खंड 3

रैखिक बीजगणित

खण्ड 3 : एक परिचय

यह वर्तमान पाठ्यक्रम का तीसरा खण्ड है और इसका शीर्षक हैः **रैखिक बीजगणित**। जैसा कि नाम ही सुझा रहा है यहाँ रैखीय समीकरणों, उनके तन्त्रों तथा अंतक्रियाओं एवं समाधानों पर चर्चा होगी। इसमें तीन इकाइयाँ हैं। इकाई 5 का शीर्षक है **सदिश एवं सदिश बितान**, यहाँ संख्याओं के क्रमित n-युग्मों पर चर्चा की गई हैं। इसी इकाई में सदिशों के ज्यामितिक और बीजगणितीय गुणधर्मों पर भी चर्चा हुई है। अगली इकाई **आव्यूहों और सारणिक** पर है। आव्यूह ही रैखिक बीजगणित का आधार है। वर्ग आव्यूह नामक विशेष प्रकार के आव्यूहों के लिए हम निर्धारकों की रचना करते हैं और इनका मान एक संख्या मात्र होता है। खण्ड 3 की अंतिम इकाई (इकाई 7) का शीर्षक **रैखिक आर्थिक प्रतिमान** है। यहाँ इकाई 5 और 6 की संकल्पनाओं को साथ लाकर अर्थशास्त्र में उनके अनुप्रयोगों को स्पष्ट किया गया है।

इकाई 5 सदिश एवं सदिश बितान*

संरचना

5.0 उद्देश्य

5.1 प्रस्तावना

5.2 सदिश

5.2.1 सदिश का अर्थ

5.2.2 सदिशों के प्रकार

5.2.3 सदिशों का ज्यामितीय निरूपण

5.3 सदिशों पर बीजगणितीय संक्रियाएँ

5.3.1 सदिशों का योग

5.3.2 सदिशों का व्यवकलन

5.3.3 एक सदिश एवं एक अदिश का गुणन

5.4 सदिशों का रैखिक संचय तथा उनकी रैखिक निर्भरता

5.5 सदिशों का आंतर गुणन

5.6 सदिश बितान

5.7 एक सदिश का मानक तथा सदिशों की लांबिकता

5.8 सारांश

5.9 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

5.0 उद्देश्य

यह इकाई, खण्ड की तीन इकाइयाँ में से प्रथम इकाई है। यह खण्ड गणित की उस शाखा पर केन्द्रित है जिसे रैखिक बीजगणित कहते हैं। यह इकाई रैखिक बीजगणित के अध्ययन के आधार को स्थापित करती है तथा गणित की महत्वपूर्ण संकल्पना सदिशों पर आधारित हैं। इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित से भली–भाँति परिचित हो जाएँगे:

- सदिश (vector) की संकल्पना से तथा एक सदिश और एक अदिश (scalar) के मध्य अन्तर से;
- सदिशों की ज्यामितीय (geometrically) निरूपण की विधि से;
- सदिशों पर की जाने वाली विभिन्न बीजगणित (algebraic) संक्रियाओं (operations) जैसे कि योग, व्यवकलन तथा एक सदिश और एक अदिश के गुणन से;
- दो सदिशों के आंतर गुणन (inner product) की संकल्पना से;
- सदिशों के रैखिक संचय तथा उनकी रैखिक निर्भरता की संकल्पना से;

* सौगतो सेन, इग्नू

- एक सदिश के मानक तथा सदिशों की लांबिकता से; और
- सदिश बितान (vector space) की संकल्पना से।

5.1 प्रस्तावना

यह इकाई रैखिक बीजगणित अर्थात् रैखिक समीकरणों के अध्ययन से प्रारंभ होती है जिनमें युगपत रैखिक समीकरण (simultaneous linear equations) विशिष्ट हैं। यह खण्ड रैखिक बीजगणित पर आधारित है। रैखिक बीजगणित के अध्ययन में कुछ विशिष्ट गणितीय संकल्पनाओं जैसे कि आव्यूहों (Matrices) की आवश्यकता होती है। अगली इकाई में आप आव्यूहों के बारे में विस्तार से अध्ययन करेंगे। इस स्तर पर हमें केवल इतना कहना है कि एक आव्यूह (जिनका बहुवचन आव्यूहों है) वास्तविक संख्याओं का एक आयताकार (rectangular array) है। ये संख्याएँ पंक्तियों (क्षैतिज – horizontally) तथा स्तंभों (ऊर्ध्वाधर – vertically) में व्यवस्थित होती हैं। यदि हम संख्याओं की केवल एक पंक्ति या एक ही स्तंभ वाले आव्यूह को एक सदिश कहते हैं।

आइए हम कुछ देर के लिए आव्यूहों के उपयोग के बिना, सदिशों का अध्ययन स्वतंत्र रूप से करें। एक सदिश क्या होता है? सदिशों पर कौन सी संक्रियाएँ की जा सकती हैं? एक सदिश का रैखिक चित्रण किस प्रकार किया जा सकता है? एक "सदिश बितान" से हम क्या समझते हैं। इसके अतिरिक्त, सदिशों किस प्रकार अर्थशास्त्र के अध्ययन में उपयोगी सिद्ध होते हैं? अर्थशास्त्र में सदिशों के क्या अनुप्रयोग हैं? इस इकाई में हम इन प्रश्नों के उत्तर ढूँढ़ेंगे।

अगले भाग में, हम सदिशों का अध्ययन उनकी परिभाषा तथा अर्थ से प्रारंभ करते हैं। हम कुछ विशिष्ट प्रकार के सदिशों का उल्लेख करते हैं तथा देखते हैं कि किसी सदिश को रेखाचित्र द्वारा किस प्रकार निरूपित किया जा सकता है। भाग 5.3 में हम सदिशों के योग तथा व्यवकलन जैसी संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे, और यह भी जानेंगे कि यदि हम एक सदिश को एक अदिश से गुणा करें तो क्या होता है। इससे अगले भाग, अर्थात् भाग 5.4 में हम आपका परिचय रैखिक संचय की संकल्पना से करवाएँगे तथा इसके आधार पर रैखिक रूप से निर्भर तथा स्वतंत्र सदिशों का अध्ययन करेंगे। भाग 5.5 में हम सदिशों के गुणन पर चर्चा करेंगे। यह गुणज, भाग 5.3 में एक सदिश और एक अदिश के गुणन पर की गई चर्चा से भिन्न है। इसे सदिशों का आंतर गुणन (inner product of vectors) कहते हैं। अगले भाग में "सदिश बितान" की संकल्पना पर चर्चा की जाएगी जहाँ आप जानेंगे कि इस सदंर्भ में "बितान" का क्या अर्थ है तथा सदिशों के बितान से हमारा क्या तात्पर्य है। अंतिम भाग में एक सदिश की लम्बाई (length) (जिसे एक सदिश का परिमाण (norm of a vector) कहते हैं की संकल्पना की चर्चा की गई है तथा उस स्थिति पर भी विचार किया गया है जब दो सदिश (ज्यामितीय चित्रण में) एक दूसरे के लंबवत् हों। ऐसे सदिशों को लंबकोणिक अथवा लांबिक सदिश (orthogonal vectors) कहते हैं। इस पूरी इकाई में सदिशों के अध्ययन के साथ–साथ अर्थशास्त्र में उनके अनुप्रयोगों पर भी चर्चा की गई है तथा सदिशों का सम्बन्ध कुछ ऐसी संकल्पनाओं के साथ दर्शाया गया है जिनका अध्ययन आपने अर्थशास्त्र के अन्य पाठ्यक्रमों जैसे कि व्यष्टिगत अर्थशास्त्र तथा समष्टिगत अर्थशास्त्र में किया होगा।

5.2 सदिश

आइए, अब हम सीधे एक सदिश की परिभाषा की ओर चलें। एक सदिश केवल उन अवयवों/संख्याओं द्वारा ही वर्णित नहीं होता जो उसमें सम्मिलित होती हैं वरन् उन संख्याओं का क्रम भी महत्वपूर्ण होता है।

5.2.1 सदिश का अर्थ

मान लीजिए एक उपभोक्ता दो वस्तुओं, सेब और केल का उपभोग कर रहा है। मान लीजिए, हम इन दोनों वस्तुओं के उपभोग के विभिन्न संचयों को संख्याओं के एक युग्म द्वारा व्यक्त करते हैं, जिनमें से पहली संख्या उपभोक्ता द्वारा उपभोग किए गए सेब की संख्या को तथा दूसरी संख्या केलों की संख्या को दर्शाती है। मान लीजिए कि उपभोक्ता ने 5 सेब तथा 3 केलों का उपभोग किया, हम इसे (5, 3) से दर्शा सकते हैं अर्थात् संख्याओं के एक युग्म से जिन्हें एक कोष्ठक में रखकर अर्द्धविराम (, comma) द्वारा अलग किया गया है। इस सदंर्भ में यदि हम संख्या युग्म (3, 7) देखते हैं तो यह हमें दर्शाता है कि उपभोक्ता ने 3 सेब तथा 7 केलों का उपभोग किया है। संख्याओं, प्राचलों (Parameters) अथवा चरों के क्रमित युग्म को एक सदिश कहते हैं। हम सदिशों को वास्तविक संख्याओं के एक क्रमित समुच्चय के रूप में लेंगे। सामान्यतः सदिशों को व्यक्त करने के लिए लघु कोष्ठकों () या वर्ग कोष्ठकों [ ] का प्रयोग किया जाता है। हम सदिशों को व्यक्त करने के लिए वर्ग कोष्ठकों का प्रयोग करेंगे। सदिश में प्रयुक्त होने वाली संख्याएँ, सदिश के अवयव कहलाती हैं। सदिश को लिखते हुए, कोष्ठकों के अन्दर उसके विभिन्न अवयवों को अर्द्ध विराम से अलग करना आवश्यक नहीं है।

एक सदिश की परिभाषा को स्पष्ट करने के लिए हम एक सरल उदाहरण के द्वारा कर सकते हैं। मान लीजिए, एक उपभोक्ता दो वस्तुओं x और y की क्रमशः x_1 और y_1 मात्रा खरीदता है। हमें इसे एक स्तंभ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

या एक पंक्ति

$$[x_1, y_1]$$

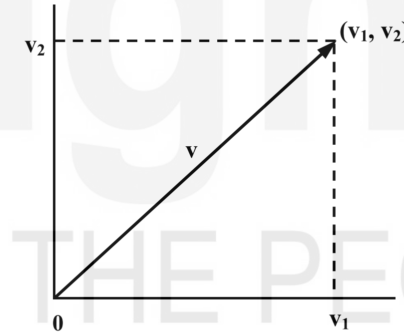
के रूप में लिख सकते हैं।

इस प्रकार प्राप्त संख्याओं का स्तंभ अथवा पंक्ति को एक सदिश कहते हैं। यदि सदिश एक स्तंभ के रूप में व्यक्त किया गया हो तो उसे एक *स्तंभ सदिश* (*column vector*) कहते हैं और यदि एक पंक्ति के रूप में व्यक्त किया गया हो एक उसे एक *पंक्ति सदिश* (*row vector*) कहते हैं। कोष्ठक के अन्दर की प्रत्येक प्रविष्टि, सदिश का अवयव (*component*) कहलाती है। स्तंभ सदिशों को सामान्यतः अंग्रेज़ी वर्णमाला के छोटे गाढ़े (bold) अक्षरों द्वारा व्यक्त किया जाता है जैसे कि **u, v** इत्यादि तथा पंक्ति सदिशों को **u', v'** द्वारा। ध्यान दें कि अवकलन गणित के संदर्भ में चिन्ह $'$ का प्रयोग अवकलजों को व्यक्त करने के लिए भी किया जाता है। आप इस चिन्ह के विभन्न प्रयोगों से भ्रमित न हों। ऊपर दिए, स्तंभ तथा पंक्ति, दोनों सदिशों में दो–दो अवयव होते हैं/प्रविष्टियाँ होती हैं और इन सदिशों को 2–सदिश या 2–विमीय अथवा द्विविमीय सदिश कहा जाता है। यदि किसी सदिश में 3 प्रविष्टियाँ/अवयव होते हैं तो उसे 3–सदिश अथवा त्रिविमीय सदिश कहा जाता है, इसी प्रकार यदि किसी n प्रविष्टियों वाले सदिश को n-सदिया या n विमीय सदिश कहा जाता है। मान लीजिए, एक उपभोक्ता n वस्तुओं का उपभोग करता है। मान लीजिए वह इन वस्तुओं की $(x_1, x_2, ..., x_n)$ मात्राओं का उपभोग करता है। यदि एक n-सदिश है। हम इसे $\mathbf{x}'$ से व्यक्त करते हैं। यहाँ $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, ..., x_n)$ हैं। इसे एक स्तंभ सदिश के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

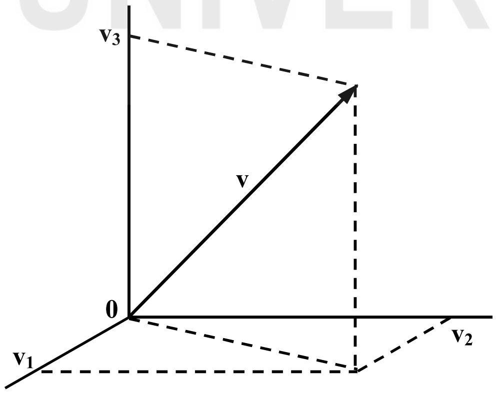
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

इसी प्रकार, यदि इन n वस्तुओं की कीमतें $[p_1, p_2, ..., p_n]$ है जहाँ p_i i = 1,2,3,…,n के लिए वस्तु i की कीमत है, तो $[p_1, p_2, ..., p_n]$ को एक पंक्ति स्तंभ $\mathbf{p}'$ = $[p_1, p_2, ..., p_n]$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

जिसे आपने विद्यालय में विज्ञान के पाठ्यक्रमों में सदिशों के बारे में पढ़ा है, वे स्मरण करें कि सदिश एक ऐसी वस्तु है जिनमें परिणाम एवं दिशा दोनों होते हैं जबकि अदिशों में केवल परिमाण होता है। जब हम सदिशों के ज्यामितीय निरूपण (geometric representation) की बात करेंगे तो सदिशों पर इस दृष्टिकोण से भी चर्चा करेंगे।



रेखाचित्र 5.1:



रेखाचित्र 5.2

5.2.2 सदिशों के प्रकार

सदिश कई प्रकार के होते हैं। इनमें से इकाई सदिश (*unit* vector) का विशेष महत्व है। एक 2–सदिश, इकाई सदिश कहलाता है यदि वह $\mathbf{u}' = [1\ 0]$ अथवा $\mathbf{v}' = [0\ 1]$ के प्रकार का हो। यदि इन सदिशों का कार्तीय तल (Cartesian Plane) में ज्यामितीय

निरूपण किया जाए तो ये क्रमशः, x–अक्ष या y–अक्ष के संपाती होते हैं। अगले उपभाग में हम सदिशों के ज्यामितीय निरूपण पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

शून्य सदिश (*null* vector) सदिशों का एक अन्य महत्वपूर्ण प्रकार है। एक शून्य सदिश की सभी प्रविष्टियाँ शून्य होती हैं

$\mathbf{u}' = [1\ 0]$

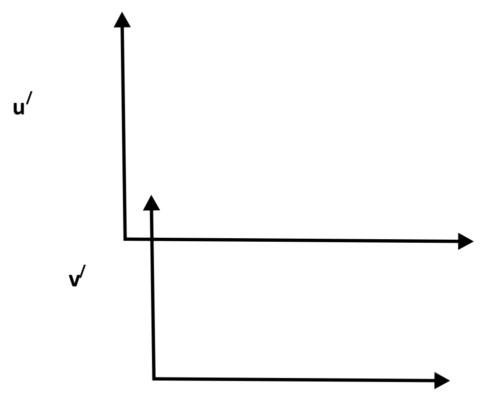
सभी प्रकार आपको समान सदिशों की जानकारी होना भी आवश्यक है। दो सदिश समान सदिश कहलाते हैं यदि उनकी विमा समान हो तथा उनकी संगत प्रविष्टियाँ बराबर हों। उदाहरण के लिए दो पंक्तियाँ 2–सदिश $\mathbf{u'} = [u_1\ u_2]$ और $\mathbf{v'} = [v_1\ v_2]$ समान सदिश कहलाते हैं यदि $u_1 = v_1$ और $u_2 = v_2$ हो।

एक अन्य अथवा चौथे प्रकार के सदिश, समदिश सदिश (*like* vectors) और विपरीत सदिश (*unlike* vectors) कहलाते हैं। ये सदिश जिनकी दिशा समान हो, समदिश सदिश कहलाते हैं तथा ऐसे सदिश जिनकी दिशा एक दूसरे के विपरीत हो, विपरीत सदिश कहलाते हैं। ऐसे सदिश जो एक ही रेखा पर या समानान्तर रेखाओं पर स्थिति हों, संरेखी सदिश (*collinear vectors*) कहलाते हैं। इसी प्रकार, एक ही तल पर या दो समानान्तर तलों पर स्थित सदिश समतलीय सदिश (*coplanar* vectors) कहलाते हैं। इन सभी प्रकार को सदिशों के ज्यामितीय निरूपण और अच्छी तरह से समझा जा सकता है।

5.2.3 सदिशों का ज्यामितीय निरूपण

इस उपभाग में हम देखेंगे कि सदिशों का ज्यामितीय निरूपण किस प्रकार किया जा सकता है। हम अपनी चर्चा को द्वि–विमीय तथा त्रि–विमीय सदिशों तक ही सीमित रखेंगे क्योंकि केवल इन्हीं के रेखाचित्र बनाए जा सकते हैं। चार या उससे अधिक प्रविष्टियों वाले सदिशों का आरेखन संभव नहीं है। हम उनका ज्यामितीय चित्रण की कल्पना अमूर्त रूप से करनी पड़ती है।

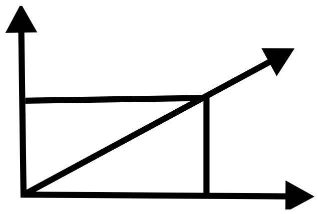
आइए, हम 2–सदिशों के ज्यामितीय निरूपण से प्रारंभ करें। मान लीजिए, हमें दो सदिश $\mathbf{u}' = [x_1\ y_1]$ और $\mathbf{v}' = [x_2\ \ y_2]$ दिए हैं। मान लीजिए, $x_1 = 2,\ y_1 = 0,\ x_2 = 0$ और $y_2 = 0$ है। अतः हम इन सदिशों को $\mathbf{u}' = [2\ \ 0]$ तथा $\mathbf{v}' = [0\ \ \ 2]$ लिख सकते हैं। इन 2–सदिशों का आरेखीय चित्रण इस प्रकार होगा।



रेखाचित्र 5.3

अब मान लीजिए कि हमें एक सदिश $w = [3\ \ \ 4]$ दिया है। यह एक 2–सदिश है, अतः हम इस सदिश को आरेखित करने के लिए x-अक्ष तथा y-अक्ष का उपयोग कर

सकते हैं। इसके लिए हम कार्तीय तल के मूल बिन्दु (0,0) से प्रारंभ करते हैं और x-अक्ष पर मूल बिन्दु से तीन इकाई दाईं ओर जाते हैं जिससे हम x-अक्ष पर बिन्दु 3 तक पहुँच सकें, इस बिन्दु से हम 4 इकाई ऊर्ध्वाधर दिशा में, y-अक्ष के समानांतर चलते हैं। इस प्रकार हम बिन्दु (3, 4) पर पहुँच जाते हैं। यह बिन्दु कार्तीय तल पर एक सदिश के रूप में माना जा सकता है।



रेखाचित्र 5.4

वैकल्पिक रूप से, बिन्दु (0, 0) से प्रारंभ होकर सीधे बिन्दु (3, 4) तक जाने वाला एक रेखाखंड, जिस पर (तीर द्वारा) दिशा दर्शाई गई हो, भीर इस सदिश को व्यक्त करने की एक सरल विधि है।

अतः, कार्तीय तल में प्रत्येक सदिश बिन्दु (एक क्रमित युग्म) द्वारा दर्शाया जा सकता है। इसी प्रकार, प्रत्येक 3–सदिश एक क्रमित त्रियक के द्वारा दर्शाया जा सकता है। इसी प्रकार, हम देख सकते हैं कि प्रत्येक n-सदिश को एक n-टपल से निरूपित किया जा सकता है।

5.3 सदिशों पर बीजगणितीय संक्रियाएँ

पिछले भाग में हमने सदिशों की संकल्पना को समझा। हमने सदिशों के विभिन्न प्रकारों के बारे में भी जाना और यह भी देखा कि सदिशों का ज्यामितीय निरूपण किस प्रकार किया जा सकता है। इस भाग में, हम जानेंगे कि सदिशों पर विभिन्न बीजगणितीय संक्रियाएँ (algebraic operations) जैसे कि योग, व्यवकलन, गुणन इत्यादि किस प्रकार लगाई जा सकती हैं।

5.3.1 सदिशों का योग

अब हम सदिशों का योगफल ज्ञात करना सीखेंगे। मान लीजिए, **u'** = [1 2] और **v'** = [2 1] दो 2–सदिश हैं। तब इनका योगफल **u'** + **v'** जिसे हम *सदिशों का योग* (*addition of vectors*) कहते हैं, **u'** की प्रविष्टियों में **v'** की संगत प्रविष्टियों को जोड़कर प्राप्त किया जाता है। इस उदाहरण में **u'** + **v'** = [1 + 2 2 + 1] = [3, 3] होगा। कृपया ध्यान रखें कि दो सदिशों का योगफल ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक है कि दोनों सदिशों में प्रविष्टियों की संख्या समान हो अर्थात् दोनों सदिशों की विमा समान है। उदाहरण के लिए, हम एक 3–सदिश को एक 2–सदिश में नहीं जोड़ सकते।

सदिशों के योगफल के कुछ गुणधर्म इस प्रकार हैं:

गुणधर्म I. सदिशों का योगफल क्रम विनिमयता के नियम (commutative) को संतुष्ट करता है। किन्हीं भी दो सदिशों **u** और **v** के लिए **u** + **v** = **v** + **u** होता है।

गुणधर्म II. सदिशों को योग साहचर्य के नियम (associative) को संतुष्ट करता है। किन्हीं भी तीन सदिशों **u**, **v** और **z** के लिए (**u** + **v**) + **z** = **u** + (**v** + **z**) होता है।

गुणधर्म III. योग के तत्समक का अस्तित्व (Existence of *additive identity*) । किसी भी सदिश 0 सदिशों को योग के तत्समक की भूमिका निभाता है। अर्थात् किसी भी सदिश **u** के लिए $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ होता है।

गुणधर्म IV. योग के प्रतिलोम का अस्तित्व (Existence of *additive inverse*)। किसी भी सदिश **u** के लिए, हमें एक सदिश –**u** होता है जिसके लिए $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + 4 = \mathbf{0}$ होता है। –**u** को **u** का योग प्रतिलोम कहते हैं।

5.3.2 सदिशों का व्यवकलन

मान लीजिए हमारे पास दो सदिश : **u'** = [1 4] और **v'** =[3 2] हैं। **u'** – **v'**, **u'** के प्रत्येक घटक/की प्रत्येक प्रविष्टि में से **v'** के संगत घटकों/की संगत प्रविष्टियों को घटाने से प्राप्त होता है। उसे **u'** और **v'** का व्यवकलन कहते हैं। यह देखा जा सकता है कि एक सदिश में से दूसरे सदिश को घटाने का अर्थ है, दूसरे सदिश के प्रतिलोम को पहले सदिश में जोड़ना। अतः

$\mathbf{u'} - \mathbf{v'} = \mathbf{u'} + (-\mathbf{v'})$

ऊपर लिए गए उदाहरण में

$\mathbf{u'} - \mathbf{v'} = \mathbf{u'} + (-\mathbf{v'})$

$[1\ 4] - [3\ 2] = [\ 1\ 4] + [\ -3\ \ -2] = [\ 1-3\ \ \ 2-4]\ = [-2\ \ 2]$

ध्यान दें कि $\mathbf{u'} + (-\mathbf{u'})$ अथवा $\mathbf{v'} + (-\mathbf{v'})$ से हमें शून्य सदिश प्राप्त होता है।

5.3.3 एक सदिश एवं एक अदिश का गुणन

अब हम एक सदिश और एक अदिश के गुणन के बारे में जानेंगे। जैसा कि हम देख चुके हैं कि एक अदिश एक केवल एक वास्तविक संख्या है। मान लीजिए, r एक अदिश है और **u'** एक सदिश है। इस सदिश **u** को r से गुणा करके हमें एक नया सदिश $r\mathbf{u'}$ प्राप्त करते हैं जोकि मूल सदिश **u** से r गुणा है। मान लीजिए, [3 2] एक सदिश है और 3 एक अदिश है। इस सदिश और इस अदिश के गुणन से हमें एक नया सदिश [9 6] प्राप्त होता है। ध्यान दें कि यदि r ऋणात्मक होगा तो इस नए प्राप्त सदिश की दिशा विपरीत हो जाएगी। साथ ही, हम अदिश गुणन का प्रयोग सदिश योग और व्यवकलन के साथ संयोजन में भी किया जा सकता है। अर्थात् यदि **u'** और **v'** दो सदिश हैं तथा r एक अदिश है तो $r(\mathbf{u'} \pm \mathbf{v'}) = r\,\mathbf{u'} \pm r\mathbf{v'}$ होगा।

अब हम अदिश गुणन अर्थात् एक सदिश तथा एक अदिश के गुणन के कुछ गुणधर्मों का उल्लेख करते हैं।

गुणधर्म 1. अदिश गुणन साहचर्य नियम (associative) को संतुष्ट करता है। यदि r_1 और r_2 अदिश हैं तथा **u** एक सदिश है, तो $(r_1 \times r_2)\,\mathbf{u} = r_1 \times (r_2 \times \mathbf{u})$ होगा।

गुणधर्म 2. अदिश गुणन आबंटन के नियम (distributive) को संतुष्ट करता है। यदि r_1 और r_2 दो अदिश हैं तथा **u** और **v** दो समविमीय सदिश हैं तो $(r_1 + r_2)\,\mathbf{u} = r_1 \times \mathbf{u} + r_2 \times \mathbf{u}$, और $r_1 \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r_1 \times \mathbf{u} + r_1 \times \mathbf{v}$ होगा।

गुणधर्म 3. गुणन तत्समक का अस्तित्व (Existence of *multiplicative identity*)। किसी भी सदिश **u** के लिए $1 \times \mathbf{u} = \mathbf{u}$ होता है।

बोध प्रश्न 1

1) एक सदिश और एक अदिश में क्या अंतर है? क्या आप एक सेट (जिसके बार में आपने बी.ई.सी.सी 102 में पढ़ा था और एक सदिश में संबंध के बारे में कुछ कह सकते हैं?

....

....

....

....

....

2) यदि 4' = [3, 8, 7] V' = [1, 6, 5] हल करें :

i) 4' + 3V

ii) $\sqrt{4} - 2V$

....

....

....

....

....

5.4 सदिशों का रैखिक संचय तथा उनकी रैखिक निर्भरता

इस भाग में सदिशों के अदिशों द्वारा गुणन से सम्बन्धित एक महत्वपूर्ण संकल्पना पर चर्चा करेंगे। यह संकल्पना सदिशों का रैखिक संचय है। इस संकल्पना का उपभोग हम सदिशों की रैखिक निर्भरता (linear dependence) को परिभाषित करने के लिए भी करेंगे।

मान लीजिए, हमारे पास n n-सदिश $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ और n अदिश $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ हैं। इनकी सहायता से हम एक नया n-सदिश प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए हम दिए हुए प्रत्येक सदिश को उसके संगत अदिश से गुणा करते हैं और इस प्रकार प्राप्त सभी सदिशों का योग कर लेते हैं। इस प्रकार प्राप्त नए सदिश को दिए हुए सदिशों का रैखिक संचय/संयोजन कहते हैं तथा इसे $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$ के रूप में लिखा जा सकता है।

आइए, हम इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें। मान लीजिए हमें दो 2-सदिशों $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ और $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ तथा दो अदिश k_1 और k_2 दिए हैं। दिए गए अदिशों की सहायता से इन सदिशों का रैखिक संचय इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \times 1 + k_2 \times 2 \\ k_1 \times 2 + k_2 \times 1 \end{bmatrix}$$

रैखिक संचय की संकल्पना के आधार पर हम अब सदिशों की रैखिक निर्भरता तथा

रैखिक स्वतंत्रता की संकल्पनाओं की व्याख्या करते हैं। मान लीजिए, हमें n n-सदिश $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ तथा n अदिश $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ दिए हैं जो कि सभी के सभी शून्य नहीं हैं। ये सदिश रैखिक आश्रित/निर्भर सदिश कहलाते हैं यदि $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ हो। दूसरी ओर यदि ऐसे कोई भी अदिश $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ न मिल पाएँ जोकि सभी के सभी शून्य न हों। जिसके लिए $k_1\mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ हो, तो ये सदिश रैखिक स्वतंत्र सदिश कहलाते हैं।

5.5 सदिशों का आंतर गुणन

इस भाग में हम सदिशों के आंतर गुणन (multiplication of vectors) पर विचार करेंगे जिसे सदिशों का डॉट (dot) गुणन या अदिश गुणन भी कहा जाता है। यह एक सदिश और एक अदिश के गुणन से भिन्न है। आंतर गुणन में एक सदिश को एक अन्य सदिश से गुणा किया जाता है और इस गुणन का परिणाम एक अदिश होता है। इसलिए, इसको अदिश गुणन भी कहा जाता है।

मान लीजिए, हमें तीन वस्तुएँ दी हुई हैं। हम दो 3–सदिशों पर विचार करते हैं $\mathbf{q}' = [q_1 \ \ q_2 \ \ q_3]$ और $\mathbf{p}' = [p_1 \ \ p_2 \ \ p_3]$, जहाँ q_i उपभोक्ता द्वारा वस्तु i की खरीदी गई मात्रा को तथा p_i वस्तु i की कीमत को निरूपित करता है जहाँ $i = 1, 2, 3$ है। जब हम $\mathbf{q}'$ में वस्तु i की मात्रा को $\mathbf{p}'$ में वस्तु i के मूल्य से गुणा करते हैं तो हमें वस्तु पर किया गया व्यय प्राप्त होता है। यदि हम इन तीन वस्तुओं पर किए गए व्यय का योग कर लें तो हमें उपभोक्ता द्वारा इन तीनों वस्तुओं पर किया गया कुल व्यय प्राप्त

हो जाएगा। अतः, कुल व्यय होगाः

$$\sum_{i=1}^{3} q_i p_i$$

यह सदिश $\mathbf{q}'$ को सदिश $\mathbf{p}$ द्वारा गुणा का परिणाम है। इसे सदिशों का आंतर गुणन या अदिश गुणन या डॉट गुणन कहते हैं या केवल $\mathbf{q}'$ और $\mathbf{p}$ का गुणन भी कह सकते हैं। आइए, अब हम इस गुणन को व्यापक रूप में देखें। मान लीजिए, हमें दो n-सदिश $\mathbf{u}' = [u_1 \ \ u_2 \ldots \ u_n]$ और $\mathbf{v}' = [v_1 \ \ v_2 \ldots \ v_n]$ ज्ञात हैं। सदिशों $\mathbf{u}'$ और $\mathbf{v}$ के अदिश का आंतर गुणन को $\mathbf{u}'.\mathbf{v}$ से व्यक्त करते हैं और इसे निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं:

$$\mathbf{u}'.\mathbf{v} = [u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 + \cdots + u_n.v_n]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

ध्यान दें कि ऊपर किए समीकरण में प्राप्त गुणनफल एक सदिश नहीं बल्कि एक वास्तविक संख्या अर्थात् अदिश है। यह भी ध्यान दें कि यह आंतर गुणन तभी संभव होगा यदि $\mathbf{u}'$ और $\mathbf{v}'$ दोनों समविमीय हों। हम नीचे आंतर गुणन/ अदिश गुणन के तीन महत्वपूर्ण गुणधर्मों का उल्लेख कर रहे हैं जहाँ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ और $\mathbf{z}$ तीन n-सदिश हैं तथा k_1 एक अदिश हैं:

गुणधर्म a. अदिश गुणन क्रमविनिमय सिद्धान्त को संतुष्ट करता है: $\mathbf{u}'.\mathbf{v} = \mathbf{v}'.\mathbf{u}$.

गुणधर्म b. अदिश गुणन आबंटन सिद्धान्त को संतुष्ट करता है:

$$\mathbf{u}'.(\mathbf{v} + \mathbf{z}) = \mathbf{u}'.\mathbf{v} + \mathbf{u}'.\mathbf{z}.$$

गुणधर्म c. अदिश गुणन साहचर्य के नियम को संतुष्ट करता है:

$(k_1.\mathbf{u'}).\mathbf{v} = \mathbf{u'}.(k_1.\mathbf{v}) = k_1.(\mathbf{u'}.\mathbf{v})$.

<u>बोध प्रश्न 2</u>

1) यदि u' = [5, 1, 3] , v' = [3, 1,– 1], w' = [7, 5, 8], x' = $[x_1, x_2, x_3]$ हल करे:

(i) u' v

(i) w' x

....

....

....

....

....

2) मान लें कि हम किसी फर्म के एक आगत (input) को i से दर्शाते है i = 1, 2, ..., मान ले आगत i का मूल्य w, क्या आप कुल लागत को सदिशों के गुणन द्वारा दर्शा सकते हैं? सदिशों का गुणन क्या एक अदिश है या एक सदिश?

....

....

....

....

....

3) दो सदिश कब रेखकीय रूप, से स्वाधीन होते है?

....

....

....

....

....

5.6 सदिश बितान

हमने सदिशों की संकल्पना के बारे में जाना तथा यह भी जाना कि वे किस तरह अदिशों से अलग होते हैं। आपने वास्तविक संख्याओं के बारे में भी अध्ययन किया है तथा पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी. 102 में कार्तीय गुणन और निर्देशांक सदिश बितान के बारे में भी अध्ययन किया है। हम n-विमीय सदिश बितान (*dimensional vector space*) (n-बितान अथवा $\Re^n$) को ऐसे सभी n-सदिशों के समुच्चय के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जो n स्वतंत्र n-सदिशों के रैखिक संचय द्वारा प्राप्त हों; यद्यपि इनका

ज्यामितीय निरूपण संभव नहीं है। ध्यान दें कि चूँकि एक n-बितान का प्रत्येक बिन्दु एक क्रमिक n-टपल है, प्रत्येक n-सदिश, n-बितान को एक बिन्दु/अवयव को निरूपित करता है। यह n-बितान अथवा $\Re^n$ जो कि वास्तविक संख्याओं के सभी n-टपलों का समुच्चय है, यूक्लिडियन (*Euclidian*) *n-बितान* कहलाता है।

सदिश बितान एक ऐसे समुच्चय की तरह माना जा सकता है जिसके अवयव सदिश होते हैं। यूक्लिडियन बितान एक अतिरिक्त संरचना (structure) के साथ सदिश बितान बनाते हैं। यह संरचना सदिशों के उन विभिन्न गुणधर्मों से प्राप्त होती है जिसका अध्ययन हमने इस इकाई में किया है। नीचे हम इन गुणधर्मों का उल्लेख कर रहे हैं। हम $\Re^n$ को V से दर्शाते हैं जहाँ V का प्रयोग "सदिश बितान" के लिए किया गया है। V, V के सभी सदिशों u, v, w के लिए तथा सभी वास्तविक संख्याओं k, m के लिए

1 जब भी **u** और **v,** V में हों, तो **u** + **v** भी V में होगा।

2 **u**+ **v** = **v** + **u**

3 **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**

4 V में एक अवयव 0 होता है जोकि इस गुणधर्म को संतुष्ट करता है: V के लिए प्रत्येक अवयव v के लिए

0 + v = v + 0 = v

5 V के प्रत्येक अवयव v के लिए, हमें V में एक ऐसा अवयव **w** प्राप्त होता है (जहाँ w = – **v** होता है) जिसके लिए **v + w = w + v = 0** होता है।

6 V के प्रत्येक अवयव v के लिए, k.**v** भी V में होता है।

7 k. (**u** + **v**) = k.**u** + k.**v**

8 (k + m). **u** =k.**u** +m . **u**

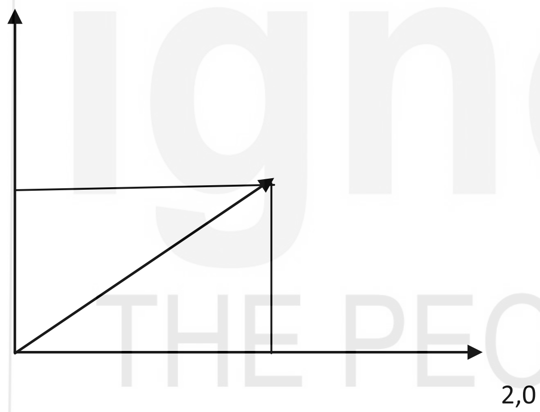
9 k . (m . **u**) = m . (k . **u**)

10 1.**u** = **u**

5.7 एक सदिश का मानक तथा सदिशों की लांबिकता

अब हम सदिशों के एक मूलभूत पक्ष के बारे में चर्चा करेंगे। इस इकाई के प्रारंभ में हमने सीखा कि एक सदिश का परिमाण (magnitude) तथा दिशा (direction) दोनों होते हैं। यदि एक सदिश की दिशा ज्ञात हो तो हम जानना चाहेंगे कि वह कितना बड़ा है अर्थात् उसकी लम्बाई कितनी है। हम दो सदिशों के बीच की दूरी भी ज्ञात करना चाहते हैं। अंततः क्योंकि सदिशों की लम्बाई होती है, हम यह भी जानना चाहते हैं कि दो दिए हुए सदिशों के एक दूसरे से कितने अंश का कोण बनाते हैं। अतः सदिशों की परिभाषा जानने के पश्चात्, यह जानने के पश्चात् कि सदिशों पर विभिन्न बीजगणितीय संक्रियाएँ किस प्रकार लगाई जाती हैं तथा सदिशों के रैखिक संचय, उनकी रैखिक निर्भरता और सदिश बितानों को जानने के पश्चात्, अब हम इस भाग में सदिशों की लम्बाई तथा दो सदिशों के बीच की दूरी तथा उनके बीच कोण ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा करेंगे।

आइए, हम एक सदिश की लम्बाई (सदिश के परिमाण) की संकल्पना से प्रारंभ करें। एक सदिश की लम्बाई ज्ञात करने के लिए हमें सदिश के प्रारंभ बिन्दु तथा अंत बिन्दु की आवश्यकता होती है। हम इनके बीच की दूरी ज्ञात करना चाहते हैं। आइए, हम सर्वप्रथम एक सरल उदाहरण पर विचार करें। मान लीजिए कि सदिश का प्रारंभ [0 0] है। इस इकाई में यद्यपि हम ऐसे ही सदिशों के उदाहरण लेते रहे हैं जिनका प्रारंभ बिन्दु [0,0] है, पर सदा ऐसा ही हो यह आवश्यक नहीं है। इस उदाहरण में भी, जैसा कि हमने ऊपर कहा, हम (0,0) को सदिश प्रारंभ बिन्दु ले रहे हैं। मान लीजिए, इस सदिश का अंत बिन्दु [3, 0] है। अतः यह सदिश y-अक्ष पर स्थित है। इस सदिश की लम्बाई इसके अंत बिन्दु और प्रारंभ बिन्दु की दूरी निकाल कर ज्ञात की जा सकती है। इस उदाहरण में लिए गए सदिश की लम्बाई $3 - 0 = 3$ है। किसी एक विमीय बितान में स्थित किसी सदिश की लम्बाई इस विधि द्वारा ज्ञात की जा सकती है। अब हम एक द्विविमीय बितान में स्थित एक सदिश या एक 2–सदिश की लम्बाई ज्ञात करने की विधि पर विचार करेंगे। इसके लिए हम सदिश के ज्यामितीय निरूपण का उपयोग कर सकते हैं। मान लीजिए **u'** = [2 2] एक द्विविमीय पंक्ति सदिश है। इसे हम एक क्रमिक युग्म (ordered pair) (2, 2) के रूप में लिख सकते हैं। इस सदिश को नीचे रेखाचित्र में दर्शाया गया है:



रेखाचित्र 5.5

हम इस सदिश (2, 2) की लम्बाई ज्ञात करते हैं। हम देख सकते हैं कि इस सदिश का प्रारंभ बिन्दु A(0, 0) तथा अंतबिन्दु C (2, 2) है। ध्यान दें कि यह सदिश AC बिन्दु D के साथ मिलकर एक समकोण त्रिभुज CAD बनाता है। हम सदिश **u'** = [2 2] की अर्थात् रेखाखंड AC की लम्बाई ज्ञात करना चाहते हैं। दूसरे शब्दों में हम A और C के बीच की दूरी ज्ञात करना चाहते हैं। यह दूरी पाइथागोरस प्रमेय (*Pythagoras' theorem*) के प्रयोग से ज्ञात की जा सकती है।

त्रिभुज CAD पर पाइथागोरस प्रमेय लगाने पर हम पाते हैं कि $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$

अतः AC की लम्बाई अर्थात् A और C के बीच की दूरी, जिसे $\|AC\|$ से व्यक्त किया जा सकता है,

$$\|AC\| = \sqrt{(AD^2) + (DC)^2}$$

के बराबर है।

इसी प्रकार हम त्रिविमीय बितान में भी सदिशों की लम्बाई अर्थात् 3–सदिशों की लम्बाई ज्ञात कर सकते हैं, तथा *n*- विमीय बितान में *n*-सदिशों की लम्बाई ज्ञात कर सकते हैं। मान लीजिए **u'** = $[x_1 \ y_1 \ z_1]$ एक पंक्ति 3–सदिश हैं तथा **v'** = $[x_1 \ x_2$.

$. . \ x_n]$ एक पंक्ति n-सदिश है। इन सदिशों की लम्बाइयाँ इस प्रकार प्राप्त की जा सकती हैं:

$$\|u'\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

और

$\|v'\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2}$ हैं। आइए, हम इस अंतिम सदिश $\mathbf{v'} = [x_1 \ x_2 . . . \ x_n]$ पर एक नजर डालें। अब भाग 5.5 में दिए गए सदिशों के आंतर गुणन की परिभाषा का स्मरण करें। आइए हम **v'** का आंतर गुणन स्वयं **v'** से ज्ञात करें, अर्थात् **v'. v** ज्ञात करें। इसका मान $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2$ के बराबर होगा।

अतः, हम पाते हैं कि $\|v'\| = \sqrt{\text{v'.v}}$ है।

यदि हम दो सदिश **u** और **v** दिए हैं, तो उनके बीच की दूरी

$$\|u - v\| = \sqrt{(u - v) \bullet (u - v)}$$

द्वारा ज्ञात की जा सकती है।

$\mathfrak{R}^n$ में कोई भी दो n-घटक सदिश एक तल को निर्धारित करते हैं। हम दो सदिशों **u** और **v** के बीच का कोण θ ज्ञात कर सकते हैं। **u** और **v** के आंतर गुणन में, उनकी लम्बाइयों में तथा उनके बीच कोण में एक सम्बन्ध है जोकि इस प्रकार हैः

माना **u** और **v**, $\mathfrak{R}^n$ में दो सदिश हैं और मान लीजिए θ, **u** और **v** के बीच का कोण है। तो

$$\mathbf{u.v} = \|u\|\|v\|\cos\theta$$

होता है।

यदि $\cos\theta > 0$ है तो θ एक लघु कोण होगा, यदि $\cos\theta < 0$ है तो θ एक दीर्घकोण होगा और यदि $\cos\theta = 0$ है तो θ एक समकोण होगा। दो सदिश लांबिक (orthogonal vectors) कहलाते हैं यदि वे एक दूसरे के लंबवत् हों अर्थात् यदि $\cos\theta = 0$ हो।

बोध प्रश्न 2

1) आप निम्नलिखित से क्या समझते हैं

   (i) दो सदिशों की लांबिकता

   (ii) किसी सदिश का मानक?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2) इन सदिशों की दीर्घता ज्ञात करें

(i) v' = [1, 2]

(ii) w' [1, 2, – 2]

....

....

....

....

....

....

3) एक उपभोक्ता केवल सेव तथा संतरा का उपभोग करता है। क्या आप सोच सकते हैं किस प्रकार सदिश एवं सदिश बितान का उपयोग करेंगे इस उपभोक्ता का उपभोग दर्शाने के लिए?

....

....

....

....

....

5.8 सारांश

इस इकाई में हमने रैखिक बीजगणित पर चर्चा का आरंभ किया है। हमने सदिशों के बारे में जाना जोकि दोनों रूपों में देखे जा सकते हैं, वास्तविक संख्याओं के एक क्रमिक संगह के रूप में भी और ऐसे वस्तुओं के रूप में भी जिनमें परिमाण और दिशा दोनों होते हैं। सदिश एक विशिष्ट प्रकार के आव्यूह भी होते हैं जिसके बारे में हम अगली इकाई में पढ़ेंगे। क्योंकि सदिश तथा आव्यूह रैखिक समीकरणों और फलनों के चित्रण में उपयोगी हैं, इसलिए सदिशों और आव्यूहों का अध्ययन रैखिक बीजगणित कहलाता है।

इस इकाई का प्रारंभ सदिशों की परिभाषा से हुआ। हमने देखा कि सदिश की सदिश वास्तविक संख्याओं के क्रमिक समुच्चय होते हैं। ये वास्तविक संख्याएँ सदिश के घटक/प्रविष्टियाँ/अवयव कहलाते/कहलाती हैं।

इसके पश्चात् इस इकाई में सदिशों पर कुछ बीजगणितीय संक्रियाओं, जैसे सदिशों का योग, सदिशों का व्यवकलन तथा एक सदिश एवं एक अदिश गुणन, की चर्चा की गई। सदिशों के योग तथा एक सदिश और एक अदिश के गुणन के कुछ गुणधर्मो की चर्चा भी की गई।

तत्पश्चात् इस इकाई में एक सदिश और एक अदिश के गुणन पर आधारित एक महत्वपूर्ण संरचना, रैखिक संचय की चर्चा की गई। हमने देखा कि सदिशों के एक दिए हुए समुच्चय का रैखिक संचय, समुच्चय के विभिन्न सदिशों को दिए हुए अदिशों से गुणा करके तथा इस प्रकार प्रापत गुणनफलों का योग करने पर प्राप्त होता है।

रैखिक संचय की इस संकल्पना के आधार पर हमने रैखिक निर्भरता की संकल्पना पर चर्चा की। सदिशों का एक समुच्चय रैखिक निर्भरता होता है यदि हमें अदिशों का एक ऐसा समुच्चय मिल पाए जिसके सभी के सभी अदिश शून्य न हों, तथा जिनके द्वारा प्राप्त होने वाला सदिशों का रैखिक संचय शून्य हो जाए।

इसके पश्चात् इस इकाई में हमने सदिशों पर कुछ अन्य संक्रियाओं की भी चर्चा की। ये संक्रियाएँ हैं, एक सदिश का एक अन्य सदिश से गुणन जिसे सदिशों का आंतर गुणन या डॉट गुणन या अदिश गुणन कहते हैं। इसके पश्चात् एक सदिश बितान की संकल्पना की चर्चा की गई तथा आपका परिचय वास्तविक संख्याओं, बिन्दुओं के समुच्चयों और सदिश बितानों के बीच सम्बन्ध से करवाया गया। आप इस भाग में दी गई सामग्री और पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी.102 में अध्ययन की गई संकल्पनाओं जैसे कि समुच्चय, कार्तीय गुणन, वास्तविक संख्याओं का बितान तथा निर्देशांक ज्यामिति इत्यादि के बीच सम्बन्ध स्पष्ट रूप से देख सके।

अंततः, इस इकाई में एक सदिश की लंबाई का परिमाण/मान ज्ञात करने की विधि की चर्चा की गई। इस भाग में हमने दो सदिशों के बीच की दूरी ज्ञात करने की विधि की भी चर्चा की। हमने देखा कि किस प्रकार यह संकल्पना उसी संकल्पना के समान है जिसका अध्ययन आपने पाठ्यक्रम बी.ई.सी.सी.102 की निदेशांक ज्यामिति पर आधारित इकाई में किया था। अंत में, इस इकाई में हमने दो दिए हुए सदिशों के बीच कोण ज्ञात करने की विधि पर चर्चा की गई तथा उस विशिष्ट स्थिति पर भी चर्चा की गई जिसमें दो दिए हुए सदिश एक दूसरे पर लंबवत् होते हैं। ऐसे सदिशों को लांबिक सदिश कहते हैं।

5.9 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) उपभाग 5.2.1 देखें और उत्तर दें।

2) भाग 5.3 देखें और उत्तर दें।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 5.5 देखें और उत्तर दें।

2) भाग 5.5 देखें और उत्तर दें।

3) भाग 5.4 देखें और उत्तर दें।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 5.7 देखें और उत्तर दें।

2) भाग 5.7 देखें और उत्तर दें।

3) भाग 5.6 देखें और उत्तर दें।

इकाई 6 आव्यूह और सारणिक*

संरचना

6.0 उद्देश्य

6.1 प्रस्तावना

6.2 आव्यूह संक्रियाएँ

6.2.1 आव्यूहों का योग एवं अवकलन

6.2.2 आव्यूहों का गुणनफल

6.3 कुछ विशिष्ट आव्यूह

6.4 सारणिक

6.4.1 संकल्पना

6.4.2 उपसारणिक एवं सहखंडज

6.4.3 एक तृतीय कोटि सारणिक का मान ज्ञात करना

6.5.4 सारणिकों के गुणधर्म

6.5 एक आव्यूह का व्युत्क्रम

6.6 सारांश

6.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

6.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित से अवगत हो जाएँगे:

- एक आव्यूह की संकल्पना से;
- आव्यूहों के योग, व्यवकलन और गुणनफल की संक्रियाओं से;
- कुछ अत्यंत उपयोगी विशिष्ट आव्यूहों के गुणधर्मों से;
- एक सारणिक की संकल्पना से;
- उपसारणिक तथा सहखंडज की संकल्पना से तथा विभिन्न कोटियों के सारणिकों का मान ज्ञात करने की प्रक्रिया से; और
- एक आव्यूह के व्युत्क्रम की प्रक्रिया से; और

6.1 प्रस्तावना

गणित में अक्सर हमें संख्याओं तथा चरों के समूहों/खंडों पर संक्रियाएँ करने की आवश्यकता पड़ती है। ऐसी स्थितियों में आव्यूह बीजगणित एक प्रभावशाली परंतु सुविधाजनक साधन सिद्ध होता है। जैसा कि नाम "आव्यूह" से ही स्पष्ट है कि यह (पंक्तियों तथा स्तंभों में) क्रम–विन्यास को व्यक्त करता है। संख्याओं और चरों के

* सौगतो सेन, इग्नू

क्रम–विन्यास आव्यूह बीजगणित के आधारभूत शिलाखंड हैं। आइए, अब हम आपका परिचय आव्यूह बीजगणित की विभिन्न संकल्पनाओं तथा इसकी संकेतन पद्धति से करवाएँ। हम नीचे दिए युगपत समीकरण निकाय को आव्यूहों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं।

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

इस समीकरण निकाय में n चरों वाले m समीकरण हैं। n चर $x_1, x_2, ..., x_n$ द्वारा व्यक्त किए गए हैं, $m \times n$ गुणांक $a_{11}, \ ..., a_{mn}$ द्वारा तथा m अचर $b_1, b_2, ..., b_n$ द्वारा। गुणांक तथा अचर इस समीकरण निकाय के प्राचल हैं। आइए, अब हम देखें कि ये प्राचल तथा चर किस प्रकार विभिन्न आव्यूहों अथवा क्रम–विन्यासों द्वारा निरूपित किए जा सकते हैं। यदि A गुणांकों का आव्यूह है, x चरों का तथा b अचरों का, तो

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}$$

है। A में m पंक्तियाँ तथा n स्तंभ है। प्रथम पंक्ति के अवयव दिए हुए समीकरण निकाय के पहले समीकरण के चरों के (क्रमावार) गुणांक हैं। दूसरी पंक्ति के अवयव दूसरे समीकरण के चरों के गुणांक हैं, इत्यादि। अंततः A की अंतिम पंक्ति निकाय के अंतिम समीकरण के चरों के गुणांकों को क्रमवार व्यवस्थित करके बनी है। क्रम–विन्यास (array) **x** में n पंक्तियाँ तथा एक स्तंभ है। इसकी प्रथम पंक्ति में चर x_1, दूसरी पंक्ति में x_2 और इसी प्रकार चलते हुए अंतिम पंक्ति में चर x_n है। क्रम–विन्यास में m पंक्तियाँ तथा 1 स्तंभ है। इसकी प्रथम पंक्ति में अचर b_1, दूसरी पंक्ति में b_2 और इसी प्रकार चलते हुए अंतिम पंक्ति में चर b_n है। अतः इन तीन आव्यूहों A, x और b में विचाराधीन समीकरण निकाय के सभी घटक सम्मिलित हो चुके हैं। किसी भी आव्यूह विशेष की कोटि या विमा उसमें उपस्थित पंक्तियाँ तथा स्तंभों की संख्या में निर्धारित होती है। हमने देखा कि A में m पंक्तियाँ तथा n स्तंभ हैं; अतः A एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है। हम A को एक $m \times n$ आव्यूह भी कह सकते हैं। इसी प्रकार, x एक $n \times 1$ तथा b एक $m \times 1$ आव्यूह है। एक ऐसा आव्यूह जिसमें पंक्तियों तथा स्तंभों की

संख्या समान हो, एक वर्ग आव्यूह कहलाता है। हम दिए हुए समीकरण निकाय को आव्यूहों के पदों में, ऊपर की गई चर्चा के अनुसार, इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$Ax = \mathbf{b} \tag{2}$$

$$Ax - \mathbf{b} = 0 \tag{3}$$

व्यापक स्थिति में जब समीकरण निकाय में n चरों वाले m समीकरण हों तो, A का $m \times n$ आव्यूह होगा, x एक n-विमीय स्तंभ सदिश होगा तथा **b** एक m-विमीय स्तंभ सदिश होगा।

यहाँ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1j} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2j} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots\ldots & a_{ij} & \ldots\ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots\ldots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mj} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ और } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

वैकल्पिक रूप से A को:

$$A = \begin{bmatrix} \ldots\ldots & a_1 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & a_2 & \ldots\ldots \\ \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \\ \ldots\ldots & a_i & \ldots\ldots \\ \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \\ \ldots\ldots & a_m & \ldots\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

के रूप में लिखा जहा सकता है जहाँ $\mathbf{a}_i$ प्रत्येक $i = 1, 2, \ldots, m$ के लिए एक n अवयवों वाला एक पंक्ति सदिश $(a_{i1}, a_{i2} \ldots\ldots, a_{in})$ है।

अब समीकरण (3) पर ध्यान दें। यहाँ हमने Ax में गुणन का तथा Ax – b में व्यवकलन का उपयोग किया है जिनका अंकगणित में अर्थ सुस्पष्ट है। परन्तु अंकगणित में हम संख्याओं पर संक्रियाएँ करते हैं और हम भली–भाँति जानते हैं कि दो संख्याओं का योगफल अथवा गुणनफल कैसे ज्ञात किया जाता है कि एक संख्या को दूसरी संख्या से कैसे घटाते हैं। हम समीकरण (3) में भी इसी प्रकार की संक्रियाएँ कर रहे हैं परन्तु यहाँ ये संक्रिया संख्याओं की बजाय सदिशों तथा आव्यूहों पर की जा रही है। हमने अभी तक केवल इतना ही उल्लेख किया है कि एक आव्यूह संख्याओं का आयताकार क्रम विन्यास होता है। वे आव्यूह जिनमें केवल एक ही पंक्ति अथवा केवल एक ही स्तंभ हों सदिश कहलाते हैं। एक सदिश संख्याओं का एक क्रमित समुच्चय होता है। पिछली इकाई में हमने सदिशों के बारे में पढ़ा। ऊपर लिए गए उदाहरण में, आव्यूह x और b, वास्तव में, सदिश हैं। सदिश एवं आव्यूह, सामान्यतः, बोल्ड अक्षरों द्वारा व्यक्त किए जाते हैं। यदि किसी आव्यूह में केवल एक ही पंक्ति अथवा केवल एक ही स्तंभ हो तो उसे एक सामान्य संख्या अथवा अदिश माना जा सकता है।

आव्यूहों के संदर्भ में योग, व्यवकलन अथवा गुणनफल का क्या अर्थ होता है? अगले भाग में हम इस पर चर्चा करेंगे।

6.2 आव्यूह संक्रियाएँ

6.2.1 आव्यूहों का योग एवं अवकलन

मान लीजिए हमें दो आव्यूह $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ तथा $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ दिए हुए हैं, जहाँ a_{ij} और b_{ij} क्रमशः A और B के typical अवयव हैं। आव्यूह A + B इस प्रकार परिभाषित किया जाता है: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ इसका अर्थ है कि हम A + B की प्रत्येक प्रविष्टि में, उनके संगत B की प्रविष्टि को जोड़ते हैं। अर्थात् A की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ की प्रविष्टि a_{11} में, B की प्रविष्टि b_{11} को जोड़कर A + B की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ में आने वाली प्रविष्टि $a_{11}+b_{11}$ प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार यदि हमें A + B की दूसरी पंक्ति की पहली प्रविष्टि ज्ञात करनी है तो हम a_{21} तथा b_{21} को जोड़कर $a_{21} + b_{21}$ प्राप्त करते हैं। ध्यान दें कि A + B का प्रत्येक अवयव दो संख्याओं को जोड़कर प्राप्त होता है। और हम जान चुके हैं कि किस प्रकार व्यापक रूप में A + B की ith की पंक्ति और jth स्तंभ में आने वाला अवयव प्राप्त करने के लिए हम a_{ij} और b_{ij} को जोड़ते हैं तथा $a_{ij}+b_{ij}$ प्राप्त करते हैं। यहाँ केवल एक समस्या है जिसका हमें ध्यान रखना चाहिए: जब तक आव्यूह A तथा B एक विशेष दृष्टि से संगत न हों, उनका योग प्राप्त नहीं किया जा सकता। क्यों? मान लीजिए:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

है तथा हम A + B ज्ञात करना चाहते हैं। यदि आव्यूहों का योगफल ज्ञात करने का ऊपर वर्णित नियम हम यहाँ पर लगाएँ तो हम प्राप्त करते हैं:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & + & 0 & 2 & + & 2 & * & + & 3 \\ 3 & + & 5 & 0 & + & 9 & * & + & 2 \\ -5 & + & * & 7 & + & * & * & + & * \end{bmatrix}$$

जहाँ चिन्ह (*) यह दर्शाता है कि यहाँ कोई अवयव नहीं है। A+ B के प्रथम पंक्ति तथा तीसरे स्तंभ के अवयव पर विचार कीजिए। इसके लिए हमें a_{13} और b_{13} का योग करना होगा। यहाँ $b_{13} = 3$ है। परन्तु B एक 3×2 आव्यूह है। अतः इसमें अवयव a_{13} नहीं है। इसी प्रकार हम पाते हैं कि A+B के कई अवयव (*) द्वारा चिन्हित हैं क्योंकि उन्हें प्राप्त नहीं किया जा सकता। अतः इस स्थिति में A + B अर्थहीन है। इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि A+B के परिभाषित होने के लिए यह आवश्यक है कि A और B दोनों एक ही कोटि के आव्यूह हों, अर्थात् उनमें पंक्तियों की संख्या भी समान हो तथा स्तंभों की भी।

इसी प्रकार हमें आव्यूहों का व्यवकलन भी परिभाषित कर सकते हैं। किन्हीं भी दो आव्यूहों $A = [a_{ij}]$ और $B = [b_{ij}]$ के लिए $A - B = [a_{ij}-b_{ij}]$ होगा। यहाँ भी हम जाँच कर सकते हैं कि A – B तभी परिभाषित होगा जब A और B दोनों की कोटि समान हो।

6.2.2 आव्यूहों का गुणनफल

आव्यूहों का गुणन, उनके योग तथा व्यवकलन की अपेक्षा जटिल है। अतः हम कुछ उदाहरणों से प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 1: माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ है। यदि आप एक गणितज्ञ से कहें कि इन AB आव्यूहों का गुणनफल क्या होगा तो वह आपको तुरंत बता देगा कि $AB = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$ है। इससे हम सरलता से यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक 2×2 आव्यूह तथा एक 2×1 आव्यूह का गुणनफल 2×1 आव्यूह होता है। मान लीजिए, हम उसे एक जटिल समस्या देना चाहते हैं। आइए, हम उसे दो अन्य आव्यूह दें:

उदाहरण 2: $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{(3\times3)}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{(3\times2)}$

है। अब यदि उससे गुणनफल आव्यूह AB बताने की कहेंगे तो वह यद्यपि थोड़ा अधिक समय लेगा परन्तु अंत में बता देगा कि

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{(3\times3)}$$

है।

परन्तु यदि हम उसे गुणनफल आव्यूह BA ज्ञात करने को कहें तो वे A और B पर एक नजर डालते ही बता देगा कि यह गुणनफल नहीं ज्ञात किया जा सकता! यह अजीब लग सकता है परन्तु उसके पास इसके लिए कोई तर्क और विधि अब यह होगी। यदि हम उसे इसकी व्याख्या करने को कहें, तो वह बताएगा कि

$$\mathbf{a_i b_j} = [a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots\ldots.. + a_{in}\, b_{nj}]$$

होता है।

आइए, हम इसका परीक्षण करें। हम पहले उदाहरण 1 पर चलते हैं।

आव्यूह A पर एक नज़र डालें। इसमें दो पंक्तियाँ तथा दो स्तंभ है। अतः i और j दोनों दो–दो मान ले सकते हैं अर्थात् $i = 1, 2$ तथा $j = 1, 2$ है। इसी प्रकार आव्यूह B में दो पंक्तियाँ तथा एक स्तंभ हैं अर्थात् $i = 1, 2$ तथा $j = 1$ मान ले सकते हैं।

आइए, हम AB में प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ पर स्थित अवयव का मान ज्ञात करते हैं। ऊपर दिए नियम के अनुसार हम प्राप्त करते हैं:

$$a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} = 1\times5+2\times6 = 17$$

अब हम AB की द्वितीय पंक्ति के प्रथम स्तंभ पर स्थित अवयव ज्ञात करते हैं। नियमानुसार यह अवयव होगा:

$$a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} = 3\times5 + 4\times6 = 39$$

मान लीजिए हम AB का वह अवयव ज्ञात करना चाहते हैं जो उसकी प्रथम पंक्ति के द्वितीय स्तंभ पर स्थित हो, तो हमें योग $a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22}$ ज्ञात करना होगा परन्तु

b_{12} तथा b_{22} का अस्तित्व ही नहीं है। अतः इस योगफल का परिकलन नहीं किया जा सकता। इसी प्रकार यदि हम AB की दूसरी पंक्ति में दूसरे स्तंभ पर स्थित अवयव ज्ञात करना चाहें, तो एक बार पुनः इसका परिकलन नहीं किया जा सकता। महत्वपूर्ण बिन्दु यह है कि यदि हमें A और B दो आव्यूह दिए हैं जिनमें A एक $m\times n$ तथा B एक $p\times q$ आव्यूह है तो AB केवल तभी और केवल तभी परिभाषित हो सकता है जब $n = p$ हो तथा इस स्थिति में AB एक $m\times q$ आव्यूह होगा।

यह जानने के लिए कि ऐसा क्यों है आइए, उसी उदाहरण पर चलें जो हमने इस इकाई के प्रारंभ में लिया था।

आव्यूह समीकरण

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

निम्नलिखित समीकरणों के समतुल्य है:

$$3x_1 + x_2 = 0 \qquad (i)$$

$$7x_1 - 2x_2 = 5 \qquad (ii)$$

$$2x_1 + 5x_2 = 20 \qquad (iii)$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 & + & x_2 \\ 7x_1 & - & 2x_2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

परन्तु दो सदिश तभी समान होते हैं जब उनके संगत अवयव समान हों। अतः

$$3x_1 + x_2 = 0 \qquad (i)$$

$$7x_1 - 2x_2 = 5 \qquad (ii)$$

$$2x_1 + 5x_2 = 20 \qquad (iii)$$

बोध प्रश्न 1

टिप्पणी:(क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए स्थान का प्रयोग कीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1) माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ है।

i) A+ B तथा

ii) A – B

ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

2) माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

क्या हम $A + B$ ज्ञात कर सकते हैं? अपने उत्तर को औचित्य बताइए।

....

....

....

....

3) माना $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$

AB और BA ज्ञात कीजिए। क्या $AB = BA$ है?

....

....

....

....

4) नीचे दो आव्यूह दिए गए हैं:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

दर्शाइए कि $AB \neq BA$ है। अतः, दशाईए कि व्यापक रूप में, $AB \neq BA$ है जहाँ A और B 2×2 आव्यूह है।

....

....

....

....

6.3 कुछ विशिष्ट आव्यूह

अब, क्योंकि हम जानते हैं कि आव्यूहों के गुणनफल का क्या अर्थ है, हम निम्नलिखित प्रश्न पर विचार कर सकते हैं।

एक दिए हुए आव्यूह A के लिए, क्या कोई ऐसा आव्यूह I मिल सकता है जिसके लिए:

$$IA = AI = A \qquad (4)$$

सत्य हो। यदि ऐसा हो तो, यह I अंकगणित में संख्या 1 के समान होगा क्योंकि हम जानते हैं कि किसी भी संख्या x के लिए:

$1\ x = x.\ 1 = x.$

होता है। अब पिछले भाग में की गई चर्चा से हम जानते हैं कि यदि A एक $(m \times n)$ कोटि का आव्यूह है तो गुणनफल IA तभी संभव होगा यदि I में m स्तंभ हों। इसी प्रकार गुणनफल AI तभी संभव होगा यदि I में n पंक्तियाँ हों। अब एक नजर गुणनफल AI पर डालें। यह एक $(m \times n)$ कोटि का आव्यूह है। पर हमारी अपेक्षा है कि $AI = A$ है। अतः, यह आवश्यक हो जाता है कि $m = n$ हो। इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समीकरण (4) के सत्य होने के लिए यह आवश्यक है कि A एक $(m \times n)$ कोटि का एक आव्यूह है अर्थात् A की पंक्तियों की संख्या, A के स्तंभों की संख्या के बराबर होनी चाहिए। ऐसे आव्यूह को एक **वर्ग आव्यूह (Square Matrix)** कहते हैं। इससे यह निष्कर्ष भी निकलता है कि I भी एक वर्ग आव्यूह होगा और A और I दोनों समान कोटि के होंगे। अब प्रश्न यह है कि I किस प्रकार का आव्यूह है? ऐसे आव्यूह **1** को **तत्समक आव्यूह (Identity Matrix)** कहते हैं तथा इसका एक विशिष्ट रूप होता है: इसके विकर्ण के सभी अवयव **1** होते हैं तथा शेष सभी अवयव शून्य होते हैं:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ : & : & : & : & :::::::: & : \\ : & : & : & : & :::::::: & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix}_{(m \times n)}$$

एक और आव्यूह जिसकी हमें अक्सर आवश्यकता पड़ती है, वह आव्यूह है जिसके सभी अवयव शून्य के बराबर होते हैं। ऐसे आव्यूह को **शून्य आव्यूह (Null Matrix)** कहते हैं। तत्समक आव्यूह की तरह, एक शून्य आव्यूह का वर्ग आव्यूह होना आवश्यक नहीं है।

6.4 सारणिक

6.4.1 संकल्पना

मान लीजिए कि हमें समीकरण निकाय:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

का हल ज्ञात करना है।

वज्र गुणन की विधि से हम प्राप्त करते हैं:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}} \text{ और } x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}}$$

x_1 और x_2 के मानों में प्राप्त हर $a_{21}a_{22} - a_{12}a_{21}$ को $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह एक द्वितीय कोटि का सारणिक कहलाता है। यह एक अदिश है तथा यह अदिश द्वितीय कोटि 2×2 सारणिक का मान, वज्र गुणन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। किसी भी सारणिक में पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या समान होती है। ऊपर दर्शाया गया सारणिक एक द्वितीय कोटि सारणिक है क्योंकि इसमें दो पंक्तियाँ एवं दो स्तंभ होते हैं।

6.4.2 उपसारणिक एवं सहखंडज

निम्नलिखित वर्ग आव्यूह को लें:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

अब अव्ययव $a_{11} = 1$ को लें। आव्यूह में इसका स्थान पहली पंक्ति एवं पहलें स्तंभ के प्रतिच्छेदन में है। यदि हम पहली पंक्ति एवं पहले को मिटा दें तो हमारे पास आव्यूह $|M_{11}| = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ रह जायेगा। इस आव्यूह के सारणिक को अवयव a_{11} का उपसाणिक कहा जाता है तथा इस $|M_{11}|$ से चिह्नित किया जाता है। यहाँ $|M_{11}| = 13$ आमतौर से अवयव $a_{ij}|$ के उपसारणिक को हम उपलब्ध करते है आव्यूह A की पंक्ति संख्या J को मिटाकर तथा इसके पश्चात् किया गये सारणिक को ज्ञात करके। इसी तरह, उदाहरण के लिये, आव्यूह A के अवयव a_{23} की उपसारणिक ज्ञात करने के लिए हम A की दूसरी पंक्ति एवं तीसरे स्तंभ को मिटा देते हैं।

$$|M_{23}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{फिर } |M_{23}| = 2 - 4 = -2$$

परिभाषा : a_{ij} की सहखंडज। मान लें $A = [a_{ij}]$ एक वर्ग आव्यूह है। यदि $i + j$ समसंख्या है तो अवयव $a_{ij} = |M_{ij}|$ का सहखंडज होगा $I + J$। यदि $I + J$ विषम संख्या है तो अवयव a_{ij} का सहखंडज होगा– $|M_{ij}|$ । अवयव a_{ij} के सहखंडज को $|c_{ij}|$ लिखा जाता है।

हमारे उदाहरण में, $|M_{11}| = 13$। ध्यान दें कि अवयव a_{11}, के लिए, $i = 1$ तथा $j = 1$ इसलिए $i + j = 2$ इसलिए, परिभाषा के अनुसार,। $|c_{11}| = |M_{11}| = 13$ परंतु अवयव के लिए a_{23}, $i = 2$ तथा $j = 3$, तो $i + j = 5$ विषम संख्या हैं। यहाँ $|c_{23}| = -|M_{23}| = -(2) = 2$.

परिभाषा : (A का सहखंडज आव्यूह): मान लें कि $[a_{ij}]$ एक वर्ग आव्यूह हैं यदि हम प्रत्येक अवयव a_{ij} को उसके सहखंडज C से बदल दें, तो परिणामी आव्यूह, जिसे हम $[|c_{ij}|]$ से चिह्नित करते है, A का सहखंडज आव्यूह कहलाता है।

हमारे उदाहरण में,

$|c_{11}| = 13\ |c_{12}| = -3\ |c_{13}| = -4$

$|c_{21}| = -2\ |c_{22}| = -3\ |c_{23}| = 2$

$|c_{31}| = -8\ |c_{32}| = 6\ |c_{33}| = -1$

तो $C = \begin{bmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & 2 \\ -8 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

6.4.3 एक तृतीय कोटि सारणिक का मान ज्ञात करना

एक तृतीय–कोटि सारणिक है

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

इस नियम को सहखंडज द्वारा विस्तारित करना कहा जाता है।

6.4.4 सारणिकों के गुणधर्म

सारणिकों को जोड़ तोड़ करने के कई उपाय है। इनको आप गणितीय पुस्तकों से सीख लें। इनमें से कुछ पुस्तकों का उल्लेख इस पाठ्यक्रम के अंत में है। हम यहाँ दो गुणधर्मों की चर्चा करते हैं, जिन गुणधर्मों से समकालिक समीकरण के समाधान की विधि की स्थापना में हमें सहायता प्राप्त होती है।

1) $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ : & : & \ldots & : \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \ldots & ka_{nn} \end{vmatrix} \quad k = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ : & : & \ldots & : \\ ka_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

अर्थात् एक सारणिक के किसी पंक्ति या स्तंभ को किसी संख्या से गुणा करने, सारणिक का माप भी उसी संख्या से गुणा हो जाता है।

2. एक सारणिक के किसी पंक्ति या स्तंभ के गुणा को क्रमशः किसी अन्य पंक्ति या स्तंभ के साथ योग किया जाये तो मूल सारणिक ही प्राप्त होता है, अर्थात् सारणिक के मूल्य में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+Ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

इसको हम एक सरल विधि से 2×2 से दर्शाते हैं।

मान लें सारणिक है $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ सारणिक का मूल्य है $\mathrm{ab} - \mathrm{bc}$

यदि हम k गुणा ऊपर वाली पंक्ति को नीचे वाले पंक्ति के साथ योग करें, हम पाते हैं $\begin{pmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{pmatrix} = a\ (d + kb\ ) - b\ (\ c + ka) = ad - bc,$ जो कि मूल्य सारणिक है अर्थात् सारणिक के मूल्य में कोई परिवर्तन नहीं हुआ।

<u>बोध प्रश्न–2</u>

1) i) क्या हर तत्समक आव्यूह वर्ग आव्यूह होता है?

ii) क्या किसी वर्ग आव्यूह का आयाम $\mathrm{m} \times \mathrm{n}, \mathrm{m} \neq \mathrm{n}$ हो सकता है?

iii) क्या किसी शून्य आव्यूह में एक निगेटिव अवयव हो सकता है?

....
....
....
....

2) क्या निम्नलिखित आव्यूह तत्समक आव्यूह है?

i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

....
....
....
....

3) सारणिक क्या हैं? उपसारिणक एवं सहखंडज की संकल्पना को समझाइये।

....
....
....
....

6.5 एक आव्यूह का व्युत्क्रम

अंकगणित में, हम जानते हैं कि किसी दी हुई संख्या, मान लीजिए 7 का व्युत्क्रम $\frac{1}{7}$ होता है। इसका अर्थ है कि $\frac{1}{7} \times 7 = 7 \times \frac{1}{7} = 1$ होता है, अर्थात् यदि हम 7 को $\frac{1}{7}$ से या $\frac{1}{7}$ को 7 से गुणा करें तो हमें 1 प्राप्त होता है। क्या ऐसी कोई परिणाम आव्यूहों के लिए भी हैं? औपचारिक रूप से इस प्रश्न को इस प्रकार प्रस्तुत कर सकते हैं। किसी प्रदत्त (दिए गए) आव्यूह के लिए क्या कोई ऐसा आव्यूह (जिसमें हम A^{-1} से निरूपित करना चाहेंगे) है जिसके लिए $A^{-1} A = A A^{-1} = 1$ हो।

ध्यान दें कि इसके लिए यह आवश्यक होगा कि A एक वर्ग आव्यूह हो तथा साथ ही, A^{-1} भी एक वर्ग आव्यूह हो। इस अभिकथन की जाँच, अर्थात् ऐसा क्यों आवश्यक है, आप कर सकते हैं। साथ ही, यदि किसी आव्यूह A के लिए A^{-1} होगा तो वह अद्वितीय होगा।

परिभाषा (एक आव्यूह की व्युत्क्रमणीयता) : एक वर्ग आव्यूह A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है यदि उसकी व्युत्क्रम आव्यूह हो। यदि A का व्युत्क्रम न हो, तो वह एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है।

अब प्रश्न यह है कि यदि हमें एक वर्ग आव्यूह A दिया है, तो हमें यह कैसे ज्ञात होगा कि उसका व्युत्क्रम है अथवा नहीं। किसी भी वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम तभी अस्तित्व रखता है जब उसके सारणिक का मान शून्य न हों अर्थात् $|A| \neq 0$ हो। सारणिक पर हम पहले ही चर्चा कर चुके हैं।

अब जबकि हम जानते हैं कि किसी आव्यूह के व्युत्क्रम का अर्थ क्या होता है, हम यह भी जानना चाहेंगे कि व्युत्क्रम की संकल्पना हमारे लिए किस प्रकार उपयोगी है। व्युत्क्रम की एक उपयोगिता सारणिक समीकरणों के किसी का हल ज्ञात करने में हैं। स्मरण करें कि हमने इस इकाई का प्रारंभ आव्यूहों के एक निकाय की चर्चा से ही किया था। समीकरणों के ऐसे निकाय को आव्यूहों के पदों में इस प्रकार सारबद्ध किया जा सकता है:

$$Ax = \mathbf{b} \qquad (2)$$

मान लीजिए, हम इसका हल ज्ञात करना चाहते हैं। क्या इसका एक अद्वितीय हल होगा? किसी भी समीकरण (2) के रूप में लिखे गए समीकरणों के निकाय का हल तभी अद्वितीय होता है, जब $|A| \neq 0$ हो।

आइए, हम तीन उदाहरणों द्वारा इसे समझने का प्रयास करें।

निकाय I : $2x_1 + 3x_2 = 10$

$$6x_1 + 9x_2 = 20$$

अथवा $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$

निकाय I में दिए गए समीकरण दो समानांतर सरल रेखाओं को निरूपित करते हैं। क्योंकि सरल रेखाएँ परस्पर काटती नहीं, निकाय I का कोई हल नहीं होगा। आइए, इस निकाय के संगत आव्यूह A अर्थात् $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ पर एक नजर डालें। इसका सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 0$$

अर्थात् $|A| = 0$ है।

निकाय II: $3x_1 + x_2 = 10$

$$x_1 - x_2 = 0$$

अथवा $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

इस निकाय का एक अद्वितीय हल है और यह एक बिन्दु है (x_1, x_2) निर्देशांक तल में 45^0 वाली रेखा (जिसका समीकरण $x_2 = 10 - 3x_1$), समीकरण $x_2 = 10 - 3x_1$ द्वारा निरूपित रेखा को काटती है। यह बिन्दु $\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ है।

अब आव्यूह A की जाँच कीजिए:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ है। इसका सारणिक, $|A| = -3-1 = -4$ है, जोकि शून्य नहीं है।

निकाय III: $x_1 + x_2 = 10$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 - 5x_2 = -20$$

अर्थात्

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

(5, 5) इस निकाय का एक हल है। अब इस निकाय के संगत आव्यूह A पर एक नजर डालें।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

क्योंकि A एक वर्ग आव्यूह नहीं है, इसके सारणिक का अस्तित्व नहीं है। अतः $|A|$

का शून्य या शून्येतर होने का प्रश्न ही नहीं उठता। इससे हम यह अनुमान तो लगा ही सकते हैं कि $|A| \neq 0$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ के हल के अस्तित्व के लिए अधिक से अधिक एक पर्याप्त शर्त है।

मान लीजिए A एक वर्ग आव्यूह है तथा समीकरण

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

में $|A| \neq 0$ है।

इस स्थिति में समीकरण (2) का हल कैसा होगा? क्योंकि $|A| \neq 0$ है, A^{-1} का अस्तित्व है। इससे हम पाते हैं कि:

$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}b$ है।

परन्तु $A^{-1}Ax = I$ और $\mathbf{Ix} = x$ है, अतः

$$\mathbf{x} = A^{-1}b$$

एक (सदिश) हल है।

इसका अर्थ है कि यदि हम A^{-1} ज्ञात कर सकें, तो हम सीधे–सीधे सदिश $\bar{x}$, $A^{-1}b$ का परिकलन कर के ज्ञात कर सकते हैं। समस्या केवल A^{-1} के परिकलन की रह जाती है।

A^{-1} का परिकलन

इससे पहले कि हम A^{-1} ज्ञात करने की प्रक्रिया का वर्णन करें, हमें तीन सम्बन्धित संकल्पनाओं की परिभाषा की आवश्यकता होगी।

परिभाषा (एक आव्यूह का परिवर्त - *Transpose of a Matrix*): माना $A = \left[a_{ij}\right]$ एक आव्यूह है। A का परिवर्त, जिसे A' लिखा जाता है, A के स्तंभों और पंक्तियों का परस्पर विनिमय करने से प्राप्त होता है।

उदाहरण : (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

A' ज्ञात करने के लिए हम एक आव्यूह बनाते हैं जिसका प्रथम स्तंभ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ है, जोकि A की प्रथम पंक्ति है।

अब हम A की दूसरी पंक्ति लेते हैं और सदिश $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ को A' दूसरे स्तंभ के रूप में लेते हैं। इस प्रक्रिया से हमें

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

प्राप्त होता है।

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ लीजिए।

जैसा कि उदाहरण (a) में हमने देखा, A के स्तंभों और पंक्तियों का परस्पर विनिमय करने पर हम पाते हैं कि

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

है। ध्यान दें कि इस उदाहरण में A एक 3×2 कोटि का आव्यूह है जबकि A' एक 2×3 कोटि का आव्यूह है।

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ लीजिए।

जाँच कीजिए $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ होगा।

ध्यान दें कि A' = A है। एस प्रकार का वर्ग आव्यूह जिसके A = A' हो, एक **सममित आव्यूह** (**Symmetric** matrices) कहलाता है।

दूसरी संकल्पना जिस पर हम विचार करना चाहते हैं, वह है किसी आव्यूह के सहखंड (**cofactor**)। आइए, इसे एक उदाहरण की सहायता से समझें। मान लीजिए:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

है। अब प्रविष्टि $a_{11} = 1$ पर विचार कीजिए। आव्यूह में इसका स्थान पहली पंक्ति और पहले स्तंभ के प्रतिच्छेदन पर है। यदि हम इसकी पहली पंक्ति और पहले स्तंभ को हटा दें तो हमें आव्यूह $M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ प्राप्त होता है। इस आव्यूह का सारणिक प्रविष्टि a_{11} का उपसारणिक **(minor)** कहलाता है तथा इसे $|M_{11}|$ के रूप में लिखा जाता है। यहाँ $|M_{11}| = 13$ है। व्यापक रूप में A की प्रविष्टि a_{ij} का उपसारणिक A की i वीं पंक्ति तथा j स्तंभ को हटाने के पश्चात् प्राप्त आव्यूह के सारणिक का मान ज्ञात करने से प्राप्त होता है। अतः A की प्रविष्टि a_{23} का उपसारणिक ज्ञात करने के लिए हम A की दूसरी पंक्ति और तीसरे स्तंभ को हटाने के पश्चात् प्राप्त आव्यूह के सारणिक का मान ज्ञात करना होगा। अर्थात्

$$|M_{23}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$ है। अतः $|M_{23}| = 2 - 4 = -2$.

परिभाषा (a_{ij} का सहखंड): माना $A = [a_{ij}]$ एक वर्ग आव्यूह है। यदि $i + j$ एक समसंख्या है, तो प्रविष्टि a_{ij} का सहखंड $a_{ij} = |M_{ij}|$ होता है। यदि $I + j$ एक विषम संख्या है तो प्रविष्टि a_{ij} का सहखंड - $|M_{ij}|$ होता है। a_{ij} के सहखंड को $|c_{ij}|$ से व्यक्त किया जाता है।

अब ऊपर दिए गए उदाहरण में $|A_{11}| = 13$ है। ध्यान दें कि प्रविष्टि a_{11} के लिए $i = 1$ तथा $j = 1$ है, अतः $i + j = 2$ एक सम संख्या है। अतः, सहखंड की परिभाषा के अनुसार, $|c_{11}| = |M_{11}| = 13$ होगा। प्रविि्ट a_{23} के लिए $i = 2$ तथा $j = 3$ है, अतः $i + j = 5$ एक विषम संख्या है, अतः $|c_{23}| = -|M_{23}| = -(-2) = 2$ होगा।

परिभाषाः (*A* का सहखंड आव्यूह): माना $A = [a_{ij}]$ एक वर्ग आव्यूह है। यदि हम A के प्रत्येक प्रविष्टि a_{ij} के स्थान पर उसका सहखंड लिख दें, तो इस प्रकार प्राप्त आव्यूह को एक का सहखंड आव्यूह (**cofactor matrix**) कहते हैं तथा इसे $C = [|c_{ij}|]$ से व्यक्त करते हैं।

ऊपर दिए उदाहरण मेंः

$|c_{11}| = 13 \quad |c_{12}| = -3 \quad |c_{13}| = -4$

$|c_{21}| = -2 \quad |c_{22}| = -3 \quad |c_{23}| = 2$

$|c_{31}| = -8 \quad |c_{32}| = 6 \quad |c_{33}| = -1$

हैं, अतः $C = \begin{bmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & 2 \\ -8 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ होगा।

A का व्युत्क्रम की परिभाषा के लिए हमें अब केवल एक और परिभाषा देने की आवश्यकता है।

परिभाषाः (आव्यूह A का सहखंडज): माना A एक वर्ग आव्यूह है। A का सहखंडज, जिसे हम adj A लिखते हैं, A के सहखंड आव्यूह का परिवर्त के बराबर होता है, अर्थात् $\text{adj } A = C'$। इसे हम विस्तृत रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

$\text{adj } A = C' = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots\cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{n2} \\ : & : & :::: & : \\ : & : & :::: & : \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots\cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$ होता है, जहाँ $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{2n} \\ : & : & :::: & : \\ : & : & :::: & : \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots\cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$

है।

उपर्युक्त उदाहरण मेंः

$$\text{adj} \quad A = C' = \begin{bmatrix} 13 & -2 & -8 \\ -3 & -3 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

अब हमारे पास आव्यूह A के व्युत्क्रम की परिभाषा के लिए सभी घटक उपलब्ध हैं।

परिभाषाः (A का व्युत्क्रम): मान लीजिए कि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है जिसके लिए $|A| \neq 0$ है, तो A का व्युत्क्रम

$$A^{-1} = \frac{C'}{|A|} = \text{adj } A \frac{1}{|A|}$$

ध्यान रहे कि यदि $|A| = 0$ हो, तो A^{-1} परिभाषित नहीं होता। अर्थात् A अव्युत्क्रमणीय है।

उपरोक्त उदाहरण में:

$$|A| = a_{11} |M_{11}| - a_{12} |M_{12}| + a_{13} |M_{13}|$$

$$= a_{11} |c_{11}| + a_{12} |c_{12}| + a_{13} |c_{13}|$$

$$= 1(13) + 2(-3) + 4(-4)$$

$$= 13 - 6 - 16 = -9 \neq 0$$

अतः,

$$A^{-1} = \text{adj } A \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -8 \\ -3 & -3 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

हम इस भाग का अंत एक उदाहरण के साथ करते हैं जिसमें हम दर्शाएँगें कि यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो $\overline{x} = A^{-1}b$ निकाय $Ax = b$ का हल होगा।

रैखिक समीकरणों के निकायः

$$3x_1 + x_2 = 20$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

अर्थात् $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

पर विचार कीजिए।

युगपत समीकरणों को हल करने की सामान्य विधि के अनुसार इस निकाय का

हल $A\ \overline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ है।

आइए, अब देखें कि व्युत्क्रम विधि से हमें क्या हल प्राप्त होता है।

चरण 1: $|A|$ ज्ञात कीजिए।

$|A| = 3(-1) - -1(1) = -4 \neq 0$ है।

अतः, A व्युत्क्रमणीय है।

चरण 2: C ज्ञात कीजिए।

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

चरण 3: Adj C ज्ञात कीजिए।

$$C' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \text{Adj } C$$

ध्यान दीजिए कि C एक सममित है।

Step 4: A^{-1} ज्ञात कीजिए।

$$A^{-1} = \frac{C'}{A} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}{-4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \text{ है।}$$

Step 5: $\overline{x}$ ज्ञात कीजिए।

$$\overline{x} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}.20 + & \frac{1}{4}.0 \\ \frac{1}{4}.20 + & \left(-\frac{3}{4}\right).0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ध्यान दें कि इस प्रकार प्राप्त हल वही है जो हमने ऊपर प्राप्त किया था। कठिनाई केवल यह है कि यह विधि स्कूल स्तर के बीजगणित में पढ़ाई जाने वाली सामान्य विधि की तुलना में यह विधि अत्यंत जटिल प्रतीत हो सकती है। परन्तु स्मरण रहे कि बड़े निकायों के लिए सामान्य विधि बहुत अधिक कठिन तथा अत्यधिक समय लेने वाली प्रक्रिया है। इन स्थितियों में यहाँ दी गई विधि तुलनात्मक रूप से अत्यंत सरल सिद्ध होती है।

बोध प्रश्न 3

टिप्पणी:(क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए स्थान का प्रयोग कीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1) क्या नीचे दिए समीकरणों का निकायों के लिए संगत आव्यूह का व्युत्क्रम है अथवा नहीं?

$$4x_1 + 6x_2 = 5$$

$$12x_1 - 18x_2 = 10$$

....

....

क्या इन समीकरणों द्वारा निरूपित सरल रेखाएँ परस्पर काटती हैं अथवा समानांतर हैं?

....

....

....

....

....

2) समीकरण निकाय $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ के हल का अस्तित्व होने के लिए $|A| \neq 0$ (i) एक अनिवार्य शर्त है या (ii) एक पर्याप्त शर्त है या (iii) एक अनिवार्य तथा पर्याप्त शर्त है?

....

....

....

....

....

3) माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ है। इसका परिवर्त ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

4) माना $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ है। A सममित कब होगा?

....

....

....

....

....

5) माना (i) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ तथा

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ है

(a) A और B के सहखंडज ज्ञात कीजिए।

(b) A और B के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।.

....

....

....

....

....

6.6 सारांश

इस इकाई में हमने आपका परिचय आव्यूह बीजगणित से करवाया। हमने आव्यूह की संकल्पना के बारे में तथा आव्यूहों पर विभिन्न संक्रियाओं जैसे कि योग, व्यवकलन और गुणनफल इत्यादि के बारे में जाना। आपका परिचय एक सारणिक की संकल्पना से करवाया गया। इस सम्बन्ध में, कुछ विशिष्ट आव्यूहों की चर्चा की गई। हमने एक सारणिक की संकल्पना के बारे में भी जाना और इनके अनेक गुणधर्मों की चर्चा भी की। उपसारणिक तथा सहखंड की संकल्पना की चर्चा की गई है तथा दो से अधिक कोटि के सारणिकों का मान ज्ञात करने की तथा किसी युगपत समीकरणों के निकाय का हल ज्ञात करने विधि की व्याख्या की गई। अंततः व्युत्क्रम विधि तथा क्रेमर के नियम की व्याख्या की गई।

6.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) देखिए उपभाग 6.2.1 तथा उत्तर दें।

2) देखिए उपभाग 6.2.1 तथा उत्तर दें।

3) देखिए उपभाग 6.2.2 तथा उत्तर दें।

4) देखिए उपभाग 6.2.2 तथा उत्तर दें।

बोध प्रश्न 2

1) (i) नहीं, क्योंकि इसके विकर्ण के अतिरिक्त सभी अवयव शून्य नहीं है।

(ii) नहीं, क्योंकि इसके विकर्ण के अतिरिक्त सभी अवयव शून्य नहीं है।

(iii) हाँ, क्योंकि इसके विकर्ण के अतिरिक्त सभी अवयव शून्य है।

(iv) नहीं, क्योंकि दिया हुआ आव्यूह एक वर्ग आव्यूह नहीं है।

2)

<u>बोध प्रश्न 3</u>

1) देखिए भाग 6.5 तथा उत्तर दें।

2) देखिए भाग 6.5 तथा उत्तर दें।

3) देखिए भाग 6.5 तथा उत्तर दें।

4) देखिए भाग 6.5 तथा उत्तर दें।

5) देखिए भाग 6.5 तथा उत्तर दें।

इकाई 7 रैखिक आर्थिक प्रतिमान*

संरचना

7.0 उद्देश्य

7.1 प्रस्तावना

7.2 बाज़ार प्रतिमान

7.3 राष्ट्रीय आय प्रतिमान

7.4 आगत–उत्पाद विश्लेषण

7.4.1 संरचना

7.4.2 हॉकिन्स–सायमन

7.4.3 अनावृत्त प्रतिमान तथा संवृत्त प्रतिमान

7.5 मार्कोव प्रतिमान

7.6 सारांश

7.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

7.0 उद्देश्य

इकाई निम्नलिखित विषयों को समझने में आपकी सहायता करेगी:

- आव्यूहों तथा रैखिक समीकरणों के सिद्धान्तों द्वारा एक बाज़ार की माँग (Market demand) तथा पूर्ति (Supply Model);
- राष्ट्रीय आय प्रतिमान;
- निवेश–निर्गत विश्लेषण (Input-Output Analysis) तथा
- मार्कव प्रतिमान

7.1 प्रस्तावना

इकाई 4 में हमने युगपत् रैखिक समीकरणों (linear simultaneous equations) को आव्यूह बीजगणित (matrix algebra) की सहायता से हल करना सीखा और अर्थशास्त्र में अनेक समस्याएँ युगपत् रैखिक समीकरणों के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं। बहुधा इन निकायों में समीकरणों की संख्या काफी अधिक होती है और उन्हें हल करने की आवश्यकता होती है। आव्यूह बीजगणित इस प्रकार के निकायों को सरलता तथा कुशलता से हल करने में हमारी सहायता करता है। वास्तव में, अब आगत–उत्पाद प्रतिमानों (input-output models) रैखिक प्रोगामन (linear programming) और खेल सिद्धान्त (game theory) इत्यादि क्षेत्रों में आव्यूह

* सौगतो सेन, इग्नू

बीजगणित का व्यापक उपयोग किया जाता है। इस इकाई में हम आव्यूह बीजगणित के सरल अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे। हमें यह ध्यान देना चाहिए कि आव्यूह बीजगणित की वास्तविक सक्षमता का सही आभास केवल तभी होता है जब समीकरणों की संख्या अधिक हो। परन्तु यहाँ सरलीकरण के उद्देश्य से, हम बिना आवश्यक तत्वों को त्यागे, अपनी चर्चा को समीकरणों की छोटी संख्या तक सीमित रखेंगे।

7.2 बाज़ार प्रतिमान

साधारण बाज़ार प्रतिमानों में, किसी वस्तु की माँग और इसकी पूर्ति केवल इसकी कीमत के फलन के रूप में व्यक्त की जाती है। यहाँ, संतुलन संरोध (equilibrium condition) एक अकेले समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है जोकि माँग और पूर्ति समीकरणों को बराबर रखकर प्राप्त किया जाता है। इस समीकरण को हल कर के संतुलन कीमत (equilibrium price) प्राप्त की जाती है। संतुलन मात्रा, मात्रा समीकरण या पूर्ति समीकरण में संतुलन कीमत का मान रखकर प्राप्त की जा सकती है। परंतु, बाज़ार का यह सरलीकृत सूत्रीकरण इस पूर्व कल्पना पर आधारित है कि एक वस्तु की माँग और पूर्ति अन्य वस्तुओं की कीमतों से प्रभावित नहीं होते। वास्तविकता में, किसी भी वस्तु के लिए के लिए अनेक प्रतिस्थापन (Substitutes) तथा पूरक वस्तुएँ (complementary goods) हो सकती हैं। ऐसी वस्तुओं की कीमत, सामान्यतः अन्य वस्तुओं की कीमतों द्वारा प्रभावित हो सकती हैं। अतः माँग और पूर्ति फलनों का बेहतर चित्रण वह होगा जिसमें अन्य वस्तुओं की कीमतों के प्रभाव को भी सम्मिलित किया गया हो। मान लीजिए, n परस्पर सम्बन्धित बाज़ार है। इस बाज़ार प्रतिमान में, प्रत्येक वस्तु की माँग n कीमतों का एक फलन होगी और इसमें n पूर्ति फलन होंगे। संतुलन के लिए, इनमें से प्रत्येक माँग समीकरण को उसके संगत पूर्ति फलन के बराबर रखना होगा। इस प्रकार प्राप्त n समीकरणों से n विचाराधीन वस्तुओं की n संतुलन कीमतें प्राप्त करने के लिए, इन्हें एक साथ/युगपत् रूप से हल करना होगा। अंततः, कीमतों के इन मानों को या तो n माँग समीकरणों या n पूर्ति फलनों में प्रतिस्थापित करने n संतुलन मात्राएँ प्राप्त की जा सकती हैं। अतः $2n$ चरों/मात्राओं की जानकारी के लिए (n कीमतें तथा n मात्राएँ), हमें $2n$ समीकरणों को (n संतुलन समीकरणों तथा n माँग अथवा n पूर्ति फलनों को) हल करने की आवश्यकता पड़ती है। n के बड़े मानों के लिए यह कार्य अत्यंत कठिन हो सकता है। परन्तु आव्यूह बीजगणित इस कार्य को पर्याप्त रूप से सरलीकृत कर देता है। आइए, हब हम एक दो वस्तुओं वाले बाज़ार प्रतिमान पर विचार करें और देखें कि आव्यूहों के उपयोग से इस प्रतिमान का हल किस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण

दो वस्तुओं (x और y) वाले एक बाज़ार प्रतिमान के लिए माँग और पूर्ति फलन इस प्रकार है:

$D_x = 18 - 3P_x + P_y$ $\qquad$ $D_y = 12 + P_x - P_y$

$S_x = 2 + 4P_x$ $\qquad$ $S_y = 2 + 3P_y$

जहाँ D_x वस्तु x की माँग की मात्रा तथा D_y वस्तु y की माँग की माँग है; S_x वस्तु x की

पूर्ति की मात्रा तथा S_y वस्तु y की पूर्ति की मात्रा है और P_x तथा P_y क्रमशः वस्तु x वस्तु y की कीमते हैं।

संतुलन कीमतें तथा मात्राएँ ज्ञात कीजिए।

x के लिए संतुलन समीकरण हैः

$$D_x = S_x + Q_x$$

अथवा

$$18 - 3P_x + P_y = -2 + 4P_x \quad \text{अथवा } 3P_x - 4P_x + P_y = -2 - 18$$

अथवा $7P_x + P_y = -20$ (1)

y के लिए संतुलन समीकरण हैः

$$D_y = S_y + Q_y$$

अथवा

$$12 + P_x - 2P_y = -2 + 3P_y \quad \text{अथवा } P_x - 2P_y - 3P_y = -2 - 12$$

के लिए संतुलन समीकरण हैः

$$P_x - 7P_y = -14 \qquad (2)$$

समीकरणों (1) और (2) को एक साथ आव्यूह रूप में व्यक्त करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -14 \end{bmatrix}$$

दो कीमतें तथा ज्ञात करने के लिए हम इस समीकरण निकाय को आव्यूह–व्युत्क्रम विधि द्वारा हल करते हैं।

इस प्रकार

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -20 \\ -14 \end{bmatrix}$$

अब $$\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj}\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}$$

अथवा

$$\cdot\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -20 \\ -14 \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 114 \\ 118 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{77}{17} \\ \frac{79}{17} \end{bmatrix}$$

अतः

$$P_x = \frac{77}{17} \text{ और } P_y = \frac{79}{17}$$

दी हुई दो वस्तुओं की संतुलन मात्राएँ ज्ञात करने के लिए ऊपर प्राप्त कीमतों के मानों को हम माँग फलनों अथवा पूर्ति फलनों में रखते हैं। प्रतिस्थापित कर सकते हैं। आइए, हम इन मानों को माँग समीकरणों में रखें।

अतः हम प्राप्त करते हैंः

$$Q_x = 18 - 3.\frac{77}{17} + \frac{79}{17} = \frac{194}{17}$$

और

$$Q_y = 12 + \frac{77}{17} - 2.\frac{79}{17} = \frac{143}{17}$$

<u>बोध प्रश्न 1</u>

1) गेहूँ तथा चावल के लिए बाज़ार माँग समीकरण

$D_x = 4 - 10P_x - 7P_y$ और $D_y = 3 + 7P_x - 7P_y$

हैं और पूर्ति समीकरण

$S_x = 7 + P_x - P_y$ और $S_y = -27 - P_x + 2P_y$

हैं जहाँ P_x गेहूँ की तथा P_y चावल की कीमत है।

क्रैमर के नियम द्वारा संतुलन कीमतें तथा मात्राएँ ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

2) दो वस्तुओं (x और y) बाज़ार प्रतिमान के लिए माँग और आपूर्ति समीकरण द्वारा दिए गए हैंः

$D_x = 47 - 2P_x + 2P_y$ $\qquad D_y = 16 + 2P_x - P_y$

$S_x = 7 + 2P_x$ $\qquad S_y = 4 + 2P_y$

जहाँ

D_x x के लिए माँगी गई मात्रा है, D_y y के लिए माँगी गई मात्रा है, S_x x के लिए आपूर्ति की गई मात्रा है, S_y y के लिए आपूर्ति की गई मात्रा है,, P_x x

की कीमत है P_y y की कीमत है।

आव्यूह–व्युत्क्रम विधि के प्रयोग से संतुलन कीमतें तथा मात्राएँ ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

7.3 राष्ट्रीय आय प्रतिमान

राष्ट्रीय आय प्रतिमान, आव्यूह बीजगणित का एक और महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है। आइए, हम एक ऐसी अर्थव्यवस्था के एक सरल दो समीकरण वाले राष्ट्रीय आय प्रतिमान पर विचार करें जिसमें सरकार के अन्य देशों से व्यापारिक सम्बन्ध नहीं हैं। ऐसी अर्थव्यवस्था के लिए, राष्ट्रीय आय प्रतिमान को नीचे दिए दो समीकरणों से व्यक्त किया जा सकता हैः

$$Y = C + I_0 \qquad (1)$$

$$C = a + bY \qquad (2)$$

जहाँ Y राष्ट्रीय आय को, C उपभोग को, तथा I_0 स्वायत्त निवेश को निरूपित करते हैं। a और b अचर हैं। हमें ध्यान देना चाहिए कि राष्ट्रीय आय प्रतिमान में, उत्पादन के प्रक्रम में उत्पन्न कुल उत्पादन और कुल आय समतुल्य माने जाते हैं। अतः Y को कुल उत्पादन के मान तथा कुल राष्ट्रीय आय में से कुछ भी लिया जा सकता है। इस प्रतिमान में, उत्पादित वस्तुओं और सेवाओं पर किया गया कुल खर्च, उपभोग व्यय तथा निवेश व्यय के योग के बराबर होता है, अर्थात् $C + I_0$ होता है। समीकरण (1) आय के संतुलन स्तर के लिए प्रतिबंध/संरोध है। इसके अनुसार, राष्ट्रीय आय संतुलन में होगी, यदि नियोजित उत्पादन (Y) नियोजित व्यय (planned expenditure) ($C + I_0$) के बराबर होगी। दूसरे शब्दों में, संतुलन के लिए, उत्पादकों (आपूर्तिकर्त्ताओं) की योजना और खरीददारों (माँगकर्त्ताओं/उपभोक्ताओं) की योजनाएँ मेल खानी चाहिए। समीकरण (2) उपभोग को आय के एक रैखिक फलन के रूप में प्रस्तुत करता है जिसमें अचरों (प्राचलों) a और b पर कुछ प्रतिबंध हैं। ये प्रतिबंध $a > 0$ और $0 < b < 1$ होने चाहिए। समीकरणों (1) और (2) से यह स्पष्ट होता है कि Y और C का निर्धारण प्रतिमान से किया जाना है जबकि स्वायत्त निवेश (autonomous investment) I_0 पहले ही प्रतिमान से बाहर प्रदत्त है। वे चर जो किसी दिए हुए प्रतिमान से ज्ञात किए जाते हैं, अंतर्जात चर (endogenous variables) कहलाते हैं। अतः, Y और C अंतर्जात चर हैं। वे चर जिनके मान प्रतिमान के बाहर से प्राप्त होते हैं, बर्हिजात चर (exogenous variables) कहलाते हैं। इस प्रतिमान में निवेश (I_0) एक बर्हिजात चर हैं। अतः, यहाँ निवेश वस्तुतः एक अचर की तरह कार्य करता है। आइए, हम इस प्रतिमान को दो अंतर्जात चरों Y और C के लिए हल करने का प्रयास करें।

समीकरणों (1) और (2) को पुनर्व्यवस्थित करने पर हम प्राप्त करते हैंः

$$Y - C = I_0 \qquad (3)$$

$$-bY + C = a \qquad (4)$$

ध्यान दें कि इन पुनर्व्यवस्थित समीकरणों में अंतर्जात चरों को समानता के चिन्ह '=' के बाई ओर रेखा गया है। समीकरणों (3) और (4) को एक साथ आव्यूह रूप में लिखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ a \end{bmatrix} \qquad (5)$$

हम IY I और IC का मान समीकरण (5) आव्यूह–व्युत्क्रम विधि या क्रैमर के नियम का प्रयोग करके ज्ञात कर सकते हैं। अब हम एक आवश्यक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण:

नीचे दिए राष्ट्रीय आय प्रतिमान में Y और C ज्ञात कीजिए।

$Y = C + I$

$C = 20 + \dfrac{3}{4}$

$I = 20$

समीकरण (3) में से I का मान समीकरण (1) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$Y = C + 20$

इस नए समीकरण और दूसरे समीकरण को फिर से व्यवस्थित करने पर हम पाते हैं:

समीकरणों (6) और समीकरण (4) को पुनर्व्यवस्थित करने पर हम पाते हैं:

$Y = C + I \qquad (1)$

$\dfrac{3}{4} - y + C + 20 \qquad (2)$

समीकरणों (1) और समीकरण (2) को आव्यूहों समीकरण Ax = b के रूप में लिखने पर हम पाते हैं:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

यहाँ

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} \text{तथा } b = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

हम इस आव्यूह समीकरण को क्रैमर नियम द्वारा हर Y और C हल (3) करने पर पाते हैं:

$$Y = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 20 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{40}{\frac{1}{4}} = 160$$

$$C = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ -\frac{3}{4} & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{37}{\frac{1}{4}} = 140$$

बोध प्रश्न 2

टिप्पणीः (क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए स्थान का प्रयोग कीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1) नीचे दिए राष्ट्रीय आय प्रतिमान के लिए Y और C का मान आव्यूह व्युत्क्रम विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

$Y = C + I + G$ (G: सरकारी व्यय)

$C = 20 +$

$I = 20$

$G = 10$

....

....

....

....

2) मान लीजिए राष्ट्रीय आय प्रतिमान

$Y = C + I + G$ (G: सरकारी व्यय)

$C = 20 + \frac{3}{4}y\,(\text{y} - \text{T})$ (T: कुल कर)

$I = 10$

$G = 20$

$T = 20$

है। क्रैमर नियम द्वारा Y और C का मान ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

7.4 आगत–उत्पाद विश्लेषण

7.4.1 संरचना

आगत–उत्पाद विश्लेषण (input-output analysis) में आव्यूह बीजगणित का उपयोग अत्यंत लाभकारी है। आगत–उत्पाद विश्लेषण के विकास का श्रेय प्रसिद्ध अर्थशास्त्री वैसिली लियंटिफ (Wassily Leontief) को जाता है। यह एक ऐसी तकनीक है जो किसी अर्थव्यवस्था के विभिन्न उत्पादक क्षेत्रों की परस्पर निर्भरता पर केन्द्रित है। सरलीकरण के उद्देश्य से, आइए, हम केवल दो उत्पादक क्षेत्रों वाली एक अर्थव्यवस्था पर विचार करें: कृषि एवं उद्योग। यदि हम अपना ध्यान कृषि पर केन्द्रित करें तो पाएँगे कि इस क्षेत्र में एक दी हुई अवधि में, जैसे कि एक वर्ष में वस्तुओं की एक दी हुई मात्रा का उत्पादन किया जाता है। इन वस्तुओं के उत्पादन का उपयोग विभिन्न प्रकार से किया जाता है। दूसरे शब्दों में, इन कृषि उत्पादों के अनेक गंतव्य–स्थान/लक्ष्य होंगे जिन्हें मोटे तौर पर दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है: (क) उत्पाद का वह हिस्सा जो कि स्वयं कृषि क्षेत्र में तथा उद्योग क्षेत्र में अंतर्वर्ती/मध्यवर्ती आगत (intermediate input) के रूप में प्रयोग किया जाता है; तथा (ख) उत्पाद का वह हिस्सा जो कि अन्त्य उपभोग के लिए प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, गेहूँ कृषि–क्षेत्र का एक उत्पाद है और इसकी माँग इन क्षेत्रों में हो सकती हैं: (i) कृषि क्षेत्र में ही (बीज के रूप में) आगत के तौर पर, आगे के उत्पादन के लिए, तथा डबल रोटी उद्योग में डबल रोटी के निर्माण के लिए और (ii) अन्त्य माँग क्षेत्र में अन्त्य उपभोग के लिए। इसी प्रकार उद्योग के उत्पाद की माँग, कृषि और उद्योग क्षेत्रों में मध्यवर्ती आगत के तौर पर तथा अन्त्य माँग क्षेत्र में अन्त्य उपभोग के लिए हो सकती है।

मध्यवर्ती आगत (जिसे माध्यमिक या गौण आगत भी कहा जाता है) के अतिरिक्त, प्रत्येक क्षेत्र को प्राथमिक आगतों (primary inputs) की भी आवश्यकता होती है। प्राथमिक आगत भूमि, श्रम, पूँजी तथा उद्यमिता जैसे कारकों की सेवाओं के रूप में होते हैं जिनकी पूर्ति अन्त्य माँग क्षेत्र द्वारा होती है जिसे घरेलू क्षेत्र भी कहते हैं।

आइए, हम कृषि और उद्योग क्षेत्रों से सम्बन्धित एक आगत–निर्गम तालिका पर विचार करें। ऐसी तालिका को आगत–निर्गम लेनदेन आव्यूह (input-output transactions matrix) भी कहते हैं।

तालिका 7.1: आगत–निर्गम लेनदेन आव्यूह

उत्पादक क्षेत्र	क्रेता क्षेत्र		अन्तिम माँग (उपभोग)	कुल निर्गम (उत्पाद)
	1 (कृषि)	2 (उद्योग)		
1 (कृषि)	X_{11}	X_{12}	d_1	X_1
2 (उद्योग)	X_{21}	X_{22}	d_2	X_2
प्राथमिक आगत (श्रम)	L_1	L_2		

ऊपर दिए गए आगत–निर्गम लेनदेन आव्यूह में X_{ij} $(i = 1, 2; j = 1, 2)$ उत्पादक क्षेत्र i के उस उत्पाद को व्यक्त करता है जो उत्पादक क्षेत्र j में मध्यवर्ती आगत के रूप में प्रयोग होता है। इस तालिका में, कृषि क्षेत्र को 1 से तथा उद्योग क्षेत्र को 2 से निरूपित किया गया है। अतः, हम X_{11} की व्याख्या कृषि क्षेत्र के उस उत्पाद के रूप में कर सकते हैं जो इसी क्षेत्र (कृषि क्षेत्र) में मध्यवर्ती आगत के तौर पर प्रयोग होता है। इसी प्रकार, X_{21} की व्याख्या उद्योग क्षेत्र उस उत्पाद के रूप में जो कृषि क्षेत्र में आगत के तौर पर प्रयोग होता है, इत्यादि। इसके अतिरिक्त, प्रत्येक उत्पादक क्षेत्र अन्त्य उपभोग के लिए भी जाता है। अतः, d_1 कृषि क्षेत्र का तथा d_2 उद्योग क्षेत्र का वह उत्पाद है जोकि अन्त्य उपभोग के काम आता है। साथ ही, X_1 और X_2 क्रमशः कृषि क्षेत्र तथा उद्योग क्षेत्र के कुल उत्पाद को व्यक्त करते हैं। ऊपर दी गई व्याख्या के अनुसार, हम निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करते हैं:

$$X_{11} + X_{12} + d_1 = X_1 \qquad (1)$$

$$X_{21} + X_{22} + d_2 = X_2 \qquad (2)$$

अंततः ऊपर दी गई तालिका की अन्त्य पंक्ति के तत्व, अर्थात् L_1 और L_2 संगत क्षेत्रों में प्राथमिक आगत (जैसे कि श्रम) की आवश्यकताओं को व्यक्त कर सकते हैं। इन प्राथमिक आगतों की आपूर्ति जैसे कि पहले भी उल्लेख किया जा सकता है, घरेलू क्षेत्र द्वारा की जाती है। यह स्पष्ट है कि यह तालिका आगत–उत्पाद प्रतिमान का एक अत्यंत सरलीकृत निरूपण है। परन्तु, इस तालिका में, और अधिक उत्पादक क्षेत्र, अन्य प्रकार के अन्त्य उपभोग (जैसे कि निवेश, सरकारी व्यय और शुद्ध निर्यात इत्यादि) तथा प्राथमिक आगतों के नए वर्ग (जैसे कि भूमि, पूँजी और उद्यमिता इत्यादि) सम्मिलित करके, इसे सरलतापूर्वक वास्तविकता के समीप लाया जा सकता है।

और आगे बढ़ने के लिए, आइए हम कुछ महत्वपूर्ण मान्यताओं का उल्लेख करते हैं। ये मान्यताएँ हैं: (1) प्रत्येक क्षेत्र एक सजातीय वस्तु (homogeneous commodity) का उत्पादन करता है, (2) प्रत्येक क्षेत्र में प्रति इकाई उत्पाद के लिए आगत की आवश्यकता निश्चित रहती है। इसका अर्थ है कि प्रत्येक क्षेत्र में उत्पाद का स्तर यह निर्धारित करता है कि इसके लिए प्रयोग होने वाले प्रत्येक आगत की कितनी मात्रा की आवश्यकता होगी और (3) प्रत्येक क्षेत्र में उत्पादन "पैमाने के समान प्रतिफल" के नियम पर आधारित है, अर्थात् प्रत्येक आगत में k-गुणा परिवर्तन के फलस्वरूप उत्पाद में भी k-गुणा परिवर्तन होता है।

निश्चित आगत आवश्यकताओं की मान्यताओं से, हम देख सकते हैं कि किसी वस्तु j की एक इकाई के उत्पादन के लिए, किसी वस्तु I की आगत की मात्रा निश्चित होनी चाहिए।

आइए हम इस राशि को a_{ij} से व्यक्त करें, जहाँ है। यदि और उत्पाद की मात्राओं को व्यक्त करते हैं, तो a_{ij} की व्याख्या एक मान के रूप में की जा सकती है। अतः, $a_{ij} = 0.04$ का अर्थ होगा कि वस्तु i वस्तु j का 1 रुपए मान के बराबर उत्पादन करने के लिए, 40 पैसे मान के बराबर वस्तु i की आवश्यकता पड़ेगी। इस a_{ij} को *आगत गुणांक* (*input coefficient*) कहते हैं।

किसी दो दी गई संख्या के बराबर उत्पादक क्षेत्रों वाली किसी अर्थव्यवस्था के आगत गुणांकों को हम एक आव्यूह के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं। इस आव्यूह को

आगत गुणांक आव्यूह कहते हैं। अतः, हमारे दो उत्पादक क्षेत्रों वाली अर्थव्यवस्था के लिए, आगत गुणांक आव्यूह को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता हैः

तालिका 7.2: आगत गुणांक आव्यूह

आगत	उत्पाद (निर्गम)	
	1 (कृषि)	2 (उद्योग)
1 (कृषि)	a_{11}	a_{12}
2 (उद्योग)	a_{21}	a_{22}

हमें ध्यान देना चाहिए कि प्रत्येक स्तंभ में अवयवों का योग हमें संगत उत्पादक क्षेत्र के उत्पाद का एक रुपये के मान के बराबर उत्पादन करने के लिए मध्यवर्ती आगत की मात्रा प्रदान करता है। इसके परिणामस्वरूप आगत गुणांक आव्यूह के प्रत्येक स्तंभ के अवयवों का योग 1 से कम होना चाहिए क्योंकि इसमें एक रुपये मूल्य के बराबर उत्पाद के लिए प्रयोग होने वाले प्राथमिक आगतों की लागत सम्मिलित नहीं है। यह मानते हुए कि हम एक मुक्त प्रवेश वाली शुद्ध प्रतियोगिता के अंतर्गत उत्पादन करने के लिए प्राथमिक आगत की लागत, एक में से गुणांक आव्यूह के प्रासंगिक स्तंभ के सभी अवयवों के योग को घटाकर प्राप्त की जा सकती है। ऊपर दी हुई अर्थव्यवस्था के लिए, यदि उत्पाद के प्रति रुपया उत्पादन में होने वाली प्राथमिक आगतों की लागत क्रमशः l_1 और l_2 हैं, तो

$$l_1 = 1-(a_{11}+a_{21}) \qquad (1)$$

तथा

$$l_2 = 1-(a_{12}+a_{22}) \qquad (2)$$

होगा। प्रत्येक उत्पादक क्षेत्र के कुल उत्पाद को आगत गुणांकों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। ऐसा समीकरणों (1) और (2) में $X_{ij} = a_{ij}\, X_j$ रखकर किया जा सकता है। अतः, दो उत्पादक क्षेत्रों वाली अर्थव्यवस्था के लिएः

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + d_1$$

अथवा $$X_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 = d_1$$

अथवा $$(1-a_{11})X_1 - a_{12}X_2 = d_1 \qquad (3)$$

तथा इसी प्रकार

$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + d_2$$

अथवा $$-a_{21}X_1 + X_2 - a_{22}X_2 = d_2$$

अथवा $$a_{21}X_1 + (1-a_{22})X_2 - a_{12}X_2 = d_2 \qquad (4)$$

समीकरण (3) और (4) को आव्यूह रूप में लिखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} & 1-a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

मान लीजिए:

$$A= \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \text{तथा } d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

है तो समीकरण (5) हो जाएगा:

$$(I - A)\, X = d \qquad (6)$$

जहाँ I एक 2×2 आव्यूह है। आव्यूह $(I–A)$ को प्रौद्योगिकी *आव्यूह* (*technology matrix*) कहते हैं।

यदि $(I –A)$ व्युत्क्रमणीय (non-singular) है। अर्थात् यदि है, तो समीकरण (6) को X के लिए हल किया जा सकता है:

$$=X= d \quad X = (I – A)^{-1}\, d \qquad (7)$$

यह ध्यान रखना महत्वपूर्ण है कि किसी दी गई तकनीक के लिए, जैसा कि प्रौद्योगिकी आव्यूह में सन्निहित है, समीकरण (7) का उपयोग कुल उत्पादन को निर्धारित करने के लिए किया जा सकता है जो कि वस्तुओं के लिए एक अन्त्य मांग को पूरा करने के लिए विभिन्न उत्पादन क्षेत्रों द्वारा उत्पादित किए जाने की आवश्यकता है। (*d*)।

7.4.2 हॉकिन्स–सायमन

हम जानते हैं कि किसी प्रणाली/व्यवस्था के लिए, ऋणात्मक निर्गम अर्थहीन है। अतः, हम यह कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं कि समीकरण (7) का हल जहाँ भौतिक इकाइयों (physical units) में व्यक्त किए गए हैं, हमें उत्पाद क्षेत्रों के लिए धनात्मक निर्गम (positive outputs) ही देगा? इसके लिए, हमें यह सुनिश्चित करना होगा कि हमारा प्रतिमान *हॉकिन्स–सायमन की शर्तों* (*Hawkins-simon Conditions*) को संतुष्ट करता है। आइए, हम प्रौद्योगिक आव्यूह $(I \;\; A)$ पर विचार करें। हॉकिन्स–सायमन की शर्त के अनुसार, धनात्मक निर्गम के लिए, $(I \;\; A)$ के सभी मुख्य उपसारणिक धनात्मक निर्गम होने चाहिए। अतः हमारे प्रौद्योगिक आव्यूह

$$(I – A)= \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix}$$

के लिए धनात्मक निर्गम की शर्त यह है कि

$1 – a_{11} > 0$ और $1 – a_{22} > 0$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

हो।

यह स्पष्टतया देखा जा सकता है कि ऊपर दिए प्रौद्योगिकी आव्यूह के विकर्ण के अवयव की प्रविष्टियाँ धनात्मक होने का अर्थ है कि a_{11} और a_{22} दोनों का मान 1 से कम होगा। अब हम एक उदाहरण लेते हैं:

उदाहरण

नीचे एक कृषि क्षेत्र तथा एक उद्योग क्षेत्र वाली अर्थव्यवस्था का आगत गुणांक आव्यूह दिया हैः

$$\begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 \\ 0.70 & 0.20 \end{bmatrix}$$

इन दोनों क्षेत्रों के उत्पादों की अनुमानित अन्त्य उपभोग माँग क्रमशः 400 करोड़ रुपये तथा 4670 करोड़ रुपये है। दोनों क्षेत्रों का कुल उत्पाद ज्ञात कीजिए। अनुमानित आगत आवश्यकताएँ भी ज्ञात कीजिए।

प्रौद्यागिकी आव्यूह हैः

$$(I-A)=\begin{bmatrix} 1-0.20 & -0.20 \\ -0.70 & 1-0.20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{bmatrix}$$

प्रौद्यागिकी आव्यूह का सारणिक हैः

$$|I-A|=\begin{vmatrix} 0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{vmatrix}=0.64-0.14=0.70$$

प्रौद्यागिकी आव्यूह के विकर्ण की प्रविष्टियाँ तथा इसका सारणिक धनात्मक हैं। अतः हॉकिन्स सीमॉन शर्त संतुष्ट होती है तथा प्रणाली का एक धनात्मक हल होगा। अन्त्य उपभोग माँग सदिश हैः

$$d=\begin{bmatrix} 0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{bmatrix}$$

यदि इन दोनों क्षेत्रों का कुल उत्पाद क्रमशः X_1 और X_2 हैं, तो उत्पाद सदिश होगाः

$$X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

हम जानते हैं कि

$$X = (I-A)^{-1}d$$

अर्थात् $$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 400 \\ 4670 \end{bmatrix}$$

अब

$$\begin{bmatrix} 0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{\text{Adj}\begin{bmatrix} -0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.80 & -0.20 \\ -0.70 & 0.80 \end{vmatrix}}=\frac{1}{0.70}\begin{bmatrix} 0.80 & 0.20 \\ 0.70 & 0.80 \end{bmatrix}$$

है। अतः

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.70}\begin{bmatrix} 0.80 & 0.20 \\ 0.70 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 4670 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.70}\begin{bmatrix} 1270 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2700 \\ 8000 \end{bmatrix}$$

इसलिए, कृषि क्षेत्र और उद्योग क्षेत्र के कुल उत्पाद क्रमशः 2700 करोड़ रुपये तथा 8000 करोड़ रुपये हैं।

माध्यमिक/गौण आगत आवश्यकताएँ इस प्रकार हैं:

मान लीजिए:

x_{11}: कृषि क्षेत्र में कृषि क्षेत्र से आगत

x_{21}: कृषि क्षेत्र में उद्योग क्षेत्र से आगत

x_{22}: उद्योग क्षेत्र में उद्योग क्षेत्र से आगत

x_{12}: उद्योग क्षेत्र में कृषि क्षेत्र से आगत

आगत गुणांकों की परिभाषा एवं उनके दिए मानों से हम प्राप्त करते हैं:

$x_{11} = a_{11} X_1 = 0.20 \cdot 2700 = 700$

$x_{21} = a_{21} X_1 = 0.70 \cdot 2700 = 1770$

$x_{22} = a_{22} X_2 = 0.20 \cdot 8000 = 1600$

$x_{12} = a_{12} X_2 = 0.20 \cdot 8000 = 1600$

अतः

कृषि क्षेत्र में कृषि क्षेत्र से आगत 700 करोड़ रुपये है।

कृषि क्षेत्र में उद्योग क्षेत्र से आगत 1770 करोड़ रुपये है।

उद्योग क्षेत्र में उद्योग क्षेत्र से आगत 1600 करोड़ रुपये है।

उद्योग क्षेत्र में कृषि क्षेत्र से आगत 1600 करोड़ रुपये है।

प्राथमिक आगतों की आवश्यकताएँ:

माना कृषि क्षेत्र तथा उद्योग क्षेत्र की प्राथमिक आगतों की आवश्यकताएँ क्रमशः L_1 और L_2 हैं। अतः

$L_1 = l_1 X_1$ तथा $L_2 = l_2 X_2$

हैं जहाँ l_1 और l_2 क्रमशः कृषि क्षेत्र तथा उद्योग क्षेत्र के एक रुपये मूल्य के उत्पाद के उत्पादन के लिए प्राथमिक आगत आवश्यकताएँ हैं। हम जानते हैं कि

$$l_1 = 1(a_{11} + a_{21}) = 1(0.20 + 0.70) = 0.10$$

$$l_2 = 1(a_{12} + a_{22}) = 1(0.20 + 0.20) = 0.60$$

हैं। अतः

$$L_1 = l_1 X_1 = 0.102700 = 270$$

$$L_2 = l_2 X_2 = 0.608000 = 4800$$

हैं। अतः

कृषि क्षेत्र में प्राथमिक आगतों की आवश्यकता 270 करोड़ रुपये है।

उद्योग क्षेत्र में प्राथमिक आगतों की आवश्यकता 4800 करोड़ रुपये है।

7.4.3 अनावृत्त प्रतिमान तथा संवृत्त प्रतिमान

आगत–उत्पाद लेनदेन आव्यूह, जिसका हमने अभी अध्ययन किया है, एक अनावृत्त प्रतिमान (*open input-output model*) का एक उदाहरण है। ऐसे प्रतिमान में, उत्पादक क्षेत्र, घरेलू क्षेत्र या अर्थव्यवस्था के अन्त्य माँग क्षेत्र से व्यवहार करता है। अपने प्राथमिक आगतों के लिए अन्त्य उत्पादों की बिक्री के लिए हमने देखा कि एक अनावृत्त आगत–उत्पाद प्रतिमान में हमें उत्पादक क्षेत्रों के लिए उत्पाद के अद्वितीय स्तर प्राप्त होते हैं।

दूसरी ओर, एक संवृत्त आगत–उत्पाद प्रतिमान (*Closed input-output model*) एक ऐसा प्रतिमान है जिसमें अन्त्य माँग क्षेत्र को भी एक उत्पादक क्षेत्र माना जाता है। अतः, इस प्रतिमान में उत्पाद का कोई भी भाग, अन्त्य उत्पाद के रूप में बाज़ार में नहीं बेचा जाता। पुनः इस प्रतिमान में, उत्पादक क्षेत्र प्राथमिक आगतों का प्रयोग नहीं करते या उत्पादन के कारकों की सेवाएँ नहीं लेते। यह प्रतिमान इस अर्थ में संवृत्त है कि सभी आर्थिक गतिविधियाँ उत्पादन की सीमा के अन्दर ही होती हैं और इस सीमा के बाहर कुछ नहीं जाता। एक संवृत्त आगत–उत्पाद प्रतिमान का हल अनावृत्त आगत–उत्पाद प्रतिमान के हल की तरह अद्वितीय नहीं होता। अतः, संवृत्त आगत–उत्पाद प्रतिमान इस अर्थ में अधिक लचीला है कि ये हमें उत्पादन के अनंत विकल्प उपलब्ध करवाता है।

7.5 मार्कोव प्रतिमान

अनिश्चित घटनाओं का विश्लेषण प्रायिकता की संकल्पना (concept of probability) मार्कोव प्रतिमान का प्रयोग करके किया जाता है, जोकि किसी परीक्षण या संयोग पर आधारित घटना के घटने की संभावना का माप है। एक ऐसे परिणाम की प्रायिकता, जिसका घटना सुनिश्चित है, 1 होती है तथा ऐसे परिणाम की प्रायिकता जो कदापि घटित नहीं हो सकता 0 होती है। किसी भी परीक्षण के किसी भी परिणाम की प्रायिकता संवृत्त अंतराल (closed interval) [0, 1] में स्थित होती हैं। किसी भी घटना की प्रायिकता इसके अनुकूल परिणामों की संख्या को कुल संभावित परिणामों को भाग करने से प्राप्त होती है। अतः, जब हम एक पासा फेंकते हैं तो एक समसंख्या प्राप्त करने की प्रायिकता 1/2 है क्योंकि एक पासे के छः तल होते हैं जिन पर 1 से लेकर 6 तक की संख्याएँ अंकित होती हैं जिनमें से तीन संख्याएँ 2, 4 और 6 सम होती हैं। इसी प्रकार ताश की एक गड्डी में से एक इक्का निकालने की प्रायिकता 1/52 अर्थात 1/13 होगी क्योंकि ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं जिनमें से 4 इक्के होते हैं।

यदि हम घटनाओं या प्रेक्षणों या परीक्षणों के अनुक्रम पर विचार करें तो उन्हें अक्सर स्वतंत्र लिया जाता है। परिवर्तित होने वाली घटनाओं के अनुक्रम का अध्ययन करने का सरल तरीका यह है कि यह प्रतिबंध लगाया जाए कि किसी प्रेक्षण या परीक्षण के परिणाम की प्रायिकता केवल एकदम पिछले प्रेक्षण या परीक्षण के परिणाम पर निर्भर करती है परन्तु उससे पहले के प्रेक्षणों या परीक्षणों के परिणामों पर नहीं। यदि x_I समय t पर x के मान को निरूपित करते हैं तो x_I की प्रायिकता x_{t-1} पर निर्भर करती है, x_{t-2}, x_{t-3} इत्यादि पर नहीं। इस प्रकार के प्रक्रम या अनुक्रम को प्रथम कोटि मार्कोव प्रक्रम (First order Markov process) या प्रथम कोटि मार्कोव शृंखला (first order Markov chain) कहते हैं।

मान लीजिए प्रेक्षणों के एक अनुक्रम में प्रत्येक प्रेक्षण के लिए संभावित सीमित परिणामों $x_{1,}\, x_{2,\ldots\ldots}\, x_t$ में से कोई एक परिणाम संभव है। किसी भी दिए हुए प्रेक्षण के लिए परिणाम x_j की प्रायिकता, अधिक से अधिक एकदम पहले वाले प्रेक्षण के परिणाम पर निर्भर करती है। ये प्रायिकताएँ p_{ij} द्वारा व्यक्त की जाती हैं जहाँ $i = 1,2,\ldots.,T$ और $j = 1,2\ldots..,T$ है। परिणाम $x_{1,}\, x_{2,\ldots\ldots}\, x_t$ अवस्थाएँ (states) कहलाते हैं और p_{ij} प्रथम कोटि मार्कोव प्रक्रम की संक्रमण प्रायिकताएँ कहलाती हैं। यदि यह मान लिया जाए कि प्रक्रम किसी विशिष्ट अवस्था से प्रारंभ होता है तो हम घटित होने वाले विभिन्न अनुक्रमों की प्रायिकताएँ ज्ञात कर सकते हैं। अतः हम एक प्रथम कोटि मार्कोव शृंखला का वर्णन इसकी संभावित अवस्थाओं को परिभाषित करके, इन अवस्थाओं का प्रारंभिक प्रायिकता आबंटन तथा इसका संक्रमण आव्यूह उल्लिखित करके कर सकते हैं।

संक्रमण प्रायिकताएँ एक वर्गाकार आव्यूह के रूप में व्यकत की जा सकती हैं। अवस्थाओं के लिए $x_{1,}\, x_{2,\ldots\ldots}\, x_T$ मार्कोव शृंखला के लिए संक्रमण प्रायिकता आव्यूह हैः

$$\mathbf{P} = \left\{p_{ij}\right\} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12}\cdots & p_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{T1} & p_{T2}\cdots & p_{TT} \end{pmatrix}$$

ध्यान रहे कि आव्यूह **P** की किसी भी पंक्ति की सभी प्रविष्टियों का योग 1 के बराबर होगा क्योंकि *i*वीं पंक्ति उन सभी संभव प्रायिकताओं को निरूपित करती है जब प्रक्रम अवस्था x_i में है। दूसरे शब्दों में

$$\sum_{j=i}^{T} p_{ij} = \text{for } i = 1,2,\ldots,T$$

अतः, यदि n वें परीक्षण/अभिप्रयोग में अवस्थाओं का प्रायिकता आबंटन है, तो $n+1$ वें परीक्षण/अभिप्रयोग में अवस्थाओं का प्रायिकता आबंटन

$$\left[p_1, p_2, \ldots.., p_r\right]\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix} = \left[\sum_{i=l}^{r} p_i p_{il,} \sum_{i=l}^{r} p_i p_{12,} \ldots \sum_{i=l}^{r} p_i p_{ir}\right]$$

होगा। एक प्रथम कोटि मार्कोव प्रक्रम में n वें प्रेक्षण के परिणामों का प्रायिकता आबंटन, प्रारंभिक प्रायिकता सदिश को संक्रमण आव्यूह की n वीं घात से गुणा करके प्राप्त

किया जा सकता है। यदि प्रारंभिक प्रायिकता सदिश से तथा चरण n में प्रायिकताओं का सदिश p_n से निरूपित किया जाए तो,

$$p_1 = p_0^P, p_2 = p_0^{P^2}, = p_2 p = p_0 p^3, \ldots\ldots, p_n = p_0 p^n.$$

द्वारा व्यक्त होंगे।

बोध प्रश्न 3

टिप्पणीः (क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए स्थान का प्रयोग कीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1) नीचे एक कृषि क्षेत्र तथा एक उद्योग क्षेत्र वाली एक अर्थव्यवस्था का आगत गुणांक आव्यूह दिया हैः

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.40 \\ 0.10 & 0.70 \end{bmatrix}$$

इन दोनों क्षेत्रों की अनुमानित अन्त्य उपभोग माँग क्रमशः 60 करोड़ रुपये तथा 40 करोड़ रुपये है। दोनों क्षेत्रों का कुल उत्पाद ज्ञात कीजिए। इन क्षेत्रों की अनुमानित आवश्यकताएँ ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

2) नीचे दो उत्पादक क्षेत्रों वाली अर्थव्यवस्था का सन् 2009–2010 का आगत उत्पाद लेनदेन उत्पाद आव्यूह दिया हैः

तालिका 7.3: आगत उत्पाद लेनदेन आव्यूह : 2019–2020

उत्पादक क्षेत्र	क्रय क्षेत्र		अन्त्य माँग उपभोग	कुल उत्पाद
	कृषि	उद्योग		
कृषि	17.70	3.27	20	38.77
उद्योग	7.77	9.77	17	32.70
प्राथमिक आगत	17.70	19.70		
कुल आगत	38.77	32.70		

सरकार का अनुमान है कि अर्थव्यवस्था के दोनों क्षेत्रों के उत्पादों की अन्त्य उपभोग माँग, वर्ष 2010–11 में क्रमशः 10 करोड़ रुपये और 7 करोड़ रुपये की वृद्धि हो जाएगी। यह मानते हुए कि प्रौद्योगिकी और कीमतें नहीं बदलतीं, दोनों क्षेत्रों के उत्पाद में कितना परिवर्तन होगा? साथ ही सन् 2010–11 की अनुमानित आगत उत्पाद लेनदेन आव्यूह भी ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

3) संक्रमण प्रयिकता आव्यूह की संकल्पना को समझाइये।

....

....

....

....

7.6 सारांश

इस इकाई में आपका परिचय व्यवसाय तथा अर्थशास्त्र में आव्यूह बीजगणित के साधारण अनुप्रयोगों से करवाया गया। आपने देखा कि सम्बन्धित वस्तुओं के बाज़ार प्रतिमान का विश्लेषण आव्यूह बीजगणित की सहायता से किया जा सकता है। ऐसे प्रतिमानों की विशेषता यह है कि इनमें बहुधा समीकरणों की संख्या बहुत बड़ी होती है। इस इकाई में हमने देखा कि किस प्रकार आव्यूह हमें इस प्रकार के बाज़ार प्रतिमानों को कुशलता से हल करने की विधियाँ उपलब्ध करवाते हैं।

किसी अर्थव्यवस्था के राष्ट्रीय आय प्रतिमान हमें अर्थव्यवस्था की समष्टिगत कार्यशैली को भली भाँति समझने की अंतर्दृष्टि प्रदान करता है। इन प्रतिमानों को हमें आय, उपभोग, बचत, निवेश जैसे अंतर्जात चरों का हल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। एक जटिल राष्ट्रीय आय प्रतिमान में समीकरणों, समिकाओं, बहिर्जात तथा अंतर्जात चरों की बड़ी संख्या उपस्थित हो सकती है। आव्यूह बीजगणित ऐसे प्रतिमानों के कुशल प्रबंधन में अत्यंत लाभकारी सिद्ध होता है। इस इकाई में एक साधारण/सरल राष्ट्रीय आय प्रतिमान को हल करने के लिए आव्यूह विधियों की व्याख्या की गई है।

किसी अर्थव्यवस्था में उत्पादक क्षेत्र इस अर्थ में परस्पर निर्भर होते हैं कि प्रत्येक क्षेत्र सामान्यतः दूसरे क्षेत्रों से, अपने उत्पादन के लिए, माध्यमिक आगत या मध्यम उत्पाद खरीदता है तथा बदले में उन्हें उनके उत्पादन के लिए अपने उत्पाद बेचता है। इसके अतिरिक्त प्रत्येक क्षेत्र अर्थव्यवस्था के अन्य क्षेत्रों की अन्त्य माँग की आपूर्ति के लिए भी अपने उत्पाद बेचता है। ये उत्पादक क्षेत्र, घरेलू क्षेत्र से भी प्राथमिक आगत तथा उत्पादन के कारक खरीदते हैं। अतः अलग–अलग स्तर पर किया जाने वाला उत्पादन, उत्पादक क्षेत्रों की परस्पर निर्भरता को आवश्यक बना देता है और उत्पादक क्षेत्रों तथा अर्थव्यवस्था के घरेलू क्षेत्र के मध्य भी एक परस्पर सम्बन्ध (जो पुनः एक प्रकार की परस्पर निर्भरता है) स्थापित करना है। यह परस्पर निर्भरता सुगमता से एक आगत–उत्पाद निकाय द्वारा वर्णित की जा सकती है। यह एक ऐसा क्षेत्र है जिसमें आव्यूह बीजगणित का एक आदर्श अनुप्रयोग देखने को मिलता है। इसमें, आव्यूह बीजगणित का उपयोग एक सैद्धान्तिक प्रतिमान को एक समीकरण निकाय में व्यक्त करने में तो होता ही है, साथ ही कुछ नीतिगत निष्कर्ष निकालने के लिए भी होता है। कुछ अनिश्चित घटनाएँ इस प्रकार की भी होती हैं जिनमें घटना के एक अवस्था में होने की प्रायिकता केवल उसके पहले वाली अवस्था पर ही निर्भर करती है, उससे और पीछे वाली अवस्थाओं पर नहीं। ये संक्रमण प्रायिकताओं का विश्लेषण

मार्कोव शृंखलाओं द्वारा किया जा सकता है जो वास्तव में प्रायिकता में आव्यूहों का एक अनुप्रयोग है। मार्कोव शृंखलाओं के अध्ययन में संक्रमण प्रायिकताओं के आव्यूहों का विशेष महत्व है।

7.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) भाग 7.2 देखें और उत्तर दें।

2) भाग 7.2 देखें और उत्तर दें।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 7.3 देखें और उत्तर दें।

2) भाग 7.3 देखें और उत्तर दें।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 7.4 देखें और उत्तर दें।

2) भाग 7.4 देखें और उत्तर दें।

3) भाग 7.5 देखें और उत्तर दें