ण अवकलों (total differentials) पर कुछ प्रश्नों को हल करके देखें:

(1) अवकल du ज्ञात करें जब $u = 3x^3 + 2y^2 + y^3$

उत्तर: संपूर्ण अवकल du इस पदबंध द्वारा दिया जाएगा:

$$du = f_x d_x + f_y d_y = 9x^2 d_x + (uy + 3y^2) d_y$$
$$= 9x^2 d_x + y(u + 3y) d_y$$

(2) y के इन फलनों के संपूर्ण अवकल ज्ञात करें:

क) $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ख) $w = e^{x^2 - y^2}$ ग) $u = \log\left(x^2 + y^2\right)$

उत्तर: क) $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, अनुपात नियम द्वारा

$$= \frac{z\left(f_x dx + f_y dy\right) - w\left(g_x dx + g_y dy\right)}{z^2}$$

$$\frac{\left(x^2 + y^2\right)d\left(x^2 - y^2\right) - \left(x^2 - y^2\right)d\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(2xdx - 2ydy\right) - \left(x^2 - y^2\right)\left(2xdx + 2ydy\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$= \frac{4xy^2 dx - 4x^2 ydy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

ख) $w = e^{x^2 - y^2}$

रखें $u = x^2 - y^2$ ताकि $w = e^u$ और $dw = e^u\, du$ (1)

तथा $du = d\left(x^2\right) - d\left(y^2\right) = 2xdx - 2ydy$ (2)

हमें (1) और (2) से प्राप्त होता है:

$$dw = e^{x^2 - y^2} \cdot \left(2xdx = 2ydy\right) = 2xe^{x^2 - y^2} dx - 2ye^{x^2 - y^2} dy$$

ग) $u = \log\left(x^2 + y^2\right)$

आइए, यहाँ इस सूत्र का प्रयोग करके देखें:

$$du = f_x dx + f_y dy = \frac{1 \times xx}{\left(x^2 + y^2\right)} dx + \frac{1 \times 2y}{\left(x^2 + y^2\right)} dy$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)} dy$$

$$= \frac{2xdx + 2ydy}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{2\left(xdu + ydy\right)}{\left(x^2 + y^2\right)}$$

1.4.2 संपूर्ण अवकलज

एक बार पूर्व परिचित द्विचर फलन पर विचार करें:

$$z = f(x, y)$$

यहाँ हमारी मान्यता है कि x और y स्वतंत्र चर हैं और ये परस्पर भी स्वतंत्र हैं।

एक ऐसी परिस्थिति पर विचार करें जहाँ ये x और y किन्हीं अन्य फलनों पर निर्भर चर हों। उदाहरण के लिए:

$x = g(t), y = h(t)$, जहाँ t एक स्वतंत्र चर हो। अतः z यहाँ x, y का फलन है जबकि x और y दोनों t के फलन हैं। हम यह जानना चाहते हैं कि z की t के अनुसार अवकलज क्या होगा। अर्थात् dz/dt क्या होगा?

हम जानते हैं कि $\frac{\partial z}{\partial x}$ द्वारा y स्थिर रहने पर x में हुए संक्षिप्त से परिवर्तन के कारण z में हुआ परिवर्तन दिखाया जाता है। अतः $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}$ t में आए छोटे से परिवर्तन के कारण z में आया वह परिवर्तन है जो x के माध्यम से संचरित हुआ है। इसी प्रकार $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}$ y के परिणाम में सूक्ष्म से परिवर्तन का z पर वह प्रभाव है जो y के माध्यम से ही संचरित हुआ है।

अतः t के मान में सूक्ष्म से परिवर्तन के फलस्वरूप z के मान में आया परिवर्तन होगा:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dx}{dt}$$

इसे हमें इस तरह भी दिखा सकते हैं:

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dx}{dt}$$

यह $\frac{dz}{dt}$ ही z का t के अनुरूप संपूर्ण अवकलज कहलाता है।

यदि हमें दिया गया हो z = (x, y, u, …) जहाँ x = x(t), y = y(t), u = u(t), …

तो फिर $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \ldots.$

आइए फिर से फलन $z = f(x, y)$ की ओर चलें:

अब x और y को किसी अन्य चर t के फलन के स्थान पर हम यह मान लेते हैं कि x अब y का फलन है। अतः हम पाते हैं कि:

$$z = f(x, y)$$

जहाँ $x = g(y)$

इन दोनों फलनों को हम संयुक्त फलन के समाहित कर सकते हैं:

$$z = f[g(y), y]$$

उपर्युक्त पद में हम z के x तथा y से सम्बन्ध को इस प्रकार समझ सकते हैं: चर y के z पर दो प्रकार से प्रभाव पड़ते हैं। यह प्रत्यक्षतः फलन f के माध्यम से z को प्रभावित करता है और परोक्ष रूप से फलन g के माध्यम से। अतः चर y ही z में हो रहे परिवर्तनों का अंतिम स्रोत है। y के z पर अप्रत्यक्ष प्रभाव को हम $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy}$ द्वारा दिखा सकते हैं जबकि प्रत्यक्ष प्रभाव f_y मात्र है।

इसीलिए y के अनुरूप z के संपूर्ण अवकलज को हम प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष, दोनों प्रभावों को एक साथ लाकर ही आंकलित कर सकते हैं:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy} + f_y$$

इसे सामान्य रूप से संपूर्ण अवकलज की गणना विधि से भी पाया जा सकता है:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dy}$$

इस प्रकार $\frac{dz}{dx} = \frac{dzdy}{dydx}$

<u>बोध प्रश्न 2</u>

टिप्पणीः (क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए स्थान का प्रयोग कीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1) क) समझाइए कि संपूर्ण अवकल से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

ख) बताइए कि आंशिक अवकलजों का संपूर्ण अवकलज से क्या सम्बन्ध होता है?

....

....

....

....

2) इन फलनों के संपूर्ण अवकल ज्ञात कीजिए।

क) $u = 3x^3 - 2y^2$ ख) $u = \dfrac{x}{x+y}$ ग) $x = AL^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$

....

....

....

....

....

1.5 बहुचर फलनों के लिए शृंखला नियम

आपको एक स्वतंत्र चर वाले फलन के शृंखला नियम का ज्ञान तो पहले से ही है। यह "फलन के फलन" के नियम पर आधारित है। मान लीजिए कि z यहाँ y का फलन है तथा y स्वयं ही x का फलन है। हम अब इस प्रकार भी लिख सकते हैं $z = f(y(x))z = f(y(x))$ । हम जानते हैं कि इस दशा में z का x के अनुरूप अवकलज ज्ञात करने के लिए हमें पहले z का y के अनुसार अवकलन करेंगे तथा उसे y के x के अनुसार अवकलज से गुणा कर देंगे। अर्थात् हम इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dzdy}{dydx}$$

ऐसी ही प्रक्रिया आंशिक अवकलजों के संदर्भ में अपनाई जाती है। आंशिक अवकलजों के लिए भी एक शृंखला नियम उपलब्ध है। बह हमें ध्यानपूर्वक आंशिक अवकलज के नियमों का पालन करना होगा। इसी बात को कुछ उदाहरणों के माध्यम से स्पष्ट कर रहे हैं। एक बात का ओर ध्यान रहें:

बस संकेतन की बातः पहले के विपरीत, हम z द्वारा फलन में एक तर्क निरूपित करते हैं। इससे पहले, हमने z द्वारा आश्रित चर को निरूपित किया। कृपया भ्रमित न हों।

उदाहरण 1

मान लें कि हमें $u = f(x,y,z)$ u $= f(x,y,z)$ दिया गया है जहाँ x, y, z स्वयं किसी चर t के फलन हैं। तो हम $\frac{du}{dt}$ $\frac{du}{dt}$ का आंकलन इस प्रकार कर सकते हैं:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u\,\partial x}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial u\,\partial y}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial u\,\partial z}{\partial z\,\partial t}$$

ध्यान दीजिए कि यह तो पिछले भाग में विकसित संपूर्ण अवकलज ही है। यही तथ्य हमें इस बात को कहने का अवसर प्रदान कर देता है कि जब किसी फलन के निर्धारक चर स्वयं किसी अन्य किन्तु एक, चर के फलन हों तो हमें संपूर्ण अवकलज का प्रयोग करना चाहिए। उपर्युक्त उदाहरण में हम ऐसे मामले पर विचार करेंगे जहाँ वे निर्धारक चर स्वयं किसी अन्य किन्तु एक, चर के फलन हों तो हमें संपूर्ण अवकलज का प्रयोग करना चाहिए। उपर्युक्त उदाहरण में x, y तथा z तीनों ही चर

t के फलन हैं। अगले उदाहरण में हम ऐसे मामले पर विचार करेंगे जहाँ वे निर्धारक चर एक से अधिक स्वतंत्र चरों के फलन हों। ऐसी अवस्था में हम शृंखला नियम का प्रयोग करेंगे और संयुक्त फलन के आंशिक अवकलज प्रयोग में लाएँगे। जरा ध्यान से निम्न उदाहरणों को देखें, तभी ये बात स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 2

हमें $w = f(x,y,z)$ w $= f(x,y,z)$ दिया गया है जहाँ x, y तथा z तीनों ही r एवं s के फलन हैं। तो फिरः

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w \partial x}{\partial x \partial r} + \frac{\partial w \partial y}{\partial y \partial r} + \frac{\partial w \partial z}{\partial z \partial r}$$

और

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w \partial x}{\partial x \partial s} + \frac{\partial w \partial y}{\partial y \partial s} + \frac{\partial w \partial z}{\partial z \partial s}$$

अगला उदाहरण भी पिछले भाग की भांति संपूर्ण अवकलजों का प्रयोग करेगा।

उदाहरण 3

मान लीजिए $u = f(x,y,z)$ u $= f(x,y,z)$ और y तथा z स्वयं x पर निर्भर हैं – अर्थात्

$y = y(x)$, z $= z(x)$. तब y $= y(x)$, $z = z(x)$. तब तो फिर

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u \partial y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u \partial z}{\partial z \partial x}$$

उदाहरण 4

मान लीजिए कि $u = f(x,y,z)$ u $= f(x,y,z)$ और x निर्भर हैं t पर, y निर्भर हो x पर तथा z निर्भर हो y पर; अर्थात् $x = x(t)$, y $= y(x)$, $z = z(y)$. तब $x = x(t)$, $y = y(x)$, $z = z(y)$. Then तो फिर

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u \partial x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u \partial y \partial x}{\partial y \partial x \partial t} + \frac{\partial u \partial z \partial y \partial x}{\partial z \partial y \partial x \partial t}$$

ध्यान दीजिए कि इस उदाहरण में y पर z निर्भर करता है जबकि y स्वयं x पर निर्भर जोकि t पर निर्भर है। अतः z और y भी t पर निर्भर हो जाते हैं।

उदाहरण 5

मान लीजिए कि $w = f(x,y,z)$ w $= f(x,y,z)$ जहाँ $x = x(r,s)$, $y = (r)$ तथा $z = z(y)$ है। तो फिरः

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w \partial x}{\partial x \partial r} + \frac{\partial w \partial y}{\partial y \partial r} + \frac{\partial w \partial z \partial y}{\partial z \partial y \partial r}$$

और

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w \partial x}{\partial x \partial s}$$

अब तो आपको आंशिक अवकलज में शृंखला नियम की समझ होनी जानी चाहिए। इसी बात का ध्यान रखना होता है कि कौन सा चर किस चर पर निर्भर है, और इसी के अनुसार अवकलन करना होता है। चरों के बीच सम्बन्ध से ही यह निर्णय करना होगा कि शृंखला नियम का प्रयोग कैसे करें तथा संपूर्ण अवकलज कब करें।

आइए, अब एक विशेष उदाहरण पर ध्यान दें और जानें कि शृंखला नियम और संपूर्ण अवकलजों का (सार्थक परिणाम पाने के लिए) समन्वित प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 6

मान लीजिए कि $y = f(x_1, x_2)$ जहाँ

$$x_1 = g(w_1, w_2) \text{ और}$$

$$x_2 = h(w_1, w_2)$$

y के w_1 और w_2 के अनुसार आंशिक अवकलजों की गणना करते समय संयुक्त फलन नियम (शृंखला नियम) का प्रयोग करने की विधि हम आगे समझा रहे हैं। आइए, y के संपूर्ण अवकल से चर्चा प्रारंभ करें:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial w_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$$

क्योंकि x_1 और x_2 दोनों को w_1 और w_2 का फलन बताया गया है, हम अन्य संपूर्ण अवकलों का आंकलन भी कर सकते हैं:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial w_1} dw_1 + \frac{\partial x_1}{\partial w_2} dw_2 \text{ और}$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial w_1} dw_1 + \frac{\partial x_2}{\partial w_2} dw_2$$

यहाँ से y के संपूर्ण अवकल में dx_1 तथा dx_2 के मान प्रतिस्थापित कर dw_1 तथा dw_2 के पद एकत्रित किए जा सकते हैं:

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w_1} \right) dw_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w_2} \right) dw_2$$

1.6 अन्तर्निहित फलन तथा अन्तर्निहित फलन प्रमेय

आइए, अब उन फलनों पर विचार करें जिन्हें अन्तर्निहित फलन या "अस्पष्ट" फलन (implicit functions) का जाता है। आइए, एक उदाहरण पर विचार करें। मान लीजिए कि $z = f(x)$ इसका अधिक स्पष्ट स्वरूप है: $z = 9x^3$। यहाँ z को x का एक स्पष्ट फलन कह सकते हैं। किन्तु यदि हम फलन को इस प्रकार लिख दें: $f(z, x) = 0$ तो यह z को x से जोड़ने वाला एक अन्तर्निहित फलन बन जाएगा।

अतः हम उपर्युक्त स्पष्ट फलन को इस रूप में अन्तर्निहित फलन $z - 9x^3 = 0$ द्वारा दिखा सकते हैं।

हम एक व्यापक बहुचर फलन को स्पष्ट रूप से $z = f(x_1, x_2, ...x_n)$ दर्शाते हैं – इसका अन्तर्निहित स्वरूप होगा $f(z, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$। कई बार हमें $f(x_1, x_2, ...x_n) = 0$ स्वरूप के समीकरण मिल जाते हैं। यह वस्तुतः एक अन्तर्निहित फलन का निरूपण ही है उसे हम $x_1 = f(x_2, x_3, ...x_n)$ द्वारा दिखा सकते हैं।

एक स्पष्ट फलन को हम सदैव अन्तर्निहित रूप प्रदान करने के लिए $f(.)$ को समीकरण के बायीं ओर ले जा सकते हैं। किन्तु, एक अन्तर्निहित फलन को सदैव स्पष्ट फलन में परिवर्तित करना संभव नहीं होता। जहाँ ऐसा करना संभव होता है उस संदर्भ को अध्ययन हम इसी पाठ्यक्रम के खंड 3 में करेंगे (जहाँ हम अन्तर्निहित फलन प्रमेय (implicit-function theorem) की व्याख्या करने जा रहे हैं।)

उसके बजाय, अभी तो हम अन्तर्निहित फलनों के अवकलन पर ही ध्यान दे रहे हैं। इस संदर्भ में स्तर वक्रों (level curves) के विचार का स्मरण कीजिए। एक फलन $f(x_1, x_2) = k$ पर ध्यान दें। यह एक स्तर वक्र का ही समीकरण है। यह एक अन्तर्निहित फलन भी है। इस समीकरण को दो अज्ञात चरों में हल किया जा सकता है तथा एक अज्ञात को दूसरे अज्ञात में इस प्रकार लिख सकते हैं: $x_2 = x_2(x_1)$

इसे पूर्ववर्ती अन्तर्निहित फलन में प्रतिस्थापित किया जा सकता है:

$$f(x_1, x_2(x_1)) \equiv k$$

किसी भी स्तर वक्र का ढाल $\frac{dx_2}{dx_1}$ अवकलज होता है किन्तु अवधारणात्मक दृष्टि से यह तभी सत्य होगा जबकि हमने अन्तर्निहित फलन में x_2 को x_1 के फलन के रूप में परिभाषित किया हो। यहाँ हम ऐसा कर चुके हैं। हमारा फलन $x_2 = x_2(x_1)$ पूर्ण रूप से परिभाषित है। अतः हम $\frac{dx_2}{dx_1}$ का आंकलन सर्वसमिका $f(x_1, x_2(x_1)) \equiv k$ के अवकलन द्वारा कर सकते हैं, जहाँ x_1 शृंखला नियम का प्रयोग हमें प्रदान करेगा:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} \equiv \frac{\partial k}{\partial x_1} \equiv 0$$

अथवा $f_1 + f_2 \frac{dx_2}{dx_1} \equiv 0$

यदि हम यह मान लें कि $x_2 \neq 0$, तो

$$\frac{dx_2}{dx_1} \equiv \frac{-f_1}{f_2}$$

इसका अभिप्राय है कि स्तर वक्र का किसी भी बिन्दु पर ढाल उसके दोनों आंशिक अवकलजों के उसी बिन्दु पर मानों अनुपात के समान होगा। आइए, अब एक व्यापक बहुचर फलन पर विचार करें।

हमें किया गया अन्तर्निहित फलन $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ है। अतः फलन x_i में j वें निर्धारक का i वें निर्धारक के अनुसार आंशिक अवकलज होगा $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$ । इस पाने के लिए पहले हम संपूर्ण अवकल $f_1dx_1 + f_2dx_2 + ... + f_ndx_n = 0$ ज्ञात करते हैं। उसके बाद उसे dx_i द्वारा विभाजित कर देते हैं, अर्थात्

$$f_1\frac{dx_1}{dx_i} + f_2\frac{dx_2}{dx_i} + ... + f_j\frac{dx_j}{dx_i} + ... + f_i + ... + f_n\frac{dx_n}{dx_i} = 0$$

dx_i तथा dx_j के अतिरिक्त अन्य सभी अवकलों को शून्य मान लेने परः

$$f_j\frac{dx_j}{dx_i} + f_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{f_i}{f_j}$$

1.7 समघात तथा समस्थित फलन

आइए, दो चरों x और y के फलन *F* अर्थात् *F(x, y)* पर विचार करें। यह फलन r कोटि का समघात फलन होगा यदि इसके परिसर में सभी x और y के लिएः

$$F(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^r F(x, y).$$

हम इस परिभाषा को n-चरों के फलन तक परिवर्धित कर सकते हैं। मान लीजिए कि $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ है। तो फिर f एक r कोटि का समघात फलन होगा यदि

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \equiv \lambda^r f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ है।}$$

यदि $F(x, y)$ रैखिक समघात फलन (linearly homogeneous) (प्रथम कोटि समघात) फलन तभी हो पाएगा जबकि

$$F(x, y) = yf\left(\frac{x}{y}\right)$$

जहाँ $f\left(\frac{x}{y}\right) = F\left(\frac{x}{y}, 1\right)$

हम ऐसा किस प्रकार स्पष्ट कर सकते हैं? आइए, हम यदि (अर्थात् "पर्याप्त") अंश से प्रारंभ करेंः

दिया हैः

$F(x, y) = yf\left(\frac{x}{y}\right)$, हम पाते हैं

$$F = (\lambda x, \lambda y) = \lambda yf\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \lambda yf\left(\frac{x}{y}\right) = \lambda F(x, y)$$

अब हमें "केवल यदि" (आवश्यक अंश) दर्शाना शेष हैं:

F(x,y) एक रैखिक समघात फलन (प्रथम कोटि समघात) है। अतः

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, किसी भी λ हेतु

रखें $\lambda = \frac{1}{y}$ फिर हमें मिलता है:

$$F\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \frac{1}{y} F(x, y)$$

अतः $yF\left(\frac{x}{y}, 1\right) = F(x, y)$

किन्तु $F\left(\frac{x}{y}, 1\right) = f\left(\frac{x}{y}\right)$.

अतः $F(x, y) = yf\left(\frac{x}{y}\right)$

एक समघात फलन का अवकलन

समघात फलनों की एक बहुत बड़ी विशेषता उनके अवकलन से जुड़ी है। आइए, उस पर दृष्टिपात करें।

हमारे पास r कोटि का समघात फलन $f(x, y)$ है तो फिर:

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^r f(x, y)$$

इसका x के अनुसार अवकलन करने पर हम पाते हैं:

$\lambda f_x(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f_x(x, y)$, जहाँ $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

यदि दोनों ओर λ से विभाजन कर दें तो हमें मिलता है:

$$f_x(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{r-1} f_x(x, y)$$

यदि ध्यान से देखें तो हमें पता चलता है कि फलन f_x एक (r – 1) कोटि का समघात फलन है। यह बात फलन f_y पर भी लागू होती है जहाँ f_y उक्त फलन f का y के अनुसार आंशिक अवकलज है। वस्तुतः यह बात किसी भी बहुचर समघात फलन पर इसी रूप में लागू होगी।

इस परिणाम का अभिप्राय है कि यदि कोई फलन r कोटि का समघात फलन है तो उसका प्रत्येक प्रथम कोटि आंशिक अवकलज एक $r - 1$ कोटि का समघात फलन होगा।

यूलर का समीकरण (Euler's equation)

यह भी समघात फलनों की एक बहुत महत्वपूर्ण विशेषता ही है। मान लीजिए कि $z = f(x,y)$ एक r कोटि का समघात फलन है। इसके संदर्भ में निम्न परिणाम एक सर्वसमिका स्वरूप में मान्य होता है:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = rz$$

हम इसे अन्तर्निहित अवकलन और शृंखला नियम का प्रयोग कर सिद्ध कर सकते हैं।

मान लीजिए कि हमारा समघात फलन है:

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^r f(x,y) \quad \text{(क)}$$

आइए, इस फलन (क) के बायीं ओर के भाग का λ के अनुसार आंशिक अवकलज कीजिए। हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{\partial f(\lambda x, \lambda y)}{\partial \lambda x}\frac{\partial \lambda x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y)}{\partial \lambda y}\frac{\partial \lambda y}{\partial \lambda}$$

$$= \quad xf_{\lambda x} + yf_{\lambda y} \text{ (ख)}$$

आइए, अब (क) के दाहिने पक्ष का λ के अनुसार आंशिक अवकलज कीजिए। अब हमें प्राप्त होता है: $\frac{\partial \lambda^r}{\partial \lambda} f(x,y) + \lambda^r \frac{\partial f(x,y)}{\partial \lambda}$

$$= \begin{matrix} r\lambda^{r-1} f(x,y) + 0 \\ = r\lambda^{r-1} f(x,y) \end{matrix} \quad \text{(ग)}$$

हम जानते हैं कि एक समीकरण का बायाँ पक्ष दाहिने के समान होता है। अतः समीकरण (ख) = समीकरण (ग)। अतः हम पाते हैं:

$$xf_{\lambda x} + yf_{\lambda y} = r\lambda^{r-1} f(x,y)$$

किन्तु λ तो कोई भी अंक हो सकता है। मान लीजिए कि यह इकाई है इसी प्रतिस्थान से हमें प्राप्त होता है। यूलर का प्रमेय, अर्थात्

$$rf(x,y)\ rf(x,y) \text{ i.e. } x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = rz$$

इस संकल्पना को दो अधिक स्वतंत्र चरों के फलनों तक परिवर्धित किया जा सकता है।

समस्थिति फलन (Homothetic Functions)

समस्थिति फलन का विचार समझने के लिए पहले संयुक्त फलन अथवा "एक फलन के फलन" की संकल्पना को याद करें। मान लीजिए कि $y = f(x)$ तथा $x = g(w)$। फिर तो हम लिख सकते हैं: $y = f[g(w)] = h(w)$। हम इस संयुक्त फलन के विचार

को बहुचर फलनों तक विस्तृत कर सकते हैं। हमने वर्तमान इकाई में यह कार्य किया भी है, वस्तुतः अन्तर्निहित फलनों एवं शृंखला नियम के संदर्भों में यही कार्य तो किया गया था। इस संयुक्त फलन की संकल्पना का उपयोग करते हुए हम समस्थिति फलन की परिभाषा का प्रयास कर रहे हैं।

यदि f(x,y) एक समघात फलन हो तो कोई भी फलन g[f(x,y)] एक समस्थिति फलन होगा यदि g' घनात्मक हो। दूसरे शब्दों में किसी समघात फलन का धनात्मक एकदिश फलन एक समस्थिति फलन होता है।

<u>बोध प्रश्न 3</u>

1) दिया गया हो

(i) $Z = x^2 - 8xy - y^3$ जहाँ $x = 31$ तथा $y = 1 - 1$

(ii) Z = 7y + vt जहाँ $y = 2t^2$ तथा V= t + 1 तो कलज dz/dt ज्ञात करें।

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित अन्तर्निहित फलनों को लें। हर फलन के लिये dy/dz ज्ञात करें

(i) $F(x, y) = y - 3x^4 = 0$

(ii) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 19 = 0$

....

....

....

....

....

3) निर्धारित करें कि निम्नलिखित फलन समघात है या नहीं अगर है, तो किस कोटि के

(i) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

(ii) $f(x, y) = x^3 - xy = y^3$

(iii) $f(x, y, \infty) = \dfrac{xy^2}{\infty} + < x\infty$

1.8 सारांश

आपने अभी–अभी इस पाठ्यक्रम की पहली इकाई का अध्ययन किया है। यह बहुचर फलनों के गणित से सम्बन्धित थी। इकाई का प्रारंभ ऐसे फलनों की संकल्पना से

हुआ जहाँ निर्भर चर एक से अधिक स्वतंत्र चरों का फलन होता है। इन स्वतंत्र चरों को फलन के निर्धारक कहा जाता है। यहीं पर आपका परिचय स्तर वक्रों से कराया गया है जो रेखाचित्रीय दृष्टि से एक द्विआयामी तल पर तीसरे चर का प्रेक्षण करते हैं। इससे आगे इकाई में आंशिक अवकलजों की महत्वपूर्ण संकल्पना का परिचय दिया गया है जहाँ फलन का अन्य चरों को स्थिर रखते हुए एक चर के अनुसार अवकलन किया जाता है। द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों के संदर्भ में आपने यंग के प्रमेय का अध्ययन किया है। इससे आगे इकाई में संपूर्ण अवकलों एवं संपूर्ण अवकलजों के बारे में अध्ययन किया है। जहाँ हमारा लक्ष्य यह जानना हो कि सभी स्वतंत्र चरों में एक साथ परिवर्तन होने पर निर्भर चर पर क्या प्रभाव होगा तो हम संपूर्ण अवकलों एवं संपूर्ण अवकलजों का प्रयोग करते हैं।

इससे आगे इकाई में श्रृंखला नियम पर चर्चा की गई है। हमने यह भी देखा है कि आंशिक अवकलजों और संपूर्ण अवकलजों के संदर्भ में श्रृंखला नियम किस प्रकार एक चरीय अवकलन जैसा सा किन्तु उससे भिन्न भी होता है। फिर हमने अन्तर्निहित फलनों पर ध्यान केन्द्रित किया है। अन्तर्निहित फलनों के आंशिक अवकलजों पर भी चर्चा हुई है। यहीं आपने अन्तर्निहित फलन प्रमेय को समझा है। इसके बाद अन्तर्निहित फलनों के स्तर वक्रों से सम्बन्धों पर चर्चा की गई। यहीं पर यह भी समझाया गया है कि किस प्रकार एक स्वतंत्र चर का दूसरे के अनुसार अवकलज निर्भर चर के उक्त दोनों स्वतंत्र चरों के अनुसार अवकलजों के अनुपात में ऋणात्मक मान के समान होता है।

अंत में इकाई में समघात फलनों पर चर्चा की गई है। समघात फलनों की परिभाषा के बाद उनकी कुछ विशेषताएँ भी समझाई गई हैं। आपको यूलर के प्रमेय से भी परिचित कराया गया और अंत में समस्थिति फलनों की परिभाषा को समझाते हुए उनका समघात फलनों से सम्बन्ध भी बताया गया है।

1.9 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) (i) भाग 1.2 देखें (ii) भाग 1.3 देखें एवं उत्तर दें।

2) (i) $fx = 10x$; $fy = 12y$

(ii) $fx = -10y^2; fy = -20x$

3) भाग 1.3 देखें एवं उत्तर दें

बोध प्रश्न 2

1) भाग 1.4 देखें एवं उत्तर दें

2) भाग 1.4 देखें एवं उत्तर दें

बोध प्रश्न 3

1) भाग 1.5 देखें एवं उत्तर दें

2) भाग 1.6 देखें एवं उत्तर दें

3) भाग 1.7 देखें एवं उत्तर दें

इकाई 2 बहुचरीय कलन–II*

संरचना

2.0 उद्देश्य

2.1 प्रस्तावना

2.2 वक्र स्तरों एवं आंशिक अवकलजों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग

2.3 संपूर्ण अवकलों, संपूर्ण अवकलजों तथा श्रृंखला नियम के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग

2.4 अर्थशास्त्र में अन्तर्निहित फलनों के अनुप्रयोग

2.5 अर्थशास्त्र में समघात फलनों तथा यूलर प्रमेय के अनुप्रयोग

2.6 सारांश

2.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

2.0 उद्देश्य

पिछली इकाई में आपका परिचय बहुचरीय अवकलज गणित से करवाया गया। इस इकाई में हम अर्थशास्त्र में बहुचरीय अवकलज गणित के कुछ अनुप्रयोगों के बारे में अध्ययन करेंगे। इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित से भली भांति परिचित हो जाएँगे:

- स्तर वक्र (level curves) की संकल्पना से जो कि अर्थशास्त्र में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं;
- व्यष्टिगत (microeconomic) एवं समष्टिगत (macroeconomic) अर्थशास्त्र में आंशिक अवकलजों के अनुप्रयोगों से;
- अर्थशास्त्र में संपूर्ण अवकलों (total differentials) और संपूर्ण अवकलजों (total derivatives) के अनुप्रयोगों से;
- अर्थशास्त्रीय सिद्धान्तों में अन्तर्निहित फलनों (implicit functions) के अनुप्रयोगों से; और
- अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में समघात फलनों (homogeneous functions) एवं यूलर के प्रमेय के अनुप्रयोग से।

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, आपका परिचय बहुचरीय फलनों से तथा साथ ही बहुचरीय फलनों पर लागू होने वाले अवकल गणित से हुआ। वहाँ आपने आंशिक अवकलजों तथा संपूर्ण अवकलों और संपूर्ण अवकलजों के बारे में अध्ययन किया, अन्तर्निहित फलनों और उनके अवकलन के बारे में, समघात और समघातीय फलनों के बारे में तथा यूलर के प्रमेय के बारे में अध्ययन किया। इकाई 1 में हमने इन संकल्पनाओं के

* सौगतो सेन, इग्नू

36

गणित के बारे में पढ़ा। इस इकाई में अर्थशास्त्र के सिद्धान्तों के उन तत्वों की चर्चा करेंगे जिनमें ये संकल्पनाएँ लागू होती हैं। यद्यपि, जिन अनुप्रयोगों का वर्णन हम यहाँ करेंगे, अर्थशास्त्र में बहुचरीय अवकलज गणित के केवल यही अनुप्रयोग नहीं हैं, तथापि इन अनुप्रयोगों से आपको अर्थशास्त्र में बहुचरीय अवकलज गणित के महत्व का आभास हो जाएगा। इकाई 1 और इकाई 2 को एक साथ पढ़ने पर आपको इतनी समझ अवश्य बन जाएगी कि किसी विशिष्ट आर्थिक संकल्पना को समझने के लिए किस गणितीय संकल्पना का प्रयोग किया जाए। उदाहरण के लिए, अपने व्यष्टिगत अर्थशास्त्र के पाठ्यक्रम में आपने सीमांत उपयोगिता, सीमांत लागत, सीमांत राजस्व इत्यादि के महत्व के बारे में अध्ययन किया। इस इकाई में हम देखेंगे कि आंशिक अवकलज, यूलर के प्रमेय फलनों में सीमांत इकाइयों की संकल्पना को व्यक्त करने के लिए उपर्युक्त गणितीय उपकरण हैं। प्रत्येक उस संकल्पना के लिए, जिसे हमने पिछली इकाई में पढ़ा, हम अर्थशास्त्र से कुछ उपयुक्त उदाहरण इस इकाई में प्रस्तुत करेंगे।

यह इकाई निम्न रूप में व्यवस्थित की गई है। अगले भाग, अर्थात भाग 2.2 में, हम अर्थशास्त्र में आंशिक अवकलजों के अनुप्रयोगों पर तथा स्तर वक्रों पर चर्चा करेंगे। यद्यपि, हम मुख्यतः व्यष्टिगत अर्थशास्त्र से उदाहरण लेंगे, विशेष रूप से उपभोक्ता सिद्धान्त या फर्म के सिद्धान्तों से। तथापि हम कुछ समष्टिगत अर्थशास्त्र से भी उदाहरण लेंगे। इससे अगले भाग में अर्थात् भाग 2.3 में किस प्रकार संपूर्ण अवकलों, संपूर्ण अवकलजों तथा श्रृंखला नियम का प्रयोग अर्थशास्त्र में किया जाता है। इसके पश्चात् हम अपनी चर्चा का रुख अर्थशास्त्र में अन्तर्निहित फलनों के अनुप्रयोगों की ओर मोड़ेंगे। और अंततः अंतिम भाग में, अर्थात् भाग 2.5 में अर्थशास्त्र में पाए जाने वाले कुछ समघात फलनों पर चर्चा की जाएगी तथा यूलर के प्रमेय के एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग का वर्णन किया जाएगा। इस इकाई का अध्ययन करते हुए आप पाएँगे कि व्यष्टिगतता तथा समष्टिगत अर्थशास्त्र की अनेक संकल्पनाएँ जिन्हें आपने अध्ययन किया है, उन्हें यहाँ एक गणितीय दृष्टिकोण से प्रस्तुत किया गया है। आप व्यष्टिगत और समष्टिगत अर्थशास्त्र के सिद्धान्तों की संरचना, जोकि प्रकृति से एक गणितीय संरचना है, के प्रति गहरी अंतर्दृष्टि बना पाएँगे। आप यह भी देख सकेंगे कि वास्तव में गणित की संकल्पनाएँ, किस प्रकार अर्थशास्त्र के सिद्धान्तों को संसूचित करने में तथा समझने में सहायक सिद्ध होती हैं। अतः हम आपसे पुनः दृढ़ता से आग्रह करते हैं कि उस इकाई में दिए अर्थशास्त्र के प्रत्येक अनुप्रयोग का अध्ययन करते हुए आप इकाई 1 से उस अनुप्रयोग के संगत गणितीय संकल्पना को अवश्य दोहराएँ।

2.2 वक्र स्तरों एवं आंशिक अवकलजों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग

हमने इकाई में बहुचरीय फलनों तथा स्तर वक्रों के बारे में अध्ययन किया। हमने देखा कि बहुचरीय फलनों को $Z = f(X,Y)$ के रूप में लिखा जा सकता है।

यदि फलन में n स्वतंत्र चर हों तो इसे $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ के रूप में लिखा जा सकता है।

अर्थशास्त्र में ऐसे फलनों के अनुप्रयोगों को समझने के लिए हमें ऐसी स्थितियों के बारे में चिंतन करने की आवश्यकता है जिनमें एक चर, एक से अधिक चरों पर निर्भर होता है।

उदाहरण के लिए किसी वस्तु x की माँग अनेक कारकों पर निर्भर हो सकती है जैसे कि इस वसतु की अपनी कीमत , सम्बन्धित वस्तु की कीमत उपभोक्ता की मौद्रिक आय (M) उसकी रुचि, आदतों/स्वभावों, फैशन (अर्थात् उपभोक्ता की व्यक्तिगत वरीयताओं/अभिरुचियों) इत्यादि पर निर्भर करती है। अतः, हम किसी माँग फलन (demand function) से

$D_x = f\left(P_x, P_z, M, T \ldots\right)$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

इसी प्रकार, हम उत्पादन फलन को $Q = f(L, K)$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जहाँ Q का प्रयोग उत्पाद की मात्रा के लिए, L श्रम के लिए तथा K पूँजी के लिए किया गया है। ये कुछ अर्थशास्त्रीय स्थितियों के उदाहरण हैं जिनमें बहुचरीय फलनों का उपयोग किया गया।

अपनी चर्चा को सरल बनाने के लिए हम केवल द्विचरीय फलनों का विश्लेषण करते हैं। उदाहरण के लिए उत्पादन फलन $Q = f(L, K)$ हम यह मान लेते हैं कि उत्पादन के प्रक्रम में केवल श्रम (L) तथा पूँजी (K) ही आगत निवेश कारक हैं। इसी प्रकार, किसी उपयोगिता फलन (utility function), $u = f\left(x, y\right)$ में हम यह मान लेते हैं कि उपयोगिता फलन (u) केवल दो वस्तुओं x और y की उपभोग की गई मात्रा पर ही निर्भर करती है। आंशिक अवकलजों की सहायता से हम यह पहचान कर सकते हें कि दो दी गई वस्तुएँ परस्पर प्रतिस्पर्धी (competitive) हैं अथवा पूरक (complementary)।

उदाहरण के लिए, उत्पादन पर विचार करते हैं जहाँ किसी वस्तु का उत्पादन दो कारकों श्रम और पूँजी पर निर्भर करता है। मान लीजिए, हम श्रम को L से तथा पूँजी को K से व्यक्त करते हैं, तो हमारा उत्पादन फलन

$$Q = f(L, K)$$

अब मान लीजिए कि हमारे पास आगत दो न होकर अनेक हैं। मान लीजिए कि आगतों की संख्या n है। मान लीजिए हम n आगतों के संग्रह को एक n-युग्म $\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ से व्यक्त करते हैं।

इस स्थिति में उत्पादन फलन के

$Q = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ के रूप में लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार एक उपयोगिता फलन जिसमें U एक उपभोक्ता द्वारा दो वस्तुओं X और Y के उपभोग द्वारा प्राप्त उपयोगिता को दर्शाता है। निम्न रूप में लिखा जा सकता हैः

$$U = f\left(X, Y\right)$$

पुनः यदि हमारे पास n वस्तुएँ $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ हैं और इन वस्तुओं की उपभोग की गई मात्राएँ

$\left(y_1, y_2, \ldots y_n\right)$ से व्यक्त की जाएँ तो उपयोगिता फलन को

$U = f\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ द्वारा व्यक्त किया जाएगा।

अंत में हम एक उदाहरण समष्टिगत अर्थशास्त्र से लेते हैं। मान लीजिए, मुद्रा की

माँग M^d, ब्याज दर r तथा आय Y का फलन है। इसे

$$M^d = g\,(r;\ Y)$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अब तक आप अच्छी तरह से समझ ही चुके होंगे कि इन सभी फलनों में एक निर्भर चर एक से अधिक स्वतंत्र चरों पर निर्भर करता है। इस इकाई में इस बात का अध्ययन करेंगे कि स्वतंत्र चरों में होने वाले परिवर्तन किस प्रकार निर्भर चर में परिवर्तन लाते हैं। कभी–कभी हम केवल एक स्वतंत्र चर में होने वाले परिवर्तन के सापेक्ष निर्भर चर में होने वाले परिवर्तन पर विचार करेंगे जबकि अन्य सभी स्वतंत्र चरों को अचर मान लिया गया हो।

अब हम अपनी चर्चा का रुख अर्थशास्त्र में पाए जाने वाले स्तर वक्र की ओर मोड़ते हैं। आप इकाई 1 के अनुभाग 1.2.2 में की गई चर्चा को ध्यान में लाएँ। इस भाग में की गई चर्चा से आप जानते हैं कि एक स्तर वक्र एक ऐसा वक्र है जिसमें निर्भर चर किसी विशिष्ट स्तर पर स्थिर रहता है। यदि हमें एक फलन $Z = f(X,Y)$ दिया है, तो हम यह कल्पना कर सकते हैं कि त्रिविमीय निर्देशांक तल (three-dimensional space) में इस फल के आलेख को $x\,y$ – तल के समानांतर विभिन्न क्षैतिज तल प्रतिच्छेदित करते हैं। इन तलों और फलन के आलेख के प्रतिच्छेदन को हम $x\,y$ – तल पर प्रक्षेपित कर सकते हैं। यदि तल $z = k$ और फलन के आलेख के प्रतिच्छेन के $x\,y$ – तल पर प्रक्षेपण से प्राप्त वक्र को फलन f का ऊँचाई k का स्तर वक्र या परिरेखा (contour or level) कहते हैं। यह परिरेखा या स्तर वक्र उन बिन्दुओं का संग्रह है जो समीकरण $f(x,y) = k$ को संतुष्ट करते हैं।

अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग को समझने के लिए, सरल उत्पादन फलन $Q = f(L,K)$ पर विचार कीजिए जिसका हमने अभी उल्लेख किया था।

यदि हम इसे एक आलेख के रूप में चित्रित करना चाहें, तो हम L और K को x-y तल में लेंगे और उत्पाद (output) Q को ऊर्ध्वाधर अक्ष (vertically) अर्थात् z –अक्ष पर लेंगे। इस प्रकार उत्पादन फलन का आलेख एक पर्वत या एक गुबंद के आकार का होगा। स्तर वक्र पर विचार करने के लिए मान लीजिए कि उत्पादन फलन Q का मान किसी स्तर k पर स्थिर है। अतः, उत्पादन फलन f (L, K) = k होगा जहाँ k एक अचर (*constant*) है। उत्पादन फलन f (L, K) = k का आलेख उस पर्वत या गुबंद की ऊँचाई पर एक "स्लाईस" (slice) होगी। दूसरे शब्दों में इसकी व्याख्या इस प्रकार भी की जा सकती है, ऊपर दिए गए उत्पादन फलन का एक स्तर वक्र उन सभी बिन्दुओं का बिन्दुपथ है जो श्रम और पूँजी के उन सभी संयोजनों को दर्शाता है जिनके लिए उत्पादन k के बराबर होगा। श्रम और पूँजी के संयोजन जो एक विशिष्ट उत्पादन का स्तर देते हैं, एक ही स्तर वक्र पर स्थित होंगे। व्यष्टिगत अर्थशास्त्र के सिद्धान्तों का अध्ययन करते हुए आपका स्तर वक्र से परिचय समोत्पाद वक्र (isoquant) के रूप में हुआ होगा। अतः, एक उत्पादन फलन (दो कारको वाले) प्रत्येक समोत्पाद वक्र एक अलग स्तर वक्र है।

इसी प्रकार सामान्य उपयोगिता फलन $U = f(X,Y)$ लीजिए।

यदि उपयोगिता का स्तर एक दिए हुए स्तर, मान लीजिए $\overline{U}$ पर स्थिर हो, तो स्तर वक्र, X और Y के ऐसे सभी संयोजनों का बिन्दु पथ होगा जो उपयोगिता का एक ही

स्तर $\overline{U}$ देते हैं। अर्थशास्त्र में उपभोक्ता सिद्धान्तों के संदर्भ में स्तर वक्रों से आपका परिचय उदासीनता वक्र (indifference curves) के रूप में आया होगा। अतः एक उपयोगिता फलन (दो वस्तुओं वाले) के लिए, प्रत्येक उदासीनता वक्र एक अलग स्तर वक्र है, जो उपयोगिता का एक अलग स्तर दर्शाता है।

आइए, अब हम अर्थशास्त्र में आंशिक अवकलजों के अनुप्रयोगों की चर्चा करें। इकाई 1 के भाग 1.3 में आंशिक अवकलजों पर की गई चर्चा का स्मरण करें। अब हम अर्थशास्त्र में पाए जाने वाले कुछ फलन लेते हैं और देखते हैं कि उन पर आंशिक अवकलजों का प्रयोग कैसे किया जाता है।

यदि हम ऊपर किए उत्पादन फलन का लें और यह देखने का प्रयास करें कि यदि हम आगत पूँजी को अचर मानते हुए आगत श्रम (labour input) में एक इकाई की वृद्धि करें तो हमें श्रम का सीमांत उत्पाद प्राप्त होगा। अतः यदि हमें उत्पादन $Q = f(L, K)$ दिया गया है तो हम श्रम का सीमांत उत्पाद (marginal product of labour) $\frac{\partial Q}{\partial L}$ होगा।

इसी प्रकार हम $\frac{\partial Q}{\partial K}$ की भी व्याख्या कर सकते हैं।

अब उपयोगिता फलन $U = f(X, Y)$ पर विचार करें।

यहाँ यदि Y को अचर मानते हुए, X में एक इकाई की वृद्धि की जाती है, तो उपयोगिता में परिवर्तन जोकि X की सीमांत उपयोगिता को दर्शाएगा जोकि $\frac{\partial U}{\partial X}$ के बराबर होगी।

इसी प्रकार, Y की सीमांत उपयोग $\frac{\partial U}{\partial Y}$ से प्राप्त की जा सकती है।

आइए, हम व्यष्टिगत अर्थशास्त्र के आधारभूत सिद्धान्तों से कुछ सरल उदाहरणों पर विचार करें।

मान लीजिए, $x_1 = -8p_1 + 3p_2 + 11$ तथा $x_2 = 2p_1 - 3p_2 + 17$ दो वस्तुओं X_1 और X_2 के दिए गए माँग फलन हैं। इन वस्तुओं की कीमतों में परिवर्तन के फलस्वरूप माँग पर होने वाला प्रभाव ज्ञात कीजिए।

वैकल्पिक रूप से, इस उदाहरण में हम आंशिक सीमांत माँग (Partial Marginal Demands – PMD) ज्ञात करना चाहते हैं। इसके लिए चाहे संभावनाएँ हैं:

1) X_1 की आंशिक सीमांत माँग जब X_1 की कीमत परिवर्तित होती है तथा अन्य चर स्थिर रहते हैं $= \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -8$

2) X_1 की आंशिक सीमांत माँग जब X_2 की कीमत परिवर्तित होती है तथा अन्य चर स्थिर रहते हैं $= \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 3$

3) X_2 की आंशिक सीमांत माँग जब X_2 की कीमत परिवर्तित होती है तथा अन्य चर स्थिर रहते हैं $\Re\frac{\partial x_2}{\partial p_2} \quad 3$

4) X_2 की आंशिक सीमांत माँग जब X_1 की कीमत परिवर्तित होती है तथा अन्य चर स्थिर रहते हैं $= \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 2$

व्याख्याः

1) $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -8$ यह दर्शाता है कि जब X_2 को स्थिर रखा जाए तो X_1 की कीमत में एक इकाई वृद्धि से X_1 की माँग 8 इकाई से कम हो जाती है।

2) $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 3$ यह दर्शाता है कि जब X_1 को स्थिर रखा जाए तो X_2 की कीमत में एक इकाई वृद्धि से X_1 की माँग 3 इकाई से अधिक हो जाती है।

3) $\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = -3$ यह दर्शाता है कि जब X_1 को स्थिर रखा जाए तो X_2 की कीमत में एक इकाई वृद्धि से X_2 की माँग 3 इकाई से कम हो जाती है।

4) $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 2$ यह दर्शाता है कि जब X_1 को स्थिर रखा जाए तो X_1 की कीमत में एक इकाई वृद्धि से X_1 की माँग 2 इकाई से अधिक हो जाती है।

[ध्यान दें कि X_1 की कीमत p_1 तथा X_2 की कीमत p_2 है और X_1 की माँग x_1 तथा X_2 की माँग x_2 है।]

दो वस्तुएँ x और y पूरक कहलाती हैं जब, अन्य सभी कारकों को स्थिर रखते हुए, एक वस्तु (जैसे कि पेट्रोल) की कीमत में वृद्धि के फलस्वरूप दूसरी वस्तु (जैसे कि कार) की माँग कम हो जाए। इस स्थिति में दोनों वक्र अर्थशास्त्र ऋणात्मक होने चाहिए, अर्थात्

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} < 0; \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$$

दूसरी ओर, दो वस्तुएँ X और Y प्रतिस्पर्धी (या वैकल्पिक) वस्तुएँ कहलाती हैं। यदि शेष सभी कारकों के स्थिर रहते, एक वस्तु (जैसे कि कॉफी) की कीमत में वृद्धि होने से दूसरी वस्तु (जैसे कि चाय) की माँग में वृद्धि हो जाए। इस स्थिति में दोनों वज्र आंशिक अवकलज धनात्मक होने चाहिए, अर्थात्

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} > 0; \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$$

उदाहरणः

दो वस्तुओं x_1 और x_2 के माँग फलन $x_1 = \frac{10}{p_1^2 p_2}$; $x_2 = \frac{150}{p_1 p_2^2}$ हैं जहाँ p_1 और p_2 क्रमशः वस्तुओं की कीमतें तथा x_1 और x_2 उनकी माँग हैं। ज्ञात कीजिए कि वस्तुएँ पूरक हैं अथवा प्रतिस्पर्धी?

पहले माँग फलन से हम प्राप्त करते हैं : $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{10}{p_1^2} \cdot \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{1}{p_2}\right) = \frac{-10}{p_1^2 p_2^2} < 0$

दूसरे माँग फलन से हम प्राप्त करते हैं : $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{150}{p_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{1}{p_1}\right) = \frac{-15}{p_1^2 p_2^2} < 0$

क्योंकि दोनों $\frac{\partial x_1}{\partial p_2}$ तथा $\frac{\partial x_2}{\partial p_1}$ ऋणात्मक हैं अतः वस्तुएँ पूरक हैं।

उदाहरण

वस्तुओं x_1 और x_2 की प्रकृति ज्ञात कीजिए जबकि उनके माँग फलन

$x_1 = p_1^{-0.4} e^{0.2 p_2}$ और $x_2 = p_2^{-0.6} e^{0.5 p_1}$

हैं, जहाँ p_1 और p_2 क्रमशः X_1 और X_2 की कीमतें तथा x_1 और x_2 उनकी माँग को निरूपित करते हैं।

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = p_1^{-0.4} \cdot e^{0.2 p_2} \times 0.2 = 0.2 x_1 > 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = p_2^{-0.6} \cdot e^{0.5 p_1} \times 0.5 = 0.5 p_2^{-0.6} e^{0.5 p_1} = .5 x_2 > 0$$

क्योंकि दोनों आंशिक अवकलज धनात्मक हैं, अतः वस्तुएँ x_1 और x_2 पूरक हैं।

आंशिक लोच में अनुप्रयोग (Application to Partial Elasticities – PE)

माँग की लोच के सूत्र को ध्यान में रखते हुए हम माँग फलनों $x_1 = f_1(p_1, p_2)$ और $x_2 = f_2(p_1, p_2)$ की चार प्रकार की आंशिक लोच ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ x_1 और x_2 वस्तुओं X_1 और X_2 की माँग और p_1 तथा p_2 उनकी कीमतों को निरूपित करते हैं। ये लोच इस प्रकार हैं:

क) x_1 की p_1 के सापेक्ष माँग की लोच = $e_{11} * \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \times \frac{p_1}{x_1}$

ख) x_1 की p_2 के सापेक्ष माँग की लोच = $e_{12} \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \times \frac{p_2}{x_1}$

ग) x_2 की p_2 के सापेक्ष माँग की लोच = $e_{22} \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \times \frac{p_2}{x_2}$

घ) x_2 की p_1 के सापेक्ष माँग की लोच $= e_{21} \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \times \frac{p_1}{x_2}$

टिप्पणीः e_{11} और e_{22} दोनों माँग की प्रत्यक्ष आंशिक लोच कहलाती हैं तथा e_{12} और e_{21} दोनों माँग की अप्रत्यक्ष आंशिक लोच कहलाती हैं।

आइए, कुछ उदाहरणों द्वारा इसे स्पष्ट कीजिए।

उदाहरण 1. मान लीजिए हमें माँग फलन $x_1 = p_1^{-1.5} p_2^{.4}$ तथा $x_2 = p_1^{.6} p_2^{-.7}$ दिए हैं। प्रत्यक्ष आंशिक लोच के साथ अप्रत्यक्ष आंशिक लोच दोनों प्रकार की माँग की लोच ज्ञात कीजिए। (x_1 और x_2 माँग हैं p_1, p_2 कीमत हैं क्रमशः दो वस्तुओं X_1 और X_2 की)

समाधानः क) प्रत्यक्ष आंशिक लोच

$$e_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \times \frac{p_1}{x_1} = -1.5 p_1^{-2.5} p_2^{.4} \times \frac{p_1}{p_1^{-1.5} p_2^{.4}} = \frac{-1.5 p^{-1.5} p_2^{.4}}{p^{-1.5} \cdot p_2^{.4}} = -1.5$$

$$e_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \times \frac{p_2}{x_2} = -.7 p_1^{.6} \cdot p_2^{-1.7} \times \frac{p_2}{p_1^{.6} p_2^{0.7}} = \frac{-.7 p_1^{.6} \times p_2^{.7}}{p_1^{.6} \times p_2^{.7}} = -.7$$

ख) अप्रत्यक्ष (Cross) आंशिक लोच

$$e_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \times \frac{p_2}{x_1} = \frac{.4 \times p_1^{-1.5} \times p_2^{-.6} \times p_2}{p_1^{-1.5} p_2^{.4}} = \frac{.4 p_1^{-1.5} \times p_2^{.4}}{p_1^{-1.5} p_2^{.4}} = .4$$

उदाहरण 2. एक वस्तु x की माँग, मौद्रिक आय (M) और कीमत p_x के फलन $x = .9M^{1.1} p^{-0.7}$ द्वारा व्यक्त की गई है। माँग की कीमत लोच तथा आय लोच ज्ञात कीजिए।

समाधानः हमें माँग फलन $x = .9M^{1.1} p_x^{-0.7}$ दिया गया है।
$\left[x = f\left(M, p_x\right)\right]$

क) माँग की कीमत लोच $= \frac{\partial x}{\partial p_x} \times \frac{p_x}{x}$

$$= -.7 \times .9M^{1.1} \times p_x^{-1.7} \times \frac{p_x}{.9M^{1.1} p_x^{-0.7}} = -.7$$

ख) माँग की आय लोच $= \frac{\partial x}{\partial M} \cdot \frac{M}{x}$

$$.9M^{.1} \times 1.1 p_x^{-0.7} \times \frac{M}{.9M^{1.1} p_x^{-0.7}} = 1.1$$

उदाहरण 3. नीचे दिए गए माँग फलन के लिए, माँग की कीमत लोच तथा आय लोच ज्ञात कीजिए जबकि उपभोक्ता की आय (m) = 500 रुपये, वस्तु x की कीमत $(p_x) =$

10 रुपये और वस्तु z की कीमत (p_z)= 15 रुपये है तथा माँग फलन

$x = 800 - \frac{p_x^2}{5} + \frac{p_z}{60} + \frac{m}{10}$ है।

(क) माँग की वज्र/अप्रत्यक्ष लोच $= \frac{\partial x}{\partial p_z} \times \frac{p_z}{x}$ है

जहाँ $\frac{\partial x}{\partial p_z} = 0 - 0 + \frac{1}{60} + 0 = \frac{1}{60}$.

$x = 800 - \frac{10}{5} + \frac{15}{60} + \frac{500}{10}$ (m =500, $p_x = 10, p_z = 15$ के लिए)

$= 800 - 2 + \frac{1}{4} + 50 = 848.25$

अतः माँग की वज्र/अप्रत्यक्ष लोच $= \frac{1}{{}_4\cancel{60}} \times \frac{\cancel{15}^1}{848.25} = \frac{1}{3393}$

(ख) माँग की आय लोच $\frac{\partial x}{\partial m} \cdot \frac{m}{x}$, है जहाँ

$\frac{\partial x}{\partial m} = -0 + 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$, $m = 500$ और

$x = 848.25$ (जोकि पहले ही ज्ञात किया जा चुका है)

अतः $e_m = \frac{1}{1\cancel{0}} \times \frac{50\cancel{0}}{848.25} = \frac{50}{848.25} = .0589$

उपयोगिता फलन में अनुप्रयोग (Application to Utility Function)

हम जानते हैं कि किसी भी दिए गए फलन का पहला अवकलज उसका सीमांत फलन (marginal function) कहलाता है अर्थात् सीमांत फलन $\frac{d}{d_x}$ (संपूर्ण) यदि दिया हुआ फलन दो स्वतंत्र चरों का फलन है तो हमें दो सीमांत फलन प्राप्त होंगे जोकि आंशिक अवकलजों $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial j}$ इत्यादि ज्ञात करके प्राप्त किए जा सकते हैं। आइए हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1. मान लीजिए $u = (x+7)(y+2)$ एक उपयोगिता फलन है। दो वस्तुओं x और y के सापेक्ष सीमांत उपयोगिताएँ ज्ञात कीजिए यदि यह दिया है कि x की 5 और y की 3 इकाइयों का उपभोग किया गया है।

समाधान : हमें उपयोगिता फलन $u = (x+7)(y+2)$ दिया है।

क) x के सापेक्ष सीमांत उपयोगिता $x = \frac{\partial u}{\partial x} = y + 2$

$x = 5, y = 3, Mu_x = y + 2 = 3 + 2 = 5$

ख) x के सापेक्ष सीमांत उपयोगिता $y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 7$

$$x = 5, y = 3, Mu_y = x + 7 = 5 + 7 = 12$$

उदाहरण 2. यदि उपयोगिता फलन $u = ax + by + c\sqrt{xy}$ है, तो वस्तुओं x और y की सीमांत उपयोगिताओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

समाधान : हमें उपयोगिता फलन $u = ax + by + c(xy)^{1/2}$ दिया है।

$$Mu_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a + \frac{cy}{2\sqrt{xy}} = \frac{2a\sqrt{xy} + cy}{2\sqrt{xy}}$$

$$Mu_y = \frac{\partial u}{\partial y} = b + \frac{cx}{2\sqrt{xy}} = \frac{2b\sqrt{xy} + cx}{2\sqrt{xy}}$$

इसलिए सीमांत उपयोगिताओं का अनुपात होगाः

$$Mu_s = \frac{Mu_x}{Mu_y} = \frac{2a\sqrt{xy} + cx}{2\sqrt{xy}} \div \frac{2b\sqrt{xy} + cx}{2\sqrt{xy}}$$

$$= \frac{2a\sqrt{xy} + cy}{2b\sqrt{xy} + cx}$$

उत्पादन फलन में अनुप्रयोग (Application to Production Function)

एक उत्पादन फलन कुल उत्पाद (Total Product - TP) को निरूपित करता है। अतः, सीमांत उत्पाद, कुल उत्पाद के एक घटक के प्रथम आंशिक अवकलज के बराबर होगा, जबकि दूसरे घटक को अचर मान लिया जाएँ।

क) श्रम (L) का सीमांत उत्पाद (MPL) $= \dfrac{\partial}{\partial L}(TP)$

ख) पूँजी (K) का सीमांत उत्पाद (MPK) $= \dfrac{\partial}{\partial K}(TP)$

यूलर का प्रमेय (Euler Theorem) : यह प्रमेय प्रथम कोटि आंशिक अवकलजों के मध्य एक सम्बन्ध को दर्शाता है। यदि $P = f(L, K)$ को कारकों, श्रम (L) और पूँजी (K), का एक उत्पादन फलन है, तो यूलर की प्रमेय के अनुसारः

$$L \cdot \frac{\partial P}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial P}{\partial K} = P$$

$$L \cdot MP_L + K \cdot MP_K = P$$

इसे उत्पादन निर्वातन अथवा थकावट प्रमेय (product exhaustion theorem) अथवा जोड़ने की समस्या (adding-up problem) भी कहते हैं। जो यह बतलाता है किः

यदि उत्पादन के सभी कारकों/साधनों को उनके सीमांत उत्पाद के अनुसार भुगतान किया जाता है तो कुल उत्पाद पूर्णतया समाप्त अथवा निवार्तित हो जाता है।

अर्थात् $P-\left(L\cdot MP_L+KMP_K\right)=0$ होगाः

आइए, अब कुछ उदाहरण लीजिएः

उदाहरण 1.

हमें एक उत्पादन फलन $P=2\left(LK\right)^{1/2}$ दिया है जहाँ P कुल उत्पाद है तथा L श्रम तथा K पूँजी उत्पादन के कारक हैं:

1) दोनों/कारकों के लिए सीमांत उत्पाद ज्ञात कीजिए।

2) दर्शाइए कि यह उत्पादन फलन यूलर की प्रमेय को संतुष्ट करता है।

3) श्रम के लिए भुगतान क्या होना चाहिए यदि श्रम की 5 इकाइयों का उपयोग किया गया जबकि पूँजी को 20 पर स्थिर रखा जाए।

समाधानः हमें TP : $P=2.L^{1/2}K^{1/2}$ दिया गया है।

(i) $\therefore MP=\dfrac{\partial P}{\partial L}= \times - L^{\frac{1}{2}}\times K^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{K}{L}\right)^{-}$

तथा $MP_L=\dfrac{\partial P}{\partial K}=2\times\dfrac{1}{2}L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$

(ii) यूलर की प्रमेय के अनुसारः

$$L\cdot MP_L+KMP_K=P$$

होना चाहिए। इस उदाहरण में दिए उत्पादन फलन के लिए

अथवा $L\cdot\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}+K\cdot\left(\dfrac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}=L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}+K^{\frac{1}{2}}\cdot L^{\frac{1}{2}}=2L^{\frac{1}{2}}\cdot K^{\frac{1}{2}}=P$

प्राप्त होता है।

अतः, यह उत्पादन फलन यूलर की प्रमेय को संतुष्ट करता है।

(iii) जब $L=5$ तथा $K=20$ है, तो $MP_L=\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{20}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=(4)^{\frac{1}{2}}=2$ होगा।

उदाहरण 2.

एक उत्पादन फलन $Ax^{1/3}y^{1/3}$ दिया है, जहाँ x का प्रयोग श्रम तथा y का प्रयोग पूँजी के लिए किया गया है। निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(क) प्रत्येक कारक का व्यवहार क्या होगा?

(ख) पैमाने के प्रतिफल (returns to scale) की प्रकृति क्या है?

(ग) ज्ञात कीजिए कि कुल उत्पाद समाप्त होता है या नहीं?

समाधानः हमें उत्पादन फलन $PF : P = Ax^{1/3} \cdot y^{1/3}$ दिया गया है।

(क) उत्पादन के किसी भी साधन के सीमांत उत्पाद की प्रकृति/व्यवहार से हमारा आशय उस साधन के सीमांत उत्पाद के परिवर्तन के दर से अर्थात्

$$\frac{\partial}{\partial x}(MP_x) \text{ and } \frac{\partial}{\partial y}(MP_y)$$

(i) $MP_x = \dfrac{\partial P}{\partial x} = A \cdot \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3} \cdot Ax^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$

अतः परिवर्तन की दर $MP_x = \dfrac{\partial}{\partial x}(MP_x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{3} Ax^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}\right)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} \times A \times x^{\frac{-5}{3}} \times y^{\frac{1}{3}} = \frac{-2}{9} Ax^{\frac{-5}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} < 0$$

इससे हमें ज्ञात होता है कि यदि साधन x की मात्रा बढ़ती है, तो इसकी सीमांत दर MP घटती है, यदि y को स्थिर रखा जाए।

(ii) $MP_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} = A \cdot \dfrac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \cdot Ax^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}}$

अतः परिवर्तन की दर $MP_y = \dfrac{\partial}{\partial y}(MP_y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{3} Ax^{\frac{1}{3}} y^{\frac{-2}{3}}\right)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} \times A \times x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{9} Ax^{\frac{1}{3}} y^{\frac{-5}{3}} < 0$$

इससे हमें यह ज्ञात होता है कि यहाँ भी ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि उत्पादन के साधन y की मात्रा बढ़ती है, तो इसकी सीमांत दर MP घटती है, यदि x को स्थिर रखा जाए।

(ख) पैमाने के प्रतिफल की जाँच करने के लिए हम दोनों साधनों को एक निश्चित समान अनुपात, मान लीजिए λ** से बढ़ाते हैं। अतः हमें नया उत्पादन फलन $\hat{P} = \lambda^{\frac{2}{3}} \cdot Ax^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = \lambda^{\frac{2}{3}} \cdot P$ प्राप्त होता है।

क्योंकि λ की घात $\dfrac{2}{3} < 1$ है, इसलिए दोनों साधनों में 20% की वृद्धि से, कुल उत्पादन P में होने वाली आनुपातिक वृद्धि 20% से कम होगा। यह उत्पादन फलन पैमाने के घटते हुए प्रतिफल को दर्शाना है।

(ग) आइए, अब हम जाँच करें कि यह उत्पादन फलन यूलर के प्रमेय को संतुष्ट करता है या नहीं, अर्थात् सभी साधनों x और y का भुगतान उनके सीमांत उत्पाद के अनुसार होता है तो कुल उत्पाद समाप्त होता है अथवा नहीं या दूसरे शब्दों में :

---

* λ लैमडा के रूप में पढ़ा एक अनुपात है। यदि हम हर कारक को बढ़ाते हैं, कहते हैं, 20%, तब $\lambda = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5} = .2$ होगा।

$$TP - (\text{साधन}\, x \text{ का भुगतान} + \text{साधन}\, y \text{ का भुगतान}) = 0$$

अब साधन x का भुगतान $y = y \cdot MP_y = y \cdot \frac{1}{3} Ax^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{-2}{3}}$

तथा साधन y का भुगतान $y = y \cdot MP_y = y \cdot \frac{1}{3} Ax^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{-2}{3}}$

$$= \frac{1}{3} Ax^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} P.$$

अतः साधनों x और y का कुल भुगतान $= \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}P = \frac{2}{3}P < P$

अतः इस उदाहरण में कुल उत्पाद का निर्वातन नहीं होता। श्रृंखला नियम समाप्त नहीं होती है।

उदाहरण 3.

मान लीजिए कि $Q = AL^a K^b$ एक प्रदत्त उत्पादन फलन है। श्रम (L) और पूँजी (K) के सापेक्ष उत्पादन की लोच ज्ञात कीजिए।

समाधानः दिया गया प्रदत्त उत्पादन फलन: $Q = AL^a K^b$

i) उत्पादन की श्रम लोच $= e_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q}$

$$= A \cdot a L^{a-1} K^6 \times \frac{L}{AL^a \times K^b} = \frac{a \cdot A \cdot L^a K^b}{AL^a K^b} = a$$

(जोकि उत्पादन फलन में साधन L की घात के बराबर है।)

ii) उत्पादन की पूँजी लोच $= e_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q}$

$$= A \cdot bL^a K^{b-1} \times \frac{K}{AL^a K^b} = \frac{b \cdot A \cdot L^a K^b}{AL^a K^b} = b$$

(जोकि उत्पादन फलन में साधन K की घात के बराबर है।)

बोध प्रश्न 1

1) उपयोगिता फलन U= x^2y^2 को लें। सीमान्त उपयोगिता ज्ञात करें निर्धारित करें कि सीमांत फलन बढ़ रहे हैं या घट रहे हैं।

....

....

....

....

....

2) उत्पादन फलन $Q = 10\,L^{0.7}\,K^{0.3}$ दिया गया है। सीमांत उत्पादन ज्ञात करें। निर्धारित करें की सीमांत फलन बढ़ रहे है या घट रहे हैं।

....

....

....

....

....

2.3 संपूर्ण अवकलों, संपूर्ण अवकलजों तथा शृंखला नियम के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग

पिछले भाग में हमने अर्थशास्त्र में आंशिक अवकलजों पर विस्तारपूर्वक चर्चा की। इस भाग में हम अर्थशास्त्र में संपूर्ण अवकलों तथा संपूर्ण अवकलजों के अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे। इससे पहले कि हम अपनी चर्चा को आगे बढ़ाएँ, हम आपका ध्यान संकेतन सम्बन्धी (notational) दो बिन्दुओं की ओर आकर्षित करना चाहेंगे। प्रथम बिन्दु फलनों के संकेतन से सम्बन्धित है। मान लीजिए, हमें एक फलन $z = f(x, y)$ दिया है। हम इसे $z = z(x, y)$ के रूप में भी लिख सकते हैं। अतः, फलन $z = f(x, y)$ को f के स्थान पर z से भी व्यक्त किया जा सकता है। $z = z(x, y)$ यह दर्शाता है कि z एक चर जो x और y पर निर्भर है। हम कभी–कभी z और x तथा y के बीच के सम्बन्ध को बिना समानता चिन्ह (equality sign) '=' का प्रयोग किए भी कर सकते हैं अर्थात् यदि केवल $z(x, y)$ लिखा हो तो हम इसे एक फलन के रूप में मान सकते हैं जिसमें चर z चरों x और y पर निर्भर करता है। अतः हम मौद्रिक माँग (money demand) M^d को $M^d(r, Y)$ के रूप में लिख सकते हैं जहाँ r ब्याज की दर है तथा Y आय है। यह संकेतन दर्शाता है कि मौद्रिक माँग ब्याज की दर तथा आय का एक फलन है। इस इकाई में इस संकेतन का प्रयोग करेंगे।

दूसरे बिन्दु आंशिक अवकलजों के संकेतन से सम्बन्धित हैं। एक फलन $U = f(x, y)$ लीजिए। x के सापेक्ष U का आंशिक अवकलज को जिसे सामान्यतः $\frac{\partial U}{\partial x}$ से व्यक्त किया जाता है, U_x भी लिखा जा सकता है। इसी प्रकार y के सापेक्ष U के आंशिक अवकलज $\frac{\partial U}{\partial x}$ को U_y भी लिखा जा सकता है। इसी प्रकार एक फलन $f(x, y)$ के आंशिक अवकलजों को f_x तथा $f_{y.}$ से भी व्यक्त किया जा सकता है। इसी संदर्भ में, आप ध्यान दें कि कभी–कभी आंशिक अवकलजों के लिए एक और प्रकार का संकेतन भी किया जा सकता है। मान लीजिए कि हमें एक फलन $U = (x_1, x_2)$ दिया है इस स्थिति में हम x_1 और x_2 के सापेक्ष U के आंशिक अवकलजों को व्यक्त करने के लिए Ux_1 तथा Ux_2 अथवा U_1 तथा U_2 अथवा f_1 और f_2 कोई भी संकेतन का प्रयोग कर सकते हैं।

संकेतन सम्बन्धी इस टिप्पणी के पश्चात्, आइए अब हम अर्थशास्त्र में अवकलों तथा अवकलजों के कुछ अनुप्रयोगों पर चर्चा की। इस भाग में की जाने वाली चर्चा के लिए भी इकाई 1 में दी गई मूलभूत संकल्पनाओं की आवश्यकता पड़ेगी, अतः आप से अनुरोध है कि इनको एक बार पुनः स्मरण कर लें।

एक बचत फलन

$S = S(Y,i)$ पर विचार करें जिसमें S बचत को, Y आय को तथा I ब्याज की दर को दर्शाता है। हम यह मान लेते हैं कि यह फलन संतत (continuous) हैं और इसके आंशिक अवकलज भी अस्तित्व रखते हैं। इस बचत फलन के लिए, $\frac{\partial S}{\partial Y}$ बचत की सीमांत प्रवृत्ति (marginal propensity) होती है। यदि Y में dY के बराबर परिवर्तन हो तो इसके फलस्वरूप S में होंगे वाला परिवर्तन लगभग $\frac{\partial S}{\partial Y}dY$ के बराबर होगा। इसी प्रकार, यदि di, i में होने वाला परिवर्तन है, तो इसके परिणामस्वरूप S में होने वाला परिवर्तन $\frac{\partial S}{\partial i}di$ होगा। अतः, Y और i में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप S में होने वाला परिवर्तन $dS = \frac{\partial S}{\partial Y}dY + \frac{\partial S}{\partial i}di$ होगा। ऊपर दिए गए संकेतन के अनुसार हम इस समीकरण को $dS = S_Y dY + S_i di$ के रूप में लिख सकते हैं।

यहाँ dS बचत फलन का संपूर्ण अवकल है। किसी फलन के संपूर्ण अवकल ज्ञात करने के प्रक्रम को संपूर्ण अवकलज विधि कहते हैं।

ऊपर दिए बचत फलन में, यह संभव है कि परिवर्तन केवल आय में ही हो जबकि ब्याज दर स्थिर रहे । ऐसी स्थिति में di = 0 होगा तथा बचत फलन का संपूर्ण अवकल

$$dS = \frac{\partial S}{\partial Y}dY + 0 = \frac{\partial S}{\partial Y}dY$$

हो जाएगा।

दोनों पक्षों को dY से विभाजित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\left(\frac{dS}{dY}\right)_{i=\bar{i}} = \frac{\partial S}{\partial Y}$$

हम आंशिक अवकलज $\frac{\partial S}{\partial Y}$ की व्याख्या दो अवकलों dS तथा dY के अनुपात के रूप में कर सकते हैं यदि बचत फलन का दूसरा चर I स्थिर रहे। हमारे पास ऐसी स्थिति भी हो सकती है जिसमें Y में परिवर्तन न हो, केवल I में हो। इस स्थिति में हम प्राप्त करते हैं:

$$\left(\frac{dS}{di}\right)_{Y=\bar{Y}} = \frac{\partial S}{\partial i}$$

अब मान लीजिए हम n स्वतंत्र चरों वाले एक फलन पर विचार करें। नीचे दिए गए उपयोगिता फलन $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ पर विचार करें। ध्यान दें कि इस भाग में दी गई संकेतन प्रणाली के अनुसार हम इसे

$U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$ के रूप में भी लिख सकते हैं।

U का संपूर्ण अवकलज करने पर हम U का नीचे दिया संपूर्ण अवकल प्राप्त करते हैं:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n$$

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं:

$$dU = U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + \ldots U_n dx_n = \sum_{i=1}^{n} U_i dx_i$$

अन्त में, संपूर्ण अवकल के एक अनुप्रयोग के रूप में हम संपूर्ण अवकल के नियमों (जिन्हें हमने इकाई 1 में अध्ययन किया है) में से एक नियम का उपयोग करेंगे। यह नियम है:

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

इसका एक उदाहरण लेने के लिए, आधारभूत समष्टिगत अर्थशास्त्र (basic macroeconomic) के एक संवृत्त अर्थव्यवस्था के लिए राष्ट्रीय आय समीकरण: $Y = C + I + G$ पर विचार कीजिए, जहाँ Y आय है, C सामूहिक निजी उपभोग है, I निवेश है तथा G सरकारी खर्च है। अतः Y का आंशिक अवकलज $dY = dC + dI + dG$ होगा।

अब मान लीजिए कि निजी निवेश I ब्याज दर r का फलन हैं, तो हम पाते हैं कि

$$dY = dC + \frac{\partial I}{\partial r}dr + dG$$

होगा।

अर्थशास्त्र में संपूर्ण अवकलों के अनुप्रयोगों की चर्चा के पश्चात् आइए हम संपूर्ण अवकलजों की चर्चा करें। इसके लिए बचत फलन $S = S(Y, i)$ पर विचार करें।

हमने ऊपर भी इस फलन का उल्लेख किया था। तब हमने यह माना था कि जहाँ r ब्याज की दर है तथा Y आय स्वतंत्र चर हैं। परन्तु मान लीजिए कि ये दोनों चर मौद्रिक पूर्ति M पर निर्भर हैं। अब हम बचत फलन को $S = S(Y(M), i(M))$ के रूप में लिख सकते हैं।

अब मान लीजिए कि हम जानना चाहते हैं कि मौद्रिक आपूर्ति के फलस्वरूप बचत में किस प्रकार परिवर्तन होता है। इसके लिए हम M के सापेक्ष S का सापेक्ष M का संपूर्ण अवकलज ज्ञात करते हैं। इससे हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dS}{dM} = \frac{\partial S}{\partial Y}\frac{dY}{dM} + \frac{\partial S}{\partial i}\frac{di}{dM}$$

ऊपर हमने माना है कि M, S को केवल Y और i के माध्यम से प्रभावित करता है तथा वह (M), S को स्वतंत्र रूप से प्रभावित नहीं करता। परन्तु, ऐसी स्थितियाँ हो सकती हैं जिनमें एक फलन में स्वतंत्र चर स्वयं भी किसी चर पर निर्भर हों और वह चर निर्भर चर को स्वतंत्र रूप से प्रभावित करता हो। इसका एक उदाहरण देखने के लिए, हम एक उत्पादन फलन:

$$Q = Q(L, K, t)$$

पर विचार करते हैं।

ध्यान दें कि यह फलन पहले लिए गए उत्पादन फलन से थोड़ा अलग है। इसमें उत्पादन केवल पूँजी तथा श्रम उत्पाद इत्यादि साधनों पर निर्भर नहीं करता अपितु इसमें एक तीसरा स्वतंत्र चर, समय, भी है जिसे t से व्यक्त किया गया है। उत्पादन फलन में समय की उपस्थिति यह दर्शाती है कि वस्तु का उत्पादन समय के साथ प्रभावित होता है और इसके कारक प्रौद्योगिकी/तकनीक का विकास, कौशल में वृद्धि इत्यादि हो सकते हैं। ये कारक उत्पादन फलन को बदल देते हैं। समय t की उपस्थिति से उत्पादन फलन गतिक हो जाता है, यह स्थिर नहीं रहता। साथ ही पूँजी और श्रम भी समय के साथ परिवर्तित होते हैं तथा हम पाते हैं कि $K = K(t)$ तथा $L = L(t)$ हो जाता है। अतः, उत्पादन फलन को

$$Q = Q(L(t), K(t), t)$$

के रूप में लिखा जा सकता है।

समय के सापेक्ष उत्पादन में परिवर्तन की दर ज्ञात करने के लिए हम, t के सापेक्ष Q के संपूर्ण अवकलज का प्रयोग करते हैं जो कि

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t}$$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

इसे, वैकल्पिक संकेतन का प्रयोग करके निम्न प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता हैः

$$\frac{dQ}{dt} = Q_L L'(t) + Q_K K'(t) + Q_t$$

ऊपर लिया गया उदाहरण श्रृंखला नियम के एक उदाहरण के रूप में भी माना जा सकता है। यद्यपि इकाई 1 में हमने उल्लेख किया था कि श्रृंखला नियम लगाने के लिए फलन का प्रत्येक स्वतंत्र चर स्वयं भी दो चरों का फलन होना चाहिए। मान लीजिए हमें एक फलन Z = f (x, y) ज्ञात है और x तथा y में से प्रत्येक r और s का फलन है। अतः हम इस फलन कोः

$$z = f(x(r,s), y(r,s))$$ से व्यक्त कर सकते हैं।

हम अर्थशास्त्र के संदर्भ में ऐसे उदाहरणों का निर्माण कर सकते हैं। मान लीजिए, एक व्यक्ति उपयोगिता (संतुष्टि) प्राप्त करता है, वह प्रसन्न होता है जब उसके दो बच्चे A और B की उपयोगिता प्राप्त करते हैं भोजन (जिसे हम F से व्यक्त करते हैं) का उपभोग करके तथा कपड़ों द्वारा जिसे हम C से व्यक्त करते हैं। मान लीजिए, U^A A का उपयोगिता फलन है तथा U^B, B का उपयोगिता फलन है। मान लीजिए, U इस व्यक्ति का उपयोगिता फलन है।

अतः हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैंः

$$U = f\left[U^A(F, C), U^B(F, C)\right]$$

ध्यान दें कि यहाँ हमने दोनों बच्चों द्वारा उपभोग किए गए भोजन तथा कपड़ों की मात्राओं के बीच कोई अंतर नहीं किया है।

मान लीजिए, हम यह जानना चाहते हैं कि यदि कपड़ों के उपभोग में परिवर्तन हो तो इस व्यक्ति की उपयोगिता में किस प्रकार का परिवर्तन होता। यह ज्ञात करने के लिए हम $\frac{dU}{dC}$ ज्ञात करते हैं। $\frac{dU}{dC}$ का मान समीकरण

$$\frac{dU}{dC} = \frac{\partial U}{\partial U^A}\frac{dU}{dC} + \frac{\partial U}{\partial U^B}\frac{dU}{dC}$$

द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

इसी प्रकार हम $\frac{dU}{dC}$ के द्वारा जान सकते हैं कि व्यक्ति के बच्चों के भोजन की मात्रा के उपभोग में परिवर्तन के सापेक्ष इस व्यक्ति की उपयोगिता में किस प्रकार का परिवर्तन होगा।

2.4 अर्थशास्त्र में अन्तर्निहित फलनों के अनुप्रयोग

अब तक हम अर्थशास्त्र में आंशिक अवकलजों, संपूर्ण अवकलों तथा संपूर्ण अवकलजों के अनुप्रयोग देख चुके हैं। इस भाग में, हम अन्तर्निहित फलनों का अवकलन तथा उनके अर्थशास्त्र में अनुप्रयोगों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। इसके बाद हम एक बार पुनः आपसे अनुरोध करेंगे कि वे इकाई 1 में दिए गए अन्तर्निहित फलनों पर केन्द्रित भाग, अर्थात उपभाग 1.6.3 को दोहरा लें।

यदि हमें एक फलन $f(x, y)$ दिया हो और हम यह प्राप्त करते हैं कि इस फलन में x और y अन्तर्निहित रूप से सम्बन्धित हैं। इस अन्तर्निहित फलन को संसाधित करने के लिए हम फलन एक तीसरे चर z को समाविष्ट करते हैं जोकि x और y का एक, एकल मान फलन $z = g(x, y)$ है। $z = k$ के लिए (जहाँ k एक चर है), हमें एक स्तर वक्र मिलता है। स्तर वक्र अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाले उदासीनता वक्रों तथा सम उत्पाद वक्रों के समान होते हैं। जैसे–जैसे x और y भिन्न मान लेते हैं, (यह आवश्यक नहीं है कि x और y एक दूसरे से स्वतंत्र ही हों), z में होने वाला परिवर्तन संपूर्ण अवकलज $dz = g_x dx + g_y dy$ द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। यहाँ g_x, z के x के सापेक्ष आंशिक अवकलज को निरूपित करता है। इसी प्रकार आप g_y की व्याख्या भी कर सकते हैं।

यदि x और y के मान ऐसे हों कि z का 0 हो जाए, तो $dz = g_x dx + g_y dy = 0$ होगा।

अतः $\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x}{g_y}$ होगा।

आइए, हम अन्तर्निहित प्रणाली के अवकलन का प्रयोग अर्थशास्त्र में करें। एक उत्पादन फलन $Q = f(L, K)$ पर विचार करें। यह एक समउत्पाद वक्र कुल को जन्म देता है। एक विशिष्ट समउत्पाद वक्र का समीकरण $f(L, K) = c$ होगा, जहाँ c एक अचर है। इसका संपूर्ण अवकलज ज्ञात करने पर हम पाते हैं:

$$f_L dL + f_K = 0.$$

यह समीकरण, बिन्दु (L, K) से गुजरने वाले समोत्पाद वक्र के साधनों dL और dK में होने वाले परिवर्तनों के मध्य अनुमानित सम्बन्ध को दर्शाता है। यह सम्बन्ध समोत्पाद वक्र पर स्थित सभी बिन्दुओं के लिए सत्य है। अतः, बिन्दु (L, K) से गुजरने वाले समोत्पाद वक्र की स्पर्श रेखा ढाल

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{f_L}{f_K}$$

है। इस समीकरण के बाएँ पक्ष $\frac{dK}{dL}$ को तकनीकी प्रतिस्थापन (technical substitution) की सीमांत दर (marginal rate) कहते हैं। यह श्रम के लिए पूँजी के प्रतिस्थापन की सीमांत दर को दर्शाता है।

इस समीकरण के दाएँ पक्ष में विद्यमान f_L और f_K क्रमशः श्रम और पूँजी के सीमांत उत्पाद हैं।

अतः पूँजी और श्रम के बीच तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर, श्रम और पूँजी के सीमांत उत्पादों के अनुपात के योज्य व्युत्क्रम के बराबर होता है।

हम इसी प्रकार का प्रयोग उपभोक्ता सिद्धान्त में भी कर सकते हैं। एक उदासीनता वक्र (indifference curve) $U = f(x, y)$ लीजिए। प्रत्येक उदासीनता वक्र पर, उपयोगिता स्थिर/अचर होती है। अतः, मान लीजिए कि एक विशिष्ट उदासीनता वक्र के लिए, उपयोगिता एक निश्चित स्तर $\overline{U}$ पर है।

इस स्थिति में, इस फलन का संपूर्ण अवकल $d\bar{U} = f_x dx + f_y dy = 0$ होगा।

इससे हम पाते हैं कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ है।

इस समीकरण का बायाँ पक्ष $\frac{dy}{dx}$, x के लिए y के प्रतिस्थापन की सीमांत दर कहलाता है। दायाँ पक्ष x की सीमांत उपयोगिता तथा y की सीमांत उपयोगिता का अनुमान है।

आइए, अब हम समष्टिगत अर्थशास्त्र में अन्तर्निहित फलनों के एक अनुप्रयोग पर विचार करें। एक संवृत्त अर्थव्यवस्था लीजिए। इसका आधारभूत लेखांकन समीकरण दर्शाता है कि कुल आय, कुल निजी उपभोग, कुल निजी निवेश तथा सरकारी व्यय का योग होता है। अर्थात्

$$Y = C + I + G.$$

मान लीजिए, उपभोग आय का एक वर्धमान फलन है तथा निवेश आय का एक वर्धमान फलन और ब्याज दर r का एक ह्रासमान फलन है। सरकारी व्यय को एक बर्हिजात फलन (exogenous) मान जाता है। अतः, हम इन समीकरणों को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$Y = C(Y) + I(Y, r) + G$$

$$0 < C' < 1$$

$$I_Y > 0$$

$$I_r < 0$$

हम एक ऐसी अर्थव्यवस्था भी ले सकते हैं जिसमें मुद्रा की बहिर्जात आपूर्ति, M, मुद्रा की माँग L के बराबर है, जहाँ L आय का एक वर्धमान तथा ब्याज दर r का एक ह्रासमान फलन है।

हम मुद्रा बाजार के लिए निम्नलिखित संतुलन शर्त को इस प्रकार लिख सकते हैंः

$$M = L(Y, r)$$

अब हमारे पास दो समीकरण हैंः एक वस्तु बाजार के लिए तथा एक मुद्रा बाजार के लिए। सरकारी व्यय को छोड़कर, हम केवल मुद्रा आपूर्ति को ही वास्तविक बर्हिजात चर मान सकते हैं।

बोध प्रश्न 2

1) उत्पादन फलन है $y = f(\mathrm{K}, \mathrm{L}) = K^{0.3} L^{0.5}$ तकनीकि प्रतिस्थापन के सीमांत दर ज्ञात करें।

....

....

....

2) एक फर्म पाता है कि उसका उत्पादन फलन निम्नलिखित रूप में हैः $Q = 100k^{0.25} L^{0.75}$ जहाँ Q उत्पादन है तथा K और L पूँजी तथा श्रम है।

   (i) दर्शाइये कि $Q = 100$ के लिये सम–उत्पादन वक्र का समीकरण है $K = 1/L^3$

   (ii) दर्शाइये की यह सम–उत्पादन वक्र का बयान निगेटिव है।

....

....

....

....

....

3) उत्पादन फलन $4 = xy$ को लें जहाँ x,y उपयोग की गई सामग्री हैः

   (i) दर्शाइये कि सम–उपयोगिता वक्र ढलान नीचे की ओर है, तथा यह उत्तल (convex) है।

   (ii) सम–उपयोगिता फलन के ढलान तथा उत्तलता का आर्थिक अर्थ–प्रदान करें।

....

....

....

....

....

2.5 अर्थशास्त्र में समघात फलनों तथा यूलर प्रमेय के अनुप्रयोग

इस इकाई के इस अंतिम भाग में, हम अर्थशास्त्र में बहुचरीय अवकलज गणित के कुछ और अनुप्रयोग देखेंगे। इस इकाई के इस भाग को ठीक से समझने के लिए आप इकाई 1 से समघात फलनों तथा उनके अवकलन पर केन्द्रित भाग को पुनः अच्छी तरह से अध्ययन कर लें।

आइए हम एक उत्पादन फलन F लें जिसमें आउटपुट Q, दो साधनों श्रम (L) तथा पूँजी \(K) का एक फलन है। अर्थात् $Q = F(L, K)$ है। यह उत्पादन फलन घात r का समघात फलन कहलाता है, यदि फलन के डोमेन में प्रत्येक L और K के लिए:

$$F(\lambda L, \lambda K) \equiv \lambda^r F(L, K)$$

हो।

इस परिभाषा को हम n- साधनों/आगतों $x_1., x_2, \ldots, x_n$ वाले उत्पादन फलन के लिए भी विस्तारित कर सकते हैं। यहाँ Q केवल श्रम तथा पूँजी का फलन न होकर n आगतों का फलन होगा। मान लीजिए कि

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. तब f घात r का समघात फलन कहलाता है यदि

$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \equiv \lambda^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ हो। यहाँ r उत्पादन फलन के पैमाने के प्रतिफल का निर्धारण करता है। $F(x, y)$ एक रैखिक समघात फलन (अर्थात् घात 1 का समघात फलन कहलाता है यदि और केवल यदि $F(x, y) = yf\left(\frac{x}{y}\right)$ हों, जहाँ $f\left(\frac{x}{y}\right) = F\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ है।

हम इसे कैसे सिद्ध कर सकते हैं। आइए, हम पहले "यदि" भाग अर्थात पर्याप्त भाग को सिद्ध करें। हमें दिया है:

$$F(x, y) = yf\left(\frac{x}{y}\right), \text{हम पाते हैं}$$

$$F = (\lambda x, \lambda y) = \lambda yf\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \lambda yf\left(\frac{x}{y}\right) = \lambda F(x, y)$$

आइए, अब हम "केवल यदि" भाग को अर्थात् अनिवार्य भाग को सिद्ध करें। हमें दिया है कि *f(x, y)* एक रैखिक समघात फलन है अर्थात् घात 1 का समघात फलन है। अतः प्रत्येक λ के लिए

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \text{किसी भी } \lambda \text{ के लिए}$$

इसमें $\lambda = \frac{1}{y}$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$F\left(\frac{x}{y},1\right)=\frac{1}{y}F(x,y)$$

अतः $yF\left(\frac{x}{y}ü\right)=F(x\ \ y)$

लेकिन $F\left(\frac{x}{y},1\right)=f\left(\frac{x}{y}\right).$

अतः $F(x,y)=yf\left(\frac{x}{y}\right)$

एक समघात फलन का अवकलन (Differentiation of a Homogeneous Function)

समघात फलनों का एक अत्यंत महत्वपूर्ण गुणधर्म उनके अवकलन से सम्बन्धित है।

मान लीजिए, $f(x, y)$ एक घात r का समघात फलन है। अतः

$$f(\lambda x,\lambda y)\equiv\lambda^r f(x,y)$$

होगा।

x के सापेक्ष इसका अवकलन करने पर हम पाते हैं किः

$$\lambda f_x(\lambda x,\lambda y)=\lambda^r f_x(x,y),\ \text{जहाँ}\ f_x=\frac{\partial f}{\partial x}\ \text{है।}$$

यदि हम इस समीकरण को λ से भाग करें तो हम पाते हैं कि

$$f_x(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{r-1}f_x(x,y)$$

होगा।

यदि हम समीकरण को ध्यान से देखें तो हम पाएँगे कि यह दर्शाता है कि फलन f_x घात r – 1 का एक समघात फलन है। यह परिणाम f_y के लिए भी सत्य है जहाँ f_y, f का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज है। यह परिणाम किसी भी बहुचरीय समघात फलन के लिए सत्य होगा।

इस परिणाम को इस प्रकार सारबद्ध किया जा सकता हैः घात r के किसी भी समघात फलन का प्रत्येक आंशिक अवकलज $r-1$ घात का समघात फलन होगा।

यूलर का समीकरण (Euler's equation)

यह समघात फलनों का एक अत्यंत महत्वपूर्ण गुणधर्म है। माना कि $z=f(x,y)$ एक घात r का समघात फलन है। तो निम्नलिखित सम्बन्ध सदैव सत्य होगाः

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=rz$$

हम इकाई 1 में दी गई उत्पत्ति को यहाँ पुनः दोहराते हैं। हम यूलर के समीकरण को अन्तर्निहित अवकलन तथा श्रृंखला नियम के प्रयोग में सत्य सिद्ध करते हैं।

मान लीजिए, हमें एक समघात फलनः

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^r f(x, y) \qquad \text{(क)}$$

दिया है।

आइए, हम समीकरण (a) के बाएँ पक्ष का λ के सापेक्ष आंशिक अवकलज करें। इस प्रकार हम पाते हैं किः

$$\frac{\partial f(\lambda x, \lambda y)}{\partial \lambda x}\frac{\partial \lambda x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y)}{\partial \lambda y}\frac{\partial \lambda y}{\partial \lambda}$$

$$= xf_{\lambda x} + yf_{\lambda y} \qquad \text{(ख)}$$

आइए, अब हम समीकरण (क) के दाएँ पक्ष का भी λ के सापेक्ष आंशिक अवकलज करें। इस प्रकार हम पाते हैं किः

$$\frac{\partial \lambda^r}{\partial \lambda} f(x, y) + \lambda^r \frac{\partial f(x, y)}{\partial \lambda}$$

$$= r\lambda^{r-1} f(x, y) + 0$$

$$= r\lambda^{r-1} f(x, y) \qquad \text{(ग)}$$

है। क्योंकि समीकरण (क) के लिए बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष है, अतः समीकरण (ख) = समीकरण (ग) होगा। अतः हम पाते हैं किः

$$xf_{\lambda x} + yf_{\lambda y} = r\lambda^{r-1} f(x, y)$$

अब, क्योंकि λ को भी संख्या ले सकता है। मान लीजिए, $\lambda = 1$ है। पिछले समीकरण में रखने पर हम प्राप्त करते हैं। यह यूलर का प्रमेय है।

$$xf_{\lambda x} + yf_{y}\ rf(x, y) \text{ अर्थात् } x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = rz$$

उपर्युक्त समीकरण प्रमेय को दो से अधिक चरों वाले फलनों पर भी लगाया जा सकता है। आइए, अब हम अर्थशास्त्र में यूलर के प्रमेय के एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग की चर्चा करें।

घात 1 वाले एक समघात उत्पादन फलन पर विचार करें। दूसरे शब्दों में, यह उत्पादन फलन पैमाने के समान प्रतिफल को दर्शाता है। नीचे दिए गए सरल उत्पादन फलन को लीजिए:

$$Q = f(L,K)$$

यदि हम फलन $z = f(x,y)$ के लिए यूलर के प्रमेय सत्य है, तो यदि z एक घात 1 का समघात फलन है तो यूलर के प्रमेय के अनुसार $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ होगा।

अब, आइए हम z के स्थान पर Q, x के स्थान पर तथा y के स्थान पर K लें। इसमें हमें ऊपर दिया पैमाने के समान प्रतिफल वाला उत्पादन फलन प्राप्त होगा और यूलर के प्रमेय के अनुसार हम पाएँगे कि

$$L\frac{\partial Q}{\partial L} + K\frac{\partial Q}{\partial K} = Q$$ होगा।

इस समीकरण के बाएँ पक्ष में $\frac{\partial Q}{\partial L}$ श्रम का सीमांत उत्पाद है और $\frac{\partial Q}{\partial K}$ पूँजी का सीमांत उत्पाद है। यदि प्रत्येक श्रमिक को उसके श्रम की सीमांत उत्पाद के बराबर वेतन मिलें और पूँजी की प्रत्येक इकाई को उसके पूँजी के सीमांत उत्पाद के बराबर किराया मिले तो $L\frac{\partial Q}{\partial L}$ सभी श्रमिकों द्वारा प्राप्त कुल वेतन होगा और $K\frac{\partial Q}{\partial K}$ पूँजी से कुल आमदनी होगी। अतः प्राप्त समीकरण का बायाँ पक्ष उत्पादन के सभी साधन द्वारा प्राप्त कुल आमदनी को दर्शाएगा। यह दाएँ पक्ष के बराबर होगा जो कि केवल Q अर्थात् कुल उत्पाद को दर्शाता है। अतः हम पाते हैं कि यदि पैमाने का समान प्रतिफल अभिभावी हो (जोकि होगा, यदि उत्पादन के साधनों की कुल आमदनी कुल उत्पाद के बराबर होगी। अतः कुछ शेष नहीं बचेगा तथा अतिरिक्त सामान्य लाभ नहीं होंगे। उत्पादन का पूर्णतया निर्वातन हो जाता है। यह प्रसिद्ध उत्पादन–निर्वातन प्रमेय (product-exhaustion theorem) है जिसके अनुसार यदि उत्पादन फलन पैमाने का समान प्रतिफल दर्शाता हो तथा प्रत्येक साधन का भुगतान उसके सीमांत उत्पाद के बराबर हो तो साधनों को किया भुगतान पूरे उत्पाद को निर्वातित कर देता है। ध्यान रहे कि यह परिणाम तभी सत्य होगा जब उत्पादन फलन पैमाने का समान प्रतिफल दर्शाता हो।

बोध प्रश्न 3

टिप्पणी:(क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए स्थान का प्रयोग कीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1) मान लीजिए एक उपयोगिता फलन $U = x^{\alpha} y^{\beta}$ दिया है। मान लीजिए, U का स्तर U = k पर स्थिर है। उपयोगिता फलन के लिए प्रतिस्थापन की सीमांत दर ज्ञात कीजिए।

....

....

....

2) एक उत्पादन फलन $Q = L^{\gamma}K^{\eta}$ दिया है। सिद्ध कीजिए यह एक समघात फलन है तथा इस समघात फलन की घात ज्ञात कीजिए।

3) दर्शाइए कि यदि पैमाने का बढ़ता हुआ प्रतिफल हो, तो उत्पादन–निर्वातन प्रमेय सत्य नहीं होगा।

2.6 सारांश

यह इकाई बहुचरीय फलनों उनके अवकलजों के अर्थशास्त्र में विभिन्न अनुप्रयोगों पर केन्द्रित थी। इस इकाई का प्रारंभ हमने कुछ ऐसे बहुचरीय फलनों की प्रस्तुति से किया जो अर्थशास्त्र में पाए जाते हैं जैसे कि उपयोगिता फलन, उत्पादन फलन, माँग फलन, मुद्रा माँग फलन, निवेश फलन इत्यादि। साथ ही हमने अर्थशास्त्र में पाए जाने वाले स्तर वक्रों के दो उदाहरण भी लिए – उदासीनता वक्र तथा समोत्पाद वक्र। अर्थशास्त्र में आंशिक अवकलजों के प्रयोग की चर्चा भी इस इकाई में की गई। यह देखा गया कि आंशिक अवकलज, वास्तव में अर्थशास्त्र में सर्वत्र व्याप्त है। किसी बहुचरीय फलन के संदर्भ में जब भी अर्थशास्त्र में हम किसी सीमांत संकल्पना की बात की जाए तो उसके संगत गणितीय संकल्पना एक आंशिक अवकलज ही होता है। सीमांत उपयोगिता, किसी साधन का सीमांत उत्पाद, सीमांत लागत, सीमांत राजस्व तथा उपभोगी की सीमांत प्रवृत्ति इत्यादि आंशिक अवकलजों के कुछ उदाहरण हैं।

इसके पश्चात् इस इकाई में संपूर्ण अवकलों तथा संपूर्ण अवकलजों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोगों की चर्चा की गई। यह अनुप्रयोग उपयोगिता सिद्धान्त, उत्पादन सिद्धान्त तथा समष्टिगत अर्थशास्त्र से लिए गए। ऐसे बहुचरीय फलनों के अवकलजों में संदर्भ में जिनमें प्रत्येक स्वतंत्र चर पुनः दो या दो से अधिक चरों का फलन होता है। शृंखला नियम तथा उसके अर्थशास्त्र में अनुप्रयोगों पर चर्चा की गई। इसमें एक

ऐसा उदाहरण लिया गया जिसमें एक व्यक्ति की उपयोगिता कुछ अन्य व्यक्तियों की उपयोगिता पर निर्भर है जिनमें से प्रत्येक उपयोगिता दो वस्तुओं के उपभोग का फलन है।

इसके पश्चात् अन्तर्निहित फलन तथा उनके अवकलजों के कुछ अनुप्रयोग लिए गए। हमने देखा कि स्तर वक्र अन्तर्निहित फलनों के महत्वपूर्ण प्रकार हैं। अर्थशास्त्र में उदासीनता वक्रों तथा समोत्पाद वक्रों से सम्बन्धित फलनों का प्रयोग करते हुए हमने प्रतिस्थापन की सीमांत दर तथा तकनीकी प्रतिस्थान की सीमांत दर की संकल्पनाओं के बारे में जाना। हमने समष्टिगत अर्थशास्त्र से भी कुछ उदाहरण लिए।

अंत में, इस इकाई में समघात फलनों तथा यूलर के प्रमेय पर चर्चा की गई। हमने समघात फलनों के उदाहरणों के रूप में उपयोगिता फलनों, माँग फलनों तथा उत्पादन फलनों की चर्चा की। उत्पादन फलनों के संदर्भ में हमने देखा कि यदि वह समघात है तो उसकी घात 1, 1 से कम या 1 से अधिक है, इसके आधार पर हम यह तय कर सकते हैं कि उसके पैमाने का प्रतिफल समान, घटता हुआ या बढ़ता हुआ होगा। अततः हमने यूलर के प्रमेय का प्रयोग उत्पादन सिद्धान्तों के संदर्भ में उत्पाद निर्वातन प्रमेय को सिद्ध करने के लिए किया।

2.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) भाग 2.3 देखें तथा उत्तर दें।

2) भाग 2.3 देखें तथा उत्तर दें।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 2.4 देखें तथा उत्तर दें।

2) भाग 2.4 देखें तथा उत्तर दें।

3) भाग 2.4 देखें तथा उत्तर दें।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 2.5 देखें तथा उत्तर दें।

2) भाग 2.5 देखें तथा उत्तर दें।

3) भाग 2.5 देखें तथा उत्तर दें।

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY