# खंड 2
# उत्पादन एवं लागत

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

# इकाई 5 एक या अधिक परिवर्तनशील आगतों के साथ उत्पादन फलन

संरचना


5.0 उद्देश्य

5.1 विषय प्रवेश

5.2 उत्पादन फलन (Production Function)

- 5.2.1 अल्पकालीन उत्पादन फलन (Short-run Production Function)
- 5.2.2 परिवर्तनशील अनुपातों का नियम (Law of Variable Proportions)
- 5.2.3 दीर्घकालीन उत्पादन फलन (Long-run Production Function)
- 5.2.4 समोत्पाद वक्र (Isoquants)
- 5.2.5 तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर (Marginal Rate of Technical Substitution)
- 5.2.6 उत्पादक का संतुलन (Producer's Equilibrium)
- 5.2.7 तकनीकी प्रतिस्थापन की लोच (Elasticity of Technical Substitution)
- 5.2.8 उत्पादन का आर्थिक क्षेत्र (Economic Region of Production)

5.3 समघातीय एवं समस्थैतिक फलन (Homogeneous and Homothetic Functions)

- .5.3.1 समघातीय फलन (Homogeneous Function)
- 5.3.2 समस्थैतिक फलन (Homothetic Function)

5.4 उत्पादन फलनों के प्रकार (Types of Production Functions)

- 5.4.1 रेखीय उत्पादन फलन (Linear Production Function)
- 5.4.2 लियोनतीफ उत्पादन फलन (Leontief Production Function)
- 5.4.3 कॉब-डग्लस उत्पादन फलन (Cobb-Douglas Production Function)
- 5.4.4 सी.ई.एस. उत्पादन फलन (The CES Production Function)

5.5 प्रौद्योगिकीय प्रगति एवं उत्पादन फलन (Technological Progress and the Production Function)

- 5.5.1 प्रौद्योगिकीय प्रगति का हिक्स का वर्गीकरण (Hick's Classification of Technological Progress)

5.6 सार-संक्षेप

5.7 संदर्भ ग्रंथादि

5.8 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत


## 5.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप सक्षम होंगे :

- उत्पादन फलन की अवधारणा और उत्पादन फलन के प्रकारों को समझ पाने में;
- पहले सेमेस्टर में व्यष्टि अर्थशास्त्र के प्रारंभिक जानकारी में दिए गए उत्पादन सिद्धांत की विभिन्न गणितीय अवधारणाओं द्वारा व्याख्या कर पाने में;
- प्रमुख अभिलक्षणों के साथ समघातीय एवं समस्थैतिक फलनों की अवधारणाओं को समझा पाने में;

- विभिन्न प्रकार के उत्पादन फलनों जैसे कि रेखीय, लियोनतीफ, कॉब-डग्लस एवं सी. ई.एस. उत्पादन फलन का विश्लेषण कर पाने में; तथा
- समोत्पाद वक्र पर उत्पादन फलन पर तकनीकी प्रगति के प्रभाव की विवेचना कर पाने में।

## 5.1 विषय प्रवेश

अर्थशास्त्र में उत्पादन का अर्थ है मूल्य का सृजन या वृद्धि। उत्पादन प्रक्रिया के अंतर्गत कच्चा माल, श्रम, पूँजी, भूमि, उद्यमी आदि के रूप में संसाधनों या आगतों को एक साथ मिलाकर उन्हें किसी उत्पाद के रूप में रूपांतरित किया जाता है। दूसरे शब्दों में, कोई फर्म उपलब्ध सभी आगतों को प्रयुक्त करके उन्हें मानव की आवश्यकताओं को संतुष्ट करने के लिए उपयुक्त वस्तुओं में रूपांतरित करती है। उदाहरणार्थ लकड़ी की एक कुर्सी या मेज बनाने के लिए लकड़ी, लोहा, रबड़, श्रम समय, मशीन समय आदि कच्ची सामग्रियों को उत्पादन प्रक्रिया में एक साथ मिलाकर काम किया जाता है। इसी प्रकार, किसी ड्रेस को बनाने के लिए खेत में उगायी गयी कपास से बीजों को निकाल कर रूई, रूई से धागा, धागे की बुनाई से कपड़ा, कपड़े की प्रिंटिंग एवं तैयार कपड़े से ड्रेस बनाई जाती है। कपास से ड्रेस बनाने तक की अलग-अलग प्रक्रियाओं में आगत एवं उत्पाद में किसी न किसी प्रकार का तकनीकी संबंध होता है।

वर्तमान इकाई में उत्पादन के उस सिद्धांत को गणितीय रूप से समझाने का प्रयास किया गया है जिसे आपने व्यष्टि अर्थशास्त्र के प्रारंभिक पाठ्यक्रम में पहले सेमेस्टर में पढ़ा था। प्रारंभिक व्यष्टि अर्थशास्त्र के पाठ्यक्रम की पाँचवी एवं सातवीं इकाई में एक परिवर्तनशील साधन या एक से अधिक परिवर्तनशील साधनों के साथ उत्पादन फलन को विस्तार से समझाया गया था। इस सैद्धांतिक आधार को उन गणितीय उपस्करों के साथ मिलाकर हम यहाँ चर्चा को आगे बढ़ाएंगे जिन्हें आपने पहले सेमेस्टर गणितीय अर्थशास्त्र में समझा है। भाग 5.2 में उत्पादन सिद्धांत के बारे में अब तक के किए गए अध्ययन की एक संक्षिप्त पुनरीक्षा के साथ-साथ इसकी गणितीय विवेचना भी की जाएगी। भाग 5.3 में समघातीय एवं समस्थैतिक फलनों की अवधारणा के साथ उनके अभिलक्षणों को समझाया जाएगा। भाग 5.4 में विभिन्न प्रकार के उत्पादन फलनों – रेखीय उत्पादन फलन, लियोनतीफ उत्पादन फलन, कॉब-डग्लस उत्पादन फलन तथा सी.ई.एस. उत्पादन फलन को विस्तार से समझाएंगे। उत्पादन फलन पर प्रौद्योगिकीय प्रगति के प्रभाव के अध्ययन तथा तकनीकी प्रगति के हिक्स के वर्गीकरण के साथ इस इकाई का समापन होगा।

## 5.2 उत्पादन फलन

कोई फर्म विभिन्न प्रकार की आगतों को एक साथ मिलाते हुए उत्पादन करती है। उत्पादन फलन आगतों या कारकों की भौतिक मात्राओं और उत्पादन की मात्रा के बीच एक प्रौद्योगिकीय संबंध है। यह प्रौद्योगिकी की दी हुई स्थिति के साथ आगतों या कारकों की भौतिक मात्राओं से अधिकतम उत्पादन प्राप्त किए जाने को व्यक्त करने वाला गणितीय संबंध है। यह किसी विशिष्ट समयावधि में परिणामी उत्पादन के लिए साधन कारकों के प्रवाह को व्यक्त करता है। यह प्रौद्योगिकी की स्थिति द्वारा निर्धारित होता है। बीजगणितीय रूप से इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$Q = f\ (A, B, C, D, \ldots.)$$

जहाँ Q उत्पादन की मात्रा है जो A, B, C, D,... आगतों के फलन के द्वारा व्यक्त की जा रही है। यहाँ f (.) फर्म के समक्ष प्रौद्योगिकीय संरोध का परिचायक है।

### 5.2.1 अल्पकालीन उत्पादन फलन

एक अल्पकालीन उत्पादन फलन उत्पादित की जा सकने वाली उत्पादन की अधिकतम मात्रा तथा उत्पत्ति के साधनों में से कम से कम एक साधन को स्थिर रखते हुए सभी चरों के बीच तकनीकी संबंध है। दो साधनों वाले उत्पादन फलन को निम्नलिखित प्रकार लिखा जा सकता है :

$$Q = f(L, \bar{K})$$

जहाँ Q= उत्पादन की मात्रा, L= प्रयुक्त किए गए श्रम की इकाइयाँ तथा K= पूँजी एवं f फलन संबंध को व्यक्त करने वाला संकेतांक है। पूँजी K के ऊपर एक रेखा यह इंगित करती है कि इन दोनों साधनों में से पूँजी को स्थिर रखा गया है। अर्थात् यह उत्पत्ति का स्थिर साधन है। अल्पकाल में पूँजी की आपूर्ति लोचहीन मानी गयी है जो दीर्घकाल में लोचदार हो सकती है। साधन की लोचहीनता ही उसे अल्पकाल में स्थिर बनाती है। इस प्रकार अल्पकाल में उत्पादन की मात्रा में जो भी परिवर्तन होते हैं वे परिवर्तनशील साधन, अर्थात् श्रम की मात्रा में परिवर्तन के कारण होते हैं।

#### कुछ उत्पादन (TP)

उत्पत्ति के अन्य साधनों की मात्राओं को स्थिर रखते हुए किसी एक साधन की मात्रा में परिवर्तन करके उत्पादन (Q) की अधिकतम संभव मात्रा कुल उत्पाद ($TP_L$) है। जिसे निम्नलिखित प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

श्रम का कुल उत्पाद : $TP_L = Q = f(L)$

#### औसत उत्पाद (AP)

उत्पत्ति के साधन की प्रति इकाई उत्पाद को औसत उत्पाद कहा जाता है।

$$AP_L = \frac{Q}{L} \text{ तथा } AP_K = \frac{Q}{K}$$

#### सीमांत उत्पाद (MP)

उत्पत्ति के साधन की मात्रा में एक इकाई की वृद्धि करने से कुल उत्पाद में होने वाली वृद्धि को सीमांत उत्पाद कहा जाता है, जबकि अन्य साधनों की मात्राओं को स्थिर रखा गया है :

$$MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \text{ अथवा } \frac{\partial Q}{\partial L} \quad \text{एवं}$$

$$MP_K = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \text{ अथवा } \frac{\partial Q}{\partial K}$$

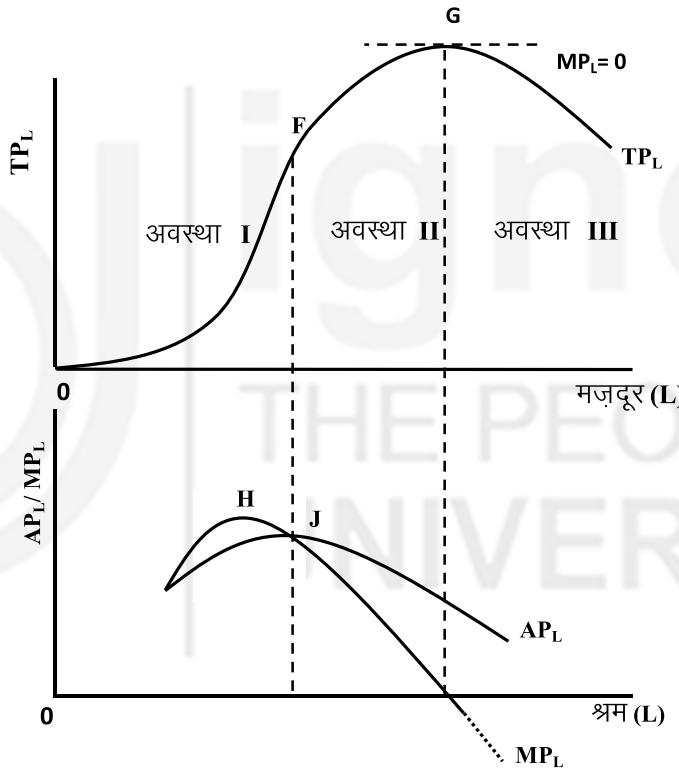
जहाँ $\Delta$ परिवर्तन को इंगित करता है। जबकि $\partial$ एक से अधिक परिवर्तनशील चर के साथ किसी फलन के आंशिक अवकलन को इंगित करता है [यहाँ उत्पादन के दो साधनों वाले उत्पादन फलन $Q = f(L,K)$] पर विचार किया गया है]।

### *ह्रासमान सीमांत उत्पाद नियम*

ह्रासमान सीमांत उत्पादन नियम बताता है कि उत्पादन प्रक्रिया के दौरान उत्पत्ति के अन्य साधनों को स्थिर रखते हुए जब किसी एक साधन की मात्रा में वृद्धि की जाती है तो पहले तो उत्पादन में वृद्धि होती है, लेकिन, एक बिंदु के बाद अंततः परिवर्तनशील साधन का सीमांत उत्पाद कम होने लगता है।

## 5.2.2 परिवर्तनशील अनुपातों का नियम

गैर-आनुपातिक प्रतिफलों के नियम के रूप में माना गया परिवर्तनशील अनुपातों का नियम वस्तुतः अल्पकालीन उत्पाद फलन से संबंधित है, जहाँ उत्पत्ति के कुछ साधन स्थिर हैं तो कुछ साधन परिवर्तनशील हैं। इस नियम के अनुसार, जब उत्पत्ति के अन्य साधनों की मात्राओं को स्थिर रखते हुए किसी एक साधन की मात्रा में उत्तरोत्तर वृद्धि की जाती है तो उत्पादन प्रक्रिया की पहली अवस्था में उत्पादन में बढ़ती हुई दर से वृद्धि होती है और कुल उत्पादन अधिकतम स्तर पर पहुँचने के बाद उत्पादन में होने वाली वृद्धि कम से कमतर होती जाती है अर्थात् कुल उत्पादन में वृद्धि तो होती है लेकिन घटती हुई दर से होती है।




चित्र 5.1 : परिवर्तनशील अनुपात का नियम

**पहली अवस्था** : चित्र 5.1 में पहली अवस्था मूल बिंदु 0 से प्रारंभ होकर F पर समाप्त होती है, जहाँ $AP_L$ अपने उच्चतम बिंदु (भाग–2 में बिंदु J) पर पहुंच जाती है। इस बिंदु पर औसत उत्पादन ($AP_L$) सीमांत उत्पाद ($MP_L$) के बराबर होता है ($AP_L = MP_L$). चित्र 5.1 के प्रथम भाग में कुल उत्पाद ($TP_L$) में E बिंदु के बाद से बढ़ती हुई दर से वृद्धि होना बंद हो जाता है, बल्कि वह घटती हुई दर से बढ़ने लगता है। इसे नतिवर्तन बिंदु (point of inflexion) कहा जाता है। बिंदु E पर की $TP_L$ प्रवृति उन्नतोदर से अवतलोदर हो जाती है।

**दूसरी अवस्था** : दूसरी अवस्था उस बिंदु से प्रारंभ होती है जहाँ से AP वक्र अपने शिखर बिंदु पर पहुँचने के बाद MP से ऊपर तो हो जाता है लेकिन नीचे की ओर गिरता जाता है चित्र 5.1 के निचले भाग में यह बिंदु J द्वारा दर्शाया गया है। कुल उत्पादन में घटती हुई दर से वृद्धि होती है सीमांत उत्पाद भी गिरता जाता है लेकिन धनात्मक रहता है। K बिंदु पर परिवर्तनशील साधन का सीमांत उत्पाद शून्य हो जाता है। और इस बिंदु पर कुल उत्पाद अधिकतम होता है। यह अवस्था ह्रासमान प्रतिफल की होती है।

**तीसरी अवस्था** : यह अवस्था बिंदु G से प्रारंभ होती है कुल उत्पाद गिरने लगता है सीमांत उत्पाद ऋणात्मक हो जाता है। स्थिर साधनों की तुलना में परिवर्तनशील साधन की मात्रा बहुत अधिक हो जाती है। इस अवस्था को ऋणात्मक प्रतिफल की अवस्था कहा जाता है।

**ध्यान रहें** : *

बिंदु H पर का $MP_L$ ढाल $= 0$ अर्थात् $\frac{dMP_L}{dL} = 0$

बिंदु E पर (नतिवर्तन बिंदु) तक $\frac{d^2TP_L}{dL^2} > 0$

बिंदु E एवं G तक $\frac{d^2TP_L}{dL^2} < 0$

बिंदु F एवं J पर $MP_L = AP_L$ अर्थात् $\frac{dQ}{dL} = \frac{Q}{L}$

बिंदु J पर, $AP_L$ ढाल $= 0$ अर्थात् $\frac{dAP_L}{dL} = 0$

बिंदु G पर $TP_L$ का ढाल अर्थात् $MP_L = \frac{dQ}{dL} = 0$

बिंदु K के बाद, $MP_L < 0$

**औसत उत्पाद एवं सीमांत उत्पाद के बीच संबंध**

1) जब तक MP वक्र AP वक्र के ऊपर रहता है, तब तक AP वक्र ऊपर की ओर उठता हुआ होता है। अर्थात् $MP > AP$, AP में वृद्धि हो रही है।
2) जब MP वक्र AP वक्र को उस बिंदु पर काटता है जहाँ AP अधिकतम होता है अर्थात् $MP = AP$ पर AP अधिकतम होती है।
3) जब तक MP वक्र AP वक्र से नीचे रहता है, तब तक AP वक्र नीचे की ओर गिरता हुआ होता है। अर्थात् $MP < AP$, AP में गिरावट हो रही है।

**सिद्धि** : $TP_L = f(L)$, श्रम के कुल उत्पादन फलन पर विचार कीजिए तब $AP_L = \frac{f(L)}{L}$.

$AP_L$ को अधिकतम करने के लिए :

$$\frac{d}{dL}(AP_L) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dL}\left[\frac{f(L)}{L}\right] = 0$$

* पहले सेमेस्टर के अर्थशास्त्र में गणितीय विधियों (BECC-102) नामक कोर्स की दसवीं इकाई को अधिकतम, न्यूनतम, नतिवर्तन के बिंदु को ज्ञात करने की अवकलन कसौटियों के लिए देखें।

$$\frac{df(L)}{dL}\cdot\frac{1}{L}-\frac{f(L)}{L^2}=0$$

$$\frac{df(L)}{dL}=\frac{f(L)}{L} \qquad (1)$$

$\Rightarrow MP_L = AP_L$ जब $AP_L$ अधिकतम होता है तो वह $MP_L$ के बराबर होता है।

अधिकतम $AP_L$ की द्वितीय कोटि शर्त : $\frac{d^2(AP_L)}{dL^2}\le 0 \Rightarrow \frac{d}{dL}\left(\frac{d}{dL}AP_L\right)\le 0 \Rightarrow \frac{d}{dL}\left(\frac{df(L)}{dL}\right)\le 0$

समीकरण (1) का प्रयोग कर, हम पाते हैं, $\frac{d}{dL}\left(\frac{df(L)}{dL}\right)=\frac{d}{dL}\left(\frac{f(L)}{L}\right)=\frac{f'(L)L-f(L).1}{L^2}$

अतः, $\frac{d^2(AP_L)}{dL^2}=\frac{1}{L}\left[f'(L)-\frac{f(L)}{L}\right]\le 0 \Rightarrow f'(L)\le\frac{f(L)}{L}\Rightarrow MP_L\le AP_L$

### 5.2.3 दीर्घकालीन उत्पादन फलन

दीर्घकाल में उत्पत्ति के सभी साधन परिवर्तनशील हो सकते हैं। इसलिए दीर्घकाल में उत्पत्ति के सभी साधनों में आनुपातिक रूप से परिवर्तन किया जाता है। दो साधनों वाले उत्पादन फलन $Q = f(L, K)$ पर विचार कीजिए जहाँ Q = उत्पादन, L = श्रम की इकाइयाँ, K = पूँजी की इकाइयाँ।

उत्पादन फलन के बारे में हमारी आधारभूत मान्यता एकदिशता की है, अर्थात् यदि पूँजी (K) का प्रयोग स्थिर रहते हुए केवल श्रम (L) का प्रयोग अधिक किया जाता है तो उत्पादन में वृद्धि होगी। इसी प्रकार, श्रम को स्थिर रखते हुए पूँजी में वृद्धि से भी उत्पादन में वृद्धि होगी। अतः L तथा K के अनुसार, उत्पादन फलन के प्रथम कोटि अवकलज धनात्मक होंगे– अर्थात् $f'(L) > 0$ और $f'(K) > 0$। दूसरे शब्दों में, श्रम और पूँजी के सीमांत उत्पादन धनात्मक होंगे। उत्पादन फलन के विषय में हमारी दूसरी मान्यता उसकी नीति से संबंधित है। यह फलन की अवनतोदरता की मान्यता है, अर्थात् $f''(L) < 0$ और $f''(K) < 0$ – इसका अभिप्रायः है कि श्रम और पूँजी के सीमांत उत्पाद ह्रासमान होते हैं। किंतु यदि हम द्वितीय कोटि के तिर्यक आंशिक अवकलन करें तो पाते हैं :

$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial f(K,L)}{\partial K}\right)=\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}\right)=\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K\,\partial L}>0$$

यंग के प्रमेय के अनुसार दोनों द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज समान होते हैं।

ध्यान दें कि $\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L^2}=f''(L)$ और $\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K^2}=f''(K)$ तो L तथा K के अपने ही द्वितीय कोटि अवकलज हैं।

#### किसी साधन की उत्पादन लोच

$X = f(L)$ दिए हुए उत्पादन फलन के लिए साधन L के संदर्भ में उत्पादन की लोच को उत्पादन की मात्रा में आनुपातिक परिवर्तन तथा श्रम की मात्रा में आनुपातिक परिवर्तन के

अनुपात के रूप में व्यक्त किया जाता है। अतः, किसी साधन की उत्पादन की लोच L ($e_L$) होगी :

$$e_L = \frac{d(\log X)}{d(\log L)} = \frac{\%\Delta X}{\%\Delta L} = \frac{dX}{dL} \times \frac{L}{X} = \frac{MP_L}{AP_L}$$

**उदाहरण 1**

उत्पादन फलन $Q = 6K^2L^2 - 0.10K^3L^3$ पर विचार कीजिए जहाँ Q कुल उत्पादन है तथा K और L उत्पत्ति के साधन हैं। K की इकाइयाँ 10 पर स्थिर है। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

क) साधन L के लिए कुल उत्पादन फलन ($TP_L$)

ख) साधन L के लिए सीमांत उत्पादन फलन ($MP_L$)

ग) साधन L के लिए औसत उत्पादन फलन ($AP_L$)

घ) कुल उत्पाद $TP_L$ को अधिकतम करने के लिए साधन श्रम (L) की इकाइयाँ

च) सीमांत उत्पाद ($MP_L$) को अधिकतम करने के लिए श्रम की इकाइयाँ

छ) औसत उत्पादन ($AP_L$) को अधिकतम करने के लिए साधन श्रम (L) की इकाइयाँ

ज) उत्पादन की तीनों अवस्थाओं की सीमाएँ

हल :

क) $TP_L = 6(10)^2 L^2 - 0.10(10)^3 L^3 = 600L^2 - 100L^3$

ख) $MP_L = \frac{d(TP_L)}{dL} = 1200\,L - 300\,L^2$

ग) $AP_L = \frac{TP_L}{L}$

$= \frac{600\,L^2 - 100\,L^3}{L} = 600\,L - 100\,L^2$

घ) $TP_L$ को अधिकतम करने के लिए $\frac{d(TP_L)}{dL} = 0$

$\Rightarrow 1200\,L - 300\,L^2 = 0$

$\Rightarrow L(1200 - 300\,L) = 0 \Rightarrow L = 0$ अर्थात् $L = 4$

अधिकतम होने की दूसरी शर्त को जाँचने पर $\frac{d^2(TP_L)}{dL^2} < 0$ हमें $L = 4$ पर अधिकतम $TP_L$ प्राप्त होता है।

च) $MP_L$ को अधिकतम होने की शर्त $\frac{d(MP_L)}{dL} = 0$ है

अर्थात् $1200 - 300 \times 2\,L = 0$

अर्थात् $L = 2$ पर श्रम का सीमांत उत्पादन अधिकतम होगा।

छ) $AP_L$ को अधिकतम होने की शर्त $\frac{d(AP_L)}{dL} = 0$ है अर्थात् $600 - 200\,L = 0$

अर्थात् $L = 3$ पर श्रम का औसत उत्पाद अधिकतम होगा।

ज) **पहली अवस्था** : श्रम की इकाइयाँ 0 - 3 के बीच; मूल बिंदु से प्रारंभ होती हैं और उस बिंदु तक रहती हैं जहाँ पर $AP_L$ अधिकतम होता है।

**दूसरी अवस्था** : श्रम की इकाइयाँ 3 - 4 ; उस बिंदु से प्रारंभ होती हैं जहाँ पर $AP_L$ अधिकतम है और उस तक रहती हैं जहाँ पर $MP_L$ शून्य के बराबर होता है। इस बिंदु पर $TP_L$ अधिकतम होता है।

**तीसरी अवस्था** : श्रम की इकाइयाँ 4 - ∞; $MP_L = 0$ के बिंदु से प्रारंभ होकर $MP_L < 0$ तक चलती हैं।

**उदाहरण 2**

एक उत्पादन फलन $X = 8L + 0.5L^2 - 0.2L^3$ के रूप में दिया गया है। जहाँ X उत्पादन को तथा $L = 100$ श्रमिकों की संख्या को दर्शाता है तो

क) उस बिंदु को ज्ञात कीजिए जहाँ $MP_L = AP_L$

ख) उस परिसर को ज्ञात कीजिए जो श्रम की ह्रासमान सीमांत उत्पादकता को दर्शाता है

ग) यदि $MP_L$ को शून्य करना है तो कितने श्रमिकों की आवश्यकता होगी।

घ) यदि फर्म 150 श्रमिकों को काम पर लगाती है तो $TP_L$, $MP_L$ तथा $AP_L$ ज्ञात कीजिए।

**हल**

क) श्रम का कुल उत्पादन : $TP_L = X = 8L + 0.5L^2 - 0.2L^3$

$$MP_L = \frac{dX}{dL} = 8 + L - 0.6L^2$$

$$AP_L = \frac{X}{L} = 8 + 0.5L - 0.2L^2$$

जहाँ $MP_L = AP_L$ हो वहां : $8 + L - 0.6L^2 = 8 + 0.5L - 0.2L^2$

$$0.5L - 0.4L^2 = 0$$

अर्थात् $L\,(0.5 - 0.4L) = 0$

अर्थात् $L = 0$ या $L = \frac{0.5}{0.4} = 1.25$ यानि 125 श्रमिक।

अतः 125 श्रमिक लगाने पर $MP_L = AP_L$ होंगे।

ख) जिस परिसर में $\frac{dMP_L}{dL} < 0$ हो वहां उत्पादन फलन श्रम की ह्रासमान सीमांत उत्पादकता को दर्शाता है।

अर्थात् $1 - 1.2L < 0$ अथवा $L > \frac{1}{1.2} \Rightarrow L > 0.83$ या 83 श्रमिक

अतः वह परिसर जहाँ श्रम की सीमांत उत्पादिता ह्रासमान है, $L > 0.83$ या 83 से अधिक श्रमिक।

ग) $MP_L$ के शून्य स्तर पर श्रमिकों की संख्या

$8 + L - 0.6L^2 = 0$

अथवा $0.6L^2 - L - 8 = 0$

$L = \frac{1+\sqrt{1+19.2}}{2 \times 0.6} = 4.58$ (लगभग) इसका दूसरा मूल ऋणात्मक है जो अर्थहीन है

इसलिए $MP_L = 0$ होने के लिए तो लगभग 458 श्रमिक चाहिए।

घ) जब फर्म 150 श्रमिकों को काम पर लगाती है तो $L = 1.5$ $TP_L$, $MP_L$ तथा $AP_L$ में $L = 1.5$ रखने पर

$TP_L = 8L + 0.5L^2 - 0.2L^3$

$= 8 \times 1.5 + 0.5 \times (1.5)^2 - 0.2\,(1.5)^3 = 12.45$ इकाइयाँ

$MP_L = 8 + L - 0.6L^2$

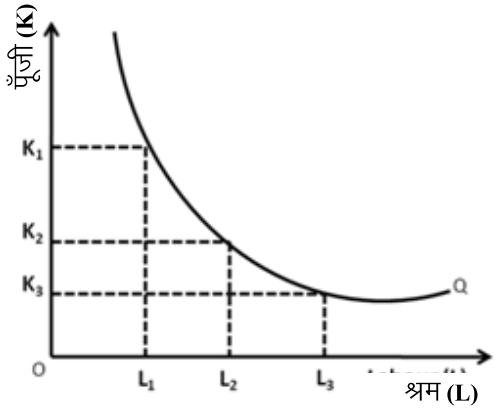
$= 8 + 1.5 - 0.6(1.5)^2 = 8.15$ इकाइयाँ

$AP_L = 8 + 0.5L - 0.2L^2$

$= 8 + 0.5 \times 1.5 - 0.2(1.5)^2 = 8.3$ इकाइयाँ

### 5.2.4 समोत्पाद वक्र

समोत्पाद वक्र आगतों के उन समस्त संयोगों को बताने वाला वक्र है जिन पर उत्पाद की मात्रा एकसमान रहती है। चित्र 5.2 में श्रम (L) तथा पूँजी (K) के समस्त संयोगों को दर्शाया गया है। उदाहरणार्थ $(L_1,K_1)$, $(L_2,K_2)$ तथा $(L_3,K_3)$ संयोगों पर उत्पादन (Q) एकसमान है।




चित्र 5.2 : समोत्पाद वक्र

## समोत्पाद वक्रों के अभिलक्षण

1) समोत्पाद वक्रों का ढाल ऋणात्मक होता है अर्थात् ये बाएं से दाएं को गिरते हुए होते हैं।

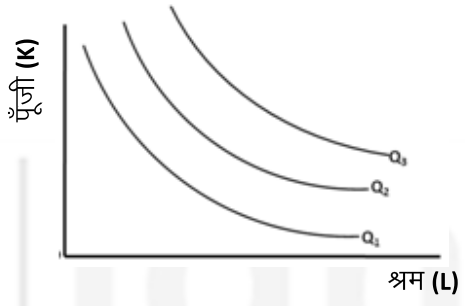
2) कोई भी ऊँचा समोत्पाद वक्र उत्पादन के उच्च स्तर को बताता है।

3) कोई से भी दो समोत्पाद वक्र कभी भी एक-दूसरे को काट नहीं सकते।

4) समोत्पाद वक्र मूल बिंदु के प्रति उन्नतोदर होते हैं, जो किसी एक परिवर्तनशील साधन के घटते प्रतिफल को दर्शाता है।

### समोत्पाद मानचित्र

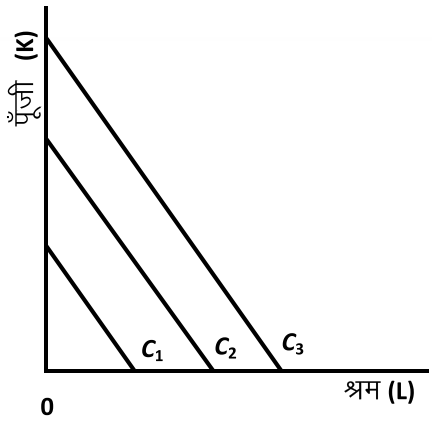
समोत्पाद वक्रों के एक समूह को दर्शाने वाला चित्र समोत्पाद मानचित्र कहलाता है जो उत्पादन के विभिन्न स्तरों को इंगित करता है। चित्र 5.4 में $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ स्तरों को इंगित करने वाले तीन समोत्पाद वक्र दर्शाए गए हैं।




चित्र 5.3 : समोत्पाद मानचित्र

### समलागत रेखा

उत्पत्ति के साधनों की दी हुई कीमतों पर किसी फर्म द्वारा अपने बजट से उत्पादन प्रक्रिया के दौरान प्रयुक्त किए जा सकने वाले दो साधनों की मात्राओं के विभिन्न संयोगों को दर्शाने वाले बिंदुओं का बिंदुपथ समलागत रेखा है। समलागत रेखा का ढाल $\frac{w}{r}$ है (मज़दूरी/ब्याज) जो दो साधनों की कीमतों का अनुपात है। जहाँ w श्रम को भुगतान की गयी मज़दूरी तथा पूँजी r का दिया गया ब्याज है। चित्र 5.4 को देखें जिसमें तीन अलग-अलग समलागत रेखाओं को $C_1$, $C_2$ एवं $C_3$ के रूप में दिखाया गया है। जहाँ $C_3 > C_2 > C_1$.




चित्र 5.4 : समलागत रेखाएँ

### 5.2.5 तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर (MRTS)

तकनीकी प्रतिस्थापन की दर वह दर है जहाँ समोत्पाद वक्र पर किसी एक साधन को दूसरे साधन से प्रतिस्थापित किया जाता है। इसमें उत्पादन का स्तर एकसमान रहता है ($dQ = 0$).

$$\Delta K.MP_K + \Delta L.MP_L = 0$$

$$\Delta K.MP_K = \Delta L.MP_L$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

जैसे ही श्रम की मात्रा में वृद्धि की जाती है वैसे ही पूँजी की मात्रा में कमी लानी होती है। उत्पादन के स्तर को समान स्तर पर रखते हुए श्रम की एक अतिरिक्त इकाई को प्रयुक्त करने के लिए पूँजी की जितनी मात्रा प्रतिस्थापित की जाती है, वह अंततः घटती जाती है।

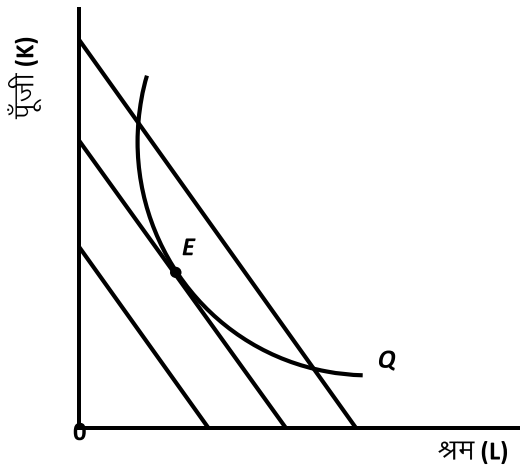
### 5.2.6 उत्पादक का संतुलन

एक विवेकशील उत्पादक का उद्देश्य लाभ को अधिकतम करना होता है। इसके लिए उसके पास दो विकल्प होते हैं। (i) उत्पादन की दी हुई लागत पर उत्पादन को अधिकतम करना; अथवा (ii) उत्पादन के एक दिए हुए स्तर को प्राप्त करने के लिए लागत को न्यूनतम करना।

इनमें से किसी भी विकल्प को प्रयुक्त करने के लिए साधनों के एक अनुकूलतम संयोग को इस प्रकार प्रयुक्त करना पड़ता है कि $MRTS_{LK}$ साधनों के कीमत अनुपात के बराबर रहे। इस प्रकार, उत्पादक का संतुलन उस बिंदु पर निर्धारित होता है जहाँ

$$MRTS_{LK} = \frac{w}{r} \Longrightarrow \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$$

ऐसी स्थिति उस बिंदु पर प्राप्त होती है जहाँ समलागत रेखा समोत्पाद वक्र को स्पर्श करती है। चित्र 5.5 में संतुलन का बिंदु E है, जहाँ $MRTS_{LK} = \frac{w}{r}$.




चित्र 5.5 : उत्पादक का साम्य

### 5.2.7 तकनीकी प्रतिस्थापन की लोच

उत्पादन में तकनीकी प्रतिस्थापन की लोच वह माप है जो यह दर्शाता है कि उत्पादन प्रक्रिया में साधनों में कितनी सुगमता से विवर्तन किया जा सकता है। जो इस प्रकार है :

$\sigma =$ प्रयुक्त किए गए K और L साधनों के अनुपात में आनुपातिक परिवर्तन /
K के लिए L की तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर में आनुपातिक परिवर्तन

= K/L में आनुपातिक परिवर्तन /
$MRTS_{LK}$ में आनुपातिक परिवर्तन

$$= \frac{\Delta K / L}{K / L} \Big/ \frac{\Delta MRTS_{LK}}{MRTS_{LK}}$$

संतुलन की अवस्था में $MRTS_{LK} = \frac{w}{r}$

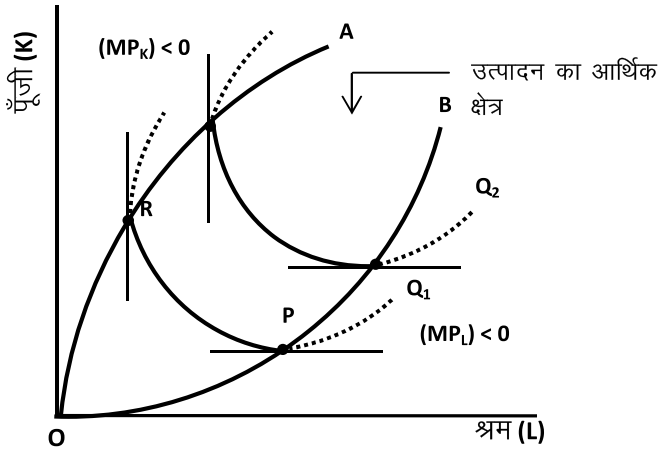
अतः हम पाते हैं : $\sigma = \frac{\frac{\Delta K/L}{K/L}}{\frac{\Delta w/r}{w/r}}$

### 5.2.8 उत्पादन का आर्थिक क्षेत्र

आर्थिक सिद्धांत साधनों के केवल उन्हीं संयोगों पर ध्यान देते हैं जो तकनीकी रूप से दक्ष हैं तथा जिनके सीमांत उत्पाद घटते हुए हैं लेकिन धनात्मक हैं। ये संयोग, उत्पादन का दक्ष क्षेत्र बनाते हुए, नीचे की ओर गिरते हुए मूल बिंदु के प्रति उन्नतोदर समोत्पाद वक्रों से इंगित होते हैं। चित्र 5.6 पर विचार कीजिए जहाँ साधन L तथा K एक दूसरे से स्थानापन्न तो हैं लेकिन पूर्ण स्थानापन्न नहीं है। फर्म K के लिए L को उस बिंदु तक प्रतिस्थापित करती जाती है जहाँ तक $\frac{MP_L}{MP_K}$ द्वारा व्यक्त $MRTS_{LK}$ शून्य नहीं हो जाती (बिंदु P पर $MP_L = 0$) इसका अर्थ यह हुआ कि L की और अधिक इकाइयाँ काम पर लगाने के लिए अब K और अधिक त्यागी नहीं जा सकती। बिंदु P के बाद L में वृद्धि होने पर $MP_L$ ऋणात्मक हो जाती है। $Q_1$ की निश्चित मात्रा उत्पादित करने के लिए L की और अधिक इकाइयाँ काम पर लगाने के कुप्रबंधन को ठीक किए जाने की आवश्यकता है। ऐसा साधन K की इकाइयों में वृद्धि करके किया जाता है। [चूँकि $MP_K > 0$ बिंदु P के बाद L में वृद्धि होने पर] इससे हमें धनात्मक ढाल वाली रिज रेखा OB प्राप्त होती है। इसी प्रकार, R बिंदु पर $MP_K = 0$. इसलिए यदि K में बिंदु R के बाद भी वृद्धि होती है तो $MP_K$ ऋणात्मक हो जाती है तथा L में भी वृद्धि करनी होगी।

#### रिज रेखाएँ

रिज रेखा OA समोत्पाद पर स्थित उन बिंदुओं का बिंदुपथ है जहाँ पूँजी का सीमांत उत्पाद शून्य है। इसी प्रकार, रिज रेखा OB, समोत्पादों पर स्थित उन बिंदुओं का बिंदुपथ है जहाँ श्रम का सीमांत उत्पाद शून्य है। एक विवेकशील उत्पादक इन दोनों रिज रेखाओं के बीच के क्षेत्र में अपनी फर्म का परिचालन करता है। इसी क्षेत्र को उत्पादन का आर्थिक क्षेत्र कहा जाता है। इन रिज रेखाओं के बाहर के क्षेत्र को निरर्थक आर्थिक क्षेत्र (तकनीकी अदक्ष क्षेत्र) कहा जाता है।




चित्र 5.6 : उत्पादन का आर्थिक क्षेत्र

## 5.3 समघातीय एवं समस्थैतिक फलन

### 5.3.1 समघातीय फलन

$f(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ को k कोटि का समघातीय उत्पादन फलन कहा जाता है यदि

$$f(mX_1, mX_2,\ldots, mX_n) = m^k f(X_1, X_2,\ldots, X_n)$$

जहाँ m कोई भी धनात्मक संख्या है तथा k स्थिरांक है। शून्य कोटि का समघातीय फलन वह होता है जो $f(mX_1, mX_2,\ldots, mX_n) = m^0 f(X_1, X_2,\ldots,X_n)$

इसी प्रकार, प्रथम कोटि के समघातीय फलन को निम्नलिखित प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$f(mX, mY) = m^1 f(X, Y)$$

यहाँ X तथा Y उत्पत्ति के दो साधन हैं। इसका सीधा-सा अर्थ यह है कि यदि साधनों की मात्रा में m गुणा वृद्धि की जाती है तो उत्पादन में भी m गुणा वृद्धि होगी।

एक रेखीय समघातीय उत्पादन फलन के मामले में या प्रथम कोटि के समघातीय उत्पादन फलन के मामले में $k = 1$ होने पर यदि उत्पत्ति के सभी साधनों में एक निश्चित अनुपात में वृद्धि की जाती है तो कुल उत्पादन भी उसी अनुपात में बढ़ जाता है। इसे पैमाने के स्थिर प्रतिफल (CRS) की संज्ञा दी जाती है। जब $k > 1$ होता है तो पैमाने के बढ़ते प्रतिफल (IRS) तथा $k < 1$ होने पर पैमाने के घटते प्रतिफल की स्थिति प्राप्त होती है (DRS).

#### यूलर का प्रमेय

k कोटि के समघातीय उत्पादन फलन $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ के लिए यूलर प्रमेय समघातीय उत्पादन फलन तथा इसके आंशिक अवकलजों के बीच निम्नलिखित संबंध प्रदान करता है:

$$X_1\frac{\partial f}{\partial X_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial X_2} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial X_n} = k\, f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

### समघातीय फलनों के अभिलक्षण

1) यदि $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ k कोटि का समघातीय फलन है तो इसके आंशिक अवकलज $(k-1)$ कोटि के समघातीय होंगे।

2) k कोटि के समघातीय फलन f(.) के लिए यदि $f(X) = f(Y)$ तो $f(tX) = f(tY)$.

**सिद्धि :** $f(tX) = t^k f(X)$ तथा $f(tY) = t^k f(Y)$ (1)

दिया हुआ है कि $f(X) = f(Y)$ (2)

समीकरण (1) एवं (2) से

$f(tX) = f(tY)$

3) किसी समघातीय फलन f(X, Y) के स्तर वक्र मूल बिंदु से उठने वाली प्रत्येक किरण पर स्थिर ढाल वाले होते हैं। अर्थात्, यदि f(X, Y) k कोटि का समघातीय फलन है तो मूल बिंदु से निकलने वाली किरणों पर MRTS स्थिर होती है।

### पैमाने के प्रतिफल

पैमाने के प्रतिफल किसी उत्पादन फलन के तकनीकी अभिलक्षण का माप है जो इस बात का परीक्षण करता है कि उत्पत्ति के सभी साधनों में सम आनुपातिक रूप से परिवर्तन किए जाने के परिणामस्वरूप उत्पादन में कितना परिवर्तन होता है। यदि उत्पादन की मात्रा में होने वाला परिवर्तन साधनों में परिवर्तन के बराबर है तो इसे पैमाने के स्थिर प्रतिफल (CRS) की संज्ञा दी जाती है। यदि उत्पादन की मात्रा में होने वाला आनुपतिक परिवर्तन उत्पत्ति के साधनों की मात्राओं में हुए आनुपातिक परिवर्तन से कम है तो इसे पैमाने के घटते प्रतिफल (DRS) की संज्ञा दी जाती है। यदि उत्पादन की मात्रा में आनुपातिक परिवर्तन उत्पत्ति के साधनों की मात्राओं में आनुपातिक परिवर्तन से अधिक है तो इसे पैमाने के बढ़ते प्रतिफल (IRS) की संज्ञा दी जाती है।

एक k कोटि का समघातीय उत्पादन फलन प्रदर्शित करता है :

i) $k = 1$ होने पर पैमाने के स्थिर प्रतिफल

ii) $k > 1$ होने पर पैमाने के बढ़ते प्रतिफल

iii) $k < 1$ होने पर पैमाने के घटते प्रतिफल

## 5.3.2 समस्थैतिक फलन

समस्थैतिक फलन एक समघातीय फलन का एकदिश रूपांतरण* होता है। इसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

---

* एकदिश रूपांतरण (Monotonic transformation) : किसी एक समुच्चय (set) की कोटि को सुरक्षित रखते हुए उसका रूपांतरण एकरूपीय रूपांतरण है। उदाहरणार्थ यदि मूल फलन है f (X, Y) तो उसका एकरूपीय रूपांतरण F [f(X, Y)] होगा तथा यदि $f_1 > f_2$ तो $F(f_1) > F(f_2)$ जहाँ F(.)निश्चित तौर पर f(.) ही बढ़ता फलन है।

$$H(X_1, X_2,\ldots, X_n) = F[f(X_1, X_2,\ldots, X_n)]$$

जहाँ $f(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ k कोटि का समघातीय फलन है जबकि F (.) एकरूपीय वृद्धि वाला फलन है। ऐसे फलन में सभी $t > 0$ के लिए $H(X_1) \geq H(X_2) \Leftrightarrow H(tX_1) \geq H(tX_2)$ जहाँ $\Leftrightarrow$ का अर्थ है ''यदि और केवल यदि''।

दूसरी कोटि (degree 2) के किसी समघातीय उत्पादन फलन $f(X, Y) = XY$ के लिए समस्थैतिक फलन H(X, Y) है जो f(X, Y) का एकदिश रूपांतरण (monotonic transformation) है और यह निम्नलिखित प्रकार का हो सकता है।

$H_1(X, Y) = XY + 2;$

$H_2(X, Y) = (XY)^2;$

$H_3(X, Y) = X^3Y^3 + XY;$

$H_4(X, Y) = \ln X + \ln Y$ (जहाँ $l_n$ का अर्थ है नेपेरियन लॉग)

$H_5(X, Y) = e^{XY}$

### महत्त्वपूर्ण

एक समघातीय उत्पादन फलन का निहितार्थ यह है कि यह समस्थैतिक भी है लेकिन एक समस्थैतिक फलन सदैव समघातीय फलन नहीं होता उदाहरणार्थ $f(X,Y) = XY + 1$ एक समस्थैतिक उत्पादन फलन तो है, लेकिन समघातीय फलन नहीं है। (प्रमाण : $f(tX, tY) = t^2XY + 1$ तथा $t^2 f(X,Y) = t^2XY + t^2$, यहाँ $f(tX, tY) \neq t^2 f(X,Y)$, इसलिए $f(X,Y) = XY + 1$ समघातीय फलन नहीं है].

### समस्थैतिक फलन के अभिलक्षण

1) एक समस्थैतिक फलन के स्तर वक्र एक-दूसरे के किरण क्रमीय विस्तार होते हैं अर्थात् $H(X_1, Y_1) = H(X_2, Y_2) \Leftrightarrow H(mX_1, mY_1) = H(mX_2, mY_2)$ सबके लिए $t > 0$.

2) समस्थैतिक उत्पादन फलन के स्तर वक्र के ढाल मूल बिंदु से उठने वाली प्रत्येक किरण पर स्थिर होते हैं।

   इस अभिलक्षण का निहितार्थ यह है कि समोत्पाद वक्रों का ढाल ($MRTS_{XY}$) मूल बिंदु से निकलने वाली किरणों पर स्थिर है। $MRTS_{XY}$ केवल साधनों की कीमतों के अनुपात $\left(\frac{X}{Y}\right)$ पर ही निर्भर करता है जोकि 0 कोटि का समघातीय फलन है।

### बोध प्रश्न 1

1) समझाइये कि परिवर्तनशील आगतों की मात्राओं में वृद्धि होने पर औसत उत्पाद में गिरावट प्रारंभ होने के बिंदु से पहले ही सीमांत उत्पाद में गिरावट होने का क्रम क्यों प्रारंभ हो जाता है? यह भी समझाइये कि औसत उत्पाद में गिरावट प्रारंभ होने के बिंदु से पहले ही कुल उत्पाद में गिरावट का क्रम क्यों प्रारंभ हो जाता है?

.....

.....

.....

.....

.....

2) किसी फर्म का उत्पादन फलन $X = 50 + 30L - L^2$ है। जहाँ X उत्पाद की कुल मात्रा तथा L श्रम की इकाइयाँ है। औसत आगम फलन $AR = 1200 - 3X$ है। निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

   क) $MP_L$ ज्ञात कीजिए तथा $MP_L = 0$ होने पर श्रम की इकाइयाँ बताइए।

   ख) क्या यह फलन श्रम की घटती सीमांत उत्पादकता को दर्शाता है।

   ग) L के फलन के रूप में $MRP_L$ को व्यक्त कीजिए तथा $L = 10$ होने पर इसका मान निकालिये।

   घ) श्रम की और अधिक या और कम इकाइयाँ प्रयुक्त करना लाभकारी है? व्याख्या कीजिए।

.....

.....

.....

.....

3) निम्न में से कौन-से फलन समघातीय उत्पादन फलन है? उनकी समघातीयता की कोटि भी बताइए।

   क) $\frac{X}{Y}$

   ख) $X + Y^2$

   ग) $X^{3/4} Y^{1/4} + 2X$

   घ) $4X^5Y + 5X^4Y^2 - 2X^3Y^3$

   ङ) $X^3Y + 3X^2Y^2 - 2X^3Y^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 5.4 उत्पादन फलनों के प्रकार

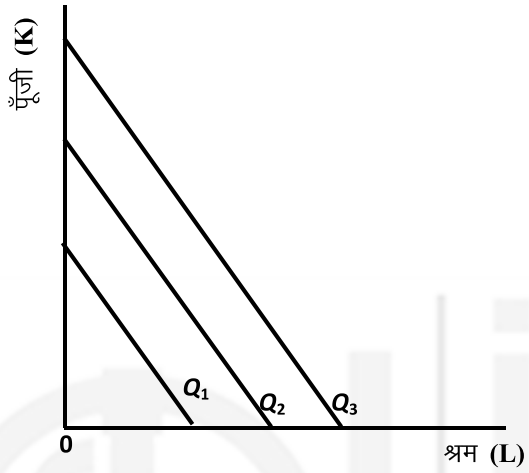
इस खंड में हम एक से अधिक स्वतंत्र चर वाले कुछ फलनों को प्रस्तुत कर रहे हैं जिनमें कतिपय विशिष्ट गणितीय अभिलक्षण हैं। ये अभिलक्षण कतिपय मज़ेदार परिणाम पैदा करते हैं जो आर्थिक विश्लेषण के लिए आकर्षक हैं।

### 5.4.1 रेखीय उत्पादन फलन

रेखीय उत्पादन फलन को निम्नलिखित प्रकार व्यक्त किया जाता है?

$$Q = \alpha K + \beta L$$

जहाँ, Q = उत्पादन, K = पूँजी (साधन), L = श्रम (साधन), $\alpha$ तथा $\beta$ = स्थिरांक। इस प्रकार के उत्पादन फलन में प्रयुक्त साधन एक-दूसरे के पूर्ण स्थानापन्न हैं इसके चलते एक सीधी रेखा के रूप वाले नीचे की ओर गिरते ढाल के समोत्पादन वक्र पर MRTS सदैव स्थिर रहती है। इसे चित्र 5.7 में दर्शाया गया है।




चित्र 5.7 : रेखीय उत्पादन फलन के लिए समोत्पाद वक्र

$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\beta}{\alpha}$, जो कि एक स्थिरांक है अब तकनीकी प्रतिस्थापन की लोच

$$\sigma = \frac{\Delta \frac{K}{L} \Big/ \frac{K}{L}}{\Delta MRTS / MRTS}$$

चूँकि रेखीय उत्पादन फलन में MRTS स्थिर रहती है इसलिए $\Delta MRTS = 0$

$$(\sigma) = \infty$$

तकनीकी प्रतिस्थापन की लोच अनंत है जो इंगित करता है कि आगत एक-दूसरे के पूर्ण स्थानापन्न हैं।

### 5.4.2 लियोन्तीफ उत्पादन फलन

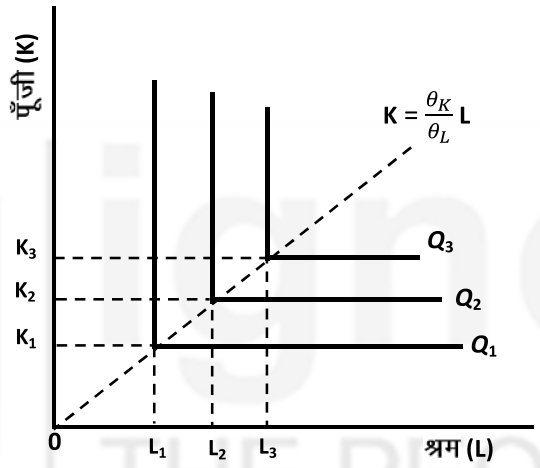
कभी-कभी उत्पादन तकनीक ऐसी हो सकती है कि उत्पत्ति के साधन एक निश्चित अनुपात में प्रयुक्त किए जाते हैं। उदाहरणार्थ, उत्पाद की एक इकाई उत्पादित करने के लिए पूँजी एवं श्रम को 2:1 के अनुपात में प्रयुक्त किया जाय ताकि केवल पूँजी या केवल श्रम की इकाई में वृद्धि करके अथवा उनकी मात्राओं के अनुपात को बदलकर उत्पादन में वृद्धि कर पाना संभव न हो। लियोन्तीफ उत्पादन तकनीक ऐसी स्थिति को इंगित करती है जहाँ उत्पत्ति के साधनों को एक निश्चित अनुपात में प्रयुक्त किया जाता है। इसीलिए इसे

स्थिर अनुपात उत्पादन फलन भी कहा जाता है। लियोन्तीफ उत्पादन फलन को निम्नलिखित प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$Q = \min\left(\frac{K}{\theta_K}, \frac{L}{\theta_L}\right)$$

जहाँ, Q = उत्पादन की मात्रा, K, L = उत्पत्ति के साधन, $\theta_K$ , $\theta_L$ = इकाई आगत आवश्यकताएँ। उत्पादन की एक इकाई उत्पादित करने के लिए साधन K की $\theta_K$ इकाइयों तथा साधन L की इकाइयों $\theta_L$ की आवश्यकता है। परिणामतः Q मात्रा उत्पादित करने के लिए साधन K की $\theta_K Q$ तथा साधन L की $\theta_L Q$ इकाइयों की आवश्यकता होगी। इस प्रकार Q उत्पादन करने के लिए साधनों का सुनिश्चित या स्थिर अनुपात $\frac{K}{L} = \frac{\theta_K}{\theta_L}$ है।

ऐसे उत्पादन फलन के आगत एक-दूसरे के पूर्ण संपूरक के रूप में व्यवहार करते हैं। लियोन्तीफ उत्पादन फलन को चित्र 5.8 में प्रदर्शित किया गया है। इस प्रकार के उत्पादन फलन में समोत्पाद वक्रों का आकार L प्रकार का होता है।




**चित्र 5.8 : लियोन्तीफ उत्पादन फलन के समोत्पाद वक्र**

उपर्युक्त चित्र में यदि $K = K_1$ तथा $L = L_2$ है तो $\frac{K_1}{\theta_K} < \frac{L_2}{\theta_L}$ तो $Q = \frac{K_1}{\theta_K}$, इस मामले में साधन L का तकनीकी दक्ष स्तर $\frac{K_1}{\theta_K} = \frac{L}{\theta_L} \Rightarrow L = \frac{\theta_L}{\theta_K} K_1$, जिसे चित्र 5.8 में $L_1$ द्वारा दर्शाया गया है। मूल बिंदु से जाने वाली रेखा, जिस पर साधनों का अनुपात $\frac{\theta_K}{\theta_L}$ के बराबर है, को निम्नलिखित समीकरण के रूप में व्यक्त किया जा सकता है : $K = \frac{\theta_K}{\theta_L} L$.

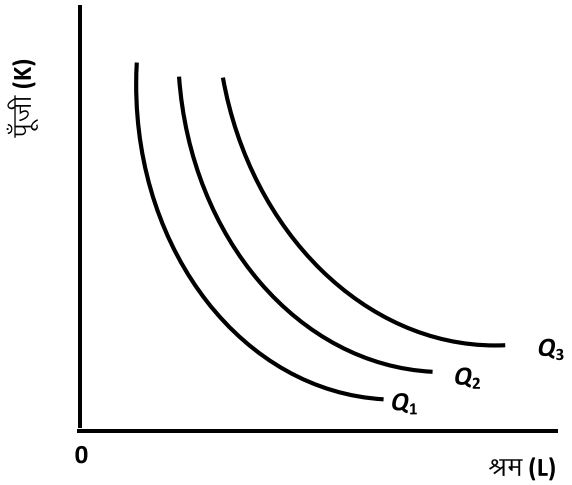
चूँकि, आगतों के अनुपात में परिवर्तन की कोई संभावना नहीं है इसलिए MRTS में किसी किसी भी परिवर्तन के परिणामस्वरूप साधनों के अनुपात में कोई परिवर्तन नहीं होगा अर्थात् $\Delta\left(\frac{K}{L}\right) = 0$ स्पष्ट है कि लियोन्तीफ उत्पादन फलन के लिए तकनीकी प्रतिस्थापन की लोच $(\sigma) = 0$.

### 5.4.3 कॉब-डग्लस उत्पादन फलन

सर्वाधिक प्रयुक्त किए जाने वाले कॉब-डग्लस उत्पादन फलन को निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है।

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

जहाँ Q = उत्पादन की मात्रा, L तथा K = उत्पत्ति के साधन, A, $\alpha$ एवं $\beta$ = धनात्मक स्थिरांक हैं। इस प्रकार के उत्पादन फलन के समोत्पाद वक्र अतिपरवलय आकार का होता है लेकिन वह दोनों अक्षों में से किसी को भी छूता नहीं है (चित्र 5.9)।




**चित्र 5.9 : कॉब-डग्लस उत्पादन फलन का समोत्पाद वक्र**

कॉब-डग्लस उत्पादन फलन के कतिपय अभिलक्षण निम्नलिखित प्रकार हैं।

### पैमाने के प्रतिफल

$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$ कॉब-डग्लस उत्पादन फलन के लिए यदि

$\alpha + \beta = 1$ तो पैमाने के स्थिर प्रतिफल (CRS)

$\alpha + \beta > 1$ तो पैमाने के बढ़ते प्रतिफल (IRS)

$\alpha + \beta < 1$ तो पैमाने के घटते प्रतिफल (DRS)

### साधनों के औसत उत्पाद एवं सीमांत उत्पाद

$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$ कॉब-डग्लस उत्पादन फलन के लिए

श्रम का औसत उत्पाद $(AP_L) = \frac{AL^{\alpha}K^{\beta}}{L} = AL^{\alpha-1}K^{\beta}$

पूँजी का औसत उत्पाद $(AP_K) = \frac{AL^{\alpha}K^{\beta}}{K} = AL^{\alpha}K^{\beta-1}$

श्रम का सीमांत उत्पाद $(MP_L) = \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}$

पूँजी का सीमांत उत्पाद $(MP_k) = \frac{\partial Q}{\partial K} = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}$

### तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर (MRTS)

$MP_L = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}$ तथा $MP_K = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}$

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

## पूर्ण उत्पाद विभाजन प्रमेय (यूलर का नियम)

यदि प्रथम कोटि के समघातीय उत्पादन फलन में, साधन की प्रत्येक इकाई को उसके सीमांत उत्पाद के बराबर प्रतिफल का भुगतान किया जाता है तो इस प्रक्रिया में कुल उत्पादन साधनों की समस्त इकाइयों में बंट जाता है। इसे ही पूर्ण उत्पाद विभाजन प्रमेय कहा जाता है।

पैमाने के स्थिर प्रतिफल वाले कॉब-डग्लस उत्पादन फलन $Q = A.L^{\alpha}K^{\beta}$ पर विचार कीजिए जहाँ $\alpha + \beta = 1$

अब $MP_L = A.\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta}$ तथा $MP_K = A.\beta\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha}$

यूलर प्रमेय के अनुसार यदि कोई उत्पादन फलन प्रथम कोटि का समघातीय उत्पादन फलन है तो

कुल उत्पादन $(Q) = L.\ MP_L + K.MP_K$

$$Q = L.A\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta} + K.A.\beta\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha}$$

$$Q = A.\alpha L^{1-\beta}K^{\beta} + A.\beta L^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

$$= A.(1-\beta)L^{1-\beta}K^{\beta} + A.\beta L^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

$$= A.L^{1-\beta}K^{\beta}$$

$$= A.L^{\alpha}K^{\beta}$$

$$= Q$$

इस प्रकार $\alpha + \beta = 1$ वाले कॉब-डग्लस उत्पादन फलन में यदि मज़दूरी दर= $MP_L$ तथा पूँजी की प्रतिफल की दर (K) = $MP_K$ हो तो कुल उत्पाद अंततः L और K के बीच पूर्ण रूप से बंट जाएगा।

### प्रतिस्थापन की लोच

$\mathbf{e_s}$ अथवा $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\frac{K}{L}\text{अनुपात में आनुपातिक परिवर्तन}}{MRTS_{LK}\text{ में आनुपातिक परिवर्तन}}$

$$= \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)/\frac{K}{L}}{dMRTS_{LK}/MRTS_{LK}}$$

$$= \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)/\frac{K}{L}}{d\left(\frac{\alpha K}{\beta L}\right)/\left(\frac{\alpha K}{\beta L}\right)}$$

$$= \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)/\frac{K}{L}}{\frac{\alpha}{\beta}.d\left(\frac{K}{L}\right)/\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right)} = 1$$

**साधनों की उत्पाद लोच**

श्रम की उत्पाद लोच $= e_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{Q}{L}}$

$$= \frac{MP_L}{AP_L} = \frac{\alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta}}{A L^{\alpha-1} K^{\beta}}$$

$$e_L = \alpha$$

पूँजी की उत्पाद लोच $= e_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{MP_K}{AP_K}$

$$e_K = \frac{\beta A L^{\alpha} K^{\beta-1}}{A L^{\alpha} K^{\beta-1}}$$

$$e_K = \beta$$

**उदाहरण 3**

नीचे दिए गए कॉब-डग्लस उत्पादन फलन पर विचार कीजिए

$$Q = 10L^{0.45}K^{0.30}$$

जहाँ Q, साधन L श्रम तथा पूँजी K को प्रयुक्त करते हुए कुल उत्पादन है।

इससे निम्नलिखित की गणना कीजिए :

क) श्रम एवं पूँजी के लिए उत्पाद लोच

ख) यदि श्रम में 15% की वृद्धि कर दी जाती है तो उत्पाद में कितना परिवर्तन होगा?

ग) यदि श्रम तथा पूँजी दोनों में 15% की वृद्धि कर दी जाती है तो उत्पादन में कितना परिवर्तन होगा?

**हल**

क) श्रम के सापेक्ष उत्पाद की लोच $e_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{MP_L}{AP_L}$

$$= \frac{10 \times 0.45 L^{-0.55} K^{0.30}}{10 \times L^{-0.55} K^{0.30}}$$

$$= 0.45$$

पूँजी के संदर्भ में उत्पाद की लोच, $e_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{MP_K}{AP_K}$

$$= \frac{10 \times 0.30 L^{0.45} K^{-0.70}}{10 \times L^{0.45} K^{-0.70}}$$

$$= 0.30$$

ख) $e_L = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta L}$

$e_L = 0.45$ तथा $\%\Delta L = 15$

$\%\Delta Q = e_L \times \%\Delta L = 0.45 \times 15 = 6.75$ अर्थात् उत्पाद में 6.75%. की वृद्धि होगी।

ग) श्रम में 15% की वृद्धि होने पर उत्पाद में 6.75% की वृद्धि होती है

इसी प्रकार गणना की जा सकती है कि पूँजी में 15% की वृद्धि होने पर उत्पादन में होने वाली वृद्धि $= e_K \times \%\Delta K = 4.5\%$

अतः पूँजी एवं श्रम दोनों में 15% की वृद्धि कर दिए जाने पर उत्पादन में होने वाली वृद्धि $= (6.75 + 4.5)\% = 11.25\%$ होगी।

**उदाहरण 4**

उत्पत्ति के दो साधनों – श्रम (L) तथा पूँजी (K) से उत्पादित किसी वस्तु का उत्पादन फलन $Q = 10\sqrt{LK}$ है। यह किस प्रकार के पैमाने के प्रतिफल को प्रदर्शित करता है।

**हल**

प्रश्नगत उत्पादन फलन $Q = 10.L^{1/2}K^{1/2}$ दो साधनों की मात्राओं में एक धनात्मक स्थिरांक $\lambda$ से गुणा करने पर

$$Q' = 10(\lambda L)^{1/2}(\lambda K)^{1/2}$$

$$= \lambda^{1/2}\lambda^{1/2}10L^{1/2}K^{1/2}$$

$$Q' = \lambda Q$$

इसका अर्थ यह हुआ कि साधनों की मात्राओं में $\lambda$ गुणा वृद्धि कर दिए जाने पर कुल उत्पादन में $\lambda$ गुणा वृद्धि हो जाती है इसलिए यह पैमाने के स्थिर प्रतिफल को इंगित करता है।

### 5.4.4 सी.ई.एस.उत्पादन फलन

रेखीय उत्पादन फलन तथा कॉब-डग्लस उत्पादन फलन वस्तुतः प्रतिस्थापन की स्थिर लोच (CES) वाले उत्पादन फलन के ही विशिष्ट स्वरूप है। प्रतिस्थापन की स्थिर लोच (CES) उत्पादन फलन केनेथ ऐरो, चेनेरी, मिन्हास एवं सोलो द्वारा संयुक्त रूप से विकसित किया गया है। CES उत्पादन फलन एक सामान्य उत्पादन फलन है जहाँ साधनों के प्रतिस्थापन की लोच का कोई भी धनात्मक मान हो सकता है। इस उत्पादन फलन को निम्नलिखित प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$Q = C\,[\alpha K^{\rho} + (1 - \alpha)L^{\rho}]^{1/\rho}$$

जहाँ Q =उत्पादन को दर्शाता है जबकि C तकनीकी प्रगति के एक माप के रूप में एक दक्षता प्राचल है। C का मान शून्य से अधिक है। प्रौद्योगिकीय या संगठनात्मक परिवर्तनों से इसके मान में परिवर्तन के परिणामस्वरूप उत्पादन फलन में विवर्तन हो जाता है। '$\alpha$' वितरण प्राचल है, जो साधन के हिस्से को इंगित करता है तथा $0 \leq \alpha \leq 1$ की स्थिति वाला है। यह विभिन्न उत्पादन प्रक्रियाओं में पूँजी (K) तथा श्रम (L) के सापेक्षिक महत्त्व

को इंगित करता है। ρ प्रतिस्थापन प्राचल है जिसे साधनों K तथा L के बीच प्रतिस्थापन की लोच (σ) व्युत्पन्न करने के लिए प्रयुक्त किया गया है। $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$, ρ का मान इकाई से कम या इकाई के बराबर है तथा $-\infty$ भी हो सकता है। इसकी दो स्थितियाँ $\rho \to 1$ या $\rho \to -\infty$ हो सकती है।

i) जब $\rho \to 1$ होती है तो प्रतिस्थापन की लोच अंतत ∞ की ओर जाने वाली हो सकती है जो एक ऐसे रेखीय उत्पादन फलन को बताती है जहाँ उत्पत्ति के साधन एक-दूसरे के पूर्ण स्थानापन्न हैं तथा समोत्पाद वक्र एक सीधी रेखा है।

ii) जब $\rho \to -\infty$, होता है तो प्रतिस्थापन की लोच शून्य हो जाती है जो लियोन्तीफ उत्पादन फलन की स्थिति है जिसमें उत्पत्ति के साधन एक-दूसरे के पूरक हैं। ऐसे उत्पादन फलन के लिए समोत्पाद वक्र L आकार का होता है।

iii) जब $\rho = 0$ होता है तो प्रतिस्थापन की लोच = 1 इकाई के बराबर होती है इस अवस्था में CES उत्पादन फलन कॉब-डग्लस उत्पादन फलन हो जाता है और समोत्पाद वक्र मूल बिंदु के प्रति उन्नतोदर होता है।

CES उत्पादन फलन को अर्थशास्त्रियों द्वारा उत्पादन प्रक्रियाओं के अनुभवजन्य अध्ययन में प्रायः प्रयुक्त किया जाता है क्योंकि यह प्रतिस्थापन की लोच (σ) के मान का पहले से ही निश्चित करने के बजाय उत्पादन प्रक्रिया से प्राप्त आंकड़ों से निर्धारित प्रतिस्थापन की लोच के निर्धारण को स्वीकार करता है।

**बोध प्रश्न 2**

1) निम्नलिखित उत्पादन फलन पर विचार कीजिए :

$$Q = L^{0.75}K^{0.25}$$

क) श्रम का सीमांत उत्पाद एवं पूँजी का सीमांत उत्पाद ज्ञात कीजिए।

ख) दर्शाएं कि घटते प्रतिफलों का नियम परिवर्तनशील साधनों के मामले में लागू होता है।

ग) दर्शाएं कि यदि साधनों को उनके सीमांत उत्पाद के बराबर भुगतान किया जाता तो कुल उत्पादन पूरा बंट जाता है।

घ) श्रम के लिए पूँजी के तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर की गणना कीजिए।

ङ) प्रतिस्थापन की लोच ज्ञात कीजिए।

च) दर्शाएं कि यह फलन पैमाने के स्थिर प्रतिफल वाला है।

.....

.....

.....

.....

.....

2) नीचे दिए गए CES उत्पादन फलन पर विचार कीजिए :

$$Q = [\alpha L^{\rho} + (1 - \alpha)K^{\rho}]^{1/\rho}$$

जहाँ $0 \leq \alpha \leq 1$, $\rho \leq 1$, Q उत्पादन की मात्रा, L एवं K उत्पत्ति के दो साधन

क) L एवं K दोनों साधनों के सीमांत उत्पादों को ज्ञात कीजिए।

ख) $MRTS_{LK}$ के लिए व्यंजक बताइए।

ग) क्या यह फलन समस्थैतिक उत्पादन फलन है।

.....

.....

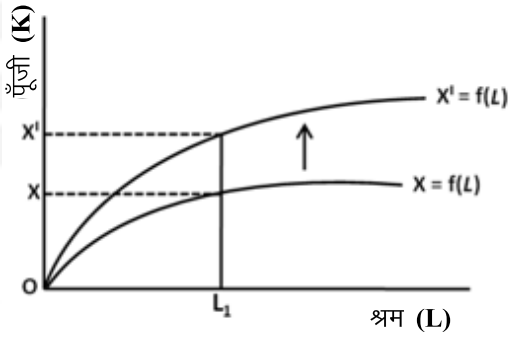
.....

.....

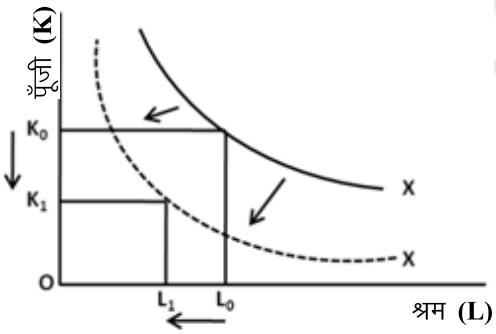
.....

## 5.5 प्रौद्योगिकीय प्रगति एवं उत्पादन फलन

समय के साथ प्रौद्योगिकीय प्रगति आर्थिक संवृद्धि के पीछे एक बड़ी ताकत रही है। उत्पत्ति के साधनों के स्थिर स्तर पर रहते हुए भी यह उत्पादन में वृद्धि होने में सहायक रहती है। तकनीकी प्रगति को उत्पादन फलन के ऊपर की ओर विवर्तन द्वारा दर्शाया जा सकता है (चित्र 5.9क में जहाँ श्रम $L_1$ के समान स्तर पर उत्पादन की अधिक मात्रा उत्पादित की जा सकती है, $X_1 > X$) या नीचे की ओर विवर्तित समोत्पाद फलन द्वारा (चित्र 5.10ख, जहाँ उत्पादन के समान स्तर को श्रम $L_1 < L_0$ एवं पूँजी $K_1 < K_0$ की कम इकाइयों को लगाकर प्राप्त किया जा सकता है)।




चित्र 5.10क : प्रौद्योगिकीय परिवर्तन एवं उत्पादन फलन




चित्र 5.10ख : प्रौद्योगिकीय परिवर्तन एवं समोत्पाद वक्र

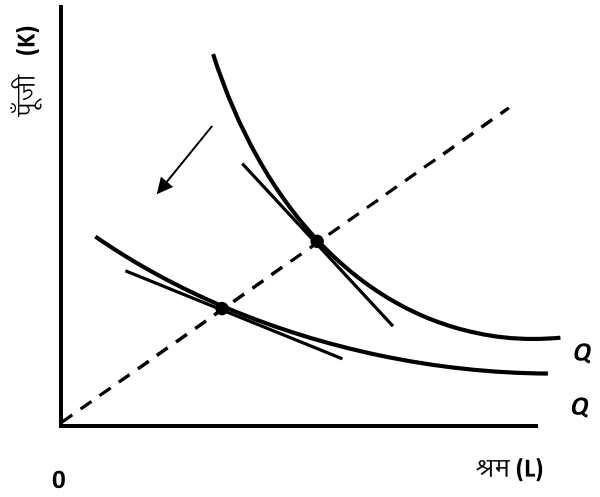
### 5.51 प्रौद्योगिकीय प्रगति का हिक्स का वर्गीकरण

हिक्स ने उत्पादन के साधनों की प्रतिस्थापन दर पर प्रभाव डालने के आधार पर तकनीकी प्रगति के तीन प्रकारों के बीच भेद किया है।

#### पूँजी प्रधान तकनीकी प्रगति

ऐसी तकनीकी प्रगति को पूँजी प्रधान तकनीकी (श्रम की बचत करने वाली) कहा जाता है जब तकनीकी प्रगति के कारण समोत्पाद विवर्तित होने पर संतुलन पर बिंदु अपेक्षाकृत कम

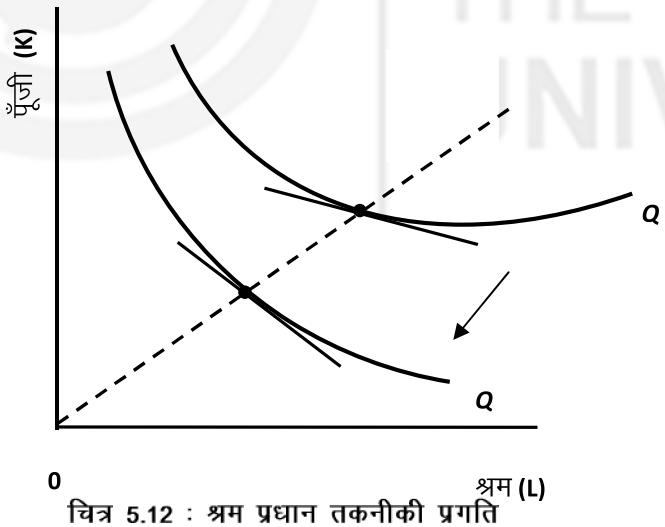
$MRTS_{LK}$ पर स्थापित होता है। इसके परिणामस्वरूप $MP_L$ की अपेक्षा $MP_K$ में अधिक वृद्धि होती है। इसका सीधा-सा अर्थ यह है कि अर्थव्यवस्था में प्रतिश्रमिक पूँजी या पूँजी सघनता में वृद्धि हो जाती है। चित्र 5.11 देखें जहाँ संतुलन बिंदुओं पर $MRTS_{LK}$ मूल बिंदु की ओर खिसकती जाती है।




चित्र 5.11 : पूँजी प्रभावी प्रधान प्रगति

### श्रम प्रधान तकनीकी प्रगति

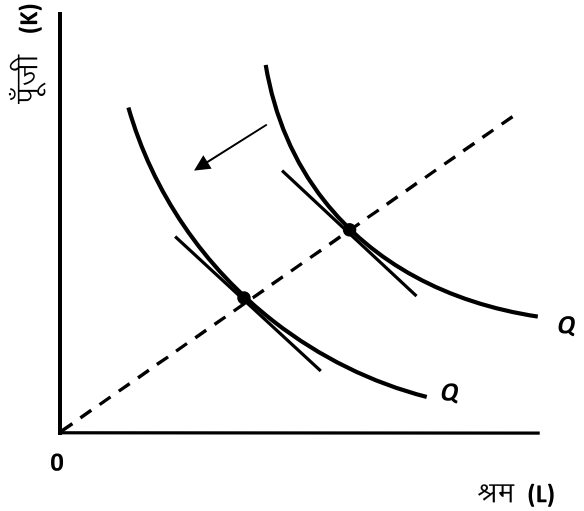
श्रम प्रधान तकनीकी प्रगति वह होती है जब अर्थव्यवस्था में समोत्पाद के विवर्तन के परिणामस्वरूप संतुलन बिंदुओं पर एक ऊँची $MRTS_{LK}$ प्राप्त होती है। इस अवस्था में $MP_K$ की अपेक्षा $MP_L$ में अधिक वृद्धि होती है। इस अवस्था में प्रति श्रमिक पूँजी की मात्रा कम होती जाती है। चित्र 5.12 को देखें जहाँ संतुलन बिंदुओं पर $MRTS_{LK}$ के बढ़ जाने से हम मूल बिंदु की ओर बढ़ते जाते हैं।




चित्र 5.12 : श्रम प्रधान तकनीकी प्रगति

### तटस्थ तकनीकी प्रगति

ऐसे तकनीकी प्रगति को तटस्थ कहा जाता है जहाँ तकनीकी प्रगति के कारण समोत्पाद वक्र के विवर्तन से $MRTS_{LK}$ में संतुलन की अवस्था में भी कोई परिवर्तन नहीं होता। इस अवस्था में $MP_K$ तथा $MP_L$ दोनों में एकसमान अनुपात में वृद्धि होती है। इसे चित्र 5.13 में दर्शाया गया है। जिसमें संतुलन बिंदुओं पर $MRTS_{LK}$एकसमान रहते हुए मूल बिंदु की ओर बढ़ते हैं।




चित्र 5.13 : तटस्थ तकनीकी प्रगति

## 5.6 सार-संक्षेप

किसी उत्पादन प्रक्रिया में आगतों एवं उत्पादन के बीच के प्रौद्योगिकीय संबंध को उत्पादन फलन कहते हैं। इकाई का प्रारंभ उत्पादन फलन के दो प्रकारों – अल्पकालीन उत्पादन फलन तथा दीर्घकालीन उत्पादन फलन की व्याख्या के साथ हुआ। अल्पकालीन उत्पादन फलन आगतों एवं उत्पादन के बीच का वह तकनीकी संबंध है जिसमें अन्य आगतों को स्थिर रखते हुए कम से कम एक आगत की इकाइयों (मात्रा) में परिवर्तन किया जाता है। जबकि दीर्घकालीन उत्पादन फलन के अंतर्गत उत्पत्ति के सभी साधन परिवर्तनशील हो जाते हैं। इस इकाई में इन्हीं अवधारणाओं की विस्तार से व्याख्या की गयी जिन्हें पहले सेमेस्टर की व्यष्टि अर्थशास्त्र की इकाई में समझाया गया था। इस इकाई में कुल-उत्पाद, औसत उत्पाद, सीमांत उत्पाद, परिवर्तनशील अनुपातों का नियम साधन की उत्पाद लोच, तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर, प्रतिस्थापन की लोच, उत्पादक का संतुलन आदि अवधारणाओं की गणितीय व्याख्या भी की गयी है। इसके बाद समघातीय फलन एवं समस्थैतिक फलन को समझाया गया। किसी समघातीय फलन के बारे में हमने जाना कि फलन के सभी घटकों के मानों को किसी धनात्मक संख्या m से गुणा करने पर फलन का मान $m^k$ गुना बढ़ जाता है। इस फलन का एकदिश रूपांतरण समस्थैतिक फलन होता है। इस प्रकार, समघातीय फलन तो समस्थैतिक फलन हो सकता है लेकिन समस्थैतिक फलन समघातीय फलन होना आवश्यक नहीं होता।

इसी इकाई में विभिन्न प्रकार के उत्पादन फलनों जैसे कि रेखीय (पूर्ण स्थानापन्न साधन), उत्पादन फलन, लियोन्तीफ (पूर्ण पूरक साधन) उत्पादन फलन, कॉब-डग्लस उत्पादन फलन, CES उत्पादन फलन की भी विवेचना की गयी। यह भी समझाया गया कि किस प्रकार एक CES उत्पादन फलन ρ के विभिन्न मानों के लिए $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$ के व्यंजक के साथ जहाँ $\sigma$ दो साधनों के बीच प्रतिस्थापन की लोच है लियोन्तीफ या रेखीय उत्पादन फलन हो जाता है। किसी समोत्पाद वक्र या उत्पादन फलन पर तकनीकी प्रगति के प्रभाव की व्याख्या के साथ इकाई का समापन हुआ है।

## 5.8 संदर्भ-ग्रंथादि

1. Koutsoyiannis, A.(1979). *Modern Microeconomics,* Macmillan; Macmillan; New York Chapters 3 and 4, page 67-148.

2. Bhardwaj, R.S. (2005). *Mathematics for economics and business,* Excel Books.

3. Henderson, M.J. (2003). *MicroEconomic Theory A Mathematical Approach* Tata McGrawl-Hill Publiching Company Limited New Delhi.

4. Varian, H.R. (2010). *Intermediate Microeconomics, A Modern Approach,* W.W.Norton & Company New York

## 5.9 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1) ह्रासमान सीमांत प्रतिफल, लागू होने के कारण एक बिंदु के बाद सीमांत उत्पाद घटने लगता है लेकिन कुछ सीमा तक इसके घटते रहने के बावजूद भी यह औसत उत्पाद से अधिक रहता है लेकिन जब औसत उत्पाद घटना प्रारंभ करता है तो सीमांत उत्पाद औसत उत्पाद से नीचे हो जाता है। इसीलिए सीमांत, उत्पाद वक्र औसत उत्पाद वक्र के उच्चतम बिंदु पर काटता है। सीमांत उत्पाद औसत उत्पाद के बराबर हो जाने के बाद भी घटता ही रहता है लेकिन धनात्मक रहता है। इससे कुल उत्पाद में वृद्धि जारी रहती है। जब सीमांत उत्पाद शून्य हो जाता है तो कुल उत्पाद अधिकतम होता है। इसके परिणामस्वरूप औसत उत्पाद के अधिकतम हो जाने के बाद उसके घटते रहने पर कुल उत्पाद में उस समय तक वृद्धि होती रहती है जब तक कि सीमांत उत्पाद ऋणात्मक नहीं हो जाता।

2) क) $MP_L = 30 - 2L$

$L = 15$ पर $MP_L = 0$

ख) $\frac{d\,(MP_L)}{dL} = -2 < 0$

हाँ, उत्पादन फलन श्रम की ह्रासमान सीमांत उत्पादकता को प्रदर्शित करता है।

ग) $-12L^3 + 540L^2 - 7200L + 27000; -3000$

**संकेत :** $TR = AR \times X = (1200 - 3X).\ X = 1200X - 3X^2$

अब, $MRP_L = MR\ .\ MP_L$

$$= \frac{d\,(TR)}{dL} \cdot \frac{dX}{dL}$$

$$= (1200 - 6X)\ .\ (30 - 2L)$$

$$= [1200 - 6 \times (50 + 30L - L^2)]\ (30 - 2L)$$

$$= -12L^3 + 540L^2 - 7200L + 27000$$

घ) $MRP_L$ ऋणात्मक होने पर अधिक श्रमिक लगाना लाभकारी नहीं है बल्कि कम श्रमिकों को लगाना ही लाभदायक होगा।

3) क) हाँ, कोटि 0

ख) नहीं

ग) हाँ, प्रथम कोटि

घ) हाँ, छठी कोटि

ङ) नहीं

**बोध प्रश्न 2**

1) क) $MP_L = 0.75\left(\frac{K}{L}\right)^{0.25}$; $MP_K = 0.25\left(\frac{L}{K}\right)^{0.75}$

ख) परिवर्तनशील साधन में ह्रासमान प्रतिफल नियम तब लागू होता है जब $\frac{\partial MP_L}{\partial L} < 0$ तथा $\frac{\partial MP_K}{\partial K} < 0$ अर्थात् जब उस साधन की अधिक इकाइयाँ लगाने पर किसी साधन के सीमांत उत्पाद में गिरावट होती है यदि अन्य साधनों को स्थिर रखने पर

चूँकि, $\frac{\partial MP_L}{\partial L} = -0.25 \times 0.75\left(\frac{K^{0.25}}{L^{1.25}}\right) < 0$

एवं $\frac{\partial MP_K}{\partial K} = -0.75 \times 0.25\left(\frac{L^{0.75}}{K^{1.75}}\right) < 0$

यहाँ परिवर्तनशील साधन के ह्रासमान प्रतिफल का नियम लागू हो रहा है।

ग) $Q = MP_L . L + MP_K . K$ (दर्शाने के लिए उत्पाद पूर्ण रूप से बंट जाने का सिद्धांत दाएं पक्ष पर विचार करने पर $MP_L . L + MP_K . K \Longrightarrow 0.75\left(\frac{K}{L}\right)^{0.25} . L + 0.25\left(\frac{L}{K}\right)^{0.75} . K$

$\Longrightarrow 0.75K^{0.25}L^{0.75} + 0.25K^{0.25}L^{0.75}$

$\Longrightarrow K^{0.25}L^{0.75}(0.75 + 0.25)$

$\Longrightarrow L^{0.75}K^{0.25}$, जो Q के बराबर है (बायां पक्ष)

घ) $MRTS_{LK} = 3\left(\frac{K}{L}\right)$

ङ) $\sigma = 1$

संकेत : $\sigma = \frac{\Delta \frac{K}{L} \Big/ \frac{K}{L}}{\Delta MRTS / MRTS}$

$MRTS = 3\left(\frac{K}{L}\right)$ रखने पर

प्रतिस्थापन की लोच= $\frac{\Delta K/L / K/L}{3\Delta\left(\frac{K}{L}\right) \Big/ 3\left(\frac{K}{L}\right)} = 1$

2) क) $MP_L = \alpha L^{\rho-1} [\alpha L^{\rho} + (1-\alpha)K^{\rho}]^{1/\rho-1}$

संकेत : $MP_L = \left(\frac{1}{\rho}\right) [\alpha L^{\rho} + (1-\alpha)K^{\rho}]^{1/\rho-1} \rho \alpha L^{\rho-1} \Longrightarrow \alpha L^{\rho-1} [\alpha L^{\rho} + (1-\alpha)K^{\rho}]^{1/\rho-1}$

$MP_K = (1-\alpha) K^{\rho-1} [\alpha L^{\rho} + (1-\alpha)K^{\rho}]^{1/\rho-1}$

ख) $MRTS_{LK} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1}$

ग) हाँ, फलन समस्थैतिक है चूँकि $MRTS_{LK}$ साधन अनुपातों $\left(\frac{L}{K}\right)$ पर निर्भर है।

# इकाई 6 लागत फलन

संरचना


6.0 उद्देश्य

6.1 विषय प्रवेश

6.2 लागत न्यूनतमीकरण (Cost Minimisation)

6.2.1 लागत न्यूनतमीकरण के लिए ग्राफिकल उपागम (Graphical Approach for Cost Minimisation)

6.2.2 विस्तार पथ (Expansion Path)

6.2.3 लागत न्यूनतमीकरण हेतु विश्लेषणात्मक उपागम (Analytical Approach for Cost Minimisation)

6.3 सशर्त साधन माँग फलन (Conditional Factor Demand Function)

6.4 लागत फलन (Cost Function)

6.4.1 लागत फलन के अभिलक्षण (Properties of a Cost Function)

6.4.2 औसत एवं सीमांत लागत फलन (Average and Marginal Cost Functions)

6.4.3 AC एवं MC फलनों के बीच संबंध (Relationship between AC and MC Function)

6.5 अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन लागत फलन (Short-run and Long-run Cost Functions)

6.5.1 अल्पकालीन लागत फलन (Short-run Cost Function)

6.5.2 दीर्घकालीन लागत फलन (Long-run Cost Function)

6.6 सार-संक्षेप

6.7 संदर्भ ग्रंथादि

6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत


## 6.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोपरांत, आप सक्षम होंगे :

- लागत को कम से कम करने की अवधारणा को बताने में;
- लागत को कम से कम करने की समस्या के ग्राफिकल उपागम एवं विश्लेषणात्मक उपागम को समझ पाने में;
- लागत न्यूनतमीकरण की संरोधाधीन अभीष्टीकरण समस्या के समाधान के रूप में सशर्त साधन माँग फलन की व्युत्पत्ति एवं व्याख्या कर पाने में;
- साधन कीमतों एवं उत्पादन के एक फलन के रूप में लागत फलन को व्युत्पन्न कर पाने में;
- औसत लागत फलन एवं सीमांत लागत फलन एवं इनके बीच के संबंध का विश्लेषण कर पाने में; और

- अल्पकालीन उत्पादन फलन एवं दीर्घकालीन उत्पादन फलन की अवधारणा की विवेचना कर पाने में।

## 6.1 विषय-प्रवेश

कोई भी उत्पादन प्रक्रिया लाभ अर्जित करने के लिए की जाती है तथा लाभ को अधिकतम करने का औचित्य उत्पादक वर्ग में महत्त्वपूर्ण स्थान रखता है। उत्पादन प्रक्रिया के दौरान लगाई गयी लागतों एवं प्राप्त आगम के अंतर को लाभ के रूप में व्यक्त किया जाता है। स्पष्ट लागतें वे हैं जो उत्पादक या उद्यमी द्वारा कच्चा माल क्रय करने के लिए, वेतन एवं मज़दूरी का भुगतान करने के लिए, उत्पादित वस्तुओं की पैकिंग और वितरण करने के लिए की जाती हैं। अस्पष्ट लागतें अथवा निहित लागतें उत्पादन प्रक्रिया में किसी उत्पादक के स्व-स्वामित्व वाली आगतों की अवसर लागतें हैं। जैसे कि उद्यमी के उद्यमिता कौशल, व्यवसाय हेतु प्रयुक्त स्व-स्वामित्व वाले भवन आदि की अवसर लागत। किसी इकाई की सम्भाव्यता के परीक्षण हेतु आर्थिक लाभ के अनुमान में उत्पादन की स्पष्ट तथा अस्पष्ट दोनों ही प्रकार की लागतों की गणना की जाती है। लाभ को अधिकतम करने के उद्देश्य को आगम को अधिकतम करके एवं/अथवा लागत को न्यूनतम करके पूरा किया जा सकता है। वर्तमान इकाई में लागत को न्यूनतम करने के विश्लेषण का प्रयास किया गया है।

लागत न्यूनतमीकरण की अवधारणा की व्याख्या के साथ इकाई का प्रारंभ होता है। हम लागत न्यूनतमीकरण हेतु ग्राफिकल एवं विश्लेषणात्मक उपागम की विवेचना के उपखंडों के साथ आगे बढ़ते हैं। इसके बाद सशर्त साधन माँग फलन की अवधारणा एवं इसे प्रयुक्त करते हुए लागत फलन को व्युत्पन्न करने की विधि के बारे में बताया जाएगा। लागत फलन से ही औसत लागत तथा सीमांत लागत फलनों को ज्ञात किया जाएगा। इस इकाई में, AC वक्र एवं MC वक्र के बीच के संबंध को गणितीय तरीके से समझाया गया है। इसे आप पहले सेमेस्टर के सूक्ष्म अर्थशास्त्र के प्रारंभिक पाठ्यक्रम (बीईसीसी-101) में समझ चुके हैं। अंत में, उत्पादन के परिवर्तनशील एवं स्थिर साधनों की अवधारणाओं और परिणामतः अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन लागत फलनों की विवेचना की जाएगी।

## 6.2 लागत न्यूनतमीकरण

किसी वस्तु के उत्पादन को न्यूनतम लागत पर उत्पादित करना ही लागत न्यूनतमीकरण है। उत्पादन के वांछित स्तर को प्राप्त करने के लिए आगतों या साधनों की मात्राओं को इस प्रकार प्रयुक्त करना कि लागत न्यूनतम स्तर पर रहे। दिए गए उत्पादन फलन $Q = f(K, L)$, पर विचार कीजिए, जहाँ Q उत्पादन करने के लिए आगतों K तथा L को उनकी प्रति इकाई कीमत क्रमशः r तथा w पर काम पर लगाया गया है। Q मात्रा का उत्पादन करने पर कुल लागत निम्न प्रकार होगी :

$$C = Lw + Kr$$

अब लागत न्यूनतीकरण अनुकूलतमीकरण समस्या इस रूप में प्राप्त होगी :

$$\text{Min} \quad Lw + Kr$$

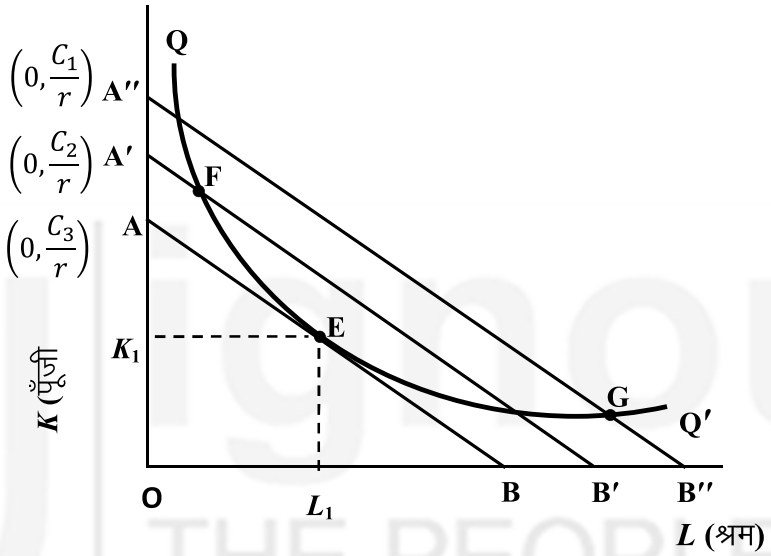
$$\text{s.t.} \quad Q = f(L, K)$$

यहाँ फर्म उत्पादन के Q स्तर को प्राप्त करने के लिए K तथा L आगतों की दी हुई कीमतों तथा f (L, K) प्रौद्योगिकी संबंध पर साधनों K एवं L को प्रयुक्त करती हैं।

उपर्युक्त अनुकूलतमीकरण समस्या का समाधान (L*, K*) इस प्रकार दिया गया है कि (L, K) के सभी मानों के लिए Q = f (L, K) को संतुष्ट करते हुए हमें L*w + K*r ≤ Lw + Kr की स्थिति प्राप्त होती है।

### 6.2.1 लागत न्यूनतमीकरण हेतु ग्राफिकल उपागम

व्यष्टि अर्थशास्त्र के प्रारंभिक पाठ्यक्रम की (बीईसीई-101) 7वीं इकाई में आपने उत्पादक के संतुलन की अवधारणा का अध्ययन किया होगा। उत्पादक का संतुलन उस बिंदु पर स्थापित होता है जहाँ वह वस्तु की अधिकतम मात्रा का उत्पादन कम से कम लागत पर करता है। इसे दिए हुए प्रौद्योगिकीय संबंध पर आगतों/साधनों की दी हुई कीमतों पर ऐसे संयोग को प्रयुक्त किया जाता है जहाँ पर अधिक से अधिक उत्पादन किया जा सके। साधनों के ऐसे संयोग को अनुकूलतम संयोग कहा जाता है। चित्र 6.1 एक ऐसे अभीष्ट साधन संयोजन को दिखा रहा है।




चित्र 6.1 : साधनों का लागत न्यूनतमीकरण संयोग

AB, A′B′ तथा A″B″ रेखाएँ समलागत रेखाएँ हैं जो उन बिंदुओं का बिंदुपथ हैं जिन्हें कोई उत्पादक साधनों की दी हुई कीमतों पर साधन बाज़ार से क्रय करने के लिए समर्थ है। इस समलागत रेखा पर लागत फलन को $C = Lw + Kr \Rightarrow K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r}L$ द्वारा दिखाया जा सकता है। यह $\frac{w}{r}$ ढाल के साथ एक रेखीय समीकरण है। यह C अन्य साधन के रूप में उत्पत्ति के किसी एक साधन की लागत को मापने वाला स्थिरांक है। उपरोक्त समीकरण में C के विभिन्न मूल्यों से सम्बन्धित विभिन्न समलागत रेखाएँ प्राप्त होती हैं। चित्र 6.1 में कुल लागत $C_1$ का प्रतिनिधित्व करने वाली कुल लागत रेखा **A″B″** $K = \frac{C_1}{r} - \frac{w}{r}L$) द्वारा प्रदत्त है। उसी प्रकार A′B′ तथा AB उत्पादन स्तर का प्रतिनिधित्व करने वाली क्रमशः $C_2$ तथा $C_3$ लागत रेखाएँ हैं। दी हुई साधन कीमतों पर उच्च लागत स्तर समलागत रेखाओं को बाहर की ओर समानान्तर दूरी पर क्विर्तित करते हैं। उत्तर- पूर्व की ओर क्विर्तित उच्चस्तरीय समलागत रेखाएँ उच्चस्तरीय लागत स्तर को दिखाते हैं। इस प्रकार $C_1 > C_2 > C_3$ = QQ′ वक्र समोत्पाद वक्र है जो साधनों के उन सभी संयोगों का बिंदुपथ है जिस पर उत्पादन का स्तर एकसमान रहता है। यही लागत न्यूनतमीकरण समस्या का संरोध है। Q = f (L, K) फलन का ढाल तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर ($MRTS_{LK}$) के रूप में दिया गया है। जैसा कि आप जानते हैं कि

तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर वह दर है जिस पर किसी एक साधन की इकाई का अन्य साधन की इकाइयों से प्रतिस्थापित किया जा सकता है, बशर्ते कि उत्पादन का स्तर एकसमान रहे। चित्र 6.1 में E संतुलन का बिंदु है जहाँ समलागत रेखा समोत्पाद वक्र Q $Q_1$ को स्पर्श कर रही है। इस बिंदु पर श्रम की $OL_1$ तथा पूँजी की $OK_1$ इकाइयों को प्रयोग करते हुए कम से कम लागत पर उत्पादन किया जा सकता हैं। E बिंदु पर समोत्पाद का ढाल सम लागत रेखा के ढाल के बराबर है।

$$MRTS_{LK} = \frac{w}{r} \text{ अथवा } \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$$

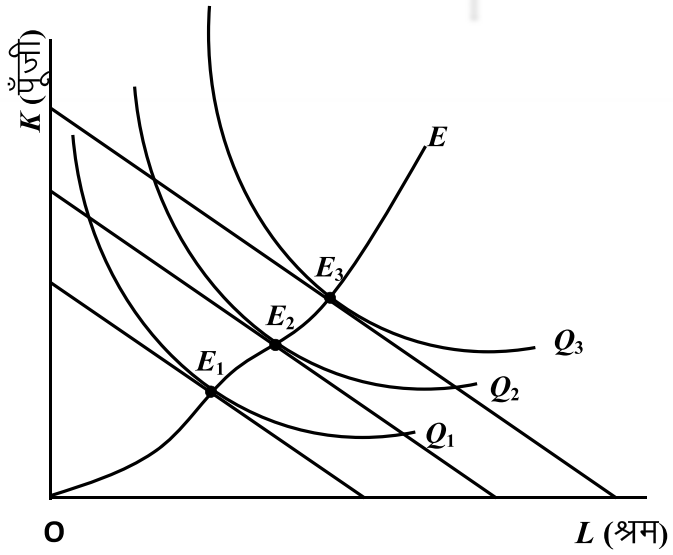
(क्योंकि हम जानते हैं कि $MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K}$)

### 6.2.2 विस्तार पथ

साधनों की कीमतों को स्थिर रखते हुए उत्पादित किए जाने वाले उत्पादन में वृद्धि होने पर लागत न्यूनतमीकरण साधन संयोग किस प्रकार परिवर्तित होते हैं? इस प्रश्न का उत्तर हमें विस्तार पथ से मिलता है? साधनों की दी हुई कीमतों पर कोई फर्म $MRTS_{LK} = \frac{w}{r}$ समलागत रेखा एवं समोत्पाद वक्र के स्पर्श बिंदु पर संतुलन के नियम का पालन करते हुए उत्पादन के प्रत्येक स्तर पर न्यूनतम लागत साधन संयोगों का निर्धारण कर सकती है। उत्पादन में पैमाने में वृद्धि होने पर अनुकूलतम साधन संयोगों के बिंदु पथ को विस्तार पथ कहा जाता है। चित्र 6.2 में OE एक विस्तार पथ है जो उत्पादन के प्रत्येक स्तर पर साधनों K तथा L के विभिन्न संयोगों को निर्धारित करता है। विस्तार पथ पर उत्पादन के विभिन्न स्तरों पर प्रयुक्त किए गए साधनों की लागत न्यूनतम होती है। जैसे-जैसे उत्पादन के स्तर में वृद्धि होती है (समोत्पाद वक्र ऊपर की ओर विवर्तित होता जाता है : $Q_3 > Q_2 > Q_1$) उत्पादन की कुल लागत भी बढ़ती जाती है जो दायीं ओर को विवर्तित एक-दूसरे के समानांतर समलागत रेखाओं से ज्ञात हो रही है। न्यूनतम लागत संयोगों को बिंदुओं $E_1, E_2, E_3$ से प्रदर्शित किया गया है।

**ध्यान रहे**

विस्तार पथ का समीकरण लागत न्यूनतमीकरण नियम $MRTS_{LK} = \frac{w}{r}$ से प्रदर्शित किया गया है।




चित्र 6.2 : विस्तार पथ

### 6.2.3 लागत न्यूनतमीकरण का विश्लेषणात्मक उपागम (Analytical Approach for Cost Minimisation)

विश्लेषणात्मक रूप से, संरोध सहित अभीष्टीकरण समस्या का हल प्रयुक्त करते हुए प्रयुक्त किए जाने वाले साधनों के अभीष्ट संयोग को प्राप्त किया जा सकता है :

$$\text{Min} \quad Lw + Kr$$

$$\text{s.t.} \quad Q^* = f(L, K)$$

जहाँ $Q^*$ उत्पादन का निधारित स्तर है।

लैंगरेंजियन फलन को प्राप्त करके उपर्युक्त समस्या का हल प्राप्त किया जा सकता है :

$$\mathcal{L} = Lw + Kr + \lambda [Q^* - f(L, K)]$$

प्रथम कोटि के अभीष्टीकरण की शर्तें निम्नलिखित प्रकार हैं।

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \implies w - \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right) = 0 \implies w = \lambda MP_L \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \implies r - \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial K}\right) = 0 \implies r = \lambda MP_K \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \implies Q^* - f(L, K) = 0 \implies Q^* = f(L, K) \qquad (3)$$

समीकरण (1) एवं (2) से

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \qquad (4)$$

समीकरण (4) वही है जो समलागत रेखा एवं समोत्पाद वक्र की स्पर्शता से प्राप्त होता है। इस प्रकार उत्पादन की लागत उस बिंदु पर न्यूनतम होती है जहां $MRTS_{LK}$ साधनों के कीमत अनुपात के बराबर होती है। समीकरण (4) निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है।

$$\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$

उपर्युक्त समीकरण का निहितार्थ यह भी है कि उत्पादक उत्पादन की लागत को उस बिंदु पर न्यूनतम करता है जहाँ प्रत्येक साधन पर खर्च मुद्रा की अंतिम इकाई से प्राप्त सीमांत उत्पाद आपस में बराबर होता है।

अब समीकरण (3) एवं (4) को लागत न्यूनतमीकरण समस्या का समाधान प्राप्त करने के लिए हल किया जा सकता है। $(L^*, K^*)$ ज्ञात करने के लिए हम $\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$ तथा $Q^* = f(L, K)$ को हल करते हैं। $L^*$ तथा $K^*$ साधन L तथा K की वे मात्राएं हैं जो उनकी दी हुई कीमतों w तथा r पर Q स्तर का उत्पादन न्यूनतम लागत पर प्राप्त करने के लिए प्रयुक्त की जाती है। यह न्यूनतम लागत निम्नलिखित प्रकार है।

$$C = L^*w + K^*r$$

**उदाहरण 1**

$Q = L^{\frac{2}{3}} K^{\frac{2}{3}}$ उत्पादन फलन पर विचार कीजिए जहाँ साधन L तथा K से उत्पादन की मात्रा Q है। साधनों की प्रति इकाई कीमत क्रमशः रु. 10 एवं रु. 5 है। Q उत्पादन करने के लिए न्यूनतम लागत ज्ञात कीजिए।

**हल**

उपर्युक्त प्रश्न को हल करने के लिए L*, K* ज्ञात करने होंगे। जिसे इस प्रकार किया जा सकता है।

$$\text{Min} \quad 10L + 5K$$

$$\text{s.t.} \quad Q = L^{\frac{2}{3}} K^{\frac{2}{3}}$$

लागत न्यूनतमीकरण की शर्त को पूरा करने के लिए

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}L^{\frac{-1}{3}} K^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}L^{\frac{2}{3}} K^{\frac{-1}{3}}} = \frac{10}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} = 2 \Rightarrow K = 2L$$

इस संबंध को उत्पादन फलन के समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें K तथा L साधनों के लिए निम्नलिखित दो शर्तपरक मांग फलन प्राप्त होते हैं :

$$L^* = \frac{1}{\sqrt{2}} Q^{\frac{3}{4}}$$

$$K^* = \sqrt{2}\, Q^{\frac{3}{4}}$$

इस प्रकार, लागत फलन होगा

$$C = 10\left(\frac{1}{\sqrt{2}} Q^{\frac{3}{4}}\right) + 5\left(\sqrt{2}\, Q^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= 10\sqrt{2}\, Q^{\frac{3}{4}}$$

**बोध प्रश्न 1**

1) $Q = LK^2$ उत्पादन फलन के लिए विस्तार पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए। जहाँ साधन L तथा K को उनकी कीमतों क्रमशः रु. 10 एवं रु. 15 पर प्रयुक्त करते हुए Q उत्पादन किया जा रहा है।

.....

.....

.....

.....

.....

2) किसी वस्तु के उत्पादन को निम्नलिखित तकनीकी संबंध के साथ दिया गया है

$$Q = 10\sqrt{KL}$$

जहाँ K तथा L आगत तथा Q उत्पादन की मात्रा है। साधनों की कीमत क्रमशः रु. 3 तथा रु. 12 है। वस्तु की 1000 इकाइयों का उत्पादन करने पर न्यूनतम लागत कितनी होगी?

.....

.....

.....

.....

.....

## 6.3 सशर्त साधन मांग फलन

जैसाकि हमने उपभाग 6.2.3 में देखा कि लागत न्यूनतमीकरण समस्या का हल निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है

$$\text{Min} \quad Lw + Kr$$

$$\text{s.t.} \quad Q^* = f(L, K)$$

w, r तथा Q* के दिए गए मानों से हमें L* तथा K* प्राप्त हो जाती है। अर्थात् साधन L तथा K की दी हुई कीमतों क्रमशः w तथा r को प्रयुक्त करने पर Q स्तर का अभीष्ट उत्पादन प्राप्त हो जाता है। इन प्राचलों में से किसी एक या सभी में कोई भी परिवर्तन L* तथा K* के भिन्न मान देगा। इस प्रकार L* तथा K* को ज्ञात करने के लिए लागत न्यूनतमीकरण फलन w, r तथा Q के दिए हुए मानों पर निम्नलिखित प्रकार होंगे :

$$L^*(w, r, Q^*)$$

$$K^*(w, r, Q^*)$$

उत्पादन के Q स्तर तथा साधनों की दी हुई कीमतों w तथा r पर दिए हुए उत्पादन फलन के लिए संरोध लागत न्यूनतमीकरण समस्या का हल ही सशर्त साधन माँग फलन है। आपको जानकर आश्चर्य होगा कि 'साधन माँग फलन' से पहले 'सशर्त' शब्द क्यों जोड़ा गया है। ऐसा किए जाने का कारण यह है कि साधन माँग फलन, उत्पादन के स्तर को चुनने की स्वतंत्रता के साथ लाभ को अधिकतम करने के लिए साधन की दी हुई कीमत पर प्रयुक्त की जाने वाली इकाइयों को बताता है, वहीं सशर्त साधन माँग फलन उत्पादन के किसी स्तर विशेष को प्राप्त करने के लिए साधनों की दी हुई कीमतों पर प्रयुक्त करते हुए लागत को कम से कम स्तर पर रखने को दर्शाता है। इस प्रकार, उत्पादित की जाने वाली वस्तु के उत्पादन स्तर पर साधनों की उक्त मात्राओं का प्रयुक्त करना सशर्त है।

अतः L अथवा K के सशर्त मांग फलन के साथ उत्पादन Q* स्तर पर स्थिर रहता है। इसलिए Q* में किसी भी प्रकार की कमी या वृद्धि L या K के सशर्त मांग फलन के बाहर (अथवा अन्दर) की ओर विवर्तन द्वारा अनुगमन करेगी। L श्रम के लिए सशर्त साधन मांग वक्र सदैव अपनी स्वयं कीमत w के प्रत्युत्तर में नकारात्मक दाल वाला होता है (पूँजी की

सम्बन्ध में r )। सशर्त साधन मांग फलन केवल प्रतिस्थापन प्रभाव को ही ग्रहण करता है और इसी कारण यह साधारण साधन मांग फलन की तुलना में कम लोचदार होता है।

## 6.4 लागत फलन

लागत फलन की व्युत्पत्ति दिए हुए उत्पादन फलन और साधन कीमतों के संदर्भ में उत्पादक द्वारा अपनी लागत न्यूनतम करने के तर्कशास्त्र पर आधारित है। लागत फलन $C = Lw + Kr$ में सशर्त साधन माँग फलनों $L^*(w, r, Q^*)$ तथा $K^*(w, r, Q^*)$ को रखने पर लागत फलन $C(w, r, Q^*)$ प्राप्त किया जा सकता है :

$$C(w, r, Q^*) = L^*(w, r, Q^*)\, w + K^*(w, r, Q^*)\, r$$

साधन आगतों एवं उत्पादन का फलन $C(w, r, Q^*)$ साधनों की दी हुई कीमतों पर न्यूनतम लागत पर उत्पादन की एक निश्चित मात्रा $Q^*$ का उत्पादन करता है। आपने यह भी देखा कि सशर्त साधन माँग फलनों को व्युत्पन्न करने के दौरान अभीष्टीकरण पर पहले से ही ध्यान दिया गया है। इस प्रकार लागत फलन उत्पादक को उत्पादन प्रक्रिया के दौरान एक निश्चित मात्रा उत्पादित करने के लिए एक अभीष्ट हल प्रदान करता है। अब तक हमने एक ऐसे उत्पादन फलन पर विचार किया जिसमें केवल दो ही साधनों (L और K) को प्रयुक्त किया जाता है लेकिन वास्तवित जगत में दो से अधिक साधन भी हो सकते हैं। माना कि उत्पादक प्रक्रिया में "n" साधनों को प्रयुक्त किया जाता है। इसे सदिश द्वारा निम्न प्रकार दर्शाया गया है $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$

इस सदिश के सदृश्य उत्पादन फलन इस प्रकार होगा : $Q = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$.

माना कि साधन सदिश की कीमतें निम्नलिखित प्रकार हैं $W = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)$.

तो i साधनों के लिए सशर्त साधन माँग फलन $x_i = (W, Q)$ तथा कुल लागत फलन $C(W, Q)$ होगा जहाँ $i = 1, 2, \ldots, n$ है।

### 6.4.1 लागत फलन के अभिलक्षण (Properties of Cost Function)

लागत फलन के प्रमुख अभिलक्षण निम्नलिखित हैं :

1) लागत फलन साधन कीमतों में गैर-ह्रासमान होती है अर्थात्, दो साधन कीमत सदिशों price vectors $W'$ तथा $W$ पर विचार करें जहाँ $W' \geq W$ उस अवस्था में $C(W', Q) \geq C(W, Q)$ इतना ही नहीं यह फलन कम से कम एक साधन की कीमत में बढ़ने वाला है।

2) लागत फलन उत्पादन में गैर-ह्रासमान है। $Q' \geq Q$ तो $C(W, Q') \geq C(W, Q)$ जहाँ $W > 0$, इसका अर्थ यह हुआ कि यदि उत्पादन में वृद्धि होती है तो लागत में वृद्धि होगी।

3) साधन कीमतों में लागत फलन प्रथम कोटि का समघात फलन है। इसका अर्थ यह हुआ कि साधनों की कीमतों में एक साथ समानुपाती ढंग से वृद्धि होने पर (माना कि $\lambda$ गुना, जहाँ $\lambda > 0$) उत्पादन की लागत में भी उसी अनुपात में वृद्धि होगी। सांकेतिक रूप से

$$C(\lambda W, Q) = \lambda\, C(W, Q) \quad \text{जहाँ } W, Q, \lambda > 0$$

4) साधन कीमतों में लागत फलन अवतलोदर (Concave) है। सांकेतिक रूप से

$$C(t W + (1 - t) W, Q) \geq t\, C(W, Q) + (1 - t)\, C(W, Q) \quad \text{जहाँ } t \in [0,1]$$

5) **शेफर्ड का प्रमेयसम :** यदि C (W, Q) को लागत फलन (W, Q) तथा $w_i > 0$ i = 1,2,..,n के लिए अवकलन योग्य है तो iवें साधन के लिए सशर्त साधन माँग फलन $x_i$ (W, Q) निम्नलिखित प्रकार का होगा :

$$x_i (W, Q) = \frac{\partial C(W,Q)}{\partial w_i}$$

यह प्रमेयसम हमें लागत फलन के आंशिक अवकलज के रूप में सशर्त साधन माँग फलन प्रदान करता है।

**उदाहरण 2**

$Q = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{3}}$ उत्पादन फलन के लिए लागत फलन ज्ञात कीजिए, जहाँ L श्रम, K पूँजी तथा Q उत्पादन है। साधन की कीमतें क्रमशः w और r हैं। समघातीयता की शर्त तथा शेफर्ड के प्रमेयसम की जाँच करें।

**हल :**

अभीष्टीकरण समस्या के निम्न रूप पर विचार कीजिए :

$$\begin{aligned} &\text{Min} && Lw + Kr \\ &\text{s.t.} && Q^* = L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

लागत न्यूनतमीकरण की उपर्युक्त समस्या को लैगरेंजियन विधि द्वारा हल करने पर हम पाते हैं :

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}L^{\frac{-2}{3}} K^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{-2}{3}}} = \frac{w}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Rightarrow K = \frac{w}{r} L$$ , इस संबंध को उत्पादन फलन में प्रतिस्थापित करने पर सशर्त साधन माँग फलन निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होता है :

$$L^* (w, r, Q^*) = Q^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$K^* (w, r, Q^*) = Q^{\frac{3}{2}} \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

इसलिए वांछित लागत फलन निम्नलिखित प्रकार है।

$$C (w, r, Q) = L^*(w, r, Q^*) w + K^* (w, r, Q^*) r$$

$$= w\left[Q^{*\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + r\left[Q^{*\frac{3}{2}} \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2\sqrt{Q^{*3} wr}$$

समघातीयता की जांच के लिए हम साधन कीमतों (w और r) में $\lambda$ अनुपात में वृद्धि कर देते हैं। अतः लागत फलन होगा :

$$C (\lambda w, \lambda r, Q^*) = 2\sqrt{Q^{*3}(\lambda w)(\lambda r)} = 2\lambda\sqrt{Q^{*3} wr} = \lambda C (w, r, Q^*)$$

अतः लागत फलन प्रथम कोटि का समघात फलन है। आप L तथा K के सशर्त साधन मांग फलनों की भी जांच कर सकते हैं।

शेफर्ड के प्रमेयसम की जांच के लिए हम लागत फलन का साधन कीमतों के अनुसार अवकलन करते हैं :

$\frac{\partial C(w,r,Q^*)}{\partial w} = \frac{\partial 2\sqrt{Q^{*3}wr}}{\partial w} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{Q^{*3}wr}} \times Q^{*3}r = Q^{*\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow$ यह श्रम का सशर्त साधन माँग फलन है,

$\frac{\partial C(w,r,Q^*)}{\partial r} = \frac{\partial 2\sqrt{Q^{*3}wr}}{\partial r} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{Q^{*3}wr}} \times Q^{*3}w = Q^{*\frac{3}{2}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow$ यह पूँजी का सशर्त साधन माँग फलन है।

## 6.4.2 औसत एवं सीमांत लागत फलन

### औसत लागत फलन

औसत लागत फलन को प्रति इकाई उत्पादन लागत के रूप में परिभाषित किया जाता है। औसत लागत फलन आगत सदिश (Input vector) W तथा Q का फलन है, जिसे लागत फलन से निम्नलिखित प्रकार प्राप्त किया जा सकता है

$$AC\ (W, Q) = \frac{C\ (W,Q)}{Q}$$

यह फलन साधन की दी हुई कीमत पर उत्पादन की एक निश्चित मात्रा के लिए न्यूनतम प्रति इकाई लागत निर्धारित करता है।

### सीमांत लागत फलन

उत्पादन की एक अतिरिक्त इकाई का उत्पादन करने के लिए कुल लागत में हुई वृद्धि को सीमांत लागत कहते हैं। किसी आगत सदिश W तथा Q उत्पादन के लिए सीमांत लागत फलन को उत्पादन के सापेक्ष कुल लागत फलन के आंशिक अवकलज के रूप में निम्नलिखित प्रकार व्युत्पन्न किया जा सकता है :

$$MC\ (W, Q) = \frac{\partial C\ (W,Q)}{\partial Q}$$

यह किसी वस्तु की एक अतिरिक्त इकाई उत्पादित करने के लिए कुल लागत में हुई न्यूनतम वृद्धि के रूप में है।

**उदाहरण 3**

$C = 100Q + wrQ^2$ कुल लागत फलन के लिए औसत लागत फलन एवं सीमांत लागत फलन ज्ञात कीजिए ।

**हल :**

औसत लागत फलन $(AC) = \frac{C\ (W,Q)}{Q}$

$$= \frac{100Q + wrQ^2}{Q} = 100 + wrQ$$

सीमांत लागत फलन $(MC) = \frac{\partial C\,(W,Q)}{\partial Q}$

$$= \frac{\partial(100Q + wrQ^2)}{\partial Q} = 100 + 2wrQ$$

### 6.4.3 AC एवं MC फलनों के बीच संबंध

औसत लागत फलन तथा सीमांत लागत फलन के बीच संबंध निम्नलिखित प्रकार है।

हम जानते हैं कि $AC = \frac{C\,(W,Q)}{Q}$

Q के सापेक्ष AC में परिवर्तन की दर :

$$\frac{d}{dQ}\left(\frac{C\,(W,Q)}{Q}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{QC\,'(W,Q) - C(W,Q)}{Q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{C'(W,Q)}{Q} - \frac{C(W,Q)}{Q^2} \Rightarrow \frac{1}{Q}\left[C'(W,Q) - \frac{C(W,Q)}{Q}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Q}[MC - AC]$$

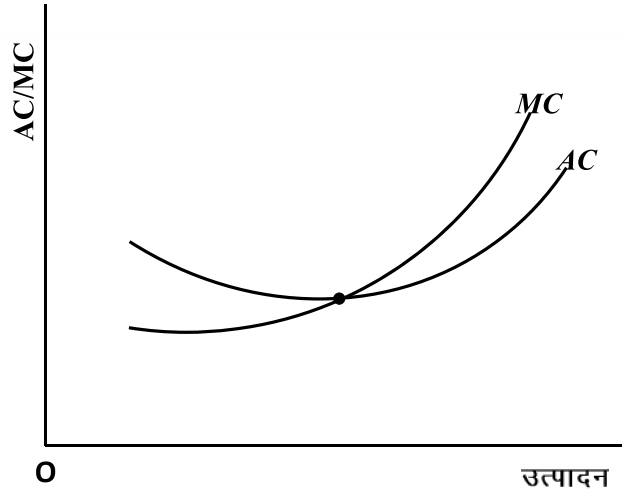
उपर्युक्त परिणामों से $Q > 0$ होने पर निम्नलिखित निष्कर्ष निकलते हैं :

1) जब तक MC > AC अर्थात् MC वक्र AC वक्र से ऊपर रहता है तब तक AC वक्र का ढाल अथवा AC में परिवर्तन की दर $\frac{d}{dQ}(AC) > 0$ धनात्मक रहती है।

2) जब MC = AC, जब MC वक्र AC वक्र को काटता है तो AC में परिवर्तन की दर शून्य $\frac{d}{dQ}(AC) = 0$ हो जाती है। ऐसा उस समय होता है जब AC वक्र अपने न्यूनतम बिंदु पर होता है।

3) जब MC < AC की स्थिति होती है, अर्थात् MC वक्र AC वक्र से नीचे आ जाता है तो AC में परिवर्तन की दर $\frac{d}{dQ}(AC) < 0$ ऋणात्मक हो जाती है।

ऐसे संबंध को चित्र 6.3 में दर्शाया गया है।




चित्र 6.3 : AC एवं MC वक्रों के बीच संबंध

## 6.5 अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन लागत फलन

अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन उत्पादन फलनों के बीच अंतर स्थिर तथा परिवर्तनशील साधनों के संदर्भ मे किया जाता है। उत्पत्ति के स्थिर साधन वे होते हैं जो उत्पादन क्रिया के दौरान उत्पादन के स्तर के सापेक्ष परिवर्तित नहीं होते; जैसे कि पूँजी, कार्यालय भवन, मशीनें एवं प्लांट आदि। इसके इतर परिवर्तनशील आगत उत्पादन की मात्रा में परिवर्तन के साथ परिवर्तित होती रहती हैं जैसे कि श्रम, कच्चा माल आदि। अल्पकाल में परिवर्तनशील साधनों के साथ कतिपय साधनों को पूर्व निर्धारित (स्थिर) स्तर पर काम पर लगाया जाता है जबकि दीर्घकाल में सभी साधन परिवर्तनशील हो जाते हैं। इसी आधार पर लागत फलन की अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन स्थितियों की विवेचना की जा सकती है।

माना कि $X_V$ उत्पादन प्रक्रिया के दौरान प्रयुक्त किया जाने वाला किसी परिवर्तनशील साधनों का सदिश है। जबकि $X_F$ स्थिर साधन सदिश है। इन्हीं के सापेक्ष $W_V$ एवं $W_F$ इन आगतों के कीमत सदिश हैं।

### 6.5.1 अल्पकालीन लागत फलन

अल्पकाल में कुछ साधन स्थिर होते हैं ($X_F$) जबकि कुछ साधन परिवर्तनशील ($X_V$) जो उत्पादन की मात्रा के साथ परिवर्तित होते रहते हैं। भाग 6.4 में हमने दिए हुए प्राचलों W तथा Q के फलन के रूप में लागत फलन को व्युत्पन्न किया था। अब अल्पकालीन लागत फलन के लिए $X_F$ एक अन्य साधन है जो अल्पकाल में स्थिर है। इन दोनों ही साधनों से अल्पकाल में उत्पादन प्रक्रिया के दौरान अल्पकालीन लागत फलन निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$C_S (W, Q, X_F) = W_V X_V (W, Q, X_F) + W_F X_F$$

जहाँ $X_V (W, Q, X_F)$ सशर्त परिवर्तनशील साधन माँग फलन है जो सामान्यतया स्थिर साधन $X_F$ के मान पर निर्भर करता है।

अल्पकालीन लागत फलन के आधार पर निम्नलिखित को भी परिभाषित किया जा सकता है।

अल्पकालीन औसत लागत फलन (SAC) $= \frac{C_S(W,Q,X_F)}{Q}$

अल्पकालीन सीमांत लागत फलन (SMC) $= \frac{\partial C_S(W,Q,X_F)}{\partial Q}$

अल्पकालीन परिवर्तनशील लागत फलन (SVC) $= W_V X_V (W, Q, X_F)$

अल्पकालीन औसत परिवर्तनशील लागत फलन (SAVC) $= \frac{W_V X_V (W,Q,X_F)}{Q}$

स्थिर लागत फलन (SFC) $= W_F X_F$

अल्पकालीन औसत स्थिर लागत फलन (SAFC) $= \frac{W_F X_F}{Q}$

**ध्यान रहे :**

यदि $Q = 0$, $SVC = 0$ तो $X_V = 0$ होगी लेकिन $SFC = W_F X_F$ होगी। अर्थात् उत्पादित की जाने वाली मात्रा शून्य हो जाती है तो अल्पकालीन परिवर्तनशील लागत भी शून्य होती है लेकिन स्थिर लागतें फिर भी बनी रहती हैं चाहे उत्पादन हो या न हो।

### 6.5.2 दीर्घकालीन लागत फलन

दीर्घकाल में उत्पत्ति के सभी साधन (आगत) परिवर्तनशील हो जाते हैं अर्थात् वे उत्पादन की मात्रा Q में परिवर्तन के साथ परिवर्तित होते रहते हैं। चूँकि दीर्घकाल में कोई भी साधन स्थिर ($X_F$) नहीं होता और सभी साधन परिवर्तनशील ($X_V$) होते हैं इसलिए सदिश ($X_V$) को सदिश X (साधन सदिश) ही लिखा जा सकता है जिसकी कीमत W है। अब दीर्घकालीन लागत फलन निम्नलिखित प्रकार का होगा :

$$C_L (W, Q) = W X (W, Q)$$

यह वही लागत फलन है जिस पर भाग 6.4 में विचार किया जा चुका है।

दीर्घकालीन औसत लागत फलन $(LAC) = \frac{C_L(W,Q)}{Q}$

दीर्घकालीन सीमांत लागत फलन $(LMC) = \frac{\partial C_L(W,Q)}{\partial Q}$

#### बोध प्रश्न 2

1) निम्नलिखित कुल लागत फलनों के लिए AC, MC, AVC तथा AFC ज्ञात कीजिए :

   क) $C = 5Q^3$

   ख) $C = 10 + 7Q^2$

   ग) $C = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 10$

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

2) उत्पादन की मात्रा Q तथा साधनों L एवं K जिनकी कीमतें क्रमशः w तथा r हैं, के बीच तकनीकी संबंध को निम्न रूप में दिया गया है :

$$Q = (L^\rho + K^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

   क) सशर्त साधन माँग फलन L*(w, r, Q) तथा K*(w, r, Q) ज्ञात कीजिए ।

   ख) लागत फलन C (w, r, Q) के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिए

   ग) शेफर्ड के प्रमेयसम की जाँच कीजिए, अर्थात् जांच कीजिए कि

   क्या $\frac{\partial C(w,r,Q)}{\partial w} = L^*(w, r, Q)$ तथा $\frac{\partial C(w,r,Q)}{\partial r} = K^*(w, r, Q)$ सही है।

3) शेफर्ड के प्रमेयसम को प्रयुक्त करते हुए निम्नलिखित लागत फलनों से साधन माँग फलन व्युत्पन्न कीजिए :

क) $C = Q^2 (7w^3 + 5r^3)$

ख) $C = 2 Q^2 \sqrt{wr}$

जहाँ K तथा L उत्पत्ति के दो साधन हैं तथा r तथा w क्रमशः उनकी कीमतें हैं।

## 6.6 सार-संक्षेप

लाभ अधिकतमीकरण का उद्देश्य किसी उत्पादक द्वारा किसी वस्तु या सेवा के उत्पादक द्वारा लागत न्यूनतमीकरण के पीछे के औचित्य की व्याख्या करता है। किसी वस्तु या सेवा की उत्पत्ति करने की स्पष्ट और अस्पष्ट दोनों ही प्रकार की लागतें होती हैं। वर्तमान इकाई में इन्हीं लागतों को न्यूनतम किए जाने की अवधारणा की विवेचना की गयी है। इसके लिए ग्राफिकल एवं विश्लेषणात्मक, दोनों ही उपागमों को प्रयुक्त किया गया है। ग्राफिकल उपागम में लागत उस बिंदु पर न्यूनतम होती है जहाँ समलागत रेखा समोत्पाद वक्र को स्पर्श करती है। दूसरी ओर, विश्लेषणात्मक उपागम में लागत न्यूनतमीकरण की अभीष्टीकरण समस्या के संरोध को हल करना पड़ता है। अभीष्टीकरण समस्या को हल करने के लिए साधनों एवं उत्पाद के बीच तकनीकी संबंध (उत्पादन फलन) तथा साधन कीमतें दिए होने पर लैगरेंजियन विधि को प्रयुक्त किया गया है।

अभीष्टीकरण प्रयास के दौरान, उत्पादन प्रक्रिया के अंतर्गत प्रयुक्त किए गए साधनों की कीमतों w तथा r एवं उत्पाद व स्तर Q दिया होने पर सशर्त साधन माँग फलनों को व्युत्पन्न किया गया है। उसके उपरांत इन्हीं फलनों को लागत फलन – साधन कीमतों तथा उत्पादन की मात्रा का फलन – व्युत्पन्न करने के लिए प्रयुक्त किया गया है। उत्पादन फलन को साधन कीमतों के साथ संबद्ध करने पर, साधनों की कीमतें दिए होने पर उत्पादन की एक निश्चित मात्रा के स्तर को न्यूनतम लागत पर उत्पादित किया जा सकता है। लागत फलन के कतिपय लक्षणों की भी व्याख्या की गयी है। शेफर्ड का प्रमेयसम इनमें से एक है, जिसके तहत सशर्त साधन माँग फलन व्युत्पन्न करने के लिए एक अवकलनीय लागत फलन को प्रयुक्त किया जा सकता है।

इकाई में आगे चलकर औसत लागत फलन एवं सीमांत लागत फलन व्युत्पन्न किए गए। औसत लागत प्रति इकाई उत्पादन लागत है जबकि सीमांत लागत एक अतिरिक्त इकाई उत्पादित करने पर कुल लागत में हुई वृद्धि है। आगे औसत लागत (AC) और सीमांत लागत (MC) के बीच संबंध की विवेचना की गयी जिसका आप पहले सेमेस्टर के प्रारंभिक व्यष्टि अर्थशास्त्र के पाठ्यक्रम (बीईसीसी-101) में अध्ययन कर चुके हैं। इस इकाई में, इसके गणितीय संबंध को समझाया गया। अंत में, अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन लागत फलनों के बीच के अंतर की विवेचना की गयी जिसके लिए स्थिर लागतों एवं परिवर्तनशील लागतों को आधार माना गया। अल्पकालीन लागत फलन में स्थिर एवं परिवर्तनशील दोनों ही प्रकार की लागतों को शामिल किया जाता है जबकि दीर्घकालीन उत्पादन फलन में सभी साधन परिवर्तनशील हो जाते हैं। इस प्रकार, अब आप यह अच्छी तरह से समझ चुके हैं कि अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन उत्पादन फलन में मुख्य अंतर स्थिर साधनों की अनुपस्थिति का है।

## 6.7 संदर्भ ग्रंथादि


1) Hal R. Varian, *Intermediate Microeconomics, a Modern Approach*, W.W. Norton and Company / Affiliated East- West Press (India), 8th Edition, 2010.

2) Shephard, Ronald W, *Cost and Production Functions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981

3) Nicholson, W., & Snyder, C. (2008). *Microeconomic theory: Basic principles and extensions*. Mason, Ohio: Thomson/South-Western.


## 6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1) विस्तार पथ का समीकरण $K = 3L$ के रूप में दिया गया है।

**संकेत** : लागत न्यूनतमीकरण शर्त $\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$ को प्रयुक्त कीजिए, जहाँ $MP_L = K^2$, $MP_K = 2LK$, $w = 15$ तथा $r = 10$.

2) न्यूनतम लागत = रु. 1200

**संकेत** : उत्पादन फलन $Q = 10\sqrt{KL}$ को $10K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। लागत को न्यूनतम करने की शर्त $\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$ को प्रयुक्त कीजिए जहाँ $MP_L = 5K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}}$, $MP_K = 5K^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$, $w = 12$ तथा $r = 3$

इससे $K = 4L$ प्राप्त होता है। इस संबंध को $Q = 10\sqrt{KL}$ में अपनाइए जहाँ $Q = 1000$ मिलें $L = 50$ तथा $K = 200$. ठस प्रकार न्यूनतम लागत $12(50) + 3(200) = 1200$.

**बोध प्रश्न 2**

1) क) $AC = 5Q^2$, $MC = 15Q^2$, $AVC = 5Q^2$, $AFC = 0$

ख) $AC = \frac{10}{Q} + 7Q$, $MC = 14Q$, $AVC = 7Q$, $AFC = \frac{10}{Q}$

ग) $AC = Q^2 - 4Q + 10 + \frac{10}{Q}$, $MC = 3Q^2 - 8Q + 10$, $AVC = Q^2 - 4Q + 10$, $AFC = \frac{10}{Q}$

2) क) $$L^*(w, r, Q) = \frac{Qw^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w^{\frac{\rho}{\rho-1}} + r^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$$K^*(w, r, Q) = \frac{Qr^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w^{\frac{\rho}{\rho-1}} + r^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

**संकेत** : लागत न्यूनतमीकरण शर्त को प्रयुक्त करते हुए,

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{\frac{1}{\rho}(L^\rho + K^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho L^{\rho-1}}{\frac{1}{\rho}(L^\rho + K^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho K^{\rho-1}} = \frac{w}{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1} = \frac{w}{r} \Rightarrow L = K\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \qquad (1)$$

उत्पादन फलन एवं समीकरण (1) से

$$Q = (L^\rho + K^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \Rightarrow Q^\rho = \left[K\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right]^\rho + K^\rho \Rightarrow Q^\rho = K^\rho\left[\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]$$

$$\Rightarrow Q^\rho = K^\rho\left[\frac{w^{\frac{\rho}{\rho-1}} + r^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{r^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right] \Rightarrow K^* = \frac{Q\, r^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w^{\frac{\rho}{\rho-1}} + r^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

$K^*$ का मान समीकरण (1) में रखने पर, $L^* = \dfrac{Q\, w^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w^{\frac{\rho}{\rho-1}} + r^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$

ख) $C(w, r, Q) = Q\left(w^{\frac{\rho}{\rho-1}} + r^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}$

**संकेत** : $L^*$ एवं $K^*$ के मान लागत फलन में रखिए,

$C(w, r, Q) = L^*(w, r, Q)\, w + K^*(w, r, Q)\, r$

3) क) $L^*(w, r, Q) = 21\, Q^2w^2$ तथा $K^*(w, r, Q) = 15\, Q^2r^2$

संकेत : $\frac{\partial C(w,r,Q)}{\partial w} = L^*(w, r, Q) = 21\, Q^2w^2$ तथा

$\frac{\partial C(w,r,Q)}{\partial r} = K^*(w, r, Q) = 15\, Q^2r^2$

ख) $L^*(w, r, Q) = Q^2\sqrt{\frac{r}{w}}$ तथा $K^*(w, r, Q) = Q^2\sqrt{\frac{w}{r}}$