खंड 4

बहुचर अभीष्टीकरण

खण्ड 4 : एक परिचय

हमारे वर्तमान पाठ्यक्रम के अंतिम खण्ड का शीर्षक हैः **बहुचर अभीष्टीकरण**। इसमें भी 3 इकाइयाँ हैं। इकाई 8 का शीर्षक **संरोधरहित अभीष्टीकरण** है। इसमें उन फलनों के अभीष्टीकरण पर चर्चा है जिन पर कोई संरोध लागू नहीं होते। इकाई 9 का शीर्षक ही बता रहा है कि उसमें संरोधों के अधीन रहते हुए अभीष्टीकरण समझाया जाएगा। खण्ड की अंतिम इकाई में अभीष्टीकरण, विशेषक बहुचर अभीष्टीकरण, संरोधहीन एवं संरोधसहित से जुड़े कुछ विशेष विषयों पर चर्चा की जाएगी।

इकाई 8 संरोधहीन अभीष्टीकरण*

संरचना

8.0 उद्देश्य

8.1 प्रस्तावना

8.2 अभीष्टीकरण प्रतिबन्धों का अवकल संस्करण

8.2.1 प्रथम कोटि प्रतिबन्ध

8.2.2 द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध

8.3 दो चरों के फलन से अभीष्टतम मान

8.3.1 दो चरों वाले उद्देश्य फलन के प्रथम कोटि प्रतिबन्ध

8.3.2 द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज और सम्पूर्ण अवकल

8.3.3 दो चरों वाले उद्देश्य फलन के द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध

8.4 द्विघातीय समघात

8.5 द्वितीय कोटि सम्पूर्ण अवकल एक द्विघातीय समघात के रूप में

8.6 दो से अधिक चरों वाले उद्देश्य फलन

8.6.1 चरम बिन्दुओं के लिए प्रथम कोटि प्रतिबन्ध यदि उद्देश्य फलन में दो से अधिक चर हों

8.6.2 चरम बिन्दुओं के लिए द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध यदि उद्देश्य फलन में दो से अधिक चर हों

8.7 n चरों वाले फलन

8.8 अर्थशास्त्र में अभीष्टीकरण के अनुप्रयोग

8.8.1 बहु–संयंत्र एकाधिकारी

8.8.2 मूल्य विभेदक एकाधिकारी

8.9 सारांश

8.10 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

8.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित से भली–भांति अवगत हो जाएँगे:

- अभीष्टीकरण (optimisation) में प्रतिबन्ध की संकल्पना से;
- सम्पूर्ण अवकल (total differential) की संकल्पना से;
- अभीष्टीकरण की प्रथम कोटि (first-order) तथा द्वितीय कोटि (second-order) शर्तों से;

* डॉ. एस.पी. शर्मा, श्यामलाल कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय

- द्विघातीय समघात (quadratic) की संकल्पना से; और
- अर्थशास्त्र में अभीष्टीकरण के अनुप्रयोगों से।

8.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, हमने अपने अध्ययन को केवल एक चर वाले उद्देश्य फलनों तक सीमित रखा। परन्तु यह एक अत्यंत प्रतिबन्धक मान्यता है। अक्सर हमें ऐसी स्थितियों का सामना करना पड़ता है जहाँ एक से अधिक चर सम्मिलित होते हैं। उदाहरण के लिए, एक बहुउत्पाद फर्म को एक ऐसे उत्पाद–मिश्रण का चयन करना पड़ता है जो उसके कुल लाभ को अधिकतम कर दे। यदि हम केवल एक ही उत्पाद बनाने वाली फर्म पर ही विचार करें, तो भी उसकी आय केवल उत्पाद की मात्रा पर ही निर्भर नहीं करती, अपितु कुछ अन्य घटकों/गुणकों जैसे कि विज्ञापन पर किए जाने वाला व्यय, एक प्रतियोगी फर्म द्वारा लिया जाने वाला उत्पाद का मूल्य इत्यादि। इस स्थिति पर अधिक ठीक होगा यदि हम फर्म द्वारा अर्जित की गई आय (revenue - R) को उत्पाद की मात्रा (quantity - Q), विज्ञान पर किए जाने वाले व्यय (A) तथा प्रतियोगी फर्म द्वारा उत्पाद के तय किए गए मूल्य (P) के फलन के रूप में मानें। अर्थात यह फलन इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$R = R(Q, A, P)$$

अब प्रश्न यह है कि इनमें से कोई एक चर, कुल आय को किस प्रकार प्रभावित करता है। इसे समझने के लिए, हमें "आंशिक अवकलन" (partial differentiation) की सहायता लेनी पड़ेगी। आंशिक अवकलन, हमें चर R पर इनमें से प्रत्येक चर (अर्थात् Q, A, P) का प्रभाव जानने में सहायता करता है जबकि अन्य चरों का अचर मान लिया जाए।

एक से अधिक चर वाले उद्देश्य फलन के लिए, अभीष्टीकरण की प्रथम कोटि तथा द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध ज्ञात करने से पूर्व, आइए, हम एक वरण चर वाले फलन के लिए अभीष्टीकरण के लिए इन प्रतिबन्धों के अवकल संस्करण/रूप पर विचार करें। स्मरण करें कि पिछली इकाई में प्राप्त किए गए ये प्रतिबन्ध "अवकलों" (derivatives)श्के पदों में नहीं अपितु "अवकलजों" (differentials) के पदों में थे। बहुचरीय उद्देश्य फलनों वाले अभीष्टीकरण प्रश्नों का हल ज्ञात करने की पृष्ठभूमि तैयार करने के लिए, यह जानना आवश्यक है कि इन प्रतिबन्धों को अवकलों के पदों में किस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।

8.2 अभीष्टीकरण प्रतिबन्धों का अवकल संस्करण

8.2.1 प्रथम कोटि प्रतिबन्ध

नीचे दिए फलन पर विचार कीजिए।

$$z = f(x) \tag{1}$$

फलन के अधिकतम तथा न्यूनतम मान वाले बिन्दुओं पर, z का स्तब्ध मान होता है। दूसरे शब्दों में, z के एक चरम मान के लिए यह आवश्यक है कि जब x परिवर्तित होता है तो $dz = 0$ हो। यह चरम मान के लिए प्रथम कोटि प्रतिबन्ध का अवकल रूप है।

इस बात की पुष्टि करने के लिए कि यह प्रतिबन्ध, शून्य ढाल वाले प्रथम अवकलज प्रतिबन्ध के समतुल्य है, आइए, हम समीकरण (1) का सम्पूर्ण अवकलन करें/अवकलज ज्ञात करें। समीकरण (1) का सम्पूर्ण अवकलन करने पर हम पाते हैं कि:

$$dz = f'(x)dx \qquad (2)$$

है। ध्यान दें कि यदि $dx = 0$ हो, तो dz स्वतः ही शून्य के बराबर हो जाता है। परन्तु, प्रथम कोटि प्रतिबन्ध का अर्थ केवल इतना ही नहीं है। प्रथम कोटि प्रतिबन्ध के लिए आवश्यक है कि चरम बिन्दुओं पर dz शून्य के बराबर होना चाहिए चाहे x में परिवर्तन कितना भी छोटा क्यों न हो। अनंत–सूक्ष्म ही क्यों न हो। अब $dx \neq 0$ के लिए dz केवल तभी शून्य हो सकता है जब $f'(x) = 0$ हो। अतः, प्रथम अवकलज प्रतिबन्ध (first-derivative condition) $f'(x) = 0$ और dx के यादृच्छिक शून्येतर (arbitrary nonzero) मानों के लिए प्रथम अवकल प्रतिबन्ध $dz = 0$ समतुल्य हैं।

8.2.2 द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध

किसी फलन का कोई स्तब्ध बिन्दु, एक आपेक्षिक उच्चतम भी हो, इसके लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि उस बिन्दु के एक सन्निकट प्रतिवेश में $dz < 0$ हो। दूसरे शब्दों में जैसे–जैसे हम इस बिन्दु से दूर (बाई अथवा दाई ओर) जाएँ, z का मान कम होता जाए। उच्चतम बिन्दु पर $dz = 0$ तथा बिन्दु के दोनों ओर $dz < 0$ होने का अर्थ है कि यदि हम बिन्दु के किसी भी ओर उससे दूर जाते हैं तो dz का मान कम होने लगता है। इसलिए, एक स्तब्ध बिन्दु z के उच्चतम मान बिन्दु होने के लिए पर्याप्त शर्त यह है कि dx के यादृच्छिक शून्येतर मान के लिए $d(dz) < 0$ हो, अर्थात् $d^2z < 0$ हो। यह उच्चतम मान बिन्दु ज्ञात करने के लिए अवकल रूप में द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध है। पुनः यह सत्यापित करने के लिए यह प्रतिबन्ध द्वितीय कोटि अवकलज प्रतिबन्ध के समतुल्य है, हम समीकरण (2) का सम्पूर्ण अवकलज ज्ञात करते हैं। समीकरण (2) सम्पूर्ण अवकलन करने पर हम पाते हैं कि:

$$d^2z = d(f'(x)dx)$$

है। परन्तु dx = अचर (यादृच्छिक शून्येतर मान) है, इसलिए

$$\begin{aligned} d^2z &= [df'(x)]dx \\ &= [f''(x)dx]dx \\ &= f''(x)(dx)^2 \end{aligned}$$

$$d^2z = f''(x)(dx)^2$$

ध्यान दें कि $(dx)^2 = (constant)^2 > 0$ है।

इसलिए, $d^2z < 0$ के लिए $f''(x) < 0$ है।

इससे यह सिद्ध होता है कि उच्चतम मान के लिए द्वितीय कोटि अवकल प्रतिबन्ध, और द्वितीय कोटि अवकल प्रतिबन्ध समतुल्य हैं। तुलनात्मक रूप से, z के एक स्तब्ध मान के आपेक्षिक न्यूनतम होने के लिए यह पर्याप्त है कि $d(dz) > 0$ हो अर्थात् $d^2z > 0$ हो। यह न्यूनतम मान के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध का अवकल रूप है।

8.3 दो चरों के फलन से अभीष्टतम मान

8.3.1 दो चरों वाले उद्देश्य फलन के प्रथम कोटि प्रतिबन्ध

मान लीजिए

$$z = f(x, y) \tag{3}$$

है।

एक चर वाले फलनों की तरह इस स्थिति में भी अभीष्टमत (उच्चतम अथवा निम्नतम) के लिए अनिवार्य प्रतिबन्ध dz = 0 है। परन्तु, क्योंकि अब दो वरण चर (choice variables) उपस्थित हैं, प्रथम कोटि प्रतिबन्ध को इस प्रकार संशोधित किया जा सकता हैः

***dx* और *dy* के यादृच्छिक शून्येतर मानों के लिए *dz = 0* होना चाहिए**

इसे पीछे वही तर्क है जो एक चर के फलनों के लिए प्रतिबन्ध dz = 0 की व्याख्या में दिया गया थाः एक अभीष्टतम बिन्दु का एक स्तब्ध बिन्दु होना अनिवार्य है; एक स्तब्ध बिन्दु पर चरों x और y में अनंत सूक्ष्म परिवर्तन के लिए $dz = 0$ होना चाहिए। समीकरण (3) का सम्पूर्ण अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैंः

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

जहाँ $f_x = {df}/{dx}$ = x के सापेक्ष आंशिक अवकलज तथा $f_y = {df}/{dy}$ = y के सापेक्ष आंशिक अवकलज है।

अब $dx \neq 0$ तथा $dy \neq 0$ है। (A)

और एक स्तब्ध बिन्दु पर $dz = 0$ है। (B)

(A) और (B) के साथ सत्य होने के लिए यह अनिवार्य है कि $f_x = f_y = 0$ हो।

अतः एक दो चरों वाले उद्देश्य फलन के अभीष्टतम बिन्दु के लिए प्रथम कोटि प्रतिबन्ध हैः

$$f_x = f_y = 0 \text{ अथवा } {\partial z}/{\partial x} = {\partial z}/{\partial y} = 0$$

जैसे कि पहले भी चर्चा की गई है कि प्रथम कोटि प्रतिबन्ध अनिवार्य तो हैं परन्तु पर्याप्त नहीं। पर्याप्त प्रतिबन्ध विकसित करने के लिए हमें द्वितीय कोटि अवकल की आवश्यकता पड़ेगी जोकि द्वितीय कोटि आंशिक अवकलजों से सम्बन्धित है अथवा पर आधारित है।

उदाहरणः

यह मानते हुए कि किसी उत्पादक के उच्चतम लाभ के लिए, उत्पाद की मात्रा (Q) और विज्ञान व्यय (A) के मान द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध को संतुष्ट करते हैं जबकि उत्पादक का लाभ फलन (Π) हैः

$$\Pi = 400 - 3Q^2 - 4Q + 2QA - 5A^2 + 48A \tag{4}$$

उच्चतम लाभ के लिए प्रथम कोटि प्रतिबन्ध के अनुसार आंशिक अवकलज

$$\partial\Pi/\partial Q = \partial\Pi/\partial A = 0.$$

होने चाहिए।

समीकरण (4) का A के सापेक्ष आंशिक अवकलज Q को अचर मानते हुए होगाः

$$\partial\Pi/\partial A = 2Q - 10A + 48$$

इसी प्रकार समीकरण (4) का Q के सापेक्ष आंशिक अवकलज A को अचर मानते हुए होगाः

$$\partial\Pi/\partial Q = -6Q - 4 + 2A$$

$\partial\Pi/\partial Q = \partial\Pi/\partial A = 0$ रखने पर, अर्थात् प्रथम कोटि प्रतिबन्ध द्वारा हम प्राप्त करते हैं:

$$2Q - 10A + 48 = 0 \qquad (5)$$

और

$$-6Q - 4 + 2A = 0 \qquad (6)$$

समीकरणों (5) और (6) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:

$$Q - 5A = -24 \qquad (7)$$

$$-3Q + A = 2 \qquad (8)$$

समीकरण (8) से हम पाते हैं कि $A = 3Q + 2$ है। A के इस मान को समीकरण (7) में रखने पर तथा Q के लिए हल करने पर हम पाते हैं कि:

$$\begin{aligned} Q - 5(2 + 3Q) &= -24 \\ Q - 10 - 15Q &= -24 \\ -14Q &= 14 \\ Q &= 1 \end{aligned}$$

है।

अतः $A = 2 + 3*1 = 5$ है।

अतः, हम प्राप्त करते हैं कि Q =1 तथा A = 5 क्रमशः उत्पाद की मात्रा तथा विज्ञापन व्यय के वह स्तर हैं जिनके लिए प्रथम कोटि प्रतिबन्ध के द्वारा फर्म का लाभ उच्चतम होगा।

8.3.2 द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज और सम्पूर्ण अवकल

ध्यान दें कि किसी फलन के आंशिक अवकलज स्वयं भी स्वतंत्र चरों के फलन होते हैं। अतः, उन्हें पुनः अवकलित करके "उच्च कोटि के आंशिक अवकलज" ज्ञात किए

जा सकते हैं। अगले भाग में हम देखेंगे कि द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज किस प्रकार प्राप्त किए जा सकते हैं। दो स्वतंत्र चरों वाले उद्देश्य फलनों के अभीष्टतम (उच्चतम/न्यूनतम) के लिए द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध अथवा पर्याप्त प्रतिबन्ध सूत्रबद्ध करने में इनका महत्वपूर्ण योगदान है।

द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज

एक बार पुनः हम निम्नलिखित उद्देश्य फलन से प्रारंभ करते हैं:

$$z = f(x,y)$$

इसके दो प्रथम कोटि आंशिक अवकलज हैं: $f_x = {df}/{dx} = x$ के सापेक्ष आंशिक अवकलज तथा $f_y = {df}/{dy} = y$ के सापेक्ष आंशिक अवकलज।

अब, ध्यान दें कि फलन $f_x(x,y)$ तथा $f_y(x,y)$ जो कि उद्देश्य फलन के क्रमशः 'x' और 'y' के सापेक्ष आंशिक अवकलज हैं, स्वयं भी x और y के फलन हैं। परिणामतः हम y को अचर मान कर x के सापेक्ष f_x में परिवर्तन की दर ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार हमें एक द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज प्राप्त होता है, जिसे हम प्रतीकात्मक रूप में f_{xx} से निरूपित करते हैं।

$$f_{xx} = {\partial}/{\partial x}(f_x) = {\partial}/{\partial x}({\partial z}/{\partial x}) = {\partial^2 z}/{\partial^2 x}$$

संकेत चिन्ह f_{xx} में पादांक युग्म xx यह इस तथ्य को बतलाता है कि मूल उद्देश्य फलन $f(x,y)$ का x के सापेक्ष दो बार आंशिक अवकलज ज्ञात किया गया है। इसी प्रकार हम y के सापेक्ष द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। क्योंकि f_y, y का फलन है (और x का भी), हम x को एक अचर मानते हुए, f_y को y के सापेक्ष परिवर्तन की दर ज्ञात कर सकते हैं:

$$f_{yy} = {\partial}/{\partial y}(f_y) = {\partial}/{\partial y}({\partial z}/{\partial y}) = {\partial^2 z}/{\partial^2 y}$$

संकेत चिन्ह f_{yy} को पादांक के रूप में युग्म yy यह दर्शाता है कि उद्देश्य फलन $f(x,y)$ का y के सापेक्ष दो बार आंशिक अवकलन किया गया है। इसी प्रकार $f(x,y)$ के दो अन्य द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज इस प्रकार परिभाषित किए जा सकते हैं:

$$f_{yx} = {\partial}/{\partial y}(f_x) = {\partial}/{\partial y}({\partial z}/{\partial x}) = {\partial^2 z}/{\partial y \partial x}$$

$$f_{xy} = {\partial}/{\partial x}(f_y) = {\partial}/{\partial x}({\partial z}/{\partial y}) = {\partial^2 z}/{\partial x \partial y}$$

इन्हें "क्रॉस/वज्र" **(cross)** अथवा मिश्रित **(mixed)** आंशिक अवकलज भी कहा जाता है।

हमें दो महत्वपूर्ण बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए:

- प्रथम यह कि यद्यपि f_{xy} और f_{yx} अलग–अलग प्रकार से परिभाषित किए गए हैं

तो भी दोनों एक दूसरे के बराबर होते हैं यदि वे संतत फलन हों (**यंग की प्रमेय - Young's Theorem**)। अतः, हम अपनी चर्चा में यह मान कर चलेंगे कि $f_{xy} = f_{yx}$ है, जब तक कि अन्यथा कहा न गया हो।

- दूसरे, प्रत्येक द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज अर्थात् f_{xx}, f_{yy} और f_{xy} भी प्रथम कोटि आंशिक अवकलजों f_x और f_y की भाँति ही, x और y के फलन होते हैं।

उदाहरणः

नीचे दिए गए फलन के लिए f_8, f_{22} और f_{12} ज्ञात कीजिएः

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2 + 3x_1 - 2x_2$$

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2^2 - x_2 + 3 \qquad (9)$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1^2 x_2 - x_1 - 2 \qquad (10)$$

f_8 प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (9) का x_1 के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करते हैं। अतः

$$f_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) = 2x_2^2$$

इसी प्रकार f_{22} को प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (10) का x_2 के सापेक्ष आंशिक

अवकलज ज्ञात करते हैं। अतः,

$$f_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) = 2x_1^2$$

क्रॉस/वज्र अवकलज f_{12} प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (10) का x_1 के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करते हैं। ध्यान दें यंग की प्रमेय से हम देख सकते हैं कि यदि हम समीकरण (9) का x_2 के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करें, तो भी हमें वहीं परिणाम प्राप्त होगा। अतः

$$f_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = 4x_1 x_2 - 1$$

इसलिए, दिए हुए प्रश्न का हल हैः

$$f_{11} = 2x_2^2$$
$$f_{22} = 2x_1^2$$
$$f_{12} = 4x_1 x_2 - 1$$

द्वितीय कोटि सम्पूर्ण अवकल

आंशिक अवकलजों की अवधारणा हमें किसी फलन का सम्पूर्ण अवकल ज्ञात करने

में सहायता करती है। स्मरण करें कि फलन $z = f(x,y)$ के लिए, सम्पूर्ण अवकल इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता हैः

$$dz = f_x dx + f_y dy \tag{11}$$

जहाँ dx और dy क्रमशः x और y में होने वाले शून्येतर यादृच्छिक अनंत–सूक्ष्म परिवर्तन हैं, जिन्हें अचर के रूप में माना जाता है। फलस्वरूप, dz केवल f_x और f_y पर निर्भर करता है और क्योंकि f_x और f_y स्वयं x और y के फलन हैं, dz भी, z की भांति ही, चयन चरों x और y का ही फलन होगा।

द्वितीय कोटि सम्पूर्ण अवकल $d^2z \equiv d(dz)$, dz में परिवर्तन का माप है और इसे अचर परिभाषित द्वितीय कोटि आंशिक अवकलजों के पद में परिभाषित किया जा सकता है। d^2z प्राप्त करने के लिए हमें समीकरण (11) की सहायता से dz का एक बार पुनः सम्पूर्ण अवकल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ेगीः।

$$\begin{aligned}
d^2z &\equiv d(dz)\\
&= \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy\\
&= (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy\\
&= f_{xx}(dx)^2 + f_{xy}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}(dy)^2\\
&= f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2 \text{ as } f_{yx} = f_{xy}
\end{aligned}$$

दूसरे शब्दों में, द्वितीय कोटि सम्पूर्ण अवकल, द्वितीय कोटि आंशिक अवकलों पर निर्भर होता है।

$$d^2z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2 \qquad \textbf{(A)}$$

स्मरण करें कि dz, z में परिवर्तन की दर का माप है, जबकि d^2z, dz में परिवर्तन की दर की माप है। यदि $d^2z > 0$ हो, तो इसका अर्थ होगा कि dz बढ़ रहा (वर्धमान) है और यदि $d^2z < 0$ हो तो इसका अर्थ होगा कि dz घट रहा है/ह्रासमान है।

उदाहरणः

यदि $z = 2x^3 + 4xy - y^2$ दिया है, तो dz और d^2z ज्ञात कीजिए।

चरण 1: dz ज्ञात करने के लिए, हमें पहले प्रथम कोटि आंशिक अवकलज क्रमशः f_x और f_y ज्ञात करने होंगे।

दिए गए समीकरण का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हम प्राप्त करते हैंः

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 4y = 2(3x^2 + 2y) \tag{12}$$

दिए गए समीकरण का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y = 2(2x - y) \qquad (13)$$

अब

$$dz = f_x dx + f_y dy$$
$$dz = 2(3x^2 + 2y)dx + 2(2x - y)dy$$
है।

चरण 2: d^2z ज्ञात करने के लिए, पहले हमें द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज f_{xx}, f_{xy} और f_{yy} ज्ञात करने होंगे। f_{xx} प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (12) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करते हैं। ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[2(3x^2 + 2y)] = 2 * 6x = 12x$$

f_{yy} प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (13) का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करते हैं और पाते हैं कि $f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[2(2x - y)] = -2$

f_{xy} प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (13) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज करने पर प्राप्त करते हैं:

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[2(2x - y)] = 4$$

अब:

$$d^2z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2$$

होता है। इस समीकरण में f_{xx}, f_{xy} और f_{yy} का मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$d^2z = 12x(dx)^2 + 2 * 4dxdy - 2(dy)^2$$
$$d^2z = 12x(dx)^2 + 8dxdy - 2(dy)^2$$

अतः दिए हुए प्रश्न का हल है:

$$dz = 2(3x^2 + 2y)dx + 2(2x - y)dy$$

$$d^2z = 12x(dx)^2 + 8dxdy - 2(dy)^2$$

8.3.3 दो चरों वाले उद्देश्य फलन के द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध

आइए, अब हम दो निर्णय/चयन चरों वाले उद्देश्य फलन के अभीष्टीकरण के लिए

पर्याप्त प्रतिबन्ध ज्ञात करें। d^2z की संकल्पना का प्रयोग करते हुए हम फलन $z = f(x,y)$ के उच्चतम के लिए द्वितीय कोटि पर्याप्त प्रतिबन्ध को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

dx और dy के शून्येतर यादृच्छिक मानों के लिए, $d^2z < 0$ होना चाहिए।

इसके पीछे वही तर्क है जो एक चर वाले उद्देश्य फलन में d^2z प्रतिबन्ध ज्ञात करते हुए लगाया गया था। तुलनात्मक रूप में, $z = f(x,y)$ के न्यूनतम के लिए द्वितीय कोटि पर्याप्त प्रतिबन्ध को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

dx और dy के शून्येतर यादृच्छिक मानों के लिए, $d^2z > 0$ होना चाहिए।

ध्यान दें कि d^2z द्वितीय कोटि फलनों f_{xx}, f_{xy} और f_{yy} का फलन है। सहज ज्ञान से यह स्पष्ट है कि द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध को इन अवकलजों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। परन्तु वास्तव में, d^2z को इस रूप में लिखने के लिए द्विघातीय समघात (quadratic form) की संकल्पना की आवश्यकता पड़ेगी जोकि इस इकाई के विषय क्षेत्र से बाहर है। अतः, हम यहाँ केवल कुछ प्रमुख परिणाम दे रहे हैं:

dx और dy के किसी भी मानों के लिए जबकि दोनों मान एक साथ शून्य न हों।

$d^2z < 0$ होगा यदि और केवल यदि $f_{xx} < 0; f_{yy} < 0$ और $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$ हो

और

$d^2z > 0$ होगा यदि और केवल यदि $f_{xx} > 0; f_{yy} > 0$ और $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$ हो।

संक्षेप में, दो चरों वाले किसी उद्देश्य फलन $z = f(x,y)$ के लिए प्रथम तथा द्वितीय कोटि अभीष्टीकरण प्रतिबन्धों को निम्नलिखित रूप से सारणीबद्ध किया जा सकता है:

सारणी 1: अभीष्टीकरण के *प्रथम कोटि* तथा द्वितीय कोटि *प्रतिबन्ध*

	Maximum	**Minimum**
प्रथम कोटि अनिवार्य शर्तें	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
द्वितीय कोटि पर्याप्त शर्तें*	$f_{xx}, f_{yy} < 0$ और $f_{xx}f_{yy} > f^2_{xy}$	$f_{xx}, f_{yy} > 0$ और $f_{xx}f_{yy} > f^2_{xy}$

* ये शर्तें केवल तभी लागू होंगी जबकि फलन प्रथम कोटि शर्तों को संतुष्ट करता हो।

उदाहरण 1 में हमने अभीष्टतम उत्पाद (Q) तथा अभीष्टतम विज्ञापन व्यय (A) यह मानते हुए ज्ञात किया था कि अभीष्टतम बिन्दु द्वितीय कोटि प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है। आइए, अब हम परीक्षण करें कि ये प्रतिबन्ध वास्तव में संतुष्ट होते हैं अथवा नहीं:

स्मरण करें कि:

$$\Pi = 400 - 3Q^2 - 4Q + 2QA - 5A^2 + 48A$$

$$\Pi_A = \partial\Pi/\partial A = 2Q - 10A + 48 \qquad (14)$$

$$\Pi_Q = {\partial \Pi}/{\partial Q} = -6Q - 4 + 2A \qquad (15)$$

है।

Π_A और Π_Q को शून्य के बराबर रखने पर तथा Q और A के लिए हल करने पर हम पाते हैं कि $Q^* = 1$ और $A^* = 5$ है जहाँ * अभीष्टतम स्तर को दर्शाता है।

द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध के लिए हमें निम्नलिखित आंशिक अवकलजों को ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ेगीः

$$\frac{\partial \Pi^2}{\partial A^2}, \frac{\partial \Pi^2}{\partial Q^2} \text{ और } \frac{\partial \Pi^2}{\partial A \partial Q}$$

समीकरण (14) का A के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता हैः

$$\Pi_{AA} = \frac{\partial \Pi^2}{\partial A^2} = -10 < 0 \qquad (16)$$

समीकरण (15) का Q के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता हैः

$$\Pi_{QQ} = \frac{\partial \Pi^2}{\partial Q^2} = -6 < 0 \qquad (17)$$

समीकरण (15) का A के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता हैः

$$\Pi_{AQ} = \frac{\partial \Pi^2}{\partial A \partial Q} = 2$$

अब

$$\Pi_{AA} * \Pi_{QQ} = -10 * -6 = 60$$

और $(\Pi_{AQ})^2 = (2)^2 = 4$

अतः $\Pi_{AA} * \Pi_{QQ} > (\Pi_{AQ})^2 \qquad (18)$

समीकरण (16), (17) और (18) से यह प्रमाणित होता है कि फलन उत्पादन स्तर (Q) के मान 1 के लिए तथा विज्ञापन व्यय (A) के मान 5 के लिए द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध संतुष्ट करता है।

उदाहरणः

नीचे दिए फलन के लिए चरम मान ज्ञात कीजिए तथा निर्धारित कीजिए कि यह एक उच्चतम है अथवा निम्नतमः

$$z = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y \qquad (19)$$

किसी बिन्दु (x_0, y_0) के एक चरम बिन्दु होने के लिए, यह अनिवार्य है कि यह बिन्दु प्रथम कोटि प्रतिबन्धों को संतुष्ट करें।

प्रथम कोटि प्रतिबन्ध हैंः $f_x = f_y = 0$ अथवा ${\partial z}/{\partial x} = {\partial z}/{\partial y} = 0$

समीकरण (19) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -2x + y + 2 \qquad (20)$$

समीकरण (19) का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y + 1 \qquad (21)$$

अब हम प्रथम कोटि प्रतिबन्धों का प्रयोग करते हुए, समीकरणों (20) और (21) को शून्य के बराबर रखते हैं तथा चरम बिन्दु ज्ञात करने के लिए इन्हें x और y के लिए हल करते हैं। अतः

$$-2x + y + 2 = 0 \qquad (22)$$

$$x - 2y + 1 = 0 \qquad (23)$$

समीकरण (23) को 2 से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$2x - 4y + 2 = 0 \qquad (24)$$

समीकरण (22) और समीकरण (24) का योग करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$-2x + y + 2 + 2x - 4y + 2 = 0$$
$$-3y + 4 = 0$$
$$y = 4/3$$

समीकरण (23) में $y = 4/3$ का मान रखने पर हम x का मान प्राप्त कर सकते हैं:

$$x - 8/3 + 1 = 0$$
$$x = 1\ \ /3$$

अतः, $x = 8/3$ तथा $y = 4/3$ अभीष्टतम के लिए प्रथम कोटि अनिवार्य प्रतिबन्ध को संतुष्ट करते हैं। यह तय करने के लिए कि इस बिन्दु पर द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध संतुष्ट होते हैं अथवा नहीं तथा यह जानने के लिए यह बिन्दु एक उच्चतम बिन्दु है अथवा न्यूनतम, हमें द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज, f_{xx}, f_{xy} और f_{yy} ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ेगी।

समीकरण (20) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 < 0 \qquad (25)$$

समीकरण (21) का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 < 0 \qquad (26)$$

समीकरण (21) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

अब इन मानों का प्रयोग करके हम पाते हैं किः

$$f_{xx}f_{yy} = -2 * -2 = 4; f_{xy}^2 = 1*1 = 1 \text{ है, अर्थात् } f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2 \text{ है।} \qquad (27)$$

समीकरणों (25), (26) और (27) से हमें प्राप्त होता है कि बिन्दु $x = 8/3$ तथा $y = 4/3$ पर द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध संतुष्ट होते हैं तथा यह एक उच्चतम बिन्दु है। इस बिन्दु के संगत z का अधिकतम मान (जो कि फलन का सापेक्ष अधिकतम है) x और y के इन चरम मानों को समीकरण (19). में दिए गए उद्देश्य फलन में प्रतिस्थापित करके ज्ञात किया जा सकता है। यहाँ हम पाते हैं कि $z = -17/9$ है।

अतः, हम पाते हैं कि $x = 8/3$, $y = 4/3$ और $z = -17/9$ एक स्थानीय उच्चतम है।

<u>बोध प्रश्न 1</u>

1) किसी उपभोक्ता के निम्नलिखित उपयोगिता फलनों पर विचार कीजिएः

a) $U = q_1^2 + q_2^2$

b) $U = q_1 + q_2 + 2q_1q_2 - 0.01(q_1^2 + q_2^2)$

c) $U = Aq^{\alpha}{}_1 q_2$ जहाँ $A > 0; \alpha > 0$ है

प्रत्येक स्थिति में चरों का द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए तथा उनके चिन्ह निर्धारित कीजिए और इस प्रकार प्राप्त परिणामों की अर्थशास्त्रीय व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

2) प्रश्न (1) में दिए तीनों फलनों के लिए प्रथम कोटि अवकल (dU) और द्वितीय कोटि अवकल (d^2U) ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

8.4 द्विघातीय समघात

पहले की गई चर्चा में समीकरण (A) में दिया गया व्यंजक d^2z द्विघातीय समघात

का एक उदाहरण है। एक ऐसा बहुपदीय व्यंजक जिसमें प्रत्येक पद घात दो का है (अर्थात् प्रत्येक पद में प्रयुक्त सभी चरों की घात का योग दो है), एक "द्विघातीय समघात" कहलाता है। इस भाग में, हम द्विघातीय समघात को एक आव्यूह के रूप में व्यक्त करेंगे। इसके पश्चात् हम किसी द्विघातीय समघात के "धनात्मक निश्चित" तथा "ऋणात्मक निश्चित" होने की शर्तों का वर्णन करेंगे। ये संकल्पनाएँ हमें अनेक चयन चरों वाले उद्देश्य फलनों के चरम मान निर्धारित करने में सहायता करती हैं। 'n' चरों वाले एक द्विघातीय समघात समीकरण को व्यापक रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\begin{aligned}Q = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + a_{n3}x_3x_n + \ldots\ldots + a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

$a_{ij} = a_{ji}$ मानने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}Q = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{1n}x_1x_n + a_{2n}x_2x_n + a_{3n}x_3x_n + \ldots\ldots + a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

मान लीजिए X एक $(n \times 1)$ कॉलम सदिश है जिसमें n चर हैं तथा A एक $n \times n$ वर्ग सममित आव्यूह है जो गुणांकों a_{ij} से बनी है अर्थात्

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \text{और} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

है। हम Q को इन आव्यूहों के गुणन के रूप में लिख सकते हैं, अर्थात् $Q = X'AX$ होगा जहाँ X', X के परिवर्त को व्यक्त करता है।

उदाहरण:

द्विघातीय समघात समीकरण $Q = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ पर विचार कीजिए। इसे आव्यूह के रूप में लिखिए।

$$Q = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \tag{28}$$

Q के पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर समीकरण (28) को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$Q = x_1^2 - x_1x_2$$
$$- x_1x_2 + x_2^2$$

इस स्थिति में, $a_8 = 1$, $a_{12} = a_{21} = -1$ तथा $a_{22} = 1$ है।

अतः, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ और $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times1}$ है।

परिणामस्वरूप, $Q = X'\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}X$

अब, जबकि हम एक द्विघातीय समघात को परिभाषित कर चुके हैं, हम उन शर्तों पर विचार करते हैं जो किसी द्विघातीय समघात के "धनात्मक निश्चित" अथवा "ऋणात्मक निश्चित" होने के लिए आवश्यक है।

तथ्य 1: n चरों वाली एक द्विघातीय समघात $Q = X'AX$ "धनात्मक निश्चित" होगी यदि इसका मान चरों के सभी मानों के लिए (बशर्ते वे सभी एक साथ शून्य न हों), धनात्मक हो।

तथ्य 2: n चरों वाली एक द्विघातीय समघात $Q = X'AX$ "ऋणात्मक निश्चित" होगी यदि इसका मान चरों के सभी मानों के लिए (बशर्ते वे सभी एक साथ शून्य न हों), ऋणात्मक हो।

तथ्य 3: n चरों वाली एक द्विघातीय समघात $Q = X'AX$ "धनात्मक निश्चित" होगी यदि और केवल यदि A के सारणिक के सभी प्रमुख उपसारणिक धनात्मक हों। ध्यान दें कि परिभाषा के अनुसार A एक वर्ग, समित तथा व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। इसके प्रमुख उपसारणिक A के अंतिम $(n - i)$ पंक्तियों और $(n - i)$ स्तंभों को हटाकर पर प्राप्त किए जा सकते हैं।

तथ्य 4: n चरों वाली एक द्विघातीय समघात $Q = X'AX$ "ऋणात्मक निश्चित" होगी यदि और केवल यदि

A के सारणिक के पहले प्रमुख उपसारणिक ऋणात्मक हों तथा तत्पश्चात् सभी प्रमुख उपसारणिक के चिन्ह एक तरतः भिन्न हों।

उदाहरण: निश्चित कीजिए कि $Q = x_1^2 + x_2^2$ धनात्मक निश्चित है अथवा ऋणात्मक निश्चित।

$$Q = x_1^2 + 0\times x_1x_2$$
$$+ 0\times x_1x_2 + x_2^2$$

अतः, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ और $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times1}$ है।

इसलिए, $|A_{11}| = 1 > 0$ और $|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 > 0$ है।

अतः हम पाते हैं कि Q धनात्मक निश्चित है।

उदाहरण: निर्धारित कीजिए कि $Q = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ धनात्मक निश्चित है अथवा ऋणात्मक निश्चित है।

इस समीकरण को हम इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$Q = x_1^2 - x_1x_2 + 0 \times x_1x_3$$
$$- x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_2x_3$$
$$+ 0 \times x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

इस स्थिति में $a_8 = 1, a_{22} = 6, a_{33} = 3, a_{13} = a_{31} = 0, a_{12} = a_{21} = -1, a_{23} = a_{32} = -2$

अतः

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$|A|$ के प्रमुख उपसारणिक इस प्रकार हैं:

$$|A_{11}| = 1 > 0$$

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1(18-4) + 1(-3) + 0(2-0) = 11 > 0$$

इसलिए, दी हुई द्विघातीय समघात धनात्मक निश्चित है।

8.5 द्वितीय कोटि सम्पूर्ण अवकल एक द्विघातीय समघात के रूप में

स्मरण करें कि दो चरों वाले एक उद्देश्य फलन $z = f(x,y)$ के लिए द्वितीय कोटि सम्पूर्ण अवकल

$$d^2z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2$$

है। इसे इस प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है:

$$d^2z = f_{xx}(dx)^2 + f_{xy}dxdy$$
$$+ f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2$$

d^2z को आव्यूह के रूप में लिखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$d^2z = X'AX \text{ जहाँ } X = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}_{2\times1} \text{ तथा } A = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}_{2\times2} \text{ है।}$$

d^2z के निम्नतम के लिए द्वितीय कोटि पर्याप्त शर्त है कि d^2z ऋणात्मक निश्चित है,

चाहे dx और dy के मान कुछ भी हों (ध्यान रहें कि ये दोनों एक साथ शून्य नहीं होने चाहिए)।

अतः, न्यूनतम के लिए

$$d^2z > 0 \Leftrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ के सभी प्रमुख उपसारणिक धनात्मक हों। दूसरे शब्दों में $|A_{11}| : f_{xx}; f_{yy} > 0$ और $|A_{22}|$ अर्थात $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0 \Rightarrow f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$ है। (C)

और उच्चतम के लिए

$$d^2z < 0 \Leftrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ के सभी प्रमुख उपसारणिक ऋणात्मक

तथा दूसरा प्रमुख उपसारणिक धनात्मक हों। दूसरे शब्दों में

$|A_{11}| : f_{xx}; f_{yy} < 0$ तथा $|A_{22}|$ अर्थात् $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0 \Rightarrow f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$ है। (D)

हमने सारणी 1 में (C) और (D) को पहले ही चित्रित कर दिया है।

8.6 दो से अधिक चरों वाले उद्देश्य फलन

8.6.1 चरम बिन्दुओं के लिए प्रथम कोटि प्रतिबन्ध यदि उद्देश्य फलन में दो से अधिक चर हों

आइए, हम तीन चरों वाले एक फलन

$$z = f(x_1, x_2, x_3) \tag{29}$$

पर विचार करें जिसके प्रथम कोटि आंशिक अवकलज f_1, f_2 और f_3 हैं तथा द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज $f_{ij}(\equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j})$ हैं जहाँ $j = 1, 2, 3$ है। यंग के प्रमेय के आधार पर हम कह सकते हैं कि प्रत्येक $i \neq j$ के लिए $f_{ij} = f_{ji}$ है।

जैसा कि पहले भी उल्लेख किया गया है, एक चरम बिन्दु (उच्चतम अथवा न्यूनतम) सदैव एक स्तब्ध मान 'z' के संगत होता है। दूसरे शब्दों में, z का एक चरम मान होने के लिए यह अनिवार्य है कि dx_1, dx_2 और dx_3 के यादृच्छिक मानों के लिए, जोकि सभी एक साथ शून्य न हों, $dz = 0$ होना चाहिए। समीकरण (29) का सम्पूर्ण अवकलन ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \tag{30}$$

है, जहाँ $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$ और $f_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}$ है। क्योंकि dx_1, dx_2 और dx_3 स्वतंत्र चरों में यादृच्छिक (अनंत सूक्ष्म) परिवर्तन है, जोकि सभी एक साथ शून्य नहीं हैं, dz का मान शून्य केवल तभी हो सकता है यदि $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ हो। एक बार पुनः हम पाते हैं कि चरम बिन्दु के लिए अनिवार्य शर्त यह है कि सभी प्रथम कोटि आंशिक अवकलज शून्य के बराबर हैं।

8.6.2 चरम बिन्दुओं के लिए द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध यदि उद्देश्य फलन में दो से अधिक चर हों

यदि प्रथम कोटि प्रतिबन्ध पूरे हो रहे हैं तो पर्याप्त शर्त जिसका संतुष्ट होना आवश्यक है, इस प्रकार है: z के एक स्तब्ध मान पर, यदि हम पाएँ कि d^2z "धनात्मक निश्चित" है तो यह इतना स्थापित करने के पर्याप्त होगा कि z एक न्यूनतम है। तुलनात्मक रूप से z के एक स्तब्ध मान पर यदि हम पाते हैं कि d^2z ऋणात्मक निश्चित है तो यह z को एक उच्चतम के रूप में स्थापित करने के लिए पर्याप्त होगा।

जैसा कि हम पहले भी देख चुके हैं कि d^2z का मान समीकरण (30) का सम्पूर्ण अवकलन करके प्राप्त किया जा सकता है। स्मरण करें कि $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$ है और dx_i, $i = 1, 2, 3$ सभी के लिए यादृच्छिक शून्येतर मान अचर परिवर्तन को व्यक्त करता है। अतः $dz = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ है।

पूरा व्यंजक ज्ञात करने के लिए समीकरण (30) का सम्पूर्ण अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}
d^2z &= d(dz) \\
&= \frac{\partial(dz)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(dz)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial(dz)}{\partial x_3}dx_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)dx_1 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)dx_2 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3}(f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)dx_3 \\
&= (f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2 + f_{13}dx_3)dx_1 \\
&\quad + (f_{12}dx_1 + f_{22}dx_2 + f_{23}dx_3)dx_2 \\
&\quad + (f_{13}dx_1 + f_{23}dx_2 + f_{33}dx_3)dx_3
\end{aligned}$$

$f_{ij} = f_{ji}$ मानने पर।

अथवा

$$\begin{aligned}
d^2z = f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_1dx_2 + f_{13}dx_1dx_3 \\
+ f_{11}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2 + f_{23}dx_2dx_3 \\
+ f_{13}dx_1dx_3 + f_{23}dx_2dx_3 + f_{33}dx_3^2
\end{aligned} \qquad (31)$$

ध्यान दें कि यह तीन चरों dx_1, dx_2 और dx_3 में एक द्विघातीय समघात समीकरण के रूप में है जिसमें गुणांक द्वितीय कोटि अवकलजों के पदों में हैं। समीकरण (31) को हम आव्यूह रूप में व्यक्त कर सकते हैं जैसा कि नीचे दर्शाया गया है:

माना $X = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}_{3\times1}$ और $A = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$

है। अतः

$$d^2z = X'AX \qquad (32)$$

होगा जहाँ A परिभाषा के अनुसार एक वर्ग सममित आव्यूह है। जैसा कि पहले भी बताया गया है कि द्वितीय कोटि पर्याप्त शर्त के अनुसार यदि z न्यूनतम है तो d^2z धनात्मक निश्चित होना चाहिए। तथ्य 3 का प्रयोग करते हुए, स्मरण करें कि d^2z धनात्मक निश्चित होता है यदि और केवल यदि Bordered-Hessian A में सारणिक

के सभी प्रमुख उपसारणिक धनात्मक हों अर्थात् $f_{11}, f_{22} > 0$, $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$ तथा $|A| > 0$ हो।

तथ्य 4 के अनुसार, तीन चयन चरों वाले एक उद्देश्य फलन के उच्चतम के लिए द्वितीय कोटि शर्त बन जाती है: z उच्चतम होगा अर्थात् d^2z ऋणात्मक निश्चित होगा यदि और केवल यदि Bordered-Hessian A के सारणिक के पहले प्रमुख उपसारणिक का चिन्ह ऋणात्मक हों तथा तत्पश्चात् सभी प्रमुख उपसारणिकों के चिन्ह एंकातरतः भिन्न हो (धनात्मक तथा ऋणात्मक हों)। अर्थात्

$$|A_{11}| < 0, |A_{22}| > 0, |A_{33}| < 0 \Rightarrow f_{11} < 0, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0 \text{ और } |A| < 0$$

तीन चयन चरों वाले किसी उद्देश्य फलन के अभीष्टतम के लिए अपेक्षित अनिवार्य तथा पर्याप्त प्रतिबन्धों/शर्तों को नीचे सारणी 2 में संकलित किया गया है:

सारणी 2 : अभीष्टतम के लिए प्रतिबन्ध : $z = f(x_1, x_2, x_3)$

प्रतिबन्ध	उच्चतम	न्यूनतम
प्रथम कोटि	$f_1 = f_2 = f_3 = 0$	$f_1 = f_2 = f_3 = 0$
द्वितीय कोटि	$f_{11} =< 0$ तथा $f_{11}f_{22} > (f_{12})^2$ तथा $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} < 0$	$f_{11} => 0$ तथा $f_{11}f_{22} > (f_{12})^2$ तथा $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} > 0$

उदाहरणः

फलन $z = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$ के चरम मान ज्ञात कीजिए। (33)

प्रथम कोटि प्रतिबन्ध के लिए, हमें समीकरण (33) के x_1, x_2 और x_3 के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करने होंगे और उन्हें शून्य के बराबर रखकर हल करना होगा।

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -3x_1^2 + 3x_3 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 3x_1 - 6x_3 = 0$$

इन समीकरणों को हल करने पर हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होता हैः

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{cases} (0,1,0) \text{ implying } z^* = 1 \\ (1/2, 1, 1/4 \text{ implying } z^* = 17/16 \end{cases}$$

द्वितीय कोटि आंशिक अवकलजों को निम्नलिखित सारणिक के रूप में पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता हैः

$$|A| = \begin{vmatrix} -6x_1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$|A|$ के प्रमुख उपसारणिक हैं।

$$|A_{11}| = |-6x_1|; |A_{22}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \text{ और } |A_{33}| = |A|$$

$x_1 = 0$ पर $|A_{11}| = 0$ है जोकि ऊपर दी द्वितीय कोटि शर्त को संतुष्ट नहीं करता। अतः, (0, 1, 0) एक चरम बिन्दु नहीं हो सकता।

$x_1 = 1/2$ पर $|A_{11}| = -3; |A_{22}| = 12$ तथा $|A_{33}| = -18$ है। ये उपसारणिकों के चिन्ह एकांतरतः d – और + हैं। अतः $z^* = 17/16$ एक उच्चतम है।

उदाहरणः

नीचे दिए फलन का चरम मान ज्ञात कीजिएः

$$z = 29 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

प्रथम कोटि प्रतिबन्ध के अनुसार, चरम बिन्दु के लिए नीचे दिए, प्रथम कोटि आंशिक अवकलजों पर आधारित, तीनों समीकरण एक साथ संतुष्ट होंः

$$f_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} = -2x_1 = 0$$

$$f_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = -2x_2 = 0$$

$$f_3 = \frac{\partial z}{\partial x_3} = -2x_3 = 0$$

इन समीकरणों को हल करने पर हमें एक अद्वितीय हल $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0$ प्राप्त होता है। इसका अर्थ है कि z का केवल एक स्तब्ध मान है जो कि $z^* = 29$ है।

यह जानने के लिए कि क्या यह मान स्थानीय चरम मान है, हम जाँच करते हैं कि क्या यहाँ द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध संतुष्ट होता है। इस फलन के लिए हैसियन सारणिक (Hessian determinant) है:

$$|A| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध की जाँच के लिए, हमें इसके प्रमुख उपसारणिकों के चिन्ह देखने होंगे।

ध्यान दें कि यहाँ

$$|H_{11}| = -2 < 0, |H_{22}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \text{ और } |H_{33}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

है।

चूँकि पहले उपसारणिक का चिन्ह '–' दूसरे का '+' तथा तीसरे का पुनः '–' है, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $z^* = 29$ एक उच्चतम है।

<u>बोध प्रश्न 3</u>

टिप्पणी: (क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए स्थान का प्रयोग कीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1) नीचे दिए प्रत्येक द्विघातीय समघात को एक वर्ग सममित गुणांक आव्यूह के गुणन के रूप में व्यक्त करें:

a) $z = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $z = 6q_1q_2 - 2q_1^2 - 5q_2^2$

c) $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 - x_2x_3$

....

....

....

....

....

2) सुनिश्चित कीजिए कि प्रश्न 1 में दी हुई द्विघातीय समघात "धनात्मक निश्चित" हैं अथवा "ऋणात्मक निश्चित"।

....
....
....
....
....

3) नीचे दिए फलनों के चरम मान, यदि वे हों तो, ज्ञात कीजिए। यह भी निर्धारित कीजिए कि वे उच्चतम हैं या निम्नतम।

a) $z = 5 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

b) $z = e^{2x} - e^y + e^w - 2(x + e^w) + y$

....
....
....
....
....

8.7 n चरों वाले फलन

हम तीन चरों वाले फलनों के अभीष्टीकरण के प्रथम कोटि तथा द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध पहले ही ज्ञात कर चुके हैं। ये परिणाम सरलतापूर्वक $n-$चरों के फलन

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{34}$$

के अभीष्टीकरण के लिए अनिवार्य एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध ज्ञात करने के लिए विस्तारित किए जा सकते हैं।

प्रथम कोटि प्रतिबन्ध

प्रथम कोटि (अनिवार्य) प्रतिबन्ध यह है कि z उस बिन्दु पर स्तब्ध हो, अर्थात् dx_1, dx_2, ..., dx_n, को यादृच्छिक मानों के लिए, जो कभी एक साथ शून्य न हों, $dz = 0$ हो।

समीकरण (34) का सम्पूर्ण अवकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n$$

प्रथम कोटि प्रतिबन्ध के सत्य होने के लिए, यह आवश्यक है कि $f_1 = f_2 = ... = f_n = 0$ हो।

द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध

जैसे कि हम पहले भी देख चुके हैं कि द्वितीय कोटि अवकल को द्विघातीय समघात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसके संगत हैसिन सारणिक है:

$$|A| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & . & f_{1n} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & . & f_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f_{1n} & f_{2n} & f_{3n} & . & f_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

जहाँ f_{ij} इत्यादि द्वितीय कोटि आंशिक अवकल हैं और यंग के प्रमेय के अनुसार सभी $i \neq j$ के लिए $f_{ij} = f_{ji}$ है। जैसे कि पहले बताया जा चुका है कि n-प्रमुख उपसारणिक $|A_{11}|, |A_{22}|, \ldots, |A_{nn}|$ अंतिम $(n\text{-}i)$ पंक्तियों तथा $(n\text{-}i)$ स्तंभों को हटाकर प्राप्त किए जा सकते हैं।

8.8 अर्थशास्त्र में अभीष्टीकरण के अनुप्रयोग

8.8.1 बहु–संयंत्र एकाधिकारी

यहाँ हम एक ऐसे एकाधिकारी लाभ फलन का अध्ययन करेंगे जो एक सजातीय उत्पाद को दो अलग संयंत्रों/कारखानों में बनाता है। सरलता के लिए, हमने अपने अध्ययन को दो कारखानों तक सीमित रखा है परन्तु इसे सरलतापूर्वक 'n' कारखानों पर विस्तृत किया जा सकता है।

मान लीजिए एकाधिकारी के लिए कुल बाजार माँग (Q) केवल मूल्य (P) का फलन है जैसा कि नीचे दिया गया है:

$$\begin{aligned} Q &= 100 - 2P \\ P &= 100 - \tfrac{1}{2}Q \end{aligned} \qquad (35)$$

मान लीजिए कि दो अलग–अलग कारखानों में उत्पादन करने की लागत निम्नलिखित है:

$$C_1 = 10Q_1 \text{ और } C_2 = \tfrac{1}{4}Q_2^2 \qquad (36)$$

जहाँ C_1 और C_2 क्रमशः कारखाने 1 और कारखाने 2 में वस्तु के उत्पादन की लागत है तथा Q_1 और Q_2 क्रमशः सजातीय उत्पाद की कारखाना 1 और कारखाना 2 में उत्पादित मात्राएँ हैं। स्वाभाविक रूप से

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad (37)$$

एकाधिकारी का लाभ फलन होगा:

$$\Pi = R - C_1 - C_2$$

जहाँ R कुल राजस्व है।

अब

$$\begin{aligned} R &= PQ \\ &= (100 - \tfrac{1}{2}Q)Q \\ &= (100 - \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2))(Q_1 + Q_2) \\ &= 100(Q_1 + Q_2) - \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2)^2 \\ &= 100Q_1 + 100Q_2 - \tfrac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2) \end{aligned}$$

अतः

$$R = -\tfrac{1}{2}Q_1^2 - \tfrac{1}{2}Q_2^2 + 100Q_1 + 100Q_2 - Q_1Q_2 \qquad (38)$$

समीकरण (38) से प्राप्त R का मान, लाभ फलन में रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\Pi = -\tfrac{1}{2}Q_1^2 - \tfrac{1}{2}Q_2^2 + 100Q_1 + 100Q_2 - Q_1Q_2 - C_1 - C_2$$

समीकरण (368) में दिए C_1 और C_2 को इस समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\Pi = -\tfrac{1}{2}Q_1^2 - \tfrac{1}{2}Q_2^2 + 100Q_1 + 100Q_2 - Q_1Q_2 - 10Q_1 - \tfrac{1}{4}Q_2^2$$

$$\Pi = -\tfrac{1}{2}Q_1^2 - \tfrac{3}{4}Q_2^2 + 90Q_1 + 100Q_2 - Q_1Q_2$$

Q_1 और Q_2 का मान ज्ञात करने के लिए हम प्रथम कोटि अवकलजों को शून्य के बराबर रखते हैं:

$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = 0$ और हम पाते हैं कि

$$\Pi_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = -Q_1 + 90 - Q_2 = 0 \qquad (39)$$

$$Q_1 + Q_2 = 90$$

$$\Pi_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = -\frac{3}{2}Q_2 + 100 - Q_1 = 0 \qquad (40)$$

$$2Q_1 + 3Q_2 = 200$$

समीकरणों (39) और (40) को एक साथ हल करने पर हमें उत्पाद की निम्नलिखित मात्राएँ प्राप्त होती हैं:

$Q_1^* = 70$ और $Q_2^* = 20$

अब हम जाँच करते हैं कि क्या इस बिन्दु पर द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध संतुष्ट होते हैं। यहाँ Bordered-Hessian सारणिक है:

$$|A| = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3/2 \end{vmatrix}$$

जहाँ Π_j इत्यादि द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज हैं। उच्चतम के लिए पर्याप्त शर्त यह है कि इस सारणिक का पहला प्रमुख सारणिक ऋणात्मक हो तथा तत्पश्चात् सभी प्रमुख सारणिक एंकातरतः धनात्मक और ऋणात्मक हों अर्थात्

$|A_{11}| = \Pi_{11} < 0$ और

$|A_{22}| = |A| > 0$

हों। ध्यान दें कि यहाँ

$|\Pi_{11}| = -1 < 0$ और

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3/2 \end{vmatrix} = 1/2 > 0$$

अतः, हम पाते हैं कि इस फलन के लिए बिन्दु $Q_1^* = 70$ और $Q_2^* = 20$ के लिए उच्चतम लाभ के लिए अनिवार्य और पर्याप्त दोनों शर्तें संतुष्ट होती हैं।

इस उत्पादन संयोजन के लिए एकाधिकारी का उच्चतम लाभ, अर्थात् $\Pi^* = 3525$ है।

अतः हम पाते हैं कि

उच्चतम लाभ के लिए पहले कारखाने में उत्पादन = 70 इकाइयाँ

उच्चतम लाभ के लिए दूसरे कारखाने में उत्पादन = 20 इकाइयाँ

उच्चतम लाभ = 3525 इकाइयाँ

8.8.2 मूल्य विभेदक एकाधिकारी

यह आवश्यक नहीं है कि कोई एकाधिकारी अपना सारा उत्पाद एक ही बाजार में बेचे। कुछ स्थितियों में वह अपना उत्पाद दो या दो से अधिक बाजारों में अलग–अलग मूल्य पर बेचने में सफल हो जाता है तथा अपने कुल लाभ में बढ़ोतरी कर लेता है। मूल्य विभेद की एक मूलभूत आवश्यकता यह है कि क्रेता उत्पाद को एक बाजार से खरीद कर दूसरे बाजार में न बेच पाएँ। मूल्य विभेदक सामान्यतः उन्हीं बाजारों में संभव होता है जो क्षेत्रीय रूप से अलग हों जैसे कि अपना देश और विदेश। यह अकसर "बिजली" जैसे उत्पादों में देखने को मिलता है जिनको दोबारा बेचना संभव/व्यवहार्य नहीं होता।

सरलता के लिए मान लें, कि एक एकाधिकारी अपने उत्पादों को दो बाजारों में बेचता है जिनके माँग फलन इस प्रकार हैं:

बाजार 1 में: $p_1 = 80 - 5q_1$ है, जहाँ p_1 तथा q_1 इस बाजार में उत्पाद का मूल्य तथा बेची गई मात्रा है।

बाजार 2 में: $p_2 = 180 - 20q_2$ है, जहाँ p_2 तथा q_2 इस बाजार में उत्पाद का मूल्य तथा बेची गई मात्रा है।

इस प्रकार एकाधिकारी का कुल लागत फलन है:

$$C = 50 + 20\,(q_1 + q_2)$$

बाजार 1 से एकाधिकारी को प्राप्त होने वाला राजस्व है:

$$R_1 = p_1 q_1 = (80 - 5q_1)q_1 = 80q_1 - 5q_1^2$$

बाजार 2 से एकाधिकारी को प्राप्त होने वाला राजस्व है:

$$R_2 = p_2 q_2 = (180 - 20q_2)q_2 = 180q_2 - 20q_2^2$$

इस प्रकार एकाधिकारी को कुल लाभ प्राप्त होगाः

$$\Pi = R_1 + R_2 - C$$

इसमें R_1, R_2 तथा C का मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\Pi = 80q_1 - 5q_1^2 + 180q_2 - 20q_2^2 - 50 - 20q_1 - 20q_2$$

उच्चतम के लिए प्रथम कोटि प्रतिबन्ध के लिए यह नीचे दिए गए समीकरणों का एक साथ हल ज्ञात करना अनिवार्य हैः

$$\Pi_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 80 - 10q_1 - 20 = 0$$

अथवा $q_1^* = 6$

$$\Pi_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 180 - 40q_2 - 20 = 0$$

अथवा $q_2^* = 4$

अगले चरण में हम यह जाँच करेंगे कि बिन्दु (q_1^*, q_2^*) द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है अथवा नहीं। उच्चतम के लिए पर्याप्त शर्त यह है कि इस सारणिक का पहला प्रमुख सारणिक ऋणात्मक हो तथा तत्पश्चात् सभी प्रमुख सारणिक एंकातरतः धनात्मक और ऋणात्मक हों। यहाँ Bordered Hessian

$$|A| = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -40 \end{vmatrix}$$

है।

ध्यान दें कि $|A_8| = -10 < 0$ है तथा $|A_{22}| = |A| = 400 > 0$ है।

इससे यह स्पष्ट होता है कि यह उत्पाद संयोजन द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है।

मूल्य–विभेदक एकाधिकारी द्वारा अर्जित उच्चतम लाभ समीकरण(A) में $q_1^* = 6$ और $q_2^* = 4$ रखकर ज्ञात किया जा सकता है। अतः,

$$\Pi = 80(6) - 5(36) + 180(4) - 20(16) - 50 - 20(6) - 20(4) = 450$$

अतः हम पाते हैं किः

बाजार 1 में बेची गई मात्रा = 6 इकाई

बाजार 2 में बेची गई मात्रा = 4 इकाई

अधिकतम लाभ = 450 इकाई

बोध प्रश्न 3

1) एक एकाधिकारी एक ही आगत X, का प्रयोग करता है जिसे वह निश्चित मूल्य $g = 5$ पर खरीदता है तथा इसका प्रयोग उत्पाद की मात्रा q बनाने के लिए करता है। माँग और उत्पादन फलन क्रमशः $p = 85 - 2q$ तथा $q = 2\sqrt{x}$ है। p, q तथा x के वे मान निर्धारित करें जिनके लिए एकाधिकारी का लाभ अधिकतम होगा।

....

....

....

....

....

2) मान लीजिए एक एकाधिकारी के माँग तथा लागत फलन क्रमशः $p = 100 - 3q + 4\sqrt{A}$ और $C = 4q^2 + 10q + A$ हैं जहाँ p कीमत को, q मात्रा को तथा A विज्ञापन खर्च के स्तर को निरूपित करते हैं। A, q और p के वे मान ज्ञात कीजिए जो एकाधिकारी का लाभ अधिकतम कर दें।

....

....

....

....

....

8.9 सारांश

इस इकाई में, हमने पिछली इकाई की चर्चा को आगे बढ़ाया जिसमें हमने एक स्वतंत्र चर के लिए अप्रतिबंधित अभीष्टीकरण पर चर्चा की थी। इस इकाई में "चरम बिन्दु" ज्ञात करने के विश्लेषणात्मक प्रक्रिया का या दूसरे शब्दों में अभीष्टीकरण की प्रक्रिया का व्यापक रूप से निरीक्षण किया। इस इकाई में उद्देश्य फलन में केवल एक चयन चर के प्रतिबन्ध में छूट दी और हमने बहुचरीय उद्देश्य फलनों पर विचार किया।

अनेक चयन चरों वाले उद्देश्य फलन के लिए किसी बिन्दु को एक आपेक्षिक अधिकतम या आपेक्षिक न्यूनतम होने के लिए जिन प्रथम कोटि तथा द्वितीय कोटि शर्तों को संतुष्ट करने की आवश्यकता होती है, उनका वर्णन यहाँ किया गया। अंततः, हमने इन गणितीय संकल्पनाओं का प्रयोग अर्थशास्त्र के संदर्भ में किया। इसके लिए गुणक एकाधिकारी के तथा विभेदक एकाधिकारी के उदाहरणों की चर्चा की गई।

8.10 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) भाग 8.2 और 8.3 का अध्ययन कीजिए।

2) भाग 8.3 का अध्ययन कीजिए।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 8.4 का अध्ययन कीजिए।

2) भाग 8.6 का अध्ययन कीजिए।

3) उपभाग 8.6.2 का अध्ययन कीजिए।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 8.8 का अध्ययन कीजिए।

2) भाग 8.8 का अध्ययन कीजिए।

इकाई 9 संरोधित अभीष्टीकरण : समीकरणीय संरोध*

संरचना

9.0 उद्देश्य

9.1 प्रस्तावना

9.2 स्थिरमान ज्ञात करना

 9.2.1 प्रतिस्थापन विधि

 9.2.2 लैगरांजियन गुणक विधि

9.3 द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध

9.4 अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग

 9.4.1 उपभोक्ता का संतुलन

 9.4.2 लागत तथा आपूर्ति

9.5 सारांश

9.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

9.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित संकल्पनाओं से भली–भांति अवगत हो जाएँगेः

- किसी अभीष्टीकरण समस्या पर प्रतिबन्ध का प्रभाव;
- किसी प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्या में स्थिरमान ज्ञात करने की विधि;
- प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्याओं में द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध; और
- अर्थशास्त्र में प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्याओं के कुछ अनुप्रयोग।

9.1 प्रस्तावना

पिछले खंड में आपने अभीष्टीकरण के बारे में अध्ययन किया। अभीष्टीकरण के अर्थशास्त्र में अनेकों अनुप्रयोग हैं। हमने दोनों स्थितियों का अध्ययन कियाः (i) जब निर्भर चर एक ही स्वतंत्र चर का फलन हो; (ii) जब निर्भर चर अनेक स्वतंत्र चरों का फलन हो; परन्तु हमने इन दोनों ही स्थितियों में केवल अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण का ही अध्ययन किया। अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोगों में अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की स्थितियाँ अपेक्षाकृत कम देखने को मिलती हैं। अधिकतर हमारा सामना प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की समस्याओं से ही होता है। इसका अर्थ यह है कि अभीष्टीकरण समस्या के साथ एक या एक से अधिक अतिरिक्त शर्तें/प्रतिबन्ध भी दी हुई होती हैं। जिस फलन का हम अभीष्टीकरण करना चाहते हैं, उसका प्रांत इन दी हुई शर्तों/दिए हुए प्रतिबन्धों द्वारा प्रतिबन्धित हो जाता है। एक उपभोक्ता के लिए उपयोगिता अधिकतमीकरण की समस्या पर विचार कीजिए। एक व्यक्ति के रूप में उपभोक्ता

* सौगतो सेन, इग्नू

की असीमित आवश्यकताएँ होती हैं। परन्तु वह अपने बजट समुच्चय से प्रतिबन्धित रहता/रहती है। अतः वह अपनी उपयोगिता का अधिकतमीकरण अपने बजट के प्रतिबन्धों के आधार पर ही करता/करती है। इसी प्रकार एक उत्पादक किसी दिए हुए उत्पादन स्तर के अनुसार अपनी लागत को न्यूनतम करना चाहेगा।

यह इकाई प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण पर केन्द्रित है। इस इकाई में हम सर्वप्रथम किसी उद्देश्य फलन के स्थिरमान ज्ञात करने की विधियों की चर्चा करेंगे। हम देखेंगे कि साधारण स्थितियों में हम प्रतिस्थापन की विधि का प्रयोग कर सकते हैं। परन्तु जटिल स्थितियों में हमें अन्य विधियों का प्रयोग करना पड़ेगा। हम लैगरांजियन गुणक के महत्व को समझेंगे और जानेंगे कि कैसे प्रयोग स्थिर/स्थैतिक, प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्याओं में किया जा सकता है। इसके पश्चात् हम इस इकाई में प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की द्वितीय कोटि शर्तों पर चर्चा करेंगे। इन शर्तों के अध्ययन के पश्चात् हम कुछ अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे।

9.2 स्थिरमान ज्ञात करना

9.2.1 प्रतिस्थापन विधि

निर्देशांक ज्यामिति के एक उदाहरण की सहायता से हम एक ऐसे फलन का अधिकतम/न्यूनतम ज्ञात करने की विधि सीखेंगे जिसमें एक प्रतिबन्ध दिया है जो फलन के प्रांत को सीमित/प्रतिबन्धित करता है।

आइए, एक सरल उदाहरण पर विचार करें। बिन्दु $(0, 0)$ पर केन्द्रित वह छोटे से छोटा वृत्त ज्ञात कीजिए जिसका सरल रेखा $x + y = 10$ के साथ एक उभयनिष्ठ बिन्दु है। हम जानते हैं कि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ होता है। छोटा से छोटा वृत्त वह होगा जिसकी त्रिज्या न्यूनतम होगी। दिए हुए प्रतिबन्ध के अनुसार वृत्त और एक दी हुई सरल रेखा में एक बिन्दु उभयनिष्ठ होना चाहिए। इस प्रतिबन्ध के बिना, यह सरलता से देखा जा सकता है कि यह वृत्त 0 त्रिज्या वाला एक वृत्त अर्थात् एक बिन्दु होगा।

हम दी हुई समस्या को इस प्रकार सूत्रबद्ध कर सकते हैंः

यदि $x + y = 10$ है तो $x^2 + y^2$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

इस स्थिति में यह देखा जा सकता है कि अप्रतिबन्धित हल $x = 0, y = 0$, इस समस्या का हल नहीं है क्योंकि यह दिए हुए प्रतिबन्ध $x + y = 10$ करे संतुष्ट नहीं करता। हमें करना यह होगा कि हम फलन के प्रांत में से केवल उन्हीं बिन्दुओं (x, y) पर विचार करें जिनके लिए $x + y = 10$ हो। हम देख सकते हैं कि प्रतिबन्ध के कारण प्रांत सीमित हो गया है। अब हल कैसे प्राप्त करें? दिए हुए प्रतिबन्ध से हम पाते हैं कि $y = 10 - x$ है। अब यदि हम इसे $x^2 + y^2$ में प्रतिस्थापित करें, तो हमें $x^2 + (10 - x)^2$ प्राप्त होता है। इसमें प्रतिबन्ध को सम्मिलित कर लिया गया है। आइए, अब हम इस व्यंजक का न्यूनतमीकरण करेंः

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 + (10 - x)^2\right] = 2x + 2(10 - x)(-1) = 4x - 20$$

स्थिर मान के लिए $4x - 20 = 0$ अथवा $x = 5$ है।

यह ज्ञात करने के लिए कि यह स्थिर मान, वास्तव में है, अथवा नहीं, हम इस फलन/व्यंजक का एक बार पुनः x के सापेक्ष अवकलन करते हैं। अतः,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[x^2+(10-x)^2\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(4x-20)$$

$$= 4>0$$

जिससे यह सिद्ध होता है कि $x=5$ पर फलन का मान न्यूनतम है अर्थात् हमने व्यंजक x^2+y^2 का न्यूनतमीकरण कर लिया है।

प्रतिबन्ध $y = 10-x$ में $x=5$ रखने पर हम पाते हैं कि $y=5$ है, अर्थात् $x=5, y=5$ पर फलन का न्यूनतम है तथा अभीष्ट वृत्त $x^2+y^2=50$ है।

आइए, अब हम इस उदाहरण में प्रयोग की गई विधि को पुनः निरीक्षण करें और देखें कि क्या इसके आधार पर हम एक व्यापक विधि सूत्रबद्ध कर सकते हैं जो ऐसी सभी समस्याओं को हल करने में उपयोगी सिद्ध हो। व्यापक रूप में हमें एक फलन $f(x,y)$ दिया होगा जिसका न्यूनतमीकरण/अधिकतमीकरण किसी दिए हुए प्रतिबन्ध समीकरण $g(x,y)=0$ के तहत किया जाना है। फलन $f(x,y)$ को हम उद्देश्य फलन कहते हैं। पिछले उदाहरण में प्रतिबन्ध को $y(x, y) = x+y-10=0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

इस उदाहरण में प्रयुक्त विधि को हम इस प्रकार चरणबद्ध कर सकते हैं:

चरण 1: दिए हुए प्रतिबन्ध समीकरण को हल करके एक चर को दूसरे चर के पदों में व्यक्त करें। उपरोक्त उदाहरण में हमने y को x के पद में लिखा, अर्थात् $y=10-x$ लिया।

चरण 2: इस प्रकार प्राप्त हल को दिए हुए उद्देश्य फलन में प्रतिस्थापित करें। इस प्रकार प्राप्त संशोधित उद्देश्य फलन केवल एक चर का फलन होगा। साथ ही x और y के मान दिए हुए प्रतिबन्ध को भी संतुष्ट करेंगे।

चरण 3: संशोधित उद्देश्य फलन का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करें और x का वह मान ज्ञात करें जिसके लिए यह अवकलज शून्य के बराबर हो।

चरण 4: इस प्रकार प्राप्त x के मान को दिए हुए प्रतिबन्ध में रखकर y का मान प्राप्त करें।

चरण 5: इस प्रकार प्राप्त युग्म (x, y) पर उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करें।

चरण 6: यह जानने के लिए कि यह स्थिर बिन्दु अभीष्टतम है अथवा नहीं। द्वितीय कोटि शर्तों का प्रयोग करें।

व्यापक रूप में प्रतिबन्ध समीकरण का हल निकालना कठिन भी हो सकता है। ऐसी स्थिति में हमें, ऊपर दी हुई विधि के पहले चरण में ही समस्या का सामना करना पड़

सकता है। उदाहरण के लिए, हमें $x^3 + 2x^2y + 9y^3 - 2y - 117 = 0$ जैसा समीकरण प्रतिबन्ध के रूप में दिया हो सकता है जिसमें y को x के पदों में या x को y के पदों में व्यक्त करना अत्यंत कठिन है।

मान लीजिए कि हमें प्रतिबन्ध समीकरण का हल $y = h(x)$ के रूप में मिलता है। अब हम अगले चरण की ओर चलते हैं। चरण 2 में उद्देश्य फलन $f(x, y)$, फलन $f(x,h(x))$ में परिवर्तित हो जाता है। चरण 3 में जब हम इसका अवकलन करते हैं तो हमें $f_x + f_y \dfrac{dh(x)}{dx}$ प्राप्त होता है। यदि हमें $\dfrac{dh(x)}{dx}$ ज्ञात हो तो हम ऊपर वाले व्यंजक को 0 के बराबर रखकर हल कर सकते हैं। इससे चरण 3 पूरा हो जाता है। अगले चरणों में कोई समस्या नहीं आती। ध्यान रहें कि हमें इस विधि में $h(x)$ का ठीक–ठीक रूप जानना आवश्यक नहीं है। हमें केवल $h(x)$ के अवकलज को जानने की आवश्यकता है जिससे इस विधि के चरण 1 से 6 तक पूरे हो जाते हैं।

परन्तु अब प्रश्न यह है कि किसी फलन का रूप/प्रकार जाने बिना हम उसका अवकलज कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

यह अजीब अवयव है परन्तु हमारे पास एक ऐसा प्रमेय है जो हमें यह बतलाता है कि कैसे किया जा सकता है और इसके लिए फलन को कौन सी शर्तें पूरी करनी होंगी। इस प्रमेय को अंतर्जात फलन प्रमेय (implicit function theorem) कहते हैं।

अंतर्जात फलन प्रमेय

यदि $F(x, y)$ एक संतत (continuous) फलन है जिसके आंशिक अवकलज F_x और F_y भी संतत हैं और यदि $F(x_0,y_0) = 0$ है परन्तु $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ है, तो

i) हमें एक आयत $x_1 \leq x \leq x_2$ और $y_1 \leq y \leq y_2$ मिल जाएगा जिसमें प्रत्येक $x \in [x_1, x_2]$ के लिए समीकरण $F(x,y) = 0$ से एक और केवल एक $y = m(x)$ प्राप्त होता है जहाँ $y \in [y_1, y_2]$ है अर्थात् इस आयत के भीतर y, x के एक फलन $y = m(x)$ के रूप में लिखा जा सकता है।

ii) फलन $y_0 = m(x_0)$ को संतुष्ट करता है तथा प्रत्येक $x \in [x_1, x_2]$ के लिए $F(x, m(x)) = 0$ होगा।

iii) फलन $m(x)$ संतत एवं अवकलनीय होगा और इसका अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dm(x)}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

होगा क्योंकि $F(x,y) = 0$ का सम्पूर्ण अवकलन लेने पर हम पाते हैं कि $F_x dx + F_y dy = 0$ होगा। अर्थात् $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ होगा।

हम यहाँ इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे परन्तु इसे अनौपचारिक भाषा में अनुवादित अवश्य करेंगे। इसके लिए हम पुनः अपनी मूल समस्या पर आते हैं जहाँ हमें व्यापक रूप $g(x, y) = 0$ में दिए प्रतिबन्ध समीकरण में से y को x के पदों में व्यक्त करना है। अतः हमारा ध्येय है $F(x, y)$, $F_y \neq 0$ को अधिकतमीकरण अथवा न्यूनतमीकरण

ज्ञात करना जबकि हमें प्रतिबन्ध के रूप में समीकरण $g(x,y) = 0$ दिया है। इस प्रमेय के अनुसार

i) यदि g एक ऐसा संतत फलन है जिसके आंशिक अवकलज भी संतत हैं; और

ii) यदि (x_0, y_0) समीकरण $g_y(x, y) = 0$ को संतुष्ट करने वाला एक बिन्दु है और इस बिन्दु पर $g_y(x, y) \neq 0$ है, तो हम बिना फलन $y = h(x)$ को ज्ञात किए ही ऊपर दिए गए चरणों का प्रयोग कर सकते हैं। तीसरे चरण में हमें $h'(x)$ की आवश्यकता होगी और इस प्रमेय के अनुसार, $h'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$ में ज्ञात किया जा सकता है।

आइए हम इस विधि से एक प्रश्न को हल करें:

फलन $f(x,y)=x^2 + y^2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ तथा

$g_y = \frac{\delta}{\delta y}(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 2y - 2$ है। $y \neq 1$ के लिए यह शून्येतर है।

अंतर्जात फलन प्रमेय के अनुसार $g_y \neq 0$ है, हम y को x के एक फलन अर्थात् $y=h(x)$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, चाहे हम उसका ठीक–ठीक सूत्र न ज्ञात हो। इसे $f(x,y)$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$f(x,y) = f(x,h(x)) = x^2 + (h(x)$ प्रतिबन्ध $= z$ मान लीजिए:

z का स्थिर मान ज्ञात करने के लिए हम $\frac{dz}{dx} = 0.$ को हल करते हैं:

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2h(x)\,(h'(x)) = 2x + 2y(h'(x)) = 2x + 2y\left(-\frac{g_t}{g_y}\right)$$

$$= 2x + 2y\left(-\frac{2x-4}{2y-2}\right) = -x + 2y$$

अर्थात् z के स्थिर मान के लिए $x = 2y$ होना चाहिए।

चरण 4 के अनुसार $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ में $x = 2y$ रखने पर हम पाते हैं कि

$5y^2 - 10y + 4 = 0$

है जिससे हमें $y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ प्राप्त होता है तथा $x = 2(1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}})$ प्राप्त होता है। अब हम चरण 5 पर आते हैं जिसमें उद्देश्य फलन बन जाता है।

$x^2 + y^2 = (1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ प्रतिबन्ध $= 2(3 \pm \sqrt{5})$

अंतिम चरण थोड़ा जटिल होगा क्योंकि इसके लिए हमें द्वितीय कोटि शर्तों का प्रयोग करना पड़ेगा, अतः हम इस पर आगे चर्चा करेंगे। इस प्रश्न में फलन का अधिकतम $2(3+\sqrt{5})$ प तथा न्यूनतम $2(3-\sqrt{5})$ पर है।

अब हम एक अन्य विधि की चर्चा करते हैं जो हमें प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्याओं/प्रश्नों को हल करने में सहायता करती है। यह एक प्रभावशाली विधि है यद्यपि प्रारंभ में ऐसा प्रतीत होता है कि एक और चर को सम्मिलित करके, यह विधि

समस्या को और अधिक जटिल बना रही है। इस विधि को लैगरांजियन गुणक की विधि (Lagrange multiplier method) के नाम से जाना जाता है।

9.2.2 लैगरांजियन गुणक विधि

एक बार पुनः हम उसी समस्या पर विचार करते हैं: फलन $f(x, y)$ का अभीष्टीकरण कीजिए यदि प्रतिबन्ध $g(x, y) = 0$ दिया हो।

यदि $g_y(x, y) \neq 0$ हो तो $y = h(x)$ होगा।

अतः यह समस्या निम्नलिखित रूप में परिवर्तित हो जाती है:

$f(x,h(x))$ का अभीष्टीकरण कीजिए।

प्रथम कोटि शर्त से हम पाते हैं कि $f_x + f_y h'(x) = 0$ ……..(i)

$g(x,h(x)) = 0$ एक सर्वसमिका है, अतः हम प्राप्त करते हैं:

$g_x + g_y h'(x) = 0$ ……..(ii)

अब $\lambda = \frac{f_y}{g_y}$. लीजिए। समीकरण (ii) को λ से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$\lambda g_x + f_y h'(x) = 0$ …….(iii)

(i) और (iii) से हम प्राप्त करते हैं, $f_x - \lambda g_x = 0$ (1)

$\lambda = \frac{f_y}{g_y}, f_y - \lambda g_y = 0$ (2)

साथ ही, प्रतिबन्ध समीकरण $g(x,y) = 0$ है। (3)

समीकरण (1), (2) और (3) तीन चरों x, y और λ में तीन चर हैं। जब हम तीन समीकरणों के इस निकाय को एक साथ हल करते हैं तो हमें x और y के मान प्राप्त होते हैं जिससे हमारी समस्या हल हो जाती है। हमें इस प्रक्रिया में λ का मान भी प्राप्त होता है जिसे हम लैगरांजियन गुणक (Lagrangian multiplier) कहते हैं। आपको शायद यह आभास हो कि हमारी समस्या के संदर्भ में λ के मान की कोई प्रासंगिकता अथवा महत्व नहीं है। परन्तु शीघ्र ही हम देखेंगे कि इसका भी विशेष महत्व है।

हमने अभी जितना भी गणित किया उसमें हमने माना $g_y(x, y) \neq 0$ और $g_y = 0$ है। यदि हम पुनः यह पूरा गणित दोहराएँ और प्रारंभ से $\lambda = \frac{f_x}{g_x}$. लेकर चलें तो हम पाएँगे कि हमें पुनः उपरोक्त समीकरण (1), (2) और (3) ही प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार एक अत्यधिक चरों जैसे कि $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{17}$ वाली समस्या में भी हमें इसी प्रकार के समीकरण प्राप्त होंगे जोकि सभी चरों के लिए सममित होंगे। परन्तु यह शर्त अवश्य पूरी होनी चाहिए कि प्रतिबन्ध फलन का किसी एक चर के सापेक्ष आंशिक अवकलज शून्यतेर होना चाहिए।

आइए अब हम नीचे दिए प्रश्न का हम लैगरांजियन गुणक विधि से ज्ञात करें:

उदाहरण

यदि $g(x,y) = y^2–4x = 0$ है तो फलन $f(x,y) = (x–1$प्रतिबन्ध $+ y^2$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

एक नया फलन $L(x,y,\lambda) = f(x,y) – \lambda g(x,y)$ लीजिए।

$$= (x–1)^2 + y^2 – \lambda (y^2–4x)$$

प्रथम कोटि समीकरणों की सहायता से L का स्थिर बिन्दु ज्ञात कीजिएः

$$L_x = f_x – \lambda g_x = 2(x–1) + 4\lambda = 0$$

$$L_y = f_y – \lambda g_y = 2y – 2\lambda y = 0$$

$$L\lambda = –g(x,y) = –(y^2–4x) = 0$$

(ii) से हम पाते हैं कि $y(1–\lambda)\ 0$ है।

यदि $y=0$ है, तो हम (i) और (iii) से पाते हैं कि $\lambda = \frac{1}{2}$ तथा $x=0$ है।

दूसरा विकल्प $\lambda = 1$ है। यदि $\lambda = 1$ है, तो (i) से हम पाते हैं कि $x = –1$ है जो (iii) को असत्य बना देता है। अर्थात् $\lambda = 1$नहीं हो सकता। अतः, स्थिर बिन्दु है $x = 0, y = 0$ जिसके अनुसार हमें द्वितीय कोटि न्यूनतम $(–1)^2 + (0)^2 = 1$ से प्राप्त होता

है ऊपर हमें प्रतिफल के रूप में $\lambda = \frac{1}{2}$ भी प्राप्त होता है परन्तु अभी हम इसे नजर अंदाज करते हैं।

ध्यानपूर्वक देखें तो मने यहाँ यह स्पष्ट नहीं किया है कि ऊपर प्राप्त $L(x, y, \lambda)$ का स्थिर बिन्दु न्यूनतम है अथवा अधिकतम। जहाँ संशोधित अभीष्ट प्रात होता है, इससे संबंधित लैगरांजियन फलन की अधिकतम या न्यूनतम बिन्दु नहीं होती। फलन $L(x, y, \lambda)$ का स्थिर बिन्दु एक काठी–बिन्दु (saddle point) है, एक दिशा से न्यूनतम तथा दूसरे दिशा से अधिकतम। काठी बिन्दु अंतर्जात फलन का ही उच्च आयाम में स्वरूप है।

साथ ही ध्यान दें कि फलन L को इस प्रकार बनाया गया है कि प्रथम कोटि शर्तें, प्रतिबन्धित अभीष्टतम के हल के लिए आवश्यक शर्तों के समान हो जाती हैं। इसमें सभी चरों के लिए वांछित गुण "सममिति" उपस्थित है।

हम देख सकते हैं कि स्थिर मान के लिए $\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}$ होता है।

आइए, अब हम देखें कि यह विधि अर्थशास्त्र में किस प्रकार उपयोगी है। अर्थशास्त्र में बहुधा हमारा सामना प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्याओं से होता है। अक्सर हमें किसी फलन का अभीष्टतम कुछ प्रतिबन्धों के आधार पर ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरण के तौर पर, उपभोक्ता संतुलन के संदर्भ में, हम उपयोगिता (संतुष्टि) का अधिकतमीकरण आय या बजट प्रतिबन्धों के तहत्/आधार पर करते हैं। इसी प्रकार, उत्पादक संतुलन के लिए हम संसाधन प्रतिबन्ध के तहत न्यूनतम घटक/गुणक लागत (factor cost) के संगत उत्पाद प्राप्त करते हैं।

हम नीचे इसके लिए आवश्यक विभिन्न चरण नीचे दे रहे हैंः

1. जिस फलन का अभीष्टीकरण करना है, उसकी स्पष्ट रूप से पहचान कीजिए अथवा लिखिए। इसे उद्देश्य फलन (objective function - OF) कहते हैं।

2. संशोधित फलन(constraint function - CF) को पहचानिए तथा इसे $C - ax - by = 0$ के रूप में (अर्थात् अंतर्जात फलन के रूप में लिखें।

3. एक फलन $v = OF + \lambda CF$ बनाइए (इसे z अथवा v से निरूपित किया जा सकता है)। यहाँ λ एक अनुपात है (λ को लैम्डा LAMDA पढ़ते हैं।)

4. $V_x = 0$ तथा $V_y = 0$ लिखें तथा इन समीकरणों को x और y के लिए हल करें। यदि x और y के मान स्पष्ट रूप से ज्ञात न किए जा सकें, तो $V_\lambda = 0$ लिखें (यह प्रतिबन्ध फलन हो जाएगा) $V_x = 0$ $V_y = 0$ तथा $V_\lambda = 0$ की सहायता से अभीष्ट हल (अर्थात् x और y के मान ज्ञात किए जा सकते हैं)।

आइए हम एक उदाहरण लें:

यदि $x + 2y = 24$ है तो $5x^2 + 6y^2 - xy$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

हलः दिया हुआ उद्देश्य फलन है: $5x^2 + 6y^2 - xy$

प्रतिबन्ध फलन है : $x + 2y = 24 \Rightarrow 24 - x - 2y = 0$

मान लीजिए $v = OF + \lambda CF = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda(24 - x - 2y = 0)$ है।

अर्थात् $v = 5x^2 + 6y^2 - xy + 24\lambda - \lambda x - 2\lambda y$

$v_x = 10x + 0 - y + 0 - \lambda - 0 = 0$ अथवा $10x - y = \lambda$ (1)

$v_y = 0 + 12y - x + 0 - 0 - 2\lambda = 0$ अथवा $12y - x = 2\lambda$ (2)

समीकरण (1) और (2) से हम पाते हैं कि $20x - 2y = 12y - x$ $\quad x = \frac{2}{3}y$ (3)

क्योंकि हमें x और y के मान स्पष्ट रूप से प्राप्त नहीं हैं अतः हम देखते हैं कि

$v_\lambda = 2u - x - 2y = 0$ (4)

समीकरण (3) और (4) से हम पाते हैं कि

$$24 - \frac{2}{3}y - 2y = 0 \quad \text{अथवा} \quad \left(\frac{2}{3} + 2\right)y = 24 \quad \text{अथवा} \quad y = 9$$

अतः $x = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ है।

अतः दी हुई प्रतिबन्धित अधिकतमीकरण $x = 6$ और $y = 9$ से प्राप्त होता है।

एक उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $u=(y+1)(x+2)$ है। यदि उसका बजट प्रतिबन्ध $2x+5y=51$ है, तो उसी x और y की कितनी–कितनी मात्रा का उपभोग करना चाहिए कि उसकी संतुष्टि/उपयोगिता अधिकतम हो जाए।

हलः दिया हुआ उद्देश्य फल हैः $u=(y+1)(x+2)=xy+x+2y+2$

प्रतिबन्ध फलन है : CF : $51-2x-5y=0$

माना : उद्देश्य फल + λ (प्रतिबन्ध फलन)

जहाँ λ लैगरांजियन गुणक है।

अर्थात् $v=xy+x+2y+2+\lambda(51-2x-5y)$

$$=xy+x+2y+2+51\lambda-2\lambda x-5\lambda y$$

अथवा $\lambda=\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}$ (5)

$v_y=x+0+2+0+0-0-5\lambda=0$ or $\lambda=\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}$ (6)

समीकरण (5) और (6) से हम प्राप्त करते हैं कि $\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}$ or $\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{x+2}{5}$

$5y+5=2x+4$ or $x=\dfrac{5y+1}{2}$ (7)

चूँकि कोई भी स्पट हल प्राप्त नहीं हो रहा, अतः, हम v_λ ज्ञात करते हैं:

$v_\lambda=51-2x-5y=0$ (8)

समीकरण (7) और (8) से हम प्राप्त करते हैं कि

$\dfrac{51-x(5y+1)}{2}-5y=0$ अथवा $51-5y-1-5y=0$ अथवा

$10y=50, y=5$

$$x=\frac{5y+1}{2}=\frac{5\times5+1}{2}=\frac{26}{2}=13$$

अतः, हल $x=13, y=5$ है, अर्थात् उपभोक्ता x की 13 इकाइयों तथा की 5 इकाइयों का उपभोग करेगाः

एक अन्य उदाहरणः

लैगरांजियन गुणक विधि के प्रयोग से दो वस्तुओं क x और y का संतुलन उपभोग ज्ञात कीजिए जबकि हमें निम्नलिखित सूचना उपलब्ध हैः

उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $u = xy + 2x$ है।

वस्तु x की कीमत $= 4$ रुपये, वस्तु y की कीमत $= 2$ रुपये तथा उपभोक्ता की आमदनी = 60 रुपये है।

हलः

हम पहले प्रतिबन्ध फलन ज्ञात करते हैं। इसे इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता हैः

$xp_x + yp_y = M$ अथवा $4x + 2y = 60$ अथवा $60 - 4x - 2y = 0$

हमें उद्देश्य फलन $4 = xy + 2x$ दिया है।

लैगरांजियन गुणक के प्रयोग से, हम पाते हैं कि v: उद्देश्य फल + λ (प्रतिबन्ध फलन) का मान होगाः

$$v = xy + 2x + \lambda(60 - 4x - 2y) = xy + 2x + 60\lambda - 4\lambda x - 2\lambda y \quad (9)$$

अथवा

$$v_y = x + 0 + 0 - 0 - 2\lambda = 0 \quad \text{or} \quad 2\lambda = x \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{1}{2}x \quad (10)$$

समीकरण (9) और (10) से हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{2}x = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{y}{2} + 1 \quad (11)$$

क्योंकि हमें कोई स्पष्ट हल प्राप्त नहीं हुआ, अतः हम v_λ का मान ज्ञात करते हैं:

$$v_\lambda = 60 - 4x - 2y = 0 \quad (12)$$

समीकरण (11) और (12) से हम पाते हैं कि $60 - 4\left(\frac{y}{2} + 1\right) - 2y = 0$

अथवा $y = \frac{56}{4} = 14$

तथा $x = \frac{y}{2} + 1 = \frac{14}{2} + 1 = 8$

अतः इस प्रश्न का हल है कि $x = 8, y = 14$ है। उपभोक्ता संतुलन में होगा (अर्थात् उसे अधिकतम संतुष्टि प्राप्त होगी जब वह वस्तु x की 8 इकाइयाँ और y की 14 इकाइयाँ खरीदता है।

<u>बोध प्रश्न 1</u>

1) (i) उद्देश्य फलन और (ii) प्रतिबन्ध की संकल्पनाओं की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

2) किसी प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्या का हल प्राप्त करने के लिए प्रतिस्थापन विधि की रूपरेखा का वर्णन कीजिए।

....

....

....

....

3) किसी प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्या का हल प्राप्त करने के लिए चरणबद्ध तरीके से लैगरांजियन गुणक विधि की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

9.3 द्वितीय कोटि प्रतिबन्ध

जैसा कि पहले भी स्पष्ट किया जा चुका है कि अभीष्टीकरण में अधिकतमीकरण तथा न्यूनतमीकरण दोनों ही सम्मिलित होते हैं। हम इन तत्वों का अधिकतमीकरण करना चाहते हैं जिनसे हमें लाभ होता है और उन तत्वों का न्यूनतमीकरण जिनसे हमें हानि होती है। उदाहरण के लिए, हम एक शहर में बस सेवा का अधिकतमीकरण करना चाहेंगे तथा प्रदूषण का न्यूनतमीकरण। एक विद्यार्थी न्यूनतम प्रयास करके अधिकतम अंक प्राप्त करना चाहेगा।

हम प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के लिए पर्याप्त शर्तें प्राप्त करना चाहते हैं। हमने देखा कि अधिकतमीकरण और न्यूनतमीकरण, दोनों स्थितियों में, प्रथम कोटि समस्याएँ समान हैं। चूँकि हम स्थिर मान/बिन्दु ज्ञात करना चाहे रहे थे, हमने लैगरांजियन फलन बनाया और उसके प्रथम कोटि अवकलजों को शून्य के बराबर रखा। द्वितीय कोटि शर्तें हमें यह निर्धारित करने में सहायता करती हैं कि किसी स्थिर बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान अधिकतम होगा अथवा न्यूनतम। आइए, अब हम द्वितीय कोटि शर्तों का अध्ययन करें। इसके लिए हमें गणित की कुछ अन्य संकल्पनाओं की आवश्यकता पड़ेगी। अब हम उनकी चर्चा करेंगे। इनमें से पहली संकल्पना है सम्पूर्ण अवकलज (Total Differential)।

सम्पूर्ण अवकल

सम्पूर्ण अवकल की संकल्पना प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण में अत्यंत उपयोगी सिद्ध होती है। सम्पूर्ण अवकल की संकल्पना की चर्चा करते हुए ध्यान रखें कि यदि $f(x,y)$

एक फलन है तो f_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$ को निरूपित करता है।

यदि $z = f(x, y)$ घात एक का एक समघाती फलन है, तो इसका सम्पूर्ण अवकल dz इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$dz = f_x d_x + f_y d_y = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot d_x + \frac{\partial z}{\partial y} d_y \text{ (लगभग)}$$

ध्यान दें कि यह सूत्र दोनों स्थितियों में लागू होता है, x तथा y स्वतंत्र चर हों अथवा निर्भर। dz, x और y में होने वाले अतिसूक्ष्म/अत्यंणु के सापेक्ष फलन $z = f(x, y)$ में होने वाले परिवर्तन को दर्शाता है। उदाहरण के लिए यदि $z = x^3 + y^3$ है, तो सम्पूर्ण अवकलज

$$dz = f_x d_x + f_y d_y = 3x^2 d_x + 3y^2 d_y$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

सम्पूर्ण अवकल के निम्नलिखित नियम अत्यंत उपयोगी सिद्ध होंगे। मान लीजिए z और w, x और y के दो फलनों को निरूपित करते हैं। इन फलनों के लिए नीचे दिए नियम सत्य होते हैं।

1) $$d(w \pm z) = dw \pm dz$$
$$= (f_x d_x + f_y d_y) \pm (g_x d_x + g_y d_y)$$

2) $$d(wz) = w.dz + z\,dw$$
$$= w(g_x d_x + g_y d_y) + z(f_x d_x + f_y d_y) \text{ (गुणनफल नियम)}$$

3) $$d\left(\frac{w}{z}\right) = \frac{z.dw - wdz}{z^2}$$

$$= \frac{z(f_x d_x + f_y d_y) - w(g_x d_x + g_x(d_y))}{z^2} \text{ (भागफल नियम)}$$

4) यदि $z = f(u)$ है तथा $u = f(x, y)$ तो $dz = f'(u) \cdot du$ होगा, जहाँ du, का अवकल है जबकि u, x और y का एक फलन है।

उदाहरण: यदि $z = u^n$ है, जहाँ $u = f(x, y)$ है, तो

$$dz = \frac{d}{dx}(u^n) \cdot du = nu^{n-1} \cdot du$$

होगा।

आइए, अब हम सम्पूर्ण अवकल के कुछ उदाहरण लें:

(1) यदि $u = 3x^3 + 2y^2 + y^3$ है तो du ज्ञात कीजिए।

हलः सम्पूर्ण अवकल du दिया है:

$$du = f_x d_x + f_y d_y = 9x^2 d_x + \left(uy + 3y^2\right) d_y$$
$$= 9x^2 d_x + y\left(u + 3y\right) d_y$$

(2) नीचे दिए फलनों के लिए y का सम्पूर्ण अवकल ज्ञात कीजिए।

a) $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ b) $w = e^{x^2 - y^2}$ c) $u = \log\left(x^2 + y^2\right)$

हलः a) $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ दिया है। भागफलन नियम द्वारा हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{z\left(f_x d_x + f_y d_z\right) - w\left(g_u d_u + f_y d_y\right)}{z^2}$$

$$= \frac{\left(x^2 + y^2\right) d\left(x^2 - y^2\right) - \left(x^2 - y^2\right) d\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(2xdx - 2ydy\right) - \left(x^2 - y^2\right)\left(2xdx + 2ydy\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$= \frac{4xy^2 dx - 4x^2 y dy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

b) यहाँ $w = e^{x^2 - y^2}$ है।

$u = x^2 - y^2$ लेने पर $w = e^u$ तथा $dw = e^u du$ (13)

प्राप्त होता है।

साथ ही $du = d\left(x^2\right) - d\left(y^2\right) = 2xdx - 2ydy$ है। (14)

समीकरण (13) और (14) से हम पाते हैं

$$dw = e^{x^2 - y^2} \cdot \left(2xdx = 2ydy\right) = 2xe^{x^2 - y^2} dx - 2ye^{x^2 - y^2} dy$$

c) $u = \log\left(x^2 + y^2\right)$

इस प्रश्न को हम निम्नलिखित सूत्र द्वारा हल करते हैं:

$$du = f_x d_x + f_y d_y = \frac{1 \times xx}{\left(x^2 + y^2\right)} dx + \frac{1 \times 2y}{\left(x^2 + y^2\right)} dy$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)} dy = \frac{2xdx + 2ydy}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{2\left(xdu + ydy\right)}{\left(x^2 + y^2\right)}$$

परन्तु प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की प्रथम कोटि शर्तों का अध्ययन करने के लिए हमें प्रथम कोटि अवकलों के परिकलन की आवश्यकता होगी।

यहाँ हम एक आधारभूत परिणाम देते हैं। यदि $z = f(x, y)$ है, तो इसका द्वितीय कोटि सम्पूर्ण अवकल सूत्र

$$d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_y d^2 y$$

द्वारा प्राप्त होता है।

आइए, अब हम प्रतिबन्धित अभीष्टतम के लिए द्वितीय कोटि पर्याप्त शर्तों पर विचार करें। आपसे अनुरोध है कि आगे बढ़ने से पहले खंड 3 की इकाई 8 को एक बार पुनः ध्यानपूर्वक देख लेंकि क्योंकि इस इकाई में सम्पूर्ण अवकलों तथा द्विघातीय समघात (quadratic forms) की संकल्पनाओं की चर्चा की गई थी और ये संकल्पनाएँ प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण में अत्यंत उपयोगी सिद्ध होंगी।

प्रारंभ करने के लिए, मान लीजिएः

$$z = f(x, y)$$

दिया हुआ उद्देश्य फलन है तथा

$$g(x, y) = c$$

दिया हुआ प्रतिबन्ध है। यहाँ c एक अचर है।

हम सर्वप्रथम लैगरांजियन फलन

$$L = f(x, y) + \lambda\left[c - g(x, y)\right]$$

ज्ञात करते हैं। L के स्थिर मान ज्ञात करने के लिए अनिवार्य शर्तें हैंः

$$L_x = f_x - \lambda g_x = 0$$

$$L_y = f_y - \lambda g_y = 0$$

$$L_\lambda = c - g(x, y) = 0$$

क्योंकि L तीन चरों λ, x, y का एक फलन है।

किसी स्थिर बिन्दु के लिए द्वितीय कोटि अनिवार्य एवं पर्याप्त शर्तें, सम्पूर्ण अवकल की बीजगणितीय चिन्ह पर निर्भर करती हैं, जैसा कि हमने खंड 3 की इकाई में हमने अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की स्थिति में पढ़ा है। परन्तु प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की स्थिति में एक अंतर है। इसमें, हम d^2z के चिन्ह तथा इसकी निश्चितता (definite) अथवा अर्द्ध–निश्चितता (semi-definite) के बारे में जानकारी की आवश्यकता पड़ती है। सभी मानों के लिए नहीं, केवल dx और dy के मानों के लिए जो कि रैखिक प्रतिबन्ध $g_x dx + g_y dy = 0$ को संतुष्ट करते हैं।

द्वितीय कोटि *अनिवार्य* शर्तें इस प्रकार हैं:

z के अधिकतम के लिए, d^2z ऋणात्मक अर्द्ध–निश्चित है जबकि $dg = 0$ है।

z के न्यूनतम के लिए, d^2z धनात्मक अर्द्ध–निश्चित है जबकि $dg = 0$ है।

द्वितीय कोटि *पर्याप्त* शर्तें इस प्रकार हैं:

z के अधिकतम के लिए, d^2z ऋणात्मक निश्चित है जबकि $dg = 0$ है।

z के न्यूनतम के लिए, d^2z धनात्मक निश्चित है जबकि $dg = 0$ है।

अब हम अपनी चर्चा द्वितीय कोटि पर्याप्त शर्तों पर करते हैं।

इकाई 8 में हमने देखा कि प्रथम कोटि पर्याप्त शर्तें हैज़ियन सारणिक (Hessian determinant) के प्रयोग के व्यक्त की जा सकती हैं। प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के संदर्भ में बार्डर्ड हैज़ियन (*bordered* Hessian) प्राप्त होता है। यह सारणिक मूल हैज़ियन सारणिक में सबसे ऊपर एक अतिरिक्त तथा बाईं ओर एक संलग्न करके प्राप्त होता है। इसके अतिरिक्त, हमने द्वितीय कोटि अवकल को इस प्रकार व्यक्त किया था:

फलन $z = f(x, y)$ के लिए द्वितीय कोटि अवकल

$$d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_y d^2y.$$

होता है।

अब स्मरण करें कि पीछे की गई चर्चा में हमने निम्नलिखित प्रथम कोटि शर्तों का उल्लेख किया था:

$$L_x = f_x - \lambda g_x = 0$$

$$L_y = f_y - \lambda g_y = 0$$

$$L_\lambda = c - g(x, y) = 0$$

इन अवकलजों के पुनः आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर हम पाते हैं:

$$L_{xx} = f_{xx} - \lambda g_{xx}$$

$$L_{yy} = f_{yy} - \lambda g_{yy}$$

$$L_{xy} = f_{xy} - \lambda g_{xy} = L_{yx}$$

लैगरांजियन के प्रयोग से, हम d^2z को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

$$d^2z = L_{xx}dx^2 + L_{xy}dxdy + L_{yx}dydx + L_{yy}dy^2$$

इस स्थिति में यदि हम परिवेशित (बार्डर्ड) हेसियन लगाते हैं तो हमें निम्न शर्तें प्राप्त होती हैं:

d^2z धनात्मक निश्चित होगा जबकि $dg = 0$ हो, यदि सारणिक $\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} < 0$ हो।

ऋणात्मक निश्चितता के लिए भी शर्त इसी प्रकार प्राप्त की जा सकती है, केवल परिवेशित (बार्डर्ड) हेसियन का चिन्ह उल्टा अर्थात् > 0 हो जाएगा।

n–चरों वाली व्यापक स्थिति में सापेक्ष प्रतिबन्धित अभीष्टतम के लिए ये परिणाम इस प्रकार हैं:

मान लीजिए उद्देश्य फलन

$$z = f(x_1, ..., x_n)$$

जबकि प्रतिबन्ध $g(x_1, ..., x_n) = c$ है।

स्वाभाविक रूप से, लैगरांजियन L

$$L = f(x_1, ..., x_n) + \lambda [c - g(x_1, ..., x_n)]$$

होगा।

अधिकतम के लिए प्रथम कोटि शर्तें हैं:

$$L_\lambda = L_1 = ... = L_n = 0$$

यहाँ पादांक उस चर को निरूपित करते हैं जिसके सापेक्ष L का आंशिक अवकलज लिया गया है।

न्यूनतम के लिए भी प्रथम कोटि शर्तें यही हैं।

अधिकतम के लिए द्वितीय कोटि पर्याप्त शर्तें इस प्रकार हैं:

$$|\bar{H}_2| > 0; |\bar{H}_3| < 0; |\bar{H}_4| > 0 ..... (-1)^n |\bar{H}_n| > 0$$

न्यूनतम के लिए द्वितीय कोटि शर्तें इस प्रकार हैं:

$$|\bar{H}_1|, |\bar{H}_2|, ..., |\bar{H}_n| < 0$$

यहाँ H के ऊपर लगाया गया चिन्ह '–' परिवेशित (बार्डर्ड) हेसियन को निरूपित करता है तथा पादांक सारणिक की विभिन्न कोटियों को निरूपित करता है।

बोध प्रश्न 2

1) परिवेशित (बार्डर्ड) हेसियन क्या है?

....

....

....

....

2) प्रतिबन्धित न्यूनतम के लिए द्वितीय कोटि पर्याप्त शर्तें बताइए।

....

....

....

....

9.4 अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग

9.4.1 उपभोक्ता का संतुलन

हम पहले एक सरल स्थिति पर विचार करते हैंः एक बजट प्रतिबन्ध के तहत एक उपयोगिता फलन (utility function) का अधिकतमीकरण। मान लीजिए उपयोगिता फलन $u(x, y)$ तथा बजट प्रतिबन्ध $p_x x + p_y y = M$ है।

लैगरांजियन गुणक विधि द्वारा हम पाते हैं कि अनिवार्य प्रथम कोटि शर्तों के लिए $\frac{u_x}{u_y} = \frac{p_x}{p_y}$ होना चाहिए तथा x और y के मान बजट प्रतिबन्ध को संतुष्ट करने चाहिए। द्वितीय कोटि शर्तों में फलन u के द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज सम्मिलित होंगे परन्तु ये आंशिक अवकलज x, y के उन मानों के लिए परिभाषित होंगे जो प्रतिबन्धों को संतुष्ट करते हों। प्रतिबन्ध समीकरण $p_x x + p_y y = M$ से हम पाते हैं कि $p_x dx + p_y dy = 0$ है। इससे हमें $dx = -\frac{p_y}{p_x} dy$ है। आइए, अब हम पुनः द्विघातीय समघात की संकल्पना की चर्चा करें। अधिकतम उपयोगिता के लिए स्थिर बिन्दु ऐसे होने चाहिए जिनके लिए द्विघातीय समघात $d^2u = u_{xx} + 2u_{xy}dxdy + u_{yy}dy^2$ ऋणात्मक हैं। विचाराधीन प्रतिबन्धित अधिकतमीकरण समस्या के लिए हम सभी dx और dy का परीक्षण नहीं करते; अपितु हम उन्हीं dx और dy तक सीमित रहते हैं जो प्रतिबन्ध को संतुष्ट करते हैं, अर्थात् जिनके लिए समीकरण $dx = -\frac{p_y}{p_x} dy$ संतुष्ट होता हो। यह सुनिश्चित करने के लिए प्रतिस्थापन द्वारा यह देखा जा सकता है कि

$$u_{xx}\left(\frac{p_y}{p_x}dy\right)^2 + 2u_{xy}\left(\frac{p_y}{p_x}dy\right)dy + u_{yy}dy^2$$

$$= \left[\frac{p^2{}_y}{p^2{}_x}u_{xx} - 2\frac{p_y}{p_x}u_{yy}\right]dy^2$$

$$= (u_{xx}p_y^2 - 2u_{xy}p_x p_y + u_{xy}p_y^2$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & u_{xx} & u_{xy} \\ p_y & u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}\frac{dy^2}{p_x^2}$$

होना चाहिए।

यह सारणिक स्वाभाविक कारणों से, परिवेशित (बार्डर्ड) हेसियन सारणिक के नाम से जाना जाता है।

एक अधिकतम के लिए d^2u द्वारा परिभाषित द्विघातीय समघात ऋणात्मक होनी चाहिए; जब फलन के साथ एक प्रतिबन्ध भी हो, तो द्विघातीय समघात परिवर्तित हो जाती है परन्तु यह भी ऋणात्मक होनी चाहिए। क्योंकि d^2y और p^2x दोनों धनात्मक हैं और पूरा व्यंजक एक ऋणात्मक चिन्ह से प्रारंभ होता है, एक अधिकतम से परिवेशित हैसियन सारणिक **धनात्मक** होनी चाहिए। इसी तर्क का प्रयोग करते हुए हम प्राप्त करते हैं कि एक न्यूनतम के लिए यह सारणिक **ऋणात्मक** हो सकती है।

उपयोगिता अधिकतमीकरण समस्या जिसकी अभी हमने चर्चा की है, दो कारणों से सरल हैः (i) इसमें प्रतिबन्ध रैखिक है; और (ii) और इसमें केवल दो ही चर लिए हैं। उपयोगिता का एक प्रदत्त स्तर प्राप्त करने के लिए न्यूनतम कीमत ज्ञात करने की समस्या एक अरैखिक प्रतिबन्ध वाली न्यूनतमीकरण समस्या है। औपचारिक रूप से हम इस समस्या को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

यदि $u(x, y) = \bar{u}$ है तो $p_x x + p_y y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

यहाँ दिया हुआ प्रतिबन्ध एक उदासीनता वक्र (indifference curve) है जो मूल बिन्दु के सापेक्ष उत्तल है। ध्यान रहे कि कोई भी समस्या जिसमें $n, n > 2$ चर हों, ऊपर दी गई विधि द्वारा हल नहीं की जा सकती। इन दोनों प्रकार की समस्याओं के लिए आवश्यक गणित अत्यंत जटिल है। अतः, हम यहाँ केवल व्यापक परिणाम का उल्लेख, बिना उत्पत्ति के करेंगे।

मान लीजिए, दी हुई समस्या इस प्रकार हैः

प्रतिबन्ध $g(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \neq 0$ के अंतर्गत $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि g एक अरैखिक फलन है। हम स्थिति में द्वितीय कोटि शर्त है कि नीचे दिया गए परिवेशित हैसियन सारणिक

$$(D) = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_n \\ g_1 & f_{11} - \lambda g_{11} & f_{12} - \lambda g_{12} & f_{1n} - \lambda g_{1n} \\ g_2 & f_{21} - \lambda g_{21} & f_{22} - \lambda g_{22} & f_{nn} - \lambda g_{2n} \\ g_n & f_{n1} - \lambda g_{1n} & f_{n2} - \lambda g_{2n} & f_{nn} - \lambda g_{2n} \end{vmatrix}$$

का चिन्ह $(-1)^n$ हो और $t \geq 2$ के लिए उपसारणिकों के चिन्ह $(-1)^t$ हों, जहाँ t, मुख्य उपसारणिक की कोटि को निरूपित करता है।

न्यूनतम के लिए D और इसके सभी मुख्य उपसारणिक ऋणात्मक होनी चाहिए। आइए, हम इस सिद्धान्त का प्रयोग किसी दिए हुए उपयोगिता स्तर के लिए लागत को न्यूनतम करने की समस्या को हल करने के लिए करें।

9.4.2 लागत तथा आपूर्ति

L और K चर आगतों वाला एक मसृण उत्पादन फलन लीजिए जहाँ L और K क्रमशः श्रम और पूँजी को निरूपित करते हैं। मान लीजिए उत्पादन फलन $Q = Q(L, K)$

है, जहाँ $Q_L, Q_K > 0$ है यदि w और r क्रमशः श्रम और पूँजी की कीमत हे, तो यह समस्या लागत

$$C = wL + rK$$

का न्यूनतमीकरण उत्पादन प्रतिबन्ध $Q(L, K) = Q_0$ करने की है।

अतः लैंगरांजियन फलन

$$Z = wL + rK + \lambda\left[Q_o - Q(L,K)\right].$$

है। प्रथम कोटि शर्तें हैं:

$$Z_\lambda = Q_o - Q(L,K) = 0$$

$$Z_L = w - \lambda\frac{\partial Q}{\partial L} = 0$$

$$Z_K = r - \lambda\frac{\partial Q}{\partial K} = 0$$

अंतिम दो शर्तों से हमें नीचे दी गई शर्त प्राप्त होती है:

$$\frac{w}{\partial Q/\partial L} = \frac{r}{\partial Q/\partial K} = \lambda$$

इस समीकरण में हर आगतों के सीमांत उत्पाद को व्यक्त करते हैं।

अतः, आगतों के अभीष्टतम बिन्दुओं के संयोजन पर प्रत्येक आगत के लिए कीमत–सीमांत उत्पाद अनुपात (price-marginal product ratio) बराबर होना चाहिए। क्योंकि यह अनुपात प्रति सीमांत उत्पाद को व्यक्त करता है, लैंगरांजियन की व्याख्या हम अभीष्टतम अवस्था में उत्पादन की सीमांत लागत के रूप में की जा सकती है।

इस समीकरण को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है:

$$\frac{w}{r} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

इस प्रकार प्राप्त समीकरण के अनुसार सीमांत उत्पादों का अनुपात, जोकि तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर है, आगत कीमतों के अनुपात के बराबर होती है।

<u>बोध प्रश्न 3</u>

1) संक्षेप में बताइए कि उपभोक्ता संतुलन, लैगरांजियन गुणक विधि के प्रयोग द्वारा किस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

....

....

....

....

2) प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की संकल्पना का प्रयोग किसी फर्म के द्वारा आगतों के न्यूनतम लागत संयोजन की व्याख्या करने के लिए किस प्रकार किया जा सकता है, स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

9.5 सारांश

इस इकाई में हमने पिछली इकाई में अभीष्टीकरण पर की गई चर्चा को आगे बढ़ाया। पिछली इकाई में हमने अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण पर चर्चा की थी। इस इकाई में हमें प्रतिबन्धों की उपस्थिति में अभीष्टीकरण के बारे में अध्ययन करेंगे। जैसा कि हमने देखा, प्रतिबन्धों के कारण चरों पर कुछ सीमाएँ लागू हो जाती हैं जिनके कारण प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण, व्यापक रूप से, अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण से भिन्न हो जाता है। प्रतिबन्ध (जिन्हें हम अतिरिक्त शर्तें/सम्बन्ध भी कह सकते हैं) अनिवार्य रूप से, उद्देश्य फलन के प्रांत को, अतः उसके परिसर को भी सीमित कर देते हैं।

इसके पश्चात् इस इकाई में स्थिर मान ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा की। इस बात का उल्लेख किया गया कि अत्यंत सरल समस्याओं/प्रश्नों/स्थितियों में प्रतिबन्धों की शर्तों को उद्देश्य फलन में प्रतिस्थापित करना, स्थिर बिन्दु ज्ञात करने की एक सरल विधि हो सकती है, परन्तु यह विधि जटिल स्थितियों में कारगर सिद्ध नहीं होती। ऐसी स्थितियों में हल ज्ञात करने के लिए एक महत्वपूर्ण तथा अर्थशास्त्र के छात्रों के लिए आधारभूत विधि, लैगरांजियन गुणक विधि पर विस्तारपूर्वक चर्चा की गई। लैगरांजियन फलन किस प्रकार बनाया लिखा जाता है, इसकी व्याख्या की गई तथा गुणक की संकल्पना की भी चर्चा की गई।

तत्पश्चात्, इस इकाई में हमने प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के लिए द्वितीय कोटि शर्तों की चर्चा की। परिवेशित हेसियन की संकल्पना के बारे में तथा प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के द्वितीय कोटि शर्तों को प्राप्त करने में इसके प्रयोग पर चर्चा की गई। अर्थशास्त्र में प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के उदाहरण बहुतायत में है। यह कहा जा सकता है कि प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण अर्थशास्त्र में एक महत्वपूर्ण तथा केन्द्रीय उपकरण एवं विधि है।

9.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) उपभाग 9.2.1 देखें।

2) उपभाग 9.2.1 देखें।

3) उपभाग 9.2.3 देखें।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 9.3 देखें।

2) भाग 9.3 देखें।

बोध प्रश्न 3

1) उपभाग 9.4.1 देखें।

2) उपभाग 9.4.1 देखें।

इकाई 10 द्वैतता*

संरचना

10.0 उद्देश्य

10.1 प्रस्तावना

10.2 तुलनात्मक स्थैतिकी की संकल्पना

10.2.1 गैर–अभीष्टीकरण के संदर्भ में तुलनात्मक स्थैतिकी

10.2.2 अभीष्टीकरण एवं तुलनात्मक स्थैतिकी

10.3 अधिकतम मान फलन एवं आवरण प्रमेय

10.3.1 अधिकतम मान फलन

10.3.2 अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के लिए आवरण प्रमेय

10.3.3 प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के लिए आवरण प्रमेय

10.3.4 लैगरांजियन गुणक की व्याख्या

10.4 अधिकतम मान फलन एवं आवरण प्रमेय के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोग

10.4.1 अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन

10.4.2 रॉय की समिका

10.4.3 हॉटेलिंग का उपप्रमेय

10.5 द्वैतता तथा अभीष्टीकरण

10.5.1 मूल समस्या

10.5.2 द्वैत समस्या

10.6 द्वैतता के कुछ अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोग

10.6.1 प्रतिपूर्ति माँग फलन

10.6.2 शैफार्ड का उपप्रमेय

10.7 सारांश

10.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

10.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित से भली–भांति अवगत हो जाएँगे:

- तुलनात्मक स्थैतिकी (comparative statics) की संकल्पना से तथा स्थैतिकी (statics) और तुलनात्मक स्थैतिकी के बीच अंतर से;
- अभीष्टीकरण (Optimisation) तथा ग़ैर– अभीष्टीकरण (non-optimisation) स्थितियों के संदर्भ में तुलनात्मक स्थैतिकी के अंतर से;
- अधिकतम मान फलन (maximum value function) की परिभाषा से;

* सौगतो सेन, इग्नू

- आवरण प्रमेय (Envelope theorem) से;
- अभीष्टीकरण विश्लेषण में द्वैतता (duality) की संकल्पना से;
- अधिकतम मान फलन, आवरण प्रमेय द्वैतता के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोगों से।

10.1 प्रस्तावना

आपका परिचय किसी दिए हुए फलन के अभीष्टीकरण की विधियों से करवाया जा चुका है यदि अभीष्टीकरण अप्रतिबन्धित है। इसी प्रकार, पिछली इकाई में हमने सप्रतिबन्ध अभीष्टीकरण के बारे में अध्ययन किया। इस इकाई में हम अभीष्टीकरण से सम्बन्धित कुछ विषयों पर बात करेंगे। इसके लिए हमें यह ध्यान रखना होगा कि एक अभीष्टीकरण बिन्दु एक विशेष प्रकार की संतुलन स्थिति है।

हम जानते हैं कि एक संतुलन अवस्था एक ऐसा विश्राम बिन्दु होता है जिसमें किसी भी घटक के पास अपनी स्थिति अथवा अपने व्यवहार बदलने का कोई कारण न हो। परन्तु हमारे लिए यह एक रुचि का विषय है कि प्राचलों में होने वाले परिवर्तनों के संतुलन मान किस प्रकार प्रभावित होते हैं। उदाहरण के लिए बजट, के प्रतिबन्धों के अधीन उपयोगिता अधिकतमीकरण पर विचार कीजिए। इस पर विचार करने पर हमें माँग फलन प्राप्त होता है। किसी वसतु की माँग, वस्तु की कीमत तथा उपभोक्ता की आय का एक फलन है। परन्तु उपयोगिता अधिकतमीकरण के संदर्भ में, कीमत तथा अन्य प्राचल है। हम देख सकते हैं कि कीमत तथा/अथवा आय में परिवर्तन होने पर उपयोगिता किस प्रकार प्रभावित/परिवर्तित होती है। तुलनात्मक स्थैतिकी प्राचलों में होने वाले परिवर्तन के फलस्वरूप संतुलन मानों में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन करती है। यह अभीष्टीकरण अथवा ग़ैर–अभीष्टीकरण, किसी भी संदर्भ में हो सकता है।

अगले भाग में, हम तुलनात्मक स्थैतिकी की संकल्पना पर चर्चा करेंगे, अभीष्टीकरण एवं ग़ैर–अभीष्टीकरण दोनों संदर्भ में। भाग 10.3 में अधिकतम मान फलन के बारे में चर्चा की जाएगी। अधिकतम मान फलन अभीष्टीकरण के संदर्भ में तुलनात्मक स्थैतिकी विश्लेषण में प्रयोग होने वाली एक महत्वपूर्ण संकल्पना है। मूल रूप से इससे हमें यह जानने में मदद मिलती है कि अभीष्टीकरण से संबद्ध किसी समस्या/प्रश्न में, प्राचलों में होने वाले परिवर्तन के सापेक्ष उद्देश्य फलन में किस प्रकार परिवर्तन होता है। इसी भाग में हम आगे, अत्यंत महत्वपूर्ण प्रमेय अथवा सिद्धान्त, आवरण प्रमेय पर चर्चा करते हैं जो हमें अभीष्टीकरण विषय में अत्यंत सूक्ष्म अंतर्दृष्टि प्रदान करता है। आवरण प्रमेय की चर्चा अभीष्टीकरण एवं ग़ैर–अभीष्टीकरण दोनों संदर्भों में की गई है। इस भाग में प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्या में लैगरांजियन गुणक की व्याख्या भी उपलब्ध कराई गई है। इसके अगले भाग में अधिकतम मान फलन तथा आवरण प्रमेय के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है तथा अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन, रॉय की सर्वसमिका तथा होटेलिंग के उपप्रमेय की चर्चा भी की गई है।

भाग 10.5 में प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के संदर्भ में एक महत्वपूर्ण संकल्पना, द्वैतता पर चर्चा की गई है। मौटे तौर पर यह हमें एक दी हुई सप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण को उसके द्वैत में परिवर्तित करने में मदद करती है, जिससे बेहतर अंतर्दृष्टि तथा परिणाम प्राप्त होते हैं। एक मूल अभीष्टीकरण समस्या/प्रश्न को उसके द्वैत में परिवर्तित करने

का अर्थ है एक नई अभीष्टीकरण समस्या प्राप्त करना जिसमें मूल अधिकतमीकरण (न्यूनतमीकरण) समस्या, एक न्यूनतमीकरण (अधिकतमीकरण) समस्या में परिवर्तित हो जाती है जिसके मूल समस्या का प्रतिबन्ध नई द्वैत समस्या के उद्देश्य फलन का रूप ले लेता है तथा मूल समस्या के प्राचल, नए उद्देश्य फलन के स्वतंत्र चर बन जाते हैं। यहाँ द्वैतता की संकल्पना को उपयोगिता अधिकतमीकरण के उदाहरण के माध्यम से समझाया गया है। इसमें यह दर्शाया गया है कि उपयोगिता अधिकतमीकरण समस्या का द्वैत व्यय न्यूनतमीकरण समस्या है। अंत में, भाग 10.6 में द्वैतता के सिद्धान्तों का प्रयोग कुछ अर्थशास्त्रीय परिस्थितियों में करता है तथा आपूर्तित माँग फलन तथा शेफर्ड उपप्रमेय की व्याख्या की गई है।

10.2 तुलनात्मक स्थैतिकी की संकल्पना

अब आप सप्रतिबन्ध तथा अप्रतिबन्धित, दोनों प्रकार की अभीष्टीकरण की संकल्पना से भली भांति परिचित हैं। आप संतुलन की संकल्पना से भी परिचित हैं जो वास्तव में एक विश्राम की अवस्था है। आपने पिछली इकाइयों में तुलनात्मक के बारे में पढ़ा है जिसका अर्थ है कि चर समय पर निर्भर नहीं है। इस भाग में हम तुलनात्मक स्थैतिकी के बारे में जानेंगे जिसका अर्थ (जैसे कि नाम से ही स्पष्ट हो रहा है) हैः दो स्थैतिक स्थितियों की परस्पर तुलना। इसका अभिप्राय यह है कि स्थैतिकी एक दी हुई स्थिति में जहाँ संतुलन विद्यमान है अर्थात् विश्राम की स्थिति है और हमें संतुलन में अंतर्जात चरों के मान ज्ञात हैं; यदि ऐसी स्थिति में प्राचलों के मान में परिवर्तन होता है, तो क्या होगा? उदाहरण के लिए, एक माँग–आपूर्ति परिदृश्य में, मान लीजिए हमें वस्तुओं की मात्राओं का, जिनका आदान–प्रदान हो रहा है, संतुलन मान ज्ञात करना है और प्रचलित संतुलन कीमतें भी, तो आय या अन्य वस्तुओं की कीमतें इत्यादि प्राचलों में परिवर्तनों का क्या परिणाम होगा? इसी प्रकार, एक दिए हुए अभीष्टीकरण के परिदृश्य में, उदाहरण के लिए, उपभोक्ता द्वारा उपयोगिता अधिकतमीकरण की स्थिति में, मान लीजिए, हमें वस्तुओं की मात्राओं के वह अभीष्ट मान ज्ञात हैं जिनके लिए बजट प्रतिबन्धों के रहते, उपयोगिता अधिकतम है तो बजट प्रतिबन्धों में उपस्थित प्राचलों में जैसे कि कीमतों और आय में परिवर्तन का क्या परिणाम होगा? नीचे दिए उपभाग में हम एक ऐसे संदर्भ में तुलनात्मक स्थैतिकी की चर्चा करेंगे जहाँ अभीष्टीकरण, यद्यपि अंतर्निहित रूप से उपस्थित है, परन्तु प्रत्यक्ष रूप से विचार में नहीं लिया जाता। इससे अगले उपभाग में हम एक अभीष्टीकरण के संदर्भ में तुलनात्मक स्थैतिकी पर विचार करेंगे।

10.2.1 गैर–अभीष्टीकरण के संदर्भ में तुलनात्मक स्थैतिकी

तुलनात्मक स्थैतिकी का सम्बन्ध, जैसा कि हमने देखा, विभिन्न संतुलन अवस्थाओं की तुलना से है जो कि प्राचलों एवं बहिर्जात चरों के विभिन्न मानों से संबद्ध है। हम एक दी हुई संतुलन अवस्था से प्रारंभ करते हैं और देखते हैं कि एक असंतुलित करने वाले परिवर्तन का क्या परिणाम होता है। प्रारंभिक संतुलन अवस्था को अशांत/उत्तेजित किया जाएगा तथा फलस्वरूप, बहिर्जात चरों में कुछ अनुकूलन होगा। यदि हम यह मान लें कि प्राचलों और बहिर्जात चरों के मानों में परिवर्तन के परिणामस्वरूप एक नई संतुलन अवस्था प्राप्त होगी, तो तुलनात्मक स्थैतिकी विश्लेषण यह जाँच करेगा कि नई संतुलन अवस्था की तुलना पुरानी संतुलन अवस्था के सापेक्ष किस प्रकार की

जा सकती है। यदि हमारी रुचि केवल परिवर्तन की दिशा जानने में है तो तुलना गुणात्मक होगी; यदि हम परिवर्तन की दिशा और मात्रा दोनों जानना चाहें तो यह तुलना परिमाणात्मक होगी।

यदि हम माँग और आपूर्ति फलनों के एक युग्म को एक साथ हल करें तो हमें संतुलन कीमत तथा संतुलन मात्रा प्राप्त होती हैं। आलेखीय रूप में, यह माँग और आपूर्ति वक्रों का उभयनिष्ठ बिन्दु होता है तथा हमें संतुलन कीमत तथा मात्रा प्रदान करता है। यदि इनमें से कोई एक वक्र, मान लीजिए माँग वक्र, स्थानांतरित हो जाए तो क्या होगा? हमें एक नया उभयनिष्ठ बिन्दु प्राप्त होगा जोकि स्थानांतरित माँग वक्र और आपूर्ति वक्र के लिए संतुलन कीमत और मात्रा को दर्शाएगा।

यह तुलनात्मक स्थैतिकी का एक ऐसा उदाहरण है जिसमें हम दो संतुलन अवस्था संतुलन विन्यासों की तुलना करते हैं। इसे स्थैतिकी कहा जाता है क्योंकि इस विश्लेषण में समय की कोई भूमिका नहीं है। हम इसे एक ऐसी समस्या के रूप में देख सकते हैं जिसमें माँग वक्र की दो अलग–अलग स्थितियाँ सम्मिलित हैं जोकि किसी प्राचल, मान लीजिए आय, के दो अलग–अलग मानों से संबद्ध हैं। हम प्राचल के मान में होने वाले परिवर्तन के फलस्वरूप संतुलन कीमत तथा मात्रा में होने वाले परिवर्तन का निर्धारण करना चाहते हैं।

आइए, अब हम एक रैखिक माँग और आपूर्ति प्रतिमान पर विचार करें। हम पहले प्रतिमान के समीकरण लिखते हैं:

उदाहरण 1

$q – D(p,y) – 0$, माँग फलन (1)

$q – S(p) = 0$, आपूर्ति फलन (2)

यदि हम इन दोनों समीकरणों को एक साथ हल करें तो हमें y के किसी भी दिए हुए मान के लिए, p और q के संतुलन मान ज्ञात कर सकते हैं। यदि दोनों समीकरण रैखिक हो तो यह अत्यंत सरल है।

मान लीजिए दिए हुए समीकरण हैं:

$q = a + bp + \alpha y$, माँग फलन (3)

$q = c + dp$ आपूर्ति फलन (4)

अब $q - bp = a + \alpha y$

$q - dp = c$

$$\therefore q = \frac{\begin{vmatrix} a+\alpha y & -b \\ c & -d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -d \end{vmatrix}} = \frac{ad - \alpha yd + bc}{b-d}$$

$$= \frac{bc-ad}{b-d} - \frac{\alpha d}{b-d} y$$

$$= \frac{ad-bc}{d-b} + \frac{\alpha d}{d-b} y$$

$$\text{Also, } p = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+\alpha y \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{c-a-\alpha y}{b-d} = \frac{c-a}{b-d} - \frac{\alpha}{b-d} y$$

$$= \frac{a-c}{d-b} + \frac{\alpha}{d-b} y$$

अतः, इन समीकरणों का हल है: $p = \frac{a-c}{d-b} + \frac{\alpha}{d-b} y; q = \frac{ad-bc}{d-b} + \frac{\alpha d}{d-b} y.$

अब $\frac{dp}{dy} = \frac{\alpha}{d-b}$ है : d, आपूर्ति वक्र की ढाल है जो कि सामान्यतः धनात्मक होती है; b माँग वक्र की ढाल है, इसलिए ऋणात्मक होगी। अतः, $d - b > 0$ होगा। यदि α धनात्मक हो (अर्थात् आय की माँग लोच धनात्मक हो), तो हम पाते हैं कि कीमत का उच्च संतुलन मान आय के उच्च मान से संबद्ध होता है। हम इसी प्रकार का विश्लेषण, संतुलन मात्रा q के लिए भी कर सकते हैं।

आइए, अब हम एक अरैखिक प्रतिमान पर विचार करें।

जब हमारे पास रैखिक समीकरण न हों, जैसे कि समीकरण (3) और (4) में थे, तो उनका हल ज्ञात करना उतना सरल नहीं होगा। हालाँकि तुलनात्मक स्थैतिकी के लिए बिल्कुल सही (exact) हल की आवश्यकता नहीं होती, हमारे लिए केवल प्राचल आय के सापेक्ष संतुलन कीमत और संतुलन मात्रा का अवकलज ज्ञात करना ही पर्याप्त होता है। क्या हम बिना सही हल ज्ञात किए इस हल के, प्राचल के सापेक्ष, अवकलज ज्ञात कर सकते हैं:

इस प्रश्न का उत्तर "हाँ" है, यदि हम अंतर्जात फलन प्रमेय की मदद लें।

यदि $f^1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots\ldots, a_t)$

$f^2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots\ldots, a_t)$

$f^n(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n; a_{1,} a_2, \ldots\ldots.., a_t)$

फलन

$\left(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots.., x_n^0; a_{1,}^0 a_2^0, \ldots\ldots.., a_t^0\right)$ and if $f^1\left(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots.., x_n^0; a_{1,}^0 a_2^0, \ldots\ldots.., a_t^0\right) = 0$

के लिए संततत: अवकलनीय फलन है और यदि

यदि $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ है जहाँ

$$j = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \ldots\ldots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \ldots\ldots & f_n^2 \\ . & . & \ldots\ldots & \\ f_1^n & f_2^n & \ldots\ldots & f_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \text{ where } f = \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

है तो हमें $\left(a_{1,}^0 a_2^0, \ldots\ldots.., a_t^0\right)$ का एक प्रतिवेश R प्राप्त होगा और फलनों का एक (अद्वितीय) समुच्चय $h^1(a_{1,} a_2, \ldots\ldots.., a_t)$, $I = 1, 2, \ldots\ldots, n$ जहाँ $x_1 = h^1$ है तथा

i) $x_1^0 = h\left(a_{1,}^0 a_2^0, \ldots\ldots.., a_t^0\right)$, $i = 1, 2, \ldots\ldots.n.$

ii) $f^1\left[h^1, h^2, \ldots\ldots..., h^n; a_1, a_2, \ldots\ldots..a_t\right] = 0$ for all $a_1 \in R$

iii) h^1 R पर संततत: अवकलनीय हैं।

इस जटिल कथन का वास्तविक अथवा सरल अर्थ यह है कि किसी समीकरण के समुच्चय, जिन्हें अंतर्जात फलनों के रूप में लिखा गया हो, का हल का अस्तित्व सुनिश्चित है, यह हल प्रत्येक चर को प्राचल का फलन बना देता है; और जब इस हल अर्थात् इन चरों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित किया जाता है, तो वे सर्वसमिकाओं में परिवर्तित हो जाते हैं जिससे समिकाओं के दोनों पक्षों का अवकलज करना और उन्हें एक दूसरे के समान रखना संभव हो जाता है। यह सामान्य समीकरण में संभव नहीं है। उदाहरण के लिए, हम देख सकते हैं कि समीकरण $x^2 - 4x + 3 = 0$ का हम अवकलन ज्ञात करें, तो इसके अवकलज $2x - 4$ का मान समीकरण के हल $x = 1$ अथवा $x = 3$ के लिए शून्य नहीं है।

इन परिणामों के लिए अनिवार्य शर्त यह है कि जैकोबियन सारणिक (Jacobian determinant) शून्य न हो, जो यह सुनिश्चित करना है कि समीकरण स्वतंत्र है और इनका हल का अस्तित्व है। हम यहाँ बर्हिजात हल की आवश्यकता नहीं है।

आइए, अब हम इस प्रमेय का प्रयोग समीकरणों (1) और (2) हल करने के लिए कहें।

पहले हम इन समीकरणों को व्यापक रूप में लिखते हैं जिससे अंतर्जात फलन प्रमेय की प्रासंगिकता सरलता से देखी जा सके:

$$f^1(q, p, y) = q - D(p, y) = 0 \quad (1)$$

$$f^2(q, p, y) = q - S(p) = 0 \quad (2)$$

अंतर्जात फलन प्रमेय $q(y)$ तथा $p(y)$ प्राप्त होते हैं जिन्हें (1) और (2) में रखने पर

हम प्राप्त करते हैं:

$$q(y) - D(p,(y), y) = 0$$

$$q(y) - S(p,(y)) = 0$$

ध्यान दें कि यह सर्वसमिकाएँ हैं।

इनका अवकलन करने पर हम पाते हैं कि:

$$\frac{dq}{dy} - \frac{dD}{dp}\frac{dp}{dy} = \frac{dD}{dy}$$

$$\frac{dq}{dy} - \frac{dS}{dp}\frac{dp}{dy} = 0$$

यह दो चरों $\frac{dq}{dy}$ और $\frac{dp}{dy}$ में दो रैखिक समीकरण हैं।
इन्हें क्रैमर के नियम द्वारा हल करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dq}{dy} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dD}{dy} & -\frac{dD}{dp} \\ 0 & -\frac{dS}{dp} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{dD}{dp} \\ 1 & -\frac{dS}{dp} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{dD}{dy}\frac{dS}{dp}}{\frac{dS}{dp} - \frac{dD}{dp}}$$

और $$\frac{dq}{dy} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{dD}{dy} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{dD}{dp} \\ 1 & -\frac{dS}{dp} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{dD}{dy}}{\frac{dS}{dp} - \frac{dD}{dp}}$$

यहाँ हमने गुणांकों के सारणिक से विभाजन किया है। हमारी प्रक्रिया/विधि के लिए यह आवश्यक है कि इस सारणिक का मान शून्य हो। क्योंकि जैकोबियन सारणिक (Jacobian determinant)

$$j \equiv \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial q} & \frac{\partial f^1}{\partial p} \\ \frac{\partial f^2}{\partial q} & \frac{\partial f^2}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial q} & -\frac{\partial D}{\partial p} \\ \frac{\partial q}{\partial q} & -\frac{\partial S}{\partial p} \end{vmatrix}$$

है। वास्तव में यह सारणिक जैकोबियन सारणिक है जिसका शून्येतर होना अंतर्जात फलन प्रमेय का प्रयोग करने के लिए अनिवार्य है।

आप यह जाँच कर सकते हैं कि समीकरणों (3) और (4) वाला रैखिक संस्करण, वास्तव में समीकरणों (1) और (2) के लिए प्राप्त परिणाम की एक विशिष्ट स्थिति मात्र है।

10.2.2 अभीष्टीकरण एवं तुलनात्मक स्थैतिकी

अभीष्टीकरण समस्याओं में हम केवल संतुलन का विचार ही सम्मिलित नहीं करते हैं। प्रमुख समस्या है कि एक उद्देश्य फलन को प्रतिबन्धों के साथ या उनके बिना अनुकूलित करना। एक उद्देश्य फलन, एक निर्भर चर को एक या एक से अधिक स्वतंत्र चरों के फलन के रूप में दर्शाता है। इसके अतिरिक्त, उद्देश्य फलन अथवा प्रतिबन्धों अथवा दोनों में प्राचल भी सम्मिलित हो सकते हैं। अब, अवकलन गणित की तकनीकों/विधियो ंका प्रयोग करके, मान लीजिए हमने स्वतंत्र चर (चरों) के वे अभीष्ट मान ज्ञात कर लिए हैं जिनके लिए उद्देश्य फलन का मान अधिकतम है। अब स्वतंत्र चरों के इन अभीष्टतम मानों के संगत, निर्भर चर का एक अभीष्टतम मान होगा। इस प्रकार हमें निर्भर चर का अभीष्टतम मान प्राप्त हो जाता है।

हम यह स्पष्टतः समझ सकते हैं कि यदि प्राचलों के मान में परिवर्तन होगा तो निर्भर चर का अभीष्टतम मान भी परिवर्तित होगा। अभीष्टीकरण के संदर्भ में निर्भर चर के अभीष्टतम मान का प्राचलों से एक फलन के रूप में सम्बन्ध, तुलनात्मक स्थैतिकी की विषयवस्तु है। आइए, हम इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें। मान लीजिए, हमें उपयोगिता फलन का अधिकतम मान ज्ञात करना है अर्थात् प्रश्न हैः

$U = U(x_1, x_2, \dots x_n)$ का अधिकतमीकरण करें।

जबकि $p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = \mathrm{m}$ है।

यहाँ $x_1, \dots x_n$ इत्यादि n वस्तुएँ हैं, और $p_1, \dots, p_n$ उनके संगत कीमतें। यहाँ आय को m द्वारा व्यक्त किया गया है। यहाँ उपयोगिता निर्भर चर है, वस्तुओं की मात्राएँ स्वतंत्र चर, तथा कीमतें और आय प्राचल हैं। अब, मान लीजिए, कि हमनें वस्तुओं की अभीष्टतम मात्राएँ ज्ञात कर ली हैं और वे $\left(x_1^*, \dots, x_n^*\right)$ हैं। इससे हम U का अभीष्टतम मान ज्ञात कर सकते हैं जिसे हमें U^* द्वारा व्यक्त करते हैं। तुलनात्मक स्थैतिकी हमें यह बताती है कि यदि कीमतें तथा आय में परिवर्तन हों तो U^* के मान में किस प्रकार के परिवर्तन होंगे। अगले भाग में हम इस विषय पर और विस्तार से चर्चा करेंगे।

10.3 अधिकतम मान फलन एवं आवरण प्रमेय

10.3.1 अधिकतम मान फलन

मान लीजिए $u = f(x, y, \alpha)$ एक उद्देश्य फलन है, जिसमें α एक प्राचल है। मान लीजिए इसे u के लिए हल करने पर x और y के मान x^* और y^* प्राप्त होते हैं। ध्यान दें कि x^* और y^*, α पर निर्भर होंगे। अतः, x^* और y^* ज्ञात होने पर तथा α के विभिन्न मान लेने पर हम एक फलन u^* प्राप्त करते हैं जो कि वास्तव में α का एक फलन होता हैः

$$u^* = f\left(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha\right) = V(\alpha)$$

यहाँ V(.) एक अधिकतम मान फलन (maximum value function) कहलाता है। इसका अर्थ है कि उद्देश्य फलन का अधिकतम मान, स्वतंत्र चरों के उन मानों से प्रभावित होगा जो उद्देश्य फलन को अधिकतम बनाते हैं। अतः, u का अधिकतम मान x और y के उन मानों पर निर्भर होगा जो u को अधिकतम बनाते हैं। यह स्पष्ट तथा सदैव सत्य प्रतीत होता है। परन्तु अधिकतम मान फलन हमें यह भी बताता है कि x और y के वे मान, जिन पर u अधिकतम होता है, स्वयं प्राचल α के फलन हैं। अतः, उद्देश्य फलन का अधिकतम मान x और y के उन मानों का फलन है जो u को अधिकतम बनाते हैं तथा प्राचल α का भी (क्योंकि x और y, u के फलन हैं) अर्थात् परोक्ष रूप से, उद्देश्य फलन का अधिकतम मान प्राचल का एक फलन है।

10.3.2 अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के लिए आवरण प्रमेय

हम अधिकतम मान फलन की संकल्पना के बारे में जान चुके हैं। अब हम अधिकतम मान फलन से सम्बन्धित एक अत्यंत महत्वपूर्ण सिद्धान्त की चर्चा करेंगे। यह सिद्धान्त है आवरण प्रमेय (envelope theorem)। इस उपभाग में हम अधिकतम मान फलन से संबद्ध आवरण प्रमेय की व्याख्या अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के संदर्भ में करेंगे, जबकि अगले उपभाग में हम आवरण प्रमेय पर प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के संदर्भ में विचार करें।

हमने आंशिक अवकलज से सम्बन्धित इकाई में श्रृंखला नियम के बारे में अध्ययन किया। अब हम इसका प्रयोग अधिकतम मान फलन का प्राचल के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करने में करेंगै। आइए हम $V = f\left(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha\right)$ का अवकलज α के सापेक्ष ज्ञात करें।

श्रृंखला नियम के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}$$

होगा।

अभीष्टीकरण की प्रथम कोटि शर्तों के आधार पर, हम जानते हैं कि

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

होगा। अतः ऊपर प्राप्त प्रतिबन्ध के पहले दो पद शून्य/समाप्त हो जाएँगे और हमें प्राप्त होगाः

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{\partial V}{\partial \alpha}.$$

आवरण प्रमेय के अनुसार, अभीष्टतम मान के लिए, जब α परिवर्तित होता है और उसके अनुसार x^* और y^* के मान अनुकूलित होते हैं, तो $\frac{dV}{d\alpha}$ वही परिणाम देता है जैसा कि हमें x^* और y^* को अचर मानने पर प्राप्त हुआ होगा। हम देख सकते हैं कि α , अधिकतम मान फलन में प्रत्यक्ष रूप में भी उपस्थित है और x^* और y^* के माध्यम

से अप्रत्यक्ष रूप में भी। अर्थात्, प्रभावी रूप में α, अधिकतम मान फलन में तीन स्थानों पर प्रवेश करता है। आवरण प्रमेय की मूल संकल्पना यह है कि अधिकतम मान के लिए, केवल प्राचल में होने वाले परिवर्तन पर विचार करना पर्याप्त है। यद्यपि, प्राचल, अंतर्जात चरों के माध्यम से अधिकतम को अप्रत्यक्ष रूप से भी प्रभावित करता है तथापि प्राचल का प्रत्यक्ष प्रभाव ही महत्वपूर्ण है। यह ध्यान रहे कि अंतर्जात चर दो से अधिक भी हो सकते हैं तथा प्राचल भी एक से अधिक हो सकते हैं।

10.3.3 प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के लिए आवरण प्रमेय

पुनः मान लीजिए कि $u = f(x, y, \alpha)$ एक प्रदत्त उद्देश्य फलन है। मान लीजिए, कि हमें इस उद्देश्य फलन का अभीष्टीकरण किसी प्रतिबन्ध के आधार पर करना है। मान लीजिए, प्रतिबन्ध फलन $h(x, y, \alpha) = 0$ द्वारा व्यक्त किया गया है।

इस अभीष्टीकरण समस्याओं के लिए लैगरॉजियन का मान है:

$$L = f(x, y, \alpha) + \lambda\left[0 - h(x, y, \alpha)\right]$$

प्रथम कोटि प्रतिबन्ध होंगे:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -h(x, y, \alpha) = 0$$

इस संकाय को हल करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$x = x^*(\alpha);\ y = y^*(\alpha);\ \text{and}\ \lambda = \lambda^*(\alpha)$$

इन मानों को उद्देश्य फलन में रखने पर हम पाते हैं:

$$u^* = f\left(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \lambda^*(\alpha)\right) = V(\alpha)$$

यह जानने के लिए α में हुए परिवर्तन के सापेक्ष $V(\alpha)$ किस प्रकार परिवर्तित होते हैं, हम V का अवकलज α के सापेक्ष ज्ञात करते हैं तथा पाते हैं:

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण में, अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की तरह यह आवश्यक नहीं है कि $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ शून्य ही हों, ये शून्य से अलग भी हो सकते हैं, जैसा कि हमने पिछली इकाई में देखा है। अतः हम सीधे $\frac{dV}{d\alpha} = \frac{\partial V}{\partial \alpha}$ प्राप्त नहीं कर सकते हैं। यह ध्यान रखना आवश्यक है। यदि हम x और y के मान प्रतिबन्ध समीकरण में रखें तो

हम प्राप्त करते हैं:

$$h\left(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha\right) \equiv 0$$

यदि हम इसका अवकलज α के सापेक्ष ज्ञात करें, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial h}{\partial \alpha} =$$

इस समीकरण को λ से गुणा कर, लैगरॉजियन के व्यंजक का प्रयोग करते हुए, प्राप्त व्यंजक को $\frac{dV}{d\alpha}$ में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dV}{d\alpha} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial h}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial y^*}{\partial \alpha}\right] + \frac{\partial h}{\partial \alpha} - \lambda\frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

प्रथम कोटि शर्तों के प्रयोग से हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

यह प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के संदर्भ में आवरण प्रमेय है। यह सरलता से देखा जा सकता है कि प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के लिए आवरण प्रमेय, अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के लिए आवरण प्रमेय से किस प्रकार भिन्न है। अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की स्थिति में $\frac{dV}{d\alpha}$ उद्देश्य फल के प्राचल के सापेक्ष आंशिक अवकलज के बराबर था जबकि प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की स्थिति में $\frac{dV}{d\alpha}$ लैगरांजियन के प्राचल के सापेक्ष आंशिक अवकलज के बराबर है। प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के संदर्भ में आवरण प्रमेय का महत्व यह है कि यदि हम प्राचल (प्राचलों) में होने वाले परिवर्तन के फलस्परूप अधिकतम मान फलन में होने वाले परिवर्तन ज्ञात करना चाहते हैं, तो लैगरांजियन का प्राचल (प्राचलों) के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करना पर्याप्त है।

10.3.4 लैगरांजियन गुणक की व्याख्या

प्रतिबन्ध $u = f\left(x, y\right)$ के आधार पर फलन $h(x, y) = c$ के न्यूनतमीकरण की समस्या पर विचार करें। यहाँ हम एक व्यापक प्रतिबन्ध फलन पर विचार कर रहे हैं, केवल रैखिक फलन पर नहीं। इस स्थिति में लैगरांजियन है:

$$L = f\left(x, y\right) + \lambda\left[c - h\left(x, y\right)\right]$$

प्रथम कोटि शर्तें हैं:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c - h(x, y) = 0$$

पहले दो समीकरणों से हम प्राप्त करते हैं:

$$\lambda = \frac{\partial f / \partial x}{\partial h / \partial x} = \frac{\partial f / \partial y}{\partial h / \partial y}$$

प्रथम कोटि शर्तें अंतर्निहित रूप से निम्न हल परिभाषित करती हैं:

$$x^* = x^*(c),\ y^* = y^*(c),\ \lambda^* = \lambda^*(c)$$

इस हल को लैगरांजियन में हमें निम्न अधिकतम मान फलन प्राप्त होता है:

$$V(c) = L^*(c) = f\left(x^*(c), y^*(c)\right) + \lambda^*(c)\left[c - h\left(x^*(c), y^*(c)\right)\right]$$

c के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{dV}{dc} = \frac{dL}{dc} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial c} + \left[c - h\left(x^*(c), y^*(c)\right)\right]\frac{\partial \lambda^*}{\partial c} - \lambda^*(c)\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial c} - \lambda^*(c)\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial c}\lambda^*(c)\frac{dc}{dc}$$

इस समीकरणों में विभिन्न पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dL^*}{dC} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda^*\frac{\partial h}{\partial x}\right]\frac{\partial x^*}{\partial c} + \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda^*\frac{\partial h}{\partial y}\right]\frac{\partial y^*}{\partial c} + \left[c - h\left(x^*, y^*\right)\right]\frac{\partial \lambda^*}{\partial c} + \lambda^*$$

दाएँ पक्ष के पहले तीन पद शून्य हैं। अतः यह समीकरणः

$$\frac{dL^*}{dc} = \lambda^* = \frac{dV}{dc}$$

है। हम लैगरांजियन गुणक को ग्राहक माँग के संदर्भ में समझते हैं। आइए, हमें तीन वस्तुओं वाली एक स्थिति पर विचार करें:

$$u^* \equiv u(x_1(p_1, p_2, p_3, M), x_2(p_1, p_2, p_3, M), x_3(p_1, p_2, p_3, M)$$

M के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम पाते हैं:

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = u_1\frac{\partial x_1}{\partial M} + u_2\frac{\partial x_2}{\partial M} + u_3\frac{\partial x_3}{\partial M},\ \text{जहाँ}\ u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, 2, 3.$$

प्रथम कोटि शर्तों के अनुसार $u = \lambda p_i$, i=1, 2, 3 है।

अतः

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = \lambda\left[p_i\frac{\partial x_1}{\partial M} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial M} + p_3\frac{\partial x_3}{\partial M}\right]$$

होगा। दूसरी ओर

$$p_1x_1(p_1,p_2,p_3,M)+p_2x_2(p_1,p_2,p_3,M)+p_3x_3(p_1,p_2,p_3,M)\equiv M$$

है। M के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैः

$$p_i\frac{\partial x_1}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial M}+p_3\frac{\partial x_3}{\partial M}=1$$

इस परिणाम का उपयोग का हम पाते हैं $\frac{\partial u^*}{\partial M}=\lambda.$

अतः इस स्थिति में हम पाते हैं कि एक प्रतिबन्ध अभीष्टतम समस्या में लैगरांजियन गुणक एक ऐसा गणितीय उपकरण है जो सुविधाजनक भी है और प्रासंगिक भी। यह उस दर का माप है जिस दर पर प्रतिबन्ध में एक सूक्ष्म परिवर्तन के सापेक्ष उद्देश्य फलन परिवर्तित होता है। उपयोगिता अधिकतमीकरण समस्या में, यह आय के सापेक्ष सीमांत उपयोगिता को निरूपित करता है।

बोध प्रश्न 1

1) तुलनात्मक स्थैतिकी की संकल्पना की व्याख्या कीजिए और संक्षेप में बताइए कि यह ग़ैर–अभीष्टीकरण संदर्भ में, अभीष्टीकरण संदर्भ से किस प्रकार भिन्न है।

....

....

....

....

2) अधिकतम मान फलन से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

3) व्याख्या कीजिए कि लैगरांजियन गुणक को छाया मूल्य (shadow price) के रूप में किस प्रकार देखा जा सकता है।

....

....

....

....

10.4 अधिकतम मान फलन एवं आवरण प्रमेय के अर्थशास्त्र के कुछ अनुप्रयोग

इस भाग में हम अधिकतम मान फलन तथा आवरण प्रमेय के अर्थशास्त्र में कुछ अनुप्रयोगों के बारे में जानेंगे। हम अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन (indirect utility function) पर (अधिकतम मान फलन के एक प्रकार के रूप में) विचार करेंगे। उसके पश्चात् हम इस फलन पर आवरण प्रमेय के प्रयोग से एक महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त करेंगे जिसे रॉय की सर्वसमिका के नाम से जाना जाता है। इसी प्रकार हम लाभ फलन पर आवरण प्रमेय के प्रयोग से एक अन्य महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त करेंगे जिसे हॉटेलिंग का उपप्रमेय (Hotelling's lemma) के नाम से जाना जाता है।

10.4.1 अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन

$u(x\,[p_x, p_y, I], y[p_x, p_y, I])$ यह दर्शाता है कि उपयोगिता दो वस्तुओं x और y की कीमतों, p_x और p_x तथा आमदनी I का फलन है। अतः हम उपयोगिता को, अप्रत्यक्ष रूप से, वस्तुओं की कीमतों तथा आमदनी के फलन के रूप में लिख सकते हैं: $v = v\left(p_x, p_y, I\right)$ जहाँ v उपयोगिता को निरूपित करता हैं यहाँ हमने उपयोगिता को v से इसलिए व्यक्त किया है क्योंकि अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन को निरूपित करता है। यहाँ विश्लेषण "अप्रत्यक्ष" (indirect) का प्रयोग इसलिए किया गया है कि यहाँ उपयोगिता प्राचलों का फलन है। ध्यान रहें कि वस्तुओं की कीमत तथा आय प्राचल हैं।

हमने देखा कि एक अधिकतम मान फलन, उद्देश्य फलन के अभीष्टतम पर उसका मान प्रदान करता है। एक मान फलन उन अंतर्जात चरों को अभीष्टतम मान प्रदान करता है जिनका अभीष्टीकरण किया जाना है। हमने इकाई 1 में जाना कि प्राचल क्या होते हैं। उदाहरण के लिए, उपयोगिता फलन में, उपभोक्ता उपयोगिता का अधिकतमीकरण उपभोग की गई वस्तुओं के फलन के रूप में करता है। मान लीजिए x_1 और x_2 दो वस्तुएँ हैं। अतः उपयोगिता फलन $u = f\left(x_1, x_2\right)$ के प्रकार का होगा। उपभोक्ता इस फलन का अधिकतम प्रतिबन्ध $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ के अंतर्गत करता है, जहाँ p_1 और p_2 इन वस्तुओं की कीमतें हैं तथा m उपभोक्ता की आय है। मान लीजिए कि उपयोगिता फलन का अधिकतम मान u^* है और यह अधिकतम मान, वस्तुओं की मात्राओं x_1^* और x_2^* पर प्राप्त होता है। यहाँ हमने वस्तुओं की कीमतें तथा उपभोक्ता की आय को अचर माना है। मान लीजिए कि ये मान परिवर्तित होते हैं। दूसरे शब्दों में p_1, p_2 और m यद्यपि अचर हैं, परन्तु क्योंकि उनके कोई विशिष्ट मान नियत नहीं किए गए हैं, उन्हें चर माना जा सकता है। अर्थात् ये अचर हैं परन्तु चर की भाँति प्रयोग हो रहे हैं। अतः ये अचर हैं।

10.4.2 रॉय की समिका

रॉय की सर्वसमिका यह दावा करती है कि किसी उपभोक्ता का व्यक्तिगत सामान्य माँग फलन, अधिकतम मान फलन की वस्तुओं के सापेक्ष तथा उपभोक्ता की आय के सापेक्ष आंशिक अवकलों के अनुपात का योगात्मक प्रतिलोम के बराबर होता है। इसे हम इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं:

हम परोक्ष / अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन लेते हैं जोकि उपभोक्ता के प्रत्यक्ष उपयोगिता अधिकतमीकरण समस्या का अधिकतम मान फलन है।

मानक उपभोक्ता समस्या (Standard consumer's problem)

प्रतिबंध $p_x x + p_x y = m$ के अंतर्गत $u(x, y)$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

प्रथम कोटि शर्तों के अनुसार, हमें निम्नलिखित माँग फलन प्राप्त होते हैं:

$$x = x\left(p_x, p_y, m\right) \text{ और } y = y\left(p_x, p_y, m\right)$$

इन्हें उपयोगिता फलन में रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$u = u\left[x\left(p_x, p_y, m\right), y\left(p_x, p_y, m\right)\right]$$
$$= V\left(p_x, p_y, m\right)$$

जहाँ V अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन है यह (अधिकतम मान फलन है।

उपभोक्ता की विचाराधीन उपयोगिता अधिकतमीकरण समस्या से हम निम्नलिखित लैगरांजियन फलन प्राप्त करते हैं:

$$L = u(x, y) + \lambda\left[m - p_x x - p_y y\right]$$

अब हम लैगरांजियन और अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन को आवरण प्रमेय के माध्यम से जोड़ने के महत्वपूर्ण भाग पर चर्चा करते हैं। जैसा कि आप जानते हैं कि एक प्राचल के सापेक्ष अधिकतम मान फलन का आंशिक अवकलज, उस प्राचल के सापेक्ष लैगरांजियन फलन के आंशिक अवकलज के बराबर होता है। आवरण प्रमेय का प्रयोग करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \frac{\partial L}{\partial m} = \lambda$$

इसी प्रकार अन्य प्राचलों के सापेक्ष आंशिक अवकलजों पर आवरण प्रमेय का प्रयोग करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{\partial V}{\partial p_x} = \frac{\partial L}{\partial p_x} = -\lambda x\left(p_x, p_y, m\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_y} = \frac{\partial L}{\partial p_y} = -\lambda y\left(p_x, p_y, m\right)$$

अतः हम पाते हैं कि

$$\frac{\partial V / \partial p_x}{\partial V / \partial m} = -x$$

तथा $$\frac{\partial V / \partial p_y}{\partial V / \partial m} = -y$$

है। ये अंतिम दो परिणाम रॉय की समिका कहलाते हैं।

10.4.3 हॉटेलिंग का उपप्रमेय

मान लीजिए एक फर्म दो आगतों का प्रयोग करती हैः श्रम (L) और पूंजी (K) इस फर्म के लिए उत्पादन फलन होगा:

$$y = f(K, L)$$

मान लीजिए उत्पाद की कीमत P है, वेतन दर w है तथा पूँजी का लाभांश r है। इस स्थिति में कुछ राजस्व $Pf(K, L)$ तथा कुल लागत $wL + rK$ होगी।

लाभ, जिसे फर्म अधिकतम करना चाहती है,

$$\pi = pwL - rK$$

द्वारा व्यक्त की जा सकती है।

उत्पाद प्रतिबन्धों पर आधारित, लाभ अधिकतमीकरण के लिए लैगरांजियन फलन हैः

$$L = py - wL - rK + \lambda\left[f(L, K) - y\right]$$

प्रथम कोटि शर्त हैः

$$p - \lambda = 0$$

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial L} - w = 0$$

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial K} - r = 0$$

$$-y + f(L, K) = 0$$

के समीकरण आगत माँग फलनों $L(p, w, r)$ और $K(p, w, r)$ तथा आगत आपूर्ति फलन $y(p, w, r)$ के लिए हल प्रदान करते हैं। इन फलनों को लाभ समीकरण में रखने पर हमें निम्नलिखित लाभ फलन प्राप्त होता हैः

$$\pi = py(p, w, r) - wL(p, w, r) - rK(p, w, r) = V(p, w, r)$$

यह मान फलन है। अतः आवरण प्रमेय के प्रयोग से हम प्राप्त करते हैंः

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial p} = y(p, w, r)$$

$$\frac{\partial V}{\partial w} = \frac{\partial L}{\partial w} = -L(p, w, r)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial L}{\partial r} = -K(p, w, r)$$

इसका अर्थ है कि लाभ फलन का कीमतों के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें फर्म के आगत–आपूर्ति फलन तथा आगत–माँग फलन प्राप्त होते हैं। यह हॉटेलिंग का उपप्रमेय (Hotelling's lemma) कहलाता है।

बोध प्रश्न 2

1) अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन एक अधिकतम मान फलन है, व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

2) दर्शाइए कि आवरण प्रमेय के प्रयोग से रॉय की सर्वसमिका किस प्रकार प्राप्त की जा सकती है।

....

....

....

....

3) एक फर्म के संदर्भ में हॉटेलिंग का उपप्रमेय क्या है?

....

....

....

....

10.5 द्वैतता तथा अभीष्टीकरण

अब तक आप अधिकतम मान फलनों और आवरण प्रमेय की संकल्पनाओं से भली–भाँति परिचित हो चुके होंगे। अब समय आ गया है कि आपका परिचय अभीष्टीकरण से सम्बन्धित एक महत्वपूर्ण संकल्पना, द्वैतावस्था से करवाया जाए। द्वैतावस्था दो प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्याओं के मध्य एक सम्बन्ध है। मोटे तौर पर, द्वैतता में हम एक दी हुई प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्या को उसकी "द्वैत" समस्या में परिवर्तित किया जाता है जिससे महत्वपूर्ण अंतर्दृष्टि तथा परिणाम प्राप्त किए जा सकें। एक दी हुई मूल समस्या को एक द्वैत समस्या में परिवर्तित करने का अर्थ है इसे एक ऐसी नई अभीष्टीकरण समस्या के रूप में लिखना कि मूल अधिकतमीकरण (न्यूनतमीकरण) समस्या एक न्यूनतमीकरण (अधिकतमीकरण) समस्या में परिवर्तित हो जाए और जिसमें मूल समस्या के प्रतिबन्ध, नई समस्या के उद्देश्य फलन के रूप में परिवर्तित हो जाए। साथ ही, मूल समस्या के प्राचल नए उद्देश्य फलन के चर बन जाते हैं। अतः हमाने पास दो अभीष्टीकरण समस्याएँ हो जाती हैं जिनमें से एक अधिकतमीकरण की समस्या है और दूसरी न्यूनतमीकरण की। इनमें किसी भी एक समस्या की संरचना एवं हल से दूसरी समस्या की संरचना एवं हल के बारे में सूचना उपलब्ध हो जाती है।

हम उपभोक्ता सिद्धान्त के उदाहरण के माध्यम से मूल और द्वैत (primal and dual) समस्याओं के मध्य सम्बन्ध की व्याख्या करने का प्रयास करते हैं। हम उपभोक्ता के

उद्देश्य फलन का निरीक्षण करेंगे तथा दर्शाएँगें कि इसकी द्वैत समस्या में उपयोगिता का बजट प्रतिबन्धों के अंतर्गत अधिकतमीकरण किया जाता है।

10.5.1 मूल समस्या

आइए, हम बजट प्रतिबन्धों के आधार पर एक उपभोक्ता की समीकरणों के अधिकतमीकरण पर विचार करें। मान लीजिए, हमारे पास x और y दो वस्तुएँ हैं। मान लीजिए कि उपभोक्ता के पास आय या बजट m के बराबर है। मान लीजिए, इन वस्तुओं की कीमतें p_x और p_y हैं। अतः मूल समस्या, बजट प्रतिबन्धों के रहते, उपयोगिता के अधिकतमीकरण की समस्या सामान्य हैः

यदि $p_x x + p_y y = m$ है तो

$U = U(x, y)$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

इस समस्या के लिए सामान्य लैगरांजियन हैः

$$L = U(x, y) - \lambda\left(m - p_x x + p_y y\right)$$

हम प्रथम कोटि शर्तें प्राप्त करते हैं और इन्हें हल कर दोनों वस्तुओं के लिए माँग फलन प्राप्त करते हैं।

10.5.2 द्वैत समस्या

द्वैत समस्या में अधिकतमीकरण को न्यूनतमीकरण में परिवर्तित किया जाता है; और मूल समस्या के प्रतिबन्ध द्वैत समस्या में उद्देश्य फलन के रूप में उपस्थित होते हैं। हमने पहले उस स्थिति पर विचार किया है जहाँ उपभोक्ता ने उपयोगिता फलन का अधिकतमीकरण इस शर्त के साथ किया था कि उसके द्वारा उपभोग की गई वस्तुओं पर किया गया व्यय, उसकी आय से अधिक न हो। आइए, अब उपयोगिता अधिकतमीकरण की मूल समस्या की द्वैत समस्या पर विचार करें। इसकी द्वैत समस्या होगी दोनों वस्तुओं पर हुए व्यय का न्यूनतमीकरण करना जबकि उपयोगिता पर यह प्रतिबन्ध हो कि वह स्थित तट $\overline{u}$ पर ही रहे। इस प्रकार हम उपभोक्ता के लिए द्वैत समस्या को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैंः

$E = p_x x + p_y y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए

जबकि $u = u(x, y) = \overline{u}$ हो।

इस प्रकार प्राप्त द्वैत समस्या का उद्देश्य फलन व्यय फलन है।

10.6 द्वैतता के कुछ अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोग

10.6.1 प्रतिपूर्ति माँग फलन

हमने अभी देखा कि व्यय न्यूनतमीकरण समस्या, उपयोगिता अधिकतमीकरण समस्या का द्वैत है। आइए, इस द्वैत समस्या

$E = p_x x + p_y y$ का न्यूनतमीकरण करें

जबकि $u = u(x, y) = \overline{u}$ हो।

पर एक बार पुनः विचार करें:

इसका लैगरांजियन है:

$$L^d = p_x x + p_y y + \mu\left[\overline{u} - u\left((x, y)\right)\right]$$

L^d द्वैत समस्या के संबद्ध लैगरांजियन है। μ द्वैत समस्या के संबद्ध लैगरांजियन गुणक है।

प्रथम कोटि शर्तें इस प्रकार है:

$$\frac{\partial L^d}{\partial x} = p_x - \mu\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L^d}{\partial y} = p_y - \mu\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L^d}{\partial \lambda} = \overline{u} - u(x, y)$$

समीकरणों के इस निकाय से हमें हल के रूप में x^h, y^h, λ^h इत्यादि मानों का एक समुच्चय प्राप्त होता है, जहाँ 'h' हिक्सियन (Hicksian) के लिए प्रयोग किया गया है। "हिक्सियन" प्रमुख अर्थशास्त्री जॉन हिक्स के नाम से लिया गया है। ये फलन हैं:

$$x^h = x^h\left(p_x, p_y, \overline{u}\right)$$

$$y^h = y^h\left(p_x, p_y, \overline{u}\right)$$

इन्हें हिक्सियन या प्रतिपूर्ति माँग फलन (compensated demand functions) माँग फलन कहते हैं। वास्तव में μ ज्ञात करने के लिए भी एक समीकरण उपलब्ध है पर हमने उसे यहाँ नहीं दर्शाया है।

10.6.2 शैफार्ड का उपप्रमेय

हमने अभी व्यय फलन का परिचय प्राप्त होता है। हमने देखा कि उपयोगिता अधिकतमीकरण समस्या का द्वैत व्यय न्यूनतमीकरण समस्या होती है:

$E = p_x x + p_y y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

जबकि $u(x, y) = \overline{u}$ हो।

इस समस्या के लिए लैगरांजियन है:

$$L^d = p_x x + p_y y + \mu\left[\overline{u} - u\left((x, y)\right)\right]$$

जहाँ μ लैगरांजियन गुणक है।

इस समस्या का हल करने पर हमें x और y के लिए दो माँग फलन प्राप्त होते हैं जोकि

कीमतों और उपयोगिता के फलन हैं। इन्हें प्रतिपूर्ति अथवा हिक्सियन माँग फलन कहते हैं $x^h (p_x, p_y, \bar{u})$ और $y^h (p_x, p_y, \bar{u})$

इन्हें व्यय न्यूनतमीकरण समस्या के उद्देश्य फलन में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$E = p_x x(p_x, p_y, \bar{u}) + p_y y(p_x, p_y, \bar{u}) = e(p_x, p_y, \bar{u})$$

यहाँ e माँग फलन है (इस स्थिति में न्यूनतम मान फलन)

यदि हम व्यय न्यूनतमीकरण समस्या पर आवरण प्रमेय का प्रयोग करें तो हम प्राप्त करते हैं।

$$\frac{\partial e}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} = \bar{u}$$

साथ ही, आवरण प्रमेय से हम पाते हैं कि

$$\frac{\partial e}{\partial p_x} = \frac{\partial L}{\partial p_x} = x(p_x, p_y u)$$

और $$\frac{\partial e}{\partial p_y} = \frac{\partial L}{\partial p_y} = y(p_x, p_y, u)$$

है।

ध्यान दें कि अभीष्टीकरण समस्या में p_x और p_y केवल उद्देश्य फलन में नजर आते हैं। ये दो अंतिम समीकरण अर्थात्

$$\frac{\partial e}{\partial p_x} = \frac{\partial L}{\partial p_x} = x(p_x, p_y u)$$

और and $\frac{\partial e}{\partial p_y} = \frac{\partial L}{\partial p_y} = y(p_x, p_y, u)$ शेफर्ड उपप्रमेय कहलाते हैं।

<u>बोध प्रश्न 3</u>

1) द्वैतावस्था से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

2) प्रतिपूर्ति माँग फलन क्या है, व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

3) शेफर्ड उपप्रमेय क्या है?

....

....

....

....

10.7 सारांश

इस इकाई में हमारी चर्चा प्राचलों के मान में होने वाले परिवर्तन के फलस्वरूप संतुलन मानों पर होने वाले प्रभाव पर केन्द्रित थी। कोई दी हुई संतुलन अवस्था प्राचलों के परिवर्तित होने पर, किस प्रकार प्रभावित होगी? प्राचलों में परिवर्तन के सापेक्ष संतुलन किस प्रकार परिवृत्तित होगा। इकाई का प्रारंभ तुलनात्मक स्थैतिकी की व्याख्या से तथा इसके और स्थैतिकी के अंतर को स्पष्ट करने से हुआ। साथ ही ग़ैर–अभीष्टीकरण और अभीष्टीकरण, दोनों संदर्भों में तुलनात्मक स्थैतिकी के प्रयोग में अंतर को स्पष्ट किया गया।

इसके पश्चात् इस इकाई में अभीष्टीकरण के संदर्भ में आवरण प्रमेय पर चर्चा की गई। अधिकतम मान फलन की व्याख्या की गई तथा इस पर आवरण प्रमेय पर प्रकाश डाला गया। आवरण प्रमेय को प्रतिबन्धित तथा अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण दोनों संदर्भों में स्पष्ट किया गया। साथ ही, आवरण प्रमेय का उपयोग लैगरांजियन की व्याख्या एक छाया मूल्य (shadow price) के रूप में करने में किया गया। इसके अतिरिक्त इस इकाई में आवरण प्रमेय के अर्थशास्त्र में होने वाले अनुप्रयोगों जैसे कि अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन, रॉय की सर्वसमिका तथा हॉटेलिंग का उपप्रमेय इत्यादि की चर्चा की गई।

इसके पश्चात् इस इकाई में द्वैतता की महत्वपूर्ण संकल्पना पर चर्चा की गई तथा एक मूल समस्या की द्वैत समस्या प्राप्त करने की विधि की व्याख्या की गई। द्वैतता की संकल्पना को भली–भाँति समझने के लिए अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन और उसके द्वैत व्यय फलन का प्रयोग किया गया।

अंततः, इस इकाई में प्रतिपूर्ति माँग फलन तथा शेफर्ड उपप्रमेय के संदर्भ में द्वैतता सिद्धान्त के अनुप्रयोगों पर चर्चा की गई।

10.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) उपभाग 10.2.1 एवं 10.2.2 देखें।

2) उपभाग 10.3.3 देखें।

3) उपभाग 10.3.4 देखें।

बोध प्रश्न 2

1) उपभाग 10.4.1 देखें।

2) उपभाग 10.4.2 देखें।

3) उपभाग 10.4.3 देखें।

बोध प्रश्न 3

1) उपभाग 10.5 देखें।

2) उपभाग 10.6.1 देखें।

3) उपभाग 10.6.2 देखें।

शब्दावली

एक अवकल समीकरण की घात (Degree of a Differential Equation)	एक अवकल समीकरण की घात, उसमें उपस्थित सबसे अधिक कोटि वाले अवकलज की घात के बराबर होती है।
समघातीय अवकल समीकरण (Homogeneous Differential Equation)	एक प्रकार का अवकल समीकरण, समघातीय $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ अवकल समीकरण कहलाता है यदि F(x, y) एक शून्य घात वाला समघातीय फलन है।
रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equation)	एक रैखिक समीकरण में निर्भर चर तथा समीकरण में उपस्थित उसके सभी अवकलज घात एक के होते हैं तथा कभी भी आपस में गुणा नहीं होते। एक निम्न प्रकार का अवकल समीकरणः $$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$ जहाँ P और Q केवल x के फलन हैं, एक रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है।
एक अवकल समीकरण की कोटि (Order of a Differential Equation)	एक अवकल समीकरण की कोटि, उसमें उपस्थित सबसे अधिक कोटि वाले अवकलज की कोटि के बराबर होती है।
साधारण अवकल समीकरण (Ordinary Differential Equation)	एक अवकल समीकरण जिसमें केवल एक स्वतंत्र चर हो, एक साधारण अवकल समीकरण कहलाता है।
आंशिक अवकल समीकरण (Partial Differential Equation)	एक से अधिक स्वतंत्र चरों वाले अवकल समीकरण को आंशिक अवकल समीकरण कहते हैं।
एक अवकल समीकरण का हल (Solution of a Differential Equation)	एक अवकल समीकरण का हल, स्वतंत्र और निर्भर चर के बीच एक ऐसा सम्बन्ध होता है जो, निर्भर चर के स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलज के साथ मिलकर दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है।
एक अवकल समीकरण का स्थिर अवस्था मान (Steady-State Value of a Differential Equation)	यह निर्भर चर का वह मान होता है जिस पर निर्भर चर स्थिर हो अर्थात् उसका समय (स्वतंत्र चर) के सापेक्ष अवकलज शून्य हो।
एक आव्यूह का सहखंडज (Adjoint of a matrix)	एक वर्ग आव्यूह का सहखंडज, A के सारणिक के सहखंडों के आव्यूहों (सहखंड आव्यूह) के परिवर्त के बराबर होता है।

सहखंड (Cofactor)	किसी आव्यूह A के सारणिक की किसी प्रविष्टि पर का सहखंड, जिसे C_{ij}, से व्यक्त किया जाता है, वास्तव में एक चिन्हित (+ अथवा -) उपसारणिक होता है। $C_{ij} = (-1)_i + jM_{ij}$.
सारणिक (Determinant)	सारणिक एक वर्ग आव्यूह से संबद्ध एक अद्वितीय संख्या (अदिश) होती है। इसे संगत आव्यूह के अवयवों को दो ऊर्ध्वाधर सरल रेखाखंडों (||) के मध्य रखकर निरूपित किया जाता है।
विकर्ण आव्यूह (Diagonal matrix)	यह विकर्ण आव्यूह, एक ऐसा वर्ग आव्यूह होता है जिसके मुख्य विकर्ण के अवयवों के अतिरिक्त सभी अवयव शून्य होते हैं।
एक आव्यूह की कोटि अथवा विमा (Dimension or order of a matrix)	किसी आव्यूह की कोटि अथवा विमा उसकी पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या में प्राप्त होती है।
आव्यूह के अवयव (Element of a matrix)	एक आव्यूह की प्रत्येक प्रविष्टि को आव्यूह का अवयव कहते हैं।
तत्समक आव्यूह (Identity Matrix)	एक वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव 1 के बराबर है तथा शेष सभी अवयव 0 के बराबर हों, एक तत्समक आव्यूह कहलाता है।
एक आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse of a matrix)	यदि एक दिए हुए वर्ग आव्यूह A के लिए, एक ऐसा वर्ग आव्यूह अस्तित्व में हो/प्राप्त कि जा सके कि AB = BA = I हो जाए तो B को आव्यूह A का व्युत्क्रम कहते हैं यहाँ I एक तत्समक आव्यूह के लिए प्रयोग मिला गया। किसी आव्यूह A को सामान्यतः A^{-1} से व्यक्त किया जाता है।
आव्यूह (Matrix)	एक आव्यूह संख्याओं का आयताकार विन्यास क्रम है।
आव्यूह संक्रियाएँ (Matrix operations	आव्यूहों पर आधारभूत संक्रियाओं, योग तथा गुणन को आव्यूह संक्रियाएँ कहते हैं।
उपसारणिक (Minor)	किसी वर्ग आव्यूह A के सारणिक की किसी प्रविष्टि a_{ij} पर का उपसारणिक, A के सारणिक की iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ को हटाने के पश्चात् प्राप्त शेष सारणिक को कहते हैं। इसे M_{ij} से व्यक्त किया जाता है।
व्युत्क्रमणीय आव्यूह ;Non-singular matrix)	एक वर्ग आव्यूह एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है यदि इसका सारणिक शून्येतर हो/शून्य न हो।
शून्य आव्यूह (Null matrix)	एक सारणिक जिसके सभी अवयव 0 हों, एक शून्य आव्यूह कहलाता है। इसका एक वर्ग आव्यूह होना आवश्यक नहीं है।
अदिश (Scalar)	एक सामान्य संख्या को एक अदिश कहते हैं। एक |X| कोटि के आव्यूह को एक अदिश कहा जा सकता है।
अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular matrix)	एक वर्ग आव्यूह एक अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि इसका सारणिक शून्य हो।
वर्ग आव्यूह (Square matrix)	एक आव्यूह जिसकी पंक्तियों की संख्या उसके स्तंभों की संख्या के बराबर हो, एक वर्ग आव्यूह कहलाता है।
सममित आव्यूह (Symmetric matrix	एक वर्ग आव्यूह जिसका परिवर्त स्वयं आव्यूह के बराबर हो, एक सममित आव्यूह कहलाता है।
एक आव्यूह का परिवर्त (Transpose of a matrix)	किसी आव्यूह A का परिवर्त, A की पंक्तियों तथा उसके स्तंभों का परस्पर विनिमय करने पर प्राप्त होता है।

सदिश (vector)	एक आव्यूह जिसमें केवल एक पंक्ति अथवा केवल एक स्तंभ हो, एक सदिश कहलाता है।
संवृत्त आगत–उत्पाद प्रतिमान (Closed input-output model) **अंतर्जात चर (Endogenous variable)** **बहिर्जात चर (Exogenous variable)** **हॉकिन्स–सिमोन शर्त (Hawkins-Simon Condition)** **आगत–गुणांक आव्यूह (Input coefficient matrix)** **आगत–उत्पाद प्रतिमानोंया आगत–उत्पाद लेनदेन आव्यूह (Input-output model or input-output transaction matrix)** **बाज़ार प्रतिमान (Market model)**	इस प्रतिमान में, घरेलू क्षेत्र को भी एक उद्योग की तरह ही माना जाता है और इसलिए प्रत्येक उत्पादक क्षेत्र का संपूर्ण उत्पाद अन्य उत्पादक क्षेत्रों में माध्यमिक आगतों तथा मध्यम उत्पादों के रूप में ही [k[Z हो जाता है। इस प्रतिमान में, उत्पाद को कोई भी भाग बाज़ार में अन्त्य उत्पाद के रूप में नहीं बेचा जाता। ये वे चर हैं जिनका मान प्रतिमान के अन्दर ही दिया होता है। ये वे चर हैं जिनका मान निर्धारण प्रतिमान के बाहर से होता है। यह वह शर्त है जिसके संतुष्ट होने पर हमें उत्पाद के धनात्मक स्तर प्राप्त होते हैं यदि पर इत्यादि नैतिक इकाइयों में व्यक्त हों। इस शर्त के अनुसार प्रौद्योगिक आव्यूह के सभी मुख्य उपसारणिक धनात्मक होने चाहिए। यह एक ऐसा आव्यूह है जिसकी प्रविष्टितयाँ विभिन्न उत्पाद क्षेत्रों के उत्पादों की एक इकाई के उत्पादन के लिए आवश्यक आगतों की मात्राओं को व्यक्त करती हैं। यह एक ऐसा सूत्रीकरण है जो उत्पाद क्षेत्रों की परस्पर निर्भरता तथा उत्पाद क्षेत्रों तथा अर्थव्यवस्था के घरेलू क्षेत्र के अंतरसम्बन्ध पर केन्द्रित है। यह एक ऐसा सूत्रीकरण है जिसका उद्देश्य अलग–अलग परन्तु सम्बन्धित वस्तुओं की संतुलित कीमतों तथा संतुलित मात्राओं का निर्धारण करना है।

	प्रतिमान (Model)	यह एक समीकरणों का, फलनात्मक सम्बन्धों का तथा समिकाओं का समुच्चय होता है जिसकी सहायता से हमें वास्तविक किसी घटना की व्याख्या करने में सहायता मिलती है।
	राष्ट्रीय आय प्रतिमान (National income model)	यह एक ऐसा सूत्रीकरण है जिसका उद्देश्य राष्ट्रीय आय और सम्बन्धित औसत के अंतरसम्बन्ध का निरूपण, व्याख्या और निर्धारण करना है।
	अनावृत्त आगत–उत्पाद प्रतिमान (Open input-output model)	इस प्रतिमान में, उत्पाद क्षेत्र, अर्थव्यवस्था के घरेलू क्षेत्र पर प्राथमिक आगत खरीदने के लिए तथा अन्त्य उत्पादों की बिक्री के लिए निर्भर होते हैं।
	प्राथमिक आगत अथवा उत्पादन के कारक (Primary inputs or factors of production)	ये उत्पादन के प्रक्रम के मूलभूत भागीदार हैं। उत्पादन में उनकी भागीदारी के लिए, उत्पादन का एक निश्चित मान उनमें कारक भुगतान के रूप में विभाजित किया जाता है।
	माध्यमिक आगत अथवा मध्यम उत्पाद (Secondary inputs or inter-mediate products)	ये किसी उत्पादन क्षेत्र द्वारा उत्पादन के लिए अन्य उत्पाद क्षेत्रों के उत्पाद हैं।
	प्रौद्योगिकी आव्यूह (Technology matrix)	यह एक आव्यूह है जिसे एक दिए हुए आगत गुणांक आव्यूह को उचित आयाम के तत्समक आव्यूह में से घटाकर प्राप्त किया जाता है। यह आव्यूह प्रौद्योगिकी को प्रदर्शित करता है।
प्रतिबन्ध (Constraint)	एक सम्बन्ध जोकि वरण समुच्चय के प्रांत (डोमेन) को सीमित कर देता है तथा मुक्त अभीष्टीकरण की अनुमति नहीं देता।	
लैगरांजियन फलन (Lagrangean Function)	एक फलन जिसकी रचना प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण अर्थशास्त्र का हल करने के लिए उद्देश्य फलन और प्रतिबन्ध को मिलाकर की जाती है।	
लैगरांजियन गुणक (Lagrange multiplier)	प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के संदर्भ में बनाए गए लैगरांजियन फलन में प्रयुक्त होने वाली एक मात्रा – यह उद्देश्य फल में चर की छायी कीमत की माप है।	

स्थिर मान **(Stationary Value)**	वह बिन्दु जिस पर हमें अभीष्टतम प्राप्त होता है।
	द्वैतता **(Duality)** द्वैतावस्था दो प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्याओं के मध्य एक सम्बन्ध है। मौटे तौर पर, द्वैतता में हम एक दी हुई प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण समस्या को उसकी "द्वैत" समस्या में परिवर्तित किया जाता है जिससे महत्वपूर्ण अंतर्दृष्टि तथा परिणाम प्राप्त किए जा सकें। एक दी हुई मूल समस्या को एक द्वैत समस्या में परिवर्तित करने का अर्थ है इसे एक ऐसी नई अभीष्टीकरण समस्या के रूप में लिखना कि मूल अधिकतमीकरण (न्यूनतमीकरण) समस्या एक न्यूनतमीकरण (अधिकतमीकरण) समस्या में परिवर्तित हो जाए और जिसमें मूल समस्या के प्रतिबन्ध, नई समस्या के उद्देश्य फलन के रूप में परिवर्तित हो जाए। साथ ही, मूल समस्या के प्राचल नए उद्देश्य फलन के चर बन जाते हैं। **व्यय फलन** **(Expenditure Function)** व्यय फलन का न्यूनतमीकरण, उपयोगिता फलन के अधिकतमीकरण का द्वैत है। **आवरण प्रमेय** **(Envelope Theorem)** प्रतिबन्धित अभीष्टीकरण के संदर्भ में आवरण प्रमेय कहता है कि यदि हम प्राचल (प्राचलों) के फलस्वरूप, अधिकतम मान फलन में होने वाले परिवर्तन को ज्ञात करना चाहते हैं तो हम इसे लैगरांजियन का प्राचल (प्राचलों) के सापेक्ष आंशिक अवकलज ज्ञात करके प्राप्त कर सकते हैं। आवरण प्रमेय अप्रतिबन्धित अभीष्टीकरण की स्थिति में भी उपलब्ध है।

	हॉटेलिंग का उपप्रमेय (Hotelling's Lemma)	लाभ फलन का कीमतों के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें फर्म के आगत–आपूर्ति फलन तथा आगत–माँग फलन प्राप्त होते हैं। यह हॉटेलिंग का उपप्रमेय कहलाता है।
	अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन (Indirect Utility Function)	उपयोगिता, उपभोग की जाने वाली वस्तुओं का फलन है और वह वस्तुओं में से प्रत्येक सभी वस्तुओं की कीमतों तथा उपभोक्ता की आय का फलन है। अतः परोक्ष रूप से उपयोगिता कीमतों तथा आय का फलन है।
	रॉय की सर्वसमिका (Roy's Identity)	रॉय सर्वसमिका के अनुसार किसी उपभोक्ता का अपना सामान्य माँग फलन, अधिकतम मान फलन, के वस्तुओं के मूल्यों के सापेक्ष तथा आय के सापेक्ष आंशिक अवकलजों के अनुपात में ऋणात्मक योगात्मक प्रतिलोम के बराबर होता है।
	शेफर्ड उपप्रमेय (Shephard's Lemma)	इस उपप्रमेय के अनुसार व्यय फलन का अवकलन कीमतों के सापेक्ष करने पर हमें प्रतिपूर्ति माँग फलन प्राप्त होता है।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

ब्रैडलि, टेरेसा और पैटन, पॉल (2002) एसंशियल मैथामैटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स एण्ड बिज़नेस (भारतीय मुद्रण) वायली इंडिया प्राइवेट लिमिटेड, नई दिल्ली, भारत।

चियांग, अलफा सी., और वनराइट, केविन (2005), *फंडामेंटल मैथड्स ऑफ मैथमेटिकल इकॉनामिक्स,* चतुर्थ संस्करण, मैक्ग्रा–हिल इंटरनेशनल एडीशन, सिंगापुर।

हॉय, माइकल, लिवरनॉयस, जॉन, मक्केना, क्रिस, रीस, रे और स्टेंगोस, थनसिस (2001) *मैथामैटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स, एम. आय.* टि प्रेस, कैमब्रिज, मैसाश्यूसेटस, अमरीका। भारतीय मुद्रण : प्रेंटिस–हॉल ऑफ इंडिया, प्राइवेट लिमिटेड, नई दिल्ली, भारत।

पेम्बर्टन, मैलकम और राड, निकोलस (2017) *मैथामैटिक्स फॉर इकोनॉमिस्ट्स : एन इन्ट्रोडक्टरी टेक्स्ट बुक,* चतुर्थ संस्करण, वायवा बुक्स, नयी दिल्ली, भारत

रेनशॉ, ज्योफ (2009) मैथ्स फॉर इकोनॉमिक्स ऑक्सफोर्ड यूनीवसिर्टी प्रेस, न्यू यार्क, अमरीका।

स्टैफोर्ड, एल, डब्ल्यू. टी. (1977) *मैथामैटिक्स फॉर इकोनॉगिस्टस* द इंगलिश लैंगवेज बुक सोसायटी, और मैक्डॉनल्ड एण्ड इवेंस लिमिटेड, लंदन, चैपटर 17

सिडसैटर, नुट और हैमण्ड, पीटर जे. (1995) *मैथामैटिक्स फॉर इकोनॉमिक ऐनालिसिस,* पियरसन एड्युकेशन, नोयडा, भारत।