# इकाई 5 सहसंबंध एवं समाश्रयण विश्लेषण*

इकाई की रूपरेखा



## 5.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- प्रकीर्ण आरेख को बना सकेंगे;
- दो चरों के बीच के सहसंबंध को माप सकेंगे;
- सहसंबंध गुणांक को परिकलित कर सकेंगे;
- कोटि सहसंबंध गुणांक को परिकलित कर सकेंगे;
- निर्धारित कर सकेंगे कि क्या दो चर सहसंबंधित हैं;
- समाश्रण की संकल्पना को समझा सकेंगे;
- न्यूनतम वर्ग विधि–को व्यक्त कर सकेंगे;
- रैखिक समाश्रयण की सीमाओं की पहचान कर सकेंगे;
- दिए गए आंकड़ों पर रैखिक समाश्रयण निदर्शों को लागू कर सकेंगे; और
- प्रागुक्ति (prediction) के लिए समाश्रयण समीकरण का प्रयोग कर सकेंगे।

---

* प्रो॰ कौस्तुभ बारिक, इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।

## 5.1 विषय प्रवेश

द्विचर शब्द का प्रयोग उन परिस्थितियों की व्याख्या के लिए किया जाता है, जिसमें प्रत्येक व्यष्टि के दो अभिलक्षणों का माप किया जाता है। जैसे स्कूल में विद्यार्थियों की ऊँचाई $X_i$ और भार $Y_i$ संबंधी माप। इस मामलें में पादांक (subscript) $i$ संबंद्ध विद्यार्थी को दर्शाता है। अतः उदाहरण के तौर परः $X_5, Y_5$ पाँचवें विद्यार्थी की ऊँचाई और भार को दर्शाएगा। दो अभिलक्षण, दो चरों द्वारा निरूपित किए जाते हैं। इन दो चरों के एक साथ मापे गए आंकड़ों को द्विचर आंकड़े (bivariate data) कहा जाता है। प्रत्येक व्यष्टि के प्रेक्षण, युग्म रूप में होते हैं, जिनमें प्रत्येक मान एक चर को निरूपित करता है। जैसे $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots\ldots, (X_n, Y_n)$ । इन द्विचर आंकड़ों जब अधिक संख्या में उपलब्ध हों तो इनका द्विधा सारणी के रूप में संक्षेपण आवश्यक हो जाता है। इस सारणी को द्विचर बारंबारता बंटन (bivariate frequency distribution) कहते हैं।

बहुत से चरों के सांख्यिकीय अध्ययनों में प्रायः दो प्रकार की समस्याएं होती हैं। कुछ समस्याओं के अध्ययन में हमारी रुचि यह जानने में होती है कि चरों में किस प्रकार का परस्पर संबंध है। इस प्रकार की समस्याओं का समाधान सहसंबंध प्रविधियों के प्रयोग द्वारा किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक अर्थशास्त्री की रुचि विभिन्न कंपनियों के शेयरों की कीमतों में संबंध का अध्ययन करना हो सकती है, इसके लिए वह सहसंबंध प्रविधियों का प्रयोग कर सकता है।

दूसरे प्रकार की समस्याओं में मूल रुचि $Y$ में होती है तथा हमें यह जानना होता है कि अन्य चर, $Y$ के के बारे में क्या सूचना प्रदान करते हैं, इस प्रकार की समस्याओं का समाधान समाश्रयण (regression) प्रविधियों के प्रयोग द्वारा किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक अर्थशास्त्री की रुचि इस बात में हो सकती है कि किसी कार्यरत व्यक्ति की आय किन कारकों से निर्धारित होती है, विशेष रूप से उसकी रुचि यह जानना हो सकती है कि शिक्षा, अनुभव, बाज़ार मांग आदि की व्यक्ति वेतन निर्धारण में क्या भूमिका है। इसके लिए वह समाश्रयण प्रविधियों के प्रयोग द्वारा शिक्षा, अनुभव आदि पर आधारित वेतन का प्रागुक्ति (prediction) सूत्र ज्ञात कर सकता है।

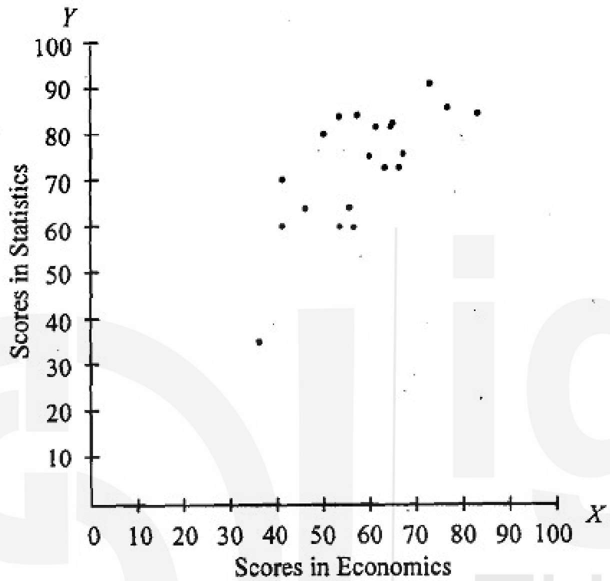
## 5.2 प्रकीर्ण आरेख

पहले हम बताएंगे कि दो चरों में संबंध का अध्ययन किस प्रकार किया जाता है। एक शिक्षक की रुचि कक्षा के 20 विद्यार्थियों की सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में योग्यता के संबंध का अध्ययन करना हो सकती है। इसके लिए वह पिछली अर्ध–सत्रीय परीक्षा में इन विद्यार्थियों द्वारा इन विषयों में प्राप्त अंकों के आंकड़े संकलित करता है। इस प्रकार के कुछ आंकड़े सारणी 5.1 में प्रस्तुत किए गए हैं।

**सारणी 5.1: विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंक**

| क्रम संख्या | प्राप्त अंक | | क्रम संख्या | प्राप्त अंक | |
|---|---|---|---|---|---|
| | सांख्यिकी | अर्थशास्त्र | | सांख्यिकी | अर्थशास्त्र |
| 1 | 82 | 64 | 11 | 76 | 58 |
| 2 | 70 | 40 | 12 | 76 | 66 |
| 3 | 34 | 35 | 13 | 92 | 72 |
| 4 | 80 | 48 | 14 | 72 | 46 |
| 5 | 66 | 54 | 15 | 64 | 44 |
| 6 | 84 | 56 | 16 | 86 | 76 |
| 7 | 74 | 62 | 17 | 84 | 52 |
| 8 | 84 | 66 | 18 | 60 | 40 |
| 9 | 60 | 58 | 19 | 82 | 60 |
| 10 | 86 | 82 | 20 | 90 | 60 |

इस प्रकार के आंकड़ों का आलेखी निरूपण एक उपयोगी विधि है, जोकि दो चरों के बीच संबंध की प्रकृति तथा रूप के अध्ययन में सहायक होती है। आलेखी निरूपण द्वारा यह पता किया जा सकता है कि क्या चरों में अध्ययन करने लायक कोई संबंध है या नहीं, अगर है तो क्या वह रैखिक है या अरैखिक। इसके लिए मान लीजिए हम सांख्यिकी में प्राप्त अंकों को x से सूचित करते हैं तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों को y से सूचित करते हैं तथा सारणी 5.1 के आंकड़ों को x,y समतल पर अंकित करते हैं। इस कार्य के लिए हम किसको x तथा किसको y लें, कोई अर्थ नहीं रखता। इस प्रकार के अंकन को **प्रकीर्ण आरेख** (scatter diagram) कहते हैं। चित्र 5.1 में सारणी 5.1 के आंकड़ों का प्रकीर्ण आरेख दिया गया है।




चित्र 5.1 : सांख्यिकी और अर्थशास्त्र में प्राप्त अंको का प्रकीर्ण आरेख

सारणी 5.1 और चित्र 5.1 की जांच द्वारा यह पता चलता है कि x तथा y में धनात्मक संबंध है अर्थात x के बड़े मान y के बड़े मानों के साथ तथा x के छोटे मान, y के छोटे मानों के साथ सहचारी हैं। इसके अतिरिक्त, बिंदुओं एक सरल रेखा के दोनों ओर प्रकीर्ण दिखाई देते हैं। अतः x तथा y के बीच रैखिक संबंध प्रतीत होता है, लेकिन यह संबंध पूर्ण (perfect) नहीं है, क्योंकि इस प्रकार के संबंध में विचलन मौजूद है। वास्तव में, इस रैखिक संबंध की शक्ति का परिमाप प्राप्त करना बड़ा ही उपयोगी होगा।

## 5.3 सहप्रसरण

एक चर वाली स्थिति में हमने प्रसरण की संकल्पना का अध्ययन किया है, जो इस तरह परिभाषित है

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad \ldots (5.1)$$

ऊपर हमने पादांक x का प्रयोग यह दर्शाने के लिया किया कि $\sigma_2^2$ हमें $X$ के प्रसरण को दर्शाता है। इसी ढंग से हम $\sigma_y^2$ को, $y$ में प्रसरण के रूप में और $\sigma_x$ और $\sigma_y$ को क्रमशः $X$ और $Y$ में मानक विचलन के रूप में दर्शा सकते हैं।

जैसा कि आप जानते हैं प्रसरण, माध्य से प्रकीर्णन का परिमाप लेता है। द्विचर आंकड़ों की स्थिति मे हमें ऐसे एकल अंक तक पहुंचना है जो दोनों चरों में अपने संबद्ध माध्यमों से

विचलन को प्रस्तुत करेगा। इस उद्देश्य के लिए हमने संकल्पना सहप्रसरण (covariance) का प्रयोग किया और जिसे इस प्रकार परिभाषित करते है;

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \qquad \dots (5.2)$$

आपको याद होगा कि मानक विचलन सदैव धनात्मक होता है, क्योंकि यह प्रसरण के धनात्मक वर्गमूल के रूप में परिभाषित किया जाता है। सहप्रसरण की स्थिति में, दो पद $(X_i - \bar{X})$ और $(Y_i - \bar{Y})$ हैं जो $x$ से $\bar{X}$ और $y$ से $\bar{Y}$ में विचलन को निरूपित करते हैं। इसके अलावा $(X_i - \bar{X})$ धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है जो इस बात पर निर्भर करता है कि $X_i$ का मूल्य $\bar{X}$ से कम या अधिक है। इसी तरह $(Y_i - \bar{Y})$ भी धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। यह आवश्यक नहीं है कि जब भी $(X_i - \bar{X})$ धनात्मक हो, $(Y_i - \bar{Y})$ भी धनात्मक होगा। इसलिए, गुणनफल $(X_i - \bar{X})$ $(Y_i - \bar{Y})$ धनात्मक या ऋणात्मक में से कोई भी हो सकता है। $(X_i - \bar{X})$ $(Y_i - \bar{Y})$ के धनात्मक मान से आश्य् है कि जब भी $X_i > \bar{X}$, तब $Y_i > \bar{Y}$. होगा। अतः $x_i$ का उच्च मान, $y_i$. में उच्च मान से सापेक्षिक रूप से संबद्ध है। दूसरी तरफ $(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) < 0$ से आशय् है कि $X_i$ में निम्न मान $y_i$. में सापेक्षिक रूप से उच्च मान से संबद्ध है। जब हम सभी प्रेक्षणों से इन्हें जोड़ते हैं और प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करते हैं तो हमें ऋणात्मक या धनात्मक मान की प्राप्ति हो सकती है। इसलिए सहप्रसरण के ऋणात्मक और धनात्मक अर्थात दोनों तरह के मान हो सकते हैं।

जब $x$ और $y$ के बीच सहप्रसरण ऋणात्मक $(\sigma_{xy} < 0)$ है तो हम कह सकते हैं कि दोनों चरों के बीच संबंध विपरित है। इसी तरह $(\sigma_{xy} < 0)$ $x$ और $y$ के बीच धनात्मक संबंध को दर्शाता है। सहप्रसरण की मुख्य्‍ सीमा है कि यह माप की इकाई से अलग नहीं है। इसका अर्थ है कि जब हम चरों के मात्रक बदलते हैं तो हम $\sigma_{xy}$ के लिए अलग मान प्राप्त करेंगे। जैसा कि (5.2) में दिया है $\sigma_{xy}$ के परिकलन में प्रायः काफी संख्याएं शामिल होती हैं। इसलिए आगे, इसे इस प्रकार व्युत्पन्न किया गया है

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_iY_i - \bar{X}Y_i - \overline{XY})$$

इसे और अधिक सरल बनाने पर हम पाते हैं

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{X}Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\bar{Y} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{XY}$$

चूंकि $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{X}Y_i = \frac{1}{n}X_i\bar{Y} = \overline{XY}$ हमारे पास है

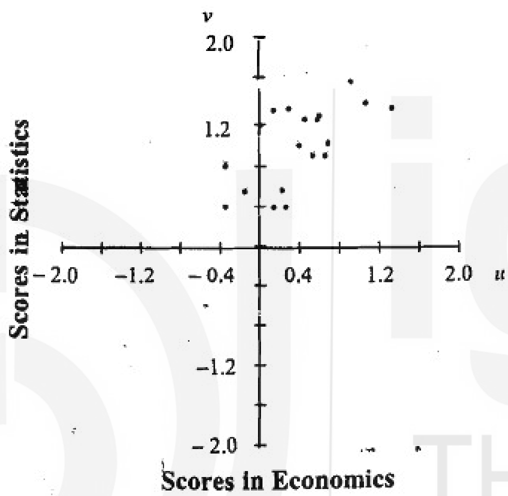
$$\text{अतः } \sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \overline{XY} \qquad \dots (5.3)$$

## 5.4 सहसंबंध गुणांक

अब हमें x और y को बीच के रैखिक संबंध का परिमाप प्राप्त करना है। रैखिक संबंध की शक्ति का ऐसा परिमाप प्राप्त करना, जोकि चर के माप के लिए प्रयोग किए गए पैमाने से स्वतंत्र हो, वांछनीय होता है। उदाहरण के लिए, अगर हम ऊंचाई और वजन में संबंध को मापना चाहते हैं, तो चाहे हम ऊँचाई को इंचों में मापे या सेंटीमीटरों में तथा वज़न को

पाउंड में मापें या किलोग्राम में, हमें वही परिमाप प्राप्त होना चाहिए। इसी प्रकार, अगर तापमान एक चर है तो, चाहे वह सेल्सियस में है या फारेनहाइट में है, इससे विश्लेषण में कोई अंतर नहीं आना चाहिए। यह स्थिति प्रत्येक चर के मानकीकरण द्वारा प्राप्त की जा सकती अर्थात $\frac{X-\bar{X}}{\sigma_x}$ और $\frac{Y-\bar{Y}}{\sigma_y}$ पर विचार करके, जहां $\bar{X}$ और $\bar{Y}$ क्रमशः x और y के माध्य हैं और $\sigma_x$ और $\sigma_y$ प्रतिदर्श मानक विचलन।

मान लीजिए, हम इन मानकीकृत चरों को क्रमशः $u$ तथा $v$ से सूचित करते हैं। हम यह भी जानते हैं कि $(X_i, Y_i)$ $i$वे विद्यार्थी द्वारा क्रमशः सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंको को सूचित करता है। $i$ का मान 1 से $n$ तक होता है। हमारे उदाहरण में $n$ का मान 20 है। इसी प्रकार, मान लीजिए $(u_i, v_i)$ $i$वें विद्यार्थी द्वारा प्राप्त मानकीकृत अंको को सूचित करता है। यहां माध्य तथा मानक विचचल के सूत्रों को पुनः स्मरण करने पर :




चित्र 5.2 : सांख्यिकी और अर्थशास्त्र में प्राप्त मानवीकृत अंकों का प्रकीर्ण आरेख

चित्र 5.2 मानवीकृत चरों $u$ तथा $v$ में प्रकीर्ण आरेख है। मान लीजिए इस उदाहरण में हम दो प्रकार के अंकों में धनात्मक साहचर्य का प्रेक्षण करते हैं, मोटे तौर पर अगर एक विषय में प्राप्त अंक बड़ा है तो दूसरे विषय में भी प्राप्त अंक बड़ा होगा और अगर एक विषय में प्राप्त अंक कम है तो दूसरे विषय में प्राप्त अंक भी कम होगा। इस दृष्टि से अधिकतर बिंदु या तो पहले चतुर्थांश में हैं या फिर तीसरे चतुर्थांश में है। पहला चतुर्थांश उन परिस्थितियों को व्यक्त करता है, जहां दोनों विषयों में प्राप्त अंक अपने माध्यों से अधिक हैं और तीसरा चतुर्थांश उन परिस्थितियों को व्यक्त करता है, जहां दोनों विषयों में प्राप्त अंक अपने माध्यों से कम हैं। दूसरे तथा चौथे चतुर्थांश में केवल कुछ बिंदु है जोकि उन परिस्थितियों को व्यक्त करते हैं, जहां एक विषय में माध्य से अधिक तथा दूसरे विषय में माध्य से कम अंक प्राप्त है। अतः $u$ और $v$ का गुणनफल, संबंध की शक्ति का उपयुक्त सूचक है। यह गुणनफल पहले तथा तीसरे चुतर्थांश में धनात्मक तथा दूसरे एवं चौथे चतुर्थांश में ऋणात्मक है। अतः $u$ और $v$ के सभी बिंदुओं के लिए औसत गुणनफल को $X$ तथा $Y$ के बीच रैखिक संबंध की शक्ति का उपयुक्त माप लिया जा सकता है। इस परिमाप को $X$ और $Y$ में सहसंबंध गुणांक कहते हैं, जिसको प्रायः $r_{xy}$ या केवल $r$ से सूचित किया जाता है। अन्य प्रकार के सहसंबंध गुणांक से भेद करने के लिए इसको पियर्सन का गुणन–आघूर्ण सहसंबंध गुणांक (Pearson’s Product Moment Correlation Coefficient) भी कहते हैं।

अतः $r$ के लिए सूत्र है

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad \ldots (5.4)$$

यदि हम उपर्युक्त (5.4) में $X$ और $Y$ चरों को प्रतिस्थापित करते हैं

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{Y_i - \overline{Y}}{\sigma_y}\right) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sigma_x \sigma_y}$$

उपर्युक्त व्यंजन में, पद

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

$X$ और $Y$ के बीच सहप्रसरण कहलाता है और इसको $(\sigma_{xy})$ से सूचित किया जाता है।

अतः सहसंबंध गुणांक का सूत्र है;

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \qquad \ldots (5.5)$$

इनमें $\overline{x}, \overline{y}, \sigma_x, \sigma_y$ के सूत्रों को जोड़ने पर यह बनता है

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}} \qquad \ldots (5.6)$$

या वैकल्पिक रूप से होगा

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\left[\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right]} \qquad \ldots (5.7)$$

आइए अब दुबारा सारणी 5.1 में दिए गए आंकड़ों पर ध्यान दें और $r$ के मान ज्ञात करें। आप $r$ के मान के लिए (5.4), (5.5), (5.6) या (5.7) में से कोई सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं। चूंकि उपर्युक्त सभी सूत्र एक ही संकल्पना से व्युत्पन्न है, इसलिए सूत्र चाहे कोई भी हो $r$ के लिए हमें एक जैसे मान की ही प्राप्त होगी। सारणी 5.1 में दर्शित आंकड़ों के लिए हमने (5.4) और (5.7) के प्रयोग से इसे परिकलित किया है। इस उद्देश्य के लिए हमनें सारणी 5.2 भी निर्मित की है।

सारणी 5.2 : सहसंबंध गुणांक का परिकलन

| प्रेषण सं. | X | Y | $X^2$ | $Y^2$ | XY |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 82 | 64 | 6724 | 4096 | 5248 |
| 2 | 70 | 40 | 4900 | 1600 | 2800 |
| 3 | 34 | 35 | 1156 | 1225 | 1190 |
| 4 | 80 | 48 | 6400 | 2304 | 3840 |
| 5 | 66 | 54 | 4356 | 2916 | 3564 |
| 6 | 84 | 56 | 7056 | 3136 | 4704 |
| 7 | 74 | 62 | 5476 | 3844 | 4588 |
| 8 | 84 | 66 | 7056 | 4356 | 5544 |
| 9 | 60 | 52 | 3600 | 2704 | 3120 |
| 10 | 86 | 82 | 7396 | 6724 | 7052 |
| 11 | 76 | 58 | 5776 | 3364 | 4408 |
| 12 | 76 | 66 | 5776 | 4356 | 5016 |
| 13 | 92 | 72 | 8464 | 5184 | 6624 |
| 14 | 72 | 46 | 5184 | 2116 | 3312 |
| 15 | 64 | 44 | 4096 | 1936 | 2816 |
| 16 | 86 | 76 | 7396 | 5776 | 6536 |
| 17 | 84 | 52 | 7056 | 2704 | 4368 |
| 18 | 60 | 40 | 3600 | 1600 | 2400 |
| 19 | 82 | 60 | 6724 | 3600 | 4920 |
| 20 | 90 | 60 | 8100 | 3600 | 5400 |
| योग | 1502 | 1133 | 116292 | 67141 | 87450 |

सारणी 5.2 से, हम देखते हैं कि

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 150; \overline{X} = 75.1;$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 1133; \overline{Y} = 56.65;$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 116292; \sigma_x^2 = \frac{1}{20}\left[116292 - \frac{1502^2}{20}\right] = 174.59; \sigma_x = 13.21;$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 67141; \sigma_x^2 = \frac{1}{20}\left[67141 - \frac{1133^2}{20}\right] = 147.83; \sigma_y = 12.16;$$

$$\sum X_i Y_i = 87450; \sigma_{xy} = \frac{1}{20}\left[87450 - \frac{1502 \times 1133}{20}\right] = 118.09$$

अतः सूत्र 5.4 के प्रयोग से, हमारे पास है;

$$r = \frac{118.09}{13.21 \times 12.16} = 0.735$$

आइए अब सूत्र 5.7 का प्रयोग करें। हमारे पास है;

$$r = \frac{20 \times 87450}{\sqrt{(20 \times 116292 - 1502^2)(20 \times 67141 - 1133^2)}} = 0.735$$

अतः हम देखते हैं कि दोनों सूत्र, सहसंबंध गुणांक $r$ के एक जैसे मान प्रदान करते हैं। आप स्वयं भी जांच कर सकते हैं कि सूत्र (5.5) के प्रयोग से $r$ का समान मान प्राप्त किया जाता है। आपको निम्नलिखित मानों की आवश्यकता होगी :

$\sum (X_i - \bar{X})^2, \sum (Y_i - \bar{Y})^2$ और $\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$

एक सारणी में $(X_i - \bar{X}), (Y_i - \bar{Y}), (X_i - \bar{X})^2, (Y_i - \bar{Y})^2$ और $(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$ पर आप पाँच स्तम्भ प्राप्त कर सकते हैं और उनका योगफल ज्ञात कर सकते हैं।

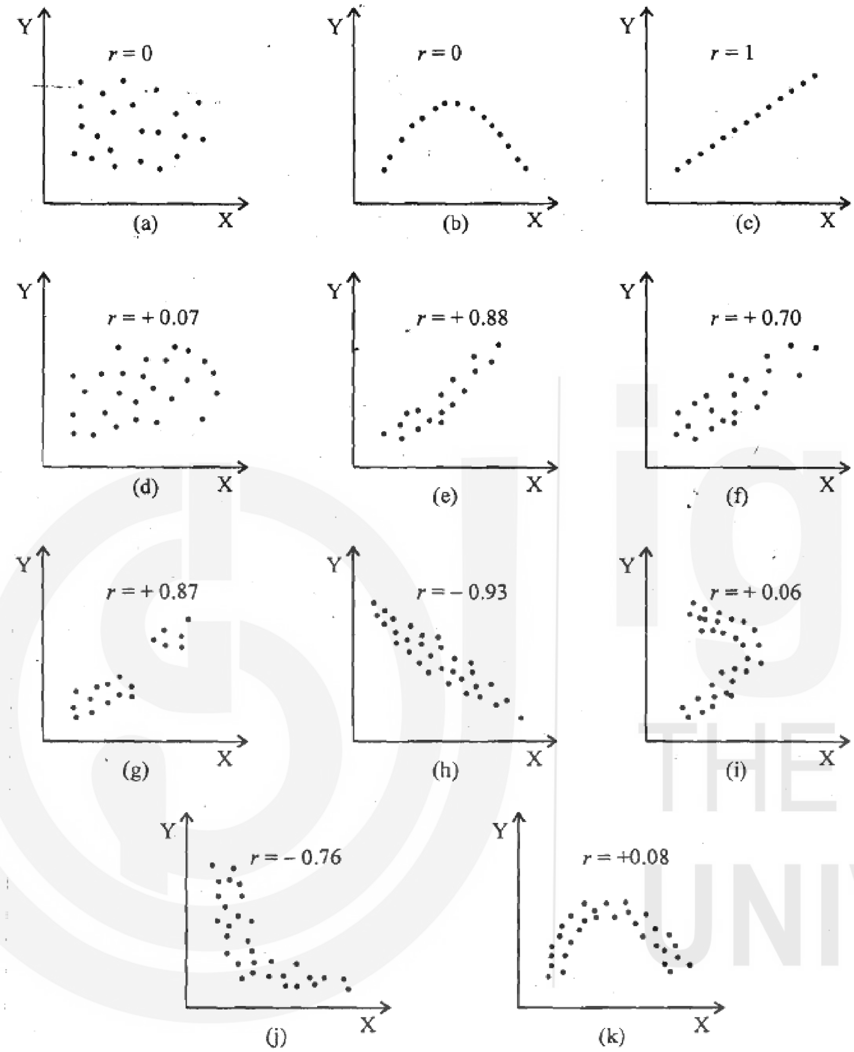
## 5.5 सहसंबंध गुणांक की व्याख्या

यह एक गणितीय तथ्य है कि उपर्युक्त परिभाषित $r$ का मान हमेशा $-1$ तथा $+1$ के बीच रहता है जब $X$ और $Y$ में पूर्ण रैखिक संबंध हो तो $r$ का चरममान $-1$ या $+1$ प्राप्त होता है, जब $X$ तथा $Y$ में विपरित संबंध हो तो मान $-1$ होता है तथा जब संबंध प्रत्यक्ष हो तो मान $+1$ होता है जब $X$ और $Y$ में कोई संबंध न हो तो मान 0 होता है।

चित्र 5.3, $r$ के विविध मानों के लिए प्रकीर्ण आरेख के उदाहरणों को उजागर करता है। चित्र 5.3 (क) स्थिति $r = 0$ का प्रकीर्ण आरेख है जहां $X$ और $Y$ के बीच कोई संबंध नहीं है। चित्र 5.3 (ख) भी $r = 0$ की परिस्थिति में प्रकीर्ण आरेख का उदाहरण है यहां पर $X$ और $Y$ में संबंध तो दिखाई देता है, पर वह रैखिक नहीं है। यहां पहले $X$ में वृद्धि के साथ $Y$ में भी वृद्धि होती है। लेकिन बाद में, $X$ में वृद्धि के साथ $Y$ में कमी होती है जोकि एक द्विघात संबंध है। परिणामस्वरूप इस परिस्थिति में सहसंबंध गुणांक शून्य है। अतः सहसंबंध गुणांक केवल रैखिक संबंध का परिमाप होता है। अगर हम व्यक्तियों की आयु तथा वज़न को अंकित करें तो इस प्रकार का प्रकीर्ण आरेख प्राप्त होगा। चित्र 5.3 (ग) ऐसे प्रकीर्ण आरेख का उदाहरण है जहां $X$ और $Y$ के बीच पूर्ण धनात्मक रैखिक संबंध है। अगर हम व्यक्तियों की इंचों में लंबाई को उनकी सेंटीमीटरों में ऊंचाई के सम्मुख अंकित करें तो इस प्रकार का प्रकीर्ण आरेख प्राप्त होगा; क्योंकि इस परिस्थिति में $Y = 2.54\,X$ जहां पर $X$ इंचों में ऊचाई को तथा $Y$ सेंटीमीटरों में ऊँचाई को सूचित करता है, एक पूर्ण रैखिक संबंध है। चित्र 5.3 (घ) से चित्र 5.3 (ड़) तक प्रकीर्ण आरेख $r$ के अन्य मानों के लिए है। इन प्रकीर्ण आरेखों द्वारा हमें संबंध की प्रकृति तथा सहचारी $r$ के मान के बारे में जानकारी प्राप्त होती है।

उपर्युक्त विवरण द्वारा यह प्रतीत होता है कि विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त किए अंकों के बीच $r = 0.81$, एक संतोषजनक किस्म के रैखिक संबंध का सूचक है। इस प्रकार चरों के बीच संबंध या साहचर्य का परिमापन प्राकृतिक तथा समाजशास्त्रियों को उन तथ्यों को समझने में सहायक होता है जिनकी यह जांच कर रहे हैं।

इस प्रकार के उदाहरण में एक शिक्षा मनोविज्ञानी विभिन्न विषयों में प्राप्त अंकों के बीच सहसंबंध गुणांक को परिकलित कर सकता है तथा इन गुणांको का और सांख्यिकीय विश्लेषण करके तथा मनोवैज्ञानिक प्रविधियों के प्रयोग द्वारा एक सिद्धांत बना सकता है जोकि विद्यार्थियों को विभिन्न विषयों में अच्छा बनाने के लिए मानसिक एवं अन्य योग्यताओं की जानकारी दे सकता है।




चित्र 5.3 : सहसंबंध–गुणांक के विभिन्न मानों के लिए प्रकीर्ण आरेख

याद रखें

- सहसंबंध गुणांक, $X$ और $Y$ के बीच रैखिक संबंध को दर्शाता है। इसलिए यदि $X$ और $Y$ के बीच गूढ़ गैर–रैखिक संबंध होगा तो सहसंबंध–गुणांक निम्न हो सकता है।
- सहसंबंध गुणांक स्केल और मूल बिंदु (origin) से स्वतंत्र होता है। यदि हम एक (या दोनों) चरों स्थिरांक को घटाते हैं तो सहसंबंध गुणांक अपरिवर्तित रहेगा। इसी तरह, यदि हम किसी स्थिरांक से एक (या दोनों) चरों को विभाजित करते हैं तो सहसंबंध गुणांक बदलेगा नहीं।
- सहसंबंध गुणांक –1 और +1 के बीच बदलता रहता है।

दो चरों में रैखिक संबंध की मौजूदगी का अर्थ यह नहीं लेना चाहिए कि उन दोनों में कारण प्रभाव का संबंध है। जैसे, अगर आप पैट्रोल और चॉकलेट पर पारिवारिक खर्च के बीच सहसंबंध परिकलित करें तो आपको इनमें सहसंबंध का मान अधिक बड़ा प्राप्त हो सकता है, जोकि इन चरों में बड़ी ऊँची कोटि के रैखिक संबंध का सूचक है, लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि अधिक कार प्रयोग के कारण लोग अधिक चॉकलेट खरीदते हैं। दोनों वस्तुएँ विलासिता की वस्तुएँ है तथा धनी परिवार इनको खरीद सकते हैं, जबकि निर्धन परिवार नहीं खरीद सकते। इस प्रकार, यहाँ सहसंबंध के ऊँचे होने के कारण प्रत्येक चर तथा आय के बीच ऊँचा सहसंबंध होता है। एक और उदाहरण पर विचार कीजिए। मान लीजिए पिछले बीस वर्षों से आप एक भारतीय की औसत ऊँचाई तथा उसके द्वारा टेलीविज़न देखने का प्रति सप्ताह औसत समय के आंकड़ें प्राप्त कर रहे हैं। यह संभव है कि आप इनमें गहरा धनात्मक सहसंबंध पाएँ। लेकिन इसका अर्थ यह नहीं है कि अधिक समय तक टेलीविज़न देखने से व्यक्ति की ऊँचाई में वृद्धि होती है या अधिक ऊँचाई वाले व्यक्ति अधिक समय तक टेलीविज़न देखते हैं। वास्तव में, इन दोनों चरों में समय के साथ वृद्धि होने की प्रवृत्ति होती है, जोकि उनमें ऊँचे सहसंबंध द्वारा प्रतिबिंबित होती है। इस प्रकार के दो चरों के बीच सहसंबंध, जोकि उनके ऊपर किसी तीसरे चर के प्रभाव के कारण प्राप्त होता है (न कि उनमें प्रत्यक्ष रैखिक कारण–प्रभाव संबंध के कारण), को मिथ्या सहसंबंध (spurious correlation) कहते हैं।

सहसंबंध परिकलन के बारे में एक और बात का ज्ञान होना चाहिए। प्रतिदर्श द्वारा परिकलित अन्य मात्राओं की तरह, सहसंबंध भी प्रत्येक प्रतिदर्श के लिए भिन्न होता है तथा परिकलित सहसंबंध गुणांक के प्रयोग के लिए इन उच्चावयनों का हिसाब रखना भी आवश्यक होता है। यहाँ हम प्रविधियों की व्याख्या नहीं करेंगे। दो चरों के बीच रैखिक संबंध की मौजूदगी, यानि उनमें ऊँचा सहसंबंध वास्तविक है या मिथ्या, इस प्रकार की जानकारी एक चर द्वारा दूसरे चर की *प्रागुक्ति* में सहायक होती है।

**बोध प्रश्न 1**

1. निम्नलिखित परिणामों द्वारा $r$ का मान परिकलित कीजिए:

   $$n=10; \sum X = 125; \sum X^2 = 1585; \sum Y = 80; \sum Y^2 = 650; \sum XY = 1007.$$

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

2. पति और पत्नी की आयु के लिए सहसंबंध गुणांक का परिकलन कीजिए;

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| पति की आयुः | 23 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 33 | 35 | 36 | 39 |
| पत्नी की आयुः | 18 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 28 | 29 | 30 | 32 |

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

   ........................................................................................................

3. समान प्रकार से संसाधित मिश्रित इस्पात के नमूने, जिनमें निकल के प्रतिशत की जाँच उनकी मज़बूती के साथ की गई है, के परिणाम निम्नलिखित हैं;

| मज़बूती (मनमानी इकाइयों में) | 47 | 50 | 52 | 52 | 54 | 56 | 58 | 59 | 60 | 60 | 62 | 64 | 65 | 66 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| निकल का प्रतिशत | 2.7 | 2.7 | 2.8 | 2.8 | 2.9 | 3.2 | 3.2 | 3.3 | 3.4 | 3.5 | 3.6 | 3.7 | 3.7 | 3.8 |

मज़बूती तथा निकल की मात्रा में सहसंबंध परिकलित कीजिए तथा परिणाम पर टिप्पणी कीजिए।

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

4. $X$ और $Y$ में सहसंबंध गुणांक का निर्धारण कीजिए–

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ : | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| $Y$ : | 1.7 | 2.4 | 2.8 | 3.4 | 3.7 | 4.4 |

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

5. निम्नलिखित सारणी में बहुत से वर्षों के लिए बचत बैंक जमा (बिलियन डालरों में) और हड़ताल एवं तालाबंदी (हज़ारों में) के आंकड़े दिए हुए हैं। संबंध गुणांक परिकलित करके परिणाम पर टिप्पणी कीजिए।

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| बचत जमा : | 5.1 | 5.4 | 5.5 | 5.9 | 6.4 | 6.0 | 7.2 |
| हड़ताल एवं तालांबंदी : | 3.8 | 4.4 | 3.3 | 3.6 | 3.3 | 2.3 | 1.0 |

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

## 5.6 कोटि सहसंबंध गुणांक

अगर विचाराधीन दोनों चर संख्यात्मक हैं तथा इनमें संबंध रैखिक हैं तो उपर्युक्त सहसंबंध गुणांक या पियर्सन का गुणन आघूर्ण सहसंबंध गुणांक उपयुक्त होता है। लेकिन ऐसी स्थितियाँ भी हो सकती हैं जहाँ चर संख्यात्मक नहीं होते लेकिन लक्षणों के आधार पर विभिन्न मदों को श्रेणीबद्ध (अर्थात् क्रमसूचक) किया जा सकता है। कभी–कभी मूल चरों के मापनीय होने पर भी उनको कोटि में परिवर्तित किया जाता है और साहचर्य माप परिकलित किया जाता है।

उदाहरण के लिए, उस परिस्थिति पर विचार कीजिए, जिसमें दो परीक्षकों द्वारा 10 परीक्षार्थियों की, मौखिक परीक्षा के आधार पर जाँच करनी है। उस परिस्थिति में परीक्षार्थियों के अंक निर्धारित करना कठिन हो सकता है, लेकिन परीक्षकों के लिए उनको उनकी योग्यता के क्रम को कोटि करना सरल हो सकता है। इन परिणामों के प्रयोग से पहले यह ज्ञात करना उपयुक्त होगा कि क्या परीक्षकों द्वारा की गई कोटि (ranking) में उचित सामंजस्य है। इसके लिए दो परीक्षकों के बीच साहचर्य का माप परिकलित किया जा सकता है। इस परिस्थिति में सहसंबंध गुणांक का प्रयोग उपयुक्त नहीं है। यहाँ पर **स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक** प्रयोग किया जा सकता है।

**सारणी 5.3: दो परीक्षकों द्वारा 10 परीक्षार्थियों की कोटि का निर्धारण**

| क्रं. सं. | Rank given by | | अंतर | |
|---|---|---|---|---|
| | *परीक्षक I* | *परीक्षक II* | $D_i$ | $D_i^2$ |
| 1 | 6.0 | 6.5 | –0.5 | 0.25 |
| 2 | 2.0 | 3.0 | –1.0 | 1.00 |
| 3 | 8.5 | 6.5 | 2.0 | 4.00 |
| 4 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.00 |
| 5 | 10.0 | 2.0 | 8.0 | 64.00 |
| 6 | 3.0 | 4.0 | –1.0 | 1.00 |
| 7 | 8.5 | 9.5 | –1.0 | 1.00 |
| 8 | 4.0 | 5.0 | –1.0 | 1.00 |
| 9 | 5.0 | 8.0 | –3.0 | 9.00 |
| 10 | 7.0 | 9.5 | –2.5 | 6.25 |
| | | | $\sum D_i = 0$ | $\sum D_1^2 = 87.50$ |

आइए अब सारणी 5.3 में दिए गए आँकड़ों पर विचार करें। यहाँ पर कुछ कोटियों में साम्य है। इन साम्यावस्थाओं की एक ही कोटि इस प्रकार दी जाती है कि इनका योग उतना ही रहे, जितना साम्य न होने पर होता। उदाहरण के लिए, अगर दो अवस्थाओं की समान कोटि 6 है तो प्रत्येक को 6.5 कोटि दी जाती है तथा किसी अवस्था को 6 या 7 कोटि नहीं दी जाती। इसी प्रकार अगर 5 कोटि की तीन अवस्थाएँ हैं तो प्रत्येक को 6 की कोटि दी जाती है तथा किसी अवस्था को 5 या 7 की कोटि नहीं दी जाती। *स्पीयरमैन का कोटि–सहसंबंध गुणांक जिसको स्पीयरमैन का रो (Rho) कहा जाता है* $\rho$ से सूचित किया जाता है। यह दोनों प्रकार की कोटि के अंतर $D$ पर आधारित होता है। यदि दोनों कोटियाँ पूर्णतया संपाती हैं तो हर स्थिति में $D_i$ शून्य होगा। $D_i$ का मान जितना बढ़ा होगा, दो कोटियों के बीच का अंतर भी उतना ही बढ़ा होगा और साहचर्य कम होगा। अतः $D_i$ के आकार द्वारा साहचर्य का माप किया जा सकता है। चूंकि विभिन्न व्यष्टियों के लिए $D_i$ का योग हमेशा शून्य होता है इसलिए $D_i$ के आधार पर एक अकेला सूचकांक ज्ञात करने के लिए $D_i$ की धनात्मकता या ऋणात्मकता को दूर करना होगा तथा सिर्फ $D_i$ के आकार को ही लेना होगा। स्पीयरमैन के $\rho$ में यह कार्य $D_i$ का वर्ग लेकर किया जाता है। फिर भी यहाँ पर $\sum_{i=1}^{n} D_i^2$, का मान अधिक होगा या कम, यह $n$ पर अर्थात व्यष्टियों की संख्या पर निर्भर करता है। व्याख्या के लिए हम इसको अधिकतम संभव मान, जोकि सिर्फ $n$ पर निर्भर है, द्वारा भाग करके एक अनुपात बंना सकते हैं। यह अधिकतम

मान $\frac{n(n^2-1)}{6}$. है। इस प्रकार, $\frac{6\times\sum_{i=1}^{n}D_i^2}{n(n^2-1)}$ का मान पूर्ण साहचर्य के लिए शून्य है और साहचर्य न होने पर 2 के बराबर है। लेकिन हम इसको अन्य प्रकार से रखना पसंद करेंगे। इसके लिए हम इसको एक में से घंटा देते हैं। अतः

$$\rho = 1-\frac{6\times\sum_{i=1}^{n}D_i^2}{n(n^2-1)} \qquad \ldots (5.8)$$

स्पीयरमैन का रो परिभाषित होता है। आइए सारणी 5.3 में दिए गए आंकड़ों से $P$ का मान परिकलित करें;

$$\rho = -\frac{6\times 87.5}{10(10^2-1)} = 1-\frac{525}{990} = 1-0.53 = 0.47.$$

कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की भांति, स्पीर्यमैन कोटि संबंध में कोटियों का पूर्ण मेल है तो मान +1 और पूर्णतया मेल न होने की स्थिति में मान –1 और कोटियों के बीच संबंध न होने की स्थिति में शून्य मान को व्यक्त करेगा।

जब चर नामिक, क्रमसूचक तथा दूसरे प्रकार के हों तो साहचर्य के अन्य उपयुक्त माप प्रयोग किए जा सकते हैं। लेकिन यहाँ पर हम उनका विवेचन नहीं करेंगे।

**बोध प्रश्न 2**

1. एक प्रतियोगिता में दो निर्णायकों ने 8 प्रतियोगियों A, B, C, D, E, F, G और H को अपने वरीयता क्रम के अनुसार निम्नलिखित तालिका में दी गई कोटियाँ दी हैं। कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| पहला निर्णायक | 5 | 2 | 8 | 1 | 4 | 6 | 3 | 7 |
| दूसरा निर्णायक | 4 | 5 | 7 | 3 | 2 | 8 | 1 | 6 |

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

2. दो परीक्षाओं में विद्यार्थियों के एक समूह को निम्नलिखित कोटियों के लिए सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए। इस परिणाम से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| रोल नं. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| बी.कॉम. परीक्षा में कोटि | 1 | 5 | 8 | 6 | 7 | 4 | 2 | 3 | 9 | 10 |
| एम.कॉम. परीक्षा में कोटि | 2 | 1 | 5 | 7 | 6 | 3 | 4 | 8 | 10 | 9 |

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

3. तीन निर्णायकों A, B, C ने एक संगीत प्रतियोगिता में दस प्रतियोगियों को निम्नलिखित क्रम में कोटिबद्ध किया:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A द्वारा प्राप्त कोटि | 1 | 6 | 5 | 10 | 3 | 2 | 4 | 9 | 7 | 8 |
| B द्वारा प्राप्त कोटि | 3 | 5 | 8 | 4 | 7 | 10 | 2 | 1 | 6 | 9 |
| C द्वारा प्राप्त कोटि | 6 | 4 | 9 | 8 | 1 | 2 | 3 | 10 | 5 | 7 |

निर्णायकों का कौन सा युग्म संगीत की सामान्य रुचि के निकटतम सादृश्य है कोटि सहसंबंध विधि के प्रयोग द्वारा विवेचन कीजिए।

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

4. दस विद्यार्थियों द्वारा गणित और सांख्यिकी में निम्नलिखित अंक प्राप्त किए गए। कोटि सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए।

| विद्यार्थी (रोल नं.) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| गणित में अंक | 78 | 36 | 98 | 25 | 75 | 82 | 90 | 62 | 65 | 29 |
| संख्यिकी में अंक | 84 | 51 | 91 | 60 | 68 | 62 | 86 | 58 | 53 | 47 |

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

## 5.7 समाश्रयण की संकल्पना

पिछले भाग में आपने देखा कि सहसंबंध गुणांक दो चरों के बीच कारण और प्रभाव संबंध को प्रतिबिंबित नहीं करता। अतः हम एक चर के लिए दिए हुए मान के अनुरूप अन्य चर के मान की प्रागुक्ति नहीं कर सकते। लेकिन समाश्रयण विश्लेषण (regression aralysis) के माध्यम से हम इस दोष को दूर करते हैं। इस इकाई में हम समाश्रयण विश्लेषण की चर्चा करेंगे जिससे चरों के बीच के संबंध को गणितीय समीकरण के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। इसमें हम मान लेते हैं कि एक चर कारण है और दूसरा प्रभाव। आपको याद होना चाहिए कि समाश्रयण एक सांख्यिकीय उपकरण है जो चरों के बीच के संबंध को समझने में सहायक होता है और जो स्वतंत्र चर के ज्ञात मानों से आश्रित चर के अज्ञात मानों की प्रागुक्ति करता है।

समाश्रयण विश्लेषण में दो प्रकार के चर होते हैं : i) आश्रित (या वर्णित) चर, और ii) स्वतंत्र (या व्याख्यात्मक) चर। जैसा कि इनके नाम से इंगित है, स्वतंत्र चर से आश्रित चर का विवरण दिया जाता है।

समाश्रयण विश्लेषण के सरलतम मामले में, एक आश्रित चर और एक स्वतंत्र चर होता है। आइए मान लेते हैं कि परिवार का उपभोग व्यय, परिवार की आय से संबंधित है। जैसे,

मान लेते हैं कि पारिवारिक आय बढ़ने के साथ–साथ खर्च में भी बढ़ोतरी होती है। इस संदर्भ में उपभोग व्यय आश्रित चर है और पारिवारिक आय स्वतंत्र चर है।

आमतौर पर हम आश्रित चर को $Y$ और स्वतंत्र चर को $X$ से दर्शाते हैं। मान लीजिए हमने पारिवारिक सर्वेक्षण किया और $X$ और $Y$ में $n$ प्रेक्षण युग्मों को इकठ्ठा किया। अब हमारा अगला चरण, $X$ और $Y$ के बीच के संबंध की प्रकृति का पता लगाना है। $X$ और $Y$ के बीच का संबंध अलग–अलग रूपों का हो सकता है। आम व्यवहार में इस संबंध को कुछ गणितीय समीकरण से अभिव्यक्त किया जाता है। इन समीकरणों में से सरलतम, रैखिक समीकरण है। इसका अर्थ है कि $X$ और $Y$ के बीच का संबंध सीधी रेखा में है और इसे रैखिक समाश्रयण कहते हैं। जब समीकरण (सीधी रेखा न होकर) वक्रों को दर्शाता है तो अरैखिक या वक्ररेखी समाश्रयण (non-linear regression) कहते हैं।

अब प्रश्न उठता है कि, 'समीकरण के रूप की पहचान हम कैसे करते हैं?' इसके लिए कोई विशेष नियम नहीं है। समीकरण का स्वरूप हमारी तार्किक सोच और कल्पनाशक्ति पर आधारित है। लेकिन प्रकीर्ण आरेख बनाने के लिए, हम $X$ और $Y$ चरों को ग्राफ पर खींच सकते हैं। प्रकीर्ण आरेख से हमें ग्राफ कागज़ पर बिंदुओं की स्थिति का पता चल जाता है जिससे समीकरण के रूप को पहचाना जा सकता है। यदि बिंदु लगभग सीधी रेखा में हैं तो रैखिक समीकरण बनेगा। दूसरी तरफ यदि बिंदु सीधी रेखा में नहीं हैं, बल्कि वक्र के रूप में है तो इसे उपयुक्त अरैखिक समीकरण कहेंगे।

अब हमें एक बात और तय करनी है और वह है आश्रित और स्वतंत्र चरों की पहचान करना। यह बात भी दुबारा तर्क और विश्लेषण के उद्देश्य पर आधारित है कि क्या $Y$, $X$ पर निर्भर है या $X$, $Y$ पर निर्भर है। अतः आंकड़ों के एक ही समुच्चय से दो समाश्रयण समीकरणों की प्राप्ति की जा सकती है। ये हैं i) $Y$ को $X$ पर आश्रित मान लिया गया है (इसे $X$ रेखा पर $Y$) के रूप में माना जाता है और ii) $X$ को $Y$ पर आश्रित मान लिया गया है (इसे $Y$ रेखा पर $X$) के रूप में माना जाता है।

समाश्रयण विश्लेषण को उन अवस्थाओं में भी प्रयोग किया जा सकता है जहां एक आश्रित चर को बहुत से स्वतंत्र चरों की संख्या से समझाया जाता है। ऐसे मामले को बहु–समाश्रयण (multiple regression) कहते हैं। उच्च समाश्रयण निदर्शों में बहुत से आश्रित और स्वतंत्र चर हो सकते हैं।

अब तक आप सोच रहे होंगे कि 'समाश्रयण' शब्द का प्रयोग क्यों किया गया है, क्योंकि इसका अर्थ तो घटाना या कम करना होता है। यह नाम एक घटना के साथ जुड़ा हुआ है, जोकि उस समय प्रेक्षित की गई जब इन धारणाओं को विकसित किया जा रहा था। पिता की ऊँचाई ($X$) तथा बेटे की ऊँचाई ($Y$) के संबंध में एक अध्ययन में यह प्रेक्षित किया गया कि सबसे ऊँचे पिताओं के बेटों की औसत ऊँचाई में इन पिताओं की औसत ऊँचाई से कम होने के प्रवृति है। इस तरह सबसे कम ऊँचाई वाले पिताओं के बेटों की औसत ऊँचाई में इन पिताओं की औसत ऊँचाई से अधिक ऊँचाई होने की प्रवृति है। इस घटना को **माध्य की तरफ समाश्रयण होना** कहा गया है। चाहे यह उस समय कुछ अजीब–सा महसूस हुआ हो, लेकिन बाद में यह पाया गया कि इसका कारण वर्ग के उप–वर्गों में प्राकृतिक प्रसरण हैं।

इसी प्रकार की प्रक्रियाएं बहुत–सी समस्याओं तथा आंकड़ों में घटित हुई। इसकी व्याख्या यह है कि कुछ जननिक कारकों के अतिरिक्त, अनियमित प्राकृतिक परिवर्तनों के कारण बहुत से लंबे व्यक्ति औसत ऊँचाई के परिवारों से होते हैं तथा इनके बेटे कुल मिलाकर इनसे कम ऊँचाई के होते हैं। ठीक इसी प्रकार की प्रक्रिया पैमाने के निचले सिरे पर भी लागू होती है।

## 5.8 रैखिक संबंध : द्विचर स्थिति

$X$ और $Y$ के बीच, सरलतम संबंध शायद एकघाती निर्धारणात्मक फलन के रूप में है और जो है

$$Y_i = a + bX_i \qquad \ldots(5.9)$$

उपर्युक्त समीकरण में $X$ स्वतंत्र चर या व्याख्यात्मक चर है और $Y$ आश्रित चर या वर्णित चर है। आपको याद होगा कि पादांक $i$ प्रेक्षण संख्या को दर्शाता है और $i$ का दायरा 1 से $n$ तक का है। अतः $Y_1$ आश्रित चर का पहला प्रेक्षण है और $X_5$ स्वतंत्र चर का पाँचवा प्रेक्षण है और इसी तरह आगे भी।

समीकरण (5.9) से पता चलता है कि $Y$ पूर्णतया $X$ और $a$ और $b$ प्राचलों से निर्धारित है। मान लीजिए हमारे पास प्राचल मान हैं; $a = 3$ और $b = 0.75$, तब हमारा रैखिक समीकरण है, $Y = 3 + 0.75X$ ।

इस समीकरण से हम $X$ के दिए गए मानों के लिए, $Y$ मान ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के रूप में, जब $X = 8$ तो हम $Y = 9$ पाते हैं। अतः यदि हमारे पास $X$ के विभिन्न मान हैं तब (5.9) के आधार पर हम $Y$ के संगत मानों की प्राप्ति करते हैं। यही नहीं, यदि दो प्रेक्षणों के लिए $X_i$ समान है तो $Y_i$ के मान भी, दोनों प्रेक्षणों के लिए एक जैसे ही होंगे। $X$ पर $Y$ वाले आलेख से पता चलता है कि सीधी रेखा से कोई विचलन नहीं है और यहाँ a और b अंतः खंडित है।

यदि (5.9) से प्राप्त निर्धारणात्मक निदर्श की ओर हम ध्यान दें तो हम पाएंगे कि चरों के बीच आर्थिक अंतः संबंध व्यक्त करने में यह उपयुक्त नहीं है। जैसे, मान लीजिए $Y =$ उपभोग और $X =$ परिवारों की आय है। मान लीजिए आप उत्तरोत्तर महीनों के लिए अपनी आय ओर उपभोग व्यय का रिकार्ड रखते हैं। जिन महीनों में आपकी आमदनी एक जैसी ही रहती है, क्या उन महीनों में उपभोग व्यय भी एक जैसा ही रहता है। यहां हम यह समझाने का प्रयास कर रहे हैं कि आर्थिक संबंध में कुछ निश्चित अनियमितताओं का समावेश रहता है।

इसलिए, हम माल लेते हैं कि $Y$ और $X$ के बीच का संबंध स्टोकैस्टिक है और हम (5.9) में एक विभ्रम जोड़ देते हैं। अतः हमारा यादृच्छिक प्रतिमान होगा :

$$Y_i = a + bX_i + e_i \qquad \ldots(5.10)$$

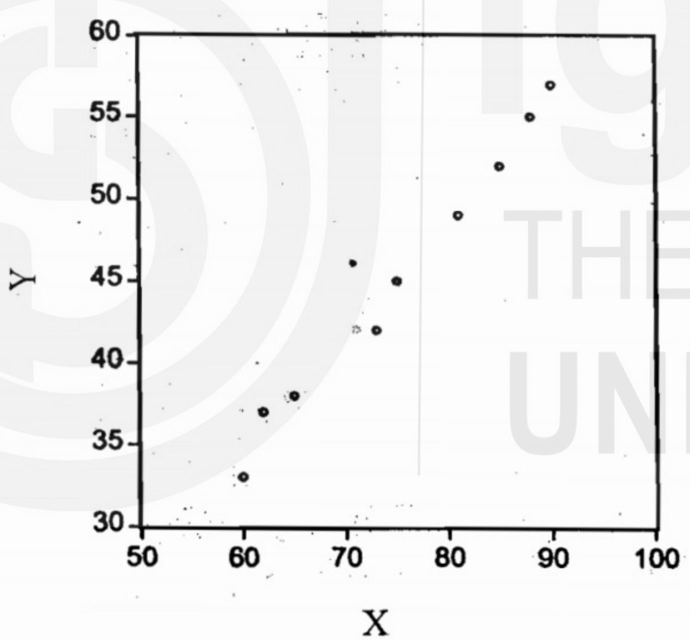
जहां $e_i$ एक विभ्रम है। जीवन की वास्तविक स्थितियों में $e_i$ मानवीय व्यवहार में होने वाली अनियमितताओं और वर्जित चरों (यदि निदर्श में हो तो) को दर्शाता है। याद रखिए कि (5.10) को दायें तरफ के दो भाग हैं अर्थात i) निर्धारणात्मक भाग (जो है, $a + bX_i$ और ii) यादृच्छिक या अनियमित भाग (अर्थात $e_i$)। समीकरण (5.10) से पता चलता है कि यदि दो प्रेक्षणों के लिए $X$ पहले जैसा ही रहता है तो अलग–अलग $e_i$ के कारण यह आवश्यक नहीं है कि $Y_i$ भी वैसा ही रहे। अतः हम (5.10) को आरेख पेपर पर खींचते हैं तो प्रेक्षण सीधी रेखा में नहीं रहेंगे।

**उदाहरण 5.1**

दस वर्षों में हुई वर्षा और कृषि उत्पादन का ब्यौरा, सारणी 5.4 में दिया गया है;

सारणी 5.4: वर्षा और कृषि उत्पादन

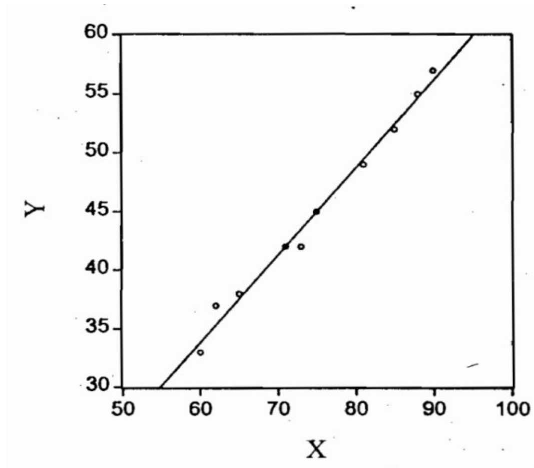
| वर्षा मि. मीटर में | कृषि उत्पादन टनों में |
|---|---|
| 60 | 33 |
| 62 | 37 |
| 65 | 38 |
| 71 | 42 |
| 73 | 42 |
| 75 | 45 |
| 81 | 49 |
| 85 | 52 |
| 88 | 55 |
| 90 | 57 |




चित्र 5.4 प्रकीर्ण आरेख

अब हम इस आंकड़े का ग्राफ बनाते हैं। प्रकीर्ण आरेख, चित्र 5.4 की भांति नज़र आयेगा। चित्र 5.4 पर ग़ौर करने से हमें पता चलता है कि बिंदु सीधी रेखा में नहीं हैं। लेकिन ऊपर की तरफ बढ़ते हुए वे इस प्रकार प्रवृत है कि उन्हें जोड़ने से सीधी रेखा नज़र आयेगी।

आइए अब प्रकीर्ण आलेख के साथ समाश्रयण रेखा भी खींचें।




**चित्र 5.5: समाश्रयण रेखा**

समाश्रयण रेखा और प्रेषक्षों के बीच का ऊर्ध्वाधर अंतर विभ्रम $e_i$ है। समाश्रयण रेखा के संगत मान को प्रागुक्ति मान या प्रत्याशित मान कहते हैं। दूसरी तरफ, स्वतंत्र चर के किसी विशिष्ट मान से संगत करने वाले आश्रित चर के वास्तविक मान को प्रेक्षित मान कहते हैं। अतः विभ्रम से आशय, प्रागुक्ति मान और प्रेक्षित मान के बीच का अंतर है।

अब प्रश्न उठता है कि, 'हम समाश्रयण रेखा की प्राप्ति कैसे करते हैं? आंकड़ों के लिए सीधी रेखा बनाने की क्रियाविधि इस प्रकार है।

## 5.9 विभ्रमों का न्यूनतमीकरण

जैसा कि हमने पहले उल्लेख किया था, सीधी रेखा को इस समीकरण द्वारा निरूपित किया जाता है

$$Y_i = a + bX_i$$

जहां $b$ ढाल (slope) है और $a$, y-अक्ष पर अंतः खंड (intercept) है। सीधी रेखा की अवस्थिति $a$ और $b$ के मानों पर निर्भर करती हैं, जिन्हें *प्राचल* (parameter) *कहते* हैं। अतः अब हमें एकत्रित आंकड़ों से इन प्राचलों का **आकलन** करना है। (खंड 7; आकलन की संकल्पना में आप इससे संबंधित अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे)। आंकड़ों के अनुरूप सर्वाधिक श्रेष्ठ रेखा प्राप्त करने के लिए हमें $a$ और $b$ के आकलन इस तरीक़े से प्राप्त करने होंगे ताकि विभ्रम $e_i$ न्यूनतम हो।

चित्र 5.4 में $y$ के प्रेक्षित एवं प्रागुक्ति मानों के ये अंतर, प्रेक्षित बिंदु से समाश्रयण रेखा तक y-अक्ष के समांतर खींची गई रेखाओं द्वारा दिखाए गए हैं। इन खंडों की लंबाई प्रेक्षित बिंदुओं पर विभ्रम को व्यक्त करती है।

जैसा कि हमने पहले माना था, $n$ प्रेक्षणों को $(X_i, Y_i)$ से सूचित किया जाएगा जहां पर $i = 1, 2, ......, n$ है। कृषि उत्पादन और वर्षा से संबंधित उदाहरण 5.1 में $n = 10$ है। मान लीजिए हम $X_i$ पर $Y_i$ के प्रागुक्ति मान को $\hat{Y}_i$ से सूचित करते हैं (संकेत $\hat{Y}_i$ को '$Y_i$ -cap' या '$Y_i$ -hat' के रूप में स्पष्ट किया जाता है)। अतः

$$\hat{Y}_i = a + bX_i,\ i = 1, 2, ....., n.$$

तब $i$वें प्रेक्षित बिंदु पर विभ्रम होगा

$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ……(5.11)

सबसे अच्छा तो यह होगा कि हम $a$ और $b$ के ऐसे मान प्राप्त करें जिससे प्रत्येक $e_i$, $i = 1, 2, ......n$, शून्य के बराबर हो जायें। लेकिन, यह तब तक असंभव है, जब तक सभी बिंदु सरल रेखा पर न हों, जिसकी संभावना बहुत कम है। अतः हमें $e_i$, $i = 1, 2, ......n$, के संचय को न्यूनतम करने से ही संतुष्ट होना पड़ेगा। हमारे समक्ष कौन से विकल्प हैं ?

- यह सोचना आकर्षक लगता है कि $e_i$ , i = 1, 2,......, $n$, के कुल योग अर्थात $\sum_{i=1}^{n} e_i$ उचित विकल्प है। लेकिन ऐसा नहीं है, क्योंकि रेखा के ऊपर बिंदुओं के लिए $e_i$ का मान धनात्मक तथा रेखा से नीचे बिंदुओं के लिए $e_i$ का मान ऋणात्मक है। अतः अगर विभ्रम बड़े धनात्मक तथा बड़े ऋणात्मक भी हो तो यह संभव है कि $\sum_{i=1}^{n} e_i$ बहुत छोटा होगा।
- दूसरी संभावना है कि यदि हम $a = \bar{y}$ ($Y_i$ का समांतर माध्य) और $b = 0$, ले तो $\sum_{i=1}^{n} e_i$ को शून्य के बराबर किया जा सकता है। इस स्थिति में, हमें सभी प्रागुक्तियों के लिए $X$ के मान की आवश्यकता नहीं पड़ती। $X$ के प्रेक्षित मान के बावजूद भी प्रागुक्ति मान समान रहता है। यह प्रामाणिक रूप से ग़लत है।
- तो $\sum_{i=1}^{n} e_i$ निकष में कहाँ गड़बड़ है? इसमें मुख्य गड़बड़ यह है कि यह $e_i$ के चिह्न का हिसाब रखता है, जबकि यहां विभ्रम का आकार महत्वपूर्ण है। विभ्रम चाहे धनात्मक हो या ऋणात्मक, वास्तव में कोई महत्व नहीं रखता। अतः $\sum_{i=1}^{n} |e_i|$ न्यूनतम करने में अधिक उपयुक्त निकष है। याद रखें कि $|e_i|$ का अर्थ, $e_i$ के पूर्ण मान (absolute value) से है। अतः, यदि $e_i = 5$ है तब भी $|e_i| = 5$ है और यदि $e_i = -5$ है तब $|e_i| = 5$ भी है। लेकिन, इस विकल्प में परिकलन संबंधी कुछ समस्याएं नज़र आ रही हैं।
- सैद्धांतिक और परिकलन संबंधी कारणों से इस निकष की तुलना से न्यूनतम वर्ग निकष को वरीयता दी जाती है। जबकि निरपेक्ष मान निकष में, $e_i$ के चिह्न को इसके निरपेक्ष मान लेकर हटा दिया जाता है। न्यूनतम वर्ग निकष (least squaring criterion) में इसके वर्गन से ऐसा किया जाता है। याद रखें कि 5 और –5 अर्थात दोनों का वर्ग 25 है। इस युक्ति को गणितीय और परिकलन की दृष्टि से अधिक रोचक पाया गया है।

निम्नलिखित अनुभाग में हम न्यूनतम वर्ग विधि की विस्तृत जानकारी देंगे।

## 5.10 न्यूनतम वर्ग विधि

न्यूनतम वर्ग विधि (method of least squres) में हम विभ्रम मदों के वर्ग के योग $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ को न्यूनतम बनाते हैं, अर्थात,

(5.9) से, हम पाते हैं $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

जो दर्शाता है $e_i = Y_i - (a + bX_i) = Y_i - a - bX_i$

अतः $= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a - bX_i)^2$ …(5.12)

अगला प्रश्न है : हम (5.12) को कम से कम करने के लिए a और b के मानों की प्राप्ति किस प्रकार करते हैं ?

- आप में से जो विद्यार्थी अवकलन (differentiation) की संकल्पना से अवगत हैं, उन्हें याद होगा कि फलन का मान न्यूनतम होता है जब फलन का पहला अवकलज शून्य और दूसरा अवकलज धनात्मक होता है। यहां, हमें $a$ और $b$ के मानों का चयन करना है। अतः $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ न्यूनतम होगा जब $a$ और $b$ के सापेक्ष इसके आंशिक अवकलज शून्य हैं। $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ के आंशिक अवकलजों की प्राप्ति इस प्रकार की जाती है :

  $$\frac{\partial \sum_i e_i^2}{\partial a} = \frac{\partial \sum_i (Y_i - a - bX_i)^2}{\partial a} = 2 \cdot (-1) \cdot \sum_i (Y_i - a - bX_i)$$
  …(5.13)

  $$\frac{\partial \sum_i e_i^2}{\partial b} = \frac{\partial \sum_i (Y_i - a - bX_i)^2}{\partial b} = 2 \cdot (-X_i) \cdot \sum_i (Y_i - a - bX_i) \quad \ldots(5.14)$$

  (5.13) और (5.14) को शून्य के बराबर करने से और पदों के हेरफेर से, हम निम्नलिखित दो समीकरणों को प्राप्त करते हैं।

  $$\sum_{i=1}^{n} Y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \ldots(5.15)$$

  $$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = a\sum_{i=1}^{n} X_i + b\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \ldots(5.16)$$

  (5.15) और (5.16) अर्थात इन दोनों समीकरणों को न्यूनतम वर्ग के प्रसामान्य समीकरण कहते हैं। ये दो अज्ञातों में दो युगपत रैखिक समीकरण हैं। इन्हें $a$ तथा $b$ के मानों की प्राप्ति के लिए हल किया जा सकता है।

- आप में से जो अवकलन की संकल्पना से अवगत नहीं है, उन्हें व्यावहारिक ज्ञान की प्राप्ति करनी चाहिए (हमारा सुझाव है कि आपको अवकलन की संकल्पना सीखनी चाहिए और जो अर्थशास्त्र के क्षेत्र में काफी उपयोगी है)। हम कह सकते हैं कि (5.15) और (5.16) में दिए गए प्रसामान्य समीकरणों को प्राप्त करने के लिए, रैखिक समीकरण से $a$ और $b$ के गुणांकों को गुणा कीजिए और सभी प्रेक्षणों के योगफल कीजिए। यहां रैखिक समीकरण $Y_i = a + bX_i$ है। पहला प्रसामान्य समीकरण साधारण रूप से रैखिक समीकरण $Y_i = a + bX_i$ है (क्योंकि $a$ का गुणांक 1 है)

  $$\sum Y_i = \sum a + \sum bX_i \text{ or } \sum Y_i = na + b\sum X_i$$

  दूसरा प्रसामान्य समीकरण, $X_i$ द्वारा गुणित रैखिक समीकरण है (क्योंकि $b$ का गुणांक $X_i$)

  $$\sum X_i Y_i = \sum aX_i + \sum bX_i^2 \text{ या } \sum X_i Y_i = a\sum X_i + b\sum X_i^2$$

प्रसामान्य समीकरणों को प्राप्त करने के बाद, हम मौजूद आंकड़ों के समुच्चय से $a$ और $b$ के मानों को परिकलित करते हैं।

**उदाहरण 5.2:** मान लीजिए कृषि उत्पादन की मात्रा वर्षा की मात्रा पर निर्भर करती है। उदाहरण 5.1 में दिए गए आंकड़ों से रैखिक समाश्रयण बनाइए।

इस मामले में आश्रित चर ($Y$), कृषि उत्पादन की मात्रा है और स्वतंत्र चर ($X$), वर्षा की मात्रा है। फिट किया जाने वाले समाश्रयण समीकरण है

$$Y_i = a + bX_i + e_i$$

उपर्युक्त समीकरण के लिए हम न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रसामान्य समीकरण ज्ञात करते हैं। ये समीकरण, (5.15) और (5.16)में दिए गए हैं। अब निम्नलिखित के अनुसार सारणी बनाइए।

**सारणी 5.5: समाश्रयण रेखा का परिकलन**

| $X_i$ | $Y_i$ | $X_i^2$ | $X_iY_i$ | $\hat{Y}_i$ | $e_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 33 | 3600 | 1980 | 33.85 | -0.85 |
| 62 | 37 | 3844 | 2294 | 35.34 | 1.66 |
| 65 | 38 | 4225 | 2470 | 37.57 | 0.43 |
| 71 | 42 | 5041 | 2982 | 42.03 | -0.03 |
| 73 | 42 | 5329 | 3066 | 43.51 | -1.51 |
| 75 | 45 | 5625 | 3375 | 45.00 | 0.00 |
| 81 | 49 | 6561 | 3969 | 49.46 | -0.46 |
| 85 | 52 | 7225 | 4420 | 52.43 | -0.43 |
| 88 | 55 | 7744 | 4840 | 54.66 | 0.34 |
| 90 | 57 | 8100 | 5130 | 56.15 | 0.85 |
| योग $\sum_i X_i = 750$ | $\sum_i Y_i = 450$ | $\sum_i X_i^2 = 57294$ | $\sum_i X_iY_i = 34526$ | $\sum_i \hat{Y}_i = 450$ | $\sum_i e_i = 0$ |

प्रसामान्य समीकरण (5.15) और (5-16) में सारणी 5.5 से मान रखने पर हमें निम्नलिखित की प्राप्ति होती है :

$$450 = 10a + 750b$$

$$34526 = 750a + 57294b$$

इन समीकरणों को हल करने पर हमें $a = -10.73$ और $b = 0.743$ प्राप्त होता है।

इसलिए समाश्रयण रेखा, $\hat{Y}_i = -10.73 + 0.743X_i$ है।

ध्यान दीजिए कि प्रत्याशित समाश्रयण समीकरण के लिए विभ्रम योग $\sum_i e_i$ शून्य है (देखें सारणी 5.5 का अंतिम स्तंभ)

सारणी 5.5 में दिये गये परिकलन में प्रायः अनेक संख्याएं शामिल होती हैं और जो कठिनाई उत्पन्न करती हैं। अतः प्रसामान्य समीकरणों से $a$ और $b$ के मानों के परिकलन के लिए हम लघुतर विधि का प्रयोग करेंगे।

आइए लें

$x = X - \bar{X}$ और $y = Y - \bar{Y}$ जहां $\bar{X}$ और $\bar{Y}$, क्रमशः $X$ और $Y$ के समांतर माध्य हैं।

अतः $xy = (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$

प्रसामान्य समीकरणों में पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर हम पाते हैं कि

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} xy}{\sum_{i=1}^{n} x^2} \qquad \ldots(5.17)$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} \qquad \ldots(5.18)$$

यदि आप ध्यान में लायें तो आपको पता होगा कि सहप्रसरण को इस प्रकार दर्शाते हैं $\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ .

जबकि $X$ का प्रसरण $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ द्वारा दर्शाया जाता है।

चूंकि $b = \frac{\sum_{i=1}^{n} xy}{\sum_{i=1}^{n} x^2}$, हम कह सकते हैं कि $b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ (5.19)

चूंकि इन सूत्रों को प्रसामान्य समीकरण से व्युत्पन्न किया जाता है, इसलिए इस विधि में हम $a$ और $b$ के लिए भी समान मान प्राप्त करते हैं। सारणी 5.4 में दिए गए आंकड़ों के लिए, इस विधि से हम $a$ और $b$ के मान परिकलित करते हैं। इस उद्देश्य के लिए, हम सारणी 5.6 का निर्माण करते हैं।

**सारणी 5.6 : समाश्रयण रेखा का परिकलन (लघुतर विधि)**

| $X_i$ | $Y_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i\ y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 33 | -15 | -12 | 225 | 180 |
| 62 | 37 | -13 | -8 | 169 | 104 |
| 65 | 38 | -10 | -7 | 100 | 70 |
| 71 | 42 | -4 | -3 | 16 | 12 |
| 73 | 42 | -2 | -3 | 4 | 6 |
| 75 | 45 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 81 | 49 | 6 | 4 | 36 | 24 |
| 85 | 52 | 10 | 7 | 100 | 70 |
| 88 | 55 | 13 | 10 | 169 | 130 |
| 90 | 57 | 15 | 12 | 225 | 180 |
| कुल = 750 | 450 | 0 | 0 | 1044 | 776 |

सारणी 5.6 के आधार पर हम पाते हैं कि

$\bar{X} = \frac{750}{10} = 75$ और $\bar{Y} = \frac{450}{10} = 45$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} xy}{\sum_{i=1}^{n} x^2} = \frac{776}{1044} = 0.743$$

$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 45 - 0.743 \times 10 = -10.73$

अतः इस विधि में समाश्रयण रेखा भी $\hat{Y}_i = -10.73 + 0.743 X_i$ …(5.20) है।

(5.20) में गुणांक $b$, समाश्रयण गुणांक कहलाता है। जब $X$ में यूनिट बढ़ोतरी होती है तो गुणांक $Y$ में भी बढ़ने वाली संख्या को प्रभावित करता है। समाश्रयण समीकरण (5.20) में, गुणांक b = 0.743 दर्शाता है कि यदि वर्षा की मात्रा में 1 मिमी. से बढ़ोतरी होती है तो कृषि उत्पादन 0.743 हज़ार टन बढ़ जाएगा।

समाश्रयण गुणांक का विस्तृत प्रयोग होता है। यह भी विश्लेषण का एक महत्वपूर्ण उपकरण है। जैसे, यदि $Y$ कुल खपत और $X$ कुल आय है तो $b$, सीमांत खपत प्रवृत्ति (एम.पी.सी.) को दर्शाता है।

## 5.11 प्रागुक्ति

समाश्रयण के अध्ययन में मुख्य रूचि, पूर्वानुमान (forecast) करने की योग्यता में निहित है। पिछले अनुभाग के उदाहरण 5.1 में हमने माना था कि कृषि उत्पादन की मात्रा होने वाली वर्षा की मात्रा पर निर्भर करती है। हमने प्रेक्षित आकड़ों के लिए रैखिक समीकरण फिट किया और इस संबंध की प्राप्ति की

$\hat{Y}_i = -10.73 + 0.743 X_i$

इस समीकरण से हम प्राप्त वर्षा की मात्रा से कृषि उत्पादन की मात्रा का पूर्वानुमान लगा सकते हैं। अब जब वर्षा 60 मिमी. है तो कृषि उत्पादन है

$(-10.73 + 0.74 \times 60) = 33.85$ हज़ार टन।

यह राशि समाश्रयण समीकरण पर आधारित *प्रागुक्ति मान* (predicted value) है। इसी ढ़ंग से हम $X$ के विभिन्न मानों के लिए $Y$ के प्रागुक्ति मानों की प्राप्ति कर सकते हैं।

प्रागुक्ति मान की प्रेक्षित मान से तुलना कीजिए। सारणी 5.4 से जहां प्रेक्षित मान दिए गए हैं हम पाते हैं कि जब वर्षा की मात्रा 60 मिमी. है तो कृषि उत्पादन 33 हज़ार टन है। असल में $X$ के प्रेक्षित मानों के लिए प्रागुक्ति मान $\hat{Y}_i$, सारणी 5.5 के पांचवे कॉलम में दिए गए हैं। अतः जब वर्षा की मात्रा 60 मिमी. है तो प्रागुक्ति मान 33.85 हज़ार टन है। अतः विभ्रम मान $e_i$, –0.85 हज़ार टन है।

अब प्रश्न उठता है कि, प्रेक्षित और प्रागुक्ति मानों में से हमें किस पर विश्वास करना चाहिए? अन्य शब्दों में भविष्य में कृषि उत्पादन की मात्रा क्या होगी जब वर्षा की मात्रा 60 मिमी. है? हमारे समाश्रयण रेखा के आधार पर यह 33.85 टन दिया गया है। और ये मान हमें स्वीकृत है, क्योंकि यह समग्र आंकड़ों पर आधारित है। –0.85 के विभ्रम को यादृच्छिक अनियमितता के रूप में माना गया है और जिसे दोहराया नहीं जाएगा।

हमारे मस्तिष्क मे आने वाला दूसरा प्रश्न है कि, क्या $X$ के किसी भी मान के लिए प्रागुक्ति मान्य है? उदाहरण के लिए, समाश्रयण समीकरण से हम पाते हैं कि जब वर्षा न के बराबर अर्थात शून्य होगी, कृषि उत्पादन –10.73 हज़ार टन होगा।

लेकिन हमारी सामान्य बुद्धि बताती है कि कृषि उत्पादन ऋणात्मक नहीं हो सकता! क्या हमारे इस समाश्रयण समीकरण में कुछ त्रुटि है? असल में यहां समाश्रयण समीकरण को 60 से 90 मिमी. की रेंज में होने वाली वर्षा के आंकड़े के आधार पर आकलित किया गया है। अतः $X$ की इस रेंज में प्रागुक्ति मान्य वैध है। हमारा पूर्वानुमान $X$ के दूरस्थ मानों के लिए नहीं होना चाहिए।

यहां उठने होने वाला तीसरा प्रश्न है कि, 'क्या प्रागुक्ति मान ही सही मान है?' यह *निर्धारण गुणांक* (coefficient of determination) *पर* निर्भर करता है। यदि निर्धारण गुणांक एक के सन्निकट है तो प्रागुक्ति के सही साबित होने की संभावना अधिक है। लेकिन, प्रागुक्ति कुछ ऐसे आकस्मिक अवयवों से बाधित रहती है जो मनुष्य के व्यवहार और कुछ अन्य अप्रत्याशित कारकों से संबंधित है।

## 5.12 समाश्रयण और सहसंबंध के बीच का संबंध

समाश्रयण विश्लेषण में दो चरों $(X,Y)$ की स्थिति एक दूसरे से भिन्न होती है कि $Y$ ऐसा चर है जिसका पूर्वानुमान करना है और $X$ ऐसा चर है जिससे संबंधित जानकारी को प्रयोग में लाना है। वर्षा–कृषि उत्पादन समस्या में, वर्षा के आधार पर कृषि उत्पादन का पूर्वानुमान लगाना सही है। लेकिन इस बात में दम नहीं कि कृषि उत्पादन के आधार पर होने वाली वर्षा का पूर्वानुमान लगाने का प्रयास किया जाये। लेकिन, अर्थशास्त्र और सांख्यिकी में प्राप्त अंकों के मामले में (देखें सारणी 5.1), दोनों में से एक $X$ और दूसरा $Y$ होगा। अतः हम दो प्रागुक्ति संबंधी समस्याओं पर विचार करते हैं (i) सांख्यिकी में प्राप्त अंकों $(X)$ के आधार पर अर्थषास्त्र में प्राप्त अंक $(Y)$ का पूर्वानुमान लगाना; और (ii) अर्थषास्त्र में प्राप्त अंकों $(Y)$ से सांख्यिकी में प्राप्त अंकों $(X)$ का पूर्वानुमान लगाना ।

अतः स्वतंत्र और आश्रित चरों के चयन के आधार पर आंकड़ों के दिए गए समुच्चय से हमें दो समाश्रयण गुणांकों की प्राप्ति हो सकती है। ये हैं;

क) $X$ रेखा पर $Y$, $Y_i = a + bX_i$

ख) $Y$ रेखा पर $X$, $X_i = \alpha + \beta Y_i$

आप कह सकते हैं, 'कि दो अलग–अलग रेखाओं की प्राप्ति की आवष्यकता क्या है? $X$ रेखा पर $Y$ के पदों को पुनः क्रमबद्ध करने पर हम $X_i = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b} Y_i$ प्राप्त करते हैं। अतः हमारे पास $\alpha = -\frac{a}{b}$ और $\beta = \frac{1}{b}$ होना चाहिए। लेकिन, ये प्रेक्षण सीधी रेखा में नहीं है और $X$ और $Y$ के बीच का संबंध गणितीय नहीं है। आपको याद होगा कि प्राचलों के आकलनों की प्राप्ति, न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा की जाती है। अतः समाश्रयण रेखा $\hat{Y}_i = a + bX_i$ की प्राप्ति $\sum_i (Y_i - a - bX_i)^2$ को न्यूनतम करके की जाती है, जबकि समाश्रयण रेखा $\hat{X}_i = \alpha + \beta Y_i$ की प्राप्ति, $\sum_i (X_i - \alpha - \beta Y_i)^2$ को न्यूनतम करके की जाती है।

लेकिन, दो समाश्रयण गुणांक $b$ और $\beta$ के बीच एक संबंध है। हमने पहले ध्यान दिया था कि $b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ इसी सूत्र द्वारा और $X$ और $Y$ की भूमिकाओं में अदला–बदली करके हम $\beta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$ प्राप्त करते हैं। लेकिन यदि परिभाषा की ओर ध्यान दें तो हम देखते हैं कि $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

अतः $b \times \beta = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \times \sigma_y^2}$ जो $r^2$ की ही भांति है।

इस $r^2$ को **निर्धारण गुणांक** (coefficient of determination) कहते हैं। अतः दो समाश्रयण गुणांकों, $Y$ का $X$ पर तथा $X$ का $Y$ पर, का गुणनफल सहसंबंध और समाश्रयण के बीच एक और संबंध है। यहां पर ध्यान दें कि प्रत्येक समाश्रयण का निर्धारण गुणांक वही है अर्थात $r^2$ के बराबर है, जिसका अर्थ है कि चाहे दो समाश्रयण रेखाएं भिन्न हैं, उनकी प्रागुक्ति की शक्ति समान है। ध्यान दें कि निर्धारण गुणांक $r^2$ की सीमा 0 और 1 के बीच है अर्थात इसका अधिकतम मान 1 और न्यूनतम मान 0 हो सकता है; लेकिन ऋणात्मक नहीं हो सकता।

पिछली चर्चा से, दो बातें स्पष्ट होकर उभरी हैं :

1. अगर प्रकीर्ण आरेख में बिंदु, सरल रेखा के निकट हैं, तब $X$ तथा $Y$ के बीच एक तीव्र रैखिक संबंध होता है तथा सहसंबंध गुणांक भी उच्च होता है।

2. अगर प्रकीर्ण आरेख में बिंदु सरल रेखा के आसपास स्थित है, तब प्रेक्षित मानों और न्यूनतम वर्ग द्वारा प्रागुक्ति मान बहुत निकट होते हैं तथा प्रागुक्ति विभ्रम $(Y_i - \hat{Y}_i)$ कम होता है।

इस प्रकार, प्रतीत होता है कि न्यूनतम वर्ग द्वारा जनित प्रागुक्ति विभ्रम, सहसंबंध गुणांक से संबंधित हैं। हम यहां इस संबंध की व्याख्या करेंगे। न्यूनतम वर्ग रैखिक समाश्रयण के प्रयोग के कारण विभिन्न बिंदुओं पर विभ्रमों के वर्गों का योग इस प्रकार है;

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

दूसरी तरफ, अगर हमने $Y$ की प्रागुक्ति के लिए $X$ का प्रयोग नहीं किया होता तो प्रागुक्ति, एक स्थिरांक (मान लीजिए), $a$ होती। न्यूनतम वर्ग निकष के अनुसार, $a$ का सर्वोत्तम मान वह होगा जिससे $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a)^2$ न्यूनतम हो, इस $a$ का मान $\bar{Y}$ है। अतः $X$ के प्रयोग के बिना विभिन्न बिंदुओं पर प्रागुक्ति विभ्रमों के वर्ग का योग $\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$ है।

इन दोनों का अनुपात $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ को एक सूचकांक के रूप में प्रयोग किया जा सकता है जोकि यह व्यक्त करेगा कि $X$ के प्रयोग से कितना लाभ हुआ है। चूंकि इस अनुपात के दोनों अंश और हर, ऋणेतर (non-negative) हैं, इसलिए यह अनुपात शून्य के बराबर या इससे अधिक होगा।

**बोध प्रश्न 3**

1. निम्नलिखित आंकड़ों से $X$ तथा $Y$ में रैखिक सहसंबंध का गुणांक ज्ञात कीजिए। $Y$ की $X$ पर समाश्रयण रेखा भी ज्ञात कीजिए जब $X = 12$ हो तो $Y$ का अनुमान भी परिकलित कीजिए।

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | : | 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 14 |
| $Y$ | : | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 |

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

2. निम्नलिखित आंकड़ों से समाश्रयण की रेखाएं प्राप्त कीजिए :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(X)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $(Y)$ | 9 | 8 | 10 | 12 | 11 | 13 | 14 | 16 | 15 |

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

3. निम्नलिखित आंकड़ों से दो समाश्रयण रेखाएं ज्ञात कीजिए :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| पति की आयु (X) | 25 | 22 | 28 | 26 | 35 | 20 | 22 | 40 | 20 | 18 |
| पत्नी की आयु (Y) | 18 | 15 | 20 | 17 | 22 | 14 | 16 | 21 | 15 | 14 |

तत्पश्चात (i) पति की आयु का अनुमान ज्ञात कीजिए, जबकि पत्नी की आयु, 19 हो, (ii) पत्नी की आयु का अनुमान ज्ञात कीजिए, जबकि पति की आयु 30 वर्ष हो।

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

4. निम्नलिखित आंकड़ों से दो समाश्रयण समीकरण प्राप्त कीजिए:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| बिक्री : | 91 | 97 | 108 | 121 | 67 | 124 | 51 | 73 | 111 | 57 |
| खरीद : | 71 | 75 | 69 | 97 | 70 | 91 | 39 | 61 | 80 | 47 |

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

5. निम्नलिखित सारणी में दिए हुए आंकड़ों से चावल की उपज $(Y)$ की पानी $(X)$ पर समाश्रयण रेखा का समीकरण प्राप्त कीजिए :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| पानी $(x)$ ( इंचें में) | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 |
| उपज $(y)$ (टनों में) | 5.27 | 5.68 | 6.25 | 7.21 | 8.02 | 8.71 | 8.42 |

40 इंच पानी के लिए सबसे प्रायिक चावल की उपज का अनुमान कीजिए।

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

## 5.13 बहुसमाश्रयण

अभी तक हमने आश्रित चर की स्थिति पर विचार किया जिसे एक स्वतंत्र चर द्वारा स्पष्ट किया जाता है। लेकिन, ऐसे भी बहुत से मामले हैं जहां आश्रित चर को दो या अधिक स्वतंत्र चरों द्वारा स्पष्ट किया जाता है। जैसे फसलों की उपज $(Y)$ को उर्वरकों $(X_1)$ और सिंचाई जल $(X_2)$ के इस्तेमाल से स्पष्ट किया जाता है। इस प्रकार के निदर्शों को बहु समाश्रयण कहते हैं। यहां, विचाराधीन समीकरण है

$$Y = \alpha + \beta X_1 + \gamma X_2 + e \qquad \ldots(5.21)$$

जहां $Y$ वर्णित चर है और $X_1$ और $X_2$ स्वतंत्र चर हैं और $e$ विभ्रम पद है। प्रस्तुतीकरण को सरल बनाने के लिए हमने पादांकों को छोड़ दिया है। अनुभाग 5.10 में चर्चित न्यूनतम वर्ग विधि के प्रयोग द्वारा, समाश्रयण समीकरण को (5.21) के लिए फिट किया जा सकता है। यहां हम $\sum e^2$ को भी न्यूनतम बनाते हैं और निम्नलिखित की भांति प्रसामान्य समीकरण प्राप्त करते हैं।

$$\begin{aligned}
\Sigma Y &= n\alpha + \beta \Sigma X_1 + \gamma \Sigma X_2 \\
\Sigma X_1 Y &= \alpha \Sigma X_1 + \beta \Sigma X_1^2 + \gamma \Sigma X_1 X_2 \qquad \ldots(5.22) \\
\Sigma X_2 Y &= \alpha \Sigma X_2 + \beta \Sigma X_1 X_2 + \gamma \Sigma X_2^2
\end{aligned}$$

उपर्युक्त समीकरण को हल करने पर हमें $\alpha$, $\beta$ और $\gamma$ के लिए आकलनों की प्राप्ति होती है। हमें प्राप्त होने वाला समाश्रयण समीकरण है :

$$\hat{Y} = \alpha + \beta X_1 + \gamma X_2 \qquad \ldots(5.23)$$

याद रखिए $X_1$ और $X_2$ के लिए विविध मानों के प्रयोग से, (5.23) के माध्यम से हम $Y$ के प्रागुक्ति या पूर्वानुमानित मान (अर्थात $\hat{Y}$) की प्राप्ति करते हैं।

$(Y, X)$ वाली द्विचर स्थिति में हम, ग्राफ कागज़ पर समाश्रयण रेखा बना सकते हैं। लेकिन ग्राफ कागज़ पर त्रिचर स्थिति $(Y, X_1, X_2)$ बनाना थोड़ा जटिल है, क्योंकि इस स्थिति में तीन आयाम होंगे। लेकिन सहजबोधनीय विचार पहले जैसा ही है और हमें सभी विभ्रमों को न्यूनतम करना है। असल में जब हम सभी विभ्रम पद $e_1, e_2, \ldots\ldots e_n$ को जोड़ते हैं तो इसका योग शून्य होगा।

बहुत सी स्थितियों में, व्याख्यात्मक चरों की संख्या दो से अधिक हो सकती है। ऐसी स्थिति में, हमें न्यूनतम वर्ग के मूलभूत सिद्धांत का अनुसरण करना होगा अर्थात $\Sigma e^2$ को न्यूनतम करना होगा। अतः, यदि $Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n X_n + e$ तब हमें

$\Sigma e^2 = \Sigma (Y - a_0 - a_1 X_1 - a_2 X_2 \ldots\ldots - a_n X_n)^2$ को न्यूनतम करना होगा और प्रसामान्य समीकरण ज्ञात करना होगा।

अब प्रश्न उठता है कि ''समाश्रयण समीकरण में कितने चर जोड़े जाने चाहिए?'' इस बात को हम अपनी तार्किक सोच पर छोड़ते हैं कि ऐसे महत्वपूर्ण समझे जाने वाले चर कौन से हैं। क्या सांख्यिकीय परीक्षणों के आधार पर भी चर की पहचान की जानी चाहिए? इन परीक्षणों की चर्चा खंड 4 में की जाएगी।

अब हम नीचे बहु समाश्रयण का संख्यात्मक उदाहरण प्रस्तुत करते हैं;

**उदाहरण 5.3**

कोई विद्यार्थी विश्वविद्यालय के निकट किराये की व्याख्या करना चाहती है। वह मासिक किराया, घर के क्षेत्रफल और विश्वविद्यालय परिसर से घर की दूरी से संबंधित आंकड़े एकत्र करती है और इन्हें, रैखिक समाश्रयण प्रतिमान में फिट करती है,

| किराया ('000 रूपयों में) $Y$ | क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) $X_1$ | दूरी (किमी. में) $X_2$ |
|---|---|---|
| 20 | 65 | 5.7 |
| 25 | 66 | 3.2 |
| 26 | 70 | 7.5 |
| 28 | 70 | 6.5 |
| 30 | 75 | 5.0 |
| 31 | 76 | 4.0 |
| 32 | 72 | 6.0 |
| 33 | 75 | 6.2 |
| 35 | 78 | 3.5 |
| 40 | 103 | 2.4 |

उपर्युक्त उदाहरण में वसूल किया गया किराया $(Y)$ आश्रित चर है, जबकि घर का क्षेत्रफल $X_1$ और विश्वविद्यालय परिसर से घर की दूरी $(X_2)$, स्वतंत्र चर है। समाश्रयण रेखा के आकलन में शामिल चरण हैं;

i) अनुमानित समाश्रयण समीकरण को ज्ञात कीजिए। इस स्थिति में, यह $Y = \alpha + \beta X_1 + \gamma X_2 + e$ द्वारा दर्शाया गया है।

ii) अनुमानित समाश्रयण समीकरण के लिए प्रसामान्य समीकरण ज्ञात कीजिए। इस स्थिति में प्रसामान्य समीकरण हैं :

$$\Sigma Y = n\alpha + \beta\Sigma X_1 + \gamma\Sigma X_2$$
$$\Sigma X_1 Y = \alpha\Sigma X_1 + \beta\Sigma X_1^2 + \gamma\Sigma X_1 X_2$$
$$\Sigma X_2 Y = \alpha\Sigma X_2 + \beta\Sigma X_1 X_2 + \gamma\Sigma X_2^2$$

iii) सारणी 5.7 की भांति, सारणी बनाइए।

iv) सारणी से प्राप्त मानों को प्रसामान्य समीकरण में रखें।

v) $\alpha$, $\beta$ और $\gamma$ के आकलनों को हल कीजिए।

सारणी 5.7 : बहु समाश्रयण का परिकलन

| Y | $X_1$ | $X_2$ | $X_1Y$ | $X_2Y$ | $X_1^2$ | $X_2^2$ | $X_1X_2$ | $\hat{Y}$ | $e_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 65 | 5.7 | 1300 | 114 | 4225 | 32.49 | 370.5 | 25.49 | -5.49 |
| 25 | 66 | 3.2 | 1650 | 80 | 4356 | 10.24 | 211.2 | 25.71 | -0.71 |
| 26 | 70 | 7.5 | 1820 | 195 | 4900 | 56.25 | 525 | 27.94 | -1.94 |
| 28 | 70 | 6.5 | 1960 | 182 | 4900 | 42.25 | 455 | 27.85 | 0.15 |
| 30 | 75 | 5 | 2250 | 150 | 5625 | 25 | 375 | 30.00 | 0.00 |
| 31 | 76 | 4 | 2356 | 124 | 5776 | 16 | 304 | 30.37 | 0.63 |
| 32 | 72 | 6 | 2304 | 192 | 5184 | 36 | 432 | 28.72 | 3.28 |
| 33 | 75 | 6.2 | 2475 | 204.6 | 5625 | 38.44 | 465 | 30.11 | 2.89 |
| 35 | 78 | 3.5 | 2730 | 122.5 | 6084 | 12.25 | 273 | 31.24 | 3.76 |
| 40 | 103 | 2.4 | 4120 | 96 | 10609 | 5.76 | 247.2 | 42.58 | -2.58 |
| 300 | 750 | 50 | 225000 | 15000 | 562500 | 2500 | 37500 | 300 | 0 |

उपर्युक्त उल्लिखित चरणों के अनुप्रयोग से, हम इस तरह की अनुमानित समाश्रयण रेखा प्राप्त करते हैं;

$$\hat{Y} = -4.80 + 0.45X_1 + 0.09X_2$$

## 5.14 अरैखिक समाश्रयण

समाश्रयण में प्रयुक्त समीकरण अरैखिक या वक्ररेखी हो सकता है। दरअसल, इसके विविध रूप हो सकते हैं। ऐसा दो चरों वाला सरल रूप, द्विघाती समघात है। समीकरण है;

$$Y = a + bX + cX^2$$

यहां तीन प्राचल अर्थात $a, b$ और $c$ और प्रसामान्य समीकरण हैं :

$$\Sigma Y = n\alpha + b\Sigma X + c\Sigma X^2$$

$$\Sigma XY = \alpha\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3$$

$$\Sigma X^2Y = \alpha\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4$$

इन समीकरणों के लिए हल करने पर हम a , b और c के मान प्राप्त करते हैं।

कुछ निश्चित अरैखिक समीकरणों को, लघुगणक के प्रयोग से रैखिक समीकरणो में परिवर्तित किया जा सकता है। परिवर्तित समीकरणों के प्राचलों के इष्टतम मानों की प्राप्ति करना लगभग वैसा ही है, जैसा कि पिछले अनुभाग में चर्चित प्रक्रिया में हमने बताया था। यहां हम कुछ सामान्य रूप से प्रयुक्त अरैखिक समीकरण और संबंधित परिवर्तित रैखिक समीकरणों पर प्रकाश डालते हैं;

1) $Y = a\,c^{bx}$

प्राकृतिक लघुगणक से, इसे हम इस तरह लिख सकते हैं;

$\ln Y = \ln a + bX$

या $\quad Y' = \alpha + \beta X'$

जहां, $Y' = \ln Y$, $\alpha = \ln a$, $X' = X$ और $\beta = b$

2) $\quad Y = aX^b$

सामान्य लघुगणक से समीकरण को इस तरह परिवर्तित किया जा सकता है;

$\log Y = \log a + b \log X$

या $\quad Y' = \alpha + \beta X'$

जहां, $\quad Y' = \log Y, \alpha = \log a, \beta = b$ और $X' = \log X$

3) $$Y = \frac{1}{a+bX}$$

यदि हम $Y' = \dfrac{1}{Y}$ लें, तब

$Y' = a + bX$

4) $\quad Y = a + b\sqrt{X}$

यदि हम $X' = \sqrt{X}$ लें, तब

$Y = a + bX'$

एक बार अरैखिक समीकरण परिवर्तित हो जाएं तब समाश्रयण रेखा को फिट करना, उसी विधि की भांति है जिसकी चर्चा हमने अनुभाग 5.10 में की थी। इससे प्रसामान्य समीकरण को न्युत्पत्ति करते हैं और प्रेक्षित आंकड़ों से परिकलित मानों को उनमें भर देते हैं। रूपांतरित प्राचलों से, प्रतिलोम रूपांतर करके, वास्तविक प्राचलों की प्राप्ति की जा सकती है।

**बोध प्रश्न 4**

1) सारणी 5.1 में दिए सांख्यिकी और अर्थशास्त्र में अंकों के आंकड़ों के प्रयोग द्वारा $y$ का $x$ पर तथा $x$ का $y$ पर समाश्रयण परिकलित कीजिए और यह जांच कीजिए कि दोनों रेखाएं भिन्न हैं। प्रकीर्ण आरेख पर दोनों समाश्रयण रेखाओं को अंकित कीजिए। यह जांच कीजिए कि समाश्रयण गुणांकों का गुणनफल सहसंबंध गुणांक का वर्ग है।

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

2) मान लीजिए वस्त्रों पर पारिवारिक व्यय ($y$ रुपए) का वार्षिक पारिवारिक आय ($x$ रुपए) पर न्यूनतम वर्ग रैखिक समाश्रयण $y = 100 + 0.09x$ प्राप्त किया गया। यहां पर $x$ का परिसर $1000 < x < 1,00,000$ है। इस समांश्रयण रेखा की व्याख्या कीजिए। जब वार्षिक पारिवारिक आय 10,000 रुपये हो तो परिवार का वस्त्र पर व्यय की प्रागुक्ति कीजिए। जिन परिवारों की वार्षिक आय 100 रुपये तथा 10,00,000 रुपये है, उनके बारे में आपकी क्या प्रतिक्रिया है।

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

## 5.15 सार संक्षेप

इस इकाई में आपने सहसंबंध और समाश्रयण के बारे में जानकारी प्राप्त की। आपने सहसंबंध गुणांक और कोटि सहसंबंध गुणांक का भी अध्ययन किया जो दो चरों के बीच सहसंबंध या रैखिक साहचर्य की समीपता को, बिना कारण–प्रभाव संबंध पर ध्यान दिए, दर्शाता है।

इसके अलावा हमने एक महत्वपूर्ण सांख्यिकीय उपकरण अर्थात समाश्रयण की चर्चा की। समाश्रयण विश्लेषण में हमारे पास दो प्रकार के चर : (i) आश्रित, और (ii) स्वतंत्र चर होते हैं। आश्रित चर को स्वतंत्र चर द्वारा स्पष्ट किया जाता है। चरों के बीच का संबंध, गणितीय समीकरण का रूप ले लेता है। हमारी तार्किक सोच, समझ और विश्लेषण के उद्देश्य के आधार पर हम चरों को श्रेणीबद्ध करते हैं और समीकरण स्वरूप की पहचान करते हैं।

समाश्रयण गुणांक, स्वतंत्र चर के दिए गए मानों के अनुरूप आश्रित चर के मान की प्रागुक्ति करता है। लेकिन प्रागुक्ति, विश्लेषण में प्रयुक्त आंकड़ों के परिसर के भीतर कमोबेश मान्य बनी रहती है। यदि हम स्वतंत्र चरों के दूर के मानों की प्रागुक्ति करने का प्रयास करते हैं तो हमें आश्रित चर के निरर्थक मानों की प्राप्ति होती है।

## 5.18 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1) + 0.47

2) + 0.996

3) + 0.98

4) + 0.995

5) 0.84

**बोध प्रश्न 2**

1) 2/3

2) + 0.64

3) – 0.21, + 0.64, –0.30

4) + 0.82

**बोध प्रश्न 3**

1) + 0.98 ; $y = 0.64x + 0.54$; 8.2

2) $x = 0.95y - 6.4$ ; $y = 0.95x + 7.25$

3) $x = 2.23y - 12.70$ ; $y = 0.39x + 7.33$

(i) 29.6 (ii) 18.9

4) $y = 0.613x + 14.81$ ; $x = 1.360y - 5.2$

5) $y = 3.99 + 0.103x$ ; 8.11 tons

**बोध प्रश्न 4**

1) (i) $y = a + bx = 5.856 + 0.676x$

(ii) $x = \alpha + \beta y = 29.848 + 0.799y$

(iii) $r = 0.73$

(iv) $0.676 \times 0.799 = 0.54$

2. जब पारिवारिक आय 10,000 रुपये है तो वस्त्रों पर व्यय =1000 रुपये है। जब आय 1000 रुपये से कम या 1,00,000 रुपये से अधिक हो तो समाश्रयण रेखा का लागू होना आवश्यक नहीं है। इन दोनों संख्याओं के बीच एक रुपए के आधार पर आय में वृद्धि होने पर वस्त्र पर व्यय 9 पैसे बढ़ जाता है।

# इकाई 6 सूचकांक*

इकाई की रूपरेखा



## 6.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आपः

- सूचकांक को परिभाषित करना सीख सकेंगे और
- उनकी रचना तथा परिकलन कर सकेंगे।

## 6.1 विषय प्रवेश

सामान्य बोध के अनुसार 'सूचक' शब्द का अर्थ संकेतक के अतिरिक्त कुछ और नहीं होता। 'सूचकांक' शब्द इसका बहुवचन रूप होता है, लेकिन इन सभी का एक ही अर्थ होता है। एक सूचकांक द्वारा, दो या दो से अधिक अवधियों या स्थानों के अंतर्गत बहुत से चरों को एक साथ लेकर, परिवर्तन के आकार के सामान्य स्तर को व्यक्त किया जाता है। इस परिभाषा में 'चर' शब्द का अर्थ एक संख्यात्मक चर है जोकि मात्रा या राशि में मापा

---

* इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 10 जे. रॉय द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।

जा सकता है। जैसे वस्तुओं की कीमतें, मात्राएँ आदि। उदाहरण के लिए, हमारी इच्छा 2010 तथा 2020 के बीच या बम्बई तथा कलकत्ता के बीच किसी वस्तु के कीमत स्तर की तुलना करना हो सकती है। मान लीजिए 2015 तथा 2020 में चावल का उत्पादन क्रमशः 50,000 तथा 60,000 टन है। उत्पादन की तुलना के लिए 2015 को आधार वर्ष लिया जाता है, अर्थात् 2015 = 100 लिया जाता है। 2020 के लिए संगत संख्या $\frac{60{,}000}{50{,}000} \times 100 = 120$ होगी। यह सरलतम रूप में एक वस्तु का सूचकांक है, जोकि तुलनात्मक संख्या है। लेकिन व्यवहार में, सूचकांक रचना में, प्रायः बहुत सी वस्तुएँ सम्मिलित होती हैं।

कष्टदायक दशमलवों से बचने के लिए सूचकांक को, जोकि संख्याओं का अनुपात होता है, प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। अतः यदि किसी वस्तु की 2020 में लागत 45 पैसे है तथा 2019 में लागत 1.50 रूपये है तो इसका अनुपात $\frac{150}{45}$ or $3.33$ होगा। यदि इसके स्थान पर हम इस अनुपात को प्रतिशत में व्यक्त करें तो यह $\frac{150}{45} \times 3.33$ होगा। 3.33 को वर्ष 2019 पर आधारित, जोकि 100 है, 2020 का सूचकांक कहते हैं।

## 6.2 सूचकांक रचना में चरण

व्यापारिक तथा आर्थिक परिस्थितियों के पूर्वानुमान, सामान्य सूचना प्रदान करना आदि के लिए बहुत सी सरकारी तथा निजी संस्थाएँ सूचकांक के परिकलन में कार्यरत हैं।

बहुत से सामान्य प्रकार के सूचकांकों द्वारा समयावधि में चर के परिवर्तन का माप किया जाता है, लेकिन इसका अर्थ यह नहीं है कि तुलना हमेशा समयावधि में ही की जाती है। इसी प्रकार, सूचकांक की रचना किसी भी चर जैसे बौद्विक स्तर, अभिरूचि, कार्यकुशलता, उत्पादन आदि में परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए भी की जा सकती है, लेकिन, शायद कीमतों की कालश्रेणी के अध्ययन में इसका अधिकतम उपयोग होता है। इसलिए परवर्ती (subsequent) सूचकांक विवेचन में वस्तुओं की कीमतों का विशेष उल्लेख रहेगा। इनकी रचना के सिद्धांतों की सामान्य प्रकृति होने के कारण इनकों अन्य रूचि क्षेत्रों में भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

कीमत सूचकांकों के बहुत से उपयोग होते हैं। थोक मूल्य सूचकांक मुद्रा के मूल्य में हो रही कमी की सूचना देता है। इसके अतिरिक्त, उपभोक्ता कीमत सूचकांक या जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक हमें वास्तविक आय में परिवर्तन के बारे में जानकारी देता है। इसका मुख्य अनुप्रयोग महँगाई भत्ते के परिकलन, जिससे वास्तविक मजदूरी को कम होने से रोका जा सके या दो भिन्न क्षेत्रों के बीच जीवन स्तर की तुलना, में होता है। इसके द्वारा मुद्रा की क्रय शक्ति में परिवर्तनों का माप भी किया जा सकता है। सामान्य कीमत सूचकांक का व्युत्क्रम, आधारकाल के संदर्भ में, मुद्रा की क्रय शक्ति का सूचक है। उदाहरण के लिए, यदि मूल्य सूचकांक 150 हो गया है तो इसका अर्थ यह हैं कि मुद्रा की उतनी ही मात्रा अब आधारकाल में खरीदी जाने वाली वस्तुओं की मात्राओं का 100 ⁄ 150 = 0.67 या 67 प्रतिशत ही खरीदा जा सकेगा।

### 6.2.1 आधार काल का चयन

चूंकि सूचकांक द्वारा तुलनात्मक परिवर्तनों को मापा जाता है, इसलिए इनको एक चयन की गई परिस्थिति (उदाहरण के लिए समय, स्थान आदि) के साथ व्यक्त किया जाता है। इस परिस्थिति का मान 100 लिया जाता है तथा इसको आधार या सूचकांक श्रेणी का प्रारंभ बिन्दु कहा जाता है। उदाहरण के लिए, हम एक दिनांक को निश्चित करके सभी परिवर्तन उसके आधार पर मापते हैं।

आधार कोई भी एक दिन हो सकता है, जैसा कि फुटकर कीमत सूचकांक में होता है, या फिर एक वर्ष का औसत या किसी समयावधि का औसत हो सकता है।

आधारकाल का चयन करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान रखना आवश्यक हैः

1) आधार दिनांक सामान्य होना चाहिए ताकि चयन किए गए समंक किसी अनिश्चित या असामान्य परिस्थिति जैसे प्राकृतिक संकट अथवा युद्ध आदि से प्रभावित न हो। अधिक परिशुद्धता के लिए यह आवश्यक है कि विभिन्न तुलनाएँ किसी स्थिर काल से ही की जानी चाहिए।

2) आधारकाल बहुत पहले का नहीं होना चाहिए क्योंकि यदि समयावधि अधिक है तो व्यापार, आयात, उपभोगता अधिमान आदि के प्रतिरूप में अत्याधिक परिवर्तन की संभावना होती है, जिसके कारण की जाने वाली तुलना निरर्थक हो सकती है। दस वर्ष से बीस वर्ष तक का अंतराल एक आधार दिनांक के लिए उपयुक्त हो सकता है जिससे अधिक अंतराल का सूचकांक उत्तरोतर पुराना होता जाता है। ऐसे सूचकांक की तुलना में, जिनमें समयावधि अधिक होती है, अल्पकालीन सूचकांक द्वारा अधिक परिशुद्धता प्राप्त होती है।

3) आर्थिक समंकों से संबंधित सूचकांक में आधार काल का कोई आर्थिक अभिप्राय होना चाहिए।

### 6.2.2 उपयुक्त माध्य का चयन

एक सूचकांक मूलतः समंकों की श्रेणी का औसत (माध्य) ज्ञात करने का परिणाम होता है (जैसे विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपातों का माध्य)। लेकिन श्रेणी का माध्य प्राप्त करने की बहुत सी विधियाँ है : माध्य (समांतर माध्य), बहुलक, माध्यिका, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य आदि। यहाँ प्रश्न यह है कि कौन से माध्य का सूचकांक रचना में उपयोग किया जाए।

बहुलक में सरलता का गुण है लेकिन यह अनिश्चित हो सकता है। माध्यिका की भी यही सीमाएँ हैं। इसके अतिरिक्त, इनमें से कोई भी, बंटन के प्रत्येक छोर पर विद्यमान मद के आकार से प्रभावित नहीं होता। हरात्मक माध्य का सूचकांक में व्यवहारिक अनुप्रयोग बहुत ही कम है। परिणामतः बहुलक, माध्यिका तथा हरात्मक माध्य प्रायः सूचकांक के परिकलन में उपयोग नहीं किए जाते। अतः सूचकांक परिकलन में प्रायः समांतर माध्या का उपयोग किया जाता है। परिकलन में थोड़ी कठिनाई के बावजूद कभी–कभी गुणोत्तर माध्य का उपयोग भी किया जाता है।

### 6.2.3 मदों तथा उनकी संख्याओं का चयन

सूचकांक रचना में सम्मिलित की जाने वाली वस्तुओं की किस्म तथा उनकी संख्या, विचाराधीन प्रश्न–विशेष के लिए, परिकलन की मितव्ययता तथा सुविधा आदि पर निर्भर होती है। सम्मिलित की जाने वाली व्यष्टियों की संख्या तथा किस्म विभिन्न प्रकार के व्यवहारिक विचारों पर आधारित होती है। थोक मूल्य सूचकांक का उद्देश्य समयावधि में हुए परिवर्तनों का सूचक न होकर भविष्य के लिए कीमत परिवर्तन का पूर्वानुमान लगाना है, तो मदों की थोड़ी संख्या भी पर्याप्त हो सकती है। फिर भी, यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि मदों की कम संख्या के कारण सूचकांक, सामान्य स्तर का, अप्रतिनिधिक न हो जाए। अत्याधिक दीर्घकाल में वस्तुओं के निश्चित समुच्चय का उपयोग नहीं किया जाना चाहिए, क्योंकि समय के साथ कुछ वस्तुओं का महत्व कम हो सकता है तथा कुछ नई वस्तुओं के महत्व में वृद्धि हो सकती है। सामान्यतः वस्तुएँ कीमत प्रणाली के विभिन्न तत्त्वों के प्रति संवेदी (sensitive) एवं उनकी प्रतिनिधिक होनी चाहिए।

### 6.2.4 समंकों का संकलन

क्योंकि विभिन्न बाजारों में कीमतें प्रायः भिन्न होती हैं, इसीलिए उनका सकलन प्रतिनिधिक बाजार से नियमित अंतराल बात करते रहना चाहिए। उन दुकानों का, जिनसे उपभोगता प्रायः वस्तुएँ खरीदते हैं, चयन करना वांछनीय होता है। प्रत्येक संघटक व्यष्टि के निवेदित भाव की परिशुद्धता से, सूचकांक की विश्वसनीयता अत्यधिक प्रभावित होती है।

## 6.3 सूचकांक रचना की विधि

सूचकांक रचना की विभिन्न विधियाँ निम्नलिखित है :

1) सापेक्ष विधियाँ

   क) सापेक्षों का सरल माध्य

   ख) सापेक्षों का भारित माध्य

2) समूही विधियाँ

   क) सरल समूही सूत्र

   ख) भारित समूही सूत्र

   i) लास्पियर का सूचकांक

   ii) पाशे का सूचकांक

   iii) एजवर्थ–मार्शल का सूचकांक

   iv) फिशर का आदर्श सूचकांक

### 6.3.1 सापेक्ष विधियाँ

यदि हम बहुत सी वस्तुओं की एक दिए हुए दिनांक पर तथा समरूप वस्तुओं की बाद के एक दिनांक पर कीमतें लिखित करें, तो प्रत्येक वस्तु की कीमत में परिवर्तन, अर्थात् नई कीमत की पुरानी कीमत से तुलना, को प्रतिशत रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसके द्वारा हमें मूल्यानुपात प्राप्त होता है और यदि हमें विभिन्न वस्तुओं के भार ज्ञात हैं तो अगले चरण में इन मूल्यानुपातों को उनके भारों से गुणा कर दिया जाता है। अंततः इन भारित मूल्यानुपातों को जोड़कर माध्य का परिकलन किया जाय तो हमें सूचकांक प्राप्त होता है।

यह मानना अवास्तविक है कि प्रत्येक वस्तु का उपभोग समान रहा है। इसलिए अधिकतर सूचकांकों में प्रत्येक वस्तु के वास्तविक उपभोग के अनुपात का ध्यान रखा जाता है। इस प्रकार भारित करने की विधि, श्रेणी में प्रत्येक मद के तुलनात्मक महत्व को दर्शाती है।

मान लीजिए, $I$ वस्तुओं की आधारवर्ष में कीमतें

$P_{o1}, P_{o2}, \ldots . P_{ok},$ हैं

तथा वर्तमान वर्ष में कीमतें

$P_{o1}, P_{o2}, \ldots . P_{ok},$ हैं

तब $i$ वीं वस्तु का मूल्यानुपात $\frac{P_{ni}}{P_{0i}}$ होगा, जहाँ पर प = 1,2,...., $I$ है तथा अनुलग्न (subscript) O आधारवर्ष तथा $n$ वर्तमान वर्ष के संकेतक हैं।

### क) सापेक्षों का सरल माध्य

मूल्यानुपातों का समांतर माध्य लेने पर हमें निम्नलिखित सूचकांक प्राप्त होता है :

$$\text{सूचकांक} = 100\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(P_{ni}/P_{oi}\right)}{k} \qquad \ldots (6.1)$$

सरलता के लिए हम अनुलगन $i$ को न लिखकर

$$\text{सूचकांक} = 100\sum\left(\frac{P_n/P_o}{k}\right)$$ भी लिख सकते हैं।

### ख) सापेक्षों का भारित माध्य

उपयोग किए जाने वाले भारों में सबसे उपयुक्त भार प्रत्येक वस्तु का मूल्य होती हैं जिनका संकेतन, $i$ वीं वस्तु के लिए, $w_i$ से किया जाता है। हम आधारवर्ष की मात्राओं का, आधारवर्ष की कीमतों पर, मूल्य ($w_i = p_{oi}\, q_{oi}$) या वर्तमान वर्ष की मात्राओं का, वर्तमान वर्ष की कीमतों पर, मूल्य ($w_{1i} = p_{1i}\, q_{1i}$) या कोई अन्य मूल्य, भार के रूप में उपयोग कर सकते है। ये भार, किसी विवेकपूर्ण विधि द्वारा प्राप्त स्थिर घटकों का समुच्चय भी हो सकते हैं।

आधारवर्ष के मूल्यों को भार लेने पर मूल्यानुपातों के समांतार माध्य द्वारा निम्नलिखित सूचकांक प्राप्त होता है:

$$\text{सूचकांक} = \frac{\sum\frac{P_n}{P_0}\times w_0}{\sum w_0}\times 100 \qquad \ldots (6.2)$$

यहाँ पर सरलता के अनुलग्न $i$ को नहीं लिखा गया है। यहाँ पर यह ध्यान दें कि आधारवर्ष के भारों के उपयोग से निरंतरता तो बनी रहती है लेकिन समय परिवर्तन के साथ आधुनिकता का ह्यस होता है।

**उदाहरण 6.1:** निम्नलिखित सारणी में प्रति रेल–यात्रा का औसत भाड़ा प्रस्तुत है। 1948 के औसत को 100 मानकर तथा आधारवर्ष के भारों के उपयोग द्वारा परिकलन किए गए हैं।

| टिकट की श्रेणी | 2010 में यात्राओं की संख्या (दस लाखों में) $(q_0)$ | भाड़ा (रूपये) 2010 $(p_0)$ | 2020 $(p_n)$ | भार $w_0 = p_0 q_0$ | मूल्यानुपात P = $(p_n/p_0)\times 100$ | P. $w_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| पूर्ण भाड़ा | 21 | 12 | 60 | 276 | 500 | 138000 |
| भ्रमण | 25 | 6 | 30 | 150 | 500 | 75000 |
| उत्सव | 20 | 4 | 15 | 80 | 375 | 30000 |
| अवधि टिकट | 32 | 5 | 14 | 160 | 280 | 44800 |
| योग | | | | 666 | | 287800 |

सूत्र (6.2) के उपयोग द्वारा

2020 का सूचकांक $= \frac{287800}{666} = 432.13.$

वर्तमान मानों $(w_n = P_n q_n)$ को भार लेने पर

$$\text{सूचकांक} = \frac{\sum \frac{P_n}{P_0} \times w_n}{\sum w_n} \times 100 \qquad \text{... (6.3)}$$

**उदाहरण 6.2** : निम्नलिखित सारणी में प्रति रेलयात्रा का औसत भाड़ा प्रस्तुत हैं। 2010 की औसत को 100 मानकर तथा वर्तमान वर्ष के भारों के उपयोग द्वारा विभिन्न परिकलन किए गए हैं :

| टिकट की श्रेणी | 2020 में यात्राओं की संख्या (दस लाखों में) **($q_0$)** | भाड़ा (रूपये) 2010 **($p_0$)** | 2020 **($p_n$)** | भार **$w_0 = p_0 q_0$** | मूल्यानुपात **$p = (p_n/p_0)\times100$** | **P. $w_0$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| पूर्ण भाड़ा | 25 | 12 | 60 | 1500 | 500 | 750000 |
| भ्रमण | 26 | 6 | 30 | 780 | 500 | 390000 |
| उत्सव | 9 | 4 | 15 | 135 | 375 | 50630 |
| अवधि टिकट | 27 | 5 | 14 | 378 | 280 | 105800 |
| योग | | | | 2793 | | 1296430 |

सूत्र (6.3) के उपयोग द्वारा

2020 का सूचकांक $= \frac{1296430}{2793} = 464.17$

### 6.3.2 समूही विधियाँ

इस विधि में, वर्तमान या दिए हुए वर्ष में सभी वस्तुओं के समूह (कुल योग) को आधार वर्ष के इसी प्रकार के समूह के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। अतः

सरल समूही सूचकांक

$$\text{सूचकांक} = \frac{\text{वर्तमान वर्ष में कीमतों का योग}}{\text{आधार वर्ष में कीमतों का योग}} \times 100$$

$$= \frac{P_{n1} + P_{n2} + \ldots\ldots\ldots\ldots P_{nk}}{P_{01} + P_{02} + \ldots\ldots\ldots\ldots P_{0k}} \times 100$$

$$= \frac{\sum P_{ni}}{\sum P_{0i}} \times 100 = \frac{\sum P_n}{\sum P_0} \times 100 \qquad \text{... (6.4)}$$

जहाँ पर योग $\left(\sum_{i=1}^{k} \quad\right)$ चुनी हुई $k$ कीमतों पर है।

**भारित समूही सूचकांक**

$$\text{सामान्य सूचकांक} = \frac{P_{n1} + P_{n2} q_2 + \ldots\ldots\ldots P_{nk} q_k}{P_{01} q_1 + P_{02} q_2 + \ldots\ldots\ldots P_{0k} q_k} \times 100$$

$$= \frac{\sum P_{ni} q_i}{\sum P_{0i} q_i} \times 100 \text{ या केवल } \frac{\sum P_n q}{\sum P_0 q} \times 100 \qquad \text{... (6.5)}$$

यहाँ पर उपयोग किए गए भार खरीदी या बेची गई वास्तविक मात्राएँ होनी चाहिए और इनमें तब तक परिवर्तन नहीं किया जाना चाहिए जब तक सूचकांक में संशोधन की आवश्यकता न हो।

भारित सामूहिक सूचकांक के बहुत से सूत्र हैं, लेकिन भारों पर आधारित, केवल प्रायः उपयोग किए जाने वाले सूचकांकों का ही विवेचन किया जाएगा।

i) **लास्पियर का सूचकांक**

यदि हम सामान्य भारित समूही सूत्र (6.5) में आधार वर्ष की मात्राओं ($q_0$) को भार के रूप में उपयोग करें तो हमें लास्पियर का सूत्र (L) प्राप्त होगा।

$$L = \frac{\sum P_n q_0}{\sum P_0 q_0} \times 100 \qquad \text{... (6.6)}$$

यहाँ पर ध्यान दिया जाना चाहिए कि इस सूचकांक में स्थिर आधार भारों का उपयोग किया जाता है तथा यह सूत्र (6.2) में दिये मूल्यानुपातों के भारित समांतर माध्य के तुल्य (equivalent) है। अतः हम (6.6) को इस प्रकार भी लिख सकते है :

$$L = \frac{\sum \frac{P_n}{P_0} \times P_0 q_0}{\sum P_0 q_0} \times 100$$

ii) **पाशे का सूचकांक**

यदि हम सामान्य भारित समूही सूत्र (6.5) में वर्तमान वर्ष की मात्राओं ($q_n$) को भार के रूप में उपयोग करें, तो हमें पाशे का सूत्र (P) प्राप्त होगा :

$$P = \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n} \times 100 \qquad \text{... (6.7)}$$

यहाँ पर $q_n$ (जोकि वास्तव में $q_{n1}, q_{n2}, \ldots \ldots q_{nk}$) हैं)। वर्तमान वर्ष में खरीदी या बेची गई मात्राएँ हैं।

iii) **फिशर का आदर्श सूचकांक**

यह सूचकांक लास्पियर तथा पाशे के सूत्रों द्वारा प्राप्त सूचकांकों का गुणोत्तर माध्य (अर्थात् गुणनफल का वर्गमूल) होता है। इस सूचकांक की कुछ विशेषताएँ हैं (जिनका विवेचन बाद में किया जायेगा), तथा इसको फिशर का आदर्श सूचकांक कहते हैं।

$$F = \sqrt{L \times P} = \sqrt{\frac{\sum P_n q_0}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n}} \times 100 \qquad \text{... (6.8)}$$

iv) **एजवर्थ मार्शल का सूचकांक**

इस सूत्र में आधार तथा दिए हुए वर्ष की मात्राओं के माध्य को भार लिया जाता है, अर्थात् $w = \frac{1}{2}(q_0 + q_n)$ है। एजवर्थ–मार्शल का सूत्र इस प्रकार हैः

$$I = \frac{\sum P_n (q_0 + q_n)/2}{\sum P_0 (q_0 + q_n)/2} \times 100$$

$$= \frac{\sum P_n (q_0 + q_n)}{\sum P_0 (q_0 + q_n)} \times 100 \qquad \text{... (6.9)}$$

सारणी 6.1: लास्पियर, पाशे, एजवर्थ–मार्शल तथा फिशर सूचकांकों के परिकलन की व्याख्या

| मद | आधार वर्ष | | वर्तमान वर्ष | | $(p_0q_0)$ | $(p_nq_0)$ | $(p_0q_n)$ | $(p_nq_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | कीमत $(p_0)$ | मात्रा $(q_0)$ | कीमत $(p_n)$ | मात्रा $(q_n)$ | | | | |
| A | 20 | 7 | 25 | 9 | 140 | 175 | 180 | 225 |
| B | 42 | 6 | 40 | 8 | 252 | 240 | 336 | 320 |
| C | 30 | 17 | 25 | 4 | 510 | 425 | 120 | 100 |
| D | 8 | 15 | 14 | 10 | 120 | 210 | 80 | 140 |
| E | 10 | 8 | 13 | 5 | 80 | 104 | 50 | 65 |
| योग | | | | | **1102** | **1154** | **766** | **850** |

1) लास्पियर का कीमत सूचकांक $= \frac{\sum P_n q_0}{\sum P_n q_0} \times 100 = \frac{1154}{1102} \times 100 = 104.72 = 105$

2) पाशे का कीमत सूचकांक $= \frac{\sum P_n q_n}{P_0 q_n} \times 100 = \frac{850}{766} \times 100 = 110.97 = 111$

3) एजवर्थ–मार्शल का सूचकांक $= \frac{\sum P_n q_0 + \sum P_n q_n}{\sum P_0 q_0 + \sum P_0 q_n} \times 100$

$$= \frac{1154+850}{1102+766} \times 100 \qquad = \frac{2004}{1868} \times 100 = 107.28 = 107$$

4) फिशर का आदर्श सूचकांक $= \sqrt{\frac{\sum P_n q_0}{\sum P_0 q_0} \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n}} \times 100$

$$= \sqrt{[(L) \times (P)]} = \sqrt{(104.72 \times 110.97)} = 107.8 = 108$$

ध्यान दें कि कीमतों में समान परिवर्तन होने पर भी भिन्न सूत्र भिन्न मूल्य प्रदान करते हैं। इसके अलावा लास्पियर कीमत सूचकांक नयूनतम मूल्य प्रदान करता है जबकि पाशे सूचकांक अधिकतम मूल्य प्रदान करता है। इसलिये यह प्रायः कहा जाता है कि लास्पियर सूचकांक सही कीमत परिवर्तन का एक निम्नानुमान है जबकि पाशे सूचकांक एक ऊर्ध्वानुमान है।

### 6.3.3 मात्रा या आकार सूचकांक

यदि हम कीमत सूचकांक में $p$ के स्थान पर $q$ तथा $q$ के स्थान पर $p$ का उपयोग करें तो हमें मात्रा या आकार सूचकांक प्राप्त होता है, जोकि वस्तुओं की मात्राओं की तुलना के मापन को व्यक्त करता है।

1) मात्रानुपात (quantity relative) $= \frac{q_n}{q_0} \times 100$

2) मात्रानुपातों का समांतर माध्य $= 100 \sum \left(\frac{q_n}{q_0}\right) / k$

3) मात्रानुपातों के भारित माध्य सूचकांक :

क) आधारवर्ष के भार : $\frac{\Sigma(q_n/q_0)}{\Sigma w_0} \times 100$ जहाँ पर $w_0 = p_0 q_0$

ख) वर्तमान वर्ष के भार : $\frac{\Sigma(q_n/q_0) \times w_n}{\Sigma w_n} \times 100$ जहाँ पर $w_n = p_n q_n$

4) सरल समूही मात्रा–सूचकांक $= \frac{\sum q_n}{\sum q_0} \times 100$

5) लास्पियर का मात्रा सूचकांक $= \frac{\sum q_n P_0}{\sum q_0 P_0} \times 100$

6) पाशे का मात्रा सूचकांक $= \frac{\sum q_n P_n}{\sum q_0 P_n} \times 100$

7) फिशर का आदर्श सूचकांक $= \sqrt{\frac{\sum q_n P_0}{\sum q_0 P_0} \frac{\sum q_n P_n}{\sum q_0 P_n}} \times 100$

8) एजवर्थ–मार्शल का सूचकांक $= \frac{\sum q_n (P_0 + P_n)}{\sum q_0 (P_0 + P_n)} \times 100$

**बोध प्रश्न 1**

1) सूचकांकों द्वारा क्या मापा जाता है?

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

2) सूचकांक रचना में, विशेष रूप से कीमत सूचकांक के संदर्भ में, आने वाली विभिन्न कठिनाइयों का विवेचन कीजिए।

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

3) 2020 तथा 2021 के लिए 6 भिन्न वस्तुओं की कीमतें निम्नलिखित हैं। (क) समूही विधि, एवं (ख) मूल्यानुपातों का माध्य विधि में समांतर माध्य उपयोग करके सूचकांक परिकलित कीजिए।

| वस्तुएँ | 2020 में कीमत (रूपये) | 2021 में कीमत (रूपये) |
|---|---|---|
| A | 40 | 50 |
| B | 50 | 60 |
| C | 20 | 30 |
| D | 50 | 70 |
| E | 80 | 80 |
| F | 100 | 110 |

......................................................................................................

......................................................................................................

......................................................................................................

......................................................................................................

4) निम्नलिखित मदों के समूह द्वारा फिशर का आदर्श सूचकांक परिकलित कीजिए।

| मद संख्या | आधार वर्ष | | वर्तमान वर्ष | |
|---|---|---|---|---|
| | कीमत (रूपयों में) | मात्रा (किलों में) | कीमत (रूपयों में) | मात्रा (किलों में) |
| 1 | 4 | 1.0 | 3 | 4 |
| 2 | 8 | 1.5 | 7 | 5 |

......................................................................................................

......................................................................................................

......................................................................................................

......................................................................................................

......................................................................................................

5) निम्नलिखित समंकों से लास्पियर तथा पाशे के सूचकांक परिकलित कीजिए:

| | आधार वर्ष | | वर्तमान वर्ष | |
|---|---|---|---|---|
| मद | मात्रा | कीमत | मात्रा | कीमत |
| रोटी | 6.0 | 40 | 7.0 | 30 |
| मांस | 4.0 | 45 | 5.0 | 50 |
| चाय | 0.5 | 90 | 1.5 | 40 |

......................................................................................................

......................................................................................................

......................................................................................................

......................................................................................................

## 6.4 विभिन्न समूही परिमापों के गुण

विभिन्न उद्देश्यों के लिए भिन्न सूचकांकों की रचना की जाती है इसीलिए किसी सूचकांक की उपयुक्तता, उद्देश्य की प्रकृति पर निर्भर होती है।

लास्पियर सूचकांक का परिकलन सरल होता है, क्योंकि इसमें आधारकाल की मात्राओं का भार के रूप में उपयोग किया जाता है जिनको प्राप्त करना कठिन नहीं होता, तथा हर (denominator) को एक बार ही परिकलित करने की आवश्यकता होती है। लेकिन इस सूचकांक में, कीमत वृद्धि को वास्तविकता से अधिक व्यक्त करने की प्रवृत्ति विद्यमान होती है। इसके विपरीत, पाशे के सूचकांक में वर्तमान वर्ष की मात्राएँ भार के रूप में उपयोग होती हैं, जिनमें प्रत्येक वर्ष में परिवर्तन होते रहते हैं। इसके अतिरिक्त, चूँकि वर्तमान वर्ष के भार उपयोग किए जाते हैं, इसमें कीमत वृद्धि को वास्तविक से कम व्यक्त करने की प्रवृत्ति विद्यमान होती है।

चूँकि स्थिर भारों का उपयोग सुविधाजनक होता है, इसलिए संभवतः लास्पियर सूचकांक का उपयोग अधिक होता है। लेकिन समय गुजरने के साथ, भार पुराने हो जाते हैं। उदाहरण के लिए, 1995 में ओडिशा में मोबाईल फोन की संख्या शून्य के बराबर थी। वर्ष 2020 में मोबाईल फोन की संख्या साधारण फोन की संख्या से अधिक है। पाशे के सूचकांक में वर्तमान भारों का उपयोग किया जाता है, जोकि बेहतर होते हैं। लेकिन, चूँकि उत्पादित या उपभोग की गई वस्तुओं के वर्तमान वर्ष के समंक सुविधापूर्वक उपलब्ध नहीं होते, इसलिए लास्पियर सूचकांक अधिक उपयोगी होता है।

## 6.5 सूचकांकों के परीक्षण

एक श्रेष्ठ सूचकांक को, जिसके द्वारा एक अवधि से दूसरी अवधि में किसी तथ्य के बारे में परिवर्तन को मापा जाता है, कुछ परीक्षणों के आधार पर यथेष्ट होना चाहिए। सूचकांक के तीन मुख्य परीक्षण होते है :

i) कालोत्क्रमण परीक्षण,

ii) उपादानोत्क्रमण परीक्षण,

ii) श्रृंखलिक परीक्षण।

### 6.5.1 कालोत्क्रमण परीक्षण

इस परीक्षण के अनुसार यदि सूचकांक में कीमत (या मात्रा) के समय–अनुग्नों (जैसे व तथा $n$) को विपरीत कर दिया जाए तो प्राप्त परिणाम, सूचकांक का व्युत्क्रम होना चाहिए।

सांकेतिक रूप में

$$I_{0n} \times I_{0n} = 1$$

जहाँ पर $I_{0n}$ = काल '$n$' का सूचकांका जिसका आधार काल '0' है।

$I_{n0}$ = काल 'o' का सूचकांक जिसका आधार काल '0' है।

यदि 2010 से 2020 की अवधि में कीमत परिवर्तन 4 रूपये से 16 रूपये होता है तो 2020 की कीमत, 2010 की कीमत का 400 प्रतिशत है, तथा 2010 की कीमत, 2020 की कीमत का 25 प्रतिशत है। इन दोनों मूल्यानुपातों का गुणनफल 4 × 0.25 = 1 है। कालोत्क्रमण परीक्षण इस अनुरूपता पर आधारित है कि जो सिद्धांत एक वस्तु के लिए सत्य है, वही समूह के सूचकांक के लिए भी सत्य होना चाहिए।

सूचकांक रचना की पाँच विधियाँ कालोत्क्रमण परीक्षण (Time Reversal Test) को संतुष्ट करती हैं। ये इस प्रकार है :

1) मूल्यानुपातों का सरल गुणोत्तर माध्य
2) स्थिर भारों सहित समूही सूचकांक
3) एजवर्थ–मार्शल सूचकांक
4) मूल्यानुपातों का भारित गुणोत्तर माध्य, जिसमें स्थिर भार उपयोग किए गए हों
5) फिशर का आदर्श सूचकांक

निम्नलिखित में हम यह दर्शाएँगे कि फिशर का आदर्श सूचकांक कालोत्क्रमण परीक्षण को संतुष्ट करता है।

फिशर का आदर्श सूचकांक $F = \sqrt{\frac{\sum P_n q_0}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n}}$

समय अनुलग्नों को विपरीत करने पर $F' = \sqrt{\frac{\sum P_0 q_n}{\sum P_n q_n} \times \frac{\sum P_0 q_0}{\sum P_n q_0}}$

क्योंकि $F \times F' = 1$ । इसलिए यह परीक्षण संतुष्ट हो जाता है।

### 6.5.2 उपादानोत्क्रमण परीक्षण

प्रायः उपयोग किए जाने वाले संकेतों की सहायता से ''मूल्य सूचकांक'' का सूत्र इस प्रकार लिखा जाता है :

$$I_v = \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n}$$

अब उदाहरण के लिए, लास्पियर के कीमत तथा मात्रा सूचकांक क्रमशः

$$I_p = \frac{\sum P_n q_0}{\sum P_0 q_n}$$

तथा $I_q = \frac{\sum q_n P_0}{\sum q_0 P_0}$ हैं।

उपादानोत्क्रमण परीक्षण (Factor Reversal Test) के अनुसार $I_p . I_q = I_v$ होना चाहिए।

लेकिन लास्पियर सूचकांक के लिए

$$I_p . I_q = \frac{\sum (P_n q_0)(\sum P_n q_0)}{\sum (P_0 q_0)^2} \neq I_v$$

इसके विपरीत, फिशर का आदर्श सूचकांक इस परीक्षण को संतुष्ट करता है, यह निम्नलिखित में प्रदर्शित किया गया है:

$$I_p = \sqrt{\frac{\sum P_n q_0}{\sum P_n q_0} \times \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n}}$$

$$I_q = \sqrt{\frac{\sum q_n P_0}{\sum q_n P_0} \times \frac{\sum q_n P_n}{\sum q_0 P_n}}$$

$$I_p.I_q = \sqrt{\frac{\sum P_n q_0}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n} \times \frac{\sum q_n P_0}{\sum q_0 P_0} \times \frac{\sum q_n P_n}{\sum q_0 P_n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum P_n q_n}{\sum q_0 P_0}} = \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_0} = I_v$$

इस सिद्धांत को और अच्छी तरह समझने के लिए हम निम्नलिखित उदाहरण पर ध्यान देते हैं।

यदि किसी वस्तु की प्रति इकाई कीमत तथा मात्रा में, 2010 से 2020 की अवधि में, क्रमशः 16 रूपये से 32 रूपये तथा 100 इकाई से 200 इकाई परिवर्तन हुआ हो तब 2020 में कीमत तथा मात्रा, दोनों, 200 प्रतिशत होगी अर्थात् 2010 की कीमत तथा मात्रा का दुगुना होगी। 2010 में कुल मूल्य (कीमत × मात्रा) 1600 रूपये तथा 2020 में कुल मूल्य 6400 रूपये होगा। इस प्रकार इनका मूल्यानुपात 6400 ⁄ 1600 = 4.00 है। अतः यह जाँच की जा सकती है कि 2.00 × 2.00 = 4.00 है। अतः कीमत अनुपात तथा मात्रा अनुपात का गुणनफल कुल मूल्य अनुपात के बराबर है।

इस परीक्षण को केवल फिशर का आदर्श सूचकांक ही संतुष्ट करता है।

**उदाहरण 6.3:** निम्नलिखित समंकों द्वारा यह प्रदर्शित किया गया है कि फिशर का आदर्श सूचकांक उपादानोत्क्रमण परीक्षण को संतुष्ट करता है :

| मद | आधार वर्ष | | वर्तमान वर्ष | | $(p_0 q_0)$ | $(p_n q_0)$ | $(p_0 q_n)$ | $(p_n q_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | कीमत $(p_0)$ | मात्रा $(q_0)$ | कीमत $(p_n)$ | मात्रा $(q_n)$ | | | | |
| I | 6 | 50 | 10 | 56 | 300 | 500 | 336 | 560 |
| II | 2 | 100 | 2 | 120 | 200 | 200 | 240 | 240 |
| III | 4 | 60 | 6 | 60 | 240 | 360 | 240 | 360 |
| IV | 10 | 30 | 12 | 24 | 300 | 360 | 240 | 288 |
| V | 8 | 40 | 12 | 36 | 320 | 480 | 288 | 432 |
| योग | | | | | **1360** | **1900** | **1344** | **1880** |

कीमत अनुपात : $I_p = \sqrt{\frac{\sum P_n q_0}{\sum P_n q_0} \times \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n}} = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344}}$

मात्रा अनुपात : $I_p = \sqrt{\frac{\sum q_n P_0}{\sum q_n P_0} \times \frac{\sum q_n P_n}{\sum q_0 P_n}} = \sqrt{\frac{1344}{1360} \times \frac{1880}{1900}}$

मूल्य अनुपात : $I_v = \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_0} = \frac{1880}{1360}$

$$I_p.I_q = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1340}{1360} \times \frac{1880}{1900}} = \sqrt{\frac{1880}{1360} \times \frac{1880}{1360}} = \frac{1880}{1360}$$

$= I_v$ जोकि यह दर्शाता है कि परीक्षण संतुष्ट हो जाता है।

### 6.5.3 श्रृंखला सूचकांक तथा श्रृंखलिक परीक्षण

सूचकांकों की रचना में दो प्रकार के आधार कालों का उपयोग किया जाता है, जोकि इस प्रकार है : (क) स्थित आधार, (ख) श्रृंखला आधार। प्रायः उपयोग किए जाने वाले सूचकांकों में स्थिर आधार का उपयोग किया जाता है। यह विधि, किसी वर्ष में हुई कीमत या मात्रा में परिवर्तन की अवहेलना करती हैं।

इस विधि में, बाद की किसी तिथि में, महत्वपूर्ण हो जाने वाली वस्तुओं को सम्मिलित करना या समय के साथ ह्यसमान महत्व वाली वस्तुओं को सूचकांक से निकालना कठिन होता है। श्रृंखला सूचकांक द्वारा इन कठिनाइयों को दूर किया जा सकता है।

एक उपयुक्त सूचकांक सूत्र (मान लीजिए लास्पियर) के उपयोग द्वारा सर्वप्रथम श्रृंखलित आपेक्षिक, जोकि निम्नलिखित में परिभाषित है, परिकलित किए जाते हैं।

श्रृंखलित आपेक्षिक = ऐसा सूचकांक जिसमें पिछला काल आधार के रूप में उपयोग किया गया हो।

विभिन्न श्रृंखलिक आपेक्षकों को उतरोतर गुणा करने पर श्रृंखला सूचकांक प्राप्त होता हैं अतः काल $n$ का श्रृंखलिक $I_{on}$] जिसका आधारकाल 0 है, इस प्रकार प्राप्त किया जाता हैः

$I_{01} = I_{01}$

$I_{02} = I_{01} \times I_{12}$

$I_{03} = I_{01} \times I_{12} \times I_{23} = I_{02} \times I_{23}$

……………………………..

……………………………..

$I_{0n} = I_{01} \times I_{12} \times I_{23} \ldots\ldots.\times I_{(n-1)n} = I_{(n-1)} \times I_{(n-1)n}$

**उदाहरण 6.4**: निम्नलिखित समंकों के संदर्भ में श्रृंखला सूचकांकों के परिकलन की व्याख्या की गई हैः

| वर्ष | श्रृंखलित आपेक्षिक | श्रृंखला सूचकांक (आधार वर्ष 2010 = 100) |
|---|---|---|
| 2010 | 100 | 100 |
| 2011 | $I_{01} = 80$ | $100\times\frac{80}{100} = 80$ |
| 2012 | $I_{12} = 120$ | $80\times\frac{120}{100} = 96$ |
| 2013 | $I_{23} = 75$ | $96\times\frac{75}{100} = 72$ |

अतः 2011 से 2013 तक श्रृंखला सूचकांक, जिनका आधार वर्ष 2010 है, क्रमशः 80, 96 तथा 72 हैं।

**श्रृंखलिक परीक्षण** : यह परीक्षण कालोत्क्रमण परीक्षण का बहुत से वर्षों के लिए विस्तार है। इसके अनुसार, 2013 वर्ष के लिए उपरोक्त परिकलित श्रृंखला सूचकांक जिसका आधार वर्ष 2010 है, प्रत्यक्ष परिकलित सूचकांक, स्थिर आधार वर्ष 2010, के बराबर होना चाहिए।

संकेतन द्वारा,

$I_{01} = I_{12} \times \ldots\ldots.\times I_{(n-1)n} \times = I_{n-0)} = 1$ (यहाँ यह ध्यान दीजिए कि $I_{0n} = \frac{1}{I_{n0}}$)

एक स्थिर भार के समूह सूचकांक पर ध्यान दीजिएः

$$\frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q}$$

हम परीक्षण की व्याख्या इस प्रकार कर सकते हैं:

आधार वर्ष 0 से लेकर हम उपरोक्त सूत्र का 1 से 3 वर्षों के लिए अनुरेखण (trace) कर सकते हैं:

$$\frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times \frac{\sum p_2 q}{\sum p\, q} \times \frac{\sum p_3 q}{\sum p_2 q} \times \frac{\sum p_0 q}{\sum p_3 q} = 1$$

श्रृंखलिक सूत्र को संतुष्ट करने वाले सूत्र निम्नलिखित हैं:

1) सरल समूही सूचकांक

2) मूल्यानुपातों का सरल गुणोत्तर माध्य

3) भारित समूही सूचकांक (जैसे स्थिर भार का लास्पियर सूचकांक)

4) मूल्यानुपातों का भारित गुणोतर माध्य जिसमें स्थिर भार उपयोग किए गए हों।

हम परीक्षण को फिशर का आदर्श सूचकांक संतुष्ट नहीं करता। यह प्रमाणित किया जा चुका है कि कोई भी सूचकांक दोनों, उपादानोत्क्रमण तथा श्रृंखलिक, परीक्षणों को एक साथ संतुष्ट नहीं कर सकता।

**बोध प्रश्न 2**

1) निम्नलिखित सारणी में 2010–2014 वर्षों में A, B, तथा C वस्तुओं की औसत थोक बिक्री कीमतें दी हुई हैं। वर्ष 2010 की कीमतों को आधार मानकर, श्रृंखला सूचकांक का परिकलन कीजिए।

| वस्तुएँ | औसत थोक बिक्री कीमतें (रूपयों में) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 |
| A | 20 | 16 | 28 | 35 | 21 |
| B | 25 | 30 | 24 | 36 | 45 |
| C | 20 | 25 | 30 | 24 | 30 |

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

2) निम्नलिखित समंकों द्वारा फिशर के आदर्श सूचकांक का परिकलन कीजिए तथा यह दर्शाइए कि इसके द्वारा उपादानोत्क्रमण तथा कालोत्क्रमण परीक्षण संतुष्ट होता है।

| | आधार वर्ष | | वर्तमान वर्ष | |
|---|---|---|---|---|
| वस्तुएँ | कीमत | व्यय (रूपयों में) | कीमत | व्यय (रूपयों में) |
| A | 2 | 40 | 5 | 75 |
| B | 4 | 16 | 8 | 40 |
| C | 1 | 10 | 2 | 24 |
| D | 5 | 25 | 10 | 60 |

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

## 6.6 जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक या उपभोक्ता–कीमत सूचकांक

यह व्यक्तियों के एक सजातीय (homogeneous) समूह, जैसे औद्योगिक श्रमिकों के परिवारों, द्वारा जीवन निर्वाह के लिए उपयोग की गई वस्तुओं तथा सेवाओं की कीमतों में परिवर्तन का सूचकांक होता है।

जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक की रचना में सम्मिलित की जाने वाली मुख्य उपभोग वस्तुएँ निम्नलिखित होती हैं:

1) खाद्य सामग्री
2) ईंधन तथा प्रकाश
3) वस्त्र
4) मकान का किराया
5) विविध

उपभोग के समक उस जनसंख्या वर्ग, जिसके लिए सूचकांक की रचना की जाती है, परिवार निर्वाह सर्वेक्षण (family living survey) द्वारा प्राप्त किए जाते हैं। कीमतों सम्बन्धी समंकों का संकलन उन विभिन्न फुटकर बाजारों से, जिनसे ये उपभोक्ता वस्तुएँ खरीदते हैं, किया जाता है। यहा यह ध्यान देना चाहिए कि ऊपर लिखे हुए प्रत्येक व्यापक वर्ग में बहुत से छोटे–छोटे वर्ग होते हैं। जैसे खाद्य सामग्री में अनाज, दालें, तेल, मांस, मछली, अंडा, मसाले, सब्जी, फल, शर्बत आदि सम्मिलित होते हैं। इसके अतिरिक्त, विविध वर्ग में चिकित्सा, शिक्षा, परिवहन, मनोरंजन, उपहार, तथा इसी प्रकार की बहुत सी मदें सम्मिलित होती हैं।

जब एक ही वस्तु की एक से अधिक निवेदित दरें (price quotations) एकत्रित की गई हों तो इनका सरल माध्य के लिए लिया जाता है। इन सभी वर्गों के लिए अलग–अलग सूचकांक की रचना वर्ग की कीमतों का भारित माध्य लेकर की जाती है; उपयोग किए जाने वाले भार एक औसत परिवार द्वारा उपभोग की गई वस्तुओं के व्यय के अनुपात में

होते हैं। तत्पश्चात् समय सूचकांक (जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक), इन वर्ग सूचकांकों के भारित माध्य का परिकलन करके प्राप्त किया जाता है।

यहाँ पर भी उपयोग किए जाने वाले भार विभिन्न वर्गों में किए गए व्यय के अनुपात में होते हैं (जैसे खाद्य सामग्री पर 50 प्रतिशत आदि)।

लास्पियर सूत्र के उपयोग द्वारा

जीवन निर्वाह व्यय सूचकांकः $I = \frac{\sum w\left(\frac{P_n}{P_0}\times 100\right)}{\sum w}$

जहाँ पर $w = \frac{P_0 q_0}{\sum P_0 q_0}$ वर्ग सूचकांक का भार है।

जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक या उपभोक्ता कीमत सूचकांक के महत्वपूर्ण व्यवहारिक तात्पर्य तथा विस्तृत सार्वजनिक उपयोग है। इसका सबसे महत्वपूर्ण उपयोग मजदूरी नियमन में होता है। कर्मचारियों का महँगाई भत्ता मुख्यतः इसी सूचकांक के आधार पर निर्धारित किया जाता है। जब मजदूरी या आय को इसी सूचकांक से भाग किया जाता है तो आय पर कीमत वृद्धि या कमी के प्रभाव का विलोपन हो जाता है। इसको हम अवस्फीति की प्रक्रिया कहते हैं। जोकि वास्तविक मजदूरी या आय ज्ञात करने में उपयोग की जाती है। जैसा कि पहले जिक्र किया जा चुका है, निर्वाह सूचकांक के व्युत्क्रम द्वारा मुद्रा की क्रय शक्ति को मापा जाता है।

**उदाहरण 6.5:** खाद्य सामग्री के सूचकांक की रचना

| वस्तुएँ | कीमत | | भार | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $p_n$ | $p_0$ | $P = (p_n + p_0) \times 100$ | $w$ | $Pw$ |
| चावल | 50 | 40 | 125.0 | 30 | 3750.0 |
| गेहूँ | 45 | 30 | 150.0 | 20 | 3000.0 |
| दालें | 60 | 40 | 150.0 | 10 | 1500.0 |
| चीनी | 40 | 20 | 200.0 | 5 | 1000.0 |
| तेल | 75 | 60 | 125.0 | 15 | 1875.0 |
| आलू | 60 | 50 | 120.0 | 15 | 1800.0 |
| मछली | 200 | 150 | 133.3 | 5 | 666.5 |
| योग | | | | 100 | 13591.5 |

सूचकांक (खाद्य सामग्री) $= \frac{\sum w \times (P_n + P_0)}{\sum w} \times 100$

$= \frac{13591.5}{100} = 135.915 = 135.92$

**उदाहरण 6.6:** अंतिम जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक की रचना

| मद | भार (प्रतिशत व्यय) | सूचकांक | भार × सूचकांक |
|---|---|---|---|
| खाद्य सामग्री | 45 | 130 | 5850 |
| वस्त्र | 15 | 140 | 2100 |
| आवास | 20 | 170 | 3400 |
| ईंधन | 5 | 110 | 550 |
| विविध | 15 | 125 | 1875 |
| **योग** | 100 | | **13591.5** |

जीवन निर्वाह व्यय $= \frac{13,775}{100} = 137.75 = 138$

**बोध प्रश्न –3**

1) यदि विभिन्न प्रकार के व्यापार के तुलनात्मक मूल्यों का लेखा–जोखा रखा जाए तो, अक्टूबर 2019 से अक्टूबर 2020 की अवधि में व्यापार के आकार में प्रतिशत परिवर्तन की सूचक एक संख्या का परिकलन कीजिए।

| व्यापार की किस्म | टन( '000) | | प्राप्तियाँ ( '000 रूपये) |
|---|---|---|---|
| | अक्तूबर 2019 | अक्तूबर 2020 | अक्तूबर 2019 |
| सामान | 1246 | 1206 | 776 |
| खनिज | 1125 | 981 | 252 |
| ईंधन | 4794 | 4229 | 562 |

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

2) निम्नलिखित समंकों से 2020 के लिए, आधार वर्ष 2015 लेकर, पाशे सूचकांक का परिकलन कीजिए।

| वस्तु | इकाई | प्रति इकाई कीमत (रूपयों में) | | विक्रित मात्रा | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 2015 | 2020 | 2015 | 2020 |
| A | किलो | 4 | 5 | 95 | 120 |
| B | किलो | 60 | 70 | 118 | 13 |
| C | किलो | 35 | 40 | 50 | 70 |

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

3) निम्नलिखित समंकों से 2021 के लिए, आधार वर्ष 2019 लेकर, लास्पियर सूचकांक का परिकलन कीजिए।

| मद | कीमत (रूपयों में) | | कुल मूल्य (रूपयों में) |
|---|---|---|---|
| _ | 2019 | 2021 | 2019 |
| A | 12.50 | 4.00 | 112.50 |
| B | 10.50 | 12.00 | 126.00 |
| C | 15.00 | 14.00 | 105.00 |
| D | 9.40 | 11.20 | 47.00 |

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

4) निम्नलिखित समंकों से मार्शल–एजवर्थ सूचकांक का परिकलन कीजिए।

| | 2010 | | 2015 | |
|---|---|---|---|---|
| वस्तुएँ | कीमत | मात्रा | कीमत | मात्रा |
| चावल | 9.3 | 100 | 4.5 | 90 |
| गेहूँ | 6.4 | 11 | 3.7 | 10 |
| ज्वार | 5.1 | 5 | 2.7 | 3 |

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

## 6.7 हल किए हुए उदाहरण

सूचकांक विषय के बारे में और जानकारी देने के लिए हम इस भाग में कुछ हल किए हुए उदाहरण देंगे।

**उदाहरण 6.7**: कीमत सूचकांक की रचना

| मद | इकाई | प्रति इकाई कीमत रूपयों में) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **2010 ($P_0$)** | **2020 ($P_n$)** | **($P_n \div P_0$)×100** |
| चावल | क्विंटल | 100.00 | 220.00 | 220 |
| गेहूँ | किलो | 1.50 | 2.40 | 160 |
| मछली | किलो | 15.00 | 28.00 | 187 |
| रोटी | पाउंड | 0.60 | 1.35 | 225 |
| दूध | लीटर | 2.50 | 4.00 | 160 |

i) **समूही विधि**

वर्ष 2020 का सूचकांक (आधार वर्ष 2010 = 100)

$$= \frac{\text{2020 में प्रति इकाई कीमत}}{\text{2010 में प्रति इकाई कीमत}} \times 100$$

$$= \frac{\sum P_n/k}{\sum P_0/k} \times 100 = \frac{255.75}{119.60} \times 214$$

ii) **मूल्यानुपात विधि**

वर्ष 2020 का सूचकांक (आधार वर्ष 2010 = 100)

$$= \frac{\Sigma\left(\frac{P_n}{P_0}\times 100\right)}{k} = 952/_5 = 190.$$

**उदाहरण: 6.8:** निम्नलिखित सूचना द्वारा सूचकांक परिकलित कीजिए:

i) भारित समूही सूत्र के उपयोग द्वारा

ii) मूल्यानुपात के भारित समांतर माध्य द्वारा

| वस्तु | इकाई | प्रति इकाई कीमत (रूपयों में | | |
|---|---|---|---|---|
| | | आधार वर्ष | वर्तमान वर्ष | भार |
| A | क्विंटल | 85 | 115 | 19 |
| B | किलो | 15 | 15 | 25 |
| C | दर्जन | 45 | 61 | 40 |
| D | लीटर | 55 | 100 | 20 |
| E | पाउंड | 17 | 23 | 21 |

सूचकांकों का परिकलन

| वस्तु | $p_0$ | $p_n$ | $w$ | $p_0^w$ | $p_n^w$ | $I=(p_n \div p_0)\times 100$ | $Iw=(p_n \div p_0)\times 100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 85 | 115 | 19 | 1615 | 2185 | 135.3 | 2570.7 |
| B | 15 | 20 | 25 | 375 | 500 | 133.3 | 3332.5 |
| C | 45 | 61 | 40 | 1800 | 2440 | 135.6 | 5424.0 |
| D | 55 | 100 | 20 | 1100 | 2000 | 181.8 | 3636.0 |
| E | 17 | 23 | 21 | 357 | 483 | 135.3 | 2841.3 |
| योग | | | 125 | 5247 | 7608 | | 17804.5 |

क) भारित समूही सूचकांक $= \frac{\sum P_n w}{\sum P_0 w} \times 100 = \frac{7608}{5247} \times 100 = 145.0$

ख) मूल्यानुपातों का भारित सतांतर माध्य $= \frac{\sum iw}{\sum w} = \frac{17804}{125} = 142.4$

**उदाहरण 6.9:** निम्नलिखित समंकों में कुछ उपभोग वस्तुओं की कीमतें तथा उनसे सम्बन्धित विभिन्न वस्तुओं के भार दिए हुए हैं। वर्ष 2020 को आधार (=100) मानकर, मूल्यानुपातों के

i) सरल माध्य के उपयोग से, तथा

ii) भारित माध्य के उपयोग से, 2021 के सूचकांक परिकलित कीजिए:

| | | कीमत (रूपयों में) | | |
|---|---|---|---|---|
| वस्तुएँ | इकाई | 2020 | 2021 | भार |
| गेहूँ | किलो | 0.50 | 0.75 | 2 |
| दूध | लीटर | 0.60 | 0.75 | 5 |
| अण्डा | दर्जन | 2.00 | 2.40 | 4 |
| चीनी | किलो | 1.80 | 2.10 | 8 |
| जूते | जोड़ा | 8.00 | 10.00 | 1 |

मूल्यानुपातों के सूचकांकों का परिकलन

| वस्तुएँ | इकाई | $p_0$ | $p_n$ | $I=(p_n \div p_0)\times 100$ | $w$ | $I_w$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| गेहूं | किलो | 0.50 | 0.75 | 150 | 2 | 300 |
| दूध | लीटर | 0.60 | 0.75 | 125 | 5 | 625 |
| अण्डा | दर्जन | 2.00 | 2.40 | 120 | 4 | 480 |
| चीनी | किलो | 1.80 | 2.10 | 117 | 8 | 936 |
| जूते | जोड़ा | 8.00 | 10.00 | 125 | 1 | 125 |
| योग | —— | -- | -- | 637 | 20 | 2466 |

i) मूल्यानुपातों के सरल माध्य का सूचकांक $= \frac{\sum\left(P_n/P_0\right)\times 100}{k} = \frac{637}{5} = 127.4$

ii) मूल्यानुपातों के भारित माध्य का सूचकांक $= \frac{\sum Iw}{\sum w} = \frac{2466}{20} = 123.3$

**उदाहरण 6.10:** निम्नलिखित समंकों के आधार पर पाँचों वर्गों का संयुक्त थोक मूल्य सूचकांक परिकलित कीजिए:

| वर्ग | भार | 31.1.21 को समाप्त होने वाले सप्ताह का सूचकांक (आधार: 2015–16 = 100) |
|---|---|---|
| खाद्य सामग्री | 50 | 241 |
| शराब तथा तम्बाकू | 2 | 221 |
| ईंधन, ऊर्जा, प्रकाश तथा स्नेहक (lubricants) | 3 | 204 |
| औद्योगिक कच्चा माल | 16 | 256 |
| निर्मित वस्तुएँ | 29 | 179 |

हम सामान्य सूचकांक $= \frac{\sum Iw}{\sum w}$ परिकलित करते हैं,

जहाँ पर $I$= वर्ग सूचकांक तथा $w$ = वर्ग भार है।

| वर्ग | भार $(w)$ | वर्ग सूचकांक $(I)$ | $I_w$ |
|---|---|---|---|
| खाद्य सामग्री | 50 | 241 | 12050 |
| शराब तथा तम्बाकू | 2 | 221 | 442 |
| ईंधन, ऊर्जा, प्रकाश तथा स्नेहक (lubricants) | 3 | 204 | 612 |
| औद्योगिक कच्चा माल | 16 | 256 | 4096 |
| निर्मित वस्तुएँ | 29 | 179 | 5191 |
| योग | 100 | | 22391 |

थोक मूल्य सूचकांक $= \frac{22391}{100} = 223.91$

**उदाहरण 6.11**: चार वस्तुओं का वार्षि उत्पादन (10 लाख टन में) निम्नलिखित है:

| वस्तु | उत्पादन | | | भार |
|---|---|---|---|---|
| | 2015 | 2019 | 2020 | |
| A | 160 | 200 | 216 | 20 |
| B | 24 | 42 | 45 | 30 |
| C | 50 | 72 | 68 | 13 |
| D | 120 | 168 | 156 | 17 |

वर्ष 1950 को आधार लेकर, दो वर्षों 2019 तथा 2020 के लिए मूल्यानुपातों का (i) सरल समांतर माध्य तथा (ii) भारित समांतर माध्य उपयोग करके, मात्रा सूचकांक परिकलित कीजिए।

**हल**

2015 को आधार (=100) लेकर 2019 के लिए मात्रानुपात:

$I = \left({}^{q_n}/_{q_0}\right) \times 100 = \left({}^{q_{54}}/_{q_{50}}\right) \times 100$

वस्तु A : $\frac{200}{160} \times 100 = 125$

वस्तु B : $\frac{42}{24} \times 100 = 175$

वस्तु C : $\frac{72}{50} \times 100 = 144$

वस्तु D : $\frac{168}{120} \times 100 = 140$

2015 को आधार (=100) लेकर 2020 के लिए मात्रानुपात:

$I = \left({}^{q_{54}}/_{q_{50}}\right) \times 100$

वस्तु A : $\frac{216}{160} \times 100 = 135$

वस्तु B: $\frac{45}{24} \times 100 = 187.5$

वस्तु C: $\frac{68}{50} \times 100 = 136$

वस्तु D : $\frac{156}{120} \times 100 = 130$

| वस्तु | मात्रानुपात $(I)$ | | भार $(w)$ | $Iw$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2019 | 2020 | | 2019 | 2020 |
| A | 125 | 135.0 | 20 | 2500 | 2700 |
| B | 175 | 187.5 | 30 | 5250 | 5625 |
| C | 144 | 136.0 | 13 | 1872 | 1768 |
| D | 140 | 130.0 | 17 | 2380 | 2210 |
| योग | 584 | 588.5 | 80 | 12002 | 12303 |

i) मात्रानुपातों का सरल समांतर माध्य

$$= \frac{\sum\left({}^{q_n}/_{q_0}\right)}{k} \times 100$$

(जहाँ पर $k$ = वस्तुओं की संख्या है)

2019 का सूचकांक $= \frac{584}{4} = 146$

2020 का सूचकांक $= \frac{588.5}{4} = 147$

ii) मात्रानुपातों का भारित समांतर माध्य $\frac{\sum Iw}{\sum w}$

2019 का सूचकांक $= \frac{12002}{80} = 150$

2020 का सूचकांक $= \frac{12303}{80} = 154$

**उदाहरण 6.12**: निम्नलिखित कीमत $(p)$ तथा मात्रा $(q)$ के समंकों से फिशर का आदर्श सूचकांक परिकलित कीजिए:

| वस्तु | 2015 (आधार वर्ष) | | 2020 (वर्तमान वर्ष) | |
|---|---|---|---|---|
| A | 12 | 10 | 17 | 10 |
| B | 14 | 9 | 16 | 11 |
| C | 11 | 12 | 13 | 10 |

फिशर के आदर्श सूचकांक का परिकलनः

| वस्तु | $p_0$ | $q_0$ | $p_n$ | $q_n$ | $p_0\,q_0$ | $p_nq_n$ | $p_0q_n$ | $p_nq_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 12 | 10 | 17 | 10 | 120 | 170 | 120 | 170 |
| B | 14 | 9 | 16 | 11 | 126 | 144 | 154 | 176 |
| C | 11 | 12 | 13 | 10 | 132 | 156 | 110 | 130 |
| योग | | | | | 378 | 470 | 384 | 476 |

लास्पियर का कीमत सूचकांक त्र $\frac{\sum P_nq_0}{\sum P_nq_0} \times 100 = \frac{470}{378} \times 100 = 124.34 = 124$

पाशे का कीमत सूचकांक $= \frac{\sum P_nq_n}{\sum P_0q_n} \times 100 = \frac{476}{384} \times 100 = 123.96 = 124$

फिशर का आदर्श सूचकांक $= \sqrt{L \times P} = \sqrt{124 \times 124} = 124.$

## 6.8 सार संक्षेप

इस इकाई में आपका परिचय सूचकांक की रचना तथा व्याख्या में उपयोग आने वाली अवधारणाओं तथा विधियों से कराया गया है। आपको यह दर्शाया गया है कि कीमत तथा मात्रा सूचकांक के परिकलन में लास्पियर, पाशे तथा फिशर के सूत्रों का उपयोग किस प्रकार किया जाता है। आपको यह भी ज्ञात हुआ है कि उपभोक्ता कीमत या जीवन निर्वाह व्यय में परिवर्तनों को कैसे मापा जा सकता है।

## 6.9 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1) आप स्वयं कीजिए।

2) आप स्वयं कीजिए।

3) सरल समूही विधि सूचकांक = 117.14

   मूल्यानुपात विधि = 122.9

4) 84.2

5) लास्पियर सूचकांक = 86.02

   पाशे = 81.25

**बोध प्रश्न 2**

1) 108.33, 135.41, 160.23, 165.56

2) आप स्वयं कीजिए।

**बोध प्रश्न 3**

1) हम अक्टूबर 2019 को आधार लेकर अक्टूबर 2020 के लिए मात्रानुपात ज्ञात करते हैं। आपेक्षित सूचकांक को मात्रानुपातों का भारित समांतर माध्य परिकलित करके प्राप्त किया जा सकता है, जिसमें उपयोग किए जाने वाले भार 2019 की प्राप्तियाँ होगी।

| व्यापार की किस्म | $q_0$ | $q_n$ | भार ($w$) | मात्रानुपात $(p_n \div q_0)\times 100$ | **(4)×(5)** |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| सामान | 1246 | 1206 | 776 | 97 | 75272 |
| खनिज | 1125 | 981 | 252 | 87 | 21924 |
| ईंधन | 4794 | 4229 | 562 | 88 | 49456 |
| योग | –– | –– | 1590 | –– | 146652 |

मात्रा सूचकांक $= \dfrac{\sum\left(q_n/q_0\right)\times 100\times w}{\sum w} = \dfrac{146652}{1590} = 92$

2) पाशे के कीमत सूचकांक का परिकलन

| वस्तुएँ | $p_0$ | $p_n$ | $q_0$ | $q_n$ | $p_0\, q_n$ | $p_n\, q_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 4 | 5 | 95 | 120 | 480 | 600 |
| B | 60 | 70 | 118 | 130 | 700 | –– |
| C | 35 | 40 | 50 | 70 | 2450 | 2800 |
| योग | | | | | 10730 | 12500 |

पाशे का कीमत सूचकांक $= \frac{\sum P_n q_n}{\sum P_0 q_n}\times 100 = \frac{12500}{10730}\times 100 = 116$

3) हमें आधार कीमत ($p_0$), वर्तमान कीमत ($p_n$) तथा आधार वर्ष में मूल्य ($p_0q_0$) दिया हुआ है। आधार वर्ष की मात्रा ($q_0$), ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित संबंध का उपयोग कर सकते हैं:

$$q_0 = \frac{p_0 q_0}{p_0}$$

$p_0,\ p_n$ तथा $q_0$ के उपयोग द्वारा हम लास्पियर सूचकांक इस सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं

$L = \frac{\sum P_n q_0}{\sum P_0 q_0}\times 100$

लास्पियर के कीमत सूचकांक का परिकलन

| मद | $p_0$ | $p_n$ | $p_0\,q_0$ | $q_0 = (p_0 q_0)/p_0$ | $p_n\,q_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 12.50 | 14.00 | 112.50 | 9 | 126.00 |
| B | 10.50 | 12.00 | 126.00 | 12 | 144.00 |
| C | 15.00 | 14.00 | 105.00 | 7 | 98.00 |
| D | 9.40 | 11.20 | 47.00 | 5 | 56.00 |
| योग | --- | --- | 390.50 | --- | 424.00 |

लास्पियर का कीमत $= \frac{\sum P_n q_0}{P_0 q_0} \times 100 = \frac{42.00}{390.0} \times 100 = 109.$

4) मार्शल–एजवर्थ सूचकांक $= \frac{\sum P_n(q_0+q_n)}{\sum P_0(q_0+q_n)} \times 100$

$$= \frac{\sum P_n q_0 + \sum P_n q_n}{\sum P_0 q_0 + \sum P_0 q_n} \times 100$$

हम 2010 को आधार तथा 2015 को वर्तमान वर्ष ले लेते है:

| वस्तु | $p_0$ | $q_0$ | $p_n$ | $q_n$ | $p_0\,q_0$ | $p_0\,q_n$ | $p_n\,q_0$ | $p_n\,q_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| चावल | 9.3 | 100 | 4.5 | 90 | 930.0 | 837.0 | 450.0 | 405.0 |
| गेहूँ | 6.4 | 11 | 3.7 | 10 | 70.4 | 64.0 | 40.7 | 37.0 |
| ज्वार | 5.1 | 5 | 2.7 | 3 | 25.5 | 15.3 | 13.5 | 8.0 |
| योग | | | | | 1025-9 | 916-3 | 504-2 | 450-1 |

अपेक्षित सूचकांक $= \frac{504.2+450.1}{1025.9+916.3} \times 100 = 49.1.$

# इकाई 7 निश्चयवादी कालश्रेणी एवं पूर्वानुमान*

इकाई की रूपरेखा



## 7.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आपको निम्नलिखित के बारे में जानकारी प्राप्त हो सकेगीः

- कालश्रेणी समंकों के लिए एक उपनति रेखा की रचना;
- चल–माध्यों का परिकलन; तथा
- मौसमी विचरण के विभिन्न परिमापों का परिकलन।

## 7.1 विषय प्रवेश

एक कालश्रेणी, उत्तरोतर समय बिन्दुओं पर मापे जाने वाले चर के प्रेक्षणों का एक समुच्चय होती है। प्रायः चर के मान समय–अंतरालों, जैसे वार्षिक, त्रैमासिक आदि, पर दर्ज किए जाते है। सामान्यतः, कालश्रेणी आर्थिक समंकों के संदर्भ में होती है लेकिन इसका अनुप्रयोग अन्य क्षेत्रों में, जहाँ मात्रात्मक समंक एकत्रित हों, भी ठीक उसी प्रकार से होता है।

---

* इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 11 एस. बंद्योपाध्याय द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।

राष्ट्रीय आय, कृषि आय, कृषि उत्पादन की काल श्रेणियाँ, वार्षिक प्रेक्षणों पर आधारित होती है। काल श्रेणी के अन्य उदाहरण विभिन्न वर्षों में एक फसल का उत्पादन, विभिन्न समय बिन्दुओं पर एक देश की जनसंख्या, वर्ष के विभिन्न मौसमों में एक विभागीय भंडार की बिक्री, चाय का त्रैमासिक निर्यात आदि हैं। इस प्रकार के समंकों में समय एक चर होता है, जिसको $t$ से सूचित किया जाता है। तथा दूसरे चर को, जोकि समय पर आश्रित होता है जैसे उत्पादन, जनसंख्या, बिक्री, निर्यात आदि, $y_t$ से सूचित किया जाता है। इस इकाई में विकसित की जाने वाली प्रणाली (methodology) की सहायता से हम इस प्रकार की कुल काल श्रेणियों का विश्लेषण करेंगे।

## 7.2 कालश्रेणी समंकों के अध्ययन की समस्याएँ तथा उद्देश्य

कालश्रेणी समंकों द्वारा यह पता चलता है कि सामान्यतः समय परिवर्तन के साथ, आश्रित चर ($y_t$) के प्रेक्षित मानों में भी परिवर्तन होता है। ये परिवर्तन, बहुत सी शक्तियों जैसे जनसंख्या में वृद्धि, उत्पादन की तकनीक में परिवर्तन, लोगों की रूचि तथा आदतों में परिवर्तन, जलवायु में परिवर्तन आदि की 'पारस्परिक क्रिया' (interaction) के कारण होते हैं। कालश्रेणी समंकों के अध्ययन का एक मुख्य उद्देश्य विभिन्न घटकों के प्रभावों को पृथक् करना तथा उनका माप करना होता है। इस विश्लेषण द्वारा हमें भूतकाल के व्यवहार तथा भविष्य के लिए पूर्वानुमान प्राप्त करने में सहायता मिलती है। इस प्रकार का पूर्वानुमान एक अर्थशास्त्री या एक व्यापारी, जोकि बिक्री से बहुत पहले अपने उत्पादन योजना बना सकता है, के लिए बहुत ही महत्वपूर्ण होता है।

### 7.2.1 कालश्रेणी के घटक

कालश्रेणी के समंकों के आलेखी निरूपण द्वारा, समय के साथ परिवर्तनों को, व्यक्त किया जा सकता है। केवल किसी अपवादिक परिस्थिति में ही ऐसा संभव है, कि प्रेक्षण काल में, श्रेणी कोई परिवर्तन प्रदर्शित न करे। ये परिवर्तन पूर्ण रूप से संयोग या यादृच्छिक नहीं होता तथा कम से कम इनके एक अंश की व्याख्या तो की जा सकती है। इनमें से कुछ परिवर्तन अवर्ती (periodic) प्रकृति के होते हैं तथा दूसरे कुछ दीर्घकालीन वर्धन (growth) या पतन को प्रदर्शित करते हैं। इनमें कुछ अननुमेय (unpredictable) परिवर्तन, जोकि यादृच्छिक प्रकृति के होते है, भी मिले हुए होते हैं। यहाँ पर यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि सभी श्रेणियों में सभी प्रकार के परिवर्तनों का विद्यमान होना आवश्यक नहीं है। हम यहाँ यह मानते हैं कि एक सामान्य श्रेणी के चार महत्वपूर्ण घटक होते हैं:

i) दीर्घकालिक उपनति (Trend-$T$)

ii) मौसमी उच्चावचन (Seasonal Variation-$S$)

iii) चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuation - $C$)

iv) अनियमित या यादृच्छिक विचरण (Irregular Variation - $I$)

पारम्परिक उपगमन (classical approach) में हम यह मानते हैं कि प्रेक्षित मान (observed value) $y_t$ ऊपर दिए गए घटकों का, गुणनफल, अर्थात्

$y_t = T \times S \times C \times I$ (गुणात्मक प्रतिरूप – multiplicative model )

या योग, अर्थात्

$y_t = T + S + C + I$ (योज्य प्रतिरूप – additive model) हो सकता है।

चाहे योज्य प्रतिरूप में परिकलन सुविधाजनक होते हैं, फिर भी कालश्रेणी के विश्लेषण में गुणात्मक प्रतिरूप का अत्यधिक उपयोग किया जाता है।

### क) दीर्घकालिक उपनति

दीर्घकालिक उपनति से हमारा आशय श्रेणी के एक समयावधि के प्रेक्षणों में निर्विघ्न, नियमित तथा दीर्घकालिक परिवर्तन से होता है। कुछ श्रेणियाँ समय के साथ ऊर्ध्वमुखी तथा कुछ अधोमुखी उपनति को प्रदर्शित कर सकती है तथा कुछ अन्य लगभग स्थिर रह सकती है। श्रेणी की ऊर्ध्वमुखी उपनति, जनसंख्या वृद्धि, उत्पादन तकनीक में सुधार आदि उपादानों के कारण हो सकती है। उदाहरण के लिए, बहुत से उद्योगों के विकार का प्रतिरूप देश की जनसंख्या वृद्धि का अनुगमन करता है। इसके अतिरिक्त, तकनीकी विकास के कारण बहुत सी आर्थिक श्रेणियों में ऊर्ध्वमुखी विचरण हो सकते हैं। लेकिन सभी काल श्रेणियाँ वृद्धि को प्रदर्शित नहीं करती। कुछ श्रेणियाँ अधोमुखी भी हो सकती हैं तथा कुछ अन्य, उच्चावनों (fluctuations) को प्रदर्शित कर सकती हैं। संभवतः किसी देश की अशोधित मृत्युदर (crude death rate) की कालश्रेणी अधोमुखी उपनति को प्रदर्शित करेगी।

### ख) मौसमी उच्चावचन

अधिकतर काल श्रेणियों के आलेखों से पता चलता है कि दीर्घकालिक उपनति पर बहुत अधिक संख्या में उच्चावचन अध्यारोपित (super-imposed) होते हैं। मौसमी विचरणों से अर्थ, श्रेणी के उन आवर्ती विचरणों से है जिनकी अवधि एक वर्ष से अधिक नहीं होती। आवर्ती विचरण एक नियमित समय अंतराल या अवधि के पश्चात् अपने को दोहराता है। उदाहरण के लिए, गर्मियों में शीत पेय की बिक्री में वृद्धि तथा सर्दियों में कमी होती है, वस्त्रों की बिक्री वर्ष के कुछ दिनों में अधिकतम होती है जैसे, मान लीजिए, मई के महीने में या कुछ त्यौहारों के दिनों में, कार्यालय जाने के घंटों के समय बसों में यात्रियों की संख्या अधिकतम होती है, एक सप्ताह के कुछ दिनों में पुस्तकालय से उधार ली गई पुस्तकों की संख्या अधिकतम होती है इत्यादि। इस प्रकार के उच्चावयनों में योगदान देने वाले उत्पादन विभिन्न मौसमों में जलवायु परिवर्तन, विभिन्न समयों में लोगों के रीति–रिवाजों तथा आदतें आदि होते हैं।

### ग) चक्रीय उच्चावचन

चक्रीय उच्चावचन से अर्थ कालश्रेणी की दौलनी (oscillatory) गति से होता है जहाँ पर दोलन की अवधि को चक्र कहते हैं, जोकि एक वर्ष से अधिक होती है। इन उच्चावचनों में वे उपादान सम्मिलित होते हैं जो बारी–बारी से विस्तार एवं संकुचन को जन्म देते हैं। इस प्रकार के लक्षण बहुत सी आर्थिक तथा व्यापारिक श्रेणियों में होते हैं। कभी–कभी ये उच्चावचन अपने आकार, आयाम (amplitude) तथा दिशा की दृष्टि से बहुत ही अनियमित होते हैं। लेकिन इनके द्वारा प्रतिबिंबित परिघटनाएँ (phenomena) – मंदी (depression), समुत्थान (recovery), तेजी (boom) तथा निपात (collapse) – वस्तुतः सभी व्यापारिक तथा आर्थिक समंकों की काल श्रेणियों में देखनें को मिलती हैं।

### घ) अनियमित विचरण

इस वर्ग में वह सभी उपादान सम्मिलित किए जाते हैं जिनका कहीं और वर्गीकरण नहीं हुआ है। अतः ऐसे उपादान जैसे काम रोको, चुनाव, युद्ध, आग लगना आदि, एक कालश्रेणी को प्रभावित कर सकते हैं। इस वर्ग में सभी प्रकार के विचरण सम्मिलित किए जाते हैं जो दीर्घकालिक उपनति, मौसमी तथा चक्रीय उच्चावचनों में सम्मिलित नहीं हुए हैं।

दुर्भाग्यवश, इस प्रकार के उपादानों का प्रायः चक्रीय उपादानों से भेद करना कठिन होता हैं। अतः कुछ विवेचनों में चक्रीय तथा अनियमित घटकों को एक साथ मिला दिया जाता है।

### 7.2.2 कालश्रेणी की रचना – एक उदाहरण

व्याख्या के लिए हम गुणात्मक प्रतिरूप की एक कालश्रेणी तैयार करते है। सारणी 7.1 में एक काल्पनिक कालश्रेणी के उपनति, मौसमी तथा चक्रीय–अनियमित घटक दिखाए गए हैं।

**सारणी 7.1: काल्पनिक कालश्रेणी तथा इसके घटक (त्रैमासिक)**

| वर्ष | त्रैमास | श्रेणी ($y_t$) | घटक | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | उपनति ($T$) | मैसमी ($100S$) | चक्रीय–अनियमित ($100CI$) |
| 1 | 1 | 79 | 80 | 120 | 82 |
| | 2 | 58 | 85 | 80 | 85 |
| | 3 | 84 | 90 | 92 | 102 |
| | 4 | 107 | 95 | 108 | 105 |
| 2 | 1 | 130 | 100 | 120 | 108 |
| | 2 | 93 | 105 | 80 | 132 |
| | 3 | 121 | 110 | 92 | 120 |
| | 4 | 161 | 115 | 108 | 130 |
| 3 | 1 | 216 | 120 | 120 | 150 |
| | 2 | 132 | 125 | 80 | 132 |
| | 3 | 150 | 130 | 92 | 125 |
| | 4 | 163 | 135 | 108 | 112 |
| 4 | 1 | 176 | 140 | 120 | 105 |
| | 2 | 112 | 145 | 80 | 97 |
| | 3 | 128 | 150 | 92 | 93 |
| | 4 | 142 | 155 | 108 | 85 |
| 5 | 1 | 134 | 160 | 120 | 70 |
| | 2 | 86 | 165 | 80 | 65 |
| | 3 | 94 | 170 | 92 | 60 |
| | 4 | 104 | 175 | 108 | 55 |

सारणी 7.1 में श्रेणी एक गुणात्मक प्रतिरूप द्वारा निरूपित है, इसलिए

$y_t = T \times S \times C \times I$ होगा।

इस प्रकार पहले वर्ष के पहले त्रैमास के लिए प्रेक्षण $79 = 80 \times \frac{120}{100} \times \frac{82}{100}$

तथा चौथे वर्ष के दूसरे त्रैमास के लिए प्रेक्षण $112 = 145 \times \frac{80}{100} \times \frac{97}{100}$. है।

अतः प्रत्येक त्रैमासिक संख्या ($y_t$), दीर्घकालिक उपनति ($T$), मौसमी

सूचकांक ($S$), चक्रीय तथा अनियमित घटक ($C \times I$) का गुणनफल है।

इस प्रकार की कृत्रिम रचना, एक वास्तविक कालश्रेणी जैसी लगती है तथा कालश्रेणी समंकों के विश्लेषण के आधार के रूप में इस प्रतिरूप के उपयोग को प्रेरित करती है।

## 7.3 उपनति के माप

प्रायः हमारी रूचि कालश्रेणी के उपनति चलन की जानकारी प्राप्त करने में होती है। इसके लिए हमें, अन्य घटकों (मौसमी, चक्रीय तथा अनियमित) के श्रेणी पर प्रभाव का विलोपन करना होता है।

उपनति माप की दो महत्वपूर्ण विधियाँ चल–माध्य विधि तथा बहुपद समंजन विधि है। चल–माध्य विधि में माध्य–कलन–विधि (process of averaging) द्वारा उच्चावचनों का मसृणीकरण (smoothing) करके दीर्घकालिक उपनति प्राप्त की जाती है। दूसरी विधि में, मूल या रूपांतरित चर के लिए एक उपयुक्त कोटि के बहुपद का चुनाव करके, न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा, इसके स्थिरांक ज्ञात किए जाते हैं। बहुपद की कोटि का चुनाव समंकों को आलेख पृष्ठ पर अंकित करके किया जाता है जहाँ पर विभिन्न मापक्रम (scales) जैसे समांतर, अर्ध–लघुगणकीय या दोहरे लघुगणकीय उपयोग किए जा सकते हैं। कालश्रेणी के व्यवहार का अध्ययन तथा भविष्य के पूर्वानुमान के लिए, उपनति का माप आवश्यक होता है।

### 7.3.1 चल–माध्य विधि

यह उच्चावचनों के मसृणीकरण की सरल विधि है जिसमें श्रेणी के परस्परव्यापी (overlapping) कालों के माध्य परिकलित किए जाते हैं। सर्वप्रथम, चल–माध्य की उपयुक्त अवधि का चयन किया जाता है। यदि चयन की गई अवधि 3 वर्ष है तो 3 लगातार मानों, जोकि श्रेणी के परस्परव्यापी कालों को सम्मिलित करते हों, के माध्यों की श्रेणी परिकलित करके चल–माध्य परिकलित किए जाते हैं। यदि मूल श्रेणी को $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ से सूचित किया जाए, तो पहले 3 मानों का माध्य $(y_1+ y_2+ y_3)/3$ होगा तथा इन तीन वर्षों की अवधि के मध्य बिन्दु के सम्मुख लिखा जाता है। यह प्रथम चल–माध्य मान होगा। दूसरे चल–माध्य को प्राप्त करने के लिए दूसरे से चौथे काल के मानों का माध्य परिकलित किया जाता है। यह मान $(y_2+ y_3+ y_4)/3$ है तथा इसे दूसरे तथा चौथे वर्ष की अवधि के मध्य के सम्मुख लिखा जाता है। इस प्रकार, इस प्रक्रिया की पुनरावृति की जाती है। यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि इस विधि द्वारा शुरू तथा अंत के कुछ वर्षों के चल–माध्य प्राप्त नहीं किए जा सकते।

यहाँ दो परिस्थितियों में भेद किया जा सकता है, अर्थात् जब चल–माध्य की अवधि विषम हो, तथा जब अवधि सम हो। यदि अवधि विषम है (जैसे तीन वर्ष), तो पहले चल–माध्य को दूसरे वर्ष के सम्मुख, दूसरे चल–माध्य को तीसरे वर्ष के सम्मुख, इत्यादि, लिखा जाता है।

यदि अवधि सम है (जैसे चार वर्ष), तो पहला चल–माध्य दूसरे तथा तीसरे वर्ष के बीच लिखा जाएगा, तथा किसी वर्ष की उपनति ज्ञात करने के लिए इनका केन्द्रीयकरण आवश्यक होता है।

व्याख्या के लिए, हम केन्द्रित 4 वर्ष चल–माध्य के परिकलन के विधिवत निरूपण पर विचार करते हैं। यहाँ हम दो विधियाँ प्रस्तुत करेंगे – प्रत्यक्ष विधि (सारणी 7.2) तथा लघुतर विधि (सारणी 7.3)।

सारणी 7.2: चार वर्षीय केन्द्रित चल–माध्य का परिकलन (प्रत्यक्ष विधि)

| वर्ष | $y_t$ | 4-वर्षीय चल योग | 4-वर्षीय चल-माध्य स्तम्भ 3 ÷ 4 | केन्द्रित चल योग | केन्द्रित 4-वर्षीय चल-माध्य |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 1 | $y_1$ | | | — | — |
| 2 | $y_2$ | | | — | — |
| | | $y_1+y_2+y_3+y_4=T_1$ | $T_1/4$ | | |
| 3 | $y_3$ | | | $(T_1+T_2)/4$ | $(T_1+T_2)/8$ |
| | | $y_2+y_3+y_4+y_5=T_2$ | $T_2/4$ | | |
| 4 | $y_4$ | | | $(T_2+T_3)/4$ | $(T_2+T_3)/8$ |
| | | $y_3+y_4+y_5+y_6=T_3$ | $T_3/4$ | | |
| 5 | $y_5$ | | | $(T_3+T_4)/4$ | $(T_3+T_4)/8$ |
| | | $y_4+y_5+y_6+y_7=T_4$ | $T_4/4$ | | |
| 6 | $y_6$ | | | — | — |
| 7 | $y_7$ | | | — | — |

सारणी 7.3: चार वर्षीय केन्द्रित चल–माध्य का परिकलन (लघुतर विधि)

| वर्ष | $y_t$ | 4-वर्षीय चल योग (M.T.) | स्तम्भ 3 के दो मदों का चल-योग (केन्द्रित) | केन्द्रित 4-वर्षीय चल माध्य (M.A.), स्तम्भ 4 ÷ 8 |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 1 | $y_1$ | | — | — |
| 2 | $y_2$ | | — | — |
| | | $y_1+y_2+y_3+y_4=T_1$ | | |
| 3 | $y_3$ | | $(T_1+T_2)$ | $(T_1+T_2)/8$ |
| | | $y_2+y_3+y_4+y_5=T_2$ | | |
| 4 | $y_4$ | | $(T_2+T_3)$ | $(T_2+T_3)/8$ |
| | | $y_3+y_4+y_5+y_6=T_3$ | | |
| 5 | $y_5$ | | $(T_3+T_4)$ | $(T_3+T_4)/8$ |
| | | $y_4+y_5+y_6+y_7=T_4$ | | |
| 6 | $y_6$ | | — | — |
| 7 | $y_7$ | | — | — |

ऊपर दिए हुए उदाहरण में चल माध्य की अवधि 4 वर्ष है। दोनों विधियों, प्रत्यक्ष तथा लघुतर, में स्तम्भ 3, चार वर्षीय चल–योग को प्रदर्शित करता है। पहला योग ($T_1$) दूसरे तथा तीसरे वर्षों में मध्य के सम्मुख, दूसरा योग ($T_2$) तीसरे तथा चौथे वर्षों के मध्य के सम्मुख लिखा जाता है इत्यादि। तत्पश्चात्, 2 मदों का चल–माध्य परिकलित करके क्रमशः तीसरे, चौथे, ...... वर्षों के सम्मुख लिखे जाते हैं (सारणी 7.2)।

लघुतर विधि (सारणी 7.3) में 4 वर्षीय चल–माध्य परिकलित (जैसा कि सारणी 7.2 के स्तम्भ 4 में दर्शाया गया है) न करके 4 वर्षीय चल–योग परिकलित किए जाते हैं। इसके बाद 2 मद चल–योग (स्तम्भ 4, सारणी 7.3) परिकलित किए जाते हैं।

अंत में स्तम्भ 5 में 4–वर्षीय केन्द्रित चल–माध्य परिकलित किए गए हैं। यहाँ पर यह ध्यान दें कि 4–वर्षीय चल–माध्य के लिए केन्द्रीयकरण के कारण श्रेणी के प्रत्येक छोर पर $(4/2) = 2$ वर्ष के लिए मान प्राप्त नहीं होते।

### 7.3.2 चल–माध्यों की उपयुक्तता

चल–माध्य विधि का प्रयोग सरल होता है लेकिन इस विधि की सफलता, अवधि के उपयुक्त चुनाव पर निर्भर होती है।

एक चल–माध्य, जिसकी अवधि, चक्रीय अवधि के बराबर या इसका गुणज है, चक्रीय घटक का पूर्ण रूप से विलोपन कर देता है तथा उपनति का आकलन (estimate) प्रदान करता है। यह विधि लोचशील है लेकिन श्रेणी के शुरू तथा अंत में कुछ उपनति मान प्राप्त नहीं होते तथा चल माध्य की अवधि में वृद्धि होने पर इनकी संख्या में भी वृद्धि होती है। इसके अतिरिक्त, चूँकि चल–माध्य किसी परिवर्तन के नियम को नहीं अपनाता, इसलिए इस विधि का भविष्य उपनति के पूर्वानुमान में उपयोग नहीं हो सकता।

### 7.3.3 चल–माध्यों के उदाहरण

**उदाहरण 7.3.1** : निम्नलिखित समंकों से तीन तथा पाँच वर्षीय चल–माध्यों का परिकलन कीजिए:

| वर्ष | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| उत्पादन (‘000 टन) | 18 | 19 | 20 | 22 | 20 | 19 | 22 | 24 | 25 | 24 | 25 | 26 |

हलः

सारणी 7.3.1: (**I**) 3–वर्षीय चल–माध्य, (**II**) 5–वर्षीय चल–माध्य का परिकलन

| वर्ष | उत्पादन | 3–वर्षीय चल योग | 3–वर्षीय चल माध्य | 5–वर्षीय चल योग | 5–वर्षीय चल माध्य |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 2000 | 18 | - | - | - | - |
| 2001 | 19 | 57 | 19.0 | - | - |
| 2002 | 20 | 61 | 20.3 | 99 | 19.8 |
| 2003 | 22 | 62 | 20.77 | 100 | 20.6 |
| 2004 | 20 | 61 | 20.3 | 103 | 20.6 |
| 2005 | 19 | 61 | 20.3 | 107 | 21.4 |
| 2006 | 22 | 65 | 21.7 | 110 | 22.0 |
| 2007 | 24 | 71 | 23.7 | 114 | 22.8 |
| 2008 | 25 | 73 | 24.3 | 120 | 24.0 |
| 2009 | 22 | 74 | 24.7 | 124 | 24.8 |
| 2010 | 25 | 75 | 25.0 | - | - |
| 2011 | 26 | - | - | - | - |

**परिकलन के चरण**

1) स्तम्भ 3 की संख्याएँ, स्तम्भ 2 की लगातार तीन संख्याओं के योग द्वारा प्राप्त की गई हैं। अतः पहला चल–योग 57 = 18 + 19 +20 है और इसको 2001 के

सम्मुख लिखा गया है। दूसरा चल–योग 61 = 19 + 20 + 22, 2002 के सम्मुख लिखा गया है।

2) स्तम्भ 4 में दर्शाए गए 3–वर्षीय चल–माध्य, स्तम्भ 3 में दिए हुए चल–योगों को 3 (चल–माध्य की अवधि) से भाग करके प्राप्त किए गए हैं। इस प्रकार 57÷3 = 19, 61÷3 = 20.3 आदि।

3) स्तम्भ 5 में दिए गए 5–वर्षीय चल–योग, स्तम्भ 2 की लगातार 5 संख्याओं के योग द्वारा, प्राप्त किए गए हैं। इस प्रकार 2002 के सम्मुख प्रथम चल–योग 99 = 18+19+20+22+20 है।

4) स्तम्भ 6 में 5–वर्षीय चल–माध्य, स्तम्भ 5 के चल–योगों को 5 से भाग करके प्राप्त किए गए हैं। इस प्रकार, 2005 का चल–माध्य 107÷5 = 21.4 है।

यहाँ यह ध्यान दें कि 3–वर्षीय केन्द्रित चल–माध्य के लिए $\frac{3-1}{2}=1$ वर्ष तथा 5–वर्षीय केन्द्रित चल–माध्य के लिए $\frac{5-1}{2}=2$ वर्ष, श्रेणी के क्रमशः आरम्भ तथा अंत में छूट जाते हैं।

**उदाहरण 7.3.2**: 4–वर्षीय चल–माध्य के उपयोग द्वारा, निम्नलिखित काल श्रेणी के उपनति मान परिकलित कीजिए।

| वर्ष | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| उत्पादन ('000 टन) | 52 | 54 | 55 | 57 | 58 | 61 | 63 | 66 | 67 | 70 |

सारणी 7.3.2 (क): 4–वर्षीय चल–माध्य का परिकलन (प्रत्यक्ष विधि)

| वर्ष | उत्पादन | 4–वर्षीय चल योग | 3–वर्षीय चल माध्य | दो मदों का चल योग . (केन्द्रित) स्तंभ 4 की | केन्द्रित 4–वर्षीय चल–माध्य |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 2009 | 52 | - | - | - | - |
| 2010 | 54 | 218 | 54.50 | - | - |
| 2011 | 55 | 224 | 56.00 | 110.50 | 55.250 |
| 2012 | 57 | 231 | 57.75 | 113.75 | 56.875 |
| 2013 | 58 | 239 | 59.75 | 1177.50 | 58.750 |
| 2014 | 61 | 248 | 62.00 | 121.75 | 60.875 |
| 2015 | 63 | 257 | 64.25 | 126.25 | 63.125 |
| 2016 | 66 | 266 | 66.50 | 130.75 | 65.375 |
| 2017 | 67 | - | - | - | - |
| 2018 | 70 | - | - | - | - |

परिकलन के चरण (प्रत्यक्ष विधि)

1) स्तम्भ 2 की चार लगातार संख्याओं का योग स्तम्भ 3 में लिखा गया है। इस प्रकार 52+54+55+57 = 218, 54+55+57+58 = 224 आदि।

2) स्तम्भ 4 = स्तम्भ 3÷4, इस प्रकार 218÷4 = 54.5, 224÷4 = 56 आदि।

3) स्तम्भ 4 की लगातार दो संख्याओं का योग स्तम्भ 5 में लिखा गया है। अतः 54.5+56.0 = 110.5, 56.00 + 57.75 = 113.75 आदि।

4) स्तम्भ 6 = स्तम्भ 5÷2, अतः 110.5 ÷ 2 = 55.25 आदि।

सारणी 7.3.2 (ख): 4–वर्षीय चल–माध्य का परिकलन (लघुतर विधि)

| वर्ष | उत्पादन | 4–वर्षीय चल योग | दो मदों का चल–योग | केन्द्रित 4–वर्षीय चल माध्य |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (6) |
| 2009 | 52 | - | - | - |
| 2010 | 54 | 218 | - | - |
| 2011 | 55 | 224 | 442 | 55.250 |
| 2012 | 57 | 231 | 455 | 56.875 |
| 2013 | 58 | 239 | 470 | 58.750 |
| 2014 | 61 | 248 | 487 | 60.875 |
| 2015 | 63 | 257 | 505 | 63.125 |
| 2016 | 66 | 266 | 523 | 65.375 |
| 2017 | 67 | - | - | - |
| 2018 | 70 | - | - | - |

परिकलन के चरण (लघुतर विधि)

1) स्तम्भ 3 की दो लगातार संख्याओं का योग स्तम्भ 4 में लिखा गया है। अतः 218+224 = 442, 224+231 = 455 आदि।

2) स्तम्भ 5 = स्तम्भ 4÷8 है। अतः 442÷8 = 55.25 आदि।

**उदाहरण 7.3.3:** निम्नलिखित श्रेणी में 3 वर्षीय भारित चल–माध्य उपयोग करके उपनति मान ज्ञात कीजिए, जिसमें भार 1, 2, 1 हैं।

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| वर्ष | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| मान | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 11 |

हल: सारणी 7.3.3: तीन–वर्षीय भारित चल–माध्य का परिकलन

| वर्ष | मान | तीन–वर्षीय भारित चल–योग (M.T.) | तीन–वर्षीय भारित चल–माध्य (M.A.) |
|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) |
| 1 | 2 | - | - |
| 2 | 3 | 13 | 3.25 |
| 3 | 5 | 19 | 4.75 |
| 4 | 6 | 25 | 6.25 |
| 5 | 8 | 33 | 8.25 |
| 6 | 11 | - | - |

परिकलन के चरण

1) स्तम्भ 2 की संख्याओं के 3–वर्षीय भारित चल–योग, स्तम्भ 3 में लिखे गए हैं। अतः
$1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 5 = 13$

$1 \times 3 + 2 \times 5 + 1 \times 6 = 19$

2) स्तम्भ 4 = स्तम्भ 3 ÷ (भारों का योग)

अतः $13 \div 4 = 3.25$, $19 \div 4 = 4.75$ आदि।

**उदाहरण 7.3.4** : निम्नलिखित काल श्रेणी समंकों से 4–वर्षीय केन्द्रित चल–माध्य परिकलित कीजिए।

| वर्ष | मान | तीन–वर्षीय भारित चल–योग (M.T.) | तीन–वर्षीय भारित चल–माध्य (M.A.) |
|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) |
| 1 | 2 | - | - |
| 2 | 3 | 13 | 3.25 |
| 3 | 5 | 19 | 4.75 |
| 4 | 6 | 25 | 6.25 |
| 5 | 8 | 33 | 8.25 |
| 6 | 11 | - | - |

हल

| वर्ष | त्रैमास | मान | 4–त्रैमासिक चल–योग | केन्द्रित चल–योग | 4–त्रैमासिक चल–माध्य |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 2015 | 1 | 62 | - | - | - |
| | 2 | 58 | - | - | - |
| | | | 259 | - | - |
| | 3 | 72 | | 508 | 63.50 |
| | | | 256 | | |
| | 4 | 60 | | 514 | 64.25 |
| | | | 258 | | |
| 2016 | 1 | 66 | | 518 | 64.75 |
| | | | 260 | | |
| | 2 | 60 | | 524 | 65.50 |
| | | | 264 | | |
| | 3 | 74 | | 534 | 66.75 |
| | | | 270 | | |
| | 4 | 64 | | 547 | 68.38 |
| | | | 277 | | |
| 2017 | 1 | 72 | | 560 | 70.00 |
| | | | 283 | | |
| | 2 | 67 | | 571 | 71.38 |
| | | | 288 | | |
| | 3 | 80 | | 583 | 72.88 |
| | | | 295 | | |
| | 4 | 69 | | 597 | 74.63 |
| | | | 302 | | |
| 2018 | 1 | 79 | | 612 | 76.50 |
| | | | 310 | | |
| | 2 | 74 | | 628 | 78.50 |
| | | | 318 | - | - |
| | 3 | 88 | - | - | - |
| | 4 | 77 | - | - | - |

**बोध प्रश्न 1**

1) निम्नलिखित समंकों द्वारा 2011 से 2020 तक के औद्योगिक उत्पादन सूचकांक दिए हुए हैं :

| वर्ष | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| औद्योगिक उत्पादन सूचकांक | 109.2 | 119.8 | 129.7 | 140.8 | 153.8 | 152.2 | 152.6 | 163.0 | 175.3 | 184.3 |

3–वर्षीय चल–माध्य विधि द्वारा उपनति रेखा का आकलन कीजिए।

…………………………………………………………………………......……

…………………………………………………………………………......………

…………………………………………………………………………......…………

…………………………………………………………………………......……………

2) चल माध्य विधि प्रयोग करने के लाभ और हानि बताइए।

…………………………………………………………………………......……

…………………………………………………………………………......………

…………………………………………………………………………......…………

……………………………………………………………………………………...

## 7.4 बहुपद समंजन विधि

बहुपद समंजन विधि (method of fitting polynomials) शायद उपनति निर्धारण की उतम तथा वस्तुनिष्ठ (objective) विधि है। यहाँ उपनति के लिए एक उपयुक्त बहुपद का चयन करके, काल श्रेणी समंकों द्वारा उपनति समीकरण में उपयोग किए जाने वाले स्थिरांकों के मान परिकलित किए जाते हैं। समंकों के आलेखी निरूपण, जिसमें उपयोग किए जाने वाले समांतर मापक्रम के अतिरिक्त, अर्द्ध–लघुगणकीय या दोहरे–लघुगणकीय मापक्रम भी उपयोग किए जा सकते हैं, के द्वारा उपयुक्त बहुपद के चयन में सहायता मिलती है। यदि साधरण आलेख पृष्ठ पर अंकित समंक लगभग सरल रेखिय प्रवृति दर्शाते हैं तो $Y = a + bx$ (सरल रेखा या प्रथम कोटि बहुपद) समीकरण का उपयोग किया जाता है।

यदि अंकित समंक, अर्द्ध–लघुगणकीय आलेख पृष्ठ पर सरल रेखा प्रदर्शित करते हैं, तो $\log Y = a + bx$ समीकरण उपयोग किया जाता है यह समीकरण $Y = A.B^x$ (घातीय फलन) का लघु (log) लेने पर प्राप्त होती है। यह ध्यान दें कि $a = \log A$ तथा $b = \log B$ है।

कभी–कभी एक द्वि या त्रि–कोटि बहुपद का समंजन भी किया जा सकता है।

$Y = a + bx + cx^2$ (द्वि–कोटि बहुपद या पैराबोला)

$Y = a + bx + cx^2 + dx^3$ (त्रि–कोटि बहुपद)

इन समीकरणों में उपयोग किए गए स्थिरांकों (जैसे $a$, $b$, $c$, ...) के मान न्यूनतम वर्ग विधि सिद्धांत, जैसा कि समाश्रयण में किया गया था (इकाई 5 देखें), के आधार पर आकलित किए जाते हैं। इस सिद्धांत के अनुसार विभिन्न स्थिरांकों के मान ऐसे होने चाहिए कि विचलनों के वर्ग का योग $\sum(y - Y)^2$ न्यूनतम हो जाय, जहाँ पर $y$ = प्रेक्षित माप तथा $y$ = प्रत्याशित माप, जोकि $y = a + bx$ या $a + bx + cx^2$ इत्यादि, उपनति समीकरण से प्राप्त किया गया है। यहाँ पर योग ($\Sigma$) सभी प्रेक्षणों पर किया गया है।

जब न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सरल रेखा का समंजन किया जाता है, तब $a$ तथा $b$ स्थिरांकों के मान, निम्नलिखित प्रसामान्य समीकरणों (normal equations) के हल द्वारा प्राप्त किए जाते हैं :

$\sum y = na + b\sum x$ तथा

$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$

जहाँ पर $n$ वर्षों की संख्या को सूचित करता है।

इसी प्रकार पैराबोला (parabola) या द्वि–कोटि बहुपद के समंजन में *a*, *b*, तथा *c* स्थिरांकों के मान निम्नलिखित तीन प्रसामान्य समीकरणों के हल द्वारा प्राप्त होते हैं।

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

**प्रसामान्य समीकरण लिखने के नियम**

प्रथम सामान्य समीकरण प्राप्त करने के लिए, समीकरण के दोनों पक्षों को $a$ के गुणांक से गुणा करके सभी प्रेक्षणों के लिए योग कर दीजिए।

इस प्रकार सरल रेखा $y = a = bx$ में $a$ का गुणांक 1 हैं, अतः प्रथम प्रसामान्य समीकरण $\sum y = na + b\sum x$ होगा।

द्वितीय प्रसामान्य समीकरण के लिए, समीकरण के दोनों पक्षों को $b$ के गुणांक से गुणा करके सभी प्रेक्षणों के लिए योग कर दीजिए। सरल रेखा समीकरण में $b$ का गुणांक $x$ है। अतः द्वितीय प्रसामान्य समीकरण $\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$. होगा।

अब हम प्रथम कोटि बहुपद उपनति समंजन पर विचार करते हैं, जिसमें वर्षों की संख्या विषम (सारणी 7.4) तथा सम (सारणी 7.5) है।

**स्थिति** 1 : विषम संख्या में वर्ष ($n$ = 5)

**सारणी** 7.4

| वर्ष | y | x | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 1 | $y_1$ | -2 | 4 | |
| 2 | $y_2$ | -1 | 1 | |
| 3 | $y_3$ | 0 | 0 | |
| 4 | $y_4$ | 1 | 1 | |
| 5 | $y_5$ | 2 | 4 | |
| योग | *Sy* | 0 | 10 | *Sxy* |

प्रसामान्य समीकरण इस प्रकार हैं :

$\sum y = 5a + b\sum x = 5a$ (क्योंकि $\sum x = 0$)

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 = 10b$$

$$\therefore a = \frac{\sum y}{5},\ b = \frac{\sum xy}{10}$$

जहाँ पर मूल बिन्दू ($x$ = 0), 5 वर्ष के अंतराल का मध्य बिन्दु, अर्थात् तृतीय वर्ष है तथा समय की इकाई एक वर्ष है। वास्तविक जीवन परिस्थितियों में $y_t$ के वास्तविक मान लिखित किए जा सकते हैं, अतः $\sum x$ तथा $\sum xy$ ज्ञात होते हैं।

**स्थिति II**: सम संख्या में वर्ष ( $n$ = 6)

स्थिरांकों, $a$ तथा $b$ के मान निम्नलिखित समीकरणों से प्राप्त होंगे :

$$\sum x = 6a$$

$$\sum xy = 70b$$

यहाँ पर मूलबिन्दु ($x = 0$), तीसरे तथा चौथे वर्ष के मध्य होगा तथा $x$ की इकाई 6 मास होगी।

**सारणी 7.5**

| वर्ष | y | x | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 1 | $y_1$ | -5 | 25 | |
| 2 | $y_2$ | -3 | 9 | |
| 3 | $y_3$ | -1 | 1 | |
| 4 | $y_4$ | 1 | 1 | |
| 5 | $y_5$ | 3 | 9 | |
| 6 | $Y_6$ | 5 | 25 | |
| योग | $\sum y$ | 0 | 70 | $\sum xy$ |

### 7.4.1 न्यूनतम वर्ग विधि की उपयुक्तता

उपनति रेखाओं का उपयोग, कालश्रेणी की संवृद्धि या ह्रास का पूर्वानुमान तथा अर्थव्यवस्था की दीर्घकालिक प्रवृत्तियों के अध्ययन में किया जाता है। बहुपद समंजन विधि में व्यक्तिगत अभिनति (bias) का पूर्ण विलोपन होता है तथा सभी वर्षों के लिए उन्नति मान ज्ञात किए जा सकते हैं, जोकि चल–माध्य में सम्भव नहीं है। लेकिन, यहाँ पर बहुपद कि किस्म का चयन स्वेच्छ (arbitrary) होता है तथा दृढ़ रूप से यह जानना सम्भव नहीं है कि कौन सा वक्र (रैखिक या पैराबोला) उपनति का सही प्रकार से निरूपण करेगा।

इस प्रकार, उपनति समीकरण का चयन स्वयं अभिनति उत्पन्न कर सकता है। समंकों के प्रकीर्ण आरेख द्वारा उपनति के प्रतिरूप के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

### 7.4.2 न्यूनतम वर्ग विधि के उदाहरण

**उदाहरण 7.4.1 :** निम्नलिखित कालश्रेणी समंकों के लिए न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सरल रेखा उपनति का समंजन कीजिए।

| वर्षः | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| उत्पादन : | 81 | 92 | 100 | 105 | 112 | 120 | 120 |

वर्ष 2012 के उत्पादन का आकलन कीजिए।

**हलः**

यहाँ पर वर्षों की संख्या ($n = 7$) है। मान लीजिए, सरल रेखा उपनति का समीकरण $y = a + bx$ है, जिसका मूल बिन्दू ( $n = 0$) 2008 पर है तथा $x$ की इकाई एक वर्ष है। न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रसामान्य समीकरण इस प्रकार हैं (इकाई 5 देखें) :

$\sum y = na + b\sum x$

$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$

अतः, इस सारणी से $\sum y, \sum xy, \sum x$ and $\sum x^2$ के मान प्रसामान्य समीकरणों में रखने पर

$7a = 736$, इस प्रकार $a = 105.1$

$28b = 203$, इस प्रकार $b = 7.21$

उपनति समीकरण

$Y = 105.1 + 7.21x$ है,

जिसका मूल बिन्दु 2008 पर तथा $x$ की इकाई एक वर्ष है।

**सारणी 7.4.1: सरल रेखा उपनति समंजन**

| वर्ष | उत्पादन (y) | x | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|
| **(1)** | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 2005 | 81 | -3 | 9 | -243 |
| 2006 | 92 | -2 | 4 | -184 |
| 2007 | 100 | -1 | 1 | -100 |
| 2008 | 105 | 0 | 0 | 0 |
| 2009 | 112 | 1 | 1 | 112 |
| 2010 | 120 | 2 | 4 | 240 |
| 2011 | 126 | 3 | 9 | 378 |
| योग | 736 | 0 | 28 | 203 |

1982 के लिए $x$ का मान 4 होगा। अतः 2012 के लिए उत्पादन का आकलन $Y = 105.1 + 4 \times 7.21 = 133.94$. होगा।

**उदाहरण 7.4.2:** निम्नलिखित कालश्रेणी समंकों के लिए सरल रेखा का समंजन कीजिए।

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| वर्ष: | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
| लाभ : (लाख रूपये) | 3.1 | 3.3 | 3.6 | 3.2 | 3.7 | 3.9 |

2016 के लाभ का आकलन कीजिए।

**हलः**

यहाँ पर वर्षों की संख्या सम ($n$ = 6) है। मान लीजिए, उपनति समीकरण $y = a + bx$ है जिसका मूल बिन्दु ($x$ = 0) 2012 तथा 2013 का मध्य–बिन्दु है तथा $x$ की इकाई 6 मास है। प्रसामान्य

$\sum y = na + b\sum x$

$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$

सारणी 7.4.2: सरल रेखा उपनति का समंजन

| वर्ष | लाभ ($y$) (लाख रूपये) | x | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|
| **(1)** | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 2010 | 3.1 | -5 | 25 | -15.5 |
| 2011 | 3.3 | -3 | 9 | -9.9 |
| 2012 | 3.6 | -1 | 1 | -3.6 |
| 2013 | 3.2 | 1 | 1 | 0.0 |
| 2014 | 3.7 | 3 | 9 | 11.1 |
| 2015 | 3.9 | 5 | 25 | 19.5 |
| योग | **20.8** | **0** | **70** | **4.8** |

अतः, इस सारणी से $\sum y, \sum xy, \sum x$, and $\sum x^2$ के मान प्रसामान्य समीकरणों में रखने पर

$6a = 20.8$, इस प्रकार $a = 3.47$

$70b = 4.8$, इस प्रकार $b = 0.07$

उपनति समीकरण $Y = 3.47 + 0.07x$ है,

जिसका मूल बिन्दु 2012 तथा 2013 का मध्य है तथा $x$ की इकाई 6 मास है।

वर्ष 1976 के लिए $x = 7$

इस प्रकार 2016 के आकलन $x = 3.47 + 0.07 \text{ x } 7 = 3.47 + 0.49 = 3.96$

अतः 2016 के लिए आकलित लाभ 3.96 लाख रूपये होगा।

**उदाहरण 7.4.3**

निम्नलिखित सारणी में एक कम्पनी की 2010 से 2016 वर्षों के लिए बिक्री (हजारों रूपयों में) दी हुई है। एक घातीय फलन ($Y = A.B^x$) का समंजन कीजिए तथा 2017 वर्ष के लिए बिक्री का आकलन कीजिए।

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| वर्ष: | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
| बिक्री: | 32 | 47 | 65 | 92 | 132 | 190 | 275 |

**हलः**

यहाँ वर्षों की संख्या विषम ($n = 7$) है। समीकरण के दोनों पक्षों का लघु लेने पर

$\text{lag}Y = \log A + \text{x}\log \text{B}$

मान लिया, $a = \log A$ तथा $b = \log B$

अतः $\log Y = a + bx$

हम मूल बिन्दु ($x$ = 0), 2013 तथा $x$ की इकाई एक वर्ष ले लेते है। न्यूनतम वर्ग प्रसामान्य समीकरण निम्नलिखित हैं।

$$\sum \log y = na + b\sum x$$

$$\sum x\log y = a\sum x + b\sum x^2$$

सारणी 7.4.3 : सरल रेखा उपनति का समंजन

| वर्ष | बिक्री ($y$) | x | $x^2$ | $\log y$ | $x \log y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2010 | 32 | -3 | 9 | 1.5051 | 4.5153 |
| 2011 | 47 | -2 | 4 | 1.6721 | 3.3442 |
| 2012 | 65 | -1 | 1 | 1.8129 | 1.8129 |
| 2013 | 92 | 0 | 0 | 1.9638 | 0 |
| 2014 | 132 | 1 | 1 | 2.1206 | 2.1206 |
| 2015 | 190 | 2 | 4 | 2.2788 | 4.5576 |
| 2016 | 275 | 3 | 9 | 2.4398 | 7.3119 |
| योग | **833** | **0** | **28** | **13.7931** | **4.3237** |

इस सारणी से $\sum \log y, \sum x.\log y, \sum x,$ and $\sum x^2$ के मान प्रसामान्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर

$7a = 13.7931$, या $a = 1.97$

$28b = 4.3237$, या $b = 0.154$

अतः समंजित फलन $\log Y = a+bx$ या $Y = \text{antilog}\,(a+bx)$ होगा।

वर्ष 2017 के लिए $x$ का मान 4 होगा।

अतः, वर्ष 2017 के लिए आकलित मान

$Y = \text{antilog}\,(1.97 + 0.154 \text{ x } 4) = \text{antilog}\, 2.586 = 385.48$ है।

जब वर्षों की संख्या सम हो तो, सरल रेखा समंजन विधि (उदाहरण 7.4.2) की तरह विधि अपनाई जाती है।

**उदाहरण 7.4.4**

निम्नलिखित सारणी में 2012 से 2018 तक भारत में सीमेंट उत्पादन दिया गया है। समंकों में द्वि–कोटि बहुपद का समंजन कीजिए।

| वर्ष: | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| उत्पादन: | 23.7 | 27.1 | 30.2 | 33.1 | 36.4 | 39.3 | 45.0 |

हलः

यहाँ पर वर्षों की संख्या विषम ($n = 7$) हैं।

मान लीजिए उपनति समीकरण $y = a+bx=cx^2$ है, जिसका मूल बिन्दु ($x = 0$) 2015 तथा $x$ की इकाई एक वर्ष है। प्रसामान्य समीकरण निम्नलिखित हैं :

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

सारणी 7.4.4: द्वि–कोटि बहुपद का समंजन

| वर्ष | y | x | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $xy$ | $x^2y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2012 | 23.7 | -3 | 9 | -27 | 81 | -71.1 | 213.3 |
| 2013 | 27.1 | -2 | 4 | -8 | 16 | -54.2 | 108.4 |
| 2014 | 30.2 | -1 | 1 | -1 | 1 | -30.2 | 30.2 |
| 2015 | 33.1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.0 | 0.0 |
| 2016 | 36.4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36.4 | 36.4 |
| 2017 | 39.3 | 2 | 4 | 8 | 16 | 78.6 | 157.2 |
| 2018 | 45.0 | 3 | 9 | 27 | 81 | 135.0 | 405.0 |
| योग | **234.8** | 0 | 28 | 0 | 196 | **94.5** | **950.5** |

इस सारणी से प्राप्त मानों को प्रसामान्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर

$7a + 28c = 234.8, \quad 28b = 94.5$

$28a + 196c = 950.5$

इन समीकरणों के हल द्वारा

$a = 33, \ b = 3.37, \ c = 0.134$

अतः द्वि–कोटि बहुपद $Y = 33 + 3.37x + 0.134x^2$ होगा, जिसका मूल बिन्दु ($x = 0$) 2015 है तथा $x$ की इकाई एक वर्ष है।

**उदाहरण 7.4.5**

निम्नलिखित समंकों के लिए द्वि–कोटि बहुपद का समंजन कीजिए। वर्ष 2012 के लिए उपनति मान आकलित कीजिए।

| वर्ष: | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| भारत की वार्षिक आयात ($10^8$ रूपये): | 23.7 | 27.1 | 30.2 | 33.1 | 36.4 | 39.3 |

हल

यहाँ पर वर्षों की संख्या सम ($n$ = 6) है।

मान लीजिए $y = a+bx+cx^2$ उपनति समीकरण है, जिसका मूल बिन्दु ($x$ = 0) 2008 तथा 2009 का मध्य बिन्दु है तथा $x$ की इकाई 6 मास हैं। प्रसामान्य समीकरण निम्नलिखित हैं:

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

सारणी 7.4.5 : द्वि–कोटि बहुपद का समंजन

| वर्ष | y | x | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $xy$ | $x^2y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2006 | 507 | -5 | 25 | -125 | 625 | -2535 | 12675 |
| 2007 | 602 | -3 | 9 | -27 | 81 | -1806 | 5418 |
| 2008 | 681 | -1 | 1 | -1 | 1 | -681 | 681 |
| 2009 | 914 | 1 | 1 | 1 | 1 | 914 | 914 |
| 2010 | 1255 | 3 | 9 | 27 | 81 | 3765 | 11295 |
| 2011 | 1361 | 5 | 25 | 125 | 625 | 6805 | 34025 |
| योग | 5320 | 0 | 70 | 0 | 1414 | 6462 | 65008 |

इस सारणी से प्राप्त मानों को प्रसामान्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर

$6a + 70c = 5320,\qquad 70b = 6462$

$70a + 1414c = 65008$

इस समीकरणों को हल करने पर

$a = 829.2$, $b = 92.31$ तथा $c = 4.924$.

अतः द्वि–कोटि बहुपद $Y = 829.2 + 92.31\,x + 4.924\,x^2$ होगा,

जिसका मूल बिन्दु ($x$ = 0), 1978 तथा 1979 का मध्य बिन्दु तथा $x$ की इकाई 6 मास है।

वर्ष 2012 के लिए $x$ मान 7 होगा।

इसलिए, 2012 का आकलित मान

$Y = 829.2 + 92.31 \times 7 = 3.47 + 4.924 \times (7)^2$

$= 829.2 + 646.17 + 241.28 = 1716.65.$

## 7.5 वार्षिक समंकों से मासिक या त्रैमासिक उपनति

कालश्रेणी में, वार्षिक समंक विभिन्न रूपों में उपलब्ध हो सकते हैं, जैसे (1) प्रत्येक वर्ष के लिए मासिक या त्रैमासिक औसत; तथा (2) वार्षिक योग।

यदि उपनति का समंजन मासिक या त्रैमासिक समंकों के लिए किया गया है तो मासिक या त्रैमासिक मान प्राप्त करने में कोई कठिनाई नहीं होती। लेनिक, न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा मासिक या त्रैमासिक समंकों के लिए उपनति रेखा के समंजन की सलाह नहीं दी जाती। प्रायः उपनति रेखा का समंजन वार्षिक समंकों के लिए किया जाता है तथा इसके उपयोग द्वारा, बाद में विभिन्न मासों या त्रैमासों के लिए उपनति मान प्राप्त किए जाते हैं। मासिक या त्रैमासिक उपनति समीकरण प्राप्त करने की विधि का विवेचन निम्नलिखित हैं।

मान लीजिए वार्षिक उपनति समीकरण $y = a+bx$ है। यदि हम समीकरण के दोनों पक्षों को 12 से भाग करें, तो हमें मासिक औसत समीकरण प्राप्त होगा। अतः $\frac{y}{12} = \frac{a}{12} + \frac{b}{12}x$ एक मासिक औसत समीकरण है। $Y = \frac{y}{12}$, $A = \frac{a}{12}$ $B = \frac{b}{12}$ रखने पर, मासिक औसत समीकरण $Y = A + Bx$ होगा, जहाँ पर $Y$ = मासिक औसत, $B$ = मासिक औसत में परिवर्तन दर (अर्थात् प्रति इकाई $x$ में या एक वर्ष में परिवर्तन होने पर)।

मासिक समीकरण प्राप्त करने के लिए हमें इसके अनुरूप $Y$ में परिवर्तन दर ज्ञात करना पड़ेगा। क्योंकि प्रतिवर्ष मासिक औसत में परिवर्तन $B$ है, इसलिए $\frac{B}{12}$ प्रतिमास औसत परिवर्तन को व्यक्त करेगा। अतः मासिक समीकरण

$Y = A + \frac{B}{12}x \text{ or } Y = \frac{a}{12} + \frac{b}{144}x$, होगा, जिसमें $x$ मास, न कि वर्ष, को सूचित करता है।

इसी प्रकार

$Y = \frac{a}{4} + \frac{b}{4}x$ एक त्रैमासिक समीकरण होगी, जिसमें $x$ की इकाई एक वर्ष है, तथा $Y = \frac{a}{4} + \frac{b}{16}x$ एक त्रैमासिक समीकरण होगी, जिसमें $x$ की इकाई एक त्रैमास है।

### मूल बिन्दु का स्थानांतरण

समीकरण $y = a+bx$ में $a$ का अर्थ, मूल बिन्दु के वर्ष में उपनति का मान होता है। अतः मूल बिन्दु के स्थानांतरण के साथ $a$ के मान में परिवर्तन हो जाता है। मान लिया मूल बिन्दु ($x = 0$) वर्ष 2015 है तथा हम इसको 2018 में सीनांतरित करना चाहते है। यह ध्यान दें कि 2018 के लिए $x$ का मान 3 है, अतः 2018 की उपनति = $a+3b$ होगी। इस उपनति को स्थिरांक लेने पर उपनति समीकरण

$y = (a+3b) + bx$, एक नया उपनति समीकरण होगा, जिसका मूल बिन्दु 1998 होगा।

**उदाहरण 7.5.1**

कुछ उत्पादन समंकों के लिए उपनति समीकरण

$y = 150 + 24x$ ( $y$ = वार्षिक उत्पादन, हजार टनों में तथा $x$ = समय, जिसका मूल बिन्दु 2008 है, $x$ की इकाई एक वर्ष) है। मई 2013 के लिए उपनति मान का आकलन कीजिए।

हलः

मासिक उपनति समीकरण $Y = \frac{150}{12} + \frac{24}{144}x = 12.5 + 0.167x$ होगी, जिसमें $y$ = मासिक उत्पादन, $x$ की इकाई एक मास तथा मूल बिन्दु 2008, अर्थात् 30 जून 2008 पर है। मई 2013 की उपनति के आकलन के लिए, हम इस समीकरण में $x$ = 58.5 प्रतिस्थापित कर देते हैं। इस प्रकार $Y = 12.5 + 0.167 \times 58.5 = 22.25$ ('000 टन) प्राप्त होगा।

**उदाहरण 7.5.2**

7 वर्षों की त्रैमासिक औसत बिक्री के लिए समंजित उपनति समीकरण $y = 250{+}20$ ($x$ की इकाई = 1 वर्ष, मूल बिन्दु = 30 जून 2010) है। वर्ष 2013 के प्रथम त्रैमास (जनवरी–मार्च के लिए उपनति मान आकलित कीजिए।

हलः

यहाँ पर त्रैमासिक औसत का अर्थ, प्रत्येक वर्ष के लिए प्रति त्रैमास औसत से है।

त्रैमासिक उपनति समीकरण $Y = 250 + \frac{20}{4}x$ (जिसमें $Y$ = त्रैमासिक बिक्री, $x$ = एक त्रैमास तथा मूल बिन्दु = 30 जून, 2010) होगा।

30 जून, 2010 तथा 2013 के पहले त्रैमास (1 जनवरी, 2013 से 31 मार्च, 2013 का माध्य बिन्दु अर्थात 15 फरवरी, 2013) तक अंतराल 2 वर्ष 7.5 मास या 10.5 त्रैमासों का है। उपनति समीकरण में $x$ = 10.5 प्रतिस्थापित करने पर $y$ = 250+5 x 10.5 = 302.5 प्राप्त होगा, जोकि 2013 के पहले त्रैमास का आकलित मान है।

**बोध प्रश्न 2**

1) निम्नलिखित समंकों में एक सरल रेखा का समंजन कीजिए तथा दर्शाइये कि इससे मासिक उपनति मान किस प्रकार प्राप्त किए जा सकते हैं। इस प्रकार के दो मान प्राप्त कीजिए।

| वर्षः | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 |
|---|---|---|---|---|---|
| औसत मासिक उत्पादन ('000 टनों में) : | 38 | 40 | 41 | 45 | 47 |

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

2) किन्हीं उत्पादन समंकों के लिए उपनति समीकरण $y$ = 240 + 48 $x$ ( $y$ = वार्षिक उत्पादन, टनों में, $x$ = समय, जिसका मूल–बिन्दु 2010 है, $x$ की इकाई = 1 वर्ष) है। अक्टूबर, 2016 के लिए उपनति मान आकलित कीजिए।

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

3) त्रैमासिक औसत बिक्री समंकों में समंजित उपनति समीकरण $y = 60 + 8\ x$ ($x$ की इकाई = 1 वर्ष, मूल बिन्दु = 30 जून, 2018) है। वर्ष 2020 के प्रथम त्रैमास (जनवरी–मार्च) के लिए उपनति मान आकलित कीजिए।

………………………………………………………………………..…….

………………………………………………………………………..…….

………………………………………………………………………..…….

………………………………………………………………………..…….

## 7.6 मौसमी विचरणों का माप

काल श्रेणी में मौसमी विचरणों को मापने की बहुत सी विधियाँ हैं, जो इस बात पर निर्भर करती हैं कि अन्य घटक जैसे चक्रीय, उपनति तथा अनियमित विचरण किस प्रकार इसमें विद्यमान हैं। सरलता के लिए, हम केवल मासिक तथा त्रैमासिक समंकों पर ही विचार करेंगें, लेकिन साप्ताहिक तथा दैनिक समंकों की विधि भी समरूप होती है। इन विधियों के उपयोग द्वारा हम त्रैमासिक (या मासिक) समंकों द्वारा 4 (या 12) संख्याओं का परिकलन करते हैं, जिनकों मौसमी सूचकांक कहते हैं। इन सूचकांकों को प्रायः प्रतिशत रूप में व्यक्त किया जाता है। एक विशेष त्रैमास (या मास) की संख्या इस बात का सूचक है कि इस त्रैमास (या मास) का मान, एक सामान्य त्रैमास (या मास) के मान से कम है या अधिक। उदाहरण के लिए, यदि एक त्रैमास का मान 80 है तो यह इस बात का सूचक है कि व्यवसाय का निर्यात या बिक्री (मान लीजिये), सामान्य त्रैमास की तुलना में, 20 प्रतिशत कम है। मौसमी विचरणों के माप के लिए हम केवल गुणात्मक प्रतिरूप पर ही विचार करेंगे। मौसमी विचरणों के माप की मुख्य विधियाँ निम्नलिखित हैं।

1) सरल माध्य विधि

2) उपनति से अनुपात विधि

3) चल–माध्य से अनुपात विधि

### 7.6.1 सरल माध्य विधि

यह विधि इस मान्यता पर आधारित है कि कालश्रेणी चर $y$, दो घटकों, अर्थात मौसमी ($S$) तथा अनियमित विचरणों के प्रभावों का परिणाम है। अतः हम $y = S.I$ लिख सकते हैं।

**सारणी 7.6 : सरल माध्य विधि की व्याख्या**

| | त्रैमास | | | |
|---|---|---|---|---|
| वर्ष | I | II | III | IV |
| 1 | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
| 2 | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ |
| 3 | $y_9$ | $y_{10}$ | $y_{11}$ | $y_{12}$ |
| 4 | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{15}$ | $y_{16}$ |
| 5 | $y_{17}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $y_{20}$ |
| योग | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ |
| माध्य | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
| मौसमी सूचकांक | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
| मौसमी सूचकांक (समायोजित) | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |

जब हम, सभी वर्षों के लिए, प्रत्येक मास या त्रैमास का माध्य लेते हैं तो अनियमित विचरणों का विलोपन हो जाता है तथा हमारे पास मौसमी घटक शेष रह जाता है। इस विधि की व्याख्या सारणी 7.6 में की गई है।

**व्याख्यात्मक विवरणः**

i) प्रत्येक वर्ष के प्रथम त्रैमास मानों का योग $T_1 = y_1 + y_5 + y_9 + y_{13} + y_{17}$ है। इसी प्रकार $T_2$, $T_3$ तथा $T_4$ प्रत्येक वर्ष के क्रमशः द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ त्रैमासों के योग हैं।

ii) iवें त्रैमास का माध्य $A = \frac{T_i}{n}$, है जहाँ $i$ = 1, 2, 3, 4 तथा $n$ वर्षों की संख्या का सूचक है।

iii) $G = \frac{\sum A_i}{4}$ को सर्वमाध्य (grand average) परिभाषित किया गया है।

iv) $s_i = \frac{A_i}{G} \times 100$, $i$ = 1, 2, 3, 4

v) $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

vi) $S_1$, $S_2$, $S_3$, तथा $S_4$ जहाँ पर $S_i = \frac{s_i}{s} \times 400$, $i$ = 1, 2, 3, 4 है, क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ त्रैमासों के मौसमी सूचकांक हैं। यह ध्यान दें कि चारों सूचकांकों का योग 400 के बराबर होना अनिवार्य होता है। इसके अतिरिक्त यदि $s$ = 400 है तो $S_i = s_i$ होगा।

vii) मासिक समंकों की काल श्रेणी में, 12 मासिक सूचकांकों का योग 1200 के बराबर होना आवश्यक है।

**उदाहरण 7.6.1**

सरल माध्य विधि द्वारा निम्नलिखित समंकों के लिए मौसमी सूचकांकों का परिकलन कीजिए।

**सारणी 7.6.1 : मौसमी सूचकांकों का परिकलन**

| | त्रैमास | | | |
|---|---|---|---|---|
| वर्ष | I | II | III | IV |
| 1992 | 72 | 68 | 80 | 70 |
| 1993 | 76 | 70 | 82 | 74 |
| 1994 | 74 | 66 | 84 | 80 |
| 1995 | 76 | 74 | 84 | 78 |
| 1996 | 78 | 74 | 86 | 82 |

**हलः**

| त्रैमास | | | | |
|---|---|---|---|---|
| वर्ष | I | II | III | IV |
| 1992 | 72 | 68 | 80 | 70 |
| 1993 | 76 | 70 | 82 | 74 |
| 1994 | 74 | 66 | 84 | 80 |
| 1995 | 76 | 74 | 84 | 78 |
| 1996 | 78 | 74 | 86 | 82 |
| योग (T) | 376 | 352 | 416 | 384 |
| माध्य (A) | 75.2 | 70.4 | 83.2 | 76.8 |
| मौसमी सूचकांक | 43 | 92.15 | 108.90 | 100.52 |

विवरणः

सर्वमाध्य $G = \frac{A_1+A_2+A_3+A_4}{4} = \frac{75.2+70.4+83.2+76.8}{4} = 76.4$

प्रथम त्रैमास का मौसमी सूचकांक, $S_1 = 98.43$

द्वितीय त्रैमास का मौसमी सूचकांक, $S_2 = 92.15$

तृतीय त्रैमास का मौसमी सूचकांक, $S_3 = 108.90$

चर्तुथ त्रैमास का मौसमी सूचकांक, $S_4 = 100.52$

क्योंकि इन सूचकांकों का योग 400 के बराबर है, समायोजन की आवश्यकता नहीं है।

### 7.6.2 उपनति से अनुपात विधि

यदि समंकों में प्रर्याप्त मात्रा में उपनति विद्यमान है तो सर्वप्रथम हम एक उपयुक्त उपनति समीकरण ज्ञात करके विभिन्न त्रैमासों (या मासों) के उपनति मान ज्ञात करते हैं। प्रायः ये मान त्रैमासिक या मासिक उपनति समीकरण द्वारा प्राप्त किए जाते हैं। तत्पश्चात $y$ के मानों को उनके अनुरूप उपनति मानों के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करके, उपनति का विलोपन किया जाता है। यह विधि इस मान्यता पर आधारित है कि चक्रीय विचरण या तो बहुत कम है या बिल्कुल विद्यमान नहीं है।

संकेतों के उपयोग द्वारा, हम

$$\frac{y}{T} \times 100 = \frac{TSI}{T} \times 100 = SI \times 100$$

लिख सकते हैं।

इसके पश्चात् अनियमित विचरणों का विलोपन सरल माध्य विधि द्वारा किया जाता है।

**उदाहरण 7.6.2:**

निम्नलिखित सारणी में एक बड़े विभागीय भंडार की पाँच विभिन्न वर्षों की बिक्री ('000 रूपये में) दी गई है। उपनति से अनुपात विधि द्वारा मौसमी सूचकांक प्राप्त कीजिए।

| | त्रैमास | | | |
|---|---|---|---|---|
| वर्ष | I | II | III | IV |
| 2000 | 502 | 1632 | 605 | 362 |
| 2001 | 526 | 1700 | 680 | 390 |
| 2002 | 556 | 1820 | 780 | 422 |
| 2003 | 590 | 1955 | 888 | 464 |
| 2004 | 632 | 2110 | 1002 | 515 |

**हलः**

पहले हम त्रैमास औसत मानों के लिए उपनति रेखा का समंजन करते है। मान लीजिए, समंजन की जाने वाली उपनति $y = a+bx$ है, जिसमें $y$ = वर्ष की त्रैमासिक औसत तथा $x$ की इकाई एक वर्ष है। दिए हुए समंकों से प्रत्येक वर्ष के चार त्रैमासों का औसत लेकर, निम्नलिखित सारणी की रचना की गई है।

**सारणी 7.6.2 (क): रैखिक उपनति का समंजन**

| वर्ष | $y$ | $x$ | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|
| 2000 | 775 | -2 | 4 | -1550 |
| 2001 | 824 | -1 | 1 | -824 |
| 2002 | 894 | 0 | 0 | 0 |
| 2003 | 974 | 1 | 1 | 974 |
| 2004 | 1065 | 2 | 4 | 2130 |
| | 4532 | 0 | 10 | 730 |

प्रसामान्य समीकरण इस प्रकार हैः

$$\sum y = na + b\sum x$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

ऊपर दी गई सारणी से, प्रसामान्य समीकरणों में मान प्रतिस्थापित करने पर

$5a = 4532$ या $a = 906.4$

$10b = 730$ या $b = 73.$

इस प्रकार औसतन त्रैमासिक उपनति समीकरण $T = 906.4 + 73\,x$ होगा।

(मूल बिन्दु : 2002, $x$ की इकाई = 1 वर्ष)

यह ध्यान दें कि पहले के विपरीत हमने $Y$ के स्थान पर $T$ का उपयोग किया है।

इस समीकरण द्वारा हम निम्नलिखित त्रैमासिक उपनति समीकरण प्राप्त करते हैं।

$$T = 906.4 + \frac{73}{4}.x = 906.4 + 18.25x$$

(मूल बिन्दु : 30 जून 2002, $x$ की इकाई = एक त्रैमास)

मूल बिन्दु का स्थानान्तरण 2002 के तृतीय त्रैमास (इसका मध्य बिन्दु) पर करने पर, त्रैमासिक उपनति समीकरण

$T = 906.4 + 18.25\ (x + 0.) = 906.4 + 9.125 + 18.25x$

$= 9.125 + 18.25x$ प्राप्त होता है।

इस समीकरण में $x$ के उपयुक्त मान रखने पर हमें विभिन्न त्रैमासों के उपनति मान ($T$) प्राप्त हो जाते है। अगले चरण में हम मूल $y$ मानों को उपनति के प्रतिशत के रूप में लिखते हैं अर्थात ($y \div T$) X 100, जिससे हमें उपनति से अनुपात प्राप्त होते हैं। उपनति मान तथा उपनति से अनुपातों को निम्नलिखित सारणी में दर्शाया गया है।

**सारणी 7.6.2 (ख): उपनति से अनुपातों का परिकलन**

| वर्ष | त्रैमास | $x$ | $T = 915.525 + 18.25x$ | $y$ | $(y \div T)\times 100$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2000 | I | -10 | 733.0 | 502 | 68 |
| | II | -9 | 7751.3 | 1632 | 217 |
| | III | -8 | 769.5 | 605 | 779 |
| | IV | -7 | 787.8 | 362 | 46 |
| 2001 | I | -6 | 806.0 | 526 | 65 |
| | II | -5 | 824.3 | 1700 | 206 |
| | III | -4 | 842.5 | 680 | 81 |
| | IV | -3 | 860.8 | 390 | 45 |
| 2002 | I | -2 | 879.0 | 556 | 63 |
| | II | -1 | 897.3 | 1820 | 203 |
| | III | 0 | 915.5 | 780 | 85 |
| | IV | 1 | 933.8 | 422 | 45 |
| 2003 | I | 2 | 952.0 | 590 | 62 |
| | II | 3 | 970.3 | 1955 | 201 |
| | III | 4 | 988.5 | 888 | 90 |
| | IV | 5 | 1006.8 | 464 | 46 |
| 2004 | I | 6 | 1025.0 | 632 | 62 |
| | II | 7 | 1943.3 | 2110 | 202 |
| | III | 8 | 1061.5 | 1002 | 94 |
| | IV | 9 | 10779.8 | 515 | 48 |

इन उपनति से अनुपातों को त्रैमासों के अनुसार व्यवस्थित करके, सरल माध्य विधि द्वारा, मौसमी सूचकांक परिकलित किए जाते हैं।

सारणी 7.6.2 (ग): मौसमी सूचकांकों का परिकलन

| वर्ष | त्रैमास | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 2000 | 68 | 217 | 79 | 46 |
| 2001 | 65 | 206 | 81 | 45 |
| 2002 | 63 | 203 | 85 | 45 |
| 2003 | 62 | 201 | 90 | 46 |
| 2004 | 62 | 202 | 94 | 48 |
| योग | 320 | 1029 | 429 | 230 |
| माध्य | 64.0 | 205.8 | 85.8 | 46.0 |
| मौसमी सूचकांक | 63.74 | 209.98 | 85.46 | 45.82 |

### 7.6.3 चल–माध्य से अनुपात विधि

जब काल श्रेणी समंकों में सभी चार घटक विद्यमान हों तो इस विधि का उपयोग किया जाता है। हम यह जानते हैं कि एक चल–माध्य, जिसकी अवधि आवर्ती विचरणों की अवधि के बराबर है, इन विचरणों का पूर्ण विलोपन कर देता है। अतः, यदि हम त्रैमासिक समंकों का 4–अवधि (या मासिक समंकों का 12–अवधि) चल–माध्य ($M$) परिकलित करें, तो $y$ मानों से मौसमी विचरणों और कुछ अनियमित विचरण का विलोपन हो जाता है। तत्पश्चात् $y$ को चल–माध्य के प्रतिशत के रूप में लिखने पर, अर्थात् $(y \div M)\times 100$, हमे जो मान प्राप्त होते हैं उनमें मौसमी तथा अनियमित घटक विद्यमान होते हैं। इसके बाद, पहले की भाँति, सरल माध्य विधि द्वारा, मौसमी घटक को अनियमित घटक से अलग किया जाता हैं।

संकेतों के उपयोग द्वारा हम $\frac{y}{M}\times 100 = \frac{TCSI}{TCI'} = SI"$ लिख सकते हैं।

**उदाहरण 7.6.3:**

निम्नलिखित समंकों के लिए, चल–माध्य से अनुपात विधि द्वारा, मौसमी सूचकांकों का परिकलन कीजिए।

| वर्ष | गर्मी | मानसून | पतझड़ | सर्दी |
|---|---|---|---|---|
| 2009 | 30 | 81 | 62 | 119 |
| 2010 | 33 | 104 | 86 | 171 |
| 2011 | 42 | 153 | 99 | 221 |
| 2012 | 56 | 172 | 129 | 235 |
| 2013 | 67 | 201 | 136 | 302 |

हल :

सारणी 7.6.3: चल–माध्य अनुपात विधि द्वारा मौसमी सूचकांकों का परिकलन

| वर्ष | त्रैमास | $y$ | 4–अवधि चल योग | केन्द्रित योग | 4–अवधि चल माध्य $(M)$ | $(y \div M) \times 100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2009 | गर्मी | 30 | - | - | - | - |
| | मानसून | 81 | -- | - | -- | - |
| | | | 292 | - | - | - |
| | पतझड | 62 | | 597 | 73.38 | 84.50 |
| | | | 295 | | | |
| | सर्दी | 119 | | 613 | 76.63 | 155.30 |
| | | | 318 | | | |
| 2010 | गर्मी | 33 | | 660 | 82.50 | 40.00 |
| | | | 342 | | | |
| | मानसून | 104 | | 736 | 92.00 | 113.04 |
| | | | 394 | | | |
| | पतझड | 86 | | 796 | 99.63 | 86.32 |
| | | | 403 | | | |
| | सर्दी | 171 | | 855 | 106.88 | 160.00 |
| | | | 452 | | | |
| 2011 | गर्मी | 42 | | 917 | 114.63 | 36.64 |
| | | | 465 | | | |
| | मानसून | 153 | | 980 | 122.50 | 124.90 |
| | | | 515 | | | |
| | पतझड | 99 | | 1044 | 130.50 | 75.86 |
| | | | 529 | | | |
| | सर्दी | 221 | | 1077 | 134.63 | 164.16 |
| | | | 548 | | | |
| 2012 | गर्मी | 56 | | 1126 | 140.75 | 39.79 |
| | | | 578 | | | |
| | मानसून | 172 | | 1170 | 146.25 | 117.61 |
| | | | 592 | | | |
| | पतझड | 129 | | 1195 | 149.38 | 86.36 |
| | | | 603 | | | |
| | सर्दी | 235 | | 1235 | 154.38 | 152.23 |
| | | | 632 | | | |
| 2013 | गर्मी | 67 | | 1271 | 158.88 | 42.17 |
| | | | 639 | | | |
| | मानसून | 201 | | 1345 | 168.13 | 119.55 |
| | | | 706 | - | - | - |
| | पतझड | 136 | - | - | - | - |
| | सर्दी | 302 | - | - | - | - |

अब चल माध्यों से अनुपातों को त्रैमासों के अनुसार व्यवस्थित करके, सरल माध्य विधि द्वारा, मौसमी सूचकांक परिकलित किए जा सकते हैं।

| वर्ष | त्रैमास | | | |
|---|---|---|---|---|
| | गर्मी | मानसून | पतझड़ | सर्दी |
| 2009 | - | - | 84.50 | 155.30 |
| 2010 | 40.00 | 113.04 | 86.32 | 160.00 |
| 2011 | 36.64 | 124.90 | 75.86 | 164.16 |
| 2012 | 39.79 | 117.61 | 86.36 | 152.23 |
| 2013 | 42.17 | 119.55 | - | - |
| योग | 158.60 | 475.10 | 333.04 | 631.69 |
| माध्य | 39.65 | 118.78 | 83.26 | 157.92 |
| मौसमी सूचकांक | 36.69 | 118.89 | 83.34 | 158.08 |

**बोध प्रश्न – 3**

1) निम्नलिखित समंकों में 1992 से 1995 के वर्षों में स्थील के तैयार डिब्बों की संख्या दी हुई है :

**स्टील के तैयार डिब्बों का उत्पादन ('000 डिब्बे)**

| वर्ष | जनवरी | फरवरी | मार्च | अप्रैल | मई | जून | जुलाई | अगस्त | सितंबर | अक्तूबर | नवंबर | दिसंबर |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | 420 | 414 | 502 | 365 | 368 | 332 | 390 | 396 | 429 | 417 | 422 | 496 |
| 1993 | 491 | 466 | 516 | 337 | 342 | 360 | 409 | 402 | 372 | 391 | 394 | 446 |
| 1994 | 463 | 465 | 478 | 310 | 325 | 406 | 415 | 437 | 438 | 445 | 430 | 416 |
| 1995 | 502 | 487 | 536 | 404 | 418 | 429 | 489 | 492 | 475 | 456 | 476 | 476 |

सरल माध्य विधि द्वारा मौसमी सूचकांकों का परिकलन कीजिए।

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

2) निम्नलिखित सारणी में भारत में, 1992 से 1995 तक विभिन्न त्रैमासों में स्टील उत्पादन ('000 टनों में) दिया हुआ है :

| वर्ष | प्रथम त्रैमास | द्वितीय त्रैमास | तृतीय त्रैमास | चतुर्थ त्रैमास |
|---|---|---|---|---|
| 1992 | 1336 | 1065 | 1215 | 1335 |
| 1993 | 1463 | 1039 | 1183 | 1161 |
| 1994 | 1306 | 1041 | 1290 | 1321 |
| 1995 | 1525 | 1251 | 1456 | 1408 |

रैखिक उपनति की मान्यता पर, उपनति से अनुपात विधि द्वारा मौसमी सूचकांकों का परिकलन कीजिए।

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

3) 2006 से 2009 वर्षों के लिए त्रैमासिक बिक्री समंक (हजार रूपयों में) निम्नलिखित हैं। चल–माध्य से अनुपात विधि द्वारा मौसमी सूचकांक ज्ञात कीजिए।

| वर्ष | त्रैमास | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 2006 | 290 | 280 | 285 | 310 |
| 2007 | 320 | 305 | 310 | 330 |
| 2008 | 340 | 321 | 320 | 340 |
| 2009 | 370 | 360 | 362 | 380 |

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

4) किसी दुकान के एक विशेष प्रकार के वस्त्रों की बिक्री के मौसमी सूचकांक निम्नलिखित हैं।

| त्रैमास | मौसमी सूचकांक |
|---|---|
| जनवरी–मार्च | 97 |
| अप्रैल–जून | 85 |
| जुलाई–सितम्बर | 83 |
| अक्तूबर–दिसम्बर | 135 |

यदि प्रथम त्रैमास में कुल बिक्री का मूल्य 15,000 रूपये हो तो दुकानदार को कितने मूल्य के इस प्रकार के वस्त्र भंडार में रखने चाहिए, जिससे वर्ष के अन्य त्रैमासों की माँग पूरी की जा सके?

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

……………………………………………………………………………...…..

## 7.7 सार संक्षेप

कालश्रेणी एक चर के प्रेक्षणों का एक समुच्चय होता है जोकि एक समयावधि, प्रायः समान समय अंतराल, में लिखित किए जाते हैं। सम्बन्धित चर में परिवर्तनों को, कुछ सीमा तक, कालश्रेणी के घटकों के आधार पर समझा जा सकता है। ये घटक उपनति, मौसमी विचरण, चक्रीय उच्चावचन तथा यादृच्छिक विचरण होते हैं। चर का प्रेक्षित मान या तो

उपरोक्त घटकों की गुणा के रूप में (गुणात्मक प्रतिरूप) या घटकों के योग के रूप में (योज्य प्रतिरूप) निरूपित किया जाता हैं

चल–माध्य विधि, या न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा समीकरण का समंजन करके उपनति का मापन किया जा सकता है। उपनति का अनुमान लगाने के बाद हम भविष्य के मानों का आकलन कर सकते हैं तथा वार्षिक समंकों से मासिक या त्रैमासिक मान ज्ञात कर सकते हैं।

मौसमी विचरणों के आकलन की तीन विधियाँ हैं: सरल माध्य विधि, उपनति से अनुपात विधि तथा चल–माध्य से अनुपात विधि। सरल माध्य विधि का उपयोग अनियमित घटक के विलोपन के लिए किया जाता है। यदि चक्रीय उच्चावचन विद्यमान न हों तो उपनति से अनुपात विधि तथा सभी चार घटकों के विद्यमान होने पर चल–माध्य से अनुपात विधि का उपयोग किया जाता है।

## 7.8 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1) उदाहरण 7.3.1 पढ़कर उत्तर दें।

2) उदाहरण 7.3.1 पढ़कर उत्तर दें।

**बोध प्रश्न 2**

1) $y = 42.2 + 2.3x$, मूल बिन्दु: 2012, $x$ की इकाई = 1 वर्ष (मासिक औसत समीकरण)
$y = 42.3 + 0.19x$, मूल बिन्दु : जुलाई, 2012, $x$ की इकाई= 1 मास (मासिक समीकरण)

मार्च 2011 के लिए आकलन $(x = -16) = 39.23$

सितंबर 2013 के लिए आकलन $(x = 14) = 44.98$

2) 45.17 टन

3) 73

**बोध प्रश्न 3**

1) 10957, 107.00, 118.69, 82.71, 84.87, 89.19, 99.47, 100.87, 100.11, 99.82, 100.58, 107.12

2) 112.27, 86.62, 100.21, 100.90

3) 104.2, 97.9, 96.5, 101.4

4) रूपये 13144; 12835; 20876

# इकाई 8 जन्म–मृत्यु सांख्यिकी (Vital Statistics)*

इकाई की रूपरेखा



## 8.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप :

- जन्म–मृत्यु सांख्यिकी में प्रयुक्त आँकड़ों के स्रोतों का वर्णन कर सकेंगे;
- जन्म–मृत्यु संबंधी विविध दरों की गणना कर सकेंगे;
- वय सारणी के निर्माण की कार्यविधि की व्याख्या कर सकेंगे; और
- वय सारणी के अनुप्रयोगों और सीमाओं के समझ पाएँगे।

---

* इग्नू पाठ्य सामाग्री से अंगीकृतः ई.ई.सी –13 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें की इकाई 12 सी.जी. नायडू द्वारा लिखित एवं कौस्तुभ बारिक द्वारा संशोधित ।

## 8.1 विषय प्रवेश

जन्म–मृत्यु सांख्यिकी मुख्य रूप से ऐसे कारकों से संबंद्ध है जिनका जनसंख्या वृद्धि में विशेष योगदान है। ऐसे कुछ कारक हैं; जन्म दर, मृत्यु दर, जीवन की प्रत्याशा (जीवाशा) और प्रवास। इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप अर्थशास्त्र में जन्म–मृत्यु सांख्यिकी के महत्व और अनुप्रयोग को समझ पाने की स्थिति में होंगे। इस इकाई का मुख्य उद्देश्य आपको जन्म–मृत्यु सांख्यिकी की कुछ बुनियादी संकल्पनाओं और आँकड़ों के स्रोतों से अवगत कराना है और यह बताना है कि विविध अनुपातों को किस प्रकार मापा जाता है और जनसंख्या को प्रक्षेपित करने और जीवन प्रत्याशा की गणना करने में इन अनुपातों को किस प्रकार लागू किया जाता है और बीमाविज्ञान आदि में इनके क्या प्रयोग हैं।

## 8.2 आँकड़ों के स्रोत

जन्म–मृत्यु सांख्यिकी के लिए आँकड़े आमतौर पर निम्नलिखित चार विधियों से इकट्ठे किए जाते हैं : पंजीकरण, जनगणना, सर्वेक्षण और प्रतिदर्श पंजीकरण पद्धति। आइए अब हम इन विधियों पर चर्चा करें;

i) **पंजीकरण विधि** : इस विधि में जन्म, मृत्यु, विवाह, प्रवास आदि के सतत् और स्थायी रिकार्ड शामिल है। भारत समेत बहुत से देशों में कानून के अंतर्गत जन्म और मृत्यु का पंजीकरण कराना अनिवार्य है। जन्म या मृत्यु का पंजीकरण कराने पर पंजीकरण कार्यालय प्रमाणपत्र जारी करता है। यद्यपि पंजीकरण विधि साधारण और प्रभावी है, फिर भी इस विधि से जुड़ी समस्या है कि होने वाले सभी जन्म और मृत्यु पंजीकृत नहीं होते। ऐसा इसलिए है क्योंकि ये कानून, विशेषरूप से, ग्रामीण भारत में इसे सख्ती से लागू नहीं किया जा रहा।

ii) **जनगणना** : विश्व के लगभग सभी देशों में समय–समय पर जनसंख्या की गणना की जाती है। जनगणना में हमें जन्म–मृत्यु सांख्यिकी के साथ–साथ आयु, लिंग, वैवाहिक स्थिति, शिक्षा का स्तर, व्यवसाय, धर्म आदि से जुड़ी जानकारी भी प्राप्त होती है। लेकिन यह जानकारी केवल जनगणना संबंधी वर्षों से ही संबंधित होती है (अर्थात् दस वर्षों में एक बार)। जनगणना के वर्षों को छोड़कर अन्य वर्षों के ये आँकड़ें उपलब्ध नहीं हो पाते।

iii) **सर्वेक्षण** : सर्वेक्षण ऐसे क्षेत्रों में किया जाता है जहाँ पंजीकरण विधि प्रभावी नहीं होती या सूचारू रूप से कार्य नहीं कर पाती। सर्वेक्षण के माध्यम से हम ऐसे क्षेत्रों की जन्म–मृत्यु सांख्यिकी प्राप्त करने के योग्य हो जाते है।

iv) **प्रतिदर्श पंजीकरण पद्धति** : यह भारत में बड़े पैमाने का जनसांख्यिकी सर्वेक्षण है ताकि राष्ट्रीय और उप–राष्ट्रीय स्तरों पर जन्म दर, मृत्यु दर और अन्य उर्वरता (fertility) और मृत्यु संख्या सूचकों के विश्वसनीय वार्षिक अनुमान प्राप्त किए जा सकें। आमतौर पर अंशकालिक गणनाकार द्वारा क्षेत्र छान–बीन के अंतर्गत जन्म और मृत्यु संख्या की निरंतर गणना की जाती है। ये व्यक्ति आमतौर पर शिक्षक होते हैं। इसके उपरांत हर छह महीने के बाद किसी सरकारी व्यक्ति द्वारा स्वतंत्र सर्वेक्षण किया जाता है। इन माध्यमों से प्राप्त आँकड़ों को मिलान किया जाता है। इसके बाद बेमेल और आंशिक रूप से मेल खाने वाली घटनाओं में पुनः सत्यापन किया जाता है और तत्पश्चात् जन्म और मृत्यु संबंधी अंतिम आँकड़ों की प्राप्ति होती है। 1964–65 में कुछ गिने–चुने राज्यों में प्रायोगिक स्तर पर भारत के महापंजीयक कार्यालय द्वारा प्रतिदर्श पंजीकरण पद्धति (एसआरएस) की शुरूआत

की गई। 1969–70 के दौरान लगभग 3700 प्रतिदर्श इकाइयों को सम्मिलित करते हुए यह पद्धति पूरी तरह से लागू हो गई। इसके बाद समय–समय पर प्रतिदर्श का फैलाव बढ़ता गया। 2014 में इस सूची को 8861 प्रतिदर्श इकाइयों को सम्मिलित करके नवीतनम रूप दिया गया है।

## 8.3 जन्म–मृत्यु सांख्यिकी के उपयोग

मानवीय गतिविधियों के विविध क्षेत्रों में जन्म–मृत्यु सांख्यिकी बेहद उपयोगी है। इसके कुछ मुख्य फायदे इस प्रकार है :

1) जन्म–मृत्यु सांख्यिकी हमें यह समझने में सहायता करती है कि किसी देश या देश के भीतर किसी क्षेत्र की जनसंख्या की रचना में किस प्रकार के बदलाव आ रहा है। जनसंख्या की रचना से आशय वहाँ के लोगों की आयु, लिंग, धर्म, जन्म दर, मृत्यु दर, प्रवास दर, वैवाहिक स्थिति आदि से सम्बंधित जानकारी से होता है। देश या क्षेत्र की भावी आबादी की संरचना का पूर्वानुमान लगाने में ये आँकड़े हमारे लिए उपयोगी सिद्ध होते है।

2) जनसंख्या संबंधी प्रवृतियों का आकलन और प्रक्षेपण नीति निर्धारकों और प्रशासकों को बेहतर तरीके से योजना बनाने और आर्थिक और सामाजिक विकास कार्यक्रमों का मूल्यांकन करने में सहायता करता है।

3) मृत्यु दर से जुड़ी सांख्यिकी समुदायों की स्वास्थ्य संबंधी दशाओं को बेहतर बनाने में सहायता करती है। जैसे, संचारी रोगों पर आधारित सांख्यिकी, प्रभावी क्षेत्र की साफ–सफाई संबंधी दशाओं और चिकित्सीय सुविधाओं को बेहतर बनाने में स्वास्थ्य प्राधिकारियों के लिए सहायक सिद्ध होती है।

4) बीमाविज्ञान, जिसमें जीवन बीमा भी शामिल है, जन्म–मृत्यु सांख्यिकी पर आधारित है। इस इकाई के अनुभाग 8.4 में आप इस संदर्भ में और अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे।

## 8.4 जनसंख्या का मापन

किसी भी देश की कुल जनसंख्या को आमतौर पर किसी विशिष्ट समय बिंदु पर अभिव्यक्त किया जाता है। जैसे भारत में नवीनतम जनगणना 2011 में हुई और उस समय देश की कुल जनसंख्या 31.3.2011 को 121 करोड़ पाई गई। जनगणना के समय की गई कुल जनसंख्या की गिनती को ही ठीक–ठीक माना जाता है। जैसाकि आप जानते है कि भारत में हर दस वर्षों में एक बार जनगणना की जाती है। निम्नलिखित विधियों के प्रयोगों से हम जनगणना अवधियों के बीच के वर्षों के आँकड़ों का आकलन करते है।

### 8.4.1 रैखिक अंतर्वेशन विधि

विभिन्न आवधिक वर्षों के लिए कुल जनसंख्या का आकलन निम्नलिखित सूत्र से किया जा सकता है:

$$P_t = P_0 + \frac{n}{N}(P_1 - P_0) \qquad \ldots (8.1)$$

जहाँ, $P_1$ दिए गए आवधिक (inter-censal) वर्ष *'t'* में आकलित जनसंख्या है।

$P_0$ पिछली जनगणना की जनसंख्या है।

$P_1$ अनुवर्ती जनगणना की जनसंख्या है।

n दिए गए वर्ष और पिछले जनगणना वर्ष के बीच के वर्षों की संख्या है।

N दो जनगणना वर्षों के बीच के वर्षों की संख्या है।

उपर्युक्त विधि बीच के वर्षों के लिए उत्कृष्ट अनुमान प्रदान करती है। इसकी मान्यता यही है कि दोनों जनगणनाओं के बीच जनसंख्या वृद्धि की दर स्थिर रही है।

**उदाहरण 8.1:** भारत में 1991 की जनगणना के समय कुल आबादी 846 मिलियन थी और 2001 की जनगणना के समय यह 1027 मिलियन थी। 1996 में भारत की कुल आबादी की गणना कीजिए।

यहाँ, $P_0 = 846, \quad P_1 = 1027, \quad N = 10, \; n = 5$ है

इसलिए, $P_{1996} = 846 + \frac{5}{10}(1027 - 846) = 936.5$ मिलियन

लेकिन उपर्युक्त विधि की सीमा है कि इससे हम केवल दो जनगणना वर्षों के बीच के वर्षों की ही आबादी का अनुमान लगा सकते हैं। इससे हम भावी वर्षों के लिए अनुमान नहीं लगा सकते।

### 8.4.2 चक्रवर्धी वृद्धि दर सूत्र का प्रयोग

आमतौर पर देखा गया है कि जनसंख्या वृद्धि गुणोत्तर श्रेणी में ही होती है। यदि आधार वर्ष जनसंख्या और जनसंख्या चक्रवर्धी वृद्धि दर का (आधार जनगणना वर्ष और अनुवर्ती जनगणना वर्ष के बीच पता हो तो आप निम्नलिखित सूत्र के प्रयोग से दिए गए वर्ष के लिए कुल आबादी का अनुमान लगा सकते हैं।

$P_1 = P_0(1 + r)^n$

जहाँ, $r$ चक्रवर्धी वृद्धि दर है (आधार जनगणना वर्ष और अनुवर्ती जनगणना वर्ष के बीच की दर)

$n$ आधार वर्ष से वर्षों की संख्या है (आमतौर पर पिछला जनगणना वर्ष)

$P_0$ आधार वर्ष जनसंख्या है (आमतौर पर पिछला जनगणना वर्ष)

$P_t$ वर्ष $t$ का आकलित जनसंख्या है।

**उदाहरण 8.2** : 2001 में किसी, छोटे शहर की जनसंख्या 50,500 थी। 2001 और 2011 के बीच इस शहर की जनसंख्या की संयुक्त वृद्धि दर 0.025 थी। वर्ष 2015 के लिए उस शहर की जनसंख्या का आकलन कीजिए (मान लीजिए 2011 के बाद वृद्धि दर उतनी ही होगी)।

यहाँ, हमें दिया गया है $P_0 = 50500, r = 0.025,$

और, $n = 14$ (क्योंकि $2015 - 2001 = 14$)

इसलिए, $P_{2015} = 50500(1 + 0.025)^{14} = 71355$

### 8.4.3 स्वाभाविक वृद्धि और निबल प्रवास विधि

आप जानते ही हैं कि जनगणना से हमें कुल जनसंख्या का पता चलता है। इसी तरह से जन्म–मृत्यु और प्रवसन संबंधी सांख्यिकी की कुल संख्या रजिस्ट्रारों से प्राप्त होती है। निम्नलिखित कारकों से किसी भी क्षेत्र की आबादी बढ़ जाती है :

i) स्वाभाविक बढ़ोत्तरी (अर्थात् जन्में शिशुओं की कुल संख्या – मृतकों की कुल संख्या)

ii) निबल प्रवास (अर्थात्, क्षेत्र में आने वाले लोगों की कुल संख्या – उस क्षेत्र को छोड़ कर जाने वाले लोगों की कुल संख्या)

निम्नलिखित सूत्र के प्रयोग से दी गई अवधि के लिए आबादी की गणना की जाती है।

$$P_t = P_0 + (B - D) + (I - E)$$

जहाँ, $P_t$ आधार वर्ष से दिए गए वर्ष $t$ पर आकलित आबादी है।

$P_0$ आधार वर्ष है (आमतौर पर पिछला जनगणना वर्ष)

B और D, आधार वर्ष से $t$ वर्ष के दौरान जन्में शिशुओं और मृतकों की क्रमशः कुल संख्या है।

I और E, आधार वर्ष से $t$ वर्ष तक आप्रवासियों और प्रवासियों की संख्याएँ हैं।

**उदाहरण 8.3** : 2011 की जनगणना में किसी छोटे शहर की आबादी 22000 थी । 2011 से 2013 तक जन्मे, मृत, अप्रवासी और प्रवासी लोगों की संख्या क्रमशः 800, 150, 2500 और 1500 है। 2013 में शहर की कुल आबादी ज्ञात कीजिए।

यहाँ, $P_0 = 22000$, B = 800, D = 150, I = 2500, E = 1500

अतः, $P_{2013} = 22000 + (800 - 150) + (2500 - 1500) = 23650$

**बोध प्रश्न 1**

निम्नलिखित सारणी, भारत की मध्य वर्ष कुल जनसंख्या और जनसंख्या की वार्षिक चक्रवर्धी वृद्धि दर की जानकारी हमें देती है।

| वर्ष | आबादी (करोड़) | अवधि | चक्रवर्धी वृद्धि दर (%) |
|---|---|---|---|
| 1950 | 36.99 | 1950-60 | 1.9 |
| 1960 | 44.59 | 1960-70 | 2.2 |
| 1970 | 55.50 | 1970-80 | 2.1 |
| 1980 | 68.70 | 1980-90 | 2.0 |
| 1990 | 84.17 | 1990-2000 | 1.8 |
| 2000 | 100.27 | 2000-2010 | 1.4 |
| 2010 | 113.17 | 2010-20 | 1.1 |
| 2020 | 132.61 | … | … |

**स्रोत** : यू एस सेन्सस ब्यूरो : आईडीबी सॅमरि डैमोग्राफिक डेटा फॉर इंडिया, 2020

ध्यान रखें : चक्रवर्धी वृद्धि दर प्रतिशत में होती है। अपेक्षित $r$ की प्राप्ति के लिए इसे 100 से विभाजित करें। जैसे, 1950–60 की समयावधि के लिए संयुक्त वृद्धि दर 1.9 प्रतिशत है।

इसलिए $r = 1.9/100 = 0.019$

उपर्युक्त सारणी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1) रैखिक अंतर्वेशन विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित वर्षों के लिए मध्य–वर्ष आबादी ज्ञात कीजिए।

| वर्ष | मध्य–वर्ष आबादी |
|---|---|
| 1954 | |
| 1966 | |
| 1973 | |
| 1985 | |
| 1998 | |
| 2005 | |
| 2018 | |

2) चक्रवर्धी वृद्धि दर विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित वर्षों के लिए मध्य वर्ष आबादी ज्ञात कीजिए।

| वर्ष | मध्य–वर्ष आबादी |
|---|---|
| 1954 | |
| 1966 | |
| 1973 | |
| 1985 | |
| 1998 | |
| 2005 | |
| 2018 | |

3) उपर्युक्त दोनों विधियों की तुलना कीजिए और निष्कर्ष बताइए।

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

4) जन्म–मृत्यु सांख्यिकी में प्रयुक्त विभिन्न आँकड़ों के स्रोतों का संक्षेप में वर्णन कीजिए।

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

5) जन्म–मृत्यु सांख्यिकी के महत्वपूर्ण उपयोग क्या है?

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

## 8.5 जन्म–मृत्यु संबंधी दरें

आमतौर पर, जन्म–मृत्यु सांख्यिकी आधारित आँकड़ें जन्म लेने वालों की संख्या, मृतकों की संख्या आदि के रूप में उपलब्ध होते हैं। इन आँकड़ों की सार्थक उपयोगिता की प्राप्ति के लिए, सामान्यतौर पर हम इन आँकड़ों को जन्म मृत्यु संबंधी दरों या अनुपातों में परिवर्तित करते हैं। वर्ष में प्रति 100 व्यक्तियों में जन्में या मृतकों की संख्या आमतौर पर निम्न होती है और छोटी भिन्नों के रूप में नजर आती है। इन अनुपातों में होने वाले परिवर्तन भी पूरी तरह स्पष्ट नहीं होते। इस समस्या को दूर करने के लिए, जन्म–मृत्यु दरों को प्रति हजार व्यक्तियों के आधार पर अभिव्यक्त किया जाता है। इस अनुभाग में आप ऐसी कुछ महत्वपूर्ण जन्म–मृत्यु दरों का अध्ययन करेंगे।

### 8.5.1 अशोधित जन्म दर

अशोधित जन्म दर को, किसी विशिष्ट समुदाय या क्षेत्र में प्रति 1000 की जनसंख्या में जन्में शिशुओं की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है। अशोधित जन्म दर की गणना के लिए हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$\text{अशोधित जन्म दर} = \frac{\text{जन्में शिशुओं की वर्ष में संख्या (किसी समुदाय या क्षेत्र में)}}{\text{मध्य–वर्ष जनसंख्या (समुदाय या क्षेत्र की)}} \times 1000$$

अशोधित जन्म दर से हमें पता चलता है कि क्षेत्र या समुदाय में शिशुओं का जन्म किस दर पर हो रहा है।

**उदाहरण 8.4** : 2020 में मध्य प्रदेश में जनजातीय समुदाय में मध्यवर्ष जनसंख्या और जन्मे शिशुओं की संख्या क्रमशः 40,000 और 1200 है। अशोधित जन्म दर ज्ञात कीजिए।

यहाँ, हमारे पास हैं; 2020 की मध्य वर्ष जनसंख्या = 40,000 और 2020 में जन्मे शिशुओं की संख्या = 1200

$$\text{अशोधित जन्म दर} = \frac{1200}{40000} \times 1000 = 30 \text{ प्रति 1000 व्यक्ति प्रति वर्ष}$$

### 8.5.2 अशोधित मृत्यु दर

अशोधित मृत्यु दर को किसी विशिष्ट आयु समूह या स्त्री/पुरूष समूह या किसी समुदाय या क्षेत्र में प्रति 1000 आबादी में होने वाली मौतों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है। अशोधित मृत्यु दर की गणना के लिए हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$\text{अशोधित मृत्यु दर} = \frac{\begin{array}{c}\text{मौतों की वार्षिक संख्या (किसी विशिष्ट आयु समूह या}\\ \text{स्त्री/पुरूष समूह या समुदाय/क्षेत्र में)}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{मध्य–वर्ष जनसंख्या (उस विशिष्ट आयु समूह या}\\ \text{स्त्री/पुरूष समूह या समुदाय / क्षेत्र की)}\end{array}} \times 1000$$

अशोधित मृत्यु दर से हमें पता चलता है कि किसी आयु समूह, स्त्री/समूह या क्षेत्र या समुदाय में किस दर पर मौतें हो रही है।

**उदाहरण 8.5** : महाराष्ट्र के एक छोटे शहर में 2020 में महिलाओं की पंजीकृत मध्य–वर्ष आबादी और मौतों की संख्या क्रमशः 25000 और 245 है। अशोधित मृत्यु दर बताइए।

यहाँ, 2020 में मध्य वर्ष महिला आबादी है = 25000 और 2020 में महिलाओं की होने वाली मौतों की संख्या है = 245

अशोधित मृत्यु दर (महिलाओं की) = $\frac{245}{25000} \times 1000$

= महिलाओं में 9.8 प्रति 1000 व्यक्ति प्रति वर्ष

### 8.5.3 स्वाभाविक वृद्धि की अशोधित दर

स्वाभाविक वृद्धि की अशोधित दर को दिए गए वर्ष में ऐसी दर पर परिभाषित किया जाता है जिसमें प्रति 1000 व्यक्तियों के रूप में अभिव्यक्त होने वाली मौतों की तुलना में होने वाले अतिरिक्त जन्मों के कारण, दिए गए वर्ष में आबादी में वृद्धि होती है।

वार्षिक स्वाभाविक वृद्धि को इस प्रकार मापा जाता है :

वार्षिक स्वाभाविक वृद्धि = जन्मों की वार्षिक संख्या – मौतों की वार्षिक संख्या

स्वाभाविक वृद्धि की अशोधित दर की गणना का सूत्र है :

$$\text{स्वाभाविक वृद्धि की वार्षिक दर} = \frac{\text{स्वाभाविक वार्षिक वृद्धि}}{\text{मध्य–वर्षा आबादी}} \times 1000$$

= अशोधित जन्म दर – अशोधित मृत्यु दर

दिए गए वर्ष के लिए स्वाभाविक वृद्धि की अशोधित दर से हमें पता चलता है कि पिछले एक वर्ष से जनसंख्या में स्वाभाविक वृद्धि कितनी हुई है।

**उदाहरण 8.6** : भारत में 2116 में अशोधित जन्म दर और अशोधित मृत्यु दर क्रमशः 21.4 और 7.5 है। स्वाभाविक वृद्धि की अशोधित दर बताइए।

स्वाभाविक वृद्धि की अशोधित दर = 21.4 – 7.5 = 13.9 प्रति 1000 प्रति वर्ष

### 8.5.4 निवल प्रवास की दर

प्रवास को क्षेत्र की किसी विशिष्ट सीमा से पार किसी नये या अर्ध स्थायी रिहायश स्थापित करने के उद्देश्य से जाने वाले व्यक्तियों के रूप में परिभाषित किया जाता है। आप्रवासी वे व्यक्ति हैं जो क्षेत्र में रहने के उद्देश्य से आए हैं और प्रवासी वे व्यक्ति हैं जो क्षेत्र छोड़कर चले गए है।

वार्षिक निवल प्रवास को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

(आप्रवासियों की वार्षिक संख्या – प्रवासियों की वार्षिक संख्या)

निवल प्रवास की वार्षिक दर की गणना का सूत्र है :

$$\text{निवल प्रवास की वार्षिक दर} = \frac{\text{वार्षिक निवल प्रवास}}{\text{वार्षिक मध्य–वर्ष जनंसख्या}} \times 1000$$

निवल प्रवास की वार्षिक दर से हमें पता चलता है कि निर्धारित वर्ष की जनसंख्या में किस दर पर निवल प्रवास ने अपना योगदान दिया है।

**उदाहरण 8.7** : किसी क्षेत्र में 2020 के लिए अप्रवासियों, प्रवासियों और मध्य वर्ष आबादी की वार्षिक संख्या क्रमशः 6500, 5200 और 66,700 दी गई है। निवल आप्रवास की वार्षिक दर बताइए।

यहाँ, हमारे पास है, अप्रवासियों की संख्या = 6500

प्रवासियों की संख्या = 5200

मध्य वर्ष जनसंख्या = 66700

वार्षिक निवल आप्रवास = 6500 − 5200 = 1300

निवल प्रवास की वार्षिक दर = $\frac{1300}{66700} \times 1000$

= 19.7 प्रति 1000 प्रति वर्ष

### 8.5.5 कुल वृद्धि की दर

जनसंख्या की कुल वृद्धि को इस प्रकार मापा जाता है :

(वार्षिक स्वाभाविक वृद्धि + वार्षिक निवल आप्रवास)

$$\text{कुल वृद्धि की दर} = \frac{\text{वार्षिक कुल वृद्धि}}{\text{वार्षिक मध्य वर्ष जनसंख्या}} \times 1000$$

= (स्वाभाविक वृद्धि की अशोदित दर + निवल आप्रवास की दर)

दिए गए वर्ष के कुल वृद्धि की दर से हमें पता चलता है कि वर्ष में किस दर से जनसंख्या में वृद्धि हुई है।

**उदाहरण 8.8** : किसी क्षेत्र के लिए 2018 में रिकार्ड की गई वार्षिक स्वाभाविक वृद्धि, वार्षिक निवल आप्रवास और वार्षिक मध्य–वर्ष जनसंख्या क्रमशः 1500, 500 और 50,000 है। कुल वृद्धि की दर बताइए।

यहाँ, हमारे पास है :

वार्षिक स्वाभाविक वृद्धि = 1500

वार्षिक निवल आप्रवास = 500

मध्य वर्ष जनसंख्या = 50000

वार्षिक कुल वृद्धि = 1500 + 500 = 2000

कुल वृद्धि की दर = $\frac{2000}{50000} \times 1000$

= 40 प्रति 1000 प्रति वर्ष

### 8.5.6 शिशु मृत्यु दर

शिशु मृत्यु दर को दिए गए वर्ष में प्रति 1000 जीवित जन्मे (एक वर्ष की आयु से कम) शिशुओं की मौतों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है। शिशु मृत्यु दर की गणना का सूत्र इस प्रकार है:

$$\text{शिशु मृत्यु दर} = \frac{\text{वार्षिक शिशु मृत्यु (बाल या बालिका या कुल)}}{\text{वार्षिक जीवित जन्म (वाले बाल या बालिका या कुल)}} \times 1000$$

वार्षिक शिशु मृत्यु (बालक या बालिका या कुल)

शिशु मृत्यु दर से हमें पता चलता है कि दिए गए वर्ष के लिए एक वर्ष की आयु से कम वाले शिशुओं में से ऐसे कितने हैं जिनकी जीवित रहने की संभावना नहीं है। बालक या बालिकाओं के लिए अलग से शिशु मृत्यु दर की गणना की जा सकती है।

**उदाहरण 8.9** : 2019 में, किसी छोटे शहर में, बालिकाओं के संदर्भ में जीवित जन्मी और इनमें होने वाली मौतें की कुल संख्या क्रमशः 3000 और 25 रिकार्ड की गई है। बालिकाओं में शिशु मृत्यु दर ज्ञात करें।

यहाँ हमारे पास हैं :

वार्षिक जीवित जन्मी बालिकाएँ = 3000

वार्षिक शिशु मृत्यु संख्या = 25

शिशु मृत्यु दर = $\frac{15}{3000} \times 1000$

= 8.33 प्रति 1000 प्रति वर्ष

**बोध प्रश्न 2**

वर्ष 2018 में भारत में अशोधित जन्म दर, अशोधित मृत्यु दर, स्वाभाविक वृद्धि दर और शिशु मृत्युदर के अनुमान इस प्रकार हैः

| जन्म–मृत्यु दर | कुल | ग्रामीण | शहरी |
|---|---|---|---|
| जन्म दर | 20.0 | 21.6 | 16.7 |
| मृत्यु दर | 6.2 | 6.7 | 5.1 |
| स्वाभाविक वृद्धि दर | 13.8 | 14.9 | 11.6 |
| शिशु मृत्यु दर | 32 | 36 | 23 |

**स्रोत : प्रतिदर्श पंजीकरण पद्धति बुलेटिन, मई 2020**

ध्यान दें कि शहरी क्षेत्रों की तुलना में ग्रामीण क्षेत्रों में जन्म–मृत्यु की दरें उच्च है। निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए कोई एक सर्वाधिक महत्वपूर्ण कारण बताइएः

1) ग्रामीण क्षेत्रों में जन्म दर उच्च होती है क्योंकि

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

2) शहरी क्षेत्रों में मृत्यु दर निम्न है क्योंकि

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

3) ग्रामीण क्षेत्रों में शिशु मृत्यु दर उच्च है क्योंकि

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

## 8.6 वय सारणी

जीवाशा वर्तमान मृत्युदर आदि के बने रहने पर किसी व्यक्ति के जीवन के शेष वर्षों का अनुमान होती है। वय सारणी उस समय की आयु–विशिष्ट मृत्यु दरों के अनुसार जनसंख्या के प्रत्येक आयु वर्ग या आयु समूह में जीवाशा और मृत्यु की प्रायिकता दर्शाने वाली सारणी है।

वय सारणी से हमें भलीभाँति पता चलता है कि जनसंख्या में कुल कितनी तरह की मौतें हुई हैं। इसे हम एक उदाहरण से स्पष्ट कर सकते है। हम 1,00,000 जन्मी बालिका शिशुओं के समूह (आमतौर पर जिसे हम सहगण या cohort कहते हैं) से शुरू करते हैं और ऐसी संख्या का अनुमान लगाते हैं जो हरेक आयु या आयु समूह में जीवित जन्मों से संबंधित है। मान लीजिए कि 1,00,000 जीवित जन्मी बालिकाओं में से पहली 95,000 शिशु बालिकाएँ 15 वर्ष की आयु तक पहुँचेगी, 92,500 बालिकाएँ 25 वर्ष की आयु तक और वह औसत आयु जिस पर अंततः इन सभी 1,00,000 बालिकाओं की मृत्यु होगी, वह है 72 वर्ष की आयु।

वय सारणी का निर्माण करना एक सरल प्रक्रिया हैं इसमें निम्नलिखित चरण शामिल हैं जो हरेक आयु समूह के लिए दोहराए जाते हैं:

i) **आयु अंतराल ($x$ से $x+n$)**: दो सही (exact) आयु समूहों के बीच की जीवन अवधि। यही आयु ($x$) 0 से शुरू होती है और प्रत्येक आयु अंतराल की निम्न सीमा को दर्शाती है और धीरे–धीरे 1, 5, 10, 15 और ऐसे ही 100+ तक बढ़ती जाती है। (जो एक विवृत अंतराल है)। पहले और दूसरे आयु समूह आमतौर पर '<1' और '1-4' हैं और अंतिम आयु समूह '100+' है जबकि बाकी के आयु समूह समान आकार के हैं, जैसे '5–9', '10–14', '15–19' ... '95–99'।

ii) **आयु अंतराल ($n_x$) का विस्तार** : इसका अर्थ आयु अंतराल में वर्षों की संख्या से है (अर्थात् $x$ से $x+n$)। आमतौर पर पहला मान I (अंतराल <1), दूसरा 4 (1-4) और अंतिम मान (100+) के अपवाद के साथ बाकी के मान हैं, 5 (5–9, 10–14, . ..... 95–99)।

iii) **आयु अंतराल में दर्ज मौतों की संख्या ($d_x$)** : यह स्तम्भ वय सारणी के उपयुक्त वर्ष के दौरान उस आयु समूह में मरने वाले व्यक्तियों की संख्या को दर्शाता है।

iv) **आयु अंतराल में व्यक्तियों की संख्या** ($P_x$) : यह स्तम्भ वय सारणी के उपयुक्त वर्ष के दौरान उस आयु अंतराल में व्यक्तियों की संख्या को दर्शाता है।

v) **पार्थक्य गुणक (Speration factor)** ($_na_x$) : यह ऐसे व्यक्तियों के जीवित वर्षों की औसत संख्या को दर्शाता है जिनकी मृत्यु $x$ और $x+n$ आयु के बीच हुई है।

गणना के दौरान, यह गुणक अनिवार्य भूमिका निभाता है, लेकिन सारणी में स्तम्भ के रूप में इस गुणक को दर्शया नहीं जाता। अंतराल ($x$ से $x+n$) में जीवित रहने वाले प्रत्येक व्यक्ति $x$ पूर्ण वर्षों और अंतराल ($x$ से $x+n$) के कुछ खंड तक जीवित रहा है। पूर्ण वय सारणी में 5 वर्षों की आयु से मान 0.5 (अर्थात् एक वर्ष का आधा) वैद्य है। आसान गणना के लिए, मान लीजिए, जो वय सारणी के 5 वर्ष आयु अंतरालों में मृत्यु को प्राप्त करते हैं, वे औसतन 2.5 वर्षों तक जीवित रहे हैं। तथापि, याद रखिए कि इस खंड का मान, समूचे अंतराल के मृत्यु संबंधी ढाँचे पर निर्भर करता है न कि किसी एकल वर्ष की मृत्यु दर पर। इसके अलावा चूँकि नवजात शिशुओं के बड़े भाग की मृत्यु जीवन के पहले कुछ हफ्तों में हुई है, इसलिए यह मान <1 और 1–4 आयु समूहों में काफी निम्न है।

इसी तरह पिछले तीन समूहों (अर्थात् 91–94, 95–99 और 100+) में मृत्यु दर काफी उच्च है। इसलिए 91–94 और 95–99 के आयु समूहों में पार्थक्य गुणक का मान काफी निम्न है। चूँकि मृत्यु निश्चित है इसलिए अंतिम आयु समूह (100+) में हमने पार्थक्य गुणक को 1 के रूप में लिया है।

यदि जन्म और मृत्यु अर्थात् दोनों की तारीखें, उपलब्ध हो तो पार्थक्य गुणक की गणना से तालिका में पार्थक्य गुणक दिया जायेगा। यदि ऐसा न हो तो प्रतिमान वय तालिका, जैसा कि तालिका 8.1 में दर्शाये कोल और डेमने द्वारा सारणीबद्ध मानों को $_1a_0$ और ........ के लिए प्रयोग में लाया जा सकता है और बाकी के मानों को आयु अंतराल के लिए 0.5 वर्षों (अर्थात् वर्ष अंतराल में 2.5) के रूप में प्रयोग किया जा सकता है।

**तालिका 12.1 आयु 0 और 1–4 के लिए विच्छेद कारक**

| | | आयु >1 के लिए पार्थक्य गुणक | | | 1–4 आयु समूहों के लिए पार्थक्य गुणक | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | क्षेत्र | पुरूष | महिला | महिला/पुरूष दोनों | पुरूष | महिला | महिला/पुरूष दोनों |
| शिशु मृत्यु दर >0.100 | उत्तर (1) | 0.33 | 0.35 | 0.3500 | 1.558 | 1.570 | 1.5700 |
| | पूर्व (2) | 0.29 | 0.31 | 0.3100 | 1.313 | 1.324 | 1.3240 |
| | दक्षिण (3) | 0.33 | 035 | 0.3500 | 1.240 | 1.239 | 1.2390 |
| | पश्चिम (4) | 0.33 | 0.35 | 0.3500 | 1.352 | 1.361 | 1.3610 |
| शिशु मृत्यु दर <0.100 | उत्तर (1) | 0.0425 | 0.05 | 0.05 | 1.859 | 1.733 | 1.7330 |
| | पूर्व (2) | 0.0025 | 0.01 | 0.01 | 1.614 | 1.487 | 1.4870 |
| | दक्षिण (3) | 0.0425 | 0.05 | 0.05 | 1.541 | 1.402 | 1.4020 |
| | पश्चिम (4) | 0.0425 | 0.05 | 0.05 | 1.653 | 1.524 | 1.5240 |

**स्रोतः** कोल, अैन्स्ले जे, डेमने पी (1966) रीजनल मॉडल लाइफ टेबलस एंड स्टेबल पापुलेशनस्, प्रिंसटन यूनिवर्सिटी प्रेस।

**नोट** : (1) आइसलैंड, नार्वे और स्विजरलैंड, (2) आस्ट्रिया, चेकोस्लवाकिया, नार्थ–सेंट्रल इटली, पोलैंड और हंगरी, (3) साउथ इटली, पुर्तगाल और स्पेन, (4) विश्व के बाकी के देश।

vi) **केन्द्रीय मर्त्यता (Central Mortality) ($_nM_x$):** यह स्तम्भ आयु अंतराल $x$ से $x+n$ में होने वाली मौतों की संख्या (स्तम्भ $d_x$) को इस आयु समूह में मौजूद व्यक्तियों की संख्या (स्तम्भ $P_x$) से विभाजित करने पर प्राप्त परिणाम को दर्शाता है।
$$_nM_x = \frac{d_x}{P_x}$$

vii) **आयु समूह $x$ और $x+n$ ($_nq_x$): के बीच होने वाली मौतों की प्रायिकताः** मरण संबंधी प्रायिकताओं की गणना प्रत्येक आयु समूह के लिए, आयु–विशिष्ट मर्त्यता दरों के आधार पर की जाती है। इस स्तम्भ को, आयु $x$ तक जीवित रहने वाले व्यक्ति के लिए आयु समूहों के बीच मरण संबंधी प्रायिकता के रूप में स्पष्ट किया जा सकता है। सारणी के अंतिम आयु समूह के लिए जहाँ मृत्यु को नकारा नहीं जा सकता, मरण संबंधी प्रायिकता I है। अन्य आयु समूहों के लिए गणना अधिक जटिल है। गणना का सूत्र इस प्रकार हे :
$$_nq_x = \frac{n_x \times {}_nM_x}{1+(n_x - {}_na_x) \times {}_nM_x}$$

viii) **आयु समूह $x$ और $x+n$ के बीच जीवित रहने की प्रायिकता ($_np_x$):** इसे ऐसे व्यक्ति की प्रायिकता के रूप में स्पष्ट किया जा सकता है जो सही आयु $x+n$ तक जीवित पहुँचने के लिए $x$ आयु तक पहुँचा है। गणना का सूत्र इस प्रकार हैः
$$_np_x = 1 - {}^nq_x$$
चूंकि यह $1 - {}_nq_x$, है, सामान्यतौर पर वय सारणी में इसे हम अलग स्तम्भ के रूप में नहीं दिखाते।

ix) **किसी आयु समूह विशेष, तक जीवित रहने वाले व्यक्तियों की संख्या $x({}_n1_x)$:** यह स्तम्भ सहगण जिसे हमने 1,00,000 माना था, में से आयु समूह $x$ से $x+n$ तक जीवित रहने वाले व्यक्तियों की संख्या को दर्शाता है।

x) **आयु समूह विशेष, $x$ और $x+n$ के बीच होने वाली मौतों की संख्या ($_xd_x$):** निम्नलिखित सूत्र के प्रयोग से इसकी गणना की जाती है।
$$_nd_x = {}_nl_x \times {}_nq_x$$

xi) **अंतराल $x$ और $x+n$ में 1,00,000 नवजातों के समूह द्वारा जीवित रहने वाले वर्षों की संख्या ($_nL_x$):** सहगण का प्रत्येक सदस्य, जो अंतराल $x$ से $x+n$ तक जीवित रहता है, $L$ के लिए $n$ वर्षों का योगदान देता है। जबकि ऐसा सदस्य जो अंतराल $x$ से $x+n$ में मृत्यु की प्राप्ति करता है, ऐसे व्यक्तियों के जीवित वर्षों की औसतन संख्या में योगदान देता है जो अवधि ($_na_x$ मौतों के पार्थक्सगुणक) में मृत्यु की प्राप्ति करते हैं। निम्नलिखित सूत्र के प्रयोग से $_nL_x$ की गणना की जाती है।
$$_nL_x = n_x \times {}_nl_{x+n} + {}_na_x \times {}_nd_x$$
जहाँ, $_nl_{x+n} = {}_nl_x \times {}_np_x$ अथवा
$$_nl_{x+n} = {}_nl_x - {}_nd_x$$

xii) **आयु समूह विशेष $x$ के बाद जीवित रहने के कुल वर्ष $x({}_nT_x)$:** जीवाशा की गणना में यह संख्या अनिवार्य भूमिका निभाती है।

यह वार्षिक $x$ और कुल पीढ़ी समाप्ति के बीच जीवित समूह $_nl_x$ द्वारा जीवित वर्षों की कुल संख्या को दर्शाती है। $_nT_x$ की पहली पंक्ति का मान है, इस समूह के अंतिम घटक की मृत्यु तक समूह द्वारा जीवित वर्षों की कुल संख्या।
$_xT_x = {}_nL_x$ का योग ($_nL_x$ की अंतिम पंक्ति से $_nL_x$ की मौजूदा पंक्ति तक)

xiii) **आयु समूह $x$ में जीवाशा** ($_ne_x$): वय सारणी द्वारा प्रदत्त सभी सूचकों में से जीवाशा ($_ne_x$) का सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है जो दी गई मृत्यु संबंधी दशाओं के अंतर्गत नवजातों की पीढ़ी द्वारा जीवित वर्षों की औसतन संख्या को दर्शाती है।

**उदाहरण 8.9** : निम्नलिखित सारणी, वय सारणी के निर्माण के लिए अपेक्षित बुनियादी जानकारी प्रदान करती हैं यह आँकड़े 2000 वर्ष में भारतीय महिलाओं से संबंधित हैं। वय सारणी का निर्माण कीजिए।

| आयु ($x$) | मौतों की संख्या ($d_x$) | व्यक्तियों की संख्या ($p_x$) | $n_x$ | पार्थक्य गुणक ($_na_x$) |
|---|---|---|---|---|
| <1 | 788471 | 11655599 | 1 | 0.1 |
| 1 – 4 | 430704 | 44728827 | 4 | 1.6 |
| 5 – 9 | 137870 | 54725561 | 5 | 2.5 |
| 10 – 14 | 69159 | 52128201 | 5 | 2.5 |
| 15 – 19 | 100055 | 48475620 | 5 | 2.5 |
| 20 – 24 | 119360 | 42745630 | 5 | 2.5 |
| 25 – 29 | 116085 | 39848328 | 5 | 2.5 |
| 30 – 34 | 109226 | 35983667 | 5 | 2.5 |
| 35 – 39 | 102540 | 31934500 | 5 | 2.5 |
| 40 – 44 | 124848 | 27744053 | 5 | 2.5 |
| 45 – 49 | 150315 | 23125487 | 5 | 25 |
| 50 – 54 | 172910 | 19212249 | 5 | 2.5 |
| 55 – 59 | 226553 | 16258203 | 5 | 2.5 |
| 60 – 64 | 288036 | 13715985 | 5 | 2.5 |
| 65 – 69 | 354148 | 10813430 | 5 | 2.5 |
| 70 – 74 | 368365 | 7554310 | 5 | 2.5 |
| 75 – 79 | 335430 | 4615527 | 5 | 2.5 |
| 80 – 84 | 252665 | 2332329 | 5 | 2.5 |
| 85 – 89 | 130278 | 817817 | 5 | 2.5 |
| 90 – 94 | 42440 | 183658 | 5 | 2 |
| 95 – 99 | 8199 | 24796 | 5 | 2 |
| 100+ | 915 | 1961 | 1 | + |
| सभी आयु समूह | 4428572 | 488625738 | | |

**स्रोत** : विश्व स्वास्थ्य संगठन

पहले दिए गए सूत्र के प्रयोग से, निम्नलिखित वय सारणी का निर्माण किया गया है।

| Age | $n_x$ | $_na_x$ | $_nM_x$ | $_nq_x$ | $_np_x$ | $_nl_x$ | $_nd_x$ | $_nL_x$ | $_nT_x$ | $_ne_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| <1 | 1 | 0.1 | 0.06765 | 0.6377 | 0.93623 | 100000 | 6376.52 | 94261.1 | 6268416 | 62.6842 |
| 1 to 4 | 4 | 1.6 | 0.0063 | 0.3765 | 0.96235 | 93623.5 | 3524.63 | 366.35 | 6174155 | 65.9467 |
| 5 to 9 | 5 | 2.5 | 0.00252 | 0.1252 | 0.98748 | 90098.8 | 1127.83 | 447675 | 5808120 | 64.4639 |
| 10 to 14 | 5 | 2.5 | 0.00133 | 0.00661 | 0.99339 | 88971 | 588.245 | 443384 | 5360446 | 60.2493 |
| 15 to 19 | 5 | 2.5 | 0.00206 | 0.01027 | 0.98973 | 88382.8 | 907.437 | 439645 | 4917061 | 55.6337 |
| 20 to 24 | 5 | 2.5 | 0.00279 | 0.1386 | 0.98614 | 87475.3 | 1212.83 | 434345 | 4477416 | 51.1849 |
| 25 to 29 | 5 | 2.5 | 0.00291 | 0.01446 | 0.98554 | 86262.5 | 1247.4 | 428194 | 4043071 | 46.8694 |
| 30 to 34 | 5 | 2.5 | 0.00304 | 0.01506 | 0.98494 | 85015.1 | 1280.57 | 421874 | 3614877 | 42.5204 |
| 35 to 39 | 5 | 2.5 | 0.00321 | 0.01593 | 0.98407 | 83734.5 | 1333.63 | 415339 | 3193003 | 38.1324 |
| 40 to 44 | 5 | 2.5 | 0.0045 | 0.02225 | 0.97775 | 82400.9 | 1833.39 | 407421 | 2777655 | 33.7092 |
| 45 to 49 | 5 | 2.5 | 0.0065 | 0.03198 | 0.96802 | 80567.5 | 2576.57 | 396396 | 2370243 | 29.4193 |
| 50 to 54 | 5 | 2.5 | 0.0090 | 0.04401 | 0.95599 | 77990.9 | 3432.36 | 381374 | 1973847 | 25.3087 |
| 55 to 59 | 5 | 2.5 | 0.01393 | 0.06733 | 0.93267 | 74558.6 | 5019.87 | 360243 | 1592474 | 21.3587 |
| 60 to 64 | 5 | 2.5 | 0.0210 | 0.09976 | 0.90024 | 69538.7 | 6937.35 | 330350 | 1232230 | 17.7201 |
| 65 to 69 | 5 | 2.5 | 0.03275 | 0.15136 | 0.84864 | 62601.3 | 9476.39 | 289318 | 901880 | 14.4067 |
| 70 to 74 | 5 | 2.5 | 0.04876 | 0.21732 | 0.78268 | 53126 | 11545.3 | 236767 | 612562 | 11.5304 |
| 75 to 79 | 5 | 2.5 | 0.07267 | 0.3075 | 0.6925 | 41580.7 | 12786.2 | 175938 | 375795 | 9.03774 |
| 80 to 84 | 5 | 2.5 | 0.10833 | 0.42622 | 0.57378 | 28794.5 | 12272.9 | 1132900 | 199857 | 6.94081 |
| 85 to 89 | 5 | 2.5 | 0.1593 | 0.56964 | 0.43036 | 16521.6 | 9411.37 | 59079.6 | 86567 | 5.23963 |
| 90 to 94 | 5 | 2 | 0.23108 | 0.68236 | 0.31764 | 7110.23 | 4851.74 | 20996 | 27487.4 | 3.8659 |
| 95 t0 99 | 5 | 2 | 0.33067 | 0.82999 | 0.17001 | 2258.5 | 1874.53 | 5668.9 | 6491.49 | 2.87425 |
| 100+ | 1 | + | 0.46678 | 1 | 0 | 383.969 | 383.969 | 822.593 | 822.593 | 2.14235 |

जीवाशा (life expectatncy) हमेशा सारणी की पहली पंक्ति से अंतिम पंक्ति की ओर घटती जाती है। लेकिन जीवाशा दूसरी पंक्ति में पहली पंक्ति के तुलना में अधिक होती है। ऐसी स्थिति कभी–कभार तीसरी पंक्ति (आयु समूह 5–9) में भी देखने को मिलती है जो उच्च शिशु मृत्यु दर वाले देशों में पहली पंक्ति (आयु समूह/<1) से उच्च हो सकती है। देखा गया है कि पुरूषों की तुलना में महिलाओं में जीवाशा अधिक होती है और कुल जीवाशा इन दोनों के बीच होनी चाहिए। लेकिन ऐसे देशों में जीवाशा अधिक होती है और कुल जीवाशा इन दोनों के बीच होनी चाहिए। लेकिन ऐसे देशों में जहाँ मातृ मृत्युदर उच्च है और महिलाओं की सामान्य जीवन दशाएँ काफी खराब है, वहाँ पुरूषों की तुलना में महिलाओं की जीवाशा निम्न है।

## 8.7 वय सारणी के अनुप्रयोग

वय सारणी का प्रयोग जनांकिकी, बीमाविज्ञान, सामाजिक और स्वास्थ्य अध्ययनों में विस्तृत रूप से किया जाता है। वय सारणी का मुख्य उद्देश्य, जन्म के समय और अन्य समूहों में जीवाशा की गणना करना है। वय सारणी से कुछ ऐसे रोचक जनांकिकीय आँकड़ें प्राप्त होते हैं जिन्हें विभिन्न तरीकों से प्रयोग किया जाता है। इस अनुभाग में आप वय सारणी के अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे।

### 8.7.1 जीवन और मरण संबंधी प्रायिकता की गणना

वय सारणी बनाते समय, आपने सीखा कि $_{n}q_{x}$ आय $x$ तक जीवित रहने वाले व्यक्ति के लिए दो आयु समूहों $(x, x+n)$ के बीच मरने की प्रायिकता के बारे में जानकारी देता है। जैसे, तालिका 8.3 में आयु समूह 30–34 वर्ष की तदनुसार पंक्ति पर विचार कीजिए। 30 वर्ष तक जीवित रहने वाली महिलाओं की 30 से 34 वर्ष की आयु समूह के बीच (महिलाओं) की मरने की प्रायिकता है 0.01506 $(_{n}q_{x})$.। इसका अर्थ है, 30 वर्ष की आयु तक जीवित रहने वाली हर 1,00,000 भारतीय महिलाओं में से 1506, (=100,000 x 0. 01506) 30 और 34 वर्ष की आयु के बीच मृत्यु की प्राप्ति करेंगी। दूसरा, $_{n}p_{x}$ आयु $x$ तक जीवित रहने वाले व्यक्तियों के लिए दो आयु समूह अर्थात् ($x$, 30–34 वर्ष / $x+n$) के बीच जीवित रहने की प्रायिकता के बारे में हमें बताता है। आयु समूह के लिए, जीवित रहने की प्रायिकता है – 1–0.01506 = 0.98494 $(_{n}q_{x})$.। इसका अर्थ है प्रत्येक 1,00,000 भारतीय महिलाओं में से 30 वर्ष की आयु तक जीवित रहने वाली महिलाओं में से 98494, आयु समूह 30–34 वर्ष तक जीवित रहेंगी।

तीसरा, 0 से 4 वर्ष की आयु समूह के बीच में मरने वाले शिशु की जन्म संबंधी प्रायिकता की गणना भी हम कर सकते हैं। यह हमें आयु समूह 0–4 वर्षों के बीच असली जन्म–मरण $(_{n}d_{x})$ की संख्या द्वारा प्राप्त होता है और जिसे असली जन्मों की संख्या (आमतौर पर 1,00,000) से विभाजित किया जाता है। हमारे उदाहरण में $_{n}d_{x} = 1281$ और प्रायिकता 0.01281 / 100000 है। यह प्रायिकता हमें बताती है कि भारत में हर 100,000 बालिका जन्मों में से (वर्ष 2000 मं आकलित मृत्यु दर को ध्यान में रखकर) औसतन 1281 बालिकाएँ 0 से 4 वर्ष की आयु के बीच मृत्यु की प्राप्ति करती है।

### 8.7.2 बीमा विज्ञान में वय सारणी का उपयोग

बीमा विज्ञान में, विशेषरूप से जीवन बीमा के क्षेत्र में, वय सारणी को विशेष रूप से प्रयोग में लाया जाता है। वय सारणी, जीवन बीमा से जुड़ी विविध अनिवार्य राशियों के संदर्भ में प्रीमियमों की दर निर्धारित करने में आधार प्रदान करती है। वय सारणी बीमाविज्ञान को मजबूत आधार देती है जिससे बीमा व्यवसाय को मात्र जुआ न समझा जाए बल्कि इससे मनुष्य को अहसास दिलाया जाता है कि आकस्मिक मृत्यु के समय इसके माध्यम से अच्छी खासी गिनी हुई रकम प्राप्त होती है जिससे भविष्य सुरक्षित बनता है। असल में जीवन बीमा के संदर्भ में प्रीमियम राशि तय करने में शामिल गणना काफी जटिल होती है। लेकिन इसके सिद्धांत काफी सरल हैं। आइए ऐसे कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

**उदाहरण 8.10** : भारत में वर्ष 2000 में मौजूद मृत्यु संबंधी दशाओं के अनुसार, एक भारतीय महिला को कुल 1,00,000 रूपये की जीवन पालिसी पर वार्षिक प्रीमियम कितना अदा करना होगा यदि उसका जीवन बीमा जन्म के समय हो गया हो और बीमा कार्यालय अपनी जमा राशियों पर कोई मुनाफा नहीं कमाता हो।

मान् लीजिए प्रतिवर्ष प्रीमियम की राशि रूपये $x$ है। चूँकि माना गया है कि औसतन पूरी आयु में महिला 62.7 वर्षों तक जीवित रहेगी। ऐसी स्थिति में महिला को रूपये $x$ x 62.7 की राशि प्रीमियम के रूप में अदा करनी होगी। यह 1,00,000 रूपये की पॉलिसी के मूल्य के बराबर होगी। इसलिए, रूपये $x$ x 62.7 = 10000 और $x$ = 10000 / 62.7 = रूपये 1594.90 है।

**उदाहरण 8.11** : उपर्युक्त उदाहरण में यदि 25 वर्ष की आयु में पॉलिसी ली गई हो तो बताइए वार्षिक प्रीमियम कितना होगा।

यदि 25 वर्ष की आयु में पॉलिसी ली गई हो तो 25 वर्ष की आयु में 46.9 वर्षों की जीवाशा के लिए कुल रूपये $x$ x 46.9 प्रीमियम अदा करना होगा। ऐसी स्थिति में वार्षिक प्रीमियम $x$ = 100000 / 46.9 = .2132.2. रूपये होगा।

**उदाहरण 8.12** : उदाहरण 8.10 में यदि पॉलिसी–एनडोमेंट पॉलिसी है और जिसे 30 वर्ष की आयु में लिया गया हो और जिसे 50 वर्ष की आयु तक या मृत्यु होने से पहले तक अदा करना है। ऐसी स्थिति में कितना वार्षिक प्रीमियम अदा करना होगा।

यदि पॉलिसी, एनडोमेंट पॉलिसी है और जिसे मान लीजिए 30 वर्ष की आयु में लिया गया और जिसे 50 वर्ष की आयु तक या मृत्यु होने से पहले तक अदा करना है तो हम अलग विधि से इसे हल करेंगे। सारणी 8.3 से हम देखते हैं कि 30 वर्ष की आयु तक 850155 $({}_{n}l_{x})$ जीवित व्यक्ति, 30 और 50 वर्ष की आयु समूह के बीच 1600530 (= 415339 + 407421 + 396396 + 381374) $({}_{n}L_{x})$ वर्षों तक जीवित रहते हैं, जिसके परिणाम स्वरूप औसतन कुल $x$ रूपये x (1600529.5 / 85015) प्रीमियम इकट्ठे किए जाएँगे और इसके बाद वार्षिक प्रीमियम 1,00,000 रूपये + 18.83 = 5310.67 रूपये होगा।

### 8.7.3 वय सारणी के अन्य अनुप्रयोग

बीमा में इसके फायदों के अलावा यह विभिन्न देशों या क्षेत्रों के मर्त्यता संबंधी तुलनात्मक विश्लेषण करने में भी उपयोगी है। आइए वय सारणी के कुछ ऐसे अनुप्रयोगों की चर्चा करें।

i) **किन्हीं विशिष्ट कारणों से मर्त्यता/मृत्यु दर की गणना करना** : जनसंख्या के विविध समूह जैसे लिंग (स्त्री/पुरूष), आयु वितरण (विविध आयु समूह), धर्म, क्षेत्र आदि के लिए वय सारणी की गणना, तुलना संबंधी कार्यों के लिए की जाती है। मर्त्यता संबंधी सांख्यिकी हमें जनसंख्या के विविध समूहों में होने वाली विशिष्ट मौतों का पता लगाने के लिए प्रेरित करती है।

ii) **मर्त्यता संबंधी दशाओं की तुलना** : जन्म के समय और अन्य आयु समूहों में जीवाशा का पता लगाना, मर्त्यता संबंधी दशाओं के उत्कृष्ट सूचकांक है। ये सूचकांक एक स्थान से दूसरे स्थान पर और समय के साथ–साथ बदलते रहते हैं। अधिकांश देशों में पिछले कई वर्षों से शिशु मृत्यु दर में गिरावट आने की वजह से जीवाशा तेजी से बढ़ी हैं जैसाकि आपने पहले अध्ययन किया है। ऐसे स्थानों को छोड़कर जहाँ महिला मातृ मृत्यु दर उच्च है, अन्य सभी जगहों पर पुरूष जीवाशा की तुलना में महिला जीवाशा उच्च है। तालिका 8.4 से हमें कुछ चुनिंदा देशों में महिला और पुरूष जीवाशा का ब्यौरा प्राप्त होता है।

iii) **जनसंख्या प्रक्षेपण** : वय सारणी का प्रयोग, आयु और लिंग अर्थात् स्त्री/पुरूष समूह को ध्यान में रखकर जनसंख्या के समग्र अनुमान तैयार करने में भी किया जाता है। इसका अर्थ है कि कुछ भावी तारीखों पर जनसंख्या का आकार क्या होगा, इसका अनुमान भी वय सारणी की सहायता से लगाया जा सकता है।

**तालिका 8.4 : जन्म के समय जीवाशा : 2019 में कुछ चुनिंदा देशों में (वर्षों में)**

| देश | पुरूष | महिला |
|---|---|---|
| आस्ट्रलिया | 80.7 | 84.9 |
| कनाडा | 79.9 | 84.1 |
| चीन | 74.5 | 79.5 |
| फ्रांस | 79.7 | 85.9 |
| जर्मनी | 78.6 | 83.3 |
| हांगकांग | 82.3 | 87.7 |
| भारत | 68.2 | 70.7 |
| इंडोनेशिया | 69.4 | 73.7 |
| इटली | 81.2 | 85.6 |
| जापान | 81.3 | 87.3 |
| कोरिया, गणतंत्र | 79.7 | 85.7 |
| नीदरलैंड | 80.3 | 83.4 |
| न्यूजीलैण्ड | 80.2 | 83.6 |
| पापुआ न्यू गुयाना | 63.0 | 65.6 |
| सिंगापुर | 81.0 | 85.4 |
| यूनाइटेड किंगडम | 79.5 | 83.1 |
| अमेरिका | 76.1 | 81.1 |

स्रोत : **www.worlddata.info**

## 8.7.4 वय सारणी की सीमाएँ

वय सारणी जनगणना और प्रतिदर्श पंजीकरण पद्धति जैसे स्रोतों से इकट्ठे किए गए आँकड़ों पर आधारित होती है। अतः वय सारणी अनुमानों के कई दोष भी हैं। ये ऐसे दोष हैं जो जनसंख्या संबंधी जनगणनाओं और जन्म–मृत्यु रिकार्डों पर आधरित सांख्यिकीय मापों में पाए जाते हैं। आयु समूहों और मर्त्यता संबंधी पंजीकरण पर आधारित आँकड़े अधूरे या एक तरफा होते हैं। शिशु मृत्यु दर मोटे तौर पर जीवाशा पर आधारित हैं और जिसका अर्थ है कि इस सूचक की अधूरी जानकारी जो बहुत से देशों में आदत सी बन चुकी है। इससे सारणियों के परिणामों पर महत्वपूर्ण असर पड़ता हैं। इसी तरह, उच्च मृत्यु दर वाले विशिष्ट आयु समूह और स्त्री और पुरूष समूहों में पाये जाने वाले महत्वपूर्ण अंतरों को भी अनदेखा कर दिया जाता है क्योंकि समग्र जीवाशा पर इसका बहुत कम असर पड़ता है। चूँकि क्षेत्रीय या राष्ट्रीय स्तरों पर प्रवास संबंधी गतिविधियाँ जनसंख्या की संरचना को

अधिक प्रभावित करती हैं इसलिए स्थानीय या उप–क्षेत्रीय स्तर पर छोटी जनसंख्या के लिए सामान्यतौर पर वय सारणियाँ बनाने की सिफारिश नहीं की जाती।

ऐसे मामलों में मृत्यु दर की ऐसी बहुत छोटी संख्या प्राप्त होती है जो तालिका के स्तम्भों की गलत गणना दिखा सकती है।

**बोध प्रश्न 3**

पाठ में तालिका 8.3 में दी गई वय सारणी को पढ़िए। अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तरों से वय सारणी में मानों को स्पष्ट कीजिए।

1) भारत में 2000 वर्ष में 1 वर्ष की आयु पूरी करने से पहले मरने वाली बालिका शिशु की प्रायिकता क्या होगी?

.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................

2) भारत में 2000 में जन्मी महिला का कितने वर्षों तक जीवित रहने का अनुमान लगाया जाता है?

.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................

3) 15 से 20 वर्षों की आयु में मरने वाली महिला की प्रायिकता क्या होगी?

.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................

4) 15 से 20 वर्ष की आयु के बीच मृत्यु दर क्या होगी?

.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................

5) वह प्रायिकता बताइए, जब महिला 15 वर्ष से 20 वर्ष की आयु में पहुँचती है?

.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................

6) भारत में 2000 में 15 और 20 वर्ष की आयु में महिला में कितने अतिरिक्त वर्षों तक जीवित रहने की आशा की जाती है?

.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................

## 8.8 सार संक्षेप

जन्म–मृत्यु सांख्यिकी मुख्य रूप से जन्म और मृत्यु से संबंद्ध है। जन्म–मृत्यु दर की विश्वसनीयता पंजीकरण पद्धति की प्रभाविता पर निर्भर करती है। कानूनी मौजूदगी के बावजूद जन्म और मृत्यु का अधूरा पंजीकरण, जन्म और मृत्यु दरों की सही छवि दिखाने में बाधा डालता है।

वय सारणियाँ, समग्र जनसंख्या की मर्त्यता और जीवन संबंधी अनुभवों को दर्शाती है और विशिष्ट समूहों पर और विशिष्ट समयावधियों में इसके प्रभाव के मूल्याकंन को कारगर बनाती है। यह एक सरल साधन है जिसे नियमित रूप से आंकड़ों को इकट्ठाकरके आसानी से बनाया जा सकता है।

यह ध्यान में रखना बेहद जरूरी है कि जनगणनाओं और मर्त्यता संबंधी आंकड़ों को ध्यान में रख कर वय सारणियों निर्मित की जाती है। अतः आँकड़ों की गुणवत्ता, वय सारणी की वैधता पर विशेष प्रभाव डालती है।

## 8.9 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1)

| वर्ष | मध्य वर्ष जनसंख्या |
|---|---|
| 1950 | 40.03 |
| 1966 | 51.14 |
| 1973 | 59.46 |
| 1985 | 76.44 |
| 1998 | 97.05 |
| 2005 | 106.72 |
| 2018 | 128.72 |

2)

| वर्ष | मध्य वर्ष जनसंख्या |
|---|---|
| 1954 | 39.88 |
| 1966 | 50.81 |
| 1973 | 59.07 |
| 1985 | 75.85 |
| 1998 | 97.08 |
| 2005 | 107.49 |
| 2018 | 122.55 |

3) देखें भाग 8.2 और उत्तर दें।

4) देखें भाग 8.3 और उत्तर दें।

**बोध प्रश्न 2**

1) ग्रामीण क्षेत्रों में जन्म दर उच्च होती है, क्योंकि परिवार नियोजन की विधियों और इसकी आवश्यकता पर वहां के लोगों में जागरूकता का अभाव होता है।

2) छोटे और बड़े शहरों में उन्नत स्वास्थ्य सुविधाओं के कारण, शहरी क्षेत्रों में मृत्यु दर निम्न होती है।

3) ग्रामीण क्षेत्रों में स्वास्थ्य सुविधाओं के अभाव और माताओं में कुपोषण के कारण, ग्रामीण क्षेत्रों में शिशु मृत्यु दर उच्च होती है।

**बोध प्रश्न 3**

1) भारत में 2000 $({}_1q_0)$ में 1 वर्ष से कम की आयु में मरने वाली बालिका के लिए प्रायिकता 0.06377 है।
2) भारत में 2000 में जन्मी बालिका के जीवित रहने $({}_1e_0)$ के अनुमानित 62.68 वर्ष है।
3) आयु समूह $({}_5q_{15})$ में 15 और 20 वर्षों के बीच मरने वाली महिला की प्रायिकता 0.01027 है।
4) आयु समूह $({}_5M_{15})$ में 15 और 20 वर्षों के बीच मृत्यु दर 0.00206 है।
5) 15–19 आयु समूह की महिला की 20–24 वर्ष के आयु समूह $({}_5q_{15})$ में पहुँचने की प्रायिकता 0.98973 है।
6) भारत में 2000 में 15–20 वर्ष के आयु समूह में महिला की जीवाशा $({}_{15}e_{15})$ 55. 63 वर्ष है।