बीईसीसी–107

अर्थशास्त्र के लिए सांख्यिकीय प्रविधियाँ

इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय
सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली–110068

विशेषज्ञ समीति

प्रो० अतुल शर्मा (सेवानिवृत) पूर्व निदेशक भारतीय सांख्यिकी संस्थान, नई दिल्ली।	प्रो० एम.एस. भट्ट (सेवानिवृत) जामिया मिलिया इस्लामिया नई दिल्ली।	प्रो० गोपीनाथ प्रधान (सेवानिवृत) इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय नई दिल्ली।
डॉ. इद्राणी राय चौधरी, सी.एस.आर.डी, जवाहर लाल नेहरू विश्वविद्यालय, नई दिल्ली।	डॉ० मजुँला सिंह सेंट स्टीफंस कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय नई दिल्ली।	प्रो० नारायण प्रसाद इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय नई दिल्ली
डॉ० अनुप चटर्जी (सेवानिवृत) ए.आर.एस.डी कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।	डॉ. एस.पी. शर्मा, श्यामलाल कॉलेज (संध्या), दिल्ली विश्वविद्यालय।	प्रो० बी. एस. प्रकाश इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय नई दिल्ली।
बी.एस. बागला (सेवानिवृत) पी.जी.डी.ए.वी. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।	सौगतो सेन इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय नई दिल्ली	प्रो० कौस्तुभ बारिक इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय नई दिल्ली

पाठ्यक्रम संयोजक समीति

खण्ड / इकाई शीर्षक		इकाई लेखन
खण्ड 1	वर्णनात्मक सांख्यिकी	
इकाई 1	मूल संख्यिकीय संकल्पनाएँ	इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 1,2,3 श्री अवतार सिंह द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।
इकाई 2	समंकों का सारणीयन तथा आलेखी प्रस्तुतिकरण	इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 1,2,3 श्री अवतार सिंह द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।
इकाई 3	केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप	इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 4 और 5 आर. एस. भारद्वाज द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।
इकाई 4	विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व के माप	इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 6 आर. एस. भारद्वाज द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।
खण्ड 2	द्विचरीय एवं बहुचरीय आँकड़ों का संक्षेपण	
इकाई 5	सहसंबंध एवं समाश्रयण विश्लेषण	प्रो. कौस्तुभ बारिक, इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।
इकाई 6	सूचकांक	इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 10 जे. रॉय द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।
इकाई 7	निश्चयवादी कालश्रेणी एवं पूर्वानुमान	इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 11 एस. बंद्योपाध्याय द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।
इकाई 8	जन्म–मृत्यु सांख्यिकी (Vital Statistics)	इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 12 सी. जी. नायडू द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।
खण्ड 3	प्रायिकता सिद्धांत	
इकाई 9	प्रारंभिक प्रायिकता	डा॰ आर. ए. चौधरी (सेवानिवृत) करोड़ीमल कॉलेज दिल्ली विश्वविद्यालय।
इकाई 10	असतत् प्रायिकता बंटन	डॉ० अनुप चटर्जी (सेवानिवृत) ए.आर.एस.डी. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।
इकाई 11	सतत् प्रायिकता बंटन	
खण्ड 4	प्रतिचयन एवं सांख्यिकीय निष्कर्षण	
इकाई 12	प्रतिचयन की क्रियाविधि	प्रो॰ सी. जी. नायडू (सेवानिवृत) इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।
इकाई 13	सांख्यिकीय आकलन	प्रो॰ कौस्तुभ बारिक, इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।
इकाई 14	परिकल्पना परीक्षण	
इकाई 15	नामीय आंकड़ों से संबंधित काई-वर्ग परीक्षण	

पाठ्यक्रम संचालक: प्रो० कौस्तुभ बारिक **संपादक: प्रो० कौस्तुभ बारिक**

अनुवाद पुनः निरीक्षणः श्री भवानी शंकर बागला एवं डॉ॰ रेनू बाला

सामग्री निर्माण

अप्रैल, 2020

ISBN:

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की तरफ से निदेशक सामाजिक विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।
लेज़र टाईप सेट: मुकेश कुमार यादव **आवरण सज्जा :** संदीप मैनी **मुद्रण:**

विषय–सूची

पाठ्यक्रम परिचय

अर्थशास्त्र में सांख्यिकी का एक बहुत महत्वपूर्ण स्थान है, जिसको समझने के लिए किसी अन्य विस्तार की आवश्यकता नहीं हैं। वर्तमान पाठ्यक्रम का उद्देश्य विद्यार्थियों को सांख्यिकी उपकरणों से अवगत करवाना है, जिसकी सहायता से वे समंको का विश्लेषण एवं व्याख्या कर सकेंगे। वर्तमान पाठ्यक्रम की निम्नलिखित दो विशेषताएं हैः 1) इसमें दिए गए उदाहरण वास्तविक जीवन की स्थितियों से यथासंभव लिए गए है, 2) स्रोतों के विवरण को विस्तार से समझाया गया है। जो विद्यार्थियों को विषय–वस्तु को समझने एवं उनके सम्मुख आने वाली परिस्थितियों पर इन्हें लागू करने में सहायता करेगा। यह पाठ्यक्रम 4 खण्डों में विभाजित है जिसमें 15 इकाई शामिल हैं।

खण्ड 1 शीर्षक ''**वर्णनात्मक सांख्यिकी**'' में 4 इकाई शामिल है। इकाई 1 सांख्यिकी में प्रयोग होने वाली कुछ मूल अवधारणाओं से शुरू होती है। इसमें बाद, समंकों के संकलन में सम्मिलित विषयों की चर्चा का वर्णन है। इकाई 2 तालिका एवं रेखाचित्र (ग्राफ) के माध्यम से समंकों के प्रस्तुतीकरण का विस्तृत वर्णन किया गया है। इकाई 3 केन्द्रीय प्रवृत्ति एवं प्रकीर्णन के मापों में एकचर (univariate) समंको के सारांश से संबधित है। इकाई 4 प्रथुशींषत्व (kurtosis) एवं विषमता (skewness) के मापों का वर्णन है।

खण्ड 2 शीर्षक ''**द्विचरीय एवं बहुचरीय आँकड़ों का संक्षेपण**'' सहसंबंध एवं समाश्रयण, सूचकांक, नियतात्मक कालश्रेणी एवं जन्म–मृत्यु सांख्यिकी से संबधित है। इकाई 5 में द्विचर समंको के विश्लेषण के उपकरण – सहसंबंध एवं समाश्रयण की प्रस्तावना है। इकाई 6 में सूचकांकों को आंकलन करने की विधियाँ, सूचकांकों के विभिन्न प्रकार एवं उनकी सीमाओं का वर्णन हैं। इकाई 7 कालश्रेणी के घटकों का वर्णन करती है। इकाई 8 जन्म, मृत्यु एवं प्रजनन की दरों पर चर्चा करती है।

खण्ड 3 ''**प्रायिकता सिद्धांत**'' से सम्बन्धित है। जिसमें 3 इकाईयाँ है। इकाई 9 प्रारंभिक प्रायिकता, प्रायिकता के सिद्धांत के विभिन्न नियमों (अथवा विधियों) का वर्णन करती है। इकाई 10 में असतत प्रायिकता वितरण – जैसे कि द्विपद (binomial) एवं पायसन वितरण (Poisson distribution) को समझाया गया है। इकाई 11 प्रसामान्य, काई–स्क्वेयर, t एवं F वितरण की मुख्य विशेषताओं का वर्णन करती है।

खण्ड 4 ''**प्रतिचयन एवं सांख्यिकीय निष्कर्षण**'' जिसमें 4 इकाईयां शामिल है। इकाई 12 में प्रतिदर्श की अवधारणाएं एवं इसके प्रकार, जनसंख्या से प्रतिदर्श निकालने की प्रक्रिया का वर्णन शामिल है। इकाई 13 में सांख्यिकीय आकलन के पीछे निहित विचार को दर्शाया गया है। जिसमें सांख्यिकीय प्रतिदर्शन के वितरण की अवधारणा एवं मानक त्रुटि (standard error) शामिल है। इकाई 14 में परिकल्पना के परीक्षण की विभिन्न विधियों का वर्णन है। इकाई 15 में आसंग तालिका (contingency table) के सन्दर्भ में काई–स्क्वैयर परीक्षण (χ^2 test) की उपयोगिता पर चर्चा शामिल है।

इकाई 1 समंको की मूल अवधारणाएं एवं संकलन की विधियाँ*

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- समंकों एवं सूचना के बीच के अन्तर को समझेंगे,
- चरों के विभिन्न प्रकारों एवं चरों के मापन को समझेंगे,
- समंकों का एकत्र करने के विभिन्न चरणों की पहचान कर सकेंगे,
- प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों के बीच के अन्तर को समझेंगे,
- द्वितीयक समंकों के गुण एवं अवगुणों को समझेंगे, और
- प्रश्नावली की संरचना कर सकेंगे।

1.1 विषय प्रवेश

आजकल 'सांख्यिकी' एक घरेलू शब्द बन चुका है, हालाँकि अलग–अलग व्यक्ति इसको अलग–अलग अर्थों में समझते हैं। प्रत्येक व्यक्ति के जीवन में कई प्रकारों से सांख्यिकी का अर्थ एवं प्रयोग होता है। इसलिए प्रत्येक शिक्षित व्यक्ति को सांख्यिकी का ज्ञान आवश्यक होना चाहिए। प्रत्येक दिन हमें लिखित एवं इलैक्ट्रानिक संचार में विभिन्न विषयों पर (जैसे – जनसंख्या, विनिमय दर में अनिश्चतता, मुद्रास्फीति, इत्यादि) मात्रात्मक रूप में सूचना मिलती रहती है। हमारे आसपास के संसार को बेहतर ढ़ग से समझने के लिए : 1) जो

* इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 1,2,3 श्री अवतार सिंह द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित

कहा जाता है उसको मापना एवं संख्यात्मक रूप में व्यक्त करना और 2) अंततः प्राप्त मात्रात्मक सूचना के उपयोग से निष्कर्ष निकालना एवं उपायों में सुझाव देना आवश्यक है।

'सांख्यिकी' शब्द की परिभाषा :– प्रायः हमें सांख्यिकी की विभिन्न स्रोतों से विभिन्न परिभाषाएँ मिलती है। विभिन्न परिभाषाओं का कारण इस तथ्य पर आधारित है कि समय के साथ–साथ सांख्यिकी के क्षेत्र में तेजी से वृद्धि हुई है। इसलिए जिन विषयों को सांख्यिकी में सबसे महत्वपूर्ण माना जाता था, उन्हें पारिधिय बना दिया गया। उदाहरणतः आरम्भिक चरण में समंकों का संकलन एवं विवरण बहुत महत्वपूर्ण होता था। समय के साथ–साथ कई अन्य विषयों (जैसे कि प्रतिदर्श (sample) सर्वे के परिणामों का सामान्यीकरण) का भी महत्व बढ़ा है।

हम सांख्यिकीय को निम्नलिखित शब्दों में परिभाषित कर सकते हैं : सांख्यिकीय विज्ञान वह एक शाखा है जो समंकों के संकलन/संगठन प्रस्तुतीकरण एवं व्याख्या से संबंधित है। मुख्य सांख्यिकी की दो निम्नलिखित शाखाएं है : वर्णनात्मक सांख्यिकी एवं अनुमानिक सांख्यकी। वर्णनात्मक सांख्यिकी समंक के समुच्चय की कई विशेषताओं का वर्णन करती है। वर्णनात्मक सांख्यिकीय में समंकों को सारणीबद्ध (तालिका रूप) आरेखीय प्रस्तुतीकरण, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप(माध्य, माध्यिका, बहुलक, ज्यामितीय एवं हार्मोनिक माध्य), प्रर्कीणन के माप, (परिसर, प्रसरण एवं मानक विचलन), ककुदता एवं विषमता इत्यादि सम्मिलित है।

आनुमानिक सांख्यिकी में हम प्रतिदर्श (सैम्पल) सर्वे के माध्यम से समंकों का संकलन करना एवं प्रतिदर्श परिणामों का पूरी जनसंख्या पर सामान्यीकरण करना सम्मिलित है। आनुमानिक सांख्यिकी में व्यापक स्तर पर प्रायिकता विधि का प्रयोग होता है।

हम प्राय दैनिक जीवन में सांख्यिकीय के कई अनुप्रयोगों को देखते है जैसे कि उपभोक्ता कीमत सूचकांक (भारतीय स्टॉक/बाजार का) बी.एस.ई. सैंसेक्स, 6–सिग्मा व्यवसाय प्रबंधन का एक उपकरण, इत्यादि। इसके अलावा प्राय हम टेलीविजन पर एग्जिट पोल के परिणामों से यह अनुमान लगाते है कि चुनाव के बाद कौन से राजनीतिक दल के जीतने की प्राथमिकता है। विश्लेषक जो मतदाताओं का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श (सैम्पल) लेते है और उन मतदाताओं की प्रतिक्रियाओं का विश्लेषण करके उसके परिणामों का सामान्यीकरण पूरी जनसंख्या पर करते है। कई बार हम प्रयोगशालाओं एवं क्षेत्रों में विभिन्न प्रयोग करते है जैसे कि एक नई दवाई का प्रभाव, नये बीज की उपज का अनुमान, एवं नई कार के मॉडल में सुरक्षात्मक उपायों की जाँच इत्यादि प्रयोगात्मक सांख्यिकी के कुछ उदाहरण है। प्रयोगात्मक सांख्यिकी में परीक्षणों की उचित संरचना (डिजाइन) करना एवं इन परीक्षणों के परिणामों से अनुमान लगाना प्रयोगात्मकता सांख्यिकी के महत्वपूर्ण चरण है।

1.2 कुछ अवधारणाएँ

यह खण्ड प्रायः प्रयोग होने वाली कुछ निश्चित अवधारणाओं को स्पष्ट करता है।

समंक एवं सूचना : समंक और सूचना में एक मूल अन्तर है। शुद्ध आंकड़ों (जैसे कि अक्तूबर, 2019 वर्ष में प्रतिदिन, कितने विद्यार्थी इग्नू में केन्द्रीय पुस्तकालय में आए) के प्रयोग में उतनी उपयोगी सूचना नहीं मिलती कि कुछ निष्कर्ष निकल सकें। कुछ उपयोगी सूचना प्राप्त करने के लिए हमें आंकड़ों को संसोधित करने की आवश्यकता है (जैसे कि अक्टूबर 2019 में इग्नू के केन्द्रीय पुस्तकालय में प्रतिदिन, औसतन 65 विद्यार्थी आए)। आंकड़ों को प्राप्त करने के विभिन्न स्रोत है । आप विभिन्न विषयों जैसे श्रम, स्टॉक कीमतें, कृषि उत्पादन, जन्म एवं मृत्यु दर आदि संमकों के विभिन्न स्रोतों से आए होंगे। विभिन्न स्रोतों से प्राप्त समंकों को संशोधित करने के बाद हमें अर्थपूर्ण सूचना प्राप्त होती है।

जैसे, मौसम विभाग से हमें प्रतिदिन होने वाली वर्षा, वायु की गति एवं तापमान इत्यादि समंक मिलते है। शुद्ध समंकों को आगे संशोधित करने से हम मौसम का अनुमान लगाने की अर्थपूर्ण सूचना प्राप्त कर सकते है।

जनसंख्या एवं प्रतिदर्श : सांख्यिकी में जनसंख्या (population) शब्द का अर्थ सामान्य भाषा में होने वाले जनसंख्या शब्द से कुछ अलग होता है। उदाहरणतः सामान्य भाषा में हम कह सकते है कि 2011 की जनगणना के अनुसार ओड़ीशा की जनसंख्या 4.2 करोड़ है। यहाँ जनसंख्या से अभिप्राय मनुष्यों से है। जबकि सांख्यिकी में जनसंख्या का अभिप्राय – पदार्थों, प्रेक्षणों, घटनाओं जीवित प्राणियाँ के समूह से है, जिसका अध्ययन एवं विश्लेषण करने की हम योजना करते है। यहां जनसंख्या केवल मनुष्यों की गणना करना नहीं है, जबकि सांख्यिकी में जनसंख्या का अभिप्राय पदार्थों का संकलन करना (जैसे कि एक फर्म द्वारा बनाए गए बल्ब आर स्टाक विनिमय केन्द्र में खरीदी एवं बेची गई इक्विटी), जीवित प्राणियों का संग्रह (एक शहर में एक माह में पैदा हुए बच्चे एवं जंगल में शेरों की संख्या), घटनाओं का संकलन (जैसे कि 2020 में किसी विशेष सड़क पर दुर्घटनाओं की संख्या) और प्रेक्षणों का संकलन (जैसे कि एक फर्म के कर्मचारियों का एक माह का वेतन)।

प्रतिदर्श (sample) जनसंख्या का एक उपवर्ग (subset) हैं। हम प्रतिदर्श सर्वे में, जनसंख्या से, एक प्रतिदर्श निकालते है। इसलिए प्रतिदर्श का आकार हमेशा जनसंख्या के आकार से छोटा होता है।

प्राचल एवं प्रतिदर्शज : प्राचल (parameter) अध्ययन की जाने वाली जनसंख्या का अभिलक्षण है। जबकि प्रतिदर्शज (statistic) अध्ययन की जाने वाले प्रतिदर्श का अभिलक्षण है। प्रायः प्राचल को ग्रीक शब्दों में लिखा जाता है। उदाहरणतः जनसंख्या का माध्य एवं मानक विचलन को ग्रीक शब्द μ एवं σ से लिखा जाता है।

1.3 चरों के प्रकार एवं मापन की विधियां

चर एक गुण है, जो सांख्यिकीय इकाई (जैसे कि प्रेक्षण की एक इकाई) को दर्शाता है। जो विभिन्न मूल्यों को ग्रहण कर सकता है। उदाहरणतयाः एक चर, किसी व्यक्ति, स्थान, पदार्थ, एवं घटना की निश्चित विशेषता हो सकता है। सरल शब्दों में, एक व्यक्ति की विशेषता आयु, लिंग, शिक्षा, आय, ऊंचाई एवं वजन, इत्यादि को संख्यात्मक रूप में दर्शाना चर कहलाता हैं। उसी प्रकार विभिन्न पदार्थों एवं घटनाओं की विशेषताओं को संख्यात्मक रूप में दर्शाना वाला चर कहलाता है। यहां ध्यान दें, कि चर का मूल्य बदलता रहता हैं। तथा मूल्य को एक इकाई के रूप में मापा जाता है।

यादृच्छिक चर (random variable)

यादृच्छिक चर की चर्चा प्रायिकता सिद्धांत में होती है – एक चर, जिसकी किसी मूल्य को ग्रहण करने की निश्चित प्रायिकता होती है। उदाहरणतया यदि एक सिक्के को उछाला जाए, तो उसमें दो निम्नलिखित परिणामों की प्रायिकता होती है–

शीर्ष और पुच्छ आने की प्रायिकता 0.5 है। यहां, एक सिक्के का उछालना, एक यादृच्छिक चर है। इसी प्रकार, पासे के उदाहरण से भी यादृच्छिक चर को समझा जा सकता है – यदि एक पासे को फेंका जाए, तो प्रत्येक फलक के आने की प्रायिकता 1/6 होती है। यहां पासे का फेंकना एक यादृच्छिक चर है।

1.3.1 असतत् चर और सतत् चर

असतत् चर : वह चर जो एक संख्यात्मक मूल्य को ग्रहण कर सकता है जिसे गिना जा सकता है। उदाहरणतयाः एक परिवार में बच्चों की संख्या, एक व्यक्ति के जूते का आकार, एक फर्म में ग्राहकों की शिकायतों की संख्या, इत्यादि। कृपया ध्यान दे, असतत चर का मूल्य हमेशा एक पूर्ण संख्या होती है : जैसे कि एक परिवार में बच्चों की संख्या 2 होगी

या 3 होगी। यहां 2 और 3 के बीच में कोई अन्य संख्या नहीं हो सकती, इसलिए यहां 2 एक पूर्ण संख्या है, जो असतत चर का मूल्य हो सकता है।

सतत् चर : वह चर, जो कोई भी संख्यात्मक मूल्य को ग्रहण कर सकता है। परन्तु सतत चर के संख्यात्मक मूल्य की संख्या, किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच अनंत हो सकती है।

उदाहरणतया : 100 मीटर की दोड़ में, लगने वाला समय–जनवरी 2021 के विश्व रिकार्ड के अनुसार 100 मीटर की दौड़ का समय 9.58 सेकंड है। यहां यह सम्भव है, कि आने वाले वर्षो में कोई व्यक्ति इस रिकार्ड को सेकंड के एक अंश मात्र से तोड़ दे। इसी प्रकार यहां सतत चरों को अनेक उदाहरणों से समझा जा सकता है।

जैसे कि, एक व्यक्ति की ऊँचाई, वजन एवं आयु, इत्यादि। जिनका संख्यात्मक मूल्य मापन की इकाई का एक अंश मात्र हो सकता है।

1.3.2 मापन की इकाई

जैसे कि पहले भी बताया गया है, कि चर एक विशेषता (अथवा गुण) है, जिसको मापा जा सकता है। अलग–अलग विशेषताओं (अथवा गुणों) को अलग–अलग पैमानों से मापा जाता है। मुख्यता इन मापों को 4 – निम्नलिखित वर्गों में विभाजित किया जा सकता है – सांकेतिक, क्रमसूचक, अंतराल एवं अनुपातिक।

क) **सांकेतिक माप** (nominal scale.) : सांकेतिक माप, जनसंख्या एवं प्रतिदर्श की विशेषताओं (अथवा गुणों) को निश्चित वर्गो में विभाजित करता है। उदाहरणतया : लिंग (पुरुष एवं महिला), निवास स्थान (ग्रामीण एवं शहरी), भुगतान की विधियां (नकदी, चैक, क्रेडिट कार्ड, डेबिट कार्ड एवं नैट बैकिंग, इत्यादि। सांकेतिक माप के सभी वर्गो को सामान महत्व दिया जाता है।

ख) **क्रमसूचक माप** (ordinal scale): क्रमसूचक माप, जनसंख्या एवं प्रतिदर्श को क्रम के अनुसार निश्चित वर्गों में विभाजित करता है। उदाहरणतया : व्यक्तियों के एक समूह को शैक्षणिक योग्यता के आधार पर 4 – वर्गों में विभाजित किया जा सकता है। जैसे कि :

1) अशिक्षित
2) माध्यमिक
3) उच्च माध्यमिक, एवं
4) स्नातक

यहां हम कह सकते है, कि स्नातक, उच्च माध्यमिक शैक्षणिक योग्यता से उच्चतर है, एवं माध्यमिक, अशिक्षित वर्ग से उच्चतर है। इस प्रकार, इन सभी वर्गों का वर्गीकरण क्रम के आधार पर किया गया है।

यहां ध्यान दे, कि इन सभी वर्गों को अन्तर एक समान नहीं है। उदाहरणतया : उच्च माध्यमिक एवं माध्यमिक का अन्तर, स्नातक एवं उच्च माध्यमिक के अन्तर के बराबर नहीं है। अंतत यह स्पष्ट है, कि क्रमसूचक माप के अन्तर्गत सभी वर्गों के बीच का अन्तर एक समान नहीं होता है। प्रायः यह कम या अधिक हो सकता है।

ग) **अन्तराल माप (interval scale)** : अन्तराल माप में दो निम्नलिखित महत्वपूर्ण गुण है – 1) एक अन्तराल माप में पूर्ण शून्य नहीं होता। 2) दो वर्गों के बीच का अंतर एक समान होता है। उदाहरणतयाः तापमान को डिग्री सेल्लीयस (^{0}C) में मापा जाता हैः पानी का हिमकारी बिन्दु (^{0}C) शून्य डिग्री सेल्सीयस है। जबकि

पानी का उबलने वाला बिन्दु (100^0C) सौ डिग्री सेल्सीयास है। कृपया ध्यान दें यहाँ ^0C का अर्थ, तापमान की अनुपस्थिति नहीं है। एवं 100^0C का अर्थ अधिकतम तापमान नहीं है, अथवा तापमान 100^0C से अधिक भी हो सकता है। यहां : 97^0C और 98^0C के बीच का अंतराल 98^0C और 99^0C के बीच में अन्तराल के बराबर है।

घ) **अनुपातिक माप** (ratio scale): अनुपातिक माप, अन्तराल माप के सभी गुणों के अतिरिक्त पूर्ण शून्य का अर्थ यर्थाथ रूप में निहितार्थ करता है। उदाहरणतयाः किसी पदार्थ का वजन, जो किलोग्राम में मापा जाता है। यहाँ पूर्ण शून्य का अर्थ 0 किलोग्राम (अथवा वजन की अनुपस्थिति) होता है।

1.4 समंकों का संकलन

किसी सांख्यिकीय अन्वेषण में विश्वसनीय तथा पर्याप्त समंक सूचना आवश्यक होती है। इस इकाई के वर्तमान यह तथा उत्तरवर्ती अनुभागों में समंकों के संकलन की विधियाँ दी गई है।

1.4.1 सांख्यिकीय अन्वेषण – आयोजन तथा संचालन

विश्वसनीय तथा पर्याप्त समंकों के संकलन के लिए एक सांख्यिकीय सर्वेक्षण का सुविचारित आयोजन तथा संचालन अनिवार्य होता है। ऐसा न होने की परिस्थिति में इसके परिणाम दोषपूर्ण तथा बेकार हो सकते है। इन परिणामों से लाभ की तुलना में अधिक हानि हो सकती है। निम्नलिखित अनुभाग में आयोजन के पहलु का विवेचन करने का प्रयास किया गया है।

सांख्यिकीय समंकों का संकलन, सर्वेक्षण या एक प्रयोग करके किया जा सकता है। सामाजिक विज्ञानों जैसे अर्थशास्त्र तथा व्यवसाय में सर्वेक्षणों का अधिक प्रचलन होता है। जबकि प्राकृतिक/भौतिक विज्ञानों में सूचना प्रायः प्रयोगों द्वारा प्राप्त की जाती है। सर्वेक्षण में सम्मिलित विभिन्न व्यक्तियों या इकाइयों के प्रेक्षण से प्राप्त समंक, अत्यधिक संस्था में अनियंत्रित कारकों से प्रभावित होते हैं। उदाहरणार्थ, एक देश में मजदूरी अनेक कारकों, जैसे मजदूर की कार्य कुशलता, शिक्षा स्तर, तथा लिंग, प्रशिक्षण तथा अनुभव तथा कुछ देशों में मजदूर की जाति से प्रभावित होती है। भारत में नीची जाति तथा ऐतिहासिक दृष्टि से अप्राधिकृत लोगों, जैसे भंगी, को सामाजिक कारणों से भी कम मजदूरी दी जाती है।

यह बताना रुचिकर है कि भौतिक विज्ञानों में प्रयोगों द्वारा प्राप्त समंक भी अनन्य अनियंत्रित कारकों से प्रभावित होते है, चाहे ये उपयोग नियंत्रित परिस्थितियों में भी किए गए हों। यहाँ पर अनियंत्रित कारकों के मुख्य कारण – प्रयोग करने वाले व्यक्ति का पक्षपात, मापन यंत्र की प्रकृति तथा शुद्धता आदि हो सकते हैं। किसी सांख्यिकीय सर्वेक्षण को दो चरणों में विभाजित किया जा सकता है।

क) आयोजन चरण

ख) संचालन चरण

1.4.2 आयोजन चरण – सांख्यिकीय अन्वेषण के अपेक्षित गुण

प्राथमिक या द्वितीयक स्रोत से समंकों के संकलन से पूर्व एक अन्वेषक को निम्नलिखित बातों की जानकारी आवश्यक होती है।

i) **अन्वेषण का उद्देश्य तथा कार्यक्षेत्र क्या है?**

इस प्रश्न के संतोषजनक उतर के अभाव में अन्वेषक को सही दिशा प्राप्त नहीं हो सकती। यदि अन्वेषण से सम्बन्धित समंकों का संकलन नहीं होता तो मुद्रा तथा प्रयास दोनों की हानि होती है। केवल इतना ही नहीं, अन्वेषक को यह भी जानकारी होनी चाहिए कि कितने समंकों की आवश्यकता है जिससे केवल आवश्यक समंक की संकलित हों। उदाहरणार्थ, यदि हम एक राज्य में गेहूँ उत्पादन के प्रतिरूप से सम्बन्धित समंक संकलित करना चाहते है तो हमें, भूमि की किस्म, कृषि आगतें, सम्बन्धित किसानों का शिक्षा स्तर, भूमि सुधार की उपस्थिति या अनुपस्थिति के दोष, कृषि वित्त की उपलब्धता तथा लागतें, विपणन व्यवस्था आदि, से सम्बन्धित समंकों की आवश्यकता होती है।

ii) **सूचना का स्रोत क्या होग?**

अन्वेषक को प्राथमिक स्रोत, जहाँ पर उसे समंक स्वयं संकलित करने होते हैं, तथा द्वितीय स्रोत, जहाँ पर वह पहले से संकलित समंकों का उपयोग करता है, में से चयन करना होता है।

iii) **अन्वेषण की प्रकृति क्या होगी?**

अर्थात् अन्वेषक को निम्नलिखित चयन करने होते हैं :

1) संगणना या निदर्शन अन्वेषण : संगणना विधि में उसे समष्टि की प्रत्येक इकाई की जाँच करनी होती है जबकि निदर्शन विधि में केवल प्रतिदर्श में सम्मिलित इकाइयों की जाँच की जाती है। उदाहरणार्थ, संगणना विधि में वह एक गांव के व्यक्तियों की जांच करता है जबकि निदर्शन विधि में वह केवल कुछ व्यक्तियों की जांच करता है।

2) प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष अन्वेषण : प्रत्यक्ष अन्वेषण में मात्रात्मक प्रेक्षण प्रत्यक्ष रूप में प्राप्त किए जाते हैं जैसे टेलिविजनों की बिक्री तथा रूपयों में विज्ञापन व्यय। इसके विपरीत एक अप्रत्यक्ष अन्वेषण में, विद्यार्थियों की योग्यता की जाँच करने के लिए उनके द्वारा प्राप्त अंकों का उपयोग किया जाता है।

3) मूल या आवृत्तीय अन्वेषण : पहली बार किए गए अन्वेषण को मूल अन्वेषण कहते हैं जबकि बार–बार किया गया अन्वेषण आवृत्तीय अन्वेषण कहलाता है। उदाहरणार्थ, भारत में जनसंख्या संगणना प्रत्येक 10 वर्ष बाद की जाती है। ये सभी अन्वेषण आपस में सम्बन्धित होने अनिवार्य है।

4) प्रकट या गोपनीय अन्वेषण : प्रकट अन्वेषण के परिणाम जैसे जनसंख्या तथा राष्ट्रीय आय समंक, जनता को बता दिए जाते हैं। इसके विपरीत बहुत से सरकारी अन्वेषणों के परिणाम, राष्ट्रीय सुरक्षा कारणों से, गोपनीय होते हैं। जैसे प्रतिरक्षा परिमाणाविक शक्ति, अन्तरिक्ष अनुसंधान तथा विकास सम्बन्धी आदि समंक।

iv) **अन्वेषण या गणना की सांख्यिकी इकाई क्या होगी?**

सांख्यिकीय इकाई एक गुण या गुणों का समूह होता है जिसे परम्परागत रूप से चुना गया है ताकि उनको रखने वाले व्यक्ति या वस्तुएँ, किसी सांख्यिकीय अन्वेषण के लिए, गिनी या मापी जा सकें। इस प्रकार सांख्यिकीय इकाई, व्यक्ति या वस्तु का एक अभिलक्षण या अभिलक्षणों का समुच्चय होता है जिनका सूचना प्राप्त करने के लिए प्रेक्षण किया जाता है। उदाहरणार्थ, एक व्यक्ति के विभिन्न लक्षण उसकी आय, कद, वजन आदि हो सकते हैं।

सांख्यिकीय इकाई की परिभाषा का अर्थ एक व्यक्ति या वस्तु के उन अभिलक्षणों का विशेष विवरण होता है जिससे समंकों का संकलन किया जाना है।

यह बताना अनिवार्य है कि एक सांख्यिकीय इकाई के प्रेक्षण का परिणाम एक संख्या हो सकता है जोकि गणना या मापन से प्राप्त होती है। यदि संख्या मापन द्वारा प्राप्त हुई है तो इसकी मापन इकाई बताना भी अनिवार्य है। संकलित समंकों में एकरूपता रखने के लिए सांख्यिकीय इकाई तथा मापन इकाई का निर्धारण आवश्यक होता है।

v) शुद्धता की कोटि क्या होगी?

विभिन्न आर्थिक तथा व्यावसायिक अध्ययनों में पूर्ण शुद्धता न तो संभव होती है तथा न आवश्यक होती है। जनसंख्या समंकों में अन्तिम व्यक्ति तक शुद्धता की आवश्यकता नहीं है। उदाहरणार्थ, भारत की जनसंख्या 98,89,70,510 या 98,89,00,000 लिखी जाए तो इससे कोई खास अंतर नहीं होता। लेकिन, समंकों के संकलन की विभिन्न विधियों में से चयन शुद्धता की कोटि पर निर्भर होता है। इसके अतिरिक्त, एक बार निर्धारित शुद्धता की कोटि को सारे सर्वेक्षण में बनाए रखना चाहिए।

1.4.3 कार्यान्वयन चरण

यह चरण आयोजन चरण के बाद होता है। इस चरण में योजना को लागू किया जाता है जिसमें निम्नलिखित कार्य सम्मिलित होते हैं :

1) केन्द्रीय प्रशासनिक कार्य प्रणाली का स्थापन करना जोकि अन्वेषण से सम्बंधित प्रश्नों का ग्रन्थाकार तैयार करती है, जिसे प्रश्नसूची या प्रश्नावली कहते हैं। अन्वेषण की प्रकृति तथा आकार के अनुसार बड़े भौगोलिक क्षेत्रों को सम्मिलित करने के लिए यह शाखा कार्यालयों की स्थापना का निर्णय भी लेती है।

2) कार्यक्षेत्र के कर्मचारियों, जिनको प्रश्नकर्ता या अन्वेषक या परिगणक कहते हैं, का चयन व प्रशिक्षण करना। जैसा भाग 1.4 में बताया गया है, ये अन्वेषक प्रत्यार्थी के पास विभिन्न तरीकों से पहुँचते हैं। अन्वेषक का प्रशिक्षण भली–भाँति होना चाहिए तथा इनका ईमानदार तथा मेहनती होना आवश्यक है। इस चरण में कोई भी त्रुटि अन्वेषण की पूरी प्रक्रिया को संकट में डालकर भ्रामक परिणाम दे सकती है। सर्वेक्षण से श्रेष्ठ परिणाम प्राप्त करने के लिए कार्यक्षेत्र के कर्मचारियों को प्रत्यार्थियों की भाषा की जानकारी, धैर्य तथा उनसे सूचना प्राप्त करने का कौशल होना अनिवार्य है।

3) कार्यक्षेत्र कर्मचारियों का पर्यवेक्षण आवश्यक है जिससे यह सुनिश्चित हो सके कि सूचना वास्तव में प्रत्यार्थियों से प्राप्त की गई है न कि अन्वेषकों द्वारा अपने होटल के कमरे में बैठकर, प्रश्नावली मनगढ़त तरीके से भरी गई है। इसके अतिरिक्त कार्यक्षेत्र में कुछ विशेषज्ञ भी होने आवश्यक है जिससे अन्वेषकों के सम्मुख आने वाली समस्याओं का समाधान हो सके। सर्वेक्षण करते समय अप्रतिसंवेदी की समस्या बड़ी सामान्य होती है। जो निम्नलिखित प्रकार से हो सकती है :

   अ) सूची में लिखे गए प्रत्यार्थी की अनुपलब्धता। ऐसी परिस्थिति में इस प्रत्यार्थी को किसी अन्य प्रत्यार्थी से प्रतिस्थापित नहीं किया जाना चाहिए क्योंकि इससे प्रतिदर्श का यादृच्छिक लक्षण प्रभावित हो सकता है तथा अन्वेषण के परिणाम पक्षपाती हो सकते है।

   ब) अप्रतिसंवेदी के कारण प्रश्नावली के कुछ प्रश्न या उनके अंशों के उतर न प्राप्त होने की संभावना होती है। इनको अन्वेषक द्वारा पूरा नहीं किया जाना चाहिए।

4) समंकों को व्यवस्थित करने के बाद उनका विश्लेषण किया जाता है। विश्लेषण विधियों की व्याख्या बाद के खंडों में की गई है। आजकल इस कार्य के लिए कम्प्यूटर उपलब्ध है।

5) समंकों के विश्लेषण के बाद सांख्यिकीय अन्वेषण की विस्तृत रिपोर्ट तैयार की जाती है जिसमें इसके मुख्यः निष्कर्षों का जिक्र होता है। मुख्य निष्कर्ष तथा नीति परामर्श, रिपोर्ट के अन्त में भी लिखे जाते है।

1.4.4 प्राथमिक तथा द्वितीयक समंक

इस सन्दर्भ में मुख्य प्रश्न यह है कि समंक कैसे तथा कहां से प्राप्त किए जाएँ? समंकों को निम्नलिखित दो प्रकार के अन्वेषणों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

1) प्रत्यक्ष अन्वेषण, जिसका अर्थ यह है कि अन्वेषण के अन्तर्गत आने वाली इकाइयों के प्रेक्षण से प्राप्त सूचना प्राप्त की जाती है। जैसा पहले बताया जा चुका है, यह समंक प्राप्त करने का मूल स्रोत या प्राथमिक समंकों का स्रोत होता है जोकि प्रेक्षण या प्रश्न पूछकर किया जाता है। प्रेक्षण विधि में हम एक घटना को घटित होते हुए देखते हैं जैसे एक दिन व रात में नई दिल्ली के विजय चौंक से गुजरने वाले वाहनों की संख्या। दूसरी विधि में हम प्रश्नावली द्वारा प्रत्यार्थियों से प्रश्न पूछते हैं जोकि डाक या व्यक्तिगत रूप से भेजी जाती है। यह विधि मुद्रा, समय तथा प्रयास की दृष्टि से खर्चीली होती है।

2) द्वितीयक स्रोत के द्वारा अन्वेषण, जिसमें पहले से संकलित समंकों से सूचना प्राप्त की जाती है। द्वितीयक समंक अन्य लोगों या संस्थाओं द्वारा संकलित होते हैं जैसे सरकारी संस्थाएँ, आई.एम.एफ., आई.बी.आर.डी. जैसी अन्तरराष्ट्रीय संस्थाएँ, अन्य देशों, निजी तथा सरकारी अन्वेषण संस्थाएँ, भारतीय रिजर्व बैंक तथा अन्य बैंक आदि। द्वितीयक समंकों के स्रोतों को मौटे तार पर दो भागों में बाँटा जा सकता है : प्रकाशित स्रोत तथा अप्रकाशित स्रोत।

अ) प्रकाशित स्रोत

i) सरकार के विभिन्न स्तरों – केन्द्रीय, राज्य, केन्दीय शासित प्रदेश तथा संघ – पर सरकारी प्रकाशन।

ii) विदेशों में सरकारी प्रकाशन।

iii) अन्तरराष्ट्रीय संस्थाओं जैसे आई.एम.एफ., यूनेस्को, डब्ल्यू.एच.ओ. आदि के अधिकारिक प्रकाशन।

iv) विख्यात समाचारपत्र तथा पत्रिकाएँ (स्वदेशी तथा विदेशी) जैसे कामर्स, कैपिटल, इकनोमिक टाइम्स, इक्नोमिका आदि।

v) भारतीय रिजर्व बैंक तथा अन्य बैंकों, भारतीय जीवन बीमा निगम, व्यवसाय संघ, स्टाक एक्सचेंज, चैम्बर ऑफ कामर्स आदि के आधिकारिक प्रकाशन।

vi) विख्यात अर्थशास्त्रियों, शोधकर्ता, विश्वविद्यालय, पूछताछ आयोगों आदि की रिपोर्ट।

भारत में प्रकाशित द्वितीयक समंकों के अन्य स्रोत निम्नलिखित हैं :

i) केन्द्रीय सांख्यिकीय कार्यालय (CSO) : यह राष्ट्रीय आय, बचत, पूँजी निर्माण आदि पर समंक प्रकाशित करता है। प्रकाशन का नाम राष्ट्रीय लेखा सांख्यिकी है।

ii) राष्ट्रीय सर्वेक्षण कार्यालय (NSSO) : यह कार्यालय सांख्यिकी एवं कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय के अन्तर्गत है तथा राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था के विभिन्न पहलुओं जैसे कृषि, उद्योग, श्रम, उपभोग व्यय आदि पर समंक प्रकाशित करता है।

iii) भारतीय रिजर्व बैंक के प्रकाशन (RBI) : यह वित्तीय समंक प्रकाशित करता है। मुद्रा तथा वित्त पर रिपोर्ट, भारतीय रिजर्व बैंक बुलेटिन, भारतीय बैंकों से सम्बन्धित सांख्यिकीय सारणी आदि इसके प्रमुख प्रकाशन है।

iv) श्रम ब्यूरो : इसके मुख्य प्रकाशन भारतीय श्रम सांख्यिकी, भारतीय श्रम वर्ष पुस्तिका भारतीय श्रम पत्रिका आदि है।

ब) **अप्रकाशित स्रोत**

i) पूछताछ कमेटियों की अप्रकाशित रिपोर्ट।

ii) अन्वेषकों की रिपोर्ट।

iii) व्यवसायिक संस्था, श्रम संगठन तथा चैम्बर ऑफ कॉमर्स आदि के पास उपलब्ध अप्रकाशित सामग्री।

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित पदों की व्याख्या कीजिए :

(प्रत्येक उत्तर तीन व्याक्यों से अधिक नहीं होना चाहिए)।

i) प्रश्नावली	ii) अप्रतिसंवेदी
iii) परिकल्पना	iv) सांख्यिकीय इकाई
v) सांख्यिकीय अन्वेषण	vi) प्रश्न सूची

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित पदों में भेद स्पष्ट कीजिए।

(प्रत्येक उत्तर चार व्याक्यों से अधिक नहीं होना चाहिए)

i) समंक, सांख्यिकीय समंक तथा सांख्यिकी

ii) समंक समुच्चय तथा समंक बिन्दु

iii) प्राथमिक तथा द्वितीयक समंक

iv) परिमाणात्मक तथा गुणात्मक समंक

v) प्रतिदर्श तथा संगणना

vi) सांख्यिकीय अन्वेषण का आयोजन तथा संचालन

vii) सर्वेक्षण तथा प्रयोग

viii) प्रत्यक्ष अन्वेषण तथा द्वितीयक स्रोत अन्वेषण

....

....

....

....

....

3) सूचना के विभिन्न स्रोत क्या होते हैं?

....

....

....

....

....

1.5 प्राथमिक समंकों का संकलन – सर्वेक्षण विधि

जब अन्वेषक को यह विश्वास हो जाए कि प्राथमिक समंकों के लाभ मुद्रा, प्रयास तथा समय लागतों से अधिक हैं, तो उसे इनका संकलन करना चाहिए। प्राथमिक समंकों के संकलन के लिए वह निम्नलिखित विधियों में से किसी एक का उपयोग कर सकता है।

1) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अन्वेषण
2) अप्रत्यक्ष मौखिक अन्वेषण
3) स्थानीय सूचनाओं का उपयोग
4) प्रश्नावली विधि

1) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अन्वेषण

इस विधि में अन्वेषक व्यक्तिगत रूप से प्रत्यार्थियों से सूचना प्राप्त करता है। वह सूचना प्राप्ति के लिए व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित करता है। इस विधि में अन्वेषक के बारे निम्नलिखित आशाएँ की जाती है।

i) उसे विनम्र, निष्पक्ष तथा चतुर होना चाहिए।

ii) उसे स्थानीय परिस्थितियों तथा रीति–रिवाजों का ज्ञान होना चाहिए ताकि वह अपनी पहचान प्रत्यार्थियों में से एक के रूप में दे सके।

iii) वह अच्छी प्रेक्षण शक्ति सहित बुद्धिमान होना चाहिए।

iv) सूचना प्राप्त करने के लिए उसे सरल तथा अर्थपूर्ण प्रश्न पूछने चाहिए।

यह विधि केवल गहन अन्वेषण के लिए उपयुक्त होती है। यह मुद्रा, समय तथा प्रयास की दृष्टि से खर्चीली है।

इसके अतिरिक्त अन्वेषक के पक्षपात को निकाला जाना कठिन है, जिससे अन्वेषण को अत्यधिक हानि हो सकती है। यदि अन्वेषक में उपरोक्त गुण नहीं हैं तो यह विधि बिल्कुल बेकार सिद्ध हो सकती है।

2) अप्रत्यक्ष मौखिक अन्वेषण

इस विधि का प्रायः तब उपयोग किया जाता है जब विभिन्न कारणों से प्रत्यार्थी उत्तर देने में अनिच्छुक होते हैं। इस विधि में सूचना किसी गवाह या अन्य ऐसे व्यक्ति से प्राप्त की जाती है जो उस घटना से प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित हो तथा इसके बारे में उसे पर्याप्त ज्ञान हो। इन सूचना देने वाले व्यक्तियों की निम्नलिखित विशेषताएँ होनी चाहिए :

i) उन्हें घटना की पूरी जानकारी होनी चाहिए।

ii) वे इसके बारे में निष्ठापूर्वक तथा ईमानदारी से बताने के लिए तैयार हों।

iii) वे पक्षपात एवं द्वेष न रखते हों।

iv) वे अन्वेषण के वास्तविक अभिप्राय के अनुकूल उत्तर देने में समर्थ हों।

3) स्थानीय सूचनाओं का उपयोग

इस विधि में अन्वेषक स्थानीय समाचारों तथा पत्रिकाओं का उपयोग करते हैं। यह सूचना स्थानीय पत्रकार न कि अन्वेषक द्वारा एकत्रित की हुई होती है। अतः इस विधि द्वारा प्रर्याप्त तथा विश्वसनीय परिणाम प्राप्त नहीं होते। यह विधि कम खर्चीली है लेकिन इसका उपयोग ऐसे अन्वेषण में नहीं किया जाना चाहिए जहां शुद्धता की ऊँची कोटि की आवश्यकता हो।

4) प्रश्नावली विधि

प्राथमिक समंकों के संकलन की यह सबसे महत्वपूर्ण तथा व्यवस्थित विधि है। इस विधि में अन्वेषण से सम्बन्धित प्रश्नों की सूची तैयार की जाती है, जिसे प्रश्नावली कहते हैं। प्रश्नावली के दो भाग होते हैं :

i) सामान्य आरंभिक भाग जिसमें प्रत्यार्थी की पहचान सम्बन्धित प्रश्न जैसे नाम, पता, टेलिफोन नम्बर, शैक्षिक योग्यता, व्यवसाय आदि पूछे जाते हैं।

ii) मुख्य प्रश्न भाग, जिसमें अन्वेषण से सम्बन्धित प्रश्न होते हैं। ये प्रश्न विभिन्न अन्वेषणों के लिए भिन्न हो सकते हैं।

प्रश्नावली तैयार करने का कार्य बड़ा विशिष्ट होता है जिसको अनुभव द्वारा प्राप्त किया जाता है। अतः प्रश्नावली तैयार करते समय कुछ अनुभवी व्यक्तियों को साथ रखना आवश्यक है। प्रश्नावली तैयार करते समय निम्नलिखित महत्वपूर्ण बातों का ध्यान रखना आवश्यक होता है :

1) लोगों से वांछित रूप से तथा प्रर्याप्त शुद्धता सहित सूचना प्राप्त करना एक कठिन कार्य है। कुछ शंकाओं के कारण व्यक्ति सूचना देने के लिए स्वतः तैयार नहीं होते। बहुधा वे अपूर्ण तथा त्रुटिपूर्ण सूचना देते हैं। अतः उनको विश्वास में लेना आवश्यक होता है। उनको यह विश्वास दिलाया जाना चाहिए कि उनके द्वारा दी गई सूचना गोपनीय रखी जाएगी तथा इसका कोई भी अंश कर अधिकारियों या अन्य सरकारी संस्थाओं को नहीं दिया जाएगा।

2) जब सूचना देना कानूनी बंधन न हो तो प्रत्यार्थी को प्रार्थना या चतुर तर्को द्वारा उत्तर देने के लिए प्रेरित किया जाना चाहिए। उनको यह बताया जाना चाहिए कि अन्वेषण के परिणामों का उपयोग ऐसी नीतियों के बनाने में होगा जिनसे उनको लाभ होगा। अतः यह स्पष्ट है कि अन्वेषण के लिए अच्छी बिक्री कला आवश्यक है।

3) व्यक्तिगत प्रश्न, जिनसे प्रत्यार्थी को परेशानी हो, नहीं पूछे जाने चाहिए। उदाहरणार्थ, क्या आप आयकर की चोरी करते है या कालाबाजारी करते है या स्मगलिंग करते हैं? आदि प्रश्न नहीं पूछे जाने चाहिए।

4) भावनाओं को चोट पहुँचाने वाले प्रश्न नहीं पूछे जाने चाहिए। इनमें जुए की आदतें, सेक्स सम्बन्धी आदतें, ऋणग्रस्तता आदि सम्मिलित होती हैं।

5) ऐसे प्रश्न जिनमें जटिल परिकलन निहित हो, नहीं पूछे जाने चाहिए क्योंकि प्रत्यार्थी की इनमें रूचि तथा योग्यता होना आवश्यक नहीं है। इन परिस्थितियों में अन्वेषक को

   i) प्रत्यार्थी से तुलनपत्र, लाभ तथा हानि लेखा तथा सामान सूची प्राप्त करके अपेक्षित सूचना का परिकलन स्वयं करना चाहिए।

   ii) सरल तथा अप्रत्यक्ष प्रश्न पूछकर अपेक्षित सूचना प्राप्त करनी चाहिए।

6) ऐसे प्रश्न पूछे जाने चाहिए जिससे प्रत्यार्थी द्वारा दी गई सूचना की सच्चाई की जाँच हो सके। उदाहरणार्थ, प्रशासनिक, उत्पादन, भण्डार, विपणन विभागों में विभिन्न प्रकार की श्रमिकों की जानकारी पर प्रश्न पूछकर फैक्ट्री की कुल मजदूरी व्यय सूचना की जाँच की जा सकती है।

7) जहाँ तक संभव हो प्रश्न हाँ/नहीं प्रकार के होने चाहिए। ये सरल तथा सुनिश्चित होते हैं तथा इनके उत्तर में कम समय लगता है। बाद में इनका सारणीयन भी सरल होता है। उदाहरणार्थ :

   क्या आप विवाहित हैं? हाँ/नहीं

   सही उत्तर पर निशान (√) लगाएँ।

8) प्रश्न संक्षिप्त तथा सुस्पष्ट होने चाहिए अर्थात् ये अस्पष्ट तथा भ्रामक नहीं होने चाहिए। जहाँ तक संभव हो, प्रश्नों के वैकल्पिक उत्तर दिये जाएँ तथा प्रत्यार्थी को उनमें से एक पर, जो वह ठीक समझता है, निशान लगाने के लिए कहें। जब उत्तरों की सूची सम्पूर्ण न हो तो एक रिक्त लाइन छोड़ देनी चाहिए जिसके पहले ''अन्य, यदि कोई है तो'', लिखा हुआ होना चाहिए। इनको समझने के लिए हम एक उदाहरण लेते हैं। एक प्रश्न का उदाहरण निम्नलिखित है :

   लोग अपने मताधिकार का प्रयोग क्यों नहीं करते?

   सही उत्तर पर निशान (√) लगाइए।

   क) वे अनपढ़ हैं तथा मत के महत्व को नहीं समझते।

   ख) उनके ख्याल में लाखों मतों में से एक मत न देने से कोई अन्तर नहीं होता।

   ग) मतदान शिविर उनके घरों से बहुत दूर हैं।

   घ) उन्हें स्थानीय बदमाशों तथा हिंसा का डर लगता है।

ङ) वे सरकार से खुश नहीं हैं तथा विरोध प्रकट करने के लिए मतदान नहीं करते।

च) जब तक कोई मुद्रा प्रलोभन न हो, वे वोट नहीं डालते।

छ) अन्य कोई कारण, कृपया बताएं : ....

प्रश्नों तथा उत्तरों का यह रूप समंकों के व्यवस्थितिकरण तथा सारणीकरण में सहायक होता है।

9) प्रश्नों की संख्या अधिक नहीं होनी चाहिए क्योंकि इससे प्रत्यार्थी में नीरसता की भावना उत्पन्न होती है। समय तथा रुचि के अभाव में प्रत्यार्थी अधिक प्रश्नों के उत्तर देने के इच्छुक नहीं होते।

परिवार नियोजन पर प्रश्नावली का एक प्रतिदर्श निम्नलिखित है।

परिवार नियोजन पर सर्वेक्षण

1. नाम :
2. पिता / पति का नाम :
3. घर का पता :
4. कार्यस्थान :
5. आयु :
6. पुरुष / स्त्री :
7. धर्म :
8. दूरभाष संख्या :
9. व्यवसाय : i) स्वयं : ii) पत्नी / पति :
10. सभी स्रोतों से पारिवारिक वार्षिक आय :
11. शैक्षिणिक योग्यता : (सही उत्तर पर निशान (√) लगाएँ।)

    i) अनपढ़ ii) प्राथमिक स्तर

    iii) मध्य स्तर iv) माध्यमिक

    v) उच्चतर माध्यमिक vi) स्नातक

    vii) स्नातकोत्तर
12. पत्नी / पति की शैक्षिणिक योग्यता : (सही उत्तर पर निशान (√) लगाएँ।)

    i) अनपढ़ ii) प्राथमिक स्तर

    iii) मध्य स्तर iv) माध्यमिक

    v) उच्चतर माध्यमिक vi) स्नातक

    vii) स्नातकोत्तर
13. वैवाहिक जीवन, वर्षों में : ——————————————————
14. उत्पन्न बच्चों की संख्या : लड़कियाँ ——————— लड़कें ——————————

15. जीवित बच्चों की संख्या : लड़कियाँ ——————— लड़कें ———————

16. बच्चों में अन्तर, वर्षों में

i) शादी तथा प्रथम बच्चा : ————————————————

ii) प्रथम तथा द्वितीय बच्चा : ————————————————

iii) द्वितीय तथा तृतीय बच्चा : ————————————————

iv) तृतीया तथा चतुर्थ बच्चा : ————————————————

v) चतुर्थ तथा पाँचवाँ बच्चा : ————————————————

vi) पाँचवाँ तथा छठा बच्चा : ————————————————

17. क्या आप परिवार नियोजन के पक्ष में हैं?(हाँ / नहीं)

18. यदि नहीं, तो कारण बताएँ

i) बच्चे प्राकृतिक उपहार हैं :(हाँ / नहीं)

ii) परिवार नियोजन मेरे धर्म के विरुद्ध हैं :(हाँ / नहीं)

iii) परिवार नियोजन का अर्थ है अनजन्में बच्चे की हत्या :(हाँ / नहीं)

iv) बच्चों की संख्या मेरे भाग्य का हिस्सा है :(हाँ / नहीं)

v) अन्य कोई कारण, कृपया बताइए :————————————————

19. यदि आप परिवार नियोजन के पक्ष में है, कारण बताएँ :

i) छोटा परिवार सुखी परिवार :(हाँ / नहीं)

ii) दो बच्चों को सरलता से नियंत्रित किया जा सकता है :(हाँ / नहीं)

iii) दो बच्चों की उपयुक्त शिक्षा तथा पोषण हो सकता है :(हाँ / नहीं)

iv) जीवन में कष्ट कम होते हैं :(हाँ / नहीं)

v) माता के स्वास्थ्य पर बुरा प्रभाव नहीं पड़ता :(हाँ / नहीं)

vi) अन्य कोई कारण, कृपया बताइए :————————————————

20. अपने बच्चों की आयु, शिक्षण स्तर तथा स्वास्थ्य स्थिति की जानकारी दीजिए।

क्र.सं. नाम	आयु	शिक्षण स्तर	स्वास्थ्य स्थिति (*)
1) ———————	—————	—————————	———————————
2) ———————	—————	—————————	———————————
3)—————————	—————	—————————	———————————
4)—————————	—————	—————————	———————————

(*कमजोर, सामान्य से निम्न, या उत्तम बताइए।)

प्रत्यार्थी के पास प्रश्नावली सहित किस प्रकार पहुँचना है?

इसके लिए हमारे पास तीन विधियाँ उपलब्ध है?

1) प्रश्नावली को डाक या ई–मेल द्वारा भेजा जाय। इसके साथ एक अग्रसारण पत्र भी भेजा जाना चाहिए जिसमें प्रत्यार्थी, समाज या राष्ट्र के लिए सर्वेक्षण की व्याख्या की गई हों तथा इसको भरके भेजने के सहयोग की प्रार्थना भेजने के सहयोग की प्रार्थना की गई हो। फिर आप उत्तरों की प्रतीक्षा कीजिए। प्रायः यह पाया गया है कि उत्तर बहुत कम प्राप्त होते हैं।

2) प्रश्नावली को अन्वेषकों के माध्यम द्वार भेजिए जोकि प्रत्यार्थियों से प्रश्न पूछ कर स्वयं सूचना लिखेंगे। यह विधि चाहे खर्चीली है, लेकिन अच्छी है। यह प्रत्यार्थी को प्रश्न समझने में सहायक है। सुस्ती तथा गैरजिम्मेवारी का क्षेत्र कम होने के कारण इस विधि के अच्छे परिणाम मिलते हैं। एक चतुर तथा बुद्धिमान अन्वेषक अच्छे परिणाम पाने में सक्षम होता है।

3) प्रश्नावली को डाक या ई–मेल द्वारा भेजने के पश्चात् अन्वेषक को क्षेत्र में भेज दीजिए। यह विधि सबसे उत्तम होती है क्योंकि इसमें दोनों विधियों के गुण सम्मिलित होते हैं। निस्संदेह, यह खर्चीली है। यह विस्तृत अध्ययनों के लिए बहुत उपयोगी है। खचीर्ली होने के कारण प्राय : इस विधि का उपयोग सरकार द्वारा किया जाता है, जिसके पास साधनों की कोई कमी नहीं होती।

1.6 द्वितीयक समंकों का संकलन

जैसा अनुभाग 1.4.4 में बताया गया था कि प्रत्यक्ष अन्वेषण चाहे वांछनीय होता लेकिन मुद्रा, प्रयास तथा समय की दृष्टि से खर्चीला होता है। विकल्पत : सूचना द्वितीयक स्रोत से भी प्राप्त की जा सकती है। इसका अर्थ किसी अन्य संस्था द्वारा संकलित समंकों से सूचना प्राप्त करना होता है। तकनीकी तौर पर इन समंकों को द्वितीयक समंक कहते हैं।

द्वितीयक समंकों की सीमाएँ

हालाँकि द्वितीयक स्रोत मुद्रा, समय तथा प्रयास की दृष्टि से सस्ता होता है, इन समंकों का उपयोग बड़े ध्यानपूर्वक किया जाना चाहिए। समंक विशाल तथा विश्वसनीय होने वाछंनीय है तथा प्रयोग किए गए परिभाषिक शब्द तथा परिभाषाएँ वर्तमान अन्वेषण की परिभाषाओं के सदृश होने चाहिए। समंकों की उपयुक्तता की जाँच वर्तमान अन्वेषण तथा मूल अन्वेषण की प्रकृति तथा कार्यक्षेत्र की तुलना द्वारा की जा सकती है। यदि द्वितीयक समंक निष्पक्ष, बुद्धिमान एवं प्रशिक्षित अन्वेषक द्वारा संकलित किए गए हों तो विश्वसनीय होते हैं। इन समंकों की समयावधि की भी उपयुक्त जाँच की जानी चाहिए। कॉनोर ने ठीक ही कहा है कि, ''समंक विशेषतः अन्य व्यक्ति के (द्वारा एकत्रित) समंक प्रयोगकर्त्ता के लिए कमियों से पूर्ण होते हैं''। अर्थात् यह आवश्यक नहीं है कि द्वितीयक समंकों के उपयोग से पहले, अन्वेषक को इनसे मुद्रा, समय तथा प्रयास की बचत के लाभों की तुलना त्रुटिपूर्ण निष्कर्षों की हानियों से कर लेनी चाहिए। समंकों का उपयोग सुरक्षित है या नहीं की जाँच इनकी पर्याप्तता, उपयुक्तता तथा विश्वसनीयता की जाँच द्वारा की जानी चाहिए।

अतः द्वितीयक समंकों के उपयोग से पहले हमें यह जाँचना आवश्यक है कि क्या यह :

i) विश्वसनीय हैं,

ii) उपयुक्त हैं, तथा

iii) पर्याप्त हैं?

स्पष्टतः समंकों की विश्वसनीयता किन्हीं भी समंकों के लिए आवश्यक होती हैं। तथा ऐसा द्वितीयक समंकों के लिए और आवश्यक है। इस दृष्टि से प्रयोगकर्ता को सन्तुष्ट होना अनिवार्य है। उसे इस बात की जाँच कर लेनी चाहिए कि समंक एक विश्वसनीय स्रोत से तथा विश्वसनीय, निष्पक्ष तथा प्रशिक्षित अन्वेषक द्वारा संकलित किए गए हैं। दूसरे, यह भी जानना चाहिए कि क्या समंक उसी प्रकार के वर्ग से प्राप्त किए गए है या नहीं। तीसरे, क्या समय बीतने के कारण वर्ग समूह की आदत, रीति–रिवाज तथा फैशन में कोई अन्तर आया है नहीं। निस्संदेह बिल्कुल वैसी ही परिस्थितियों की आशा नहीं की जानी चाहिए।

समंकों की उपयुक्तता का अन्य उपेक्षा है। अन्वेषक को यह विश्वास हो जाना चाहिए कि उसके द्वारा उपयोग किए जाने वाले समंक अन्वेषण के लिए उपयुक्त हैं। उसे स्रोत के प्राचलों, जैसे व्यक्तियों का वर्ग, भौगोलिक क्षेत्र, अवधारणाओं की परिभाषा, मापन इकाई, समय तथा अन्य, की तुलना अन्वेषण के प्राचलों से कर लेना चाहिए। इसके अतिरिक्त, उपयुक्तता के लिए, लक्ष्यों तथा उद्देश्यों की तुलना भी कर लेनी चाहिए।

द्वितीयक समंकों का विश्वसनीय तथा उपयुक्त होने के साथ–साथ पर्याप्त होना भी आवश्यक होता है। अतः अन्वेषण की आवश्यकता की तुलना में उपलब्ध समंक पर्याप्त होने वांछनीय हैं। उदाहरणार्थ, एक राज्य के उपभोग स्वरूप के समंक बड़े तथा कस्बों के समंकों से प्राप्त नहीं किए जा सकते।

बोध प्रश्न 2

1) कारण सहित बताइए कि क्या निम्नलिखित वाक्य ठीक हैं या नहीं?

   i) द्वितीयक समंक प्राथमिक समंकों से श्रेष्ठ होते हैं।

   ii) 1991 की भारतीय जनसंख्या संगणना से प्राप्त समंक प्राथमिक स्रोत है।

   iii) द्वितीयक समंकों को बिना जाँच के स्वीकृति नहीं किया जाना चाहिए।

   iv) एक लम्बी सूची वाले प्रश्नों की प्रश्नावली उचित होती है।

   v) सभी सर्वेक्षण तकनीकों में से प्रश्नावली विधि श्रेष्ठ होती है।

....

....

....

....

2) जब प्राथमिक समंकों के संकलन की प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अन्वेषण विधि प्रयोग की जानी हो तो अन्वेषक की दो महत्वपूर्ण विशेषताओं के बारे में जानकारी दीजिए।

....

....

....

....

3) विभिन्न सर्वेक्षण तकनीकों की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

4) इस कथन पर टिप्पणी कीजिए : ''हमें सदैव द्वितीयक समंक उपयोग करने चाहिए''।

....

....

....

....

1.6 सार संक्षेप

समंक/सांख्यिकी परिमाणात्मक सूचना होती है तथा इसका प्रतिदर्श या संगणना, प्राथमिक या द्वितीयक समंक के रूप में भेद किया जा सकता है। एक अन्वेषण के संचालन के लिए समंकों की आवश्यकता होती है जोकि नए सिरे से या द्वितीयक स्रोत से प्राप्त किए जा सकते हैं। इन दोनों के लिए सांख्यिकीय सर्वेक्षण की आवश्यकता होती है जिसके आयोजन चरण तथा संचालन चरण होते हैं। आयोजन चरण में अन्वेषक को प्राथमिक स्रोत या द्वितीयक स्रोत, संगणना या प्रतिदर्श अन्वेषण, सांख्यिकीय इकाई की प्रकृति, तथा मापन इकाई, शुद्धता की कोटि आदि के बारे में निर्णय करने होते हैं। संचालन चरण में अन्वेषक का मुख्य कार्य प्रशासनिक व्यवस्था करना कार्यक्षेत्र कर्मचारियों की नियुक्ति तथा प्रशिक्षण तथा समंक संकलन की सारी प्रक्रिया का निरीक्षण करना होता हैं।

प्रकाशित तथा अप्रकाशित स्रोतों से प्राप्त द्वितीयक समंकों का उपयोग सावधानी से किया जाना चाहिए क्योंकि इनमें विभिन्न कमियाँ होती हैं। सभी सर्वेक्षण तकनीकों में से प्रश्नावली विधि अति महत्वपूर्ण है। प्रश्नावली में प्रासंगिक प्रश्न होते हैं जोकि सरल, सुस्पष्ट तथा हाँ/नहीं प्रकार के होने चाहिए। व्यक्तिगत तथा भावनाओं को चोट पहुँचाने वाले प्रश्न नहीं पूछे जाने चाहिए।

1.8 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) i) ii) तथा vi) के लिए अनुभाग 1.3.3
   ii) के लिए भाग 1.2 देखिए।
   iii) के लिए अनुभाग 1.3.2 देखिए।
   iv) के लिए अनुभाग 1.3.2 देखिए।
   v) के लिए अनुभाग 1.3.1 देखिए।
2) i) भाग 1.1 देखिए।
   ii) भाग 1.2 देखिए।
   iii), iv), viii) भाग 1.2 देखिए।
   vi) अनुभाग 1.3.2 देखिए।
   vii), ix) अनुभाग 1.3.1 देखिए।
   x) अनुभाग 1.3.4 देखिए।
3) अनुभाग 1.3.4 देखिए।

बोध प्रश्न 2

1) i), ii), iv) गलत।
   iii), v) सही।
2) भाग 1.4 देखिए।
3) भाग 1.4 देखिए।
4) भाग 1.5 देखिए।

इकाई 2 समंकों का सारणीयन तथा आलेखी प्रस्तुतिकरण*

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप को निम्नलिखित के बारे में जानकारी मिलेगीः

- समंकों के संकलित हो जाने के बाद सांख्यिकीय अन्वेषण के चरण;
- समंकों के संगठन (वर्गीकरण तथा विन्यास) तथा संक्षेपण की विधियाँ;
- बारंबारता बंटन तथा इनके विभिन्न रूप; और
- सांख्यिकीय समंकों के प्रस्तुतिकरण की विभिन्न विधियाँ जैसे सारणी आलेख, आरेख, चित्रलेख आदि।

---

*इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 1,2,3 श्री अवतार सिंह द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।

2.1 विषय प्रवेश

इससे पहले की इकाई में हमने समंकों के संकलन, सांख्यिकीय (और प्रतिदर्श) सर्वेक्षण एवं द्वितीयक स्रोत, की विधियों की चर्चा की। प्राथमिक स्रोत से संकलित समंक (जनसंख्या प्रायः अव्यवस्थित होते हैं। शुरू में समंक सौ और हजारों प्रश्नावलियों में होते है। इनको समझने के लिए इनको संगठित (अर्थात् वर्गीकृत तथा व्यवस्थित) तथा संक्षेपित करना आवश्यक है। इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए हम विभिन्न विधियों का प्रयोग करते हैं। जैसे कि हम विभिन्न जानकारियों को प्रत्यक्ष प्रश्नावली से एक मास्टर पत्र में लिख सकते है। इस मास्टर पत्र से हम एक सरल सारणी को तैयार कर सकते हैं। आजकल कम समय में कुशलतापूर्वक समंको को संगठित एवं संक्षेपण के लिए कम्प्यूटर का उपयोग किया जाता है। ऐसे कम्प्यूटर सोफ्टवेयर उपलब्ध हैं जो कि विभिन्न प्रकार के आलेख तथा आरेख बनाने में सहायक होते हैं। समंकों को संख्यात्मक संक्षेपण भी किया जा सकता है। इसके लिए हम संक्षेपण माप जैसे प्रथम कोटि के केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य, बहुलक तथा माध्यिका); द्वितीय कोटि के केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप या प्रकीर्णन के माप (परिसर, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन तथा मानक विचलन); द्विचर विश्लेषण में साहचर्य के माप (सहसंबंध तथा प्रतीपगमन); सूचकांक इत्यादि का उपयोग करते हैं। इस इकाई में हम सारणी तथा आलेखों द्वारा समंकों के संक्षेपण की चर्चा करेंगें। संख्यात्मक संक्षेपण कि चर्चा बाद में इकाई (2, 3 तथा 4) में किया जाएगा। यहाँ यह बताना आवश्यक है कि अच्छा संक्षेपण तथा प्रस्तुतिकरण स्वयं में लक्ष्य नहीं है। वास्तव में यह समंकों के उपयोगी विश्लेषण और व्याख्या के लिए मंच प्रदान करता है। इसके अतिरिक्त एक अच्छा प्रस्तुतिकरण सार्थक तथ्यों को सामने लाने तथा उनकी तुलना करने में सहायक होता है। समंकों को बोलने योग्य बना कर उनका बुद्धिमता से उपयोग किया जा सकता है।

इस इकाई में हम एक सरल सारणी (आरोही एवं अवरोही) के रूप में संमकों को व्यवस्थित एवं संक्षिप्त करने पर ध्यान केन्द्रित करेगें। इसके अतिरिक्त बारंबरता सारणी, सतत बारंबरता बंटन एवं सारणी और आरेख के रूप में संमकों के प्रस्तुतिकरण पर भी ध्यान केन्द्रित करेगें।

2.2 समंकों का विन्यास

संकलित समंकों का ढेर प्रायः बड़ा अबोधगम्य तथा उबाने वाला होता है। यह बिल्कुल नीरस तथा सरलता से समझ न आने वाला होता है। उदाहरणार्थ, यदि आपको एक गांव के 1000 परिवारों की मासिक आय के समंकों को दिया जाए तो, आप के लिए दिए गए समंकों से तर्क निकलना कठिन हो जाएगा। परंतु यदि आपको उस गांव की मासिक औसत आय 2540 रू का समंक दिया जाए तो यह आपके लिए यह समंक बहुत मनोरंजक होगा और आप इस समंक से दुसरे समंक से तुलना कर सकेगें।

समंकों के विश्लेषण तथा व्याख्या करने का पहला कदम वर्गीकरण एवं सारणीकरण होता है। समंकों को एक समान अभिलक्षण के अनुसार संगठित करने की प्रक्रिया वर्गीकरण कहलाती है। इसके विपरीत समंकों का प्रमुख अभिलक्षणों के अनुसार पंक्तियों तथा स्तम्भों में सुव्यवस्थित प्रस्तुतिकरण सारणीकरण कहलाता है। इकाई .... में हमने परिवार नियोजन पर एक प्रश्नावली तैयार की थी। मान लिया यह प्रश्नावली नई दिल्ली की XYZ कालोनी के C-III ब्लाक के 50 परिवारों से सूचना प्राप्त करने के लिए उपयोग की गई। यह सूचना सारणी 2.1 तथा 2.2 में दी हुई है। क्या हम इसे समझ सकते हैं?

सारणी 2.1: प्रति परिवार बच्चों की संख्या, **C-III** ब्लाक, **XYZ** कालोनी, नई दिल्ली

2	0	1	5	3	1	2	1	0	2
4	3	2	2	3	4	1	0	2	3
1	4	2	3	1	2	5	4	1	3
2	1	3	2	3	4	1	2	3	1
4	5	2	1	1	0	3	2	0	2

सारणी 2.2: 50 परिवारों की मासिक आय, **C-III** ब्लाक, **XYZ** कालोनी, नई दिल्ली

547	622	691	684	567	586	680	578	583	578
708	544	528	540	730	541	720	698	763	633
640	637	598	631	618	692	600	650	604	640
646	654	689	736	731	844	798	712	772	820
678	663	800	692	700	781	658	798	709	720

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, ऊपर दिए हुए अपरिष्कृत समंकों के ढेर को समझने के लिए इनका वर्गीकरण तथा विन्यास आवश्यक है। यह एक सरल क्रम विन्यास या बारंबारता क्रम–विन्यास (असंतत बारंबारता बंटन) या संतत बारंबारता बंटन तैयार करके किया जा सकता है। इस पहलु की व्याख्या 2.3.1, 2.3.2 तथा 2.3.3 में की गई है।

2.2.1 सरल क्रम–विन्यास

यह दिए हुए अपरिष्कृत (एक विचर) समंकों का आरोही तथा अवरोही क्रम में विन्यास होता है। आरोही क्रम में प्रेक्षणों का विन्यास, आकार के बढ़ते क्रम किया जाता है। उदाहरणार्थ, संख्याएँ 3, 5, 7, 9, 10 आरोही क्रम में हैं। अवरोही क्रम इसका विपरीत होता है। उदाहरणार्थ, संख्याएँ 10, 9, 7, 5, 3 अवरोही क्रम में है।

हम सारणी 2.1 से दोनों प्रकार के सरल क्रम–विन्यास तैयार कर सकते हैं। निम्नलिखित सारणी में समंकों का आरोही विन्यास किया गया है। इस विन्यास से यह स्पष्ट है कि न्यूनतम मान 0 तथा उच्चतम मान 5 है।

सारणी 2.3: प्रति परिवार बच्चों की संख्या, **C-III** ब्लाक, **XYZ** कालोनी, नई दिल्ली

सरल क्रम विन्यास – आरोही क्रम

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	4	4	4	4	4	5	5	5

इस विन्यास के बाद सारणी 2.1 में दिए हुए समंकों का कुछ अर्थ समझ में आने लगता है। इस विन्यास से संभवतः यह निष्कर्ष निकाले जा सकते है कि 5 परिवारों में बच्चे नहीं है, प्रत्येक 12 परिवारों में 1 बच्चा है, प्रत्येक 14 परिवारों में 2 बच्चे हैं, प्रत्येक 10 परिवारों में 3 बच्चे हैं, प्रत्येक 6 परिवारों में 4 बच्चे हैं तथा प्रत्येक 3 परिवारों में 5 बच्चे हैं।

2.2.2 बारंबारता क्रम–विन्यास या असंतत बारंबारता बंटन

यहाँ सरल क्रम विन्यास, जैसे 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 आदि, की भांति विभिन्न प्रेक्षणों को बार–बार नहीं लिखा जाता। हम एक प्रेक्षण कितनी बार घटित होता है (अर्थात् बारंबारता) की गणना करते हैं। उदाहरणार्थ, सारणी 2.3 में प्रेक्षण 4, छः बार घटित हुआ। अतः 4 की बारंबारता 6 है। सारणी 2.3 में दिए हुए सरल क्रम विन्यास का बारंबारता क्रम विन्यास, सारणी 2.4 में दिया गया है।

बारंबारता क्रम–विन्यास एक सांख्यिकीय सारणी होती है। जिसमें विभिन्न प्रेक्षणों को उनके आकार के अनुसार क्रमबद्ध करके उनकी क्रमशः बारंबारताओं सहित लिखा जाता है।

सारणी 2.4

बच्चों की संख्या:	0	1	2	3	4	5	योग
परिवारों की संख्या:	5	12	14	10	6	3	50

जब प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो तो गणना का कार्य मिलान के उपयोग द्वारा किया जाता है। इस विधि में चर के हर संभव मान एक स्तम्भ में लिख दिए जाते हैं। प्रत्येक प्रेक्षण के लिए मिलान दण्ड उसके मान के सम्मुख लगाया जाता है। प्रत्येक पाँचवें प्रेक्षण का दण्ड पहले चार दण्डों को काटता हुआ दिखाया जाता है जैसे ~~||||~~। इस प्रकार हम पाँच–पाँच प्रेक्षणों के समूह तैयार कर लेते हैं जोकि अन्त में गणना को सरल बना देते हैं। इस प्रकार, 14 बार घटित प्रेक्षण ~~||||~~ ~~||||~~ |||| प्रकार से लिखा जाता है। यह ध्यान रखना अति आवश्यक है कि मिलान पत्र प्रेक्षण का मिलान दण्ड लगाने के तुरन्त बाद उस प्रेक्षण पर (×) या (√) चिह्न लगा देना चाहिए जिससे वह दोबारा गिना न जा सके। सारणी 2.1 के समंक, बारंबारता बंटन के रूप में पुनः सारणी 2.5 में लिखे गए हैं।

सारणी 2.5: प्रति परिवार बच्चों की संख्या का बारंबारता बंटन

बच्चों की संख्या	मिलान पत्र	बारंबारता
0	~~||||~~	5
1	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
2	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
3	~~||||~~ ~~||||~~	10
4	~~||||~~ |	6
5	|||	3
योग		50

2.2.3 संतत या वर्गीकृत बारंबारता बंटन

1, 2, 3, 4, 5, 20, 40 आदि संख्याएँ असंतत होती है तथा इनका उपयोग तक किया जाता है जहाँ पर दो लगातार संख्याओं के मध्य मान संभव नहीं होता। जैसा कि बच्चों की संख्या के उदाहरण में, यह संभव नहीं है तथा हास्यकर है कि एक विशेष परिवार में बच्चों की संख्या 2.083 या 2.1 या 2.75 है। एक परिवार में 2 या 3 बच्चे हो सकते हैं। भाग 2.3 में दिए गए अपरिष्कृत समंकों के दो उदाहरणों में से बच्चों की संख्या (सारणी 2.1) एक अंसतत समंकों का उदाहरण है जबकि मासिक आय (सारणी 2.2) एक संतत चर का उदाहरण है जिससे संतत समंक प्राप्त होते हैं।

इस भाग में हम 50 परिवारों की मासिक आय के अपरिष्कृत समंकों से संतत या वर्गीकृत बारंबारता बंटन तैयार करने की विधि का अध्ययन करेंगे।

एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन तैयार करने के लिए हम समंकों के परिसर, अर्थात् सबसे बड़े तथा सबसे छोटे प्रेक्षणों को अन्तर, को विभिन्न परस्पर अपवर्जी तथा निःशेष अन्तरालों, जिनको वर्ग–अन्तराल कहते हैं, में बाँटा जाता है। इसके बाद प्रत्येक वर्ग अन्तराल की बारंबारता की गणना करके उसके सम्मुख लिख दिया जाता है।

सारणी 2.6: परिवारों की मासिक आय का बारंबारता बंटन

मासिक आय (रूपये में)	मिलान पत्र	परिवारों की संख्या (बारंबारता)
500 - 550	~~IIII~~	5
550 - 600	~~IIII~~ I	6
600 - 650	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
650 - 700	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
700 - 750	~~IIII~~ IIII	9
750 - 800	~~IIII~~	5
800 - 850	III	3
योग		**50**

सारणी 2.6 में हमने एक संतत या वर्गीकृत बारंबारता बंटन तैयार करने का अभ्यास किया है जिसमें समंकों को नियंत्रित रूप में लाने के लिए परिवार की आय चर को विभिन्न वर्गों में बाँटा गया। लेकिन किसी वर्गीकृत बारंबारता बंटन के तैयार करने से पहले हमें निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर जान लेने आवश्यक होते हैं।

1) वर्ग अंतरालों की संख्या कितनी होनी चाहिए?

2) प्रत्येक वर्ग अन्तराल की चौड़ाई कितनी होनी चाहिये?

3) वर्ग सीमाएँ कैसे निर्दिष्ट की जाएँगी?

1) वर्ग अंतरालों की संख्या कितनी होनी चाहिए?

यद्यपि बनाए जाने वाले वर्गों की संख्या के बारे में कोई ठोस नियम नहीं हैं फिर भी इनकी संख्या न तो बहुत की कम तथा न बहुत अधिक होनी चाहिए। यदि वर्गों की संख्या बहुत कम है, अर्थात् प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई अधिक है, तो वर्गीकरण के कारण सूचना की क्षति होने की संभावना होती हैं।

इसके विपरीत, वर्गों की अधिक संख्या होने पर बंटन खण्डित प्रतीत होता है जिसके कारण आचरण अस्पष्ट रहने की संभावना होती है। अनुभव के आधार पर यह पाया गया है कि किसी भी परिस्थिति में वर्गों की न्यूनतम संख्या 5 या 6 से कम तथा अधिकतम संख्या 20 से अधिक नहीं होनी चाहिए।

वर्गों की संख्या ज्ञात करने के लिए प्रायः निम्नलिखित सूत्र दिया जाता है :

वर्गों की संख्या = $1 + 3.322 \times \log_{10} N$ जहाँ पर N, कुल प्रेक्षणों की संख्या है। 50 परिवारों के आय के अपरिष्कृत समंकों के उदाहरण में वर्गों की संख्या इस प्रकार से परिकलित की जा सकती है। वर्गों की संख्या = $1 + 3.322 \times \log_{10} 50 = 1 + 3.322 \times 1.6990 = 1 + 5.644 = 6.644 \approx 7.$

2) प्रत्येक वर्ग अंतराल की चौड़ाई कितनी होनी चाहिए?

जहाँ तक संभव हो सभी वर्ग अंतराल समान चौड़ाई के होने चाहिए। लेकिन जब एक समान वर्ग अंतरालों पर आधारित बारंबारता बंटन द्वारा प्रेक्षणों का नियमित प्रतिरूप प्रदर्शित नहीं होता तो प्रेक्षणों को असमान चौड़ाई के वर्गों में बाँटना आवश्यक हो सकता है। नियमित आचरण प्रतिरूप से अर्थ यह है कि सिरे वाले वर्गों को छोड़कर ऐसे कोई वर्ग न हों जिनमें शून्य या कुछ ही प्रेक्षण हो तथा उनके संलग्न वर्ग में प्रेक्षणों का केन्द्रीयकरण हो।

एक वर्ग की सन्निकट चौड़ाई, निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात की जा सकती है :

एक वर्ग की सन्निकट चौड़ाई =

$$\text{एक वर्ग की सन्निकट चौड़ाई} = \frac{\text{सबसे बड़ा प्रेक्षण} - \text{सबसे छोटा प्रेक्षण}}{\text{वर्ग अंतरालों की संख्या}}$$

फिर भी, वर्ग अंतरालों की चौड़ाई के विषय में अन्तिम निर्णय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखते हुए करना चाहिए :

i) जहाँ तक संभव हो चौड़ाई 5 का गुणज होनी चाहिए क्योंकि 5, 10, 15 ... आदि संख्याओं को समझना सरल होता है।

ii) वर्ग का मध्य बिन्दु ज्ञात करना सुविधाजनक होना चाहिए।

iii) एक वर्ग में प्रेक्षण एक समान बंटित होने चाहिए।

3) वर्ग सीमाएँ कैसे निर्दिष्ट की जाएँगी?

एक वर्ग अंतराल के सबसे छोटे तथा सबसे बड़े प्रेक्षणों को वर्ग सीमाएँ कहते हैं। इनको क्रमशः वर्ग की निम्न तथा उच्च सीमाएँ कहते है। क्योंकि एक वर्ग का मध्य मान जो कि माध्य मानक विचलन आदि के परिकलन में प्रयोग होता है, इन वर्ग सीमाओं से प्राप्त किया जाता है। अतः इनको सुस्पष्ट रूप में परिभाषित करना अति आवश्यक है। वर्ग सीमाओं को परिभाषित करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिए:

i) पहले वर्ग की निम्न सीमा का समंकों के न्यूनतम प्रेक्षण के बराबर होना आवश्यक नहीं है। वास्तव में यह न्यूनतम प्रेक्षण से कम या बराबर हो सकती है। इसी प्रकार अंतिम वर्ग की उच्च सीमा समंकों के अधिकतम प्रेक्षण से अधिक या बराबर हो सकती है।

ii) वर्ग की न्यूनतम सीमा 0 से 5 का गुणज रखना सुविधाजनक होता है।

iii) वर्ग सीमाएँ ऐसी होनी चाहिए कि वर्ग में प्रेक्षण समान रूप से बंटित हों।

वर्ग सीमाएँ निम्नलिखित किसी भी विधियों द्वारा परिभाषित की जा सकती हैं : अपवर्जी विधि, तथा समावेशी विधि।

1) अपवर्जी विधि

इस विधि में एक वर्ग की उच्च सीमा अनुसरण वर्ग की निम्न सीमा के बराबर होती है। विभिन्न वर्ग अंतरालों को परस्पर अपवर्जी रखने के लिए यह निर्णय लिया जाता है कि वे प्रेक्षण जिनका मान निम्न सीमा से अधिक या बराबर तथा उच्च सीमा से कम हो, को इस वर्ग में सम्मिलित किया जाता है। उदाहरणर्थ 500–550 के वर्ग में वह सभी प्रेक्षण

सम्मिलत होंगे जिनके मान 500 या अधिक है लेकिन 550 से कम है। एक प्रेक्षण जिसका मान 550 है 550–600 के वर्ग में सम्मिलित किया जाएगा।

अपवर्जी वर्ग अंतरालों का मुख्य लाभ यह है कि इससे समंकों की संतत बनाए रखना संभव होता है क्योंकि एक वर्ग की उच्च सीमा अनुसरण वर्ग की निम्न सीमा के बराबर होती है। हमारे मासिक आय के उदाहरण (सारणी 2.6) में 5 परिवारों की आय 55.– 550 रूपये अर्थात् 500 – 549 रूपये है तथा 6 परिवारों की आय 550 – 600 रूपये अर्थात् 550 से 599 है आदि। इस परिकल्पना के आधार पर हम इस बारंबारता बंटन को निम्नलिखित रूप में लिख सकते है।

सारणी 2.7: अपवर्जी वर्ग अंतराल

मासिक आय (रूपये)	परिवारों की संख्या (बारंबारता)
500 लेकिन 550 से कम	5
550 लेकिन 600 से कम	6
600 लेकिन 650 से कम	10
650 लेकिन 700 से कम	12
700 लेकिन 750 से कम	9
750 लेकिन 800 से कम	5
800 लेकिन 850 से कम	3
योग	50

2) समावेशी विधि

इस विधि में वे सभी प्रेक्षण उस वर्ग में सम्मिलित किए जाते हैं जिनका मान निम्न सीमा के बराबर या अधिक लेकिन उच्च सीमा से कम या बराबर होता है। निम्नलिखित सारणी 2.8 में 549 रूपये आय को वर्ग 500 से 549 में सम्मिलित किया गया है। इस प्रकार 550 रूपये आय स्वतः वर्ग 550 से 599 में सम्मिलित हो जाएगी।

क्योंकि एक वर्ग की उच्च सीमा अनुसरण वर्ग की निम्न सीमा के बराबर नहीं है। अतः प्रेक्षणों के वर्गीकरण में भ्रांति की कोई संभावना नहीं होती।

सारणी 2.8: समावेशी वर्ग अंतराल

मासिक आय (रूपये)	परिवारों की संख्या
500–549	5
550–599	6
600–649	10
650–699	12
700–749	9
750–799	5
800–849	3
योग	50

अपवर्जी तथा समावेशी विधियों में चयन इस बात पर निर्भर होता है कि क्या चर संतत है जैसे आय, ऊँचाई, वनज आदि या असंतत है, जैसे परिवार में बच्चों की संख्या आदि। संतत चर के लिए बारंबारता बंटन अपवर्जी विधि से तैयार करना वांछनीय होता है।

इसके विपरीत असंतत चर जैसे परिवार में बच्चों की संख्या या प्रथम श्रेणी में उतीर्ण होने वाले विद्यार्थियें की संख्या के लिए बारंबारता बंटन समावेशी विधि तैयार किया जाता है।

एक वर्ग का मध्य मान

जब वर्ग अंतराल अपवर्जी हों तो वर्ग का मध्य बिन्दु या वर्ग संकेत उसकी निम्न तथा उच्च सीमाओं का समान्तर माध्य होता है। लेकिन समावेशी वर्ग अन्तराल होने पर एक वर्ग की उच्च सीमा तथा अनुसरण वर्ग की निम्न सीमा में अन्तर होता है। इस अन्तर को समाप्त करने के लिए इसका आधा उच्च सीमा में जोड़ दिया जाता है तथा इतना ही निम्न सीमा में से घटा दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त नई सीमाओं को वर्ग परिसीमाएँ कहते हैं।

सारणी 2.8 में दिए हुए समावेशी अंतरालों की वर्ग परिसीमाएँ सारणी 2.9 में दी गई है।

सारणी 2.9

मासिक आय (रूपये)	परिवारों की संख्या (बारंबारता)
499.5—549.5	5
549.5—599.5	6
599.5—649.5	10
649.5—699.5	12
699.5—749.5	9
749.5—799.5	5
799.5—849.5	3
योग	50

2.2.4 बारंबारता बंटन के विभिन्न रूप

इस अनुभाग में हम निम्नलिखित बारंबारता बंटनों के अर्थ का परिचय देंगे।

1) विवृत–छोर बारंबारता बंटन

2) असमान वर्ग अंतराल सहित बारंबारता बंटन

3) संचयी बारंबारता बंटन

4) सापेक्षिक बारंबारता बंटन

1) विवृत–छोर बारंबारता बंटन

वह बारंबारता बंटन जिसका कम से कम एक छोर विवृत हो, विवृत–छोर बारंबारता बंटन कहलाता है। ऐसे बारंबारता बंटन की पहले वर्ग की निम्न सीमा या अंतिम वर्ग की उच्चसीमा या दोनों निश्चित नहीं होती है। इनके लिए ''कम'' या ''से कम'' तथा ''अधिक'' या ''से अधिक'' शब्दों का प्रयोग किया जाता है। निम्न सीमा, ''से कम'' लिखे जाने का

अर्थ चर का मान $-\infty$ तक हो सकता है। इसी प्रकार उच्च सीमा, ''से अधिक'' लिखे जाने का अर्थ चार का मान $+\infty$ तक हो सकता है। इस प्रकार के बारंबारता बंटन का उदाहरण सारणी 2.10 में दिया गया है।

सारणी 2.10: विवृत–छोर वर्ग बारंबारता

वर्ग	बारंबारता
25 से कम	1
25 – 30	3
30 – 40	5
40 – 50	2
50 तथा अधिक	1
योग	12

सारणी 2.11: असमान वर्ग बारंबारता

वर्ग	बारंबारता
20 – 25	1
25 – 30	3
30 – 40	5
40 – 55	2
55 – 60	1
योग	12

2) **असमान वर्ग अंतराल सहित बारंबारता बंटन**

एक बारंबारता बंटन के सभी अंतराल समान होने अनिवार्य नहीं होते। असमान वर्ग अंतराल सहित बंटन सारणी 2.11 में दिया हुआ है। इसमें पहले दूसरे तथा पाँचवें वर्गों का अंतराल 5 है। जबकि तीसरे का 10 है तथा चौथे का 15 है। जैसा कि हम इकाई 3 में पढ़ेंगे इस प्रकार के बंटन में बहुलक प्रतिनिधिक मान नहीं होता, अतः यह परिभाषित नहीं होता।

3) **संचयी बारंबारता बंटन**

सारणी 2.6 में दिए हुए समंकों के संदर्भ में हम, मान लिया, निम्नलिखित प्रश्न पूछते हैं:

1) कितने परिवारों की मासिक आय रूपये 700 या इससे कम है?

2) कितने परिवारों की मासिक आय रूपये 600 या इससे अधिक है?

एक उपयुक्त संचयी बारंबारता बंटन तैयार करके उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर सरलता से दिए जा सकते है। पहले प्रश्न के उत्तर के लिए हमें ''से कम'' संचयी बारंबारता बंटन तैयार करना होगा। तथा दूसरे प्रश्न के उत्तर के लिए हमें ''से

अधिक'' बारंबारता बंटन की आवश्यकता होगी। ये बंटन क्रमशः सारणी 2.12 तथा 2.13 में दिए गए हैं।

सारणी 2.12: 'से कम' संचयी बारंबारता बंटन

मासिक आय (रूपये)	बारंबारता		
	सरल		संचयी
550 से कम	5		5
600 से कम	6	5+6	11
650 से कम	10	5+6+10	21
700 से कम	12	5+6+10+12	33
750 से कम	9	5+6+10+12+9	42
800 से कम	5	5+6+10+12+9+5	47
850 से कम	3	5+6+10+12+9+5+3	50

सारणी 2.13:'से अधिक' संचयी बारंबारता बंटन

मासिक आय (रूपये)	बारंबारता		
	सरल		संचयी
500 से अधिक	5	3+5+9+12+10+6+5	50
550 से अधिक	6	3+5+9+12+10+6	45
600 से अधिक	10	3+5+9+12+10	39
650 से अधिक	12	3+5+9+12	29
700 से अधिक	9	3+5+9	17
750 से अधिक	5	3+5	8
800 से अधिक	3	3	3

4) सापेक्षिक बारंबारता बंटन

अभी तक हमने एक मान या वर्ग के घटित होने की संख्या को बारंबारता के रूप में अभिव्यक्त किया था। ये बारंबारताएँ कुल प्रेक्षणों की संख्या के भिन्न प्रतिशत के रूप में लिखी जा सकती है। जिनको सापेक्षिक बारंबारताएँ कहते है। सापेक्षिक बारंबारता बंटन की रचना सारणी 2.14 में प्रदर्शित की गई है।

सारणी 2.14: 50 परिवारों की मासिक आय का सापेक्षिक बारंबारता बंटन

वर्ग	बारंबारता	भिन्न के रूप में	प्रतिशत के रूप में
500 - 549	5	$5 \div 50 = 0.10$	$0.10 \times 100 = 10$
550 - 599	6	$6 \div 50 = 0.12$	$0.12 \times 100 = 12$
600 - 649	10	$10 \div 50 = 0.20$	$0.20 \times 100 = 20$
650 - 699	12	$12 \div 50 = 0.24$	$0.24 \times 100 = 24$
700 - 749	9	$9 \div 50 = 0.18$	$0.18 \times 100 = 18$
750 - 799	5	$5 \div 50 = 0.10$	$0.10 \times 100 = 10$
800 - 849	3	$3 \div 50 = 0.06$	$0.06 \times 100 = 06$
योग	**50**	**1**	**100**

उपरोक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि सापेक्षिक बारंबारताओं का योग 1 या 100 (प्रतिशत के रूप में) होता है।

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित में, कम से कम दो विभेदीकरण के कारण देकर, भेद कीजिए।

   i) असंतत तथा संतत बारंबारता बंटन

   ii) सरल तथा संचयी बारंबारता बंटन

   iii) अपवर्जी तथा समावेशी वर्ग अंतराल

   iv) सरल तथा बारंबारता क्रम विन्यास

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2) निम्नलिखित शब्दों की उदाहरण देकर व्याख्या कीजिए।

   i) अवर्गीकृत संमक

   ii) वर्ग संकेत

   iii) विवृत छोर वर्ग

   iv) वर्ग सीमाएँ

   v) वर्ग परिसीमाएँ

   vi) वर्ग बारंबारता

   vii) मिलान दण्ड

   vii) सापेक्षिक बारंबारता

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3) एक महाविद्यालय के निम्न मध्य वर्ग के विद्यार्थियों के मासिक जेब खर्च का काल्पनिक बारंबारता बंटन बनाइए। इससे सापेक्षिक बारंबारता बंटन तैयार कीजिए।

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4) एक बारंबारता बंटन तैयार करने के लिए निम्नलिखित के बारे में निर्णय करते समय किन बातों को ध्यान में रखना चाहिए?

i) वर्गों की संख्या तथा

ii) वर्ग अंतराल का आकार

....

....

....

....

....

5) निम्नलिखित बारंबारता बंटन द्वारा ''से कम'' तथा ''से अधिक'' संचयी बारंबारता तैयार कीजिए:

वर्ग :	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
बारंबारता :	5	8	10	12	8	7

....

....

....

....

....

6) प्रश्न 5 में दिए गए समंकों के लिए एक सापेक्षिक बारंबारता बंटन तैयार कीजिए।

....

....

....

....

....

2.3 समंकों का सारणीयन

समंकों के संतोषजनक संकलन तथा विन्यास की भांति इनका अच्छा प्रस्तुतिकरण भी महत्वपूर्ण होता है। वास्तव में, समंकों के संतोषजनक संकलन तथा विन्यास के बाद इनका अच्छा प्रस्तुतिकरण अनिवार्य होता है। लेकिन अच्छा प्रस्तुतिकरण अपने आप में कोई लक्ष्य नहीं होता। यह संतोषजनक विश्लेषण एवं निर्वचन के लिए अनिवार्य हो सकता है। समंकों का एक संतोषजनक प्रस्तुतिकरण कई प्रकार से सहायक होता है।

पहला, यह समंकों की तुलना में सहायक होता है। अन्त में, यह सांख्यिकीय सूचना की सहज समझ तथा बुद्धिमता से उपयोग करने में सहायक होता है।

सांख्यिकीय समंकों के प्रस्तुतिकरण को हम तीन शीर्षकों के अंतर्गत अध्ययन करेंगे।

i) सारणी द्वारा

ii) आलेख विधियाँ जिनमें रेखा आलेख, आयत चित्र, बारंबारता बहुभुज तथा वक्र, तथा संचयी बारंबारता वक्र सम्मिलित है।

iii) ज्यामितिक रूप, चित्र तथा सांख्यिकीय मानचित्र जिसमें वृत्तचित्र, दण्ड चित्र, क्षेत्रफल तथा परिमा चित्र आदि सम्मिलित होते हैं।

2.3.1 सारणियों का अर्थ तथा प्रकार

एक सांख्यिकीय सारणी, एक पूर्व निश्चित तथा सुस्पष्ट उद्देश्य सहित, सांख्यिकीय समंकों का स्तम्भों तथा पंक्तियों में सुव्यवस्थित विन्यास होती है। किसी सारणी में समंकों के क्षैतिज विन्यास को पंक्ति तथा ऊर्ध्वाधर विन्यास को स्तंभ कहा जाता है।

सारणी में दी हुई सूचना की व्यवस्था के लिए इसकी पंक्तियों तथा स्तंभों को उपयुक्त स्थूणों तथा शीर्षकों या (उपशीर्षकों) द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। समंकों का सारणीयन सरल, नियोजित, सुस्पष्ट तथा तर्कसंगत होना चाहिए।

सारणी 2.15 में देश X का देश B को तीन वर्षों 1995, 1996 तथा 1997 में निर्यात तथा आयात के कल्पित समंक दिए हुए हैं।

सारणी 2.15: देश X का देश B को निर्यात तथा आयात (1995–1997) (करोड़ रूपये)

देश	1995		1996		1997*	
	आयात	निर्यात	आयात	निर्यात	आयात	निर्यात
A	60	70	65	75	70	65
B	50	60	60	65	65	60
C	40	30	40	40	42	50
D	45	42	60	55	63	55
योग	**195**	**202**	**225**	**235**	**240**	**230**

नोट : * शीघ्र अनुमानित संख्याएँ।

स्रोतः व्यापार पत्रिका, 1998, X देश का विदेश व्यापार मंत्रालय।

स्पष्टतः ऊपर दी गई सारणी का उद्देश्य देश X का शेष विश्व से आयात तथा निर्यात को दर्शाना है। सारणी की प्रत्येक प्रविष्टि एक पंक्ति तथा स्तम्भ से संबंधित होती है। उदाहरणार्थ, दूसरी पंक्ति तथा चौथे स्तम्भ के प्रतिच्छेद पर दी हुई प्रविष्टि से ज्ञात होता है कि 1996 में देश X ने देश B से 60 करोड़ रूपये के मूल्य की वस्तुएँ तथा सेवाएँ आयातित की हैं। इस संख्या की तुलना आयात–निर्यात की अन्य संख्याओं से करके महत्वपूर्ण निर्वचन किए जा सकते हैं।

सारणियों के प्रकार

मूलतः सारणियाँ दो प्रकार की होती है :

1) सन्दर्भ सारणी या सामान्य उद्देश्य वाली सारणी

2) विषय सारणी या विशेष उद्देश्य वाली सारणी

1) सन्दर्भ सारणियाँ एक सामान्य उद्देश्य वाली सारणियाँ होती हैं। जिनका उद्देश्य विस्तृत सांख्यिकीय सूचना प्रदान करना होता है। इन सारणियों से हम अपनी आवश्यकतानुसार सूचना प्राप्त कर सकते हैं (अर्थात् द्वितीयक स्रोत)। विभिन्न सरकारी विभागों, मंत्रालयों, भारतीय रिजर्व बैंक, आर्थिक सर्वेक्षणों आदि द्वारा तैयार सारणियाँ सन्दर्भ सारणियाँ होती है। इसका अन्य महत्वपूर्ण उदाहरण भारतीय प्रधान पंजीयक द्वारा तैयार जनसंख्या संगणना की सारणियाँ हैं जिनमें भारत की जनसांख्यिकीय विशेषताओं से संबंधित विस्तृत सूचना होती है। विद्यार्थियों को 'आर्थिक सर्वेक्षण', जो कि प्रतिवर्ष भारतीय संघ के बजट के साथ प्रकाशित होता है, का नवीनतम अंक पढ़ने की सलाह दी जाती है। इससे आप भारत के यू.एस.ए., यू.के., रूस, कनाडा तथा जर्मनी से, पिछले तीन या चार वर्षों, में आयात–निर्यात की सारणी तैयार कीजिए।

2) विषय सारणियाँ एक विशेष प्रकार की सारणियाँ होती है। इनका आकार छोटा होता है तथा यह सन्दर्भ सारणियों से बनाई जाती है। इनका उद्देश्य एक विशेष पहलू का विश्लेषण या एक विशेष प्रश्न का उत्तर प्रदान करना होता है। उदाहरण के लिए, हम जनसंख्या संगणना सारणियों में से मुम्बई तथा दिल्ली में रहने वाले लोगों की वह संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं जो विभिन्न मातृभाषाएँ बोलते हैं, जिनके विभिन्न धर्म हैं तथा जो भारत के विभिन्न राज्यों से आते है।

इसी प्रकार भारतीय रिज़र्व बैंक के विभिन्न प्रकाशनों से हम सारणी के रूप में, पिछले दस वर्षों, में मुद्रा पूर्ति, ब्याज की दर तथा बैंक दर आदि की सूचना प्राप्त कर सकते है।

भाग 2.2 में दी गई सारणियों की भांति, सारणियाँ सरल तथा एकधा हो सकती हैं जिनमें केवल एक चर, जैसे आय, होता हैं। विकल्पतः इसे एक विचर बारंबारता बंटन कहते हैं। इसके अतिरिक्त सारणियाँ जटिल एवं द्विधा, बहुधा आदि हो सकती हैं जिनमें दो या अधिक संबंधित अभिलक्षणों को सम्मिलित किया जाता है।

2.3.2 सारणी के अंग

समंकों की प्रकृति तथा सारणीयन के उद्देश्यानुसार एक सारणी के अंग दूसरी सारणी के अंगों से भिन्न हो सकते हैं। फिर भी कुछ अंग समान होते है जैसेः

1) **सारणी संख्याः** सारणी की पहचान के लिए, विशेष रूप से जब किसी विश्लेषण में एक से अधिक सारणियाँ हों, इसकी संख्या की आवश्यकता होती है। यह संख्या सारणी के उपरी भाग पर लिखी जाती है।

2) **सारणी का शीर्षक** : सारणी के शीर्षक द्वारा सारणी में दी गई सूचना के बारे में जानकारी प्राप्त होती है। यह सारणी संख्या के बाद लिखा जाता है। इसका उद्देश्य निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों का उत्तर देना होता है :

i) सारणी में क्या है?

ii) सारणी में कहाँ है?

iii) एक विशेष सूचना कब घटित हुई?

iv) एक विशेष सूचना का कैसे विन्यास किया गया है?

सारणी 2.15 में दी गई आयात–निर्यात सूचना के संदर्भ में उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर निम्नलिखित है:

i) सारणी में देश X के आयात–निर्यात के मान दिये गए है।

ii) सारणी में दी गई सूचना चार देशों A, B, C तथा D ये निर्यात तथा आयात को दर्शाती है।

iii) ये आयात तथा निर्यात 1995, 1996 तथा 1997 वर्षों में घटित हुए।

iv) आयात–निर्यात सूचना का वर्ष तथा देशों के अनुसार विन्यास किया गया है।

शीर्षक के बारे में क्या करें तथा क्या न करें

इसके लिए बड़े वाक्य का प्रयोग न करें। शीर्षक संक्षिप्त तथा उपयुक्त होना चाहिए। शीर्षक को मोटे शब्दों में लिखा जाना चाहिए। शीर्षक का एक से अधिक अर्थ व्यक्त नहीं होना चाहिए। 'सारणी में प्रस्तुत है ...' या 'समंकों की विस्तृत तुलना ...' व्यजनों को लिखने से बचना चाहिए। शीर्षक एक टेलीग्राम की सूचना की भांति होना चाहिए।

3) **शीर्ष टिप्पणी** : इसको प्रारंभिक टिप्पणी भी कहते हैं। यह शीर्षक के नीचे लिखी जाती है। यह विषय–वस्तु तथा मापन इकाई, जैसे रूपये या लाख टन या हजार गाँठ आदि को दर्शाती है। इसे कोष्ठकों में रखना चाहिए तथा सारणी के उपर दाई ओर शीर्षक के नीचे लिखा जाना चाहिए। यहाँ यह बताना आवश्यक है कि सभी सारणियों में शीर्ष टिप्पणी की आवश्यकता नहीं होती।

4) **अनुशीर्षक** : इसका उपयोग पंक्तियों को निर्दिष्ट करने के लिए किया जाता है। यह सारणी के बाई ओर के स्तम्भ में लिखे जाते है। अनुशीर्षक दो प्रकार के होते है।

i) शीर्ष–अनुशीर्षक विभिन्न प्रकार की अनुशीर्षक प्रविष्टियों की प्रकृति के बारे में जानकारी देता है।

ii) एक अनुशीर्षक पंक्ति में दी हुई प्रविष्टियों के बारे में जानकारी देता है।

5) **उपशीर्षक** : एक उपशीर्षक सारणी के स्तम्भ में दी हुई प्रविष्टियों के बारे में जानकारी देता है। एक उपशीर्षक के कई शीर्ष स्तम्भ हो सकते है। तथा प्रत्येक शीर्ष स्तम्भ भी कुछ उपशीर्षक स्तम्भों में विभाजित हो सकता है। उदाहरणार्थ एक महाविद्यालय के विद्यार्थियों को छात्रावासी तथा गैर छात्रावासियों में वर्गीकृत किया जा सकता है तथा प्रत्येक वर्ग को स्त्री तथा पुरूषों में वर्गीकृत किया जा सकता है। इस प्रकार हमें प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय वर्षों (मान लिया) में पुरूष छात्रावासियों आदि, प्रकार की जानकारी पाने में सहायता मिलती है।

6) **सारणी का मुख्य अंग** : इसे सारणी का क्षेत्र भी कहते हैं तथा यह इसका सबसे महत्वपूर्ण तथा बृहत अंग होता है। इसमें प्रासंगिक सूचना दी हुई होती है जिसके बारे में संकेत शीर्षक में अन्तर्विष्ट होता है। सारणी 2.15 के रूप में दिए हुए उदाहरण में शीर्षक द्वारा यह संकेत मिलता है कि सारणी में देश X की तीन वर्षों की आयात–निर्यात सम्बन्धी संख्यात्मक सूचना दी हुई है।

7) **पाद टिप्पणी** : यह एक प्रकार का स्पष्टीकरण होता है जो सारणी के नीचे लिखा जाता है। इसका उद्देश्य समंकों की सीमाओं या किसी विशेष चूक या त्रुटि के बारे में सावधान करना होता है। उदाहरणार्थ, सारणी 2.15 में पाद टिप्पणी यह बताती है कि दी हुई संख्याएँ अन्तिम नहीं है इसी प्रकार नवीनतम जनसंख्या संगणना में ''जम्मू तथा कश्मीर रहित'' जैसी की पाद टिप्पणी हो सकती है।

8) **समंकों का स्रोत** : यह सारणी का अंतिम लेकिन महत्वपूर्ण अंग होता है। इससे सारणी में दिए हुए समंकों की प्रामाणिकता की जानकारी मिलती है।

इसके अतिरिक्त यदि पाठक चाहे तो उसे समंकों की जाँच तथा और अधिक समंक प्राप्त करने का अवसर मिलता है।

उपरोक्त बातों को ध्यान में रखते हुए एक काल्पनिक सारणी का आकार नीचे दिया गया है।

सारणी 2.16
(.................. शीर्षक ....)

शीर्ष टिप्पणी :
(करोड़ रूपयों में)

शीर्ष–अनुशीर्षक	उप–शीर्षक			
	स्तम्भ शीर्षक I		स्तम्भ शीर्षक II	
	उपशीर्ष	उपशीर्ष	उपशीर्ष	उपशीर्ष
अनुशीर्षक	सारणी	का मुख्य	अंग	
योग				

पाद टिप्पणी : स्रोत :

2.3.3 सारणियों का महत्व

संख्यात्मक सूचना प्रस्तुति के अन्य रूपों की तुलना में सारणी के रूप में प्रस्तुति श्रेष्ठ होती है। प्रथम, सारणी में दिए हुए समंकों की समझ तथा निर्वचन सरल होती है। दूसरे, विभिन्न अभिलक्षणों की तुलना शीघ्र हो सकती है, उदाहरणार्थ, क्या तीनों वर्षों में आयात निर्यात से अधिक है? या क्या निर्यात में वृद्धि हो रही है? तीसरे इसके द्वारा और आगे अन्वेषण का अवसर प्राप्त होता है।

चौथे, शाब्दिक कथन की तुलना में इसका मानव चित पर स्थायी प्रभाव होता है। यह कहने की आवश्यकता नहीं कि मानवीय अन्वेषण के लगभग सभी क्षेत्रों में सांख्यिकीय सारणियों का बहुत उपयोग किया जाता है।

बोध प्रश्न 2

1) निम्नलिखित में भेद स्पष्ट कीजिए।

   i) उप–शीर्षक, शीर्ष–अनुशीर्षक तथा अनुशीर्षक

   ii) एकधा तथा द्विधा सारणियाँ

   iii) संदर्भ सारणी तथा विषय सारणी

   iv) स्तंभ प्रविष्टि तथा पंक्ति प्रविष्टि

   v) शीर्ष टिप्पणी तथा पाद टिप्पणी

....

....

....

....

....

....

2) इस कथन पर टिप्पणी कीजिए : ''जो संबंध एक प्रस्ताव का उसके शीर्षक से होता है वही संबंध सारणी का उसके शीर्षक से होता है''।

....

....

....

....

....

3) सांख्यिकीय सारणी के विभिन्न अंगों के बारे में जानकारी दीजिए।

....

....

....

....

....

4) एक महाविद्यालय के विद्यार्थियों में निम्नलिखित सूचना को दर्शाने के लिए एक द्विधा सारणी तैयार कीजिएः

   i) प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय वर्ष के अनुसार वर्गीकरण

   ii) छात्रावासी तथा गैर–छात्रावासी वर्गीकरण

   iii) स्त्री तथा पुरूष विद्यार्थी वर्गीकरण

   इसके लिए कुछ काल्पनिक संख्याएँ स्वयं ले लीजिए।

....

....

....

....

....

2.4 समंकों का आलेखी प्रस्तुतिकरण

सारणियों के अतिरिक्त, सांख्यिकीय समंकों को विभिन्न प्रकार के आलेखों द्वारा भी प्रस्तुत किया जा सकता है। शीघ्र तथा संक्षिप्त सूचना को संप्रेषित करने के लिए आलेख बहुत उपयोगी होते हैं। उतनी ही आसानी तथा कार्य कुशलता सहित ये समय तथा स्थान के अनुसार समंकों की तुलना में सहायक होते हैं। यह चाक्षुष उपकरण होते है तथा व्यक्ति के चित पर शक्तिशाली प्रभाव डालते हैं। प्रायः यह कहा जाता है कि ''एक चित्र 1000 शब्दों के बराबर होता है''। यह समंकों द्वारा संप्रेषित तथ्यों की ओर पाठक का ध्यान आकर्षित करते हैं। इसके अतिरिक्त, इनके द्वारा किसी माप का अनुमान करने में सहायता मिल सकती है तथा हमारे उत्तरों की चित्रीय जाँच भी की जा सकती है। समंकों का आलेखीय प्रस्तुतिकरण, विभिन्न प्रकार से चाहे जितना भी उपयोगी हो, समंकों की व्याख्या का केवल वैकल्पिक तरीका है।

यह किसी प्रकार से अन्य प्रस्तुतिकरण के रूपों तथा सांख्यिकीय विश्लेषण की अतिरिक्त विधियों का प्रतिस्थापक नहीं है। आलेखी प्रस्तुतिकरण की कुछ विधियाँ निम्नलिखित हैं।

2.4.1 रेखा आलेख

एक समतल पर चार चतुर्थाश होते हैं लेकिन अर्थशास्त्र में हम प्रायः चित्र केवल प्रथम चतुर्थांश में ही बनाते हैं। जिसमें X–अक्ष तथा Y–अक्ष पर मापी गई दोनों मात्राएँ धनात्मक होती हैं। आर्थिक मात्राएँ जैसे कीमत, माँग तथा पूर्ति, राष्ट्रीय आय, उपभोग, उत्पादन, तथा इस प्रकार के अन्य चर अऋणात्मक (≥ 0) होते हैं।

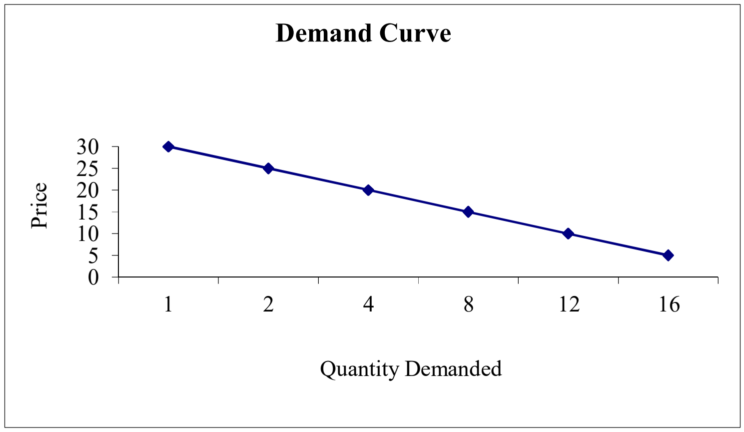
सारणी 2.17: माँग सारणी

X की कीमत	X की माँग
5	16
10	12
15	8
20	4
25	2
30	1

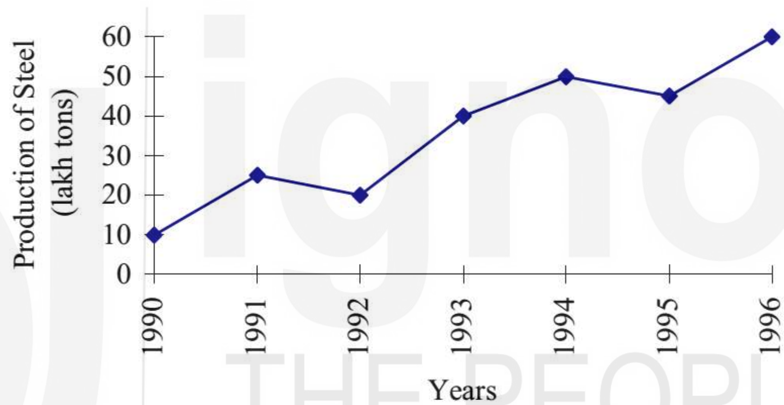
हम एक माँग तालिका को आलेख पर अंकित करें। विभिन्न बिन्दुओं को मिलाने वाली परिणामी वक्र, संतत मानते हुए, एक रेखा आलेख कहलाता है। जो कीमत तथा माँगी गई मात्रा के बीच संबंध को व्यक्त करता है। अर्थशास्त्र में इस रेखा आलेख को माँग वक्र कहते हैं। यह ध्यान रहे कि कीमत को Y–अक्ष पर तथा मात्रा को X–अक्ष पर लिया जाता है। सारणी 2.17 में दिए हुए समंकों का माँग वक्र चित्र 2.1 में दिया गया है।

सारणी 2.18: काल श्रेणी संभक

वर्ष	स्टील का उत्पादन (लाख टन)
1990	10
1991	25
1992	20
1993	40
1994	50
1995	45
1996	60



चित्र 2.1



चित्र 2.2 : स्टील के उत्पादन का कालिक चित्र

रेखा आलेख का उपयोग किसी आर्थिक चर, जैसे समय के साथ स्टील के उत्पादन, में परिवर्तन को दर्शाने के लिए किया जा सकता है। अन्य शब्दों में, यदि दो में से एक चर समय (मास, वर्ष आदि) है तो आलेख को काल श्रेणी आलेख या कालिक चित्र कहते हैं। एक काल श्रेणी में एक आर्थिक चर का समय के साथ संबंध व्यक्त होता है। सारणी 2.18 में काल श्रेणी समंकों का उदाहरण दिया गया है। वर्षों को X–अक्ष तथा स्टील उत्पादन को Y–अक्ष पर लेते हुए काल श्रेणी आलेख चित्र 2.2 में दिया गया है।

2.4.2 आयत चित्र, बारंबारता बहुभुज तथा बारंबारता वक्र

आयत चित्र वर्गीकृत समंकों को दर्शाने वाला अति सामान्य आलेख होता है। यह साथ–साथ खड़ी हुई आयतों का समूह होता है जिसकी चौड़ाई वर्ग अंतराल के बराबर तथा ऊँचाई वर्ग की बारंबारता की आनुपाती होती है। इसकी विशेषताएँ निम्नलिखित हैं:

i) यह एक आयताकार चित्र होता है।

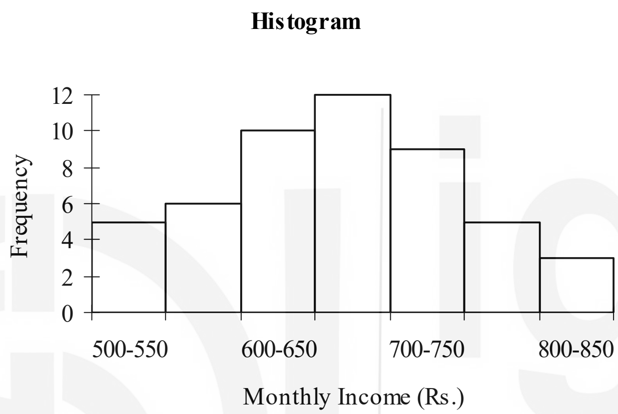
ii) क्योंकि आयतों की निश्चित चौड़ाई तथा ऊँचाई होती है, आयत चित्र एक द्वि–विमीय चित्र होता है। एक आयत की चौड़ाई वर्ग अंतराल के बराबर तथा

$$\text{ऊँचाई} = \frac{\text{वर्ग बारंबारता} \times \text{समंकों में न्यूनतम वर्ग अंतराल}}{\text{वर्ग अंतराल}}$$

iii) प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल उससे संबंधित बारंबारता का अनुपाति होता है।

आयत चित्र की रचना

सारणी 2.6 में दिए गए बारंबारता बंटन को आरेख पत्र पर अंकित करने के लिए, हम X–अक्ष पर वर्ग अंतराल जैसे 500–550, 550–600 आदि अंकित कर देते हैं। इसी प्रकार हम Y–अक्ष पर बारंबारताओं को अंकित करते हैं। क्योंकि सभी वर्गों का अंतराल बराबर है। प्रत्येक आयत की ऊँचाई उससे संबंधित वर्ग की बारंबारता के बराबर ली जाएगी। यह आयत चित्र, 2.3 में दर्शाया गया है।



चित्र 2.3

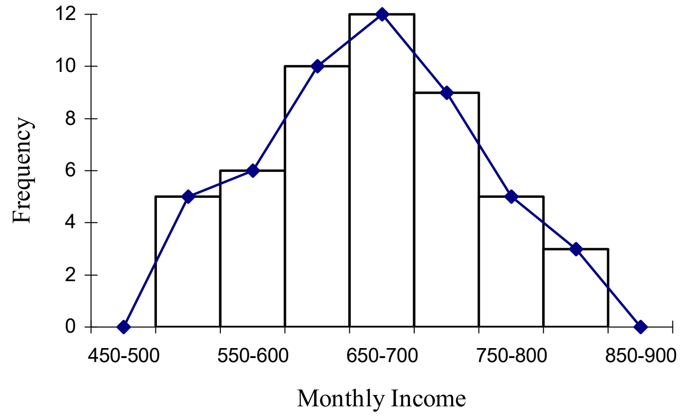
आयत चित्र के लाभ

1) विभिन्न आयतों की चौड़ाई बंटन में वर्गों की प्रकृति को दर्शाती है अर्थात् वर्ग समान अंतराल के है या नहीं।

2) एक आयत का क्षेत्रफल वर्ग की अनुपातिक बारंबारता को दर्शाता है।

बारंबारता बहुभुज

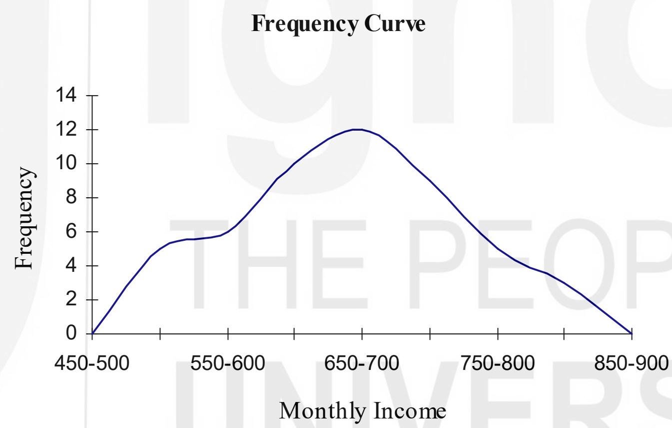
बारंबारता बहुभुज शब्द बहुभुज से लिया गया है। जिसका अर्थ बहुत भुजाओं वाला चित्र होता है। सांख्यिकी में इसका अर्थ बारंबारता बंटन का आलेख है। आयात चित्र की विभिन्न आयतों के शिखर के मध्य बिन्दुओं को सरल रेखाओं से जोड़ने पर हमें बारंबारता बहुभुज प्राप्त होता है, जैसा चित्र 2.4 में दिर्शाया गया है। इस चित्र में बहुभुज तथा आयत चित्र के अंतर्गत क्षेत्रफल बराबर रखने के लिए इच्छाधीन दो वर्ग, शून्य बारंबारता सहित, बंटन के दोनों सिरों पर सम्मिलत किए जाते हैं। यह बारंबारता बहुभुज चित्र 2.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 2.4 : बारंबारता बहुभुज

बारंबारता वक्र

यदि बहुभुज के लिए प्राप्त बिन्दुओं को एक निष्कोण वक्र द्वारा मिला दिया जाए तो एक बारंबारता वक्र प्राप्त होता है, जैसा चित्र 2.5 में दर्शाया गया है।



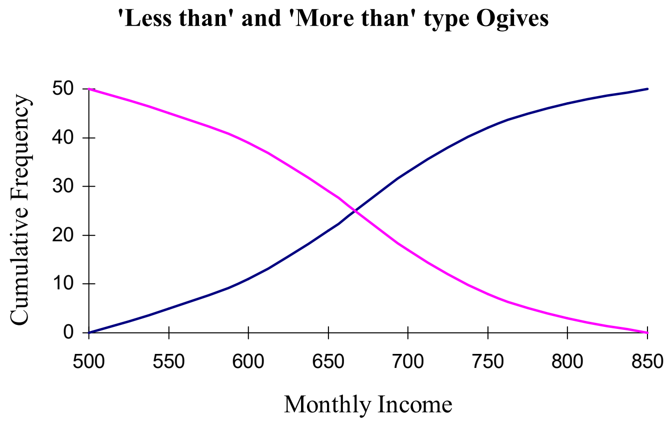
चित्र 2.5 : बारंबारता वक्र

2.4.3 संचयी बारंबारता वक्र–तोरण

एक संचयी बारंबारता वक्र के आलेख को संचयी बारंबारता वक्र या तोरण कहते हैं। जिस प्रकार एक संचयी बारंबारता वक्र 'से कम' या 'से अधिक' हो सकते हैं, उसी प्रकार 'से कम' या 'से अधिक' तोरण हो सकते हैं।

तोरणों का उपयोग विभिन्न विभाजन मूल्यों के आलेखी निर्धारण के लिए किया जाता है। हम दी हुई सीमाओं के मध्य, प्रेक्षणों का प्रतिशत भी ज्ञात कर सकते हैं। सारणी 2.12 तथा 2.13 में दिए हुए संचयी बारंबारता बंटन, चित्र 2.6 में दर्शाए गए हैं।

यह बात ध्यान रखने योग्य है कि 'से कम' तोरण के लिए हम एक वर्ग अंतराल '500 से कम' शून्य बारंबारता सहित और सम्मिलित कर लेते हैं। इसी प्रकार 'से अधिक' तोरण के लिए हम एक वर्ग अंतराल '900 से अधिक', शून्य बारंबारता सहित सम्मिलत कर लेते हैं।



चित्र 2.6 : 'से कम' तथा 'से अधिक' तोरण

2.5 समंकों का आरेखी प्रस्तुतिकरण

एक आलेख सांख्यिकीय समंकों का चाक्षुण प्रस्तुतिकरण होता है। आरेख से अर्थ दण्ड, वर्ग, वृत्त, मानचित्र, चित्र, मानारेख आदि से होता है। आरेख तथा आलेख में अंतर होता है। जबकि आरेख का उपयोग केवल प्रस्तुतिकरण होता है, आलेख का उपयोग प्रस्तुतिकरण के अतिरिक्त विश्लेषण के लिए भी हो सकता है।

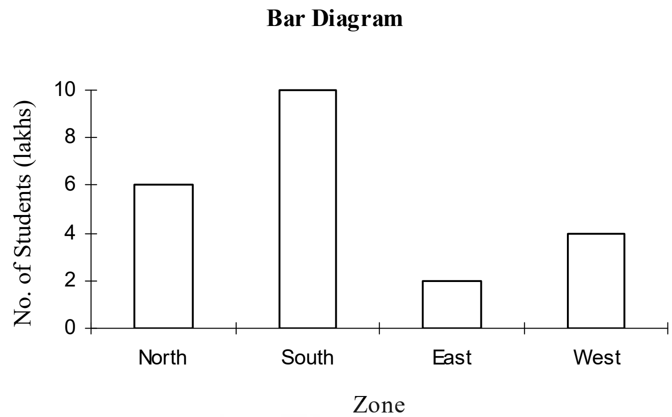
2.5.1 एक विमीय आरेख

इनको दण्ड आरेख भी कहते हैं। दण्ड एक मोटी रेखा को कहते हैं जो कि पाठक का ध्यान आकर्षित करने के लिए मोटी की जाती है। दण्ड की ऊँचाई चर के मान का प्रतीक होती है, जबकि चौड़ाई, अतः क्षेत्रफल, का कोई महत्व नहीं होता। यह आयत चित्र से भिन्न होता है, जिसमें आयत की चौड़ाई तथा ऊँचाई का महत्व होता है। इसके अतिरिक्त दण्ड आरेख के दण्डों के बीच में बराबर अंतर रखा जाता है। जबकि आयत चित्र की आयतें साथ–साथ, बिना अंतर, आरेखित की जाती हैं। अन्ततः, आयत चित्र में आयत सदैव खड़ी हुई होती हैं जबकि दण्ड आरेख में ये खड़ी या पड़ी हुई हो सकती हैं। एक दण्ड आरेख की रचना हम निम्नलिखित सरल उदाहरण द्वारा करेंगे।

सारणी 2.19 : एक देश के चार मण्डलों में विद्यार्थियों की संख्या

मण्डल	विद्यार्थियों की संख्या (लाखों में)
उत्तरी	6
दक्षिणी	10
पूर्वी	2
पश्चिमी	4

ऊपर दिए हुए समंकों का दण्ड आरेख चित्र 2.7 में दर्शाया गया है। दण्डों में विभिन्न प्रकार के रंग भर कर या छायाकिरणों द्वारा सुन्दर बनाया जा सकता है। यह अन्वेषक की रूचि पर निर्भर करता है।



चित्र 2.7 : दण्ड आरेख

अन्तर्विभक्त या घटक दण्ड आरेख

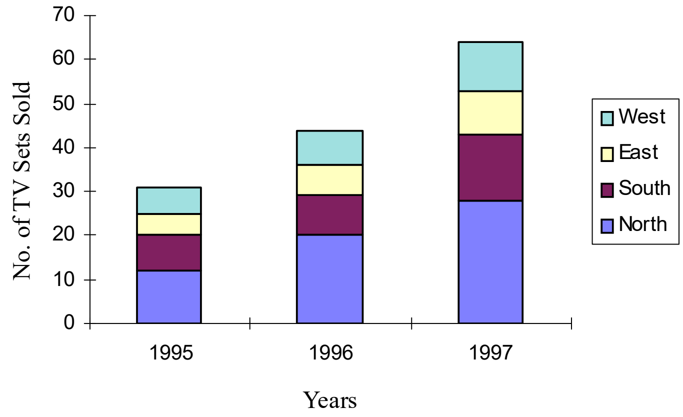
जब एक घटना के विभिन्न घटकों के तुलनात्मक मानों की तुलना को प्रदर्शित करना हो तो अन्तर्विभक्त दण्ड आरेख का उपयोग किया जाता है। इस आरेख में, प्रत्येक घटना के दण्ड को विभिन्न अंगों में विभक्त किया जाता है। प्रत्येक अंग द्वारा अधिकृत दण्ड का हिस्सा, कुल योग में, इसके अंश को निर्दिष्ट करता है।

विभिन्न दण्डों के प्रविभाजन एक ही क्रम में किए जाने आवश्यक हैं तथा इनको एक दूसरे से अलग दिखाने के लिए विभिन्न रंग या छाया का उपयोग किया जाना चाहिए। सारणी 2.20 में दिए हुए, टेलिविजन के विक्रय संबंधि, कल्पित समंकों का एक अन्तर्विभक्त दण्ड आरेख चित्र 2.8 में दर्शाया गया है।

सारणी 2.20

टेलिविजन का मण्डलानुसार विक्रय (1995–97)

मण्डल	बिक्री		
	1995	1996	1997
उत्तरी	12	20	28
दक्षिणी	8	9	15
पूर्वी	5	7	10
पश्चिमी	6	8	11
योग	31	44	64



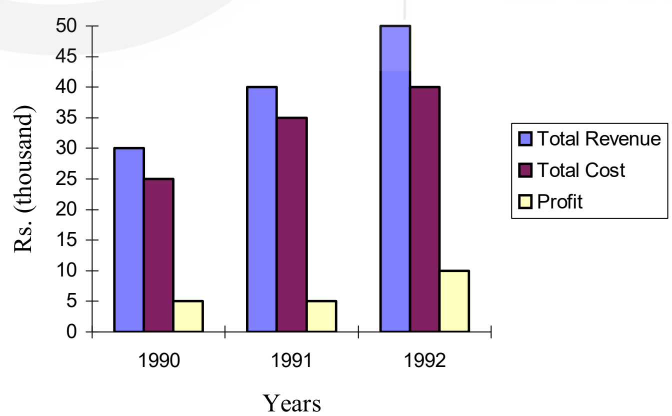
चित्र 2.8 : अन्तर्विभक्त या घटक दण्ड आरेख

बहुदण्ड आरेख

जब दो या दो से अधिक समंक समुच्चयों की तुलना दर्शानी हो तो इस आरेख का उपयोग किया जाता है। किसी समय, स्थान या संबंधित घटनाओं के दण्डों के समुच्चय साथ–साथ (बिना किसी अन्तर के) आरेखित किए जाते हैं। विभिन्न दण्डों के अलग–अलग रंग या छाया द्वारा पहचाना जाता है। सारणी 2.21 में दिए गए कल्पित समंकों का एक बहुदण्ड आरेख चित्र 2.9 में दर्शाया गया है।

सारणी 2.21: मैं. **XYZ** का कुल आगम, कुल लागत तथा लाभ (1990–92) (हजार रूपये)

वर्ष	कुल आगम	कुल लागत	लाभ
1990	30	25	5
1991	40	35	5
1992	50	40	10



चित्र 2.9 : बहुदण्ड आरेख

2.5.2 द्विविमीय आरेख या क्षेत्रफल आरेख

एक विमिय आरेख में दण्ड की केवल ऊँचाई का महत्व होता है, तथा इसकी चौड़ाई अन्वेषक की सुविधा या रूचि के अनुसार चयन की जाती सकती है। लेकिन द्विविमीय आरेखों में क्षेत्रफल का अधिक महत्व होता है। इसीलिए इनको क्षेत्रफल आरेख भी कहा जाता है। क्षेत्रफल आरेख तीन प्रकार के होते हैं:

i) आयत, जिसका क्षेत्रफल आयत की चौड़ाई गुणा लंबाई (या ऊँचाई) के बराबर होता है।

ii) वर्ग, जिसका क्षेत्रफल भुजा (आधार) के वर्ग के बराबर होता है।

iii) वृत, जिसका क्षेत्रफल πr^2 (जहाँ $\pi = 22/7$ तथा $r =$ वर्ग की त्रिज्या) के बराबर होता है।

हम विश्वविद्यालय में शिक्षकों के तीन वर्गों के काल्पनिक समंकों से ये तीनों प्रकार के आलेख तैयार करेंगे।

सारणी 2.22: विश्वविद्यालय शिक्षकों का औसत वेतन (1.1.1998)

वर्ग	औसत वेतन (रूपयों में)
प्रोफेसर	25000
रीडर	16000
लेक्चरर	9000

i) आयत बनाने के लिए हम एक समान आधार, मान लिया 100 ले लेते हैं। तदनुसार, ऊँचाई ज्ञात करने के लिए :

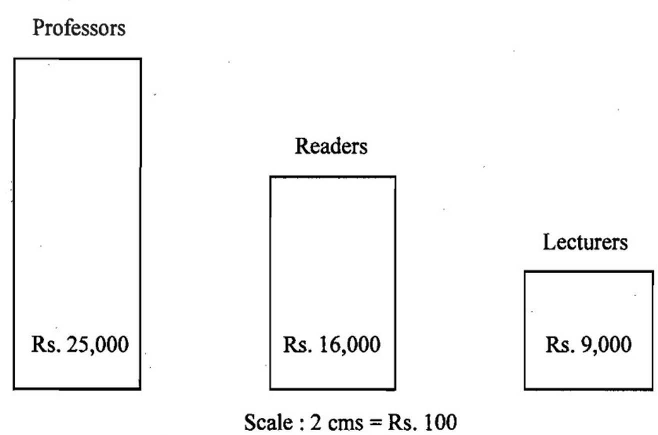
1) 25000 रूपये वेतन = 100 (आधार) x 250 (ऊँचाई)

2) 16000 रूपये वेतन = 100 (आधार) x 160 (ऊँचाई)

3) 9000 रूपये वेतन = 100 (आधार) x 90 (ऊँचाई)

हम अनुमाप 2 से.मी. = 100 ले लेते हैं। इस प्रकार पहली आयत का आयाम 2 से.मी. x 5 से.मी., दूसरी आयत का आयाम 2 से.मी. x 3.2 से.मी. तथा तीसरी आयत का आयाम 2 से.मी. x 1.8 से.मी. होगा। इन आयतों को बनाने पर क्षेत्रफल आरेख प्राप्त होगा।

(चित्र 2.10) विश्वविद्यालय शिक्षकों का औसत वेतन (रूपयों में)



अनुमाप : 2 से.मी. = 100 से.मी.

चित्र 2.10 : क्षेत्रफल आरेख (आयत)

ii) वर्ग बनाने के लिए हम विभिन्न वेतनों का वर्गमूल ले लेते हैं।

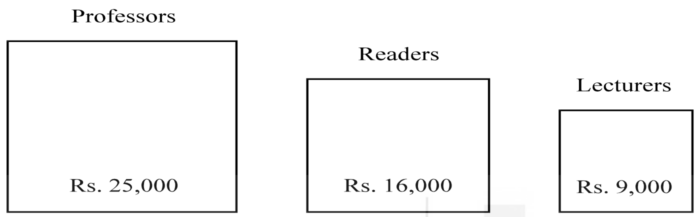
1) $\sqrt{25,000} = 158.114$

2) $\sqrt{16,000} = 126.491$

3) $\sqrt{9000} = 94.868$

हम अनुमाप 1 से.मी. = 50 ले लेते हैं। इस प्रकार पहले वर्ग की भुजा लगभग 3.2 (158. 114/50) सेमी, दूसरे वर्ग की भुजा 2.53 से.मी. तथा तीसरे वर्ग की भुजा 1.9 से.मी. होगी। ये वर्ग चित्र 2.11 में दर्शाए गए हैं।

विश्वविद्यालय शिक्षकों का औसत वेतन (रूपयों में)



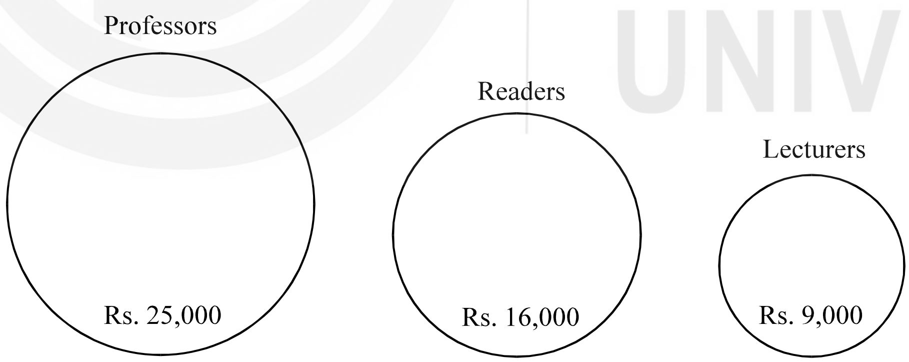
Scale : 2 cms = Rs.50

चित्र 2.11 : क्षेत्रफल आरेख (वर्ग)

iii) वृत्त तैयार करने के लिए हम उनकी त्रिज्याओं के वर्ग उनके क्षेत्रफलों के आनुपालिक ले लेते हैं। अर्थात् 25000 : 16000 : 9000 या 25 : 16 :9 । ऐसा करना इस बात पर आधारित है कि वृत्त का क्षेत्रफल उसकी त्रिज्या के वर्ग का आनुपालिक होता है। यदि तीन वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः r_1, r_2 तथा r_3 है तो हम $r_1^2 : r_2^2 : r_3^2 = 25:16:9$ या $r_1 : r_2 : r_3 = 5:4:3$ लिख सकते हैं।

अनुमाप : 1 से.मी. = 2.5 इकाई लेने पर तीन वृतों की त्रिज्याएँ क्रमशः 2.0, 1.6 तथा 1.2 से.मी. होंगी। ये वृत्त, चित्र 2.12 में दर्शाए गए हैं।

विश्वविद्यालय शिक्षकों का औसत वेतन (रूपये में)



Scale : 1 cms = 2.5 unit.

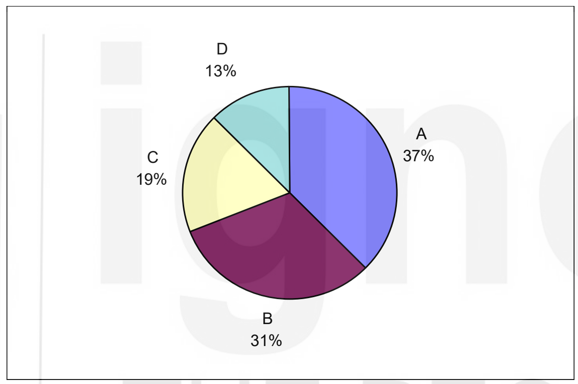
चित्र 2.12 : क्षेत्रफल आरेख (वृत्त)

2.5.3 वृत्तारेख या वृत्त चित्र

इसको कोणीय आरेख भी कहते है। इसका उपयोग दिए हुए समंकों के प्रतिशत विघटनों को दर्शाने के लिए किया जाता है। उदाहरणार्थ, एक देश का विश्व के विभिन्न देशों को निर्यात आनुपातिक या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस अनुपातों या प्रतिशतों को निम्नलिखित सूत्र की सहायता द्वारा कोणों में परिवर्तित किया जा सकता है।

सारणी 2.23 : देश X का A, B, C तथा D देशों को 1990 में निर्यात

देश	निर्यात	प्रतिशत अंश	कोण की डिग्री
A	300	$(300 \times 100) \div 800 = 37.50$	$(37.5 \times 360^0) \div 100 = 135^0$
B	250	$(250 \times 100) \div 800 = 31.25$	$(31.25 \times 360^0) \div 100 = 12.5^0$
C	150	$(150 \times 100) \div 800 = 18.75$	$(18.75 \times 360^0) \div 100 = 67.5^0$
D	100	$(100 \times 100) \div 800 = 12.50$	$(12.5 \times 360^0) \div 100 = 45^0$
योग	800	100	360^0



चित्र 2.13 : के निर्यात का वृत्तारेख

वृत्तारेख की रचना के चरण

1) सभी विघटनों का योग कीजिए।
2) उपविघटन का कुल योग में अनुपात या प्रतिशत ज्ञात कीजिए। इसको 360^0 से गुणा करके उपविघटन का कोण (डिग्री में) ज्ञात कीजिए।
3) एक उपयुक्त आकार का वृत्त बनाइए।
4) वृत्त के केन्द्र पर विभिन्न कोण बनाइए। पहले सबसे बड़ा कोण बनाना सुविधाजनक होता है।
5) विभिन्न खण्डों को विभिन्न प्रकार के रंग या छाया से दर्शाइए।
6) विभिन्न खण्डों के प्रतिशत मानो को आरेख में लिखिए।

2.5.4 त्रिविमीय आरेख

ये आरेख अधिक लोकप्रिय नहीं है अतः इनका उपयोग बहुत कम किया जाता है। क्योंकि ये आरेख त्रिविमिय होते हैं (जिसमें लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई), इनसे आयतन प्राप्त होता है। इनका रूप बॉक्स, घन, खंड, गोला तथा बेलन हो सकता है। जब प्रेक्षणों में अंतर बहुत अधिक हो तो त्रिविमिय आरेख बहुत उपयोगी होते हैं। हम केवल घन के द्वारा समंकों की प्रस्तुति की व्याख्या करेंगे जिसके लिए हमें निम्नलिखित कार्य करने होते हैं।

1) प्रत्येक संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए।

2) एक सुविधाजनक अनुमाप, अधिमानतः सेण्टीमीटरों में लीजिए।

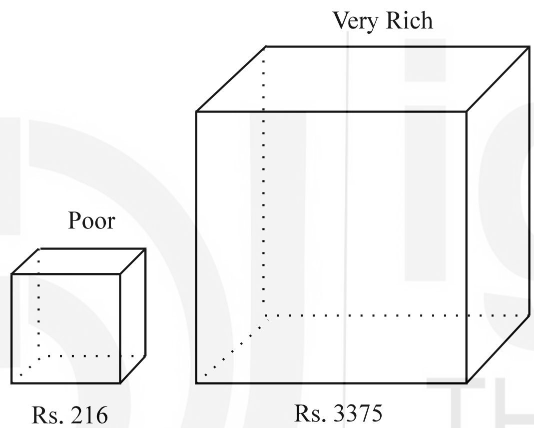
3) घन बनाइए जिसकी विमा, निम्नलिखित में दो परिवारों, गरीब तथा बहुत धनी का उदाहरण लेकर, परिकलित की गई है।

सारणी 2.24

आय वर्ग	आय (रूपये)	घनमूल	घन की भुजा
1. गरीब	216	$\sqrt[3]{216} = 6$	1.5 से.मी.
2. बहुत धनी	3375	$\sqrt[3]{3375} = 15$	3.75 से.मी.

अनुमाप : 1 से.मी. = 4 इकाई

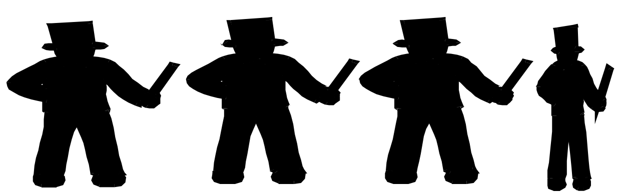
4) अब दो घन जिनकी भुजाएँ क्रमशः 1.5 तथा 3.75 से.मी. हों, बनाइए।



चित्र 2.14 : गरीब तथा बहुत धनी के आय स्तर (रूपये में)

2.5.5 चित्रलेख तथा सांख्यिकीय मानचित्र

इनको मानारेखा भी कहते हैं। अन्य आलेखी प्रस्तुति की तुलना में एक सामान्य जन के लिए चित्र अधिक आकर्षक होते हैं। लेकिन ये हर परिस्थिति में उपयुक्त नहीं होते। यह किसी राज्य की जनसंख्या संबंधी या किसी बड़े शहर, जैसे दिल्ली या मुम्बई, में वाहनों की संख्या तथ्यों के लिए उपयोग हो सकता है। व्यक्ति का चित्र बनाकर जनसंख्या को दर्शाया जा सकता है। यहाँ पर भी अनुमाप का उपयोग किया जाता है। हम एक लाख व्यक्तियों को एक व्यक्ति के चित्र द्वारा निरूपित कर सकते हैं। इस प्रकार 3.5 लाख व्यक्तियों को 3.5 व्यक्ति चित्रों द्वारा दर्शाया जा सकता है। जैसा चित्र 2.15 में दिया गया है।



चित्र 2.15 : चित्रलेख तथा सांख्यिकीय मानचित्र

चित्र लेखों का मुख्य दोष यह है कि यह केवल समीपवर्ती मानों को ही निरूपित करते हैं। अधिक परिशुद्ध प्रस्तुति के लिए दण्ड आरेख अधिमान्य होते हैं।

बोध प्रश्न 3

1) निम्नलिखित में, कम से कम दो विभेदीकरण के कारण देकर, भेद कीजिए।
   i) आयत चित्र तथा कालिक चित्र
   ii) आयत चित्र तथा दण्ड आरेख
   iii) आयत चित्र तथा बारंबारता बहुभुज
   iv) 'से कम' तथा 'से अधिक' तोरण
   v) वृत्तारेख तथा वृत्त

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2) निम्नलिखित समंकों से अन्तर्विभक्त दण्ड आरेख तथा वृत्तारेख तैयार कीजिए।

पुस्तकों पर व्यय

शैक्षिक वर्ष	अर्थशास्त्र	वाणिज्य शास्त्र	गणित	भाषाएँ	योग
1996—97	5200	10000	5000	4800	25000
1997—98	8000	14000	7000	6000	35000

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3) निम्नलिखित पदों की व्याख्या कीजिए :
   i) रेखा आरेख
   ii) दण्ड आरेख
   iii) अन्तर्विभक्त या घटक दण्ड आरेख
   iv) बहुदण्ड आरेख
   v) क्षेत्रफल आरेख
   vi) आयतन आरेख

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4) कोष्ठकों में दिए हुए शब्दों में से उपयुक्त शब्द द्वारा रिक्त स्थान भरिए।

   i) वृत्तारेख को .... आरेख भी कहते हैं। (दण्ड, कोणिक, बहुदण्ड)

   ii) जब दण्ड खड़े हुए हो तो चर .... पर मापा जाता है।

   iii) दण्ड आरेख, आयत, वर्ग, वृत्त तथा वृत्तारेख समंकों समंकों की प्रस्तुति का .... रूप है। (रेखागणित, अंकगणित, क्षैतिज)

   iv) एक आयत चित्र की सभी आयतों के शिखर के मध्यबिन्दुओं के मिलाने पर हमें .... प्राप्त होता है। (एक तोरण, एक बारंबारता वक्र, एक बारंबारता बहुभुज)

   v) 'से अधिक' संचयी बारंबारता बंटन के आलेख को 'से अधिक' .... भी कहते है। (तोरण, बारंबारता बहुभुज, बारंबारता वक्र)

   vi) एक सारणी का उपशीर्षक सारणी के .... में दिए हुए समंकों का नाम होता है। (पंक्ति, स्तम्भ, पाद टिप्पणी)

5) क्या निम्नलिखित कथन सत्य या असत्य है? यदि असत्य हैं तो सत्य कथन क्या होना चाहिए।

   i) एक चित्र 1000 शब्दों के बराबर होता है।
   ii) वर्ग तथा वृत्त का क्षेत्रफल आरेखों के उदाहरण है।
   iii) एक चर वाले समंकों की प्रस्तुति के लिए केवल एक खड़ा दण्ड हो सकता है।
   iv) साधारण बारंबारता बंटन का आलेख तोरण कहलाता है।
   v) काल श्रेणी आलेख को कालिक चित्र कहलाता है।
   vi) आयात चित्र तथा दण्ड चित्र समान होते है।

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2.6 सार संक्षेप

संकलित समंक, संख्याओं का असंगठित तथा जटिल ढेर होता है। इनसे कुछ अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए इनका सुव्यवस्थित विन्यास आवश्यक है। यह कई प्रकार से किया जा सकता है जैसे सरल तथा बारंबारता क्रम विन्यास द्वारा, असंतत तथा संतत बारंबारता बंटन द्वारा आदि।

कभी–कभी 'से कम' या 'से अधिक' संचयी बारंबारता बंटन को तैयार करना उपयोगी होता है। पहले को बनाने के लिए हम उपर से बारंबारताओं का आनुक्रमिक योग करते हैं तथा दूसरे के लिए हम नीचे से बारंबारताओं का आनुक्रमिक योग करते हैं।

समंकों के संकलन तथा संक्षेपण के पश्चात् उनका अच्छा प्रस्तुतिकरण महत्वपूर्ण होता है। एक अच्छा प्रस्तुतिकरण समंकों के तथ्यों को सामने लाता है परिणामस्वरूप उनका बुद्धिमता से उपयोग तथा तुलना करना संभव होता है। यह सारणी, रेखा आरेख, आयत चित्र, बारंबारता बहुभुज तथा बारंबारता वक्र; 'से कम' तथा 'से अधिक' तोरण; रेखागणित रूप – एक, दो तथा त्रिविमीय आरेख जैसे दण्ड आरेख, आयत, वर्ग, वृत्त, घन तथा वृत्तारेख; सांख्यिकीय मानचित्र आदि बनाकर किया जा सकता है।

आरेखों का उपयोग करते समय उनकी सीमाओं का ध्यान रखना आवश्यक होता है। आरेख किसी किसी समस्या के बारे में केवल अस्पष्ट बोध प्रदान करते हैं तथा केवल सीमित अभिलक्षणों को ही दर्शा सकते हैं। आलेखी प्रस्तुतिकरण के विपरीत आरेखी प्रस्तुतिकरण की मुख्य–सीमा यह है कि इसको विश्लेषण के उपकरण के रूप में उपयोग नहीं किया जा सकता। आलेखी विधि का शुद्धता स्तर प्रायः गणितीय विधि के शुद्धता स्तर से निम्न होता है।

2.7 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) i) अनुभाग 2.2.2 तथा 2.2.3 देखिए।

   ii) अनुभाग 2.3.4 देखिए।

   iii) अनुभाग 2.3.3 देखिए।

   iv) अनुभाग 2.3.1 तथा 2.3.2 देखिए।

2) अपने आस–पास की घटनाओं पर आधारित उदाहरण दीजिए। शब्दों के उपयुक्त अर्थ के लिए भाग 2.3 देखिए।

3) इस विषय में हमने सारणी 2.2 के मासिक आय समंकों को सारणी 2.6 मे बारम्बरता बटंन के समंकों में परिवर्तित किया है। जिससे आप संकेत ले सकते हैं।

4) अनुभाग 2.3.3 देखिए।

5) अनुभाग 2.3.4 (iii) देखिए।

6) अनुभाग 2.3.4 (iv) देखिए।

बोध प्रश्न 2

1) सारणी 2.16 तथा अनुभाग 2.4.2 देखिए।

2) अनुभाग 2.4.2 (2) देखिए।

3) सारणी 2.16 देखिए।

4) यह एक से अधिक प्रकार से किया जा सकता है। यहाँ एक दिया हुआ है। आप और बनाएँ।

X Y महाविद्यालय के विद्यार्थियों का वर्गीकरण

वर्ष	छात्रावासी		गैर छात्रावासी	
	पुरूष	स्त्री	पुरूष	स्त्री
प्रथम वर्ष द्वितीय वर्ष तृतीय वर्ष				

बोध प्रश्न 3

(1)

(i) अनुभाग 2.4.1 और 2.4.2 देखिए।

(ii) अनुभाग 2.4.2 और 2.5.1 देखिए।

(iii) अनुभाग 2.4.2 देखिए।

(iv) अनुभाग 2.4.3 देखिए।

(v) अनुभाग 2.5.2 और 2.5.3

(2) अनुभाग 2.5.2 और 2.5.3

(3)

(i) अनुभाग 2.4.1 देखिए।

(ii) अनुभाग 2.5.1 देखिए।

(iii) अनुभाग 2.5.1 देखिए।

(iv) अनुभाग 2.5.1 देखिए।

(v) अनुभाग 2.5.2 देखिए।

(vi) अनुभाग 2.5.4 देखिए।

4) i) कोणिक

ii) Y-अक्ष

(iii) ज्यामितिक

(iv) एक आवृति बहुभुज

(v) तोरण (ogive)

(vi) कॉलम

5) सत्य 1,2,5

असत्य 3,4,5

इकाई 3 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप*

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आपको निम्नलिखित जानकारी प्राप्त हो सकेगी:

- दिये हुए समंक समुच्चय द्वारा संख्यात्मक मात्राओं, जैसे समान्तर माध्य, माध्यिका, बहुलक, गुणोतर माध्य, हरात्मक माध्य, का परिकलन;
- प्रकीर्णन की अवधारणा;
- समंक समुच्चय के प्रकीर्णन का संख्यात्मक परिकलन करना;
- चेबाईचेव्य (Chebychev) की असमता;
- विचरण गुणांक का परिकलन करना; तथा
- समंकों के कुछ बंटनों के सांद्रता माप को ज्ञात करना।

---

* इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 4 और 5 आर.एस. भारद्वाज द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।

3.1 विषय प्रवेश

इससे पहली इकाई में हमने अपरिष्कृत समंकों का कुछ वर्ग अन्तरालों में वर्गीकरण तथा सारणी या आलेख के रूप में प्रस्तुतीकरण द्वारा संक्षेपण का विवेचन किया था। सारणी या आरेख, प्रेक्षणों के बंटन का मोटे रूप में बोध कराते हैं। प्रायः हमें बंटनों की तुलना करनी पड़ती है। अतः सारणियों तथा आरेखों द्वारा इनकी तुलना कठिन होती है। यदि हम समंकों की व्याख्या के लिए एक संख्या ज्ञात कर सके तो विभिन्न बंटनों की तुलना करना बड़ा सुविधाजनक कार्य हो जाता है।

इस कार्य के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप एक महत्वपूर्ण प्रतिदर्शज होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के पाँच मुख्य माप हैं। यह समान्तर माध्य, गुणोत्तर, हरात्मक माध्य, माध्यिका तथा बहुलक हैं। निम्नलिखित में आप इन सभी के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे।

3.2 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

इकाई 2 में विवेचन किये गये बारंबारता बंटन में हमने यह पाया कि एक अन्वेषण के प्रेक्षणों की एक केन्द्रीय मान के आसपास समूह बनाने की प्रवृत्ति होती है। इस प्रक्रिया को केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते है। हमारी रूचि इस प्रकार के केन्द्रीय मान को ज्ञात करने में है। एक बारंबारता बंटन की केन्द्रीय प्रवृत्ति के कई माप हो सकते हैं तथा मापों द्वारा हमें ऐसी संख्याएँ प्राप्त होती हैं जो कि बारंबारता बंटन का संक्षेपण करती है।

3.2.1 समांतर माध्य

सबसे प्रचलित केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को औसत या समांतर माध्य या केवल माध्य (जब अस्पष्टता की संभावना न हो) कहते हैं। इसको ज्ञात करने के लिए प्रतिदर्श के सभी मानों को जोड़कर इसे प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित किया जाता है। समांतर माध्य का संकेतन चर के संकेत के उपर रेखिका (Bar) लगाकर किया जाता है। इस प्रकार का $\overline{X}$ उपयोग प्रतिदर्श में X के मानों के माध्य के लिए किया जाता है। यदि प्रतिदर्श में X के के एक विशेष मान X_i की बारंबारता f_i है तो इसका X के मानों के कुल योग में योगदान f_iX_i. के बराबर होता है। इस प्रकार हम X के मानों का समांतर माध्य निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

$$\overline{X} = \frac{1}{N}(f_1X_1 + f_2X_2 + \ldots + f_nX_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_iX_i}{N}, \quad \text{जहाँ पर } N = \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

जब प्रेक्षण वर्ग अंतरालों में वर्गीकृत हों, जैसा कि संतत चर के लिए होता है, तो एक वर्ग में आने वाले व्यष्टि प्रेक्षणों की पृथक् रूप में पहचान नहीं की जा सकती, अतः इस वर्ग के व्यष्टि प्रेक्षणों का कुल योग में योगदान परिकलित नहीं किया जा सकता है। इस कठिनाई के समाधान के लिए यह मानलिया जाता है कि एक वर्ग में प्रत्येक प्रेक्षण का मान इस वर्ग के मध्यबिन्दु के बराबर है। इस प्रक्रिया द्वारा परिकलित माध्य, वास्तविक माध्य जो कि अपरिष्कृत समंकों से परिकलित किया गया हो, से भिन्न होता है। इसके कारण हमें वर्गीकरण संशुद्धि की आवश्यकता हो सकती है।

उदाहरण 3.1

सारणी 3.1 में दिये हुए असंतत बारंबारता बंटन का माध्य परिकलित कीजिए।

सारणी 3.1: 100 गृहों का, आकार के अनुसार, बारंबारता बंटन

गृह का आकार (x_i)	बारंबारता (f_i)
1	3
2	16
3	25
4	33
5	12
6	7
7	2
8	2
योग	100

ऊपर दी गई सारणी में समंकों का माध्य

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{N} = \frac{1\times3+2\times16+3\times25+4\times33+5\times12+6\times7+7\times2+8\times2}{100} = \frac{.374}{100} = 3.74$$

अतः 100 गृहों पर आधारित औसत गृह आकार = 3.74 है।

उदाहरण 3.2

सारणी 3.2 में दिये हुए वर्ग बारंबारता बंटन का माध्य परिकलित कीजिये।

सारणी 3.2: गृहों का, खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के अनुसार बारंबारता बंटन

व्यय वर्ग (रूपये)	बारंबारता
262.5—286.5	1
286.5—310.5	14
310.5—334.5	16
334.5—358.5	28
358.5—382.5	26
382.5—406.5	15
योग	100

माध्य के परिकलन के लिए हम निम्नलिखित सारणी तैयार करते हैं।

वर्ग अंतराल (रूपये) (0)	मध्य बिन्दु (X_i) (1)	बारंबारता (f_i) (2)	$f_i X_i$ (3)
262.5 -286.5	274.5	1	274.5
286.5 – 310.5	298.5	14	4179.0
310.5 – 334.5	322.5	16	5160.0
334.5 – 358.5	346.5	28	9702.0
358.5 – 382.5	370.5	26	9633.0
382.5 – 406.5	394.5	15	5917.5
योग		**100**	**34866.0**

अतः गृहों का खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय $\overline{X} = \frac{34866}{100} = \text{Rs.}348.66.$ रूपये है।

इस उदाहरण द्वारा यह पता चलता है कि स्तंभ (3) को प्राप्त करने के लिए हमें स्तंभ (1) तथा (2) के संगत मानों को गुणा करना होता है तथा बहुधा, प्रत्येक गुणन के लिए, ये परिकलन कठिन होते हैं। इन परिकलनों को निम्नलिखित रूपांतरण द्वारा सरल बनाया जा सकता है।

$i = 1, 2, \ldots, n$ के लिए हम

$u_i = \frac{X_i}{h}$ या $X_i = A + hu_i$ लिखते हैं। अतः $\overline{X} = A + h\overline{u}.$

यहाँ पर A को कल्पित माध्य $\overline{X}$ तथा $h\overline{u}$ को प्राप्त करने के लिए इसका संशोधन पर कहते हैं। A तथा h का ऐसा चयन किया जाता है कि जिससे $\overline{u}$ का परिकलन सरल हो जाय। प्रायः A को X के उस मान के बराबर लिया जाता है जिसकी बारंबारता अधिकतम हो। जब स्तंभ (1) में X के आनुक्रमिक मान समान दूरी पर हों, तो h का मान X के दो आनुक्रमिक मानों के अंतर के बराबर लिया जाता है। यदि वर्गों के अंतराल समान हैं तो दो आनुक्रमिक मध्य बिन्दुओं का अंतर प्रत्येक वर्ग अंतराल के बराबर होता है।

इस विधि की व्याख्या के लिए हम सारणी 3.2 में दिये हुए गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के समंकों का माध्य पुनः परिकलित करते हैं। A तथा h के उपयोग द्वारा हम सारणी 3.3 तैयार करते हैं, जहाँ पर

A = अधिकतम बारंबारता वाले वर्ग का मध्यबिन्दु = 346.5 तथा

h = सभी वर्गों में विद्यमान समान अंतराल = 24

अतः $u_i = \frac{X_i - 346.5}{24}$

सारणी 3.3 : सारणी 3.2 के बारंबारता बंटन के माध्य का परिकलन

वर्ग अंतराल (रू.)	मध्य बिन्दु (X_i)	$u_i = \frac{X_i - 346.5}{24}$	बारंबारता (f_i)	$f_i u_i$
262.5 – 286.5	274.5	–3	1	–3
286.5 – 310.5	298.5	–2	14	–28
310.5 – 334.5	322.5	–1	16	–16
334.5 – 358.5	346.5	0	28	0
358.5 – 382.5	370.5	1	26	26
382.5 – 406.5	394.5	2	15	30
योग			**100**	**9**

सारणी द्वारा हम $\overline{u} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i u_i = \frac{1}{100} \times 9 = \frac{9}{100}$

इस प्रकार, $X = A + h \times \bar{u} = 346.5 + 24 \times \frac{9}{100} = Rs.348.66$ ज्ञात कर सकते हैं।

समांतर माध्य की विशेषताएँ

1) एक दिये हुए प्रेक्षण समुच्चय में प्रेक्षणों के समांतर माध्य से लिए गए विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य होता है।

मान लिया $X_1, X_2, ..., X_n$ प्रेक्षणों की संख्या n है जिनकी बारंबारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, ..., f_n$. हैं। गण्तिीय दृष्टिकोण से इस विशेषता का अर्थ है कि $\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{X}) = 0,$ जहाँ पर $X_I - \bar{X}$ iवें प्रेक्षण का माध्य से विचलन है।

इस विशेषता को हम निम्नलिखित विधि से सिद्ध कर सकते हैं।

$\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i - \bar{X} \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i - n.\bar{X} = 0.$ अतः परिणाम।

2) यदि एक प्रेक्षण समुच्चय में प्रेक्षणों के विचलन समांतर माध्य से लिए गए हों तो विचलन वर्गों का योग न्यूनतम होता है।

गणितीय दृष्टिकोण से इस विशेषता का अर्थ यह है कि $S = \sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - A)^2$ तब न्यूनतम होगा जब $A = \bar{X}$ हो, यहाँ पर A एक मनमाना माध्य है।

इस विशेषता का प्रमाण इस संकेत पर आधारित है कि S का आकार A के मान पर निर्भर करता है। अर्थात् चर S को चर A का फलन कहा जा सकता है। हमारी रूचि A के ऐसे मान को ज्ञात करना है जिसके लिए S का मान न्यूनतम हो, कलन के उपयोग द्वारा यह मान समीकरण $\frac{dS}{dA} = 0$ द्वारा दिया गया ऐसा मान है कि $\frac{d^2S}{dA^2} > 0.$ रहे।

(याद रहे कि फलन के न्यूनतम मान के लिए प्रथम अवकलन शून्य तथा द्वितीय अवकलन धनात्मक होता है।)

A के सापेक्ष S का अवकलन लेकर उसको शून्य के बराबर लिखने पर, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\frac{dS}{dA} = -2 \sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - A) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i X_i - A \sum_{i=1}^{n} f_i = 0 \quad \text{or} \quad A = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \bar{X}.$$

हम यह भी दर्शा सकते है कि जब $A = \bar{X}.$ हो तो $\frac{d^2S}{dA^2} > 0$ होगा।

3.4.2 माध्यिका

माध्यिका का अर्थ उस केन्द्र बिन्दु से होता है जो एक बंटन को दो बराबर भागों में बाँटता है अर्थात् यह प्रेक्षणों के समुच्चय में मध्यवर्ती मान होता है। पहले हम असंतत चर के उदाहरण द्वारा इसकी व्याख्या करेंगे।

मान लीजिए हमारे पास 5 पृथक् प्रेक्षण 2, 4, 9, 12, 19 हैं जो वर्धमान क्रम में व्यवस्थित हैं। यहाँ पर मध्यवर्ती मान 9 है क्योंकि बराबर संख्या में प्रेक्षण इससे कम तथा इससे अधिक है। अतः 2, 4, 9, 12, 19 की माध्यिका 9 है। हम एक और 6 पृथक् समंकों के समुच्चय पर विचार करते हैं: 3, 8, 15, 25, 35, 43; यहाँ पर किसी मान जो कि 15 तथा 25 के बीच हो, के लिए समान संख्या में प्रेक्षण इससे कम तथा अधिक हैं। इसलिए 15 तथा 25 के बीच का कोई मान माध्यिका के रूप में उपयोग किया जा सकता है। अद्वितीय (unique) माध्यिका को परिभाषित करने के लिए 15 तथा 25 का मध्यमान लेने की परंपरा है। अतः 3, 8, 15, 25, 35, 43 की माध्यिका 20 होगी।

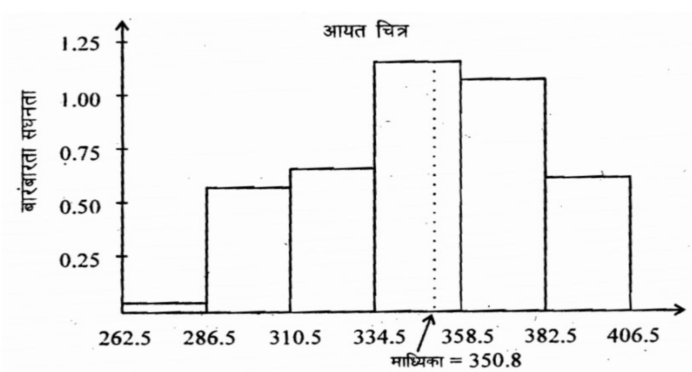
प्रायः व्यावहारिक परिस्थितियों में समंकों के समुच्चय में अपृथक् (non-distinct) प्रेक्षण होते है, जिनके कारण माध्यिका ज्ञात करने में कठिनाई हो सकती है। जैसा कि 5 प्रेक्षणों के समुच्चय : 2, 9, 9, 12, 19; से स्पष्ट हैं, इन परिस्थितियों में ऐसा मध्यवर्ती मान या केन्द्र बिन्दु ज्ञात करना, जो बंटन को दो बराबर भागों में बाँट दें, हमेशा संभव नहीं होता, अतः माध्यिका कि विधिवत परिभाषा में इन कठिनाइयों को ध्यान रखा जाना चाहिए।

बंटन की माध्यिका वह बिन्दु या केन्द्रीय मान होता है जिस तक (यह मान या इससे न्यून मान) प्रेक्षणों की संख्या कम से कम 50 प्रतिशत हो जिस तक जिससे अधिक (यह मान तथा इससे अधिक मान) प्रेक्षणों की संख्या कम से कम 50 प्रतिशत हो।

इस परिभाषा तथा अंतराल, जिसमें प्रत्येक मान माध्यिका होता है, के मध्य बिंदु की परंपरा के आधार पर बंटन की माध्यिका को हमेशा अद्वितीय रूप में परिभाषित किया जा सकता है। अतः 2, 9, 9, 12, 19 प्रेक्षणों की माध्यिका 9 है, क्योंकि 5 में से 3 प्रेक्षणों (60 प्रतिशत) में अधिकतम मान 9 है तथा 5 में से 4 प्रेक्षणों (80 प्रतिशत) में न्यूनतम मान 9 है।

सारणी 3.1 में दिए गए बारंबारता बंटन की माध्यिका ज्ञात करने के लिए हमें यह पता चलता है कि 77 प्रतिशत गृहों का आकार 4 या इसे कम है तथा 56 प्रतिशत गृहों का आकार 4 या इससे अधिक है। अतः बंटन की माध्यिका 4 है।

संतत चर के वर्ग–बारंबारता बंटन की माध्यिका को सहचारी आयात चित्र, जिसमें आयात की ऊँचाई वर्ग की बारंबारता सघनता के बराबर होती है, द्वारा सरलता से समझा जा सकता है। ऐसे आयात चित्र में एक आयात का क्षेत्रफल उसके संगत वर्ग बारंबारता के बराबर होता है। इस परिस्थिति में माध्यिका, किसी एक वर्ग में वह बिन्दु होती है जिसके बाईं तथा दाईं ओर के क्षेत्रफल प्रत्येक 50 प्रतिशत होते हैं। सर्वप्रथम हम उस वर्ग (जिसको माध्यिका वर्ग कहते हैं) का पता करते हैं जिसकी दाहिनी परिसीमा तक कुल क्षेत्रफल कम से कम 50 प्रतिशत है। इसके बाद, माध्यिका के परिकलन के लिए हम इस वर्ग की न्यून परिसीमा में वर्ग की वह लंबाई जोड़ देते हैं, जो कि 50 प्रतिशत क्षेत्रफल के लिए तुलनात्मक बारंबारता के अनुपात में होती है। माध्यिका वर्ग को संचयी बारंबारता के परिकलन द्वारा, यह पहचान करके की $N/2$ वाँ प्रेक्षण किस वर्ग में है, सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। इस विधि की व्याख्या सारणी 3.2 में दिये गये गृहों के औसत मासिक व्यय के समंकों की माध्यिका के परिकलन द्वारा की गई है।



चित्र 3.1: मासिक गृह व्यय (रूपये)

वर्ग परिसीमा 334.5 तक क्षेत्रफल 31 है तथा 358.5 तक 59 है। अतः माध्यिका वर्ग 334.5–358.5 है अर्थात् माध्यिका इस वर्ग में स्थित है। अब हम इस वर्ग में ऐसा बिन्दु ज्ञात करना चाहते हैं कि 334.5 से उस बिन्दु तक क्षेत्रफल (50–31) = 19 हो। यहाँ पर यह ध्यान रहे कि 334.5 तक क्षेत्रफल 31 है। चूँकि वर्ग 334.5 – 358.5 पर आयत का क्षेत्रफल 28 तथा इस वर्ग का अंतराल 24 है, हमें 19 इकाई क्षेत्रफल के लिए 24 का $\frac{19}{28}$ वाँ हिस्सा चाहिए, जो कि $\frac{19}{28}\times 24 = 16.3.$ होगा। अतः माध्यिका 334.5 +16.3 = 350.8 होगी। यहाँ पर यह ध्यान दें कि वर्ग 350.8 – 358.5 का क्षेत्रफल (28–19) = 9 इकाई है तथा 350.8 के दाई ओर कुल क्षेत्रफल 9+26+15 = 50 इकाई है, जैसा कि होना चाहिए।

उपरोक्त विधि के आधार पर, हम माध्यिका के परिकलन के लिए निम्नलिखित सूत्र लिख सकते हैं।

$$M_d = l_m + \frac{\frac{N}{2} - C}{f_m} \times h,$$

जहाँ पर

l_m माध्यिका वर्ग अर्थात् वह वर्ग जिसमें माध्यिका है, की न्यून सीमा,

N कुल बारंबारता,

C माध्यिका वर्ग से पहले आने वाले वर्गों की संचयी बारंबारता (उपरोक्त उदाहरण में $C =$ 31),

f_m माध्यिका वर्ग की बारंबारता, तथा

h माध्यिका वर्ग का अंतराल है।

3.2.3 बहुलक

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, प्रायः प्रेक्षणों में एक केन्द्रीय मान के आस–पास समूह बनाने की प्रवृत्ति होती है। इस प्रवृत्ति के एक सरल माप को बहुलक कहते हैं।

एक असंतत चर के लिए बहुलक या बहुलकता मान से अर्थ चर के उस मान से होता है, जिसकी बारंबारता अधिकतम होती है।

बहुलक से अर्थ बहुमत नहीं होता अर्थात् इसका अर्थ यह नहीं होता कि अधिकतर (50 प्रतिशत से अधिक) प्रेक्षणों के मान बहुलकता मान के बराबर हैं। सारणी 3.1 द्वारा हमें ज्ञात होता है कि गृह के आकार का बहुलक या बहुलकता मान 4 है, क्योंकि इसकी बारंबारता अधिकतम है।

हमारे पास समंकों के ऐसे समुच्चय हो सकते हैं, जिनके लिए अद्वितीय बहुलक की परिभाषा नहीं की जा सकती, अर्थात् बंटन के कई बहुलक हैं। अपरिष्कृत समंक जिनमें 7 काल्पनिक प्रेक्षणों के मान 4, 3, 4, 1, 2, 5, 3 हैं, के दो बहुलक 3 तथा 4 हैं। दो बहुलक वाले बंटन को द्विबहुलक (bimodal) बंटन कहा जाता है। प्रायः बंटनों का एक ही बहुलक होता है या ये एक बहुलकी होते हैं।

जब सतत चर के प्रेक्षण, जैसे खाद्य सामग्री पर गृहों का व्यय, अपरिष्कृत रूप में हों तो किन्हीं दो प्रेक्षणों के मान बराबर होने की कोई संभावना नहीं होती तथा इस परिस्थिति में बहुलक माप का कोई अर्थ नहीं होता। लेकिन जब इन अपरिष्कृत समंकों को वर्गों में परिवर्तित किया जाता है तो समंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति सामने आ जाती है। वर्गीकृत समंकों के लिए अधिकतम बारंबारता वाले वर्ग को बहुलक वर्ग कहा जाता है। चूँकि बड़ें अंतराल वाले वर्ग में प्रेक्षणों की संख्या, छोटे अंतराल वाले वर्ग की प्रेक्षणों की संख्या से अधिक होने की संभावना होती है, इसलिए बहुलक वर्ग की अर्थपूर्ण परिभाषा के लिए विभिन्न वर्गों के अंतराल समान होने आवश्यक होते हैं।

असंतत समंकों का बहुलक ज्ञात करना सरल होता है। लेकिन संतत समंकों के बहुलक का परिकलन निम्नलिखित सूत्र के उपयोग द्वारा किया जाता है।

$M_0 = l_m + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h,$ जहाँ पर

l_m बहुलक वर्ग, वह वर्ग जिसमें बहुलक है, की निम्न परिसीमा,

$\Delta_1 (= f_m - f_{m-1})$ बहुलक वर्ग तथा इसके पहले वर्ग की बारंबारताओं का अंतर,

$\Delta_2 (= f_m - f_{m+1})$ बहुलक वर्ग तथा इससे आगामी वर्ग की बारंबारताओं का अंतर, तथा h बहुलक वर्ग का अंतराल है।

सारणी 3.2 में दिए गए बंटन में अधिकतम बारंबारता 28, वर्ग 334.5–358.5 की है। अतः बहुलकता वर्ग 334.5–358.5 होगा।

इस प्रकार $l_m = 334.5,\ \Delta_1 = 28 - 16 = 12, \Delta_2 = 28 - 26 = 2$ तथा $h = 24$

अतः $M_0 = 334.5 + \frac{12}{12+2} \times 24 = 355.07$

जब बारंबारता बंटन शिखर प्रबल हो तो बहुलक इसकी केन्द्रीय प्रवृति का उपयोगी माप होता है और यदि बारंबारता बंटन सपाट हो तो बहुलक के माप की कोई उपयोगिता नहीं होती।

बोध प्रश्न 1

1) एक औद्योगिक नगर के एक क्षेत्र में 250 परिवारों के आकार का बारंबारता बंटन निम्नलिखित है :

परिवार आकार	बारंबारता
1	4
2	22
3	25
4	45
5	52
6	41
7	36
8	15
9	7
10	3
योग	**250**

माध्य, माध्यिका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य, माध्यिका तथा बहुलक परिकलित कीजिएः

6 वर्ष के 309 बच्चों के आई. क्यू. (I.Q.) का बारंबारता बंटन

आई.क्यू.	बारंबारता
160 – 169	2
150 – 159	3
140 – 149	7
130 – 139	19
120 – 129	37
110 – 119	79
100 – 109	69
90 – 99	65
80 – 89	17
70 – 79	5
60 – 69	3
50 – 59	2
40 – 49	1
योग	**309**

....

....

....

....

....

....

3.3 केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य माप

समांतर माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के अतिरिक्त केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य माप भी होते हैं, जो अपेक्षाकृत इतने महत्वपूर्ण नहीं होते लेकिन कुछ विशेष परिस्थितियों में बड़े ही उपयुक्त होते हैं। इनको गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य कहते हैं। इनका विवेचन अनुभाग 3.3.1 में किया गया है।

इसके अतिरिक्त प्रायः हम यह पाते हैं कि सभी प्रेक्षणों का महत्व बराबर नहीं होता। ऐसी परिस्थिति में हम साधारण माध्य के स्थान पर भारित माध्य – समांतर, गुणोतर या हरात्मक – का उपयोग करते हैं। इसका विवेचन अनुभाग 3.3.2 में किया जायेगा।

3.3.1 गुणोतर तथा हरात्मक माध्य

प्रायः हमारा संपर्क समय से संबंधित समंकों से होता है अर्थात् कालश्रेणी समंकों से, जो कि सारणी 3.1 तथा 3.2 में दिए गए एक समय बिन्दु पर समंकों से भिन्न होते हैं। इन कालाश्रित समंकों में हमारी रूचि प्रायः समय के साथ इनके परिवर्तन के रूप को जानने में होती है। निम्नलिखित समंकों के दो समुच्चयों पर ध्यान दीजिए।

समुच्चय I:	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
समुच्चय II:	1100	1210	1331	1464	1611	1772	1949

पहला समुच्चय एक कर्मचारी के मूल वेतन (रूपयों में) की तरह लगता है जो कि, 100 रूपये की वार्षिक वृद्धि सहित, 7 वर्षों के लिए दिया हुआ है।

दूसरा समुच्चय कर्मचारी के सकल (Gross) वेतन की तरह लगता है। दोनों समुच्चयों में वार्षिक वृद्धि इस प्रकार हैः

समुच्चय I:	100	100	100	100	100	100
समुच्चय II:	110	121	133	147	161	177

समुच्चय I का समांतर माध्य 100 है तथा समुच्चय II का समांतर माध्य 141.5 है। इस औसत वृद्धि के आधार पर यदि हम दोनों समुच्चयों की संख्याएँ, उनके शुरू के मान लेकर, परिकलित करें तो हमें निम्नलिखित प्राप्त होगाः

समुच्चय I:	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
समुच्चय II:	1100	1241.5	1383	1524.5	1666	1807.5	1949

यहाँ पर समांतर माध्या का प्रयोग समुच्चय I के लिए उपयुक्त है, लेकिन समुच्चय II के लिए नहीं क्योंकि दोनों समुच्चयों (दिया हुआ तथा परिकलित) में संख्याओं की श्रेणियाँ भिन्न हैं। समुच्चय I की संख्याओं में वृद्धि एक स्थिर मात्रा में हुई है जबकि समुच्चय II की संख्याओं में वृद्धि एक निश्चित दर पर हुई है।

समुच्चय I की संख्याएँ समांतर श्रेणी में हैं इसलिए औसत वृद्धि की व्याख्या के लिए समांतर माध्य उपयुक्त है। इसी प्रकार, समुच्चय II की संख्याएँ गुणोतर श्रेणी में है तथा औसत वृद्धि दर की व्याख्या के लिए गुणोतर माध्य उपयुक्त होगा।

n संख्याओं, $X_1, X_2, \ldots X_n$ के लिए गुणोतर माध्य (*GM*) इन संख्याओं के गुणनफल का *n*वाँ मूल होता है।

गुणोत्तर माध्य $GM = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\frac{1}{n}} = \left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]^{\frac{1}{n}}$

स्पष्टतः यदि सभी संख्याएँ धनात्मक न हों तो गुणोत्तर माध्य परिभाषित नहीं होता। *GM* का लघु (log) लेने पर

लघु $GM = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\log X_1 + \log X_2 + \ldots + \log X_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i$

इससे यह पता चलता है कि लघु सारणी के उपयोग द्वारा गुणोत्तर माध्य का परिकलन किया जा सकता है। यहाँ पर ध्यान दें की लघु X के मानों के समांतर माध्य का प्रतिलघु (antilog), गुणोत्तर माध्य होता है। समंकों के समुच्चय II में सकल वेतन में वृद्धि 11 प्रतिशत प्रतिवर्ष है। लेकिन, व्यवहार में, वृद्धि या कमी किसी निश्चित दर पर नहीं होती तथा औसत वृद्धि दर ज्ञात करना अर्थपूर्ण हो सकता है। सामान्यतः औसत वृद्धि दर ज्ञात करने के लिए गुणोत्तर माध्य का उपयोग समांतर माध्य के उपयोग से अधिक उपयुक्त होता है। इसलिए, विभिन्न प्रकार के कीमत सूचकांक, उपभोगता कीमत सूचकांक आदि में गुणोत्तर माध्या का उपयोग किया जाता है।

अंत में, हम केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक और माप की व्याख्या करेंगे। इसको हरात्मक माध्य (Harmonic Mean या *H.M.*) कहते हैं। जैसा कि दिए हुए उदाहरण से स्पष्ट होगा, कई परिस्थितियों में यह माध्य स्वतः ही प्राप्त हो जाता है। एक व्यापारी, प्रत्येक माह के शुरू में, 5,000 रूपये मूल्य के बराबर सामान का संग्रहण करता है। 5 उत्तरोत्तर महीनों में वस्तु की प्रति इकाई दर (रूपयों में) इस प्रकार हैः 10.75, 11.80, 14.00, 11.45 तथा 12.00। व्यापारी पिछले महीनें में संचित सामान की औसत प्रति इकाई कीमत जानना चाहता है। यह परिकलन निम्नलिखित में प्रस्तुत हैः

मास	व्यय की गई राशि (रूपयों में)	प्रति इकाई दर (रूपयों में)
1	5000	10.75
2	5000	11.80
3	5000	14.00
4	5000	11.45
5	5000	12.00
योग	**25000**	

कुल संग्रहण की प्रति इकाई कीमत = (कुल व्यय की गई राशि) / (कुल क्रय की गई मात्रा)

$$= \frac{5 \times 5000}{\frac{5000}{10.75} + \frac{5000}{11.80} + \frac{5000}{14.00} + \frac{5000}{11.45} + \frac{5000}{12.00}}$$

$$= \frac{5}{\frac{1}{10.75} + \frac{1}{11.80} + \frac{1}{14.00} + \frac{1}{11.45} + \frac{1}{12.00}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{10.75} + \frac{1}{11.80} + \frac{1}{14.00} + \frac{1}{11.45} + \frac{1}{12.00}\right)} = 11.91$$

अंतिम व्यंजक व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम है तथा इसको हरात्मक माध्य (*H.M.*) कहते हैं। X के मानों के समुच्चय, $X_1, X_2, ..., X_n$, के लिए हरात्मक माध्य की परिभाषा निम्नलिखित हैः

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \ldots + \frac{1}{X_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

यदि एक भी प्रेक्षण शून्य हो तो हरात्मक माध्य परिभाषित नहीं होता।

यदि व्यापारी, प्रतिमास के शुरू में, दी हुई कीमतों पर 5,000 रूपये मूल्य के बराबर सामान के स्थान पर, 3000 इकाइयों का संग्रहण करता तो उपयुक्त औसत, समांतर माध्य होगा। इसकी जाँच के लिए हम लिखते हैं:

औसत कीमत = (कुल व्यय की गई राशि) / (कुल क्रय की गई मात्रा)

$$= \frac{3000 \times 10.75 + 3000 \times 11.80 + 3000 \times 14.00 + 3000 \times 11.45 + 3000 \times 12.00}{3000 \times 5}$$

$$= \frac{10.75 + 11.870 + 14.00 + 11.45 + 12.00}{5} =$$ दी हुई कीमतों का समांतर माध्य

3.3.2 भारित माध्य

बहुल से व्यावहारिक अनुप्रयोगों में भारित माध्य (समांतर, गुणोतर तथा हरात्मक), अभारित या साधारण माध्य की तुलना में एक घटना को भली भांति दर्शाते हैं।

उदाहरण के लिए उपभोगता कीमत सूचकांक के परिकलन में सभी वस्तुओं का महत्व समान नहीं होता। ईंधन की कीमत में वृद्धि, कृषि वस्तुओं की कीमतों में वृद्धि की तुलना में उपभोगता कीमत सूचकांक को अधिक प्रभावित कर सकती है। शेयर बाजार में कुछ कम्पनियों के शेयर ही बाजार के प्रवृत्ति के निर्धारक हो सकते हैं। इस प्रकार की परिस्थितियों में भारित माध्य अधिक उपयुक्त होते हैं। भारित माध्य प्राप्त करने के लिए प्रत्येक X_i के साथ एक भार w_i को संलग्न किया जाता है तथा इसका माध्य ठीक उसी प्रकार परिकलित किया जाता है जैसे कि w_i, संकेत रूप में, X_i की बारंबारता हों। भारित माध्य के विभिन्न सूत्र निम्नलिखित हैं :

भारित समांतर माध्य = $$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

भारित गुणोत्तर माध्य = $$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{w_i}\right)^{\frac{1}{\sum w_i}}$$ तथा

भारित हरात्मक माध्य = $$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{X_i}}$$

यदि प्रत्येक $w_i = 1$ हो तो भारित माध्य साधारण माध्य बन जाता है।

3.3.3 संयुक्त माध्य

यदि हमारे पास विभिन्न समूहों या प्रतिदर्शों के परिकलित माध्य हों तो कई बार हमारी रूचि समग्र माध्य ज्ञात करने में हो सकती है। इस प्रकार के समग्र माध्य को संयुक्त माध्य (pooled mean) कहते हैं।

मान लिया कि $m_1, m_2, ..., m_r$ समांतर (या गुणोत्तर या हरात्मक) माध्य है, जो कि क्रमशः $n_1, n_2, ..., n_r$ प्रेक्षणों से परिकलित किए गए हैं। तब

संयुक्त समांतर माध्य $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} m_i n_i,$ where $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$

संयुक्त गुणोत्तर $= \left(\prod_{i=1}^{r} m_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{n}}$ तथा

संयुक्त हरात्मक माध्य $= \frac{n}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{m_i}}$

यहाँ पर $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$ हैं।

संयुक्त तथा भारित माध्यों के व्यंजकों की समरूपता पर ध्यान दीजिए।

3.3.4 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप का चयन

हम पहले ही बता चुके है कि किन परिस्थितियों में एक माध्य (समांतर, गुणोत्तर, हरात्मक) बाकी दो माध्यों की तुलना में अधिक उपयुक्त होता है। लेकिन, यदि हमारे समंकों के विभिन्न वर्गों के बाएँ या दाएँ छोर खुले है अर्थात् 'c_1 तक' तथा / या 'c_{k-1} या अधिक' प्रकार के है, तों इन वर्गों के मध्य बिन्दु ज्ञात करना संभव नहीं होता। अतः ऐसी परिस्थिति में कोई माध्य परिकलित नहीं किया जा सकता। लेकिन, इन परिस्थितियों में, माध्यिका या बहुलक के परिकलन में कोई कठिनाई नहीं होती। इसके विपरीत यहाँ पर, माध्य की तरह, संयुक्त माध्यिका या संयुक्त बहुलक का परिकलन नहीं किया जा सकता। इनके परिकलन के लिए हमारे पास समग्र समंकों का समुच्चय होना आवश्यक है। इन कठिनाइयों का संबंध माप की उपयुक्तता से न होकर केवल परिकलन की कठिनाइयों से है।

समंकों का आलेखी निरूपण अधिक आकर्षक होता है। इसलिए इस परिस्थिति में माध्यिका या बहुलक अधिक उपयोगी रहते हैं क्योंकि आलेखों द्वारा, बिना परिकलन किए, इनके अशोधित (crude) मान ज्ञात किए जा सकते हैं। इसके अतिरिक्त, आलेखों में तुलना तथा संचारण (communication) के लिए भी माध्यिका तथा बहुलक सरल अवधारणाएँ हैं। लेकिन, इस प्रकार के आलेखों की तुलना बड़ी सावधानी से की जानी चाहिए, क्योंकि पुनरावृत प्रतिचयन (repeated sampling) में यह पाया गया है कि समांतर माध्य की तुलना में माध्यिका कम स्थायी होती है।

उन समंकों के लिए, जिनका बंटन प्रसामान्य (normal) बंटन जैसा होता है, जिसमें एक शिखर होता है तथा इस शिखर से यह दोनों ओर सममिततः (symmetrically) कम होता जाता है, हम माध्य, माध्यिका या बहुलक का उपयोग कर सकते है। इस प्रकार के बंटन में ये तीनों माप बराबर होते है।

यहाँ यह समझना आवश्यक है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के उपयुक्त माप का चयन ही समंकों के विश्लेषण का उद्देश्य नहीं है तथा इस दिशा में अभी बहुत कुछ करना बाकी है। उदाहरण के लिए, यह कहना की खाद्य सामग्री पर गृहों का औसत मासिक व्यय 348.66 रूपये है, पर्याप्त नहीं है क्योंकि इससे यह पता नहीं चलता कि क्या बहुत बड़ी संख्या में गृहों का औसत मासिक व्यय बहुत कम है या कुछ गृहों का मासिक व्यय बहुत अधिक है। इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर बाद में किये जाने वाले विश्लेषणों से प्राप्त होंगे।

3.4 शतमक

शतमक की धारणा का विवेचन सारणी 3.2 में दिए हुए गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय, समंकों के उपयोग द्वारा किया जाएगा। शतमक के उपयोग द्वारा दो प्रकार के प्रश्नों के उत्तर दिए जा सकते है। उदाहरण के लिए, कितने प्रतिशत गृहों का खाद्य सामग्री' पर औसत मासिक व्यय 350.80 रूपये तक है? या निम्न 50 प्रतिशत गृहों का खाद्य सामग्री पर अधिकतम औसत मासिक व्यय क्या है? सारणी 3.2 में माध्यिका परिकलन पर ध्यान दने से यह ज्ञात होता है कि पहले प्रश्न का उत्तर दूसरे प्रश्न में दी हुई संख्या है, अर्थात् निम्न 50 प्रतिशत गृहों का अधिकतम औसत मासिक व्यय 350.80 रूपये है। रूचि के अनुकूल हमारी एक अंतकीय (cut-off) बिन्दु के नीचे प्रतिशत ज्ञात करने की इच्छा हो सकती है; गरीबी रेखा के निर्धारण में हमारी रूचि इस रेखा के नीचे वाले प्रतिशत में हो सकती है। दूसरे प्रकार के प्रश्नों में हमारी रूचि जनसंख्या के निम्न 10 प्रतिशत या उच्च 5 प्रतिशत की स्थिति ज्ञात करना हो सकती है। इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर शतमक के उपयोग के द्वारा दिए जा सकते हैं।

3.4.1 शतमकः परिभाषा तथा परिकलन

किसी दिए हुए प्रतिशत v के लिए v वाँ शतमक P_v, अध्ययन के अंतर्गत चर का ऐसा मान होता है कि कम से कम v प्रतिशत प्रेक्षण P_v से कम या इसके बराबर रहें तथा कम से कम $(100-v)$ प्रतिशत प्रेक्षण P_v से अधिक या बराबर रहें। उदाहरण के लिए सारणी 3.1, गृहों के आकार का बंटन, में v के 78 से 89 तक किसी मान के लिए $P_v = 5$) है।

वर्गीकृत समंकों के लिए, शतमकों को, संचयी बारंबारता बंटन द्वारा अच्छी तरह से समझा जा सकता है। मान लिया, X से कम या बराबर प्रेक्षणों का अनुपात $F(X)$ है। इसी प्रकार कोई दिया हुआ मान X_0, बंटन का $100F(X_0)$ वाँ शतमक होगा। सारणी 3.2 में वर्ग परिसीमाओं के लिए $F(286.5) = 0.01$, $F(310.5) = 0.15$, $F(334.5) = 0.31$, $F(358.5) = 0.59$ तथा $F(382.5) = 0.85$ है। अतः $286.5 = P_{10}$, $310.5 = P_{15}$, $334.5 = P_{31}$, $358.5 = P_{59}$, तथा $382.5 = P_{85}$. होगा। यह ध्यान दीजिए कि 262.5 (पहले वर्ग की निम्न परिसीमा) से कम कोई संख्या इस शून्य–वाँ शतमक होगी तथा 406.5 (अंतिम वर्ग की उच्च परिसीमा) से अधिक 100वाँ शतमक होगी।

3.4.2 चतुर्थक तथा दशमक

उपयोग के अनुसार, कुछ विशेष शतमकों के विभिन्न नाम हो सकते हैं। प्रत्येक 25वाँ शतमक एक चतुर्थक कहलाता है तथा दसवाँा शतमक एक दशमक कहलाता है।

उदाहरण के लिए

25वाँ शतमक $= P_{25} = Q_1 =$ प्रथम चतुर्थक

50वाँ शतमक $= P_{50} = Q_2 =$ द्वितीय चतुर्थक

75वाँ शतमक $= P_{75} = Q_3 =$ तृतीय चतुर्थक

10वाँ शतमक $= P_{10} = d_1 =$ प्रथम दशमक

20वाँ शतमक $= P_{20} = d_{21} =$ द्वितीय दशमक इत्यादि, तथा

$P_{50} = Q_2 = d_5 =$ माध्यिका होती है।

Q_1 तथा Q_2 के सूत्र के सदृश होते हैं। इनको प्रत्यक्ष रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$Q_1 = l_{Q_1} + \frac{\frac{N}{4} - C}{f_{Q_1}} \times h, \quad \text{तथा}$$

$$Q_{31} = l_{Q_3} + \frac{\frac{3N}{4} - C}{f_{Q_3}} \times h,$$

जहाँ पर C, प्रथम (या तृतीय) चतुर्थक वर्ग से पहले वर्गों की संचयी बारंबारता को सूचित करता है तथा h इसका अंतराल है।

इसी प्रकार हम किसी भी विभाजन मान का सूत्र लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए, 40वें शतमक का सूत्र निम्नलिखित होगा।

$$P_{40} = l_{P_{40}} + \frac{\frac{40N}{100} - C}{f_{P_{40}}}$$

जब प्रतिशत के स्थान पर अनुपात प्रयोग किए जाएँ तो शतमक को भिन्नक (fractile) कहते हैं। उदाहरण के लिए को 0.3 भिन्नक कहते हैं।

जिस प्रकार केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप द्वारा बंटन के बारे में पूर्ण जानकारी प्राप्त नहीं हो सकती, उसी प्रकार बंटन के प्रकीर्णन की व्याख्या के लिए बहुत से शतमकों की आवश्यकता हो सकती है। इसीलिए प्रकीर्णन के सरल माप की आवश्यकता महसूस की गई। यही अगली इकाई में विवेचन का विषय भी है।

बोध प्रश्न 2

1) निम्नलिखित में पाँच वस्तुओं की कीमत (अनुपातों में) तथा संगत भार दिए हुए हैं। भारित समांतर तथा गुणोत्तर माध्य परिकलित कीजिए।

वस्तु	कीमत अनुपात	भार
1	2.20	30
2	1.85	25
3	1.80	22
4	2.05	13
5	1.75	10

....

....

....

....

....

....

....

2) पाँच राष्ट्रीयकृत बैंकों का उपार्जन (करोड़ रूपयों में) निम्नलिखित हैः

217.40, 330.5, 682.55, 1263,.59, 2249.63

इन उपार्जनों का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

3) पुरूषों की शादी के समय आयु का बंटन निम्नलिखित था।

आयु (वर्षों में)	पुरूषों की संख्या
18 – 20	5
20 – 22	18
22 – 24	28
24 – 26	37
26 – 28	24
28 – 30	22

शादी के समय पर (i) औसत आयु, (ii) बहुलकता आयु, (iii) माध्यिका आयु, (iv) तृतीय चतुर्थक, (v) छठा दशमक, तथा (vi) 19वाँ शतमक ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

4) एक कारखाने में एक मिस्त्री 15 दिनों में एक मशीन का निर्माण करता है, दूसरा मिस्त्री इसको 18 दिनों में, तीसरा मिस्त्री 30 दिनों में तथा चौथा मिस्त्री इसको 90 दिनों में निर्मित करता है। एक मशीन के निर्माण में औसत दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए। आप कौन–सा माध्य प्रयोग करेंगे तथा क्यों?

....

....

....

....

....

5) तीन विभिन्न मुद्रा राशियों पर 10 प्रतिशत, 12 प्रतिशत तथा 15 प्रतिशत प्रतिवर्ष की दर से, वार्षिक सरल ब्याज समान हैं। कुल निवेशित राशि पर औसत उपार्जन प्रतिशत दर क्या होगी?

....

....

....

....

....

3.5 प्रकीर्णन के माप

अब तक हमने विभिन्न केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों जैसे समान्तर माध्य, माध्यिका, बहुलक, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य आदि, का विवेचन किया था। लेकिन कई परिस्थितियों में यह माप समंकों के बंटन को प्रर्याप्त रूप में निरूपित करने में असमर्थ होते हैं। उदाहरण के लिए समंकों के निम्नलिखित समुच्चयों पर ध्यान दीजिएः

समुच्चय क : 2, 5, 17, 17, 44

समुच्चय ख : 17, 17, 17, 17, 17

समुच्चय ग : 13, 14, 17, 17, 24

इन सभी समुच्चयों के माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के संख्यात्मक मान समान अर्थात् 17 हैं, लेकिन ये भिन्न हैं। जबकि समुच्चय ख के सभी प्रेक्षण बराबर हैं, समुच्चय के के प्रेक्षण बहुत भिन्न है। अतः, समंकों की इस भिन्नता को मापने के लिए, हमें एक और माप की आवश्यकता है।

प्रकीर्णन (dispersion) शब्द का उपयोग समंकों के विषमांगता (Heterogeneity) की मात्रा को सूचित करने के लिए किया जाता है। विभिन्न प्रेक्षण आपस में किस सीमा तक भिन्न है, इसको बताने वाला यह मुख्य अभिलक्षण होता है।

यदि प्रेक्षणों के समुच्चय में सभी प्रेक्षण बराबर हैं (जैसा समुच्चय ख), तो इनका प्रकीर्णन शून्य होगा। प्रेक्षणों में भिन्नता जितनी अधिक होगी, प्रकीर्णन उतना ही अधिक होगा (इस प्रकार समुच्चय क में प्रकीर्णन समुच्चय ग से अधिक होना चाहिए)। प्रकीर्णन के माप का उद्देश्य व्यष्टि प्रेक्षणों में औसत भिन्नता की सीमा को संख्यात्मक रूप में अभिव्यक्त करना होता है।

प्रकीर्णन के कई माप होते हैं। इनका विवेचन निम्नलिखित हैः

3.5.1 परिसर

प्रकीर्णन के सभी मापों में परिसर (range) माप सरलतम होता है। प्रेक्षणों के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों के अंतर को परिसर कहते हैं। इस प्रकार समुच्चय क में दिये गए समंकों का परिसर $44-2 = 42$ है। इसी प्रकार समुच्चय ख में परिसर $17-17 = 0$ तथा समुच्चय ग में परिसर 11 है। अब हम वर्गीकृत समंकों के परिसर की जानकारी प्राप्त करते हैं। सारणी 3.2 (पहली इकाई में देखिए) में, परिसर $406.5-262.5 = 144$ रूपये है। यहाँ यह ध्यान दें कि वर्गीकृत समंकों के लिए प्रेक्षणों के अधिकतम या न्यूनतम मानों की पहचान करना संभव नहीं होता। इसलिए यहाँ बंटन की दो चरम परिसीमाओं के अंतर को परिसर कहते हैं।

यह बात अंतःदर्शी है कि यदि हम छोटे आकार का प्रतिदर्श लें तो केन्द्रिय प्रवृत्ति के कारण, प्रेक्षणों के अपने बहुलक के आसपास रहने की बड़ी संभावना होती है। यदि प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि होती है तो इसमें कम संभावनीय या चरममान भी सम्मिलित हो जाते हैं जिसका अर्थ यह होगा कि प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि के साथ परिसर आकार में वृद्धि हो जाती है। इसके साथ हम यह भी जानते है कि पुनरावृत प्रतिचयनों में प्रतिदर्शों का आकार सामान रहने पर भी परिसर में अत्यधिक परिवर्तन होता है। इन सभी बातों के बावजूद परिसर एक ऐसा माप है, जिसको सरलता से समझा तथा परिकलित किया जा सकता है।

3.5.2 अंतःचतुर्थक परिसर

क्योंकि परिसर केवल दो चरम मानों पर ही निर्भर होता है, इसलिए प्रकीर्णन के माप के रूप में यह बंटन की ठीक प्रकार से व्याख्या नहीं करता। समंकों के समुच्चय में एक मान, जो बहुत बड़ा या छोटा है तथा प्रेक्षणों के सामान्य प्रतिरूप से भिन्न है, परिसर को बड़ा कर देता है। उदाहरण के लिए समुच्चय क में, एक बहुत बड़े प्रेक्षण 44 के कारण, परिसर (44–2 = 42) बहुत बड़ा हो गया है। इस प्रकार के प्रेक्षणों से बचने के लिए, विशेषकर जब समंकों में केन्द्रीय प्रवृत्ति प्रबल हो, अंतःचतुर्थक परिसर, प्रकीर्णन का उपयोगी माप होता है। इसकी परिभाषा इस प्रकार की जाती हैः

अंतःचतुर्थक परिसर = $= Q_3 - Q_1 = P_{75} - P_{25}$.

अंतःचतुर्थक परिसर (iunter-quartile range) मध्यवर्ती 50 प्रतिशत प्रेक्षणों का परिसर होता है। यदि प्रेक्षण माध्यिका के आसपास सघन हैं, अर्थात् माध्यिका के निकट प्रबल बहुलक है तो परिसर के आधे की तुलना में अंतःचतुर्थक परिसर छोटा होगा। यदि समंक सपाट हैं, जिनमें कोई केन्द्रीय प्रवृत्ति विद्यमान नहीं है, तो यह माप बड़ा होगा तथा परिवार के आधे के निकट होगा।

सारणी 3.1 के समंकों के लिए $P_{75} = 4$ तथा $P_{25} = 3.$ है। अंतःचतुर्थक परिसर = 4–3 = 1 होगा। क्योंकि यहाँ परिसर 7 है, इसलिए गृहों के आकार में प्रबल केन्द्रीय प्रवृत्ति विद्यमान है।

सारणी 3.2, खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के बंटन के लिए P_{25} = 325.50 रूपये तथा P_{75} = 377.88 रूपये है। अतः अंतचुर्थक परिसर = 377.88–325.50 = 52.38 रूपये होगा। इसकी तुलना में परिसर में 146.00 रूपये है, जो कि अंतः परिसर का 2.79 गुणा है। यह इस बात का सूचक है कि खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के समंकों में केन्द्रीय प्रवृत्ति इतनी प्रबल नहीं है।

3.5.3 माध्य विचलन

जबकि परिसर दो चरम प्रेक्षणों पर निर्भर होता है, अंतःचतुर्थक परिसर मध्यवर्ती 50 प्रतिशत के दो चरम प्रेक्षणों पर आधारित होता है। अतः हम प्रत्येक माप में प्रेक्षणों के बंटन के बारे में कुछ न कह कर केवल प्रेक्षणों के न्यूनतम (या P_{25}) तथा अधिकतम (या P_{75}) के बीच प्रतिशत की बात करते हैं। समंकों के प्रकीर्णन का निर्धारण, अनेक संभावनाओं में से एक, प्रेक्षणों के किसी केन्द्रीय मान से विचलन के उपयोग द्वारा किया जा सकता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में अधिकतर माध्य का उपयोग किया जाता है, अतः हम प्रेक्षणों के विचलन प्रायः इसी माप से परिकलित करते हैं। प्रकीर्णन के माप को ज्ञात करने के लिए इन विचलनों को उपयुक्त प्रकार से संयुक्त किया जाता है।

माध्य विचलन (mean deviation), प्रत्येक प्रेक्षण पर आधारित विचलनों के समांतर माध्य के रूप में, प्रत्येक प्रेक्षण मान को समान भार (महत्व) देता है।

$X_1, X_2, ..., X_n$, प्रेक्षणों के लिए, यदि हम $\overline{X}$ से सामान्य अंतर को विचलन लें तो *i*वें प्रेक्षण के लिए विचलन $X_i - \overline{X}$ होगा, जहाँ पर $\overline{X}$ प्रेक्षणों का माध्य है। इन विचलनों का माध्य

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 = \overline{X} - \overline{X} = 0.$$ है।

क्योंकि विचलनों को सामान्य अंतर के रूप में लेने से कोई माप प्राप्त नहीं होता, इसलिए माध्य विचलन के लिए निरपेक्ष (absolute) अंतरों का उपयोग किया जाता है।

माध्य विचलन = $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \overline{X}\right|$, जहाँ पर दो रेखिकाएँ यह व्यक्त करती हैं कि इनके बीच दो संख्याओं के अंतर का चिह्न धनात्मक लिया जाना है। उदाहरण के लिए $|2-4| = 4$ लिया जायेगा, आदि।

असंतत तथा संतत बारंबारता समंकों के लिए, सूत्र को इस प्रकार लिखा जाता है:

माध्य विचलन = $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\left|X_i - \overline{X}\right|$, जहाँ पर $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, तथा X'_i पृथक् (distinct) प्रेक्षण हैं तथा असंतत प्रकार के बंटन के लिए X_i की बारंबारता f_i है। यदि बंटन संतत है तो X_i का मान *i*वें वर्ग का मध्यबिन्दु होता है तथा इस वर्ग की बारंबारता f_i होती है। इस प्रकार के माप की आवश्यकता निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट हो जाएगी।

दो संमक समुच्चयों के लिए परिकलित संक्षेपण मान निम्नलिखित हैः

	समंक समुच्चय I	समंक समुच्चय II
प्रेक्षणों की संख्या	7	7
P_{25}	7	7
माध्यिका $= P_{75}$	12	12
P_{75}	17	17
परिसर	20	20
अंतःचतुर्थक परिसर	10	10
माध्य	12	12

यहाँ पर केवल इन मापों के आधार पर, समंक समुच्चयों पर ध्यान दिए बिना, ऐसा प्रतीक होता है कि दो व्यक्तियों ने समंकों के एक ही समुच्चय से ये परिकलन किए हैं। लेकिन वास्तव में दोनों समंक समुच्चय निम्नलिखित है :

समंक समुच्चय I:	3	7	8	12	14	17	23
समंक समुच्चय II:	2	7	11	12	13	17	22

इसी प्रकार, हम समंकों के कई और समुच्चय बना सकते हैं जो आपस में बहुत भिन्न हों तथा उनके माप उपरोक्त मापों के मानों के बराबर हों। यह तुलना इस बात की सूचक है कि हमें और अतिरिक्त मापों की आवश्यकता है तथा माध्य विचलन उनमें से एक है। इसका यह अर्थ कदापि नहीं लेना चाहिए कि उपरोक्त मापों के साथ माध्य विचलन को सम्मिलित करने से समंक समुच्चय की पूर्ण व्याख्या की जाती है।

समंक समुच्चय I के लिए

माध्य विचलन =

$$\frac{1}{7}\left(|3-12|+|7-12|+|8-12|+|12-12|+|14-12|+|17-12|+|23-12|\right)$$

$$=\frac{9+5+4+0+2+5+11}{7}=\frac{36}{7}=51.4$$

समंक समुच्चय II के लिए

माध्य विचलन =

$$\frac{1}{7}\left(|2-12|+|7-12|+|11-12|+|12-12|+|13-12|+|17-12|+|22-12|\right)$$

$$=\frac{10+5+1+0+1+5+10}{7}=\frac{32}{7}4.57.$$

अतः समंक समुच्चय I में प्रेक्षणों का प्रकीर्णन, समंक समुच्चय II से अधिक है।

अब हम गृह आकार तथा गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के समंकों के माध्य विचलन का परिकलन करेंगे।

सारणी 3.1 में गृह आकार के लिए समंकों के लिए माध्य = $=\overline{X}=3.74.$ है।

माध्य विचलन $=\frac{1}{N}\sum_{I=1}^{N} f_i\left|X_i-\overline{X}\right|$

$$=\frac{1}{100}(3\,|\,1-3.74\,|+16\,|\,2-3.74\,|+...+2\,|\,8-3.74)=\frac{109.12}{100}=1.0912.$$

सारणी 3.2 में खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के बंटन के लिए माध्य $\overline{X}=\text{Rs.}348.66.$ रूपये है।

माध्य विचलन (रूपयों में)

$$=\frac{1}{100}\left(2\,|\,274.5-348.66\,|+...+15\,|\,394.5-348.66\,|\right)=\frac{2510.88}{100}=25.11$$

अभी तक हमने माध्य से माध्य विचलन पर विचार किया है। इसी प्रकार से हम माध्यिका या बहुलक से माध्य विचलन को परिभाषित कर सकते हैं।

3.5.4 प्रसरण तथा मानक विचलन

प्रसरण (variance) तथा मानक विचलन (standard deviation) प्रायः उपयोग किये जाने वाले प्रकीर्णन के माप है। प्रसरण का तो इतना अधिक उपयोग होता है कि बहुधा इसको ही प्रकीर्णन कहा जाता है। प्रसरण व्यष्टि विचलनों को उपयुक्त रूप से संयुक्त करने वाला ऐसा माप है जो माध्य विचलन की भांति प्रत्येक प्रेक्षण को समान भार (महत्व) देता है। प्रसरण में प्रेक्षण तथा माध्य के अंतर के वर्ग को व्यष्टि विचलन कहते हैं। क्योंकि निरपेक्ष अंतर की अपेक्षा अंतर के वर्ग का उपयोग (विशेषतः विधिवत् गणित में) अधिक सरल होता है, इसलिए इनका उपयोग बड़ा ही लोकप्रिय है। यह प्रेक्षणों के माध्य से अंतरों के वर्ग का माध्य होता है। अपरिष्कृत समंकों से प्रसरण का परिकलन निम्नलिखित सूत्र द्वारा किया जाता है:

प्रसरण $=\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

असंतत तथा संतत बारंबारता समंकों के लिए सूत्र इस प्रकार हैः

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \quad \text{जहाँ पर } N = \sum_{I=1}^{N} f_i \text{ है।}$$

यदि माप का पैमाना समान हो तो वे प्रेक्षण जिनका प्रसरण 2 (उदाहरणार्थ) है, अन्य प्रेक्षणों की तुलना में जिनका प्रसरण 2 से अधिक है, कम प्रकीर्ण (dispersed) कहलाते हैं। किसी बंटन की उसके केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप तथा प्रकीर्णन माप द्वारा व्याख्या करते हुए यह आवश्यक है कि दोनों माप एक ही इकाई में व्यक्त हों। माध्य तथा माध्य विचलन की एक ही इकाई होती है। लेकिन, क्योंकि प्रसरण के परिकलन में प्रत्येक विचलन का वर्ग किया जाता है, इसलिए प्रसरण की इकाई प्रेक्षण की इकाई का वर्ग होती है।

प्रसरण पर आधारित तथा इतना या इससे अधिक लोकप्रिय, प्रकीर्णन का एक अन्य माप होता है, जिसकी माप की इकाई प्रेक्षण की इकाई के समान होती है। इस माप का मानक विचलन कहते हैं। मानक विचलन, प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल होता है। इसको σ से सूचित किया जाता है।

सारणी 3.1 में गृहों के आकार के लिए मानक विचलन का परिकलन निम्नलिखित हैः

$$\sigma^2 = \frac{1}{100}\left[3(1-3.74)^2 + 16(2-3.74)^2 + \ldots + 2(8-3.74)^2\right] = \frac{199.24}{100} = 1.9924 \text{ तथा}$$

$$\sigma = 1.4115.$$

इसी प्रकार सारणी 3.2 में दिए हुए गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के समंकों के लिए प्रसरण (S^2) , वर्ग रूपयों में, इस प्रकार होता है।

$$\sigma^2 = \frac{1}{100}\left[2(274.50-348.66)^2 + \ldots + 15(394.5-348.66)^2\right] = \frac{95725.437}{100} = 957.25,$$

तथा मानक विचलन

$$\sigma = \text{Rs.}3094.$$

परिकलन की सुविधा के लिए, प्रसरण सूत्र को वैकल्पिक रूप में भी लिखा जा सकता है।

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \overline{X}^2$$

या

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} f_i X_i^2 - \overline{X}^2$$

इन सूत्रों द्वारा हम पाते है कि

प्रसरण = मानों के वर्ग का माध्य – माध्य का वर्ग

इन सूत्रों के उपयोग द्वारा आप सारणी 3.1 तथा 3.2 में दिए हुए समंकों के प्रसरण परिकलन कर सकते हैं तथा पूर्व प्राप्त परिणामों की जाँच कर सकते हैं।

जैसा माध्य के परिकलन के लिए किया गया था, X_i को $u_i = \frac{X_i - A}{h}$, में रूपांतरित करके प्रसरण के परिकलन को अत्यधिक सरल बनाया जा सकता है।

यह ध्यान दीजिए कि, क्योंकि

$u_i - \bar{u} = \frac{X_i - A}{h} - \frac{\bar{X} - A}{h} = \frac{X_i - \bar{X}}{h}$, है, इसलिए हम

$X_i - \bar{X} = h(u_i - \bar{u})$ लिख सकते हैं। अतः

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{h\left(u_i - \bar{u}\right)\right\}^2 = h^2\sigma_u^2$$

जहाँ पर X_i मानों का प्रसरण σ_x^2 है तथा मानों का प्रसरण है। क्योंकि u के मानों का आकार छोटा होता है, इसलिए इनका प्रसरण परिकलित सरल होता है। X के मानों का प्रसरण उपरोक्त सूत्र के उपयोग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

इस विधि द्वारा हम सारणी 4.2 में दिए हुए समंकों के प्रसरण परिकलन करते हैं।

यदि हम $u_i = \frac{X_i - 346.5}{24}$, लिखें तो u के मान –3, –2, –1, 0, 1, 2, होंगे जिनकी क्रमशः बारंबारताएँ 1, 14, 16, 28, 26, 15 हैं।

u के मानों का माध्य u =

$$\frac{-3\times1 - 2\times14 - 1\times16 + 0\times28 + 1\times26 + 2\times15}{100} = 0.09$$

u के मानों के वर्गों का माध्य ....

$$\frac{9\times1 + 4\times14 + 1\times16 + 0\times28 + 1\times26 + 4\times15}{100} = 1.67$$

इस प्रकार $\sigma_u^2 = 1.67 - (0.09)^2 = 1.6619$ तथा

$\sigma_X^2 = (24)^2.(1.6619) = 957.25.$ है।

हालांकि X से u में रूपांतर, परिकलन की सुविधा के लिए किया गया है, लेकिन एक महत्वपूर्ण बात सामने आयी है। यह ध्यान दें कि $\sigma_2^2 = 1.6619$ है तथा $\sigma_X^2 = 957.25$, है, जहाँ एक साधारण रैखिक रूपांतरण द्वारा X से u को प्राप्त किया गया है, अर्थात X के मूल एवं पैमाने में परिवर्तन द्वारा प्राप्त किया गया है। इस प्रकार के स्वाभाविक उदाहरण, वजन के लिए पौण्ड तथा किलोग्राम, द्रव्यों के आयतन के लिए गैलन तथा लीटर आदि हैं।

क्योंकि एक किलोग्राम = 2.2046 पौण्ड, इसलिए 5 किलोग्राम मानक विचलन, जब किलोग्राम में मापा जाय = 11.023 पौण्ड मानक विचलन, जब पौण्ड में मापा जाय। इसी प्रकार क्योंकि एक लीटर = 0.22 गैलन, इसलिए 5 लीटर मानक विचलन, जब लीटर में मापा जाय = 1.1 गैलन मानक विचलन, जब गैलन मापा जाय। अतः, जबकि प्रसरण तथा मानक विचलन द्वारा प्रेक्षणों के प्रसार को मापा जाना चाहिए, मापों की इकाई पर निर्भरता के कारण, इनसे कुछ अधिक प्राप्त नहीं किया जा सकता।

प्रेक्षणों के प्रसार के सन्दर्भ में केवल एक बहुत ही उपयोगी परिणाम, जो कि माध्य तथा मानक विचलन पर आधारित है तथा माप की इकाई पर निर्भर नहीं है, चेबाइचेव्य (Chebychev) द्वारा किया गया है।

बोध प्रश्न 3

1) प्रकीर्णन क्या होता है? इसको मापने की प्रचलित विधियाँ क्या हैं?

....

....

....

....

....

2) दस विद्यार्थियों की कक्षा में एक कमजोर विद्यार्थी के अंक अन्य विद्यार्थियों के औसत अंकों से 25 कम है। यह दर्शाइए कि इन सभी विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का मानक विचलन कम से कम 7.5 है। यदि यह मानक विचलन वास्तव में 12.0 हो तो, कमजोर विद्यार्थी को छोड़कर बाकी विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

3) निम्नलिखित समंक, एक दुकानदार द्वारा उत्तरोत्तर 15 दिनों में अर्जित लाभ दर्शाते हैः 116, 87, 91, 81, 98, 102, 97, 100, 105, 101, 115, 98, 102, 98, 93 समंकों का परिसर, माध्य से माध्य विचलन तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

4) निम्नलिखित समंकों से समान्तर माध्य, मानक विचलन तथा माध्य विचलन का परिकलन कीजिएः

अंक	4—5	6—7	8—9	10—11	12—13	14—15	योग
बारंबारता	4	10	20	15	8	3	60

....

....

....

....

....

5) एक विद्यार्थी द्वारा 100 प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 40 तथा 5.1 परिकलित किया गया। बाद में यह पता चला कि उसने गलती से एक प्रेक्षण को 40 के स्थान पर 50 लिया था। सही मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

3.6 प्रकीर्णन तथा मानक विचलन में संबंध

आप यह अध्ययन कर चुके हैं कि यदि समंकों के समुच्चय में सभी मान आपने माध्य के आस–पास हैं तो इनमें प्रकीर्णन या प्रसरण की मात्रा कम होती है। इसके विपरीत उन समंक समुच्चयों में, जिनमें कुछ मान अपने माध्य से अधिक दूरी पर स्थित हैं, प्रकीर्णन की मात्रा अधिक होती है। चेबाइचेव्य (Chebychev) के प्रमेय द्वारा एक उपयोगी नियम, जो प्रकीर्णन तथा मानक विचलन में संबंध की व्याख्या करता है, निम्नलिखित है।

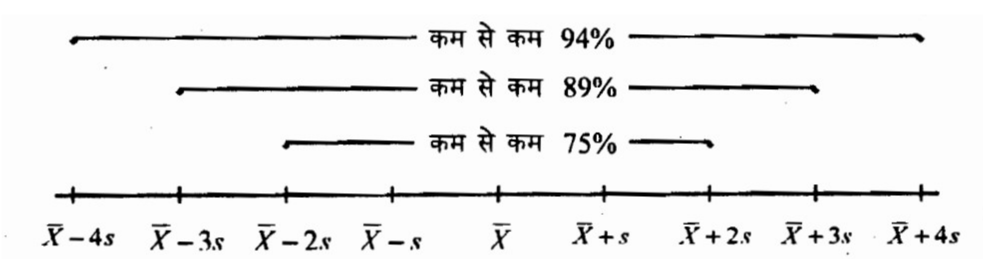
3.6.1 चेबाइचेव्य प्रमेय

किसी समंक समुच्चय तथा एक धनात्मक $k\,(>1)$ के लिए, माध्य से दोनों और k मानक तक आने वाले प्रेक्षणों का अनुपात अवश्य ही कम से कम $1-\frac{1}{k^2}$ होता है।

यह प्रमेय k के उन धनात्मक मानों जो एक से कम हैं के लिए उपयोगी नहीं है क्योंकि $1-\frac{1}{k^2}$ का अधिकतम मान शून्य हो सकता है। k के अन्य मानों के लिए न्यूनतम अनुपात सरलता से परिकलित किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, माध्य से 1.5 मानक विचलन तक प्रेक्षणों का न्यूनतम अनुपात अवश्यंभावी $1-\frac{1}{1.5^2}=0.556$ या 55.6 प्रतिशत होगा।

चेबाइचेव्य प्रमेय पर आधारित समंकों का प्रकीर्णन निम्नलिखित चित्र में दर्शाया गया है। सारणी 3.1 में दिए हुए गृह आकार के समंकों के लिए $\overline{X}=3.74$ तथा $s = 1.4115$ है। यदि हम k = लेते हैं तो हम यह कह सकते हैं कि कम से कम $\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times 100\right]=75\%$ गृहों का आकार $3.74\pm 2\times 1.4115,$ अर्थात् 0.917 तथा 6. 563 के बीच अवश्यम्भावी है।



चित्र 3.2

सारणी 3.2 में दिए हुए गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के बंटन के लिए, $\overline{X} = Rs.348.66$ रूपये और $s = Rs. 30.94$ रूपये है। अतः कम से कम 56 प्रतिशत गृहों (k = 1.5) का औसत मासिक व्यय 302.25 तथा 395.07 रूपये के बीच अवश्य होगा।

3.6.2 बंटन का आकार

बहुत सी परिस्थितियों में, प्रणालीमूलक (methodological) अध्ययनों के लिए माध्य तथा प्रकीर्णन के मापों द्वारा बंटन की पर्याप्त व्याख्या हो जाती है। फिर भी, व्यावहारिक परिस्थितियों में, विशेषकर आय, व्यय, आर्थिक परिसंपतियों जैसे आर्थिक चरों के लिए, जो धनात्मक होते हैं, बंटन की व्याख्या के लिए अन्य माप भी उपयोग किये जाते हैं। इस प्रकार के दो माप विचरण गुणांक तथा सान्द्रता अनुपात हैं। आर्थिक चरों के बंटन की असमानताओं के आवश्यक माप के रूप में इन मापों को अध्ययन हम अब करेंगे।

3.6.3 विचरण गुणांक

आइए, हम दो गाँवों में गृहों की आर्थिक स्थिति की तुलना करने का प्रयास करें। इन दोनों गाँवों में गृहों द्वारा मासिक कैलोरी (calorie) अंतर्ग्रहण की संक्षेपण संख्याएँ निम्नलिखित हैं :

	गाँव क	गाँव ख
गृहों की संख्या (n)	817	561
माध्य कैलोरी अंतर्ग्रहण(($\overline{X}$)	2417	2235
कैलोरी अंतर्ग्रहण का मानक विचलन (σ)	418	232

हमारा प्रश्न यह ज्ञात करना है कि कौन से गाँव में अंतर्ग्रहण की दृष्टि से असमानता अधिक है? गाँव 'ख' की तुलना में माध्य कैलोरी अंतर्ग्रहण गाँव 'क' में अधिक है, तथा इसका मानक विचलन तथा गृहों की संख्या भी अधिक है। वास्तव में गाँव 'क' में, गाँव 'ख' की तुलना में अधिक संख्या में गरीब गृह हो सकते हैं और इस प्रकार गाँव 'क' के गृहों में अधिक असमानताएँ हो सकती हैं। इन असमानताओं की मात्रा के माप के एक सूचकांक को विचरण गुणांक कहते हैं। इसकी परिभाषा इस प्रकार हैः

विचरण गुणांक $c.v = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$

चूंकि σ तथा $\overline{X}$ की इकाई समान होती है, इसलिए विचरण गुणांक माप की इकाई से मुक्त होता है तथा मापन इकाई के चयन से प्रभावित नहीं होता।

गाँव 'क' के लिए विचरण गुणांक $= \frac{418}{2417} \times 100 = 17.29$ तथा

गाँव 'ख' के लिए विचरण गुणांक $c.v. = \frac{232}{2235} \times 100 = 10.38.$ है।

क्योंकि गाँव 'क' का गुणांक, गाँव 'ख' के विचरण गुणांक की तुलना में अधिक है। गाँव 'क' में असमानता अधिक है।

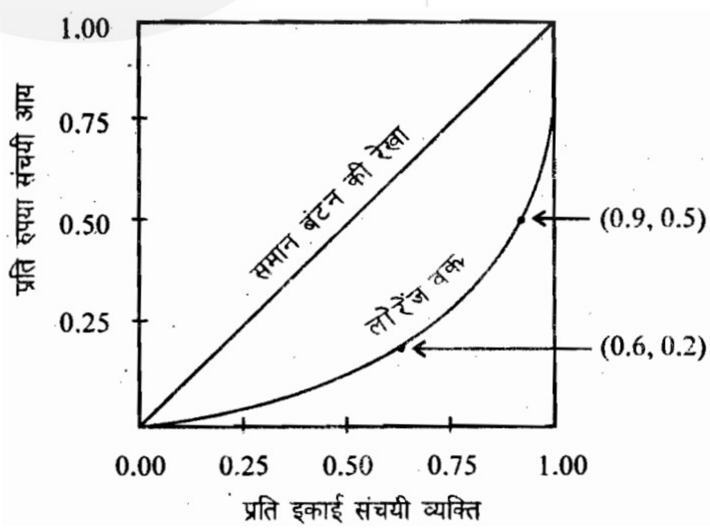
असमानताओं के परिमाण की तुलना के लिए हम $\frac{17.29 - 10.38}{10.38} \times 100 = 66.57$ परिकलित करते हैं। जिसका अर्थ यह है कि गाँव 'ख' की तुलना में, गाँव 'क' में असमानताएँ 65.57 प्रतिशत अधिक हैं।

3.6.4 सान्द्रता अनुपात

उपरोक्त अनुभाग में हमने प्रत्येक गाँव में असमानता की मात्रा का अध्ययन किये बिना, दो गाँवों में विद्यमान असमानताओं की तुलना की है। यदि किसी बंटन का दायाँ छोर लंबा हो तो यह इस बात को व्यक्त करता है कि बंटन में कुछ व्यक्तियों के पास अधिक हिस्सा है अर्थात् अधिक जनसंख्या का हिस्सा बहुत कम है। इसको समझने के लिए हम एक काल्पनिक अर्थव्यवस्था में आय के वितरण का अध्ययन करते हैं। मान लीजिए कि अर्थव्यवस्था में व्यक्तियों के तीन वर्ग – उच्च वर्ग, मध्य वर्ग तथा निम्न वर्ग हैं तथा वर्गों में जनसंख्या क्रमशः 10 प्रतिशत, 30 प्रतिशत तथा 60 प्रतिशत अंश है। मान लीजिए कि निम्न वर्ग को राष्ट्रीय आय का 20 प्रतिशत, मध्य वर्ग को 30 प्रतिशत तथा उच्च वर्ग को बाकी 50 प्रतिशत प्राप्त होता है। इन समंकों को प्रतिशत संचयी बारंबारता बंटन के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। अतः 60 प्रतिशत जनसंख्या के पास कुल आय का 20 प्रतिशत है, निम्न 90 प्रतिशत के पास कुल आय का (20+30) = 50 प्रतिशत है तथा स्पष्टतः 100 प्रतिशत जनसंख्या का आय का 100 प्रतिशत है। यदि हम एक आलेख पत्र के क्षैतिज अक्ष पर प्रतिशत संचयी बारंबारता तथा उर्ध्वाधर अक्ष पर प्रतिशत संचयी आय को लेकर (0, 0), (60, 20), (90, 50) तथा (100, 100) को अंकित करें तो इन बिन्दुओं को मिलाने वाली वक्र को सान्द्रता वक्र या लारेंज वक्र (Lorenz Curve) कहते हैं। बिन्दु (0, 0) तथा (100, 100) को मिलाने वाली सरल रेखा को समान बंटन की रेखा कहते हैं। यह रेखा इस बात को व्यक्त करती है कि आय में अंश का अनुपात तथा इसको प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का अनुपात बराबर है। समान बंटन की रेखा तथा सान्द्रता वक्र के बीच क्षेत्रफल को सान्द्रता का क्षेत्रफल (area of concentration) कहते हैं। यह सान्द्रता की कोटि का सूचक होता है। जितना क्षेत्रफल अधिक होगा उतनी ही सान्द्रता अधिक होगी।

असमानता का गुणांक

हम ऊपर दिये गये बिन्दुओं के निर्देशांक, प्रतिशत के रूप में न लेकर प्रति इकाई के रूप में ले लेते है। अतः ये निर्देशांक, (0, 0), (0.60, 0.20), (0.90, 0.50) तथा (1.00, 1.00) के रूप में लिखे जाते हैं। तत्पश्चात् आय बंटन असमानता गुणांक की सान्द्रता क्षेत्रफल / त्रिभुज का क्षेत्रफल, के रूप में परिभाषित किया जाता है। क्योंकि त्रिभुज का क्षेत्रफल 0.5 (क्योंकि $\frac{1}{2}\times 1\times 1 = 0.5$), है, तो विभिन्न बिन्दुओं के निर्देशांक प्रति इकाई लेने पर, असमानता गुणांक, सान्द्रता क्षेत्रफल का दुगुना होता है।



चित्र 3.3 लॉरिंज वक्र

बोध प्रश्न 4

1) स्विटज़रलैंड में 1968 से 1980 तक अशोधित जन्म दर प्रति 1000 व्यक्तियों की संख्याएँ निम्नलिखित हैं:

अशोधित जन्म दर (X): 17.1, 16.5, 15.8, 15.2, 14.3, 13.6, 12.9, 12.3, 11.7, 11.5, 11.3, 11.3, 11.6.

प्रसरण, मानक विचलन तथा विचरण गुणांक परिकलित कीजिए।

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित सारणी में महिला शिक्षकों की आयु (जैसा कि अभिलेखों में प्रकाशित है), का बंटन हुआ हैं:

आयु वर्ग (वर्षों में)	महिला शिक्षकों की संख्या
15 – 19	3
20 – 24	13
25 – 29	21
30 – 34	15
35 – 39	5
40 – 44	4
45 – 49	2

i) विचरण गुणांक, तथा

ii) 26 से 33 वर्ष की आयु के बीच शिक्षकों की संख्या का परिकलन कीजिए।

....

....

....

....

....

....

3.7 सार संक्षेप

इस इकाई में आपने प्रकीर्णन के मापों के बारे में अध्ययन किया है। प्रकीर्णन के अति महत्वपूर्ण माप प्रसरण, मानक विचलन तथा सान्द्रता अनुपात हैं। आपने दोनों प्रकार के समंकों (वर्गीकृत एवं अवर्गीकृत) के लिए इन मापों का परिकलन करना भी सीखा है। जब दो बंटनों के माध्य भिन्न हों या इनकी मापन इकाइयाँ भिन्न हों तो, इनके प्रकीर्णन की तुलना के लिए विचरण गुणांक का उपयोग किया जाता है।

3.8 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) 5.1, 5, 5

2) 108.48, 108.41, 111.42

बोध प्रश्न 2

1) 1.96 रूपये; 1.95 रूपये

2) 6.74.31 करोड़ रूपये

3) (i) 25.83 वर्ष (ii) 24.82 वर्ष (iii) 24.86 वर्ष
(iv) 27.30 वर्ष (v) 25.59 वर्ष (vi) 28.79 वर्ष

4) समांतर माध्य, 38.25 दिन

5) हरात्मक माध्य 12 प्रतिशत

बोध प्रश्न 3

1) आप स्वयं कीजिए

2) 9.9

3) 35, 6.46, 8.85

4) 9.23, 2.49, 2.03

5) 5.0

बोध प्रश्न 4

1) 4.085, 2.021, 15.004 प्रतिशत

2) 23.47 प्रतिशत, 25 (पूर्णांकित संख्या)

इकाई 4 विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व के माप*

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आपः

- सम्मित तथा विषम बंटनों में अंतर कर सकेंगे;
- एक बंटन में विषमता के माप के लिए विभिन्न गुणांकों का परिकलन कर सकेंगे;
- चपटे, सामान्य तथा नुकीले शीर्ष वाले बंटनों में भेद कर सकेंगे; और
- प्रथुशीर्षत्व के गुणांक का परिकलन कर सकेंगे।

4.1 विषय प्रवेश

इस इकाई में आप विभिन्न प्रकार के आकार वाले बंटनों में अंतर करने की विधियों का अध्ययन करेंगे। यह एक चर समंकों के संक्षेपण संबंधी अंतिम इकाई है। यह इकाई आपको विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व की अवधारणाओं से परिचित करायेगी। क्योंकि केन्द्रीय प्रवृत्ति तथा प्रकीर्णन के मापों द्वारा एक बंटन की पूर्ण व्याख्या नहीं हो पाती, इसलिए विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व मापों के अध्ययन की आवश्यकता होती है। ऐसे बंटन, जिनकी प्रकृति तथा बनावट बिलकुल भिन्न हो तथा केन्द्रीय तथा प्रकीर्णन के माप समान हों, यह संभव है। अतः केन्द्रीय प्रवृत्ति तथा प्रकीर्णन के मापों के अतिरिक्त कुछ और मापों की आवश्यकता पड़ती है। परिणामस्वरूपः इस इकाई में हम दो मापों, अर्थात् विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व का अध्ययन करेंगे।

4.2 विषमता की अवधारणा

किसी बंटन में सम्मितता की कमी विषमता कहलाती हैं। एक सम्मित बंटन में माध्य, माध्यिका तथा बहुलक आपस में बराबर होते हैं, तथा माध्य भुजमान (ordinate) बंटन को दो भागों में विभाजित करता है,जहां एक भाग दूसरे का दर्पण प्रतिरूप होता है चित्र (4.1) देखें। यदि इस प्रकार के बंटन में कुछ बड़े (और छोटे) आकार के प्रेक्षण सम्मिलित किये जाएँ, यदि इसका दायाँ (बायाँ) सिरा लंबा हो जाता है। तो इस प्रकार के प्रेक्षणों को चरम

---

* इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 6 आर.एस. भारद्वाज द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।

प्रेक्षण कहते हैं। बंटन के दाईं ओर चरम प्रेक्षणों की विद्यमानता इसे धनात्मक विषम्मित बना देती है तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन मापोंमें भिन्नता उत्पन्न हो जाती है।

धनात्मक विषमता बंटन में

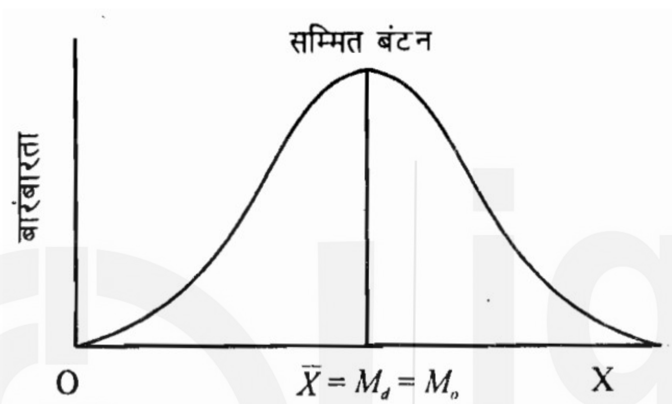
माध्य > माध्यिका > बहुलक होता है।

इसके विपरीत बंटन के बाईं ओर चरम प्रेक्षणों की विद्यमानता इसे

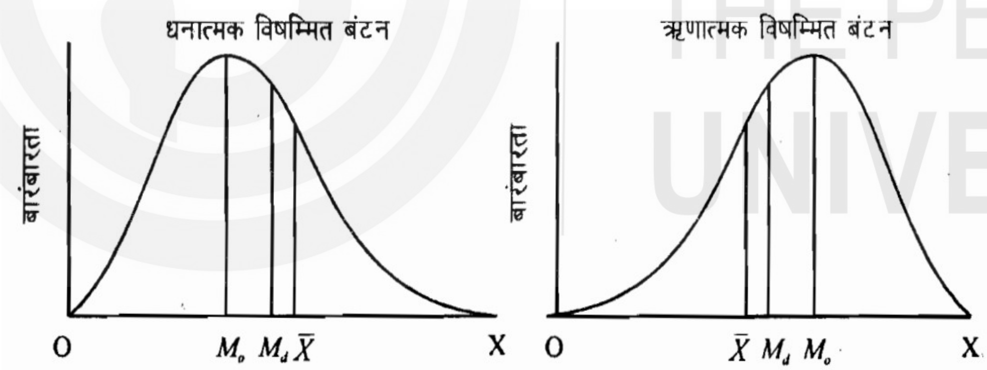
ऋणात्मक विषम्मित बंटन बना देती है जहॉ

माध्य > माध्यिका > बहुलक होता है।

धनात्मक विषम्मित तथा ऋणात्मक विषम्मित बंटनों को चित्र 4.2 में दर्शाया गया है।



चित्र 4.1



चित्र 4.2

विषमता की दिशा तथा परिमाण का माप विभिन्न प्रकार से किया जा सकता है। इस इकाई में हम विषमता के चार मापों का विवेचन करेंगे।

4.2.1 कार्ल पीयरसन का विषमता गुणांक

चित्र 4.2 में आपने देखा कि एक विषम्मित बंटन में माध्य, माध्यिका तथा बहुलक बराबर नहीं होते। कार्ल पीयरसन का विषमता गुणांक, एक विषम्मित बंटन, के माध्य के बहुलक से विचलन पर आधारित है।

क्योंकि एक सम्मित बंटन में माध्य = बहुलक होता है। इसलिए (माध्य − बहुलक) को विषमता का निरपेक्ष माप माना जा सकता है। एक बंटन की विषमता का निरपेक्ष माप, मापन इकाई पर निर्भर होता है।

उदाहरण के लिए माध्य = 2.45 मीटर तथा बहुलक = 2.14 मीटर है, तो विषमता का निरपेक्ष माप (2.45 − 2.14) = 0.31 मीटर होगा। इसी बंटन के लिए यदि हम मापन इकाई संटीमीटर ले लें, तो विषमता का निरपेक्ष माप 245 − 214 = 31 सेंटीमीटर होगा। इस समस्या के समाधान के लिए पीयरसन द्वारा विषमता का तुलनात्मक माप परिभाषित किया गया।

एक तुलनात्मक माप मापन की इकाई से स्वंतत्र होता है। तुलनात्मक माप को गुणांक भी कहते है। कार्ल पीयरसन का विषमता गुणाकS_k, निम्नलिखित है :

$$S_k = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\text{मानक विचलन}}$$

S_k का चिह्न तथा आकार, क्रमशः विषमता की दिशा तथा परिमाण की जानकारी देता हैं।

यदि $S_k > 0$ है, तो बंटन धनात्मक विषम्मित होता है।

तथा यदि $S_k < 0$ है, तो बंटन ऋणात्मक विषम्मित होता है।

उपरोक्त विवेचन से पता चलता कि S_k का मान बहुलक पर आधारित है। यदि किसी बंटन में बहुलक परिभाषित नहीं है तो S_k का मान ज्ञान करना संभव नहीं है। इस परिस्थिति में हम माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के बीच प्रयोगाश्रित संबंध के प्रयोग द्वारा S_k का मान ज्ञात कर सकते हैं। प्रयोगश्रित संबंध के अनुसार, एक मामूली से विषम्मित बंटन में

माध्य − बहुलक ≈ 3 (माध्य − माध्यिका) होता है।

अतः, माध्यिका के प्रयोग करने पर कार्ल पीयरसन का विषमता गुणांक निम्नलिखित हैः

$$S_k = \frac{3\left(\text{माध्य} - \text{माध्यिका}\right)}{\text{मानक विचलन}}.$$

उदाहरण 4.1:

निम्नलिखित समंकों से कार्ल पीयरसन का विषमता गुणांक परिकलित कीजिएः

सारणी 4.1

ऊँचाई (इंचों में)	व्यक्तियों की संख्या
58	10
59	18
60	30
61	42
62	35
63	28
64	16
65	8

माध्य तथा मानक विचलन के परिकलन की सारणी

ऊँचाई (X)	$u=X-61$	व्यक्तियों की संख्या (f)	fu	fu^2
58	−3	10	−30	90
59	−2	18	−36	72
60	−1	30	−30	30
61	0	42	0	0
62	1	35	35	35
63	2	28	56	112
64	3	16	48	144
65	4	8	32	128
योग		187	75	611

माध्य $= 61 + \frac{75}{187} = 61.4$

मानक विचलन $= \sqrt{\frac{611}{187} - \left(\frac{75}{187}\right)^2} = 1.76$

बहुलक ज्ञात करने के लिए हम ध्यान देते हैं कि ऊँचाई एक संतत चर है। ऊँचाई के माप यह मान कर (उदाहरण के लिए) किए गए है कि वह माप जो 58 से अधिक लेकिन 58.5 से कम हैं, को 58 इंच तथा वह माप जो 58.5 से अधिक लेकिन 59 से कम है, को 59 इंच लिया जाना है। अतः दिए हुए समंकों को इस प्रकार लिखते हैं।

ऊँचाई (इंचों में)	व्यक्तियों की संख्या
57.5 - 58.5	10
58.5 - 59.5	18
59.5 - 60.5	30
60.5 - 61.5	42
61.5 - 62.5	35
62.5 - 63.5	28
63.5 - 64.5	16
64.5 - 65.5	8

निरीक्षण द्वारा, बहुलक वर्ग 60.5 − 61.5 है।

अतः $l_m = 60.5, \Delta_1 = 42 - 30 = 12, \Delta_2 = 42 - 35 = 7$ and $h = 1$

$\therefore$ बहुलक $= 60.5 + \frac{12}{12+7} \times 1 = 61.13$

अतः कार्ल पीयरसन का विषमता गणांक $S_k = \frac{61.4-61.13}{1.76} = 0.153.$

इस प्रकार, बंटन थोड़ा सा धनात्मक विषम्ति है।

4.2.2 बाउले का विषमता माप

यह माप चतुर्थकों पर आधारित है। एक सम्मित बंटन में Q_1तथा Q_2, माध्य से समान दूरी पर होतें हैं। इस प्रकार $(Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1)$ को विषमता का निरपेक्ष माप माना जा सकता है।

विषमता का तुलनात्मक माप, जिसे बाउले (Bowley) का विषमता गुणांक (S_Q) भी कहते हैं, निम्नलिखित हैः

$$S_Q = \frac{(Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1)}{(Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1)}$$

$$= \frac{Q_3 - 2M_d + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

सारणी 4.1 में दिए हुए ऊँचाई समंकों से बाउले गुणांक का परिकलन निम्नलिखित है।

ऊँचाई (इंचों में)	व्यक्तियों की संख्या (*f*)	संचयी बारंबारता
57.5 - 58.5	10	10
58.5 - 59.5	18	28
59.5 - 60.5	30	58
60.5 - 61.5	42	100
61.5 - 62.5	35	135
62.5 - 63.5	28	163
63.5 - 64.5	16	179
64.5 - 65.5	8	187

$\boldsymbol{Q_1}$**का परिकलनः**

क्योंकि $\frac{N}{4} = 46.75$, प्रथम चतुर्थक वर्ग 59.5 − 60.5 होगा। इसलिए

$$l_{Q_1} = 59.5, C = 28,\ f_{Q_1} = 30 \text{ and } h = 1.$$

$$\therefore Q_1 = 59.59.5 + \frac{46.75 - 28}{30} \times 1 = 60.125.$$

माध्यिका $M_d(Q_2)$ का परिकलन :

क्योंकि $\frac{N}{2} = 93.5$, माध्यिका वर्ग 60.5 − 61.5 होगा। इसलिए

$$l_m = 60.5,\ \ C = 58,\ f_m = 42 \text{ and } h = 1.$$

$$\therefore M_d = 60.5 + \frac{93 - 58}{42} \times 1 = 61.345.$$

Q_3 का परिकलन :

क्योंकि $\frac{3N}{4} = 140.25$, तृतीय चतुर्थक वर्ग 62.5 − 63.5 होगा। इसलिए

$$l_{Q_3} = 62.5, \quad C = 135, \ f_{Q_3} = 28 \text{ and } \ h = 1.$$

$$\therefore Q_3 = 62.5 + \frac{140.25 - 135}{28} \times 1 = 62.688.$$

अतः बाउले गुणांक $S_Q = \frac{62.88 - 2\times61.345 + 60.125}{62.688 - 60.125} = 0.048.$

4.2.3 कैली का विषमता माप

क्योंकि बाउले के विषमता गुणांक में बंटन के दोनों सिरों पर 25% प्रेक्षण छूट जाते हैं, यह माप मध्य 50% प्रेक्षणों पर आधारित होता है। बाउले गुणांक के सुधार के रूप में, कैली द्वारा P_{10} तथा P_{90} पर आधारित एक माप का सुझाव दिया गया, जिससे बंटन के प्रत्येक सिरे पर केवल 10% प्रेक्षण ही छूट सकें।

कैली (Kelly) का विषमता गुणांकS_p,निम्नलिखित है:

$$S_p = \frac{(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10})}{(P_{90} - P_{50}) + (P_{50} - P_{10})}$$

$$= \frac{P_{90} - 2.P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$$

ध्यान दीजिए कि $P_{50} = M_d$ (माध्यिका) होता है।

सारणी 4.1 में दिए गए समंकों के लिए S_p का परिकलन निम्नलिखित है:

P_{10} का परिकलन:

क्योंकि $\frac{10N}{100} = \frac{10\times187}{100} = 18.7$, 10वाँ शतमक वर्ग 58.5 − 59.5 में होगा। इसलिए

$$l_{P_{10}} = 58.5, \quad C = 10, \ f_{P_{10}} = 18 \text{ and } \ h = 1.$$

$$\therefore P_{10} = 58.5 + \frac{1807 - 10}{18} \times 1 = 58.983$$

P_{90} का परिकलन:

क्योंकि $\frac{90N}{100} = \frac{90\times187}{100} = 168.3$, 90 वाँ शतमक वर्ग 63.5 − 64.5 में होगा। इसलिए

$$l_{P_{90}} = 63.5, \quad C = 163, \ f_{P_{90}} = 16 \text{ and } \ h = 1.$$

$$\therefore P_{90} = 63.5 + \frac{168.5 - 163}{16} \times 1 = 63.831$$

अतः कैली का गुणांक $S_P = \frac{63.831 - 2\times61.345 + \quad .983}{63.688 - \quad .983} = 0.026.$

यहाँ यह बताना आवश्यक है कि चाहे गुणांक S_k, S_Q तथा S_P तुलनीय नहीं हैं, लेकिन विषमता की अनुपस्थिति में प्रत्येक का मान शून्य होता है।

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित समंकों द्वारा कार्ल पीयरसन का विषमता गुणांक परिकलित कीजिएः

प्रतिदिन व्यय (रूपयों में)	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
परिवारों की संख्या	13	25	27	19	16

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित संख्याएँ, 285 कम्पनियों के पूँजी आकार से संबंधित हैंः

पूँजी (लाख रूपये में)	1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	योग
कम्पनियों की संख्या	20	27	29	38	48	53	70	285

बाउले तथा कैली के विषमता गुणांकों का परिकलन कीजिए तथा परिणामों को समझाइए।

....

....

....

....

....

3) एक बारंबारता बंटन के लिए निम्नलिखित माप परिकलित किए गए :

माध्य = 50,

विचरण गुणांक = 35%

कार्ल पियरसन का विषमता गुणांक = –0.25

....

....

....

....

....

4.3 परिघात

एक बंटन का μ_r, द्वारा सूचित rवाँ परिघात (moment) निम्नलिखित होता है।

$\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^r$ जहाँ पर $r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ है।

इस प्रकार माध्य से r वाँ परिघात, प्रेक्षणों के उनके माध्य से विचलनों कि r वीं घात का माध्य होता है। विस्तृत रूप में

यदि $r = 0$, तब $\mu_0 = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^0 = 1,$

यदि $r = 1$, तब $\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^1 = 0,$

यदि $r = 2$, तब $\mu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2,$

यदि $r = 3$, तब $\mu_3 = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^3$ इत्यादि।

इन परिघातों को *केन्द्रीय परिघात* भी कहते हैं।

इसके अलावा हम किसी मनमाने माध्य से अपरिष्कृत परिघातों को भी परिभाषित कर सकते हैं। मान लिया कि A एक मनमाना माध्य है, तक A से r वाँ परिघात इस प्रकार है।

$$\mu_r' = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - A)^r, \qquad r = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

जब $A = O$ हो तो विभिन्न परिघात मूल बिन्दु से होते हैं।

परिघात का आधारित विषमता माप

यह माप इस विशेषता पर आधारित है कि एक सम्मित बंटन में, सभी विषम क्रमित केन्द्रीय परिघात शून्य होते हैं।

क्योंकि प्रत्येक बंटन के लिए $\mu_0 = 0,$ होता है, इसलिए निम्नतम क्रमिक केन्द्रीय परिघात जोकि विषमता का निरपेक्ष माप हो सकता है, μ_3 लिया जाता है।

इसके अलावा विषमता गुणांक, जो कि मापन इकाई से स्वतंत्र होता है, α_3 द्वारा सूचित किया जाता है।

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \pm\sqrt{\beta_1 =} \gamma_1$$

जहाँ β_1 तथा γ_1 को क्रमशः *प्रथम बीटा* तथा *प्रथम गामा* गुणांक कहते हैं। जैसा कि आप अगले अनुभाग में पढ़ेंगे, β_2 प्रथुशीर्षत्व का माप होता है।

प्रायः विषमता को $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$, के रूप में मापा जाता है, जहाँ पर विषमता का चिह्न μ_3 के चिह्नद्वारा निर्धारित होता है।

उदाहरण 4.2 :

निम्नलिखित समंकों द्वारा परिघात विषमता गुणांक (β_1) का परिकलन कीजिए।

प्राप्त अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
बारंबारता	6	12	22	24	16	12	8

माध्य, मानक विचलन तथा μ_3 के परिकलन की सारणी

वर्ग अंतराल	बारंबारता (f)	मध्य मान (x)	$u = \frac{X-35}{10}$	fu	fu^2	fu^3
0—10	6	5	−3	−18	54	−162
10—20	12	15	−2	−24	48	−96
20—30	22	25	−1	−22	22	−22
30—40	24	35	0	0	0	0
40—50	16	45	1	16	16	16
50—60	12	55	2	24	48	96
60—70	8	65	3	24	72	216
योग	100			0	260	48

क्योंकि $\sum fu = 0$, है, इसलिए बंटन का माध्य 35 होगा।

इसके अतिरिक्त द्वितीय परिघात, μ_2 प्रसरण (σ^2)के बराबर, तथा इसका घनात्मक वर्गमूल मानक विचलन (σ) के बराबर होगा।

$\mu_2 = \frac{260}{100} \times 100 = 260$, तथा

$\text{s.d. } \sigma = \sqrt{260} = 16.12.$

Also $\mu_3 = \frac{48}{100} \times 1000 = 480.$

अतः, $\beta_1 = \frac{(480)^2}{(260)^3} = 0.01$है।

क्योंकि μ_3 का चिह्न धनात्मक तथा β_1 का मान छोटा है, दिया हुआ बंटन थोड़ा सा धनात्मक विषम्मित है।

ऊपर दिए गये उदाहरण में यदि बंटन का माध्य 35 की तरह सुविधाजनक संख्या नहीं है तो विभिन्न परिघातों का परिकलन कार्य कठिन हो सकता है। विकल्पतः पहले हम अपरिष्कृत परिघातों का परिकलन करके उनको केन्द्रीय परिघातों में परिवर्तित कर सकते हैं।

अपरिष्कृत परिघातों का केन्द्रीय परिघातों में परिवर्तन

केन्द्रीय परिघात को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^r = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i[(X_i - A) - (\bar{X} - A)]^r$$

$= \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i[(X_i - A) - \mu_1']^r$ क्योंकि ($\mu_1' == \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - A) = \bar{X} - A)$

बाइनोमियल प्रमेय द्वारा विस्तार करने पर

$$= \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i\left[r_{C_0}(X_i - A)^r \mu_1'^{\,0} - r_{C_1}(X_i - A)^{r-1}\mu_1' + r_{C_2}(X_i - A)^{r-2}\mu_1'^2 - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - A)^r - r_{C_1}\frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - A)^{r-1}\mu_1' + r_{C_2}$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{n} f_i(X_i - A)^r \mu_1'^2 - \cdots$$

उपरोक्त को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$\mu_r = \mu_2' - r_{C_1}\mu_{r-1}'\mu_2' + r_{C_2}\mu_{r-2}'\mu_1'^2 - r_{C_3}r_{C_2}\mu_{r-3}'\mu_1'^3 + \cdots$$

r का मान 2, 3, 4 इत्यादि लेने पर

$$\mu_2 = \mu_2' - 2_{C_1}\mu_r'^2 + 2_{C_2}\mu_0'\mu_1'^2 = \mu_2' - \mu_1'^2(\mu_0' = 1)$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_0' + 3\mu_3' - \mu_2'^3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 4\mu_1'^4 + \mu_1'^4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$$

उदाहरण 6.3:

निम्नलिखित समंकों के लिए माध्य के अंतर्गत पहले चार परिघातों का परिकलन कीजिए:

वर्ग अंतराल	0—10	10—20	20—30	30—40
बारंबारता (f)	1	3	4	2

अपरिष्कृत परिघातों के परिकलन की सारणी (A = 25 लिया गया है)

वर्ग अंतराल	f	मध्य मान (X)	$u = \frac{X-25}{10}$	fu	fu^2	fu^3	fu^4
0—10	1	5	−2	−2	4	−8	16
10—20	3	15	−1	−3	3	−3	3
20—30	4	25	0	0	0	0	0
30—40	2	35	1	2	2	2	2
योग	10			−3	9	−9	21

उपरोक्त सारणी द्वारा

$$\mu_1' = \frac{-3 \times 10}{10} = -3,$$

$$\mu_2' = \frac{9 \times 10^2}{10} = 90,$$

$$\mu_3' = \frac{-9 \times 10^3}{10} = -900 \text{ and}$$

$$\mu_4' = \frac{21 \times 10^4}{10} = 2100$$

माध्य से परिघात

$$\mu_1 = 0,$$

$$\mu_2 = 90 - 9 = 81,$$

$$\mu_3 = -900 - 3 \times 90 \times (-3) + 2 \times (-3)^3 = -900 + 810 - 54 = -144 \text{ and}$$

$$\mu_4 = 21000 - 4 \times (-900) \times (-3) + 6 \times 90 \times (-3)^3 - 3 \times (-3)^4$$

$$= 21000 - 10800 + 4860 - 243 = 14817.$$

बोध प्रश्न 2

1) निम्नलिखित बंटन के लिए माध्य के अंतर्गत पहली चार परिघातों का परिकलन कीजिए। β_1के परिकलन द्वारा विषमता की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।

अंक	0—20	20—40	40—60	60—80	80—100
बारंबारता	8	28	35	17	12

....

....

....

....

2) एक बंटन के लिए मान 3 के अंतर्गत, पहले तीन परिघात क्रमशः 2, 10 तथा 30 है। $\bar{X}, \mu_2, \mu_3$ तथा β_1का परिकलन कीजिए। विषमता की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।

....

....

....

....

4.4 प्रथुशीर्षत्व की अवधारणा

बंटन के आकार के एकअन्य माप प्रथुशीर्षत्व भी हैं। जहाँ विषमता द्वारा बंटन की बारंबारता वक्र में सम्मितता की कमी को मापते है, वही प्रथुशीर्षत्व द्वारा बारंबारता वक्र के शिखर के नुकीलेपन को मापते है। विभिन्न बारंबारता वक्रों को, उनके शिखर के आकार के आधार पर, तीन भागों में बांटा जा सकता है। इन आकारों को नुकीला शिखर (Leptokurtic), सामान्य शिखर (Mesokurtic) तथा चपटा शिखर (Platykurtic) कहते हैं, जैसा चित्र 4.3 में दर्शाया गया है।

प्रथुशीर्षत्व का माप

प्रथुशीर्षत्व को कार्ल पीयरसन के गुणांक $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$, द्वारा मापा जाता है। सामान्य शिखर वक्र के लिए β_2का मान 3 होता है।

यदि $\beta_2 > 3$ हो तो वक्र का शिखर सामान्य से अधिक नुकीला होता है। इसी प्रकार $\beta_2 < 3$ होने पर वक्र को चपटा शिखर वक्र कहते हैं।

उदाहरण 4.4 :

एक बंटन के पहले चार केन्द्रीय परिघात क्रमशः 0, 2.5, 0.7 तथा 18.75 हैं। बंटन की विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व की जाँच कीजिए।

विषमता की जाँच के लिए हम β_1का परिकलन करते हैं।

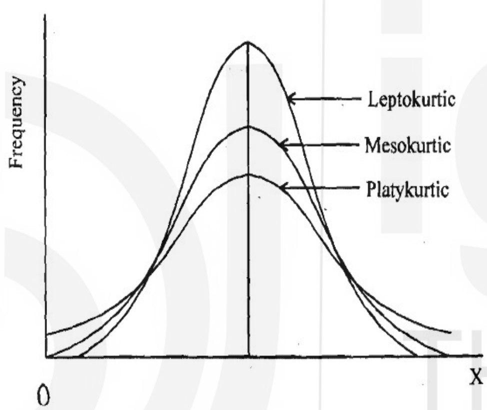
$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(0.7)^2}{(2.5)^3} = 0.031$$

क्योंकि $\mu_3 > 0$ तथा β_1 का मान छोटा है, अतः बंटन थोड़ा सा धनात्मक विषम्मित है।

प्रथुशीर्षत्व को β_2 गुणांक द्वारा मापा जाता है।

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{18.75}{(2.5)^2} = 3.0.$$

अतः बारंबारता वक्र एक सामान्य शिखर वक्र है।



चित्र 4.3

बोध प्रश्न 3

1) निम्नलिखित समंकों द्वारा प्रथम चार केन्द्रीय परिघातों का परिकलन कीजिए। दोनों बीटा (β_2) गुणांक भी ज्ञात कीजिए।

मान	5	10	15	20	25	30	35
बारंबारता	8	15	20	32	23	17	5

....

....

....

....

....

2) एक बंटन के पहले चार परिघात क्रमशः 1, 4, 10 तथा 46 हैं। विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व के परिघात गुणांकों का परिकलन करके बंटन की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।

....

....

....

....

....

....

4.5 सार संक्षेप

इस इकाई में विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व का अध्ययन किया गया है। इन दोनों अवधारणाओं का प्रयोग एक बंटन के आकार के बारे में जानकारी प्राप्त करने के लिए किया जाता है। बंटन में सम्मितता की कमी विषमता कहलाती हैं। जबकि प्रथुशीर्षत्व किसी बंटन की बारंबारता वक्र के शिखर के नुकीलेपन का माप है।

4.6 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) 0.237

2) −0.12, −0.243

3) 17.5, 54.38, 51.46

बोध प्रश्न 2

1) 0, 499.64, 2579.57, 589111.61, 0.053, विषमता घनात्मक है।

2) 5, 6, −14, 0.907; क्योंकि μ_3 ऋणात्मक है, बंटन ऋणात्मक विषम्मित है।

बोध प्रश्न 3

1) 0, 59.99, −50.18, 8356.64, 0.012 (ऋणात्मक विषम्मित), 2.32 (चपटा शिखर)।

2) 0, 3; अतः बंटन सम्मित तथा सामान्य शिखर वाला है। ऐसे बंटन को प्रसामान्य बंटन भी कहते हैं।