खंड 2

अवकल समीकरण

खण्ड 2 : एक परिचय

इस दूसरे खण्ड का शीर्षक **अवकल समीकरण** है। आपने बी.ई.सी.सी.–102 के अंतिम खण्ड में अन्तर समीकरणों एवं अर्थशास्त्र मे उनके प्रयोग के बार में समझा है। अन्तर समीकरणों की भाँति अवकलन समीकरण भी गत्यात्मक प्रक्रियाओं के विश्लेषण में उपयोगी होते हैं – ये प्रक्रियाएँ समयानुसार चलती हैं। किन्तु एक अन्तर हैः अंतर समीकरण असतत गत्यात्मक प्रक्रियाएँ ही दर्शा रहे थे किन्तु सतत् गत्यात्मक प्रक्रियाओं के लिए उपयोगी अवकल समीकरणों में अवकलजों का उपयोग किया जाता है। इस खण्ड की भी दो इकाइयाँ हैं : इकाई 3 तथा इकाई 4। बी.ई.सी.सी.–102 के अंतर समीकरण विषयक खंड की इकाइयाँ रैखिक और ग़ैर–रैखिक समीकरणों के अनुसार संयोजित की गई थीं। वर्तमान पाठ्यक्रम के अवकल समीकरण विषयक खंड की इकाइयाँ क्रमशः प्रथम कोटि एवं द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों से संबद्ध है। इकाई 3 है : प्रथम कोटि अवकल समीकरण तथा इकाई 4 है **द्वितीय कोटि समीकरण**।

इकाई 3 प्रथम कोटि अवकल समीकरण*

संरचना

3.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित से भली भांति अवगत हो जाएँगे:

- एक अवकल समीकरण (differential equation) की परिभाषा से;
- एक अवकल समीकरण की कोटि तथा घात की समीकरण से;
- प्रथम कोटि (first order) तथा प्रथम घात (first degree) समीकरणों से तथा उन्हें हल करने की विभिन्न विधियों से;
- पृथक्करणीय चर (separable variable), रैखिक (linear) तथा रैखिक रूप से समानेय (reducible) अवकल समीकरणों तथा उन्हें हल करने की विधियों से; और
- अर्थशास्त्र में अवकल समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों से।

3.1 प्रस्तावना

अर्थशास्त्र में अक्सर हमें विभिन्न चरों की पारस्परिक क्रियाओं का अध्ययन करना पड़ता है। इन चरों में से एक को हम निर्भर चर कहते हैं तथा शेष सभी को स्वतंत्र चर। जब स्वतंत्र चरों के मान में परिवर्तन होता है, तो निर्भर चर में भी उनके अनुसार परिवर्तन होता है। अतः, एक दिए हुए स्वतंत्र चर x तथा निर्भर चर y और उनके बीच दिए एक सम्बन्ध $y = f(x)$ के लिए हम x के सापेक्ष, y में होने वाले परिवर्तन की दर अर्थात् $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कर सकते हैं। यह अवकल गुणांक (differential coefficient) एक दिए हुए फलन

* श्री जगमोहन राय, पी.जी.डी.ए.वी. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय

के अनेक गुणधर्मों (properties) को जानने में हमारी सहायता करता है। यह अवकल गणित (differential calculus) का विषय क्षेत्र है तथा हम इस पर केन्द्रित अनेक इकाइयों का अध्ययन कर चुके हैं। अब हम इसके विपरीत समस्या पर विचार करेंगे। अर्थशास्त्र तथा अन्य कई विषयों जैसे कि भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान इत्यादि में, बहुधा ऐसी परिस्थितियाँ आती हैं जहाँ हम एक (स्वतंत्र) चर के सापेक्ष एक (निर्भर) चर के परिवर्तन की दर ज्ञात होती है और हमें इन चरों में एक सम्बन्ध ज्ञात करना होता है। उदाहरण के लिए, हमारी रुचि एक माँग फलन ज्ञात करने में हो सकती है जबकि हमें यह दिया हो कि इस माँग फलन के लिए माँग की कीमत लोच 1 के बराबर है। अब हम जानते हैं कि यदि $x = x(p)$ एक माँग फलन है जहाँ p वस्तु का प्रति इकाई मूल्य है और x इस मूल्य पर माँग की मात्रा है तो माँग की कीमत लोच सूत्र $\eta_d = \frac{pdx}{xdp}$ द्वारा व्यक्त की जाती है। अतः, ऊपर वर्णित समस्या को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है यदिः

$$\frac{pdx}{xdp} = \eta_d \qquad (1)$$

है तो $x = x\,(p)$ ज्ञात कीजिए।

व्यंजक (1) के प्रकार का समीकरण जिसमें अवकल पूर्णांक सम्मिलित होता है, एक अवकल समीकरण कहलाता है और हम ऐसे समीकरणों का हल ज्ञात करना चाहते हैं। इस इकाई में हम अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे तथा इनका प्रयोग अर्थशास्त्र में उत्पन्न होने वाली कुछ समस्याओं का हल ज्ञात करने में करेंगे। अब हम औपचारिक रूप से परिभाषित करते हैं कि एक अवकल समीकरण तथा उसके हल से हम क्या समझते हैं तथा विभिन्न प्रकार के अवकल समीकरणों के हल ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा करते हैं।

3.2 प्रारंभिक संकल्पनाएँ

एक **अवकल समीकरण (differential equation)** एक ऐसा समीकरण है जिसमें स्वतंत्र तथा निर्भर चर के सापेक्ष, निर्भर चर का अवकलज सम्मिलित हों। अवकल समीकरणों के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

1) $\frac{dy}{dx} + y = xe^{-x}$ 2) $(x+y)\frac{dy}{dx} = x - y$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sin ax$ 4) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x$

5) $\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{2/2}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ 6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

एक अवकल समीकरण एक **साधारण (ordinary)** अवकल समीकरण कहलाता है यदि इसमें केवल एक स्वतंत्र चर हो। यदि इसमें एक से अधिक स्वतंत्र चर हों तो इसे एक **आंशिक (partial)** अवकल समीकरण कहते हैं। ध्यान दें कि साधारण

अवकल समीकरणों में, निर्भर चर के केवल साधारण अवकलज सम्मिलित होते हैं जबकि आंशिक अवकल समीकरणों में निर्भर चर के स्वतंत्र चर के सापेक्ष आंशिक अवकलज सम्मिलित होते हैं। उदाहरण (1) से (5) में दिए गए अवकल समीकरण साधारण हैं तथा उदाहरण (6) में दिया गया अवकल समीकरण एक आंशिक अवकल समीकरण है। इस इकाई में हम अपनी चर्चा केवल साधारण अवकल समीकरणों तक सीमित रखेंगे। एक अवकल समीकरण की कोटि, उसमें उपस्थित अधिकतम कोटि के अवकलज की कोटि के बराबर होती है। स्मरण करें कि यदि y, x का एक फलन है तो $\frac{dy}{dx}, y$ का प्रथम कोटि अवकलज है (first order derivative) है, $\frac{d^2y}{dx^2}, y$ का द्वितीय कोटि अवकल है, इत्यादि। व्यापक रूप में, $\frac{d^ny}{dx^n}, y$ का (x के सापेक्ष) n- कोटि का अवकलज है। किसी अवकल समीकरण की घात, उसमें उपस्थित अधिकतम कोटि के अवकलज की घात के बराबर होती है। उदाहरण 1 और 2 में दिए गए दोनों अवकल समीकरणों की कोटि 1 तथा घात 1 है। उदाहरण 3 में दिए गए अवकल समीकरण की कोटि 2 तथा घात 1 है। उदाहरण 4 में दिए गए अवकल समीकरण की कोटि 3 है। इसकी घात 2 है क्योंकि इसमें उपस्थित उच्चतम कोटि वाला अवकलज (highest order derivative) $\frac{d^3y}{dx^3}$ है तथा इसकी घात 2 है। उदाहरण 5 में दिए गए अवकल समीकरण की कोटि 2 है। इसकी ज्ञात करने के लिए हम इसे पुनः निम्न रूप से लिखते हैं:

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

और इस प्रकार हम पाते हैं कि इसकी घात 2 है। अतः किसी अवकल समीकरण की घात ज्ञात करने से पूर्व यह आवश्यक है कि समीकरण में उपस्थित सभी अवकलजों को मूल तथा भिन्न (radicals and fractions) से मुक्त कर लिया जाए।

एक अवकल समीकरण का **हल (Solution)** स्वतंत्र चर और निर्भर चर के बीच एक ऐसा सम्बन्ध है जो कि दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करे। ध्यान रहें कि इस सम्बन्ध को जब हम अवकल समीकरण में रखेंगे/प्रतिस्थापित करेंगे तो हमें (इस सम्बन्ध के आधार पर) निर्भर चर के विभिन्न अवकलज ज्ञात करने की आवश्यकता भी पड़ेगी। अतः, यदि $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ एक अवकल समीकरण है तो एक फलन $y = f(x)$ इस अवकल समीकरण का समाधान होगा यदि $F\left(x, f(x), f'(x), ..., f^n(x)\right) = 0$ है। कोटि n के एक अवकल समीकरण का एक हल व्यापक हल कहलाता है यदि उसमें n यादृच्छिक अचर (arbitrary constants) हों। किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में अचरों को यदि हम विशिष्ट मान दे दें तो इस प्रकार प्राप्त हल दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशेष हल कहलाता है।

इस इकाई में हम निम्न प्रकार के अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ सीखेंगे:

1. प्रथम कोटि अवकल समीकरण जिनमें चर पृथक्करणीय हैं।
2. प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण
3. अचर गुणांक वाले द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरण

आइए, हम इन अवकल समीकरणों का अध्ययन करें।

3.3 प्रथम कोटि तथा प्रथम घात अवकल समीकरण

एक प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण का रूप इस प्रकार का होता हैः

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

अर्थात् यह x, y और $\frac{dy}{dx}$ के बीच एक सम्बन्ध है और इस समीकरण में केवल एक अवकलज उपस्थित होता है जो कि प्रथम कोटि का होता है तथा इसकी घात 1 होती है। हम सर्वप्रथम यह देखेंगे कि एक प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण जिसमें चर पृथक्करणीय हों, (अर्थात् जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सके कि dx का गुणांक केवल x पदों में हों तथा dy का गुणांक केवल y के पदों में हो।

3.3.1 पृथक्करणीय चर समीकरण

एक प्रथम कोटि तथा प्रथम घात अवकल समीकरण जिसमें फलन f, $f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके जहाँ $g(x)$ केवल x का फलन हो तथा $h(y)$ केवल y का फलन हो, एक चर पृथक्करणीय समीकरण कहलाता है। ऐसे अवकल समीकरण का हल सरलता से प्राप्त किया जा सकता है क्योंकि इसे इस रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$h(y)\frac{dy}{dx} \quad g(x) \qquad (3)$$

समीकरण (3) का x के सापेक्ष समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

हैं। यह अवकल समीकरण (3) का व्यापक हर है।

आइए, अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ का हल ज्ञात कीजिए।

हलः हमें दिया हैः $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow ydy = xdx.$

ध्यान रहे कि हमने चरों का पृथक कर लिया है। समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \text{ या } y^2 + x^2 = k$$

ध्यान दें कि अंतिम समीकरण में, जो कि दिए हुए अवकल समीकरण का एक हल है, हमनें अचर 2C को k से प्रतिस्थापित कर दिया है। हम इस अचर को 2C अथवा C भी लिख सकते थे अथवा इसे किसी अन्य प्रतीक या चिन्ह द्वारा भी व्यक्त कर सकते थे। महत्वपूर्ण बात केवल यह है कि यह एक समाकलन का अचर है।

उदाहरण 2: अवकल समीकरण $x\sqrt{1+y^2}\,dx = y\sqrt{1+x^2}\,dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

हलः दिए गए अवकल समीकरण को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता हैः

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy$$

क्योंकि चर पृथक किए जा चुके हैं, समाकलन द्वारा हम पाते हैं कि

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2} + C$$

जोकि दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है। ध्यान दें कि ऊपर दिए समाकलनों में से प्रत्येक को, हर में दिए वर्गमूल में उपस्थित व्यंजक को t के बराबर रख कर, प्रतिस्थापन विधि द्वारा हल किया जा सकता है।

उदाहरण 3. माँग फलन $x = x(p)$ ज्ञात कीजिए यदि यह दिया हो कि $\frac{pdx}{xdp} = -1$ है। साथ ही x का मान ज्ञात कीजिए यदि यह दिया हो कि जब $p = 1$ है तो x का मान 5 है।

हलः यह वही अवकल समीकरण है जोकि समीकरण (1) में दिया गया था। ध्यान दें कि इस अवकल समीकरण में चरों को सरलता से पृथक किया जा सकता है क्योंकि इसे इस रूप में लिखा जा सकता हैः

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{p}$$

समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\log x = \log p + C \qquad (4)$$

है, जोकि इस अवकल समीकरण का व्यापक हल है। यह दिए हुए अवकल समीकरण द्वारा प्राप्त माँग फलनों के वर्ग को निरूपित करता है। ध्यान दें कि अचर C के अलग–अलग मान रखने पर अलग–अलग माँग फलन प्राप्त किए जा सकते हैं। दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशेष हल दिए हुए प्रतिबंध, अर्थात् जब $p = 1$ है तो $x = 5$ है, का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है। इन मानों को समीकरण (4) में रखने पर, हम पाते हैं कि $log\,5 = log\,1 + C$ और क्योंकि $log\,1 = 0$ होता है, हम पाते हैं कि $C = log\,5$ है। अतः, दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशेष हल $log\,x$

$+log\, p = log\, 5$ अथवा $xp = 5$ है। यहाँ लघुगणकों के गुणधर्मों का प्रयोग किया गया है। अतः हम पाते हैं कि $x = \frac{p}{5}$ वह माँग फलन है जो दिए हुए अवकल समीकरण द्वारा, दी गई प्रारंभिक शर्तों के आधार पर, प्राप्त होता है।

3.3.2 रैखिक अवकल समीकरण

एक निम्न प्रकार का अवकल समीकरण

(5) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$

जहाँ P और Q केवल x के फलन हैं, एक प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण (linear differential equation) कहलाता है। एक रैखिक अवकल समीकरण में निर्भर अचर और समीकरण में उपस्थित उसके सभी अवकलज घात 1 के होते हैं और कभी भी आपस में गुणा नहीं होते। समीकरण (5) में दिया गया अवकल समीकरण प्रथम कोटि का है क्योंकि इसमें दो या उससे अधिक कोटि के अवकल गुणांक उपस्थित नहीं है। एक प्रथम कोटि के रैखिक समीकरण का हल इस प्रकार ज्ञात किया जाता है:

चरण 1 : दिए गए अवकल समीकरण में व्यंजकों P और Q जोकि केवल x के फलन हैं, की पहचान कीजिए।

चरण 2 : समाकलन गुणक (Integrating Factor - I.F.) ज्ञात कीजिए, जोकि सूत्र $e^{\int pdx}$ से प्राप्त किया जाता है।

चरण 3 : अवकल समीकरण का हल लिखिए जोकि सूत्र

$$y \times \text{I.F.} = \int (Q \times \text{I.F.})\, dx$$

से प्राप्त किया जाता है।

इस प्रक्रिया पर प्रकाश डालने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+1}{x}$ को हल कीजिए।

यह एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसमें $P = \frac{1}{x}$ तथा $Q = \frac{x^2+1}{x}$ है।

यहाँ समाकलन गुणक है:

$$\text{I.F.} = e^{\int pdx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$$

इसलिए, दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है:

उदाहरण 5 : नीचे दिए अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3$$

हलः यहाँ $P = x$ तथा $Q = x^3$ है। इसलिए, समाकलन गुणक होगाः

$$\text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$\therefore$ दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल होगाः

$$ye^{x^2/2} = \int x^3 e^{x^2/2} dx$$

$= 2\int te^t dt.$ समाकलित करने पर हम पाते हैं

$$= 2(t-1)e^{t+c} - e^t + C$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{रखें } \dfrac{x^2}{2} = t \\ \therefore x^2 = 2t \\ \Rightarrow xdx = dt \end{array}\right]$$

<u>बोध प्रश्न 1</u>

1) नीचे दिए अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कीजिएः

(क) $ydx - (x^2 - 1)dy = 0$ (ख) $(x + xy^2)dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$

(ग) $x^2 dy - 2xdx = 2xy^2 dx - dy$ (घ) $\dfrac{dx}{dt} = -8xt^3$

(ङ) $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 5$

(च) $\sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^2 y^2 + xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

....

....

....

....

....

....

....

2) नीचे दिए अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कीजिएः

(क) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 + 1$

(ख) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x\log x}y = \dfrac{2}{x}$

ग) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{1 + x^2} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

घ) $y\log y\dfrac{dx}{dy} + x - \log y = 0$

ङ) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=1+\frac{2}{x}$

....

....

....

....

....

....

3.3.3 रैखिक रूप में समानेय/लघुकरणीय समीकरण

कई बार एक दिया हुआ अवकल समीकरण रैखिक नहीं होता परन्तु उसे रैखिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। एक के प्रकार का अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^{11} \qquad (6)$$

जहाँ P और Q केवल x के फलन हैं, एक रैखिक अवकल समीकरण के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। इसकी प्रक्रिया इस प्रकार है:

चरण 1 : अवकल समीकरण (6) के दोनों पक्षों को y^{11} से विभाजित करने पर वह बन जाता है:

$$\frac{1}{y^{11}}\frac{dy}{dx}+P\frac{1}{y^{m-1}}=Q \qquad (7)$$

चरण 2: $\frac{1}{y^{n-1}}=z$ रखें। इसका x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि $(1-n)\frac{1}{y^{n}}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$

इसे समीकरण (7) में रखने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx}+Pz=Q \qquad (8)$$

अथवा $\frac{dz}{dx}+P'z=Q'$

जहाँ $P^{'}=p(n-1)$ और $Q^{'}=Q(n-1)$ है। यह एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसमें निर्भर चर z है और इसे सरलता से हल किया जा सकता है।

चरण 3 : अवकल समीकरण (8) को हल कीजिए। इससे हमें z और x में एक सम्बन्ध प्राप्त होता है। इस सम्बन्ध में $z=\frac{1}{y^{n-1}}$ रखने पर, हमें दिए गए अवकल समीकरण का हल प्राप्त होता है।

इस प्रक्रिया पर प्रकाश डालने के लिए अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 6. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ का हल ज्ञात कीजिए।

हलः दिए गए अवकल समीकरण के दोनों पक्षों को y^3 से विभाजित करने पर यह समीकरण बन जाता हैः

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+x\frac{1}{y^2}=x^3 \qquad (9)$$

हम $\frac{1}{y^2}=z$ रखते हैं। इसका x के सापेक्ष अवकलज करने पर हम प्राप्त करते हैंः

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

अथवा

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$$

इसे समीकरण (9) में रखने पर हमें $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}+xz=x^3$ प्राप्त होता है, जिसे पुनः इस प्रकार से लिखा जा सकता हैः

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$$

यह अवकल समीकरण z में रैखिक है जहाँ $P=-2x$ तथा $Q=-2x^3$ है। इसलिए, समाकलन गुणक $e^{\int Pdx}=e^{-x^2}$ होगा और अवकल समीकरण (9) का हल होगाः

$$ze^{-x^2}=\int -2x^3e^{-x^2}dx=-(x^2+1)e^{-x^2}+C$$

ऊपर प्राप्त व्यंजक में पुनः $z=\frac{1}{y^2}$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैंः

$$\frac{1}{y^2}e^{-x^2}=-(x^2+1)e^{-x^2}+C \qquad (10)$$

जिसे $(x^2+1)y^2+Cy^2=1$ के रूप में लिखा जा सकता है और यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

<u>बोध प्रश्न 2</u>

1) नीचे दिए अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कीजिएः

(क) $2\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$

(ख) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

(ग) $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{1-x^2}y=x\sqrt{y}$

(घ) $\frac{dy}{dx}+\frac{yx}{y}=x^2y^6$

....

....

....

....

....

2) नीचे दिये गये अवकलन समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए:

(क) $\frac{dy}{dx}+2xy=y^2e^{x2}\log x$

(ख) $ydx=(10y^3-2x)dy$

(ग) $(x^3y^3+xy)dx=dy$

(घ) $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\log x$

....

....

....

....

....

3.4 अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग

जैसा कि पहले उल्लेख कर चुके हैं, ऐसी कई परिस्थितियाँ उत्पन्न होती हैं जब अर्थशास्त्र की समस्याएँ अवकल समीकरणों के रूप में व्यक्त हो जाती हैं और इन अवकल समीकरणों के हल हमें प्रासंगिक आर्थिक चरों में वांछित सम्बन्ध प्रदान करते हैं। ऐसी एक परिस्थिति का वर्णन पिछले भाग के प्रारंभ में किया गया था और उदाहरण 3 में दिए हुए अवकल समीकरण को हल करके अभीष्ट माँग फलन प्राप्त किया गया था। हम कुछ और उदाहरण लेकर इस बिन्दु को स्पष्ट करते हैं। अतः यद्यपि हम अवकल समीकरणों के अर्थशास्त्र में व्यापक अनुप्रयोगों की बात करेंगे, ध्यान रहे कि जब हम सतत समय, पूँजी संचय और आर्थिक विकास जैसे विषयों से सम्बन्धित आर्थिक गतिकी को चित्रांकित करना चाहते हैं, हम समय के सापेक्ष अवकलजों पर आधारित अवकल समीकरणों का उपयोग करते हैं।

उदाहरण: एक वस्तु की माँग की लोच $\frac{5p}{(p+3)(p-2)}$ के बराबर दी हुई है। माँग फलन ज्ञात कीजिए जबकि यह दिया हो कि $p=3$ पर माँग 6 इकाई है।

हलः यहाँ p वस्तु का प्रति इकाई मूल्य है। माना x माँग की मात्रा को व्यक्त करता है। हम जानते हैं कि माँग की लोच सूत्र

$$e_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

द्वारा प्राप्त होती है। अर्थात् यहाँ

$$i.e. -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{5p}{(P+3)(p-2)}$$

होगा। इसका समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\log\frac{p-2}{p+3} = \log\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow x = c\frac{(p+3)}{p-2}$$

है। अब, हमें दिया है कि जब $p = 3$ है तो $x = 6$ होगा।

इससे हम पाते हैं कि

$$6 = 6c \quad \text{i.e. } c = 1$$

है। अतः अभीष्ट माँग फलनः

$$x = \frac{p+3}{P-2}$$ है।

उदाहरणः उपभोग की सीमांत प्रवृत्ति

$$\frac{dc}{dI} + \frac{2I}{I^2+1}C = \frac{1}{I^2+1} \qquad (10)$$

द्वारा प्राप्त होती है, जहाँ C उपभोग को तथा I, आय को व्यक्त करता है। उपभोग फलन ज्ञात कीजिए यदि यह दिया हो कि $I = 2$ पर $C = 100$ है।

हलः अवकल समीकरण (10) एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसमें C निर्भर चर तथा I स्वतंत्र चर है। यहाँ $P = \frac{2I}{I^2+1}, Q = \frac{1}{I^2+1}$ है। अतः समीकरण (10) का व्यापक हल होगाः

$$c\left(I^2+1\right) = \int\left(I^2+1\right)\frac{1}{I^2+1}dI$$

= I + K जहाँ K समाकलन का अचर है।

प्रारंभिक प्रतिबंध, I = 2 पर C = 100 है, का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि K= 498 है।

$\therefore$ उपभोग फलन होगाः

$$C = \frac{I + 498}{I^2 + 1}$$

उदाहरण : सोलो विकास मॉडल (Solow Growth Model)

एक उत्पादन फलन $Q = f(K, L)$ जहाँ Q उत्पादन को, K पूँजी को तथा L श्रम को व्यक्त करता है। स्वाभाविक रूप से $K > 0, L > 0$ है। यदि यह दिया हो कि उत्पादन फलन रैखिक और समघाती है, तो इस प्रकार लिखा जा सकता हैः

$$Q = L\phi(k)$$

जहाँ $k = \frac{K}{L}$ है और ϕ, K का एक फलन है, यह सरलता से देखा जा सकता है। उदाहरण के लिए, यदि

$$Q = \frac{L^{5/4} + K^{5/4}}{L^{1/4} + K^{1/4}}$$

है तो Q एक घात एक का समघाती फलन है अर्थात् यह एक रैखिक समघाती फलन है। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता हैः

$$Q = L\left(\frac{1 + \left(\frac{K}{L}\right)^{5/4}}{1 + \left(\frac{K}{L}\right)^{1/4}}\right)$$

$$= L\left(\frac{1 + k^{5/4}}{1 + k^{1/4}}\right)$$

$$= L\phi(k)$$

अपने विकास मॉडल में, प्रो. सोलो ने सिद्ध किया कि यदि श्रम के विकास की दर λ दी हुई हो, तो अर्थव्यवस्था अंततः विकास की स्थिर अवस्था में पहुँच जाएगी जिसमें निवेश λ की दर से बढ़ेगा। सोलो के मॉडल में ली गई मान्यताएँ इस प्रकार हैंः

$$\frac{dk}{dt} = sQ$$

$$\frac{dL/dt}{L} = \lambda$$

जहाँ s बचत की अचर सीमांत प्रवृत्ति को निरूपित करता है और λ श्रम के विकास की अचर दर को।

इन मान्यताओं के आधार पर विकास मॉडल का जो मूलभूत अवकल समीकरण प्राप्त होता है, वह हैः

$$\frac{dk}{dt} = s\phi(k) - \lambda k \qquad (11)$$

आइए, अब हम एक विशिष्ट उत्पादन फलन $\theta = K^{1/3}L^{2/3}$ लेते हैंः

अर्थात् $Q = L\left(\frac{K}{L}\right)^{1/3} = Lk^{1/3}$

$$\therefore \varphi(k) = k^{1/3}$$

$\phi(k)$, के इस मान के साथ अवकल समीकरण (11) हो जाता है:

$$\frac{dk}{dt} = sk^{1/3} - \lambda k$$

$$\frac{d\lambda}{dk} + \lambda k = sk^{1/3}$$

जो कि एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसमें $P = \lambda$ तथा $Q = sk^{1/3}$ है। इसे हल करने पर हमें निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त होता है:

$$k^{1/3} = \left[k^{1/3}(0) - \frac{s}{\lambda}\right]e^{-1/3\lambda t} + \frac{s}{\lambda} \qquad (12)$$

जहाँ $k(0)$ पूँजी श्रम अनुपात k का प्रारंभिक मान है। यह सम्बन्ध (12) k के समय पथ को निर्धारित करता है।

<u>बोध प्रश्न 3</u>

1) माँग और पूर्ति फलन

$$Q_d = 40 - 2p - 2p^1 - p^{11}, Q_s = -5 + 3p$$

दिए हैं जहाँ p(0) = 12 तथा $P^1(0) = 1$ है। यदि यह दिया हो कि बाजार में सभी वस्तुएँ बिक जाती हैं तो P (t) ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

2) यदि निवेश फलन $I(t) = 200\ e^{0.4t}$ दिया है जहाँ $I\ (t) = \frac{dk}{dt}$ है और K समय t पर पूँजी को व्यक्त करता है और प्रारंभिक प्रतिबंध/शर्त अथवा पूँजी भंडार K(0) = 90 है, तो पूँजीगत स्टॉक का समय–पथ ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

3.5 सारांश

इस इकाई में आपका परिचय गतिक प्रक्रमों से करवाया गया जहाँ समय संतत् रूप से गुजरता है। ऐसे प्रक्रमों को समझने के लिए अवकल समीकरण मूल उपकरण हैं जोकि स्वतंत्र चरों में परिवर्तन के सापेक्ष निर्भर चर में परिवर्तन को व्यक्त करते हैं। अवकल समीकरणों में स्वतंत्र चर के सापेक्ष, निर्भर चर के अवकलज सम्मिलित होते हैं। यह ध्यान देना महत्वपूर्ण है कि अर्थशास्त्र में गतिकी के अध्ययन में स्वतंत्र

चर समय होता है क्योंकि हमारा लक्ष्य समय–पथ का चित्रण होता है। अतः, गतिक आर्थिक प्रक्रमों को चित्रित/निरूपित करने वाले अवकल समीकरणों में पाए जाने वाले अवकलज सदैव समय के सापेक्ष होते हैं।

इस इकाई का प्रारंभ एक अवकल समीकरण की कोटि तथा घात की संकल्पना की व्याख्या से किया गया है। हमने अपनी चर्चा को प्रथम घात और प्रथम कोटि के अवकल समीकरणों तक सीमित रखा। अंत में, इस इकाई में अर्थशास्त्र में अवकल समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा की गई जिसमें सोलो विकास मॉडल की रूपरेखा भी सम्मिलित है।

3.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

<u>बोध प्रश्न 1</u>

1) इन प्रश्नों का समाधान करने के लिए उपभाग 3.3.1 और का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और उदाहरणों का अध्ययन कीजिए।

2) इन प्रश्नों का समाधान करने के लिए उपभाग 3.3.2 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और उदाहरणों का अध्ययन कीजिए।

<u>बोध प्रश्न 2</u>

1) इन समस्याओं का समाधान करने के लिए उपभाग 3.3.3 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और उदाहरणों का अध्ययन कीजिए।

2) इन समस्याओं का समाधान करने के लिए उपभाग 3.3.3 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और उदाहरणों का अध्ययन कीजिए।

<u>बोध प्रश्न 3</u>

1) भाग 3.5 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

2) भाग 3.5 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

इकाई 4 द्वितीय कोटि अवकल समीकरण*

संरचना

4.0 उद्देश्य

हमने पिछली इकाई में प्रथम कोटि अवकल समीकरणों के बारे में पढ़ा। इस इकाई में हम द्वितीय कोटि समीकरणों पर चर्चा करेंगे अर्थात् ऐसी अवकल समीकरणों पर जिनमें उपस्थित अधिकतम कोटि के अवकलज की कोटि 2 हो। इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित संकल्पनाओं से भली–भांति परिचित हो जाएँगे:

- एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण (second-order differential equation) की परिभाषा से;
- द्वितीय कोटि रैखिक और अरैखिक समीकरणों के बीच अंतर से;
- समांगी तथा असमांगी द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों की संकल्पनाओं से;
- द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों से;
- द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोगों से।

4.1 प्रस्तावना

इस भाग में हम अर्थशास्त्र के गतिक प्रक्रमों (dynamic processes) का अध्ययन कर रहे हैं। अर्थशास्त्र के इन गतिक प्रक्रमों के अध्ययन के लिए हम आपको गणित के आवश्यक उपकरणों से लैस कर रहे हैं। अर्थशास्त्र में गतिक प्रक्रमों से हमारा अभिप्राय

* श्री जगमोहन राय, पी.जी.डी.ए.वी. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय

उन प्रक्रमों से हैं जो समय के साथ परिवर्तित होते हैं। अतः, हम गणित की ऐसी विधियों का अध्ययन कर रहे हैं जो हमें यह समझने के योग्य बनाएँगी कि समय में परिवर्तन के साथ किस प्रकार अर्थशास्त्रीय चर परिवर्तित होते हैं अर्थात् ये चर समय के सापेक्ष किस प्रकार परिवर्तित होते हैं।

हमने पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी. 102 के "अर्थशास्त्र में गणितीय विधियाँ" शीर्षक नामक पाठ्यक्रम में भी गतिक प्रक्रमों का अध्ययन किया था। परन्तु वहाँ हमने केवल असंतत गतिक प्रक्रमों के बारे में पढ़ा था। गणित की जिस संकल्पना का हमने इन असंतत गतिक प्रक्रमों के अध्ययन के लिए किया वह थी – अंतर समीकरण। इस पाठ्यक्रम में हम संतत गतिक प्रक्रमों का अध्यन कर रहे हैं अर्थात्, ऐसे गतिक प्रक्रमों का जिनमें समय संतत रूप से परिवर्तित होता है। इन संतत गतिक प्रक्रमों को समझने के लिए हमें गणित की जिस संकल्पना (उपकरण) की हमें आवश्यकता पड़ेंगी, वह है अवकल समीकरण।

पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी. 102 के अंतर समीकरणों (difference equations) का अध्ययन करते हुए हमने अंतर समीकरणों को रैखिक (linear) एवं अरैखिक (non-linear) अंतर समीकरणों में विभाजित किया था। यहाँ अवकल समीकरणों का अध्ययन करने के लिए हमने उन्हें प्रथम कोटि तथा द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों में विभाजित किया है। पिछली इकाई में, हमने प्रथम कोटि अवकल समीकरणों का अध्ययन किया। इस इकाई में हम द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे।

द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों को ठीक से समझने के लिए आइए हम पुनः अवकल समीकरण की परिभाषा पर विचार करें। एक अवकल समीकरण एक ऐसा समीकरण होता है जिसमें अवकलज उपस्थित हों। गणित में यदि व्यापक रूप से देखें तो अवकल समीकरणों में उपस्थित अवकलज किसी भी चर के सापेक्ष हो सकते हैं। अर्थशास्त्र में, चूँकि हम अवकल समीकरणों का उपयोग गतिकी के अध्ययन के लिए करते हैं और गतिकी उन प्रक्रमों का अध्ययन है जो समय पर निर्भर होते हैं, इसलिए इन अनुप्रयोगों में प्रयुक्त होने वाले अवकल समीकरणों में अवकलज समय के सापेक्ष होते हैं। अब यदि हम किसी अवकल समीकरण की कोटि की बात करें तो एक अवकल समीकरण की कोटि, उस अवकल समीकरण में विद्यमान/उपस्थित उच्चतम कोटि वाले अवकलज की कोटि के बराबर होता है। अतः इस इकाई में हम ऐसे अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे जिनमें दो से अधिक कोटि वाले अवकलज विद्यमान न हों। जैसा कि हमने पहले भी उल्लेख किया, हमने अवकल समीकरणों का अध्ययन करते हुए हमने उन्हें रैखिक तथा अरैखिक समीकरणों में विभाजित नहीं किया, जैसे कि अंतर समीकरणों को किया था। वास्तव में, चर्चा को सरल बनाने के लिए द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों पर केन्द्रित इस इकाई में हम केवल द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरणों का ही अध्ययन करेंगे।

आपसे अनुरोध हैं कि अवकल समीकरणों का एक विशेष तथा आधारभूत गुण सदा ध्यान में रखें। जहाँ किसी साधारण बीजगणितीय समीकरण का हल समीकरण में विद्यमान या एक से अधिक चरों के मानों से बनता है, अवकल समीकरणों में ऐसा नहीं होता। एक अवकल समीकरण का हल एक फलन, एक समीकरण के रूप में प्राप्त होता है। एक अवकल समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए हम एक फलन, एक समीकरण की खोज करते हैं जो कि विचाराधीन चर के समय–पथ को दर्शाए। आइए, अब हम इस तथ्य पर गौर करें कि द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों में

द्वितीय कोटि अवकलजों का प्रयोग होता है और इस पर भी कि समय के सापेक्ष। द्वितीय कोटि अवकलजों का महत्व क्या है? आइए, हम अर्थशास्त्र से अलग किसी संदर्भ में इस पर विचार करें। प्रारंभिक भौतिकी में, दूरी या विस्थापन को एक चर लें। दूरी का समय के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करने पर हमें वेग प्राप्त होता है। वेग का समय के सापेक्ष अवकलज करने से हमें त्वरण प्राप्त होता है। अतः, विस्थापन का समय के सापेक्ष द्वितीय अवकलज त्वरण होता है। अर्थशास्त्र में हम समय के सापेक्ष व्यापक मूल्य स्तर में होने वाले परिवर्तन को अवकलज मुद्रा स्फीति में परिवर्तन होता है। इसी प्रकार पूँजी का समय के सापेक्ष अवकलज निवेश को दर्शाता है तथा समय के सापेक्ष पूँजी द्वितीय कोटि अवकलज समय के सापेक्ष निवेश में होने वाले परिवर्तन की दर को दर्शाता है। अतः, एक ऐसे द्वितीय कोटि अवकल समीकरण को हल करने पर, जिसमें पूँजी का समय के सापेक्ष दो बार अवकलन किया गया हो, हमें पूँजी का संतुलन समय–पथ प्राप्त होगा।

अब जबकि आपको द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों का सहज ज्ञान हो चुका है, आइए, हम इस इकाई को किस प्रकार व्यवस्थित किया गया है, इसकी रूपरेखा प्रदान करें। अगले भाग, भाग 4.2 में हम अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों की संरचना का उल्लेख करेंगे। हम इस इकाई में केवल रैखिक अवकल समीकरणों की चर्चा करेंगे। अचर गुणांक वाले अवकल समीकरणों का अर्थ है कि ऐसे समीकरण जिनमें समीकरण में विद्यमान निर्भर चर के तथा उसके अवकलजों के साथ संलग्न गुणांक समय के फलन न होकर अचर होंगे। इससे अगले भाग में, हम समांगी अवकल समीकरणों पर विचार करेंगे। समांगी अवकल समीकरणों में ऐसा कोई पद नहीं हो जिसमें निर्भर चर या उसका कोई अवकलज न हो। दूसरे शब्दों में, समीकरण के प्रत्येक पद में निर्भर चर (अथवा उसका कोई अवकलज) विद्यमान होता है तथा इन सभी पदों का योग शून्य के बराबर होता है। भाग 4.4 में हम असमांगी अवकल समीकरणों पर चर्चा करेंगे। इससे अगले भाग में, अर्थात् भाग 4.5 में, हम द्वितीय कोटि रैखिक समीकरणों के हलों के कुछ गुणधर्मों पर चर्चा करेंगे। इसके पश्चात् इस इकाई में हम द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे।

आइए, हम संकेतन की एक परिपाटी का भी वर्णन कर दें जिसका प्रयोग हम इस पूरी इकाई में करेंगे। मूलतः आपका सामना इस इकाई का अध्ययन करते हुए बार–बार $\frac{dx}{dt}$ अथवा $\frac{d^2x}{dt^2}$ इत्यादि संकेतनों से होगा जोकि चर x के समय t के सापेक्ष अवकलजों को निरूपित करते हैं। सामान्यतः जब किसी चर x का अवकलन किया जाता है, तो इसके प्रथम अवकलज को x' तथा द्वितीय अवकलज को x'' के रूप में लिखा जा सकता है। हम इस इकाई में कहीं–कहीं इस संकेतनों का उपयोग करेंगे। और यह निर्भर चर x अथवा y अथवा किसी अन्य अक्षर से भी व्यक्त किए जा सकते हैं। एक अन्य संकेतन के विधि के बारे में भी बताना आवश्यक है। यदि x का अवकलज समय, t के सापेक्ष एक बार ज्ञात किया जाए तो हम इस s $\dot{x}$ से व्यक्त करेंगे। इसी प्रकार x का समय, t के सापेक्ष द्वितीय अवकलज $\ddot{x}$ से व्यक्त किया जाएगा। आप इन संकेतनों को ध्यान में रखें।

4.2 अचर गुणांक वाले रैखिक अवकल समीकरण

अभी तक हमने केवल प्रथम कोटि के अवकल समीकरणों का अध्ययन किया है। अब हम एक से अधिक कोटि वाले अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ सीखेंगे। हम अपनी चर्चा को केवल द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों तक सीमित रखेंगे। एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों का व्यापक रूप होता है।

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों में भी हम केवल एक विशिष्ट वर्ग के अवकल समीकरणों, अचर गुणांक वाले रैखिक समीकरणों पर भी चर्चा करेंगे। एक n कोटि का अवकल समीकरण रैखिक कहलाता है यदि वह निम्न रूप में लिखा जा सकेः

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = X$$

जहाँ $P_1, P_2, \ldots P_n$ और X केवल x के ही फलन हों। यदि $P_1, P_2, \ldots, P_n$ सभी अचर हों तो हम इसे अचर गुणांक वाला रैखिक अवकल समीकरण कहते हैं। यदि $n = 2$ हो, तो हमें द्वितीय कोटि का एक रैखिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है।

ध्यान दें कि ऊपर दिए अवकल समीकरण में हमने y को निर्भर चर लिया है और y के विभिन्न अवकलज चर x के सापेक्ष लिए हैं। यदि हम निर्भर चर x लें और उसके विभिन्न अवकलज चर t के सापेक्ष लें तो द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता हैः

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

यहाँ गुणांक a और b समय t के फलन हैं। यदि गुणांक a और b समय के फलन न होकर अचर हों, तो हमें अचर गुणांक वाला एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण प्राप्त होता है।

अतः अचर गुणांक वाले एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण का स्वरूप निम्न प्रकार का होता हैः

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = X \qquad (1)$$

जहाँ a_0, a_1, a_2 अचर हैं तथा X केवल का फलन है। यदि हम $\frac{d}{dx}$ के लिए D का प्रयोग करें तथा $\frac{d^2}{dx^2}$ के लिए D^2 का, तो $\frac{dy}{dx}$ को Dy तथा $\frac{d^2 y}{dx^2}$ को $D^2 y$ लिखा जा सकता है तथा अवकल समीकरण (1) को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता हैः

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2) y = X \qquad (2)$$

अथवा

$f(D)y = x$ जहाँ $f(D) = a_0D^2 + a_1D + a_2$

ऊपर दिए अवकल समीकरण (2) में यदि $X = 0$ हो तो वह एक अचर गुणांक वाला समघात रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है। हम सर्वप्रथम अचर गुणांक वाले समघात रैखिक समीकरणों को हल करने की विधि पर विचार करेंगे। अगले भाग में इसी पर चर्चा की गई है।

4.3 समघात समीकरणों के हल ज्ञात करना

अवकल समीकरण $f(D)\,y = 0$ का हल

अवकल समीकरण

$$f(D)y = 0 \tag{3}$$

को हल करने के लिए हम पहले समीकरण

$$f(m) = 0 \tag{4}$$

को हल करते हैं जो कि व्यंजक $f(D)$ में D को m रखकर प्राप्त होता है। अवकल समीकरण (3) का हल, समीकरण $f(m) = 0$ के मूलों की प्रकृति पर निर्भर करता है और $f(m) = 0$ के मूलों की सहायता से एकदम सरलता से लिखा जा सकता है। हम विभिन्न स्थितियों पर एक–एक करके विचार करते हैं। समीकरण $f(m) = 0$, अवकल समीकरण (3) का सहायक समीकरण (auxiliary equation - A.E.) कहलाता है।

स्थिति 1: सहायक समीकरण f (m) = 0 के मूल वास्तविक एवं पृथक हैं।

यदि $m = m_1, m_2$ रैखिक (4) के मूल हैं और $m_1 \neq m_2$ है, तो अवकल समीकरण (3) का हल होगा:

$$y = c_1e^{m1x} + c_2e^{m^{2x}}$$

जहाँ $c_{1,}c_2$ अचर हैं।

उदाहरण 1 : अवकल समीकरण $(D^2 - 5D + 6)y = 0$ को हल कीजिए।

यहाँ $f(D) = D^2 - 5D + 6$ है। अतः, $f(m) = 0$ से हम प्राप्त करते हैं:

$m^2 - 5m + 6 = 0$

इस समीकरण को हल करने पर हम पाते हैं कि $m = 2$ और 3 है।

अतः दिए गए अवकल समीकरण का हल:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

स्थिति 2 : सहायक समीकरण के मूल वास्तविक तथा पुनरावृत्त हैं।

यदि $m = X$ दिए हुए अवकल समीकरण के सहायक समीकरण (A.E.) का एक पुनरावृत्त मूल है तो दिए हुए अवकल समीकरण का हल होगा:

$$y = (c_1 + xc_2)e^{\lambda x}$$

उदाहरण 2 : अवकल समीकरण $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ को हल कीजिए।

हल: सहायक समीकरण है: $m^2 + 4m + 4 = 0$

$\Rightarrow m = -2, -2$

अतः, $m = -2$, दिए गए अवकल समीकरण के सहायक समीकरण का एक पुनरावृत्त मूल है। अतः, दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

$$y = \left(C_1 + xC_2\right)e^{-2x}$$

स्थिति 3 : सहायक समीकरण के मूल सम्मिश्र (imaginary) संख्याएँ हैं (ऐसी सम्मिश्र संख्या $\alpha + i\beta$ जिसका काल्पनिक भाग शून्य न हो अर्थात् $\beta \neq 0$ हो)। ध्यान दें कि वास्तविक गुणांकों वाले किसी समीकरण का यदि एक मूल $\alpha + i\beta$ है, तो $\alpha - i\beta$ भी उसका एक मूल होगा।

यदि $\alpha \pm i\beta$ सहायक समीकरण के मूल हैं तो दिए हुए अवकल समीकरण का हल

$$y = c^{\alpha x}\left[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right] \qquad (5)$$

होगा।

समीकरण (5) हमें किसी अवकल समीकरण के हल को लिखने की मानक विधि दर्शाता है यदि उसके सहायक समीकरण के मूल $\alpha + i\beta$ और $\alpha - i\beta$ हों। यह हल को लिखने का एक सुविधाजनक सूत्र है तथा इसे इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है:

चूँकि $\alpha + i\beta$ और $\alpha - i\beta$ सहायक समीकरण के भिन्न/पृथक मूल हैं (यद्यपि ये वास्तविक नहीं हैं), तो अवकल समीकरण का हल इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$y = Ae^{(\alpha + i\beta)x} + Be^{(\alpha - i\beta)x}$ जहाँ A और B अचर हैं।

$$= e^{\alpha x}\left[Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[A(\cos \beta x + i \sin \beta x) + B\left(\cos \beta x - i \sin \beta x\right)\right]$$

का प्रयोग करने पर

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$

$$= e^{ax}\left[(A + B)\cos \beta x + i\,(A \_ B)\sin \beta x\right]$$

$$= e^{ax}\,(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

प्राप्त करते हैं जहाँ $C_1 = A + B, C_2 = i(A - B)$ है।

उदाहरण 3: $(D^2 + D + 1)y = 0$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल: दिए गए अवकल समीकरण के लिए सहायक समीकरण $m^2 + m + 1 = 0$ है जिसके मूल हैं:

$$m-\frac{1\pm\sqrt{3i}}{2}$$

$$\therefore \alpha=-\frac{1}{2},\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

अतः दिए हुए अवकल समीकरण का हल होगाः

$$y=e^{\frac{-1}{2}x}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$$

ऊपर दी गई विधियाँ तब भी वैध हैं जब हम एक से अधिक कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों की बात कर रहे हैं। d n कोटि के रैखिक अवकल समीकरण के सहायक समीकरण के x मूल होंगे। यदि सभी मूल $x_{1,}x_{2,...,}x_n$ पृथक हों, तो हल होगाः

$$c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+......-+c_ne^{\lambda_n x}$$

यदि λ एक r बार पुनरावृत्ति वाला मूल है, तो व्यापक मूल में इसे मूल का योगदान

$$(c_1+xc_2+.....+x^r c_r)e^{\lambda x}$$

के बराबर होगा।

इसी प्रकार यदि एक सम्मिश्र मूल $\lambda+i\beta$, $\beta\neq0$ है जिसकी दो बार पुनरावृत्ति हो रही है, तो अवकल समीकरण के हल में इस मूल का योगदान

$$e^{\lambda x}\left[(c_1+xc_2)\cos\beta x+(c_3+xc_4)\sin\beta n\right]$$

के बराबर होगा। यदि कोई सम्मिश्र मूल की पुनरावृत्ति दो से अधिक बार हो रही हो, तो उसके संबद्ध हल का भाग लिखा जा सकता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी कोटि 7 के समीकरण के सहायक समीकरण के मूल m =2, 3, 4, 4,4, $-1\pm7i$ हों तो उसका व्यापक हल होगाः

$$y=c_1e^{2x}+C_2e^{3x}+(C_3+xC_4+x^2C_3)e^{4x}$$

$$+e^{-x}\left[c_6\cos7x+c_1\sin7x\right]$$

<u>बोध प्रश्न 1</u>

1) नीचे दिए गए रैखिक अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कीजिएः

   i) $\left(D^2-9D+18\right)y=0$

   ii) $\left(D^2-6D+9\right)y=0$

   iii) $(D^2+D+4)y=0$

....

....

....

....

....

....

2) नीचे दिये गये समीकरण का हल ज्ञात कीजिए:

i) $(D^2+4D+4)y=0$

ii) $6\frac{d^2y}{dx^2}+13\frac{dy}{dx}+6y=0$

iii) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+1=0$

....

....

....

....

....

अभी तक हमने ऐसे रैखिक अवकल समीकरणों की चर्चा की है जिनके लिए $X=0$ था। अगले भाग में हम ऐसे अवकल समीकरणों की चर्चा करेंगे जिनमें X शून्य नहीं है। अर्थात् रैखिक अवकल समीकरण असमांगी (non-homogeneous) समीकरण हों।

4.4 असगांमी समीकरण

अवकल समीकरणों का हल $f(D)y=X, X\neq 0$

जब $X\neq 0$ हो, तो अवकल समीकरण

$$f(\mathrm{D})y=X,\ \mathrm{X}\neq 0 \qquad (6)$$

के हल के दो भाग होते हैं: पूरक फलन (Complementary Function - C.F.) तथा विशेष/विशिष्ट समाकलन (Particular Integral - P.I)। अवकल समीकरण (6) का पूरक फलन $f(D)\ Y=0$ उसके संगत (3) में दिए अवकल समीकरण का हल होता है और इकाई 3 में दी गई विधियों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। अवकल समीकरण (6) का विशेष/विशिष्ट समाकलन (1) में दिए अवकल समीकरण का कोई भी विशेष हल (बिना स्वच्छ अचर के) हो सकता है और यह हल फलन X पर निर्भर करता है। समीकरण (6) का व्यापक हल पूरक फलन तथा विशेष समाकलन ज्ञात करने की विधियों का वर्णन कर रहे हैं। पुनः हम केवल समीकरण (1) में दिए द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण पर ही विचार करेंगे।

स्थिति 1: जब X एक अचर हो।

यहाँ X एक अचर है। मान लीजिए X = a है और a एक अचर है।

अतः अवकल समीकरण (1) को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$a_0\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=X \qquad (7)$$

क्योंकि विशेष समाकलन अवकल समीकरण का कोई भी हल हो सकता है। हम y = k को हल के रूप में लेते हैं, जहाँ k एक अचर है। इससे हम पाते हैं कि $\frac{dy}{dx}=0$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ होगा और समीकरण (7) $a_2k=a_1$ बन जाएगा। इससे हम पाते हैं कि k = $\frac{a}{a_2}$ है।

∴ हम पाते हैं कि विशेष समाकलन $y_p=\frac{a}{a_2}$ (8)

है यदि $a_2\neq 0$ है।

यदि $a_2=0$ है, तो व्यजंक $\frac{a}{a_2}$ अवैध हो जाएगा और समीकरण (8) में प्राप्त विशेष समाकलन वैध नहीं होगा। अर्थात् अचर हल समीकरण एक वैध हल देने में असमर्थ साबित हुआ है। अब हम $y=kx$ को एक हल के रूप में लेकर जाँच करते हैं कि यह संभव है अथवा नहीं।

यदि $y=kx$ है तो हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx}=k \text{ तथा } \frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad (9)$$

होगा। साथ ही, क्योंकि $a_2=0$ है, अवकल समीकरण (7) बन जाता है:

$$a_0\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}=a$$

इस समीकरण में, समीकरण (9) में प्राप्त $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx_2}$ के मान रखने पर हम पाते हैं कि यह समीकरण

$a_1k=a$ अथवा $k=\frac{a}{a_1}$

बन जाता है। अतः हम पाते हैं कि विशेष समाकलन = kx

$$y_p=\frac{a}{a_1}x$$

हो जाता है।

पुनः इसके लिए यह आवश्यक है कि $a_1 \neq 0$ हो। यदि $a_1 = 0$ है, तो यह हल काम नहीं करता और हम अगले संभव सरलतम हल को चुनते हैं जो कि $y = kx^2$ है। अवकल समीकरण (7) में $y = kx^2$ रखने पर हम पाते हैं कि $k = \frac{a}{2}$ होगा। अतः विशेष समाकलन (P.I.)

$$y_p = \frac{a}{2}x^2 \cdot \text{ होगा।}$$

ऊपर की गई चर्चा को हम संक्षेप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

अवकल समीकरण

$$a_0 \frac{d^2y}{dx_2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = a$$

का विशेष समाकलनः

$$y_p = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a_2} & \text{यदि } a_2 \neq 0 \\ \dfrac{a}{a_1}x & \text{यदि } a_2 = 0 \text{ but } a_1 \neq 0 \\ \dfrac{a}{a_2}x^2 \text{ यदि } a_2 = a_1 = 0 & \cdots \end{pmatrix} \vdots$$

होगा और इस प्रकार प्राप्त विशेष समाकलन को हम दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल लिख सकते हैं जोकि

$$y = C.F. + P.I. \text{ होगा।}$$

हम इस विधि को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 4. अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए: $\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} + 28y = 16.$

हल : इस स्थिति में सहायक समीकरण $7m^2+11m+28 = 0$ है जिसके मूल $m = -7$, -4 हैं। अतः इसका पूरक फलन (C.F.) $C_1\, e^{-7x} + C_2\, e^{-4x}$ होगा।

हम देख सकते हैं कि इस स्थिति में y का गुणांक शून्य नहीं हैं, अतः विशेष समाकलन

$\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ होगा।

$\therefore$ दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है:

$$\begin{aligned} y &= \text{C.F.} + \text{P.I.} \\ &= C_1 e^{-7x} + C_2 e^{-4x} + \frac{4}{7} \end{aligned}$$

उदाहरण 5 : अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = 11$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल: हम सरलता से देख सकते हैं कि इस अवकल समीकरण का पूरक फलन

$$C.F. = c_1 + c_2 e^{-5x} \text{ है।}$$

क्योंकि इस अवकल समीकरण में y का गुणांक 0 है परन्तु $\frac{dy}{dx}$ का गुणांक 5 है (जोकि शून्य नहीं है) हम विशेष समाकलन

$$\text{P.I.} = \frac{11x}{5}$$

प्राप्त करते हैं। अतः इसका व्यापक हल

$$y = c_1 + c_2 e^{-5x} + \frac{11x}{5} \text{ है।}$$

उदाहरण 6 : अवकल समीकरण $7\frac{d^2y}{dx^2} = 6$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल: इस स्थिति में y और $\frac{dy}{dx}$ दोनों के गुणांक शून्य के बराबर हैं, अतः इसका विशेष समाकलन $\frac{6}{2}x^2$. होगा, अर्थात् $y_p = 3x^2$ है।

आप इस अवकल समीकरण का पूरक फलन ज्ञात करके इसका व्यापक हल लिख सकते हैं।

स्थिति 2 : जब X एक अचर न हो।

जब किसी अचर गुणांकों वाले अवकल समीकरण, $f(D)y = x$ में समीकरण के दाएँ पक्ष का व्यंजक X का एक फलन D हो तो हम इसका विशेष समाकलन अनिर्धारित गुणांकों की विधि द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

इस विधि का उपयोग

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = x$$

के प्रकार के अवकल समीकरणों का हल ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है, जहाँ X एक ऐसा फलन हो जिसके लिए विशेष समाकलन का अनुमान लगाया जा सके। यह विधि इस प्रकार है: हम यह मान लेते हैं कि y_p, X के प्रकार का ही एक फलन/व्यंजक है जिसमें गुणांक अनिर्धारित हैं। यह व्यंजक X में उपस्थित पदों तथा उनके अवकलजों के संयोजन से बनता है। इन अनिर्धारित गुणांकों को y_p तथा इसके अवकलजों को दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करके ज्ञात किया जा सकता है। हम इस विधि को कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करते हैं। यह उदाहरण द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरणों के हलों की प्रकृति स्पष्ट करने में भी हमारी सहायता करेंगे।

4.5 हलों की प्रकृति

उदाहरण 7: अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए:

$$y'' + y' + y = 5e^{4x} \tag{10}$$

हल : हम केवल विशेष समाकलन, अर्थात, P.I. ज्ञात करेंगें। आप पूरक फलन (C.F.) स्वयं ज्ञात कर सकते हैं। इस उदाहरण में $X = 5\,e^{4x}$ है। क्योंकि e^{4x} के सभी संभव अवकलजों में e^{4x} सम्मिलित होता है, हम $y_p = ke^{4x}$ लेते हैं। अतः, हम पाते हैं कि

$y_P' = 4ke^{4x}, y_P'' = 16ke^{4x}$

है। इन्हें समीकरण (10) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$16ke^{4x} + 4ke^{4x} + ke^{4x} = 5e^{4x}$$

$$\Rightarrow 21ke^{4x} = 5e^{4x}$$

$$\Rightarrow 21k = 5, \Rightarrow k = \frac{5}{21}$$

$$\therefore y_P = \frac{5}{21}e^{4x}$$

अवकल समीकरण (10) का व्यापक हल पूरक फलन और विशेष समाकलन को जोड़कर प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 8 : अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए:

$$y'' + 2y' + 2y = e^x + \sin x \qquad (11)$$

हलः इस अवकल समीकरण का पूरक हल

C.F. = $e^{-x}(c_1 \cos x + C_1 \sin x)$ है।।

इसका विशेष समाकलन (P.I.) ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि यहाँ $X = e^x + \sin x$ है। क्योंकि e^x का अवकलज e^x तथा Sin x का अवकलज Cos x होता है, हम विशेष समाकलन में e^x, Sin x और Cos x को सम्मिलित करते हैं। अर्थात्, विशेष समाकलन को $y_p = a e^x + b \sin x + c \cos x$ लेते हैं। इसे अवकल समीकरण (11) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$(ae^x - b\sin x - c\cos x) + 2(ae^x + b\cos x - c\sin x + 2(ae^x + b\sin x + c\cos x)$$

$$= e^x + \sin x$$

$$\Rightarrow 5ae^x + (b-2c)\sin x + (c+2b)\cos x = e^x + \sin x$$

$$\Rightarrow 5a = 1, b - 2c = 1, c + 2b = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{5}, c = \frac{-2}{5}$$

$$\therefore y_P = \frac{1}{5}e^x + \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$$

अतः, अवकल समीकरण (11) का व्यापक हल है:

y = पूरक फलन (C.F.) + विशेष समाकलन (P.I.)

$$= e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{5}e^x + \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$$

बोध प्रश्न 2

1) समघाती व असंगामी द्वितीय कोटि अवकल समीकरण में क्या अंतर है?

....

....

....

....

....

2) नीचे दिए अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए:

$y'' + y' - 2y = -2e^{-x} - 5\cos x$

i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 1 + x^2$

ii) $y'' + 2y' + y = x - e^x$

iii) $y'' + y + 1 = e^{2x}$

iv) $y'' + 5y' + 3y = 6t^2 - t - 1$

....

....

....

....

....

4.6 अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग

इस भाग में हम अर्थशास्त्र में द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों के दो अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे। आइए, हम उपभोक्ता माँग में अवकल समीकरणों के अनुप्रयोग से प्रारंभ करें।

4.6.1 उपभोक्ता माँग

कुछ बाज़ारों में, उपभोक्ता प्रचलित/विद्यमान कीमतों के रूझानों/की प्रवृत्तियों का अनुमान लगाने का प्रयास कर सकता है, और इसका भी कि कीमतें कितनी तेजी से परिवर्तित होती रही हैं। मान लीजिए, कीमत p समय (जिसे हम t से निरूपित करते हैं) का एक फलन है, अर्थात् $p(t)$ है। इसका प्रथम अवकलज $p'(t)$ कीमत के परिवर्तन की दर को निरूपित करता है और द्वितीय अवकलज $p''(t)$ अथवा $\ddot{p}$ यह दर्शाता है कि $p'(t)$ अथवा $\dot{p}$ किस दर पर परिवर्तित होता है। यदि $\dot{p} > 0$ है लेकिन $\ddot{p} < 0$ है, क्रेता यह देख पाएँगे कि यद्यपि कीमत बढ़ रही हैं, यह घटती दर पर बढ़ रही हैं, और उनमें दूरदृष्टि है कि समय के साथ (अंततः) कीमतें संतुलित हो जाएँगी।

आइए, हम बाज़ार के विश्लेषण में माँग तथा पूर्ति दोनों कारकों को सम्मिलित करें। हम केवल कीमत p लेते हैं तथा अपेक्षित कीमत के लिए अलग संकेतन (separate notation) p^e का प्रयोग नहीं करेंगे। मान लीजिए हम केवल वस्तु की कीमत ही नहीं, कीमतों के स्वतंत्र चर समय के सापेक्ष प्रथम और द्वितीय कोटि अवकलजों को भी माँग और पूर्ति दोनों फलनों में सम्मिलित करते हैं। मान लीजिए, आपूर्ति की मात्रा Q_s है और

$$Q_s = f[p(t)p'(t), p''(t)]$$

के बराबर है। इसी माँग की मात्रा Q_d

$Q_d = g[p(t)p'(t), p''(t)]$ के रूप में लिखी जा सकती है।

यदि हम रैखिक पूर्ति एवं माँग ले तों पूर्ति एवं माँग फलनों का स्वरूप होगाः

$$Q_d = \alpha - \beta p + k\dot{p} + l\ddot{p}$$

$$Q_s = -\gamma + \delta p + u\dot{p} + v\ddot{p}$$

यहाँ हम मानते हैं कि $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ हैं परन्तु k, l, u और v के चिन्हों पर कोई प्रतिबंध नहीं रखते जिसमें उपभोक्ता की कीमत के प्रति अपेक्षाओं को ध्यान में रखा जा सके। यदि $k > 0$ होगा, तो कीमत में वृद्धि, माँग Q_d को बढ़ा देगी। दूसरी ओर, l उपभोक्ता की कीमतों की बढ़ोतरी की प्रवृत्ति के प्रति अपेक्षाओं को दर्शाता है। इसी प्रकार u और v विक्रेताओं की कीमतों तथा कीमतों में परिवर्तन के प्रति अपेक्षाओं को दर्शाते हैं। यदि हम यह मानें कि बाज़ार किसी समय विशेष पर समय के दौरान स्पष्ट होता है तो हम नीचे दी संतुलन प्रतिबंध (equilibrium condition) प्राप्त कर सकते हैं।

$$\ddot{p} + \frac{k}{l}\dot{p} - \frac{\beta+\delta}{l}p = -\frac{\alpha+\gamma}{l}$$

यह एक द्वितीय कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है जिसका हल और कीमत का समय पथ ज्ञात किया जा सकता है।

4.6.2 मुद्रा स्फीति एवं बेरोज़गारी

प्रारंभ में समष्टिगत अर्थशास्त्र के संदर्भ में मौद्रिक मजदूरी की वृद्धि की दर तथा बेरोज़गारी की दर में प्रतिलोमी सम्बन्ध (inverse relation) माना जाता था। यदि मौद्रिक मजदूरी w है और मौद्रिक मजदूरी की वृद्धि की दर $\frac{\dot{W}}{W} = w$ है और बेरोज़गारी की दर U है, तो w और U में एक ऋणात्मक सम्बन्ध माना जाता था।

$w = f(U)$ जबकि $f'(U) < 0$ है।

समय के साथ यह सोचा गया कि बेरोज़गारी की दर तथा मुद्रा स्फीति की दर (rate of inflation) में एक ऋणात्मक सम्बन्ध है। यदि P कीमत को निरूपित करता है तो P की वृद्धि की दर को $\frac{\dot{P}}{P} = p$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। यह p ही मुद्रा स्फीति की दर है। यदि हम मान लें कि कोई अंकित मूल्य निर्धारण (mark-up pricing) है अर्थात् यदि मजदूरी में वृद्धि के कारण कीमतों में वृद्धि होती है, तो w में वृद्धि p को ऊपर की ओर धकेलगी। इसका अर्थ है कि मौद्रिक मजदूरी में वृद्धि, मुद्रा स्फीति को जन्म देगी। दूसरी ओर, श्रम दक्षता में वृद्धि (जिसे हम E से व्यक्त करते हैं) से p नीचे की ओर जाएगा। इसे हम इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

$$p = w - E$$

यदि हम समीकरण $w = f(U)$ को रैखिक मानें, और p और w में सम्बन्ध दर्शाने वाले समीकरण में *f(U)* को प्रतिस्थापित करें, तो हम प्राप्त करते हैं:

$p = \alpha - \beta U - E$ जहाँ α, $\beta > 0$

है। अब यदि हम अपेक्षित मुद्रा स्फीति को p^e से व्यक्त करें तो प्रत्याशा–संवर्धित (*expectations-augmented*) फिलिप वक्र (Phillips curve) जैसा कि अर्थशास्त्रियों मिल्टन फ्रैडमेन (Milton Friedman) और एडमंड फेल्पस (Edmund Phelps) द्वारा बनाया गया, इस प्रकार लिखा जाना चाहिएः

$$w = f(U) + hp^e \quad \text{जहाँ } 0 < h \le 1$$

इस समीकरण का अर्थ है यदि लोगों (व्यक्तियों) की किसी समय अंतराल में मुद्रा स्फीति के प्रति प्रत्याशा/अपेक्षा है तो मौद्रिक मजदूरी में वृद्धि इस प्रत्याशा/अपेक्षा/अनुमान से प्रभावित होगी। और क्योंकि हम पहले देख चुके हैं कि w, p (मुद्रा स्फीति की दर) को प्रभावित करता है, हम प्रत्याशा–संवर्धित फिलिप का वक्र को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैंः

$$p = \alpha - \beta U - E + hp^e$$

यह प्रत्याशाएँ किस प्रकार रूप लेती हैं इसके लिए हमारे पास जो सिद्धान्त होना चाहिए। फ्रैडमेन ने एक अनुकूलक प्रत्याशा सूत्रीकरण (adaptive expectations formulation) की परिकल्पना की जो कि इस प्रकार हैः

$$\frac{dp^e}{dt} \ \phi\,(p - p^e)\, 0 < \phi \le 1$$

यह समीकरण बतलाता है कि यदि p, p^e से अधिक हो जाए, तो मुद्रा स्फीति की अपेक्षित दर में ऊपर की ओर संशोधन (upward revision) होगा।

क्योंकि p अथवा p^e समय के सापेक्ष प्रथम अवकलज हैं, तो प्रत्याशा–संवर्धित फिलिप का वक्र, अनुकूलक प्रत्याक्षा समीकरण के साथ मिलकर एक द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरण प्रदान करेगा, जिसके हल की हम छानबीन कर सकते हैं। यह हल हमें व्यापक मूल्य स्तर के समय पथ के बारे में जानकारी प्रदान करेगा।

बोध प्रश्न 3

1) मान लीजिए माँग तथा पूर्ती है

$$Q_d = q - \dot{p} + 3\ddot{p}$$

$$Q_s = -1 + 4p - \dot{p} + 5\ddot{p}$$

जहाँ p (0) = 4 तथा $\dot{p}(0) = 4$

समय पथ ज्ञात करें, इस अवधारणा के साथ कि हर समय–बिन्दु में बाज़ार संतुलन में है। यह भी ज्ञात करें कि समय पथ अभिसृत है या नहीं।

....

....

....

....

....

2) द्वितीय कोटि अवकलन समीकरण का उपयोग करते हुये बेरोज़गारी तथा मुद्रा स्फिती के बीच परस्पर क्रिया का एक सरल सदृश (model) प्रदान करें।

....

....

....

....

....

4.7 सारांश

यह इकाई ऐसी दूसरी तथा अंतिम इकाई थी जिसमें हमने अवकल समीकरणों पर चर्चा की। इस इकाई में हमने अवकल समीकरणों का अध्ययन वहाँ से प्रारंभ किया जहाँ हमने पिछली इकाई में छोड़ा था। यह इकाई हमने अवकल समीकरणों की संकल्पना की पुनरावृत्ति से प्रारंभ की तथा इसमें द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों के महत्व पर चर्चा की। सर्वप्रथम हमने एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण के मूलभूत सूत्रीकरण पर चर्चा की। तत्पश्चात् यह देखा कि यदि एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण के गुणांक अचर होंगे तो वह कैसा दिखेगा। इसके पश्चात् हम इकाई में संगामी तथा असमांगी द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरणों पर बात की गई। इस इकाई में द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरणों के हल की प्रवृत्ति पर भी चर्चा की गई। अंत में, हमने द्वितीय कोटि रैखिक समीकरणों के अर्थशास्त्र में दो अनुप्रयोगों पर चर्चा की जिनमें से एक व्यष्टि अर्थशास्त्र के सरल माँग–पूर्ति विश्लेषण में अपेक्षाओं पर केन्द्रित था तथा दूसरा समष्टिगत अर्थशास्त्र के संदर्भ में प्रत्याशा–संवर्धित फिलिप के वक्र पर।

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) इन प्रश्नों का समाधान करने के लिए भाग 4.2 और 4.3 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और उदाहरणों का अध्ययन कीजिए।

2) इन प्रश्नों का समाधान करने के लिए भाग 4.3 का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें और उत्तर दें।

बोध प्रश्न 2

1) इन प्रश्नों का समाधान करने के लिए भाग 4.4 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और उदाहरणों का अध्ययन कीजिए।

2) इन प्रश्नों का समाधान करने के लिए भाग 4.4 और 4.5 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

बोध प्रश्न 3

1) उपभाग 4.6.1 का अध्ययन करें और उत्तर दें।

2) उपभाग 4.6.2 का अध्ययन करें।