इकाई 9 प्रारंभिक प्रायिकता*

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप :

- प्रायिकता की अवधारणा की व्याख्या कर सकेंगे;
- बेज–प्रमेय सहित प्रायिकता नियमों की व्याख्या कर सकेंगे;
- प्रायिकता से संबंधित प्रश्नों के हल कर सकेंगे।

9.1 विषय प्रवेश

प्रायः हम निम्न प्रकार के व्याख्यान करते हैं:

कल वर्षा हो सकती है।

टीम A के प्रतियोगिता में जीतने की संभावना अधिक है।

श्रीमान B के प्रधान बनने की संभावना नहीं है।

शायद श्रीमान क की श्रीमान ख से भेंट हुई होगी

इन सभी कथनों में हमें कुछ अनिश्चितता का अनुभव करते है। उदाहरण के लिए प्रथम कथन में हमें इस बात की निश्चितता नहीं है, कि कल वर्षा होगी। इसी प्रकार, अंतिम कथन में, हमें यह निश्चितता नहीं है, कि श्रीमान क की श्रीमान ख से भेंट हुई है। कोई ऐसा कथन, जिसमें घटना के घटित होने की अनिश्चितता महसूस हो, वह प्रायिक कथन कहलाता है।

---

* डा॰ आर.ए. चौधरी (सेवानिवृत) करोड़ीमल कॉलेज दिल्ली विश्वविद्यालय।

अतः, ऊपर दिए गए सभी कथन, प्रायिक कथन है। मान लीजिए, प्रथम प्रायिकता कथन के संदर्भ में, हम यह प्रश्न पूछते हैं, कि कल वर्षा होने का संभावना कितनी है?

इसके लिए हम यह उत्तर दे सकते हैं कि, कल वर्षा की संभावना 75 प्रतिशत है।

यह कथन केवल प्रायिकता कथन ही नहीं है बल्कि इसमें कल वर्षा होने की घटना की निश्चितता (या अंतर्निहित अनिश्चितता) का तुलनात्मक परिमाप भी दिया गया है। अतः वर्षा की निश्चितता 75 प्रतिशत, एक तुलनात्मक माप है तथा साथ ही वर्षा की अंतर्निहित अनिश्चितता 25 प्रतिशत है। मान लीजिए, निश्चितता के माप के लिए हमारे पास एक पैमाना है। इस पैमाने पर निश्चितता की 0 प्रतिशत से 100 प्रतिशत तक का परिवर्तन हैं। इसी पैमाने द्वारा अंतर्निहित अनिश्चितता भी मापा जा सकता है। अतः यदि किसी घटना के घटित न होने पर पूर्ण विश्वास है तो इसके घटने की संभावना 0 प्रतिशत या निश्चित है। दूसरों शब्दों में घटने की असंभावना 100 प्रतिशत या अनिश्चित है। इसी प्रकार यदि किसी घटना के घटने में पूर्ण विश्वास है तो इसके घटने की संभावना 100 प्रतिशत है तथा ना घटने की संभावना 0 प्रतिशत है। यहाँ, इस बात पर ध्यान दें, कि दोनों कथनों में 100 प्रतिशत घटित होना (और 0 प्रतिशत घटित न होना) परवर्ती प्रायिकता तथा 0 प्रतिशत घटित होना (और 100 प्रतिशत घटित न होना) में कोई अनिश्चितता नहीं हैं। अतः पक्के तौर पर इन कथनों को प्रायिकता कथन नहीं कहा जाता। किसी घटना के घटित हो सकने की निश्चितता के तुलनात्मक माप को, घटना की प्रायिकता कहा जाता हैं। परम्परा के अनुसार, इसका माप तुलना में किया जाता है। उदाहरण के तौर पर, किसी घटना के घटित होने की संभावना यदि 30 प्रतिशत है तो हम कहेंगे घटना के घटित होने की प्रायिकता 0.3 है। इसी प्रकार, यदि कल वर्षा होने की संभावना 75 प्रतिशत हे, तो हम लिखेंगे कल वर्षा होने की प्रायिकता 0.75 है।

इस संदर्भ में एक प्रश्न यह पूछा जा सकता हैः हम किसी घटना की प्रायिकता को कैसे प्राप्त कर सकते हैं? इसका उत्तर अगले भाग में दिया गया है।

9.2 प्रायिकता की परिभाषा

स्पष्टतः किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करने की समस्या वास्तव में घटना घटित होने की निश्चितता को मापने की समस्या है। एक घटना की निश्चितता के बारे में विभिन्न गणितज्ञों की सोच भिन्न–2 हैं, इसीलिए प्रायिकता की कई परिभाषाएँ दी गई हैं। इन परिभाषाओं के द्वारा हमें किसी घटना की प्रायिकता को ज्ञात करने की विधि के बारे में जानकारी मिलती है। इस इकाई में हम तीन परिभाषाओं का उल्लेख करेंगे। ये इस प्रकार हैः

i) चिर प्रतिष्ठित या गणितीय परिभाषा,

ii) तुलनात्मक बारंबारता या सांख्यिकीय परिभाषा, तथा

iii) आधुनिक भाषा या प्रायिकता की अभिगृहीतीय अभिगम।

9.2.1 चिरप्रतिष्ठित या गणितीय परिभाषा

यह परिभाषा कुछ अवधारणाओं पर आधारित है। पहले हम इसको जान लेते हैं।

क) *सांख्यिकीय प्रयोग*

एक प्रयोग जिसके एक से अधिक परिणाम संभव हों, को सांख्यिकीय प्रयोग कहते हैं। सांख्यिकीय प्रयोग को एक परीक्षण (experiment) भी कहा जाता हैं। जैसे कि एक सिक्के को उछाल के यह देखना कि परिणाम चित या पट है, को परीक्षण

कहते हैं। कुछ प्रमाण जिनके अर्थ एक से अधिक संभावित परिस्थितियाँ हो सकती है, को भी परीक्षण कहा जा सकता है। उदाहरण के लिए, भाग 13.1 के शुरू में दिए गए चारों कथनों को परीक्षण या सांख्यिकीय प्रयोग कहा जा सकता है।

ख) *घटना*

एक परीक्षण के एक संभावित परिणाम को घटना (event) कहते हैं। एक सिक्के के उछाल में चित का प्राप्त होना एक घटना है। इसी प्रकार, एक पासे के उछाल में 5 का अंक प्राप्त होना या एक विषम संख्या (...) प्राप्त होना, कुछ संभव घटनाएँ हैं। {बाद का उदाहरण इस बात का सूचक है कि एक घटना परीक्षण की एक या अधिक संभव परिणामों से भी बन सकती है} वास्तव में एक विषम संख्या प्राप्त करने की घटना एक पासे के उछाल के तीन परिणामों से बनी है। यहाँ यह ध्यान दें कि परीक्षण के एक ही परिणाम से बनी घटना को प्रायः मूल घटना कहते हैं।

ग) *निःशेष घटनाएँ*

किसी परीक्षण के सभी संभव परिणामों को सम्मिलित करने वाले घटनाओं के समुच्चय को निःशेष घटनाएँ (exhaustive events) कहते हैं। उदाहरण के लिए, एक सिक्के के उछाल में दो घटनाओं, चित या पट के अतिरिक्त और कोई संभावना नहीं है। अतः समुच्चय (चित, पट) सिक्के के उछाल के साहचर्य निःशेष घटनाओं का एक समुच्चय है। एक और उदाहरण हम यह जानते हैं कि एक पासे में 6 फलक होते हैं। जिन पर 1 से 6 तक बिन्दु अंकित होते हैं। यदि पासे के उछाल में आने वाली संख्या एक घटना मान ली जाय तो समुच्चय (1, 2, 3, 4, 5, 6), निःशेष घटनाओं का समुच्चय कहलाता है। एक निःशेष घटनाओं के समुच्चय में बिन्दुओं की संख्या को परीक्षण की घटनाओं की संख्या कहते हैं।

घ) *अनुकूल घटनाएँ*

वह घटनाएँ, जो किसी घटना के घटित होने का समर्थन करती हैं, अनुकूल घटनाएँ (favourable events) कहलाती हैं। मान लिजिए, एक पासे को उछाल कर यह देखा जाता है, कि क्या परिणाम संख्या सम है? इस परीक्षण में वह फलक, जिन पर 2, 4 या 6 बिन्दु हैं, ऐसी घटनाएँ है, जो पासे पर सम संख्या आने वाली घटना की समर्थक है।

ड) *समप्रायिक घटनाएँ*

यदि किसी परीक्षण में, प्रत्येक संभव घटना के घटित होने की संभावना समान है तो इन घटनाओं को समप्रायिक घटनाएँ (equally likely events) कहते हैं। एक पासे के उछाल में, यदि हमें विश्वास है कि, सभी 6 फलकों के ऊपर आने की संभावनाएं समान है तो 6 संभव घटनाएँ समप्रायिक कहलाती हैं।

च) *परस्पर अपवर्जी घटनाएँ*

यदि किसी परीक्षण में, एक घटना के घटित होने पर दूसरी घटना का घटित होना, संभव न हो, तो ये दो घटनाएँ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (mutually exclusive events) कहलाती हैं। हम जानते हैं कि एक सिक्के के उछाल में दो घटनाएँ, चित तथा पट, परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

अब हम चिरप्रतिष्ठित परिभाषा को समझने में समर्थ हैं। इस परिभाषा के अनुसारः

यदि एक परीक्षण के n परस्पर अपवर्जी, समप्रायिक तथा निःशेष परिणाम संभव है, जिनमें से m परिणाम एक घटना A के समर्थक हैं, तब A की प्रायिकता जिसको $P(A)$ से सूचित किया जाता है, $P(A) = \frac{m}{n}$ होगी।

स्पष्टतः यदि A एक असंभव घटना है तो n संभव परिणामों में से कोई भी इसका समर्थन नहीं करेगा, अर्थात $m = 0$ होगा। इस परिस्थिति में $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$ होगी।

इसके विपरीत यदि A एक निश्चित घटना है, तब सभी n संभव परिणाम इसका समर्थन करेंगे, अर्थात $m = n$ होगा। इस परिस्थिति में $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$ होगी।

अब हम, प्रायिकता परिकलन के लिए चिरप्रतिष्ठित भाषा के कुछ अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 9.1

एक निष्पक्ष सिक्के को उछलने में चित प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हम यह जानते है कि एक सिक्के के उछलने का परिणाम चित या पट के अलावा कुछ और नहीं हो सकता। अतः ये दो घटनाएँ, निःशेष घटनाओं का एक समुच्चय है क्योंकि चित और पट एक साथ घटित नहीं हो सकते। ये घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं। {अंत में, क्योंकि सिक्का निष्पक्ष दिया हुआ है, इसीलिए ये घटनाएँ समप्रायिक है। इस प्रकार चिरप्रतिष्ठित परिभाषा की सभी शर्तें संतुष्ट होती है।}

निःशेष परिणामों की संख्या $(n) = 2$ (चित या पट)

अपेक्षित घटना (चित) आने वाले परिणमों की संख्या $m = 1$

अतः चित के घटित होने की प्रायिकता P (चित) $= \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

आगे दिए गए उदाहरणों में हम सीधे प्रश्न का हल करेंगे। लेकिन, आप स्वयं को संतुष्ट कर लें कि चिरप्रतिष्ठित परिभाषा की सभी शर्तें विद्यमान है।

उदाहरण 9.2

यदि एक निष्पक्ष पासे को उछाला जाता है तो 1 या 6 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

एक पासे के 6 फलक होते हैं जिन पर 1, 2, 3, 4, 5 तथा 6 अंकित होते हैं तथा पासा उछालने पर इनमें से कोई एक फलक उपर आ सकता है। अतः निःशेष परिणामों की संख्या $n = 6$ है। यदि 1 या 6 अंकित फलक ऊपर आता है तो यह अपेक्षित घटना का समर्थक है। अतः अपेक्षित घटना का समर्थन करने वाले परिणाम $m = 2$ हैं।

यदि हम 1 या 6 प्राप्त करने की प्रायिकता को P (1 या 6) से सूचित करें तो

$$P(1 \text{ or } 6) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 9.3

यदि एक निष्पक्ष सिक्के को दो बार उछाला जाए। कम से कम एक बार चित प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

यदि चित को (H) तथा पट को (T) से सूचित करें तो चार निम्नलिखित परिणाम संभव हैं:

$$(H, H)\ (H, T)\ (T, H)\ (T, T)$$

यहाँ पर $n = 4$, तथा अपेक्षित घटना का समर्थन करने वाली घटनाओं की संख्या $m = 3$ हैं।

$$\text{अतः } P(\text{कम से कम एक चित}) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$$

चिरप्रतिष्ठित परिभाषा की सीमाएँ

चिरप्रतिष्ठित परिभाषा की कुछ गंभीर सीमाएँ निम्नलिखित हैः

क) इस परिभाषा का उपयोग केवल उन परिस्थितियों में हो सकता है जब परीक्षण के विभिन्न परिणाम समप्रायिक हों। लेकिन वास्तव में, इनका सदैव समप्रायिक होना आवश्यक नहीं होता। उदाहरण के लिए, यदि सिक्का निष्पक्ष नहीं हैं तो इस परिभाषा के आधार पर चित या पट की प्रायिकता को ज्ञात करना संभव नहीं है।

ख) चिरप्रतिष्ठित परिभाषा केवल परीक्षण के सीमित संख्या में परिणामों के लिए ही तर्क संगत है। परीक्षण के परिणामों की संख्या असीमित होने पर यह विफल हो जाती है।

ग) प्रायिकता की परिभाषा के लिए, चिरप्रतिष्ठित परिभाषा, समप्रायिक शब्द का उपयोग करती है, जोकि प्रायिकता की अवधारणा के ज्ञान की पूर्व–मान्यता पर आधारित है। अतः यह परिभाषा वृत्तीय है।

9.2.2 तुलनात्मक बारंबारता या सांख्यिकी परिभाषा

यह प्रायिकता की एक और परिभाषा है जिसका प्रायः उपयोग किया जाता है। यदि हम एक परीक्षण को बार–बार दोहराएँ तथा घटना के घटित होने का प्रेक्षण करें, तो हम यह पाते हैं जैसे–जैसे परीक्षणों की संख्या में वृद्धि होती है, घटना के घटित होने की संख्या के कुल परीक्षणों की संख्या से अनुपात में एक निश्चित स्तर पर स्थिर होने की प्रवृति होती है। स्पष्टतः घटना के घटित होने की संख्या को इसकी बारंबारता कहते हैं, तथा जब इसको कुल परीक्षणों की संख्या से भाग किया जाता है तो हमें घटना की तुलनात्मक बारंबारता प्राप्त होती है। दूसरे शब्दों में, जब परीक्षणों की संख्या काफी बड़ी हो जाय तो तुलनात्मक बारंबारता में एक सीमा की और बढ़ने की प्रवृति होती है। तुलनात्मक बारंबारता की परिभाषा के अनुसार ,यह सीमान्त मान, विचाराधीन चर की प्रायिकता होता है। मान लिजिए हम सिक्के को उछालने का बार–बार परीक्षण करते हैं तथा चित आने की संख्या का प्रेक्षण करते हैं। यदि हम पाते हैं कि, जैसे–जैसे उछालों की संख्या में वृद्धि होती है, अर्थात, 10 से 100 से 1000 से 10000 इत्यादि, तो चित की तुलनात्मक बारंबारता क्रमशः 1 / 2 पर स्थिर हो रही है, तब हम कह सकते है कि एक सिक्के के उठाल में चित की प्रायिकता 1 / 2 है। गणितीय रूप में यदि कुल परीक्षणों की संख्या n है जिनमें से एक घटना (A), (m) बार घटित हुई, तब (A) की प्रायिकता $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$ होगी।

9.2.3 आधुनिक परिभाषा या प्रायिकता की अभिगृहीतीय अभिगम

प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित तथा तुलनात्मक परिभाषाओं की मुख्य सीमा यह है कि इनके द्वारा प्रायिकता के विषय का गणितीय विकास संभव नहीं है। आधुनिक परिभाषा इसी सीमा को ध्यान में रखकर दी गई है। आधुनिक या अभिगृहीतीय अभिगम परिभाषा प्रस्तुत करने से पूर्व निम्नलिखित अवधारणाओं की जानकारी आवश्यक है :

i) **प्रतिदर्श क्षेत्र (sample space)**: यह एक परीक्षण के सभी संभव (और निःशेष) परिणामों का समुच्चय (set) होता है। एक परीक्षण के प्रतिदर्श क्षेत्र को S से सूचित किया जाता है जोकि $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ है, जहाँ $e_1, e_2, \ldots, e_n$, n मूल घटनाएँ हैं।

यदि एक सिक्का उछालना एक परीक्षण है तो इसका प्रतिदर्श क्षेत्र $S = \{H, T\}$ होगा। इसी प्रकार, जब एक पासे की उछाला जाए तो प्रतिदर्श क्षेत्र $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ होगा।

प्रतिदर्श क्षेत्र के तत्व क्रमित जोड़े युगल (ordered pairs) भी हो सकते हैं। उदाहरण के लिए दो सिक्कों के एक साथ उछालने का प्रतिदर्श क्षेत्र $S = \{H, H\}, \{H, T\}, \{T, H\}, \{T, T\}$ है।

इसके अतिरिक्त एक प्रतिदर्श क्षेत्र, जिसमें विद्यमान तत्वों की संख्या सीमित है या असीमित के अनुसार सीमित या असीमित हो सकता है।

ii) **घटनाः** प्रतिदर्श क्षेत्र के किसी उपसमुच्चय (subset) को एक घटना कहते हैं। उदाहरण के लिए यदि पासे पर विषम संख्या प्राप्त करना एक घटना है जोकि A से सूचित की जाती है तब $A = \{1, 3, 5\}$ होगा। इसी प्रकार $B = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$ कम से कम एक चित आने की एक घटना है।

iii) **घटना का घटित होनाः** जब भी किसी परीक्षण का परिणाम किसी घटना के समुच्चय (Set) का अवयव होता है तो हम यह कहते है कि यह घटना घटित हुई है। इस प्रकार, यदि पासे को उछालने पर 1 आता है तो घटना A घटित मानी जाती है। इस अवधारणा के आधार पर हम यह कह सकते हैं कि किसी परीक्षण के प्रदिर्श क्षेत्र का घटित होना निश्चित होता है।

आधुनिक परिभाषा के अनुसार, एक घटना A की प्रायिकता, जोकि $P(A)$ से सूचित होती है, एक वास्तविक सामदृत समुच्चय फलन (real valued set function) होता है जोकि प्रतिदर्श क्षेत्र S के किसी उपसमुच्चय A के लिए एक सहचारी वास्तविक मान, $P(A)$, प्रदान करता है। घटना A की प्रायिकता $P(A)$ होने के लिए इसे निम्नलिखित प्रतिबंध संतुष्ट करने की आवश्यकता है। इन प्रतिबंधों को प्रायिकता सिद्धांत के अभिगृहीत (postulates) भी कहा जाता है।

1) एक प्रतिदर्श क्षेत्र S में, एक घटना A की प्रायिकता इकाई के बराबर या कम एक अऋणात्मक वास्तविक संख्या होती है, अर्थात, $0 \le P(A) \le 1$ होती है।

2) ऐसी घटना जिसका घटित होना निश्चित है, की प्रायिकता इकाई के बराबर होती है। जैसा कि हम जानते है कि प्रतिदर्श क्षेत्र S का घटना निश्चित होता है, इसीलिए $P(S) = 1$ होती है।

3) एक प्रतिदर्श क्षेत्र S में यदि तीन परस्पर अपवर्जी घटनाएँ $A_1, A_2,$ और A_3 हैं, तो $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$।

इस प्रकार की संबंध घटनाओं की अधिक संख्याएँ लेकर इसे और विस्तृत बनाया जा सकता है।

जैसे कि प्रतिदर्श क्षेत्र $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ में मूल घटनाएँ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ परस्पर अपवर्जी हैं। अतः, तृतीय अभिगृहीत के आधार पर हम यह कह सकते है कि

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i)$$

अर्थात प्रतिदर्श क्षेत्र की प्रायिकता, इसमें विद्यमान मूल घटनाओं की प्रायिकताओं के योग के बराबर होती है। इसके आधार पर हम यह भी कह सकते हैं, कि किसी घटना की प्रायिकता उसमें विद्यमान मूल घटनाओं की प्रायिकताओं का योग होती है। अतः, किसी घटना की प्रायिकता को ज्ञात करने के लिए। हमें इसमें विद्यमान मूल घटनाओं की प्रायिकताओं की जानकारी होना आवश्यक है। यह जानकारी निम्नलिखित तीन विधियों में से किसी एक विधि द्वारा प्राप्त की जा सकती है।

1) विभिन्न मूल घटनाओं के घटित होने के बारे में कोई सूचना न होने पर इसकी समप्रायिक मानना युक्ति संगत होता है। अतः हम प्रत्येक मूल घटना की प्रायिकता समान ले लेते है।

क्योंकि $P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$, होता है, इसलिए

$$P(e_i) = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

यदि किसी घटना A में m मूल घटनाएँ हैं, तो

$$P(A) = \left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right), m \text{ बार}$$

$$= \frac{m}{n} = \frac{A \text{ में तत्त्वों की संख्या}}{\text{S में तत्त्वों की संख्या}}$$

जोकि प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित परिभाषा भी है।

2) मूल घटनाओं की प्रायिकता निर्धारित करने की दूसरी विधि में हम एक परीक्षण को बड़ी संख्या में बार–बार दोहराते हैं। यदि परीक्षणों की संख्या, n, काफी बड़ी हो तो मूल घटनाओं की तुलनात्मक बारंबारताएँ उनकी क्रमशः प्रायिकताओं के बराबर होती है। यह विधि (पूर्व विवेचित) प्रायिकता की सांख्यिकीय परिभाषा पर आधारित है।

3) परीक्षण करने वाले व्यक्ति द्वारा भी, उसके अनुभव तथा प्रत्याशा के अनुसार, विभिन्न मूल घटनाओं की प्रायिकता निर्धारित की जा सकती है। उदाहरण के लिए, कोई व्यक्ति आपको आज वर्षा की प्रायिकता को निश्चित करने के लिए कह सकता है। यदि वर्षा का दिन है तो आप वर्षा की अधिक प्रायिकता, मान लिया 0. 8, निर्धारित करना चाहेंगे, इत्यादि। यह विधि, विशेष रूप से, प्रबंधकों/व्यवसायिका द्वारा व्यवसायों में किए जाने वाले विभिन्न निर्णयों के लिए बहुत उपयोगी है।

बहुत सी व्यवहारिक परिस्थितियों में घटनाओं के संयोजन होते हैं जिनमें हमें, इन घटनाओं की, प्रायिकताओं का भी संयोजन करना पड़ता है। इस सन्दर्भ में, हम प्रायिकता के दो महत्वपूर्ण नियमों का निम्नलिखित विवेचन करेंगे।

बोध प्रश्न 1

1) एक बक्से में 4 सफेद और 6 लाल गेंदे हैं। यदि बक्से में देखे बिना एक गेंदे निकाली गई। निकाली गई गेंद के सफेद होने की क्या प्रायिकता है?

....

....

....

....

....

2) यदि छः फलकों वाले एक पासे को उछाला गया है तो एक सम संख्या ज्ञात करने की प्रायिकता क्या है?

....

....

....

....

....

3) यदि एक सिक्के को दो बार उछाला गया है तो दोनों चित या दोनों पट प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

....

....

....

....

....

4) यदि 52 ताश के पत्तों में से एक पत्ता निकाला गया है तो बादशाह प्राप्त न करने प्रायिकता क्या है?

....

....

....

....

....

....

9.3 प्रायिकता के नियम

प्रायिकता के विभिन्न नियमों पर विचार करने से पहले हमें कुछ संकेतों की जानकारी होना आवश्यक है।

क) यदि A तथा B दो घटनाएँ हैं तो $P(A \cup B)$ or $P(A+B)$ का अर्थ A के घटित होने या B के घटित होने या दोनों की एक साथ घटित होने की प्रायिकता है। जिसका अर्थ है, दो घटनाओं A तथा B, में से कम से कम एक के घटने की प्रायिकता भी होता है।

ख) या $P(A \cap B) or P(AB)$ का अर्थ, का अर्थ दोनों घटनाओं, A तथा B, के एक साथ घटने की प्रायिकता है।

ग) $P(A/B)$ का अर्थ, A के घटित होने की सप्रतिबंध प्रायिकताए जबकि B पहले ही घटित हो चुकी है।

9.3.1 योग नियम

इस नियम के अनुसार दो घटनाओं में से कम से कम एक (अर्थात A या B, या दोनों) के घटित होने की प्रायिकता, A की प्रायिकता धन B की प्रायिकता ऋण A तथा B के एक साथ घटने की प्रायिकता है।

संकेतों के उपयोग से ऐसे लिखा जाएगाः

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad .... (9.1)$$

कुछ विशेष परिस्थितियों में (9.1) में संशोधनों का विवेचन निम्नलिखित है :

क) **परस्पर अपवर्जी घटनाएँः** मान लिया A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं, अर्थात A के घटित होने पर B घटित नहीं होती तथा इसके विपरितः B के घटित होने पर A घटित नहीं होती। इस परिस्थिति में $P(A \cap B) = 0$ होता है। अतः

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ख) **निःशेष घटनाएँः** यदि, किसी परीक्षण के परिणाम केवल A तथा B घटनाएँ ही है तब A या B या दोनों का घटना निश्चित है। हम यह जानते हैं कि एक निश्चित घटना के घटने की प्रायिकता 1 है। अतः

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1$$ या

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$ (जब A तथा B परस्पर अपवर्जी हों)

ग) **पूरक घटनाएँ (Complementary Events)** : किसी परीक्षण की यदि A एक घटना है तो स्पष्टतः परीक्षण के दो परिणाम होंगे : A का घटित होना या A का घटित न होना। इस प्रकार A है तथा 'A नहीं' है तो दोनों घटनाएँ निःशेष हैं। हम 'A नहीं' घटना A को सूचित करते हैं। अतः

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

or $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

यहाँ पर A और, A एक दूसरे की पूरक घटनाएँ कहलाती हैं। अतः दो पूरक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग होता है।

9.3.2 गुणन नियम

इस नियम के अनुसार दो घटनाओं, A तथा B, के एक साथ घटने की प्रायिकता

i) A की प्रायिकता तथा B की सप्रतिबंध प्रायिकता (conditional poobability) जबकि A पहले ही घटित हो चुकी है, का गुणनफल होता है।

या

ii) B की प्रायिकता तथा A की सप्रतिबंध प्रायिकता जबकि B पहले ही घटित हो चुकी है, का गुणनफल होता है।

संकेतों के प्रयोग से

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B) \quad .... (9.2)$$

गुणन नियम के उपयोग से हम सप्रतिबंध प्रायिकताएँ ज्ञात कर सकते हैं :

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

तथा

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

जब घटनाएँ स्वतंत्र हों तो गुणन नियम में संशोधन की आवश्यकता होती है।

मान लिजिए B का घटित होना A के घटित होने पर निर्भर नहीं हैं तब A तथा B घटनाओं को परस्पर स्वतंत्र कहा जाता है। इस परिस्थिति में

$P(B/A) = P(B)$ तथा

$P(A/B) = P(A)$ होता है।

अतः जब A तथा B स्वतंत्र हों तो

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A)$

अब हम प्रायिकता नियमों के प्रयोगों के कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे।

9.3.3 प्रायिकता नियमों के प्रयोग

ऊपर दिए गए प्रायिकता नियमों के प्रयोगों को समझने के लिए हम कुछ प्रश्नों को हल करेंगे।

उदाहरण 9.4

यदि एक पासे को उछाला जाए तो 1 या 6 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी?

स्पष्टतः एक उछाल में दो घटनाएँ, (1) और (6) एक साथ घटित नहीं हो सकती। अतः ये दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं।

$$P(1 \text{ या } 6) = P(1) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 9.5

52 पतों की गड्डी में से एक ताश का पत्ता निकाला गया है। इस पत्ते को प्रतिस्थापित किए बिना एक और पता निकाला गया। दोनों पते हुक्म के होने की प्रायिकता क्या है?

यहाँ पर पहली घटना हुक्म का एक पता प्राप्त करना तथा दूसरी घटना हुक्म का एक और पता प्राप्त करना है। इस प्रकार दूसरी घटना एक सप्रतिबंध घटना है। मान लिया प्रथम घटना की प्रायिकता $P(A)$ है तथा दूसरी घटना की प्रायिकता, जबकि पहली घटना घटित हो चुकी है $P(B/A)$

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

जब पहला पत्ता हुक्म का है, जिसको प्रतिस्थापित नहीं किया गया है, तब गड्डी में 51 पत्ते शेष हैं जिनमें से 12 पत्ते हुक्म के हैं। इस प्रकार

$P(B/A) = \frac{12}{51}$

अतः अपेक्षित प्रायिकता

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51}$

हमें इस बात पर ध्यान देना चाहिए कि जब पहला पत्ता निकाल कर प्रतिस्थापित नहीं किया जाता तो दो घटनाएँ स्वतंत्र नहीं रहती क्योंकि दूसरी घटना के घटित होने की प्रायिकता पहली घटना के घटित होने की प्रायिकता पर निर्भर करती है।

उदाहरण 9.6

ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता निकाला गया है। इस पत्ते को गड्डी में प्रतिस्थापित करने के बाद एक और पत्ता निकाला गया है तो दोनों पत्ते हुक्म के होने की प्रायिकता क्या है?

इस उदाहरण में पहला पत्ता निकालने के बाद प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। इस प्रकार, जब दूसरा पत्ता निकाला जाता है तब भी 52 पत्तों की गड्डी में 13 हुक्म के पत्ते हैं। इसका मतलब दूसरा पत्ता हुक्म का होने की प्रायकिता पहले पत्ते के परिणाम से स्वतंत्र है। अतः दोनों घटनाएँ स्वतंत्र हैं। यदि दूसरा पत्ता हुक्म का होने की प्रायिकता $P(B)$ है। तब

$$P(B/A) = P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

अतः अपेक्षित प्रायिकता

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

उदाहरण 9.7

एक पासे को उछाला गया है। 5 से कम संख्या या विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

मान लिया, 5 से कम संख्या प्राप्त करने की घटना (A) है तथा विषम संख्या प्राप्त करने की घटना B है। यह ध्यान दें कि ये दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी नहीं है क्योंकि उछाल का परिणाम 5 से कम तथा विषम, दोनों हो सकता है। इस प्रकार अपेक्षित प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र के प्रयोग से ज्ञात की जा सकती है।

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

एक पासे में, 6 संख्याओं में से 4 संख्याएँ (1, 2, 3 तथा 4) 5 से कम होती है। अतः

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

इसके अतिरिक्त, 6 संख्याओं में 3 विषम संख्याएँ (1, 3 तथा 5) होती है। अतः

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

मान लिजिए, एक विषम संख्या की प्रायिकता, जबकि वह 5 से कम दी हुई है, $P(B/A)$ है। तब

$$P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

इस प्रकार

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

अतः 5 से कम या विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

उदाहरण 9.8

A तथा B दो ऐसी घटनाएँ हैं कि $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{6}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ हैं। $P(A \cup B)$, $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(\overline{A} \cup B)$ and $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ज्ञात कीजिए।

यह भी जाँच कीजिए कि क्या A तथा B

क) समप्रायिक हैं

ख) निःशेष हैं

ग) परस्पर अपवर्जी हैं

घ) स्वतंत्र हैं

हम यह लिख सकते हैं

$$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \qquad [\because P(\overline{A}) = 1 - P(A)]$$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = -P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ **(पूरक घटनाओं की अवधारणा के उपयोग द्वारा)**

क) क्योंकि $P(A) \neq P(B)$, A तथा B समप्रायिक नहीं हैं।

ख) क्योंकि $P(A \cup B) \neq 1$, A तथा B निःशेष नहीं हैं।

ग) क्योंकि $P(A \cap B) \neq 0$, A तथा B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

घ) क्योंकि $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, A तथा B स्वतंत्र हैं।

बोध प्रश्न 2

1) एक विद्यार्थी गणित तथा अंग्रेजी की परीक्षाएँ देता है। उसके दोनों परीक्षाओं में उत्तीर्ण होने की स्वतंत्र प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{3}{4}$ हैं।

क) कम से कम, एक परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्या है?

ख) दोनों परीक्षाओं में अनुत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्या हैं?

....

....

....

....

....

2) एक ताश की गड्डी में से दो पत्ते निकाले गए।

क) दोनों पतों के बादशाह होने की प्रायिकता क्या है – जब दूसरा पत्ता निकालने से पहले प्रथम को प्रतिस्थापित किया गया है?

ख) दोनों पतों के हुक्म होने की प्रायिकता क्या है – जब दूसरा पत्ता निकालने से पहले प्रथम को प्रतिस्थापित नहीं किया गया है?

....

....

....

....

....

3) दो घड़े हैं। प्रथम घड़े में 7 सफेद गेंद तथा 3 लाल गेंद हैं। द्वितीय घड़े में 4 सफेद गेंद तथा 6 लाल गेंद हैं। यादृच्छिक विधि से एक घड़े का चयन करके उसमें से एक गेंद निकाली गई। प्रथम घड़ा चयन होने तथा लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

....

....

....

....

4) A तथा B के स्वतंत्र रूप से सच बोलने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ हैं। यदि वे एक ही कथन को बताते हैं तो उनके द्वारा सत्य कथन की प्रायिकता क्या है?

....

....

....

....

9.4 बेज–प्रमेय

मान लिज़िए A_1, A_2, तथा A_3 तीन प्रकार अपवर्जी तथा निःशेष घटनाएँ हैं तथा D एक घटना है, जो इनमें से किसी के साथ घटित हो सकती हैं। यदि, वास्तव में D घटित हो जाती है, तब A_i $(i = 1, 2, 3)$ के होने की सप्रतिबंध प्रायिकता, जबकि D घटित हो चुकी है, निम्नलिखित हैं,

$$P\left(A_i / D\right) = \frac{P\left(A_i \cap D\right)}{P(D)} = \frac{P\left(A_i\right) \cdot P\left(D / A_i\right)}{P(D)}$$

जहाँ पर

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P\left(A_i \cap D\right) = \sum_{i=1}^{3} P\left(A_i\right) \cdot P\left(D / A_i\right)$$

यह परिणाम कितनी ही परस्पर अपवर्जी तथा निःशेष घटनाओं के लिए बढ़ाया जा सकता है।

अब हम बेज–प्रमेय (Bayes' theorem) के कुछ व्यवहारिक अनुप्रयोगों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 9.9

एक काबले बनाने वाली फैक्ट्री में तीन मशीनें A, B तथा C हैं। ये कुल उत्पादन का क्रमशः 25 प्रतिशत, 35 प्रतिशत तथा 40 प्रतिशत उत्पादन करती है। लेकिन इनके उत्पादन के क्रमश 5 प्रशित, 4 प्रतिशत तथा 2 प्रतिशत काबले दोषणूर्प होते हैं। एक दिन के उत्पादन में से एक काबले का चयन किया गया तथा वह दोषपूण पाया गया। इसस काबले के (i) मशीन A, (ii) मशीन B तथा (iii) मशीन C द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता क्या है?

मशीन	उत्पादन	प्रतिशत दोषपूर्ण काबले
A	25	5
B	35	4
C	40	2

क्योंकि एक दिन के उत्पादन में तीनों मशीनों का उत्पादन सम्मिलित है, इसलिए, मशीन A द्वारा इसकी निर्माण प्रायिकता, $P(A) = 0.25$ है। इसी प्रकार $P(B) = 0.35$ तथा $P(C) = 0.40$ होगा। इसके अतिरिक्त, मान लीजिए, काबले के दोषपूर्ण होने की घटना को D से सूचित करते हैं। क्योंकि मशीन A 5 : दोषपूर्ण काबले निर्मित करती हैं, इसलिए $P(D/A) = 0.05$ है। इसी प्रकार, $p(D/B) = 0.04$ तथा $P(D/C) = 0.02$ होगा।

इस प्रकार

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)$$

$$= 0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02 = 0.0345$$

मशीन A द्वारा काबले निर्मित करने की प्रायिकता जबकि यह दोषपूर्ण है, अर्थात्

$$P(A/D) = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.25\times 0.05}{0.0345} = \frac{0.0125}{0.0345} = 0.362$$

इसी प्रकार

$$P(B/D) = \frac{P(B)\cdot P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.35\times 0.04}{0.0345} = \frac{0.0140}{0.0345} = 0.406$$

तथा

$$P(C/D) = \frac{P(C)\cdot P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.40\times 0.02}{0.0345} = \frac{0.0080}{0.0345} = 0.232$$

उपरोक्त विधि की एक वैकल्पिक विधि भी अपनाई जा सकती है। ऊपर दिये गये प्रायिकताओं को निम्नलिखित सारणी की रचना द्वारा भी प्राप्त किया जा सकता है। तीन घटनाओं, A, B तथा C को क्रमशः A_1, A_2, तथा A_3 से सूचित किया गया है।

A_i	A_1	A_2	A_3	योग
$P(A_i)$	0.25	0.35	0.45	1.00
$P(D/A_i)$	0.05	0.04	0.02	
$P(D\cap A_i)$	0.0125	0.014	0.008	
$P(A_i/D) = \frac{P(D\cap A_i)}{P(D)}$	0.362	0.406	0.232	1.00

यह ध्यान दीजिए कि प्रायिकताएँ $P(A_1)$, $P(A_2)$ तथा $P(A_3)$, जिनके मान परीक्षण से पहले ज्ञात हैं, तो ये पूर्ववर्त्ती प्रायिकताएँ (prior probabilities) कहते हैं। $P(A_1)$, $P(A_2)$ तथा $P(A_3)$ की सप्रतिबंध प्रायिकताएँ, अर्थात $P(A_1/D)$, $P(A_2/D)$ तथा $P(A_3/D)$, परीक्षण के परिणाम जानकारी होने की प्राप्त प्रायिकताएँ, परवर्त्ती प्रायिकताएँ (posterior probabilities) कहलाती है।

किसी समस्या का विश्लेषण करने से पहले, एक फर्म का प्रबंधक कुछ घटनाओं की प्रायिकता को व्यक्तिपरक (subjective) आधार पर भी निर्धारित कर सकता है जो उसके अनुभव तथा प्रत्याशा पर निर्भर ही करती है।

ये प्रायिकताएं पूर्ववर्त्ती प्रायिकताएँ कहलाती हैं। इसके बाद परीक्षण के दौरान D जैसी घटना के घटित होने के आधार पर पूर्ववर्ती प्रायिकताओं में संशोधन किया जाता है। इन संशोधित प्रायिकताओं को ही परवर्ती प्रायिकताएँ कहते है। दूसरे दौर में इन परवर्ती प्रायिकताओं को पूर्ववर्त्ती प्रायिकताएँ मान कर, उसी प्रक्रिया को दोहरा कर, परवर्त्ती प्रायिकताएँ प्राप्त की जाती है। इस प्रकार के कुछ संशोधनों के बाद परवर्ती प्रायिकताओं में स्थिर होने की प्रवृति होती है। इस प्रकार व्यक्तिपरक प्रायिकताएँ लगभग वस्तुपरक प्रायिकताएँ बन जाती है। व्यवसाय गतिविधियों के विश्लेषण के लिए बेज–प्रमेय बहुत ही उपयोगी है।

उदाहरण 9.10

एक कम्पनी के उत्पाद के सफल होने की प्रायिकता, जबकि सर्वेक्षण का परिणाम अनुकूल है; 0.6 है तथा सफल होने की प्रायिकता, जबकि सर्वेक्षण का परिणाम प्रतिकुल है, 0.3 है। यदि सर्वेक्षण के अनुकूल परिणाम दर्शाने की प्रायिकता 0.7 है,

i) उत्पाद सफल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए,

ii) सर्वेक्षण का परिणाम सफल होने की प्रायिकता, जबकि उत्पाद सफल हों, ज्ञात कीजिए,

iii) सर्वेक्षण का परिणाम असफल होने की प्रायिकता, जबकि उत्पाद सफल हो, ज्ञात कीजिए।

मान लिया कम्पनी का उत्पाद सफल होने की घटना को S से तथा सर्वेक्षण का परिणाम अनुकूल होने की घटना को F से सूचित करते हैं। इनकी क्रमशः विपरीत घटनाएँ $\overline{S}$ and $\overline{F}$ से सूचित की जाती है।

संकेतों के द्वारा, दी हुई सूचना को हम इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$P(S/F) = 0.6,\ P(S/\overline{F}) = 0.3 \text{ तथा } P(F) = 0.7$$

इस प्रकार $P(\overline{F}) = 1 - 0.7 = 0.3$

i) उत्पाद के सफल होने की प्रायिकता

$$P(S) = P(S \cap F) + P(S \cap \overline{F})$$

$$= P(F) \cdot P(S/F) + P(\overline{F}) \cdot P(S/\overline{F})$$

$$= 0.7 \times 0.6 + 0.3 \times 0.3 = 0.51$$

ii) $$P(F/S) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0.42}{0.51} = 0.824$$

iii) $$P(\overline{F}/S) = \frac{P(\overline{F} \cap S)}{P(S)} = \frac{0.09}{0.51} = 0.176$$

ध्यान दीजिए कि $P(\overline{F}/S) = 1 - P(F/S)$

बोध प्रश्न 3

1) एक टैल्कम पाउडर बनाने वाली कम्पनी ने एक नया विज्ञापन दिया। कम्पनी ने यह आकलन किया; कि एक व्यक्ति, जिसने विज्ञापन देखा है, उसके उत्पादन को खरीदने की प्रायिकता 0.7 है। तथा जिसने विज्ञापन नहीं देखा, उसके उत्पादन को खरीदने की प्रायिकता 0.3 है।

मान लिजिए यदि 1000 व्यक्तियों में से 70 प्रतिशत व्यक्तियों ने उस विज्ञापन को देखा है, तो एक व्यक्ति जिसने उत्पाद खरीदा है कि विज्ञापन न देखने की (क) प्रापकिता तथा विज्ञापन देखने की प्रायिकता (ख) क्या है?

....

....

....

2) एक बीमा कम्पनी ने 2,000 स्कूटर चालकों, 40,000 कार चालकों तथा 6,000 ट्रक चालकों का बीमा किया। क्रमशः वर्ग में दुर्घटना की प्रायिकता 0.01, 0.03 तथा 0.15 हैं। एक बीमाकृत चालक दुर्घटना ग्रस्त हो जाता है। इसके स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है?

....

....

....

9.5 सार संक्षेप

साधारण भाषा में, प्रायिकता का अर्थ है संभावना। लेकिन, सांख्यिकी में इसका अर्थ कुछ अधिक होता है। यहां पर हम, केवल एक घटना के घटित होने की अनिश्चितता पर ही विचार नहीं करते, बल्कि इसका संख्यात्मक मान प्राप्त करने का प्रयास भी करते हैं। इस प्रकार, प्रायिकता, का परिमाणात्मक माप संभावना है। इस इकई में हमने प्रायिकता की तीन प्रकार से अर्थात चिरप्रतिष्ठित, तुलनात्मक बारंबारता तथा अभिगृहीतीय का अध्ययन किया है। मिश्रित घटनाओं की प्रायिकताएँ, दो नियमों पर आधारित है। (1) योग नियम, तथा (2) गुणन नियम है। अंततः बेज–प्रमेय द्वारा घटनाओं के घटित होने या न घटित होने के आधार पर प्रायिकताओं का संशोधन किया जाता है। यह संशोधन व्यवसायिक

9.6 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{12}{13}$

बोध प्रश्न 2

1) क) $\frac{11}{12}$, ख) $\frac{1}{12}$

2) क) $\frac{1}{169}$, ख) $\frac{1}{17}$

3) $\frac{3}{20}$

4) $\frac{1}{3}$

बोध प्रश्न 3

1) $\frac{9}{58}$, $\frac{49}{58}$

2) $\frac{1}{52}$

इकाई 10 असतत् प्रायिकता बंटन*

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- यादृच्छिक चर के अर्थ को समझ सकेंगे;
- प्रायिकता बंटन की संकल्पना की व्याख्या कर सकेंगे;
- असतत् प्रायिकता बंटन और सतत् प्रायिकता बंटन के बीच के अंतर को स्पष्ट कर सकेंगे,
- द्विपद और पाइसों बंटन की प्रमुख विशेषताओं का वर्णन कर सकेंगे।

10.1 विषय प्रवेश

इकाई 13 में किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता के बारे में चर्चा की थी। उस इकाई में घटना की संयोगी प्रयोग (chance experiment) के एक या अधिक संभावित परिणामों के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया गया था। ऐसे संयोगी प्रयोग के परिणामों को 'यादृच्छिक चर' की संकल्पना से जोड़ा जा सकता है। इस इकाई में हम यादृच्छिक चर को ध्यान में रखकर प्रायिकता पर विचार करेंगे। इसके बाद हम प्रायिकता बंटन (poobability distribution) की अवधारणा पर चर्चा करेंगे। इस इकाई में हम असतत् यादृच्छिक चर और सतत् यादृच्छिक चर के बीच के अंतर को स्पष्ट करेंगे। इसके बाद,

---

* डॉ० अनुप चटर्जी (सेवानिवृत) ए.आर.एस.डी. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।

असतत् यादृच्छिक चरों के संदर्भ में हम दो महत्वपूर्ण असतत् प्रायिकता बंटनों अर्थात द्विपद बंटन और पाइसों बंटन की चर्चा करेंगे। सतत् प्रायिकता बंटन की संकल्पना की चर्चा हम अगली इकाई में करेंगे।

10.2 यादृच्छिक चर

यादृच्छिक चर (random variable) की औपचारिक परिभाषा करने से इस पहले, आइए सहज रूप से इस संकल्पना के अर्थ को समझने का प्रयास करें। हम जानते ही है कि यादृच्छिक चर, संयोगी प्रयोग के परिणामों से संबंधित है। ऐसे संयोगी प्रयोग को यादृच्छिक प्रयोग भी कहते हैं। आइए ऐसे एक उदाहरण पर विचार करें।

मान लीजिए हमने एक सिक्का उछाला इसके दो संभावित परिणाम हैं : शीर्ष (Head) या पुच्छ (Tail)। इससे पहली इकाई में हमने प्रतिदर्श क्षेत्र (Sample space) की संकल्पना की चर्चा की थी। इस प्रयोग का प्रतिदर्श क्षेत्र में शीर्ष और पुच्छ परिणाम शामिल है। यदि S, प्रतिदश्र समष्टि को व्यक्त करता है, तब

$$S = (H, T)$$

इस प्रयोग में यह सुनिश्चित नहीं है कि परिणाम के रूप में शीर्ष आएगा या पुच्छ। यह संयोगी प्रयोग या यादृच्छिक प्रयोग का एक उदाहरण है। अब मान लीजिए, हम पुच्छ (T) घटित होने को 0 संख्या और शीर्ष (H) के घटित होने को 1 संख्या द्वारा अभिव्यक्त करते हैं। अब X चर को परिभाषित करें जो किसी परिणाम के घटित होने को व्यक्त करता है। तब चर और इसके संभावित मान हैं :

$$X = (0, 1)$$

लेकिन, इस चर और चर संबंधी हमारी सामान्य धारणा के बीच एक महत्वपूर्ण अंतर है (विभिन्न प्रकार के चरों के लिए, इकाई 7 देखें)। यहाँ, वह मान; जिसे चर प्राप्त करेगा, वह संयोग या यादृच्छिक प्रयोग के परिणाम पर निर्भर करती है जिस पर हम विचार कर रहे हैं। अन्य शब्दों में, हमें पक्का पता नहीं है कि प्रयोग के परिणाम के रूप में क्या चर 0 मान लेगा अथवा इसका मान 1 होगा। हम केवल इन मानों से कुछ प्रायिकताओं को जोड़ सकते हैं। ये प्रायिकताएँ, प्रयोग के विविध परिणामों के घटित होने के संयोग पर निर्भर करती है। यदि अपने उदाहरण में हम मान लें कि सिक्का अनभिनत हैं। तब पुच्छ आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है, और शीर्ष के लिए भी प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है; (क्योंकि दोनों परिणमों के आने की संभावना एक जैसी है)। इसी आधार पर, हम $\frac{1}{2}$ की प्रायिकता को 0 और 1 अर्थात दोनों से जोड़ते हैं। चर की रूढ़ धारणा के मामले में, दूसरी तरफ ऐसी किसी प्रायिकता को चर के किसी मान से नहीं जोड़ा जा सकता।

उपर्युक्त चर्चा के आधार पर हम कह सकते हैं कि यादृच्छिक चर ऐसा चर है जो कुछ प्रायिकताओं से अलग–अलग मान ले सकता है। अतः सिक्के को उछालने के संभावित परिणामों को दर्शाने वाला चर X, यादृच्छिक चर का उदाहरण लेते है।

हम निम्नलिखित संकेत का प्रयोग करेंगे : मान लीजिए X यादृच्छिक चर है और इसके $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$. मान हैं। इस स्थिति में संगत प्रायिकताएं $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots p_n$. होंगी। अतः $p(X = x_1) = p_1$

उदाहरण 10.1 : मान लीजिए किन्हीं दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि है :

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

यदि हम यादृच्छिक चर X को प्राप्त शीर्षों की संख्या के रूप में परिभाषित करें तब $X = 2$, (H, H) परिणाम के तदनुरूप है; $X = 1$, (H, T) और (T, H) परिणामों के उसके हिसाब से है, और अंततः $X = 0$ परिणाम (T, T) के तदनुरूप है। अतः Xके तीन संभावित मान अर्थात् 0, 1, और 2 हो सकते हैं।

$$X = (0,\ 1,\ 2)$$

उदाहरण 10.2: एक अन्य उदाहरण में हम एक पाँसे को फेंकते हैं। प्रतिदर्श समष्टि है, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$। यादृच्छिक चर X को इस प्रकार भी परिभाषित कर सकते हैं कि यह 0 के बराबर के मान लें जब पाँसे पर विषम संख्या आती है और 1 लें जब कोई सम संख्या आती है। अतः

$$X = (0, 1)$$

दो सिक्कों को उछालने वाले प्रयोग में, हम यादृच्छिक चर को रूपयों आदि के रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं। जैसे, यदि हमें दो शीर्षों की प्राप्ति होती है तो हम खिलाड़ी को 10 रूपए देना तय करते हैं और यदि एक शीर्ष की प्राप्ति होती है तो 5 रूपए और यदि कोई भी शीर्ष नहीं आता तो खिलाड़ी को (–) 8 रूपए अदा करते (अर्थात वह हमें 8 रूपए देगा)। यहाँ X ऐसा यादृच्छिक चर है जो ऐसे भुगतान को व्यक्त करता है जिसे खिलाड़ी को अदा किया जाना है। अतः

$$X = (10,\ 5,\ -8)$$

जैसा कि खंड 2 में हमने अध्ययन किया था, चर असतत् या सतत् हो सकता है। इसी तरह से, यादृच्छिक चर भी असतत् या सतत् हो सकता है।

i) **असतत् यादृच्छिक चर** : जब किसी प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि असतत् है तो संगत यादृच्छिक संख्याएं भी असतत् होगी अर्थात निश्चित रूप से उसके कुछ वियुक्त (isolated) मान होंगे। उपर्युक्त उल्लिखित यादृच्छिक चर, असतत् यादृच्छिक चर (discrete random variable) के उदाहरण हैं।

ii) **सतत् यादृच्छिक चर** : जैसा कि हम जानते हैं, सतत् चर का अंतराल में कोई भी मान हो सकता है। इसी तरह से यादृच्छिक चर सतत् होगा जब प्रतिदर्श समष्टि भी सतत् हो। अगली इकाई में हम प्रसामान्य चर (normal variable) की संकल्पना चर्चा करेंगे जो सतत् यादृच्दिक चर (continuous random variable) का उदाहरण है।

10.3 प्रायिकता बंटन

आइए प्रायिकता बंटन (probability distribution) की परिभाषा से शुरू करें। इसे, ऐसे प्रकथन (statement) के रूप में परिभाषित किया जाता है जो संबंधित प्रायिकताओं के साथ यादृच्छिक चर के संभावित मानों पर आधारित है।

आइए प्रायिकता बंटन का एक उदाहरण लें। उपर्युक्त उदाहरण 10.1 में हमने दो सिक्कों को उछाला और यादृच्छिक चर X को शीर्षों की संख्या के रूप में परिभाषित किया और इसके आगे X ने तीन मान अर्थात 0, 1, और 2 धारण किए। मान लीजिए कि दोनों सिक्के अनभिनत हैं, तब हम लिख सकते हैं:

$$p\ (X=0) = \frac{1}{4},$$

$p(X=1) = \frac{1}{2}$ अर्थात्, {(H, T) या (T, H) आने की प्रायिकता}

$$p\ (X=2) = \frac{1}{4}$$

सारणीबद्ध तरीके से लिखी गई ये प्रायिकताएँ और इनके साथ यादृच्छिक चर के तदनुरूप मान, यादृच्छिक चर X के प्रायिकता बंटन की रचना करते हैं जहाँ X शीर्षों की संख्या है। इसे सारणी 10.1 में दर्शाया गया है।

सारणी 10.1 : दो अनभिनत सिक्कों को उछालने से प्राप्त शीर्षों की संख्या का प्रायिकता वितरण

शीर्षो की संख्या (x)	प्रायिकता $p\,(x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

उपर्युक्त उदाहरण में शीर्ष प्राप्त न करना ($X=0$), एक शीर्ष प्राप्त करना ($X=1$) और दो शीर्ष प्राप्त करने ($X=2$) से संबंधित घटनाएं अन्य सभी संभावनाओं को नकार देती है (इसका अर्थ है कि उपर्युक्त तीन के अलावा, और कोई भी संभावित परिणाम नहीं हो सकता)। अतः उपर्युक्त प्रयोग से प्राप्त प्रायिकता बंटन ने यादृच्छिक चर X के सभी संभावित मानों की गणना कर ली है और उन्हें कुछ विशिष्ट प्रायिकताएँ दी हैं। हम देख सकते हैं कि इन प्रायिकताओं का योग 1 के बराबर है।

प्रायिकता बंटन दो प्रकार के हो सकते हैं : असतत् (discrete) प्रायिकता बंटन और सतत् (continuous) प्रायिकता बंटन।

10.3.1 असतत् प्रायिकता बंटन

हम पहले ही देख चुके हैं कि यादृच्छिक चर संबंधी प्रायिकता बंटन हमें बताता है कि किस प्रकार प्रायिकताओं को यादृच्छिक चर के मानों पर बंटित किया जाता है। अब, सतत् यादृच्छिक चर के लिए, प्रायक्ता बंटन को ऐसे फलन द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसे प्रायिकता द्रव्यमान फलन (probability mass function) कहते हैं जिसे $p(x)$ द्वारा दर्शाया जाता है। यह प्रायिकता द्रव्यमान फलन, असतत् यादृच्छिक चर के प्रत्येक मान के लिए प्रायिकता प्रदान करता है। वास्तव में, दो सिक्कों को उछालने पर आने वाले शीर्षों की संख्या का प्रायिकता बंटन जिसे हमने तालिका 10.1 में दर्शाया था, असतत् प्रायिकता बंटन (discrete probability distribution) का उदाहरण है।

आइए अब असतत् प्रायिकता बंटन के अन्य उदाहरण पर विचार करें। मान लीजिए हम अपने इलाके के प्रति परिवार बच्चों की संख्या पर गौर करते हैं, यहाँ, हम बच्चों की संख्या को असतत् यादृच्छिक चर मान सकते हैं। प्रति परिवार में बच्चों की संख्या के लिए असतत् प्रायिकता वितरण का निर्माण, इस यादृच्छिक चर के संभावित मानों के लिए, सापेक्षिक बारंबारता (relative prequency) के अभिकलन द्वारा किया जा सकता है। ऐसे प्रायिकता बंटन को सारणी 10.2 में दर्शाया गया है।

सारणी 10.2: प्रति परिवार के आधार पर बच्चों की संख्या का प्रायिकता बंटन

बच्चों की संख्या (x)	$p(x)$
0	0.10
1	0.15
2	0.23
3	0.25
4	0.14
5	0.13

अतः क्रमबद्ध युग्म (ordered paris) [x, $p(x)$]का समुच्चय, असतत् यादृच्छिक चर X या असतत् प्रायिकता बंटन का प्रायिकता बंटन कहलाता है।

क्योंकि मान $P(x)$, सभी प्रायिकताओं को दर्शाता है और यादृच्छिक चर का कोई न कोई मान x हमेशा होता है, इसलिए प्रायिकता द्रव्यमान फलन इन दो शर्तों को पूरा करता है :

1) किसी भी घटना की प्रायिकता अर्थात x के किसी मान के लिए प्रायिकता नकारात्मक नहीं हो सकती।

$$p(x) \geq 0$$

2) सभी संभावित परिणामों की प्रायिकताओं का योग 1 के बराबर होता है, अर्थात

$$\sum_{all\ x} p(x) = 1$$

आइए असतत् प्रायिकता बंटन पर आधारित कुछ समस्याओं पर विचार करें।

उदाहरण 10.3

क्या निम्नलिखित एक मान्य प्रायिकता द्रव्यमान फलन हैं?

$$p(x) = \frac{x^3}{2}, x = -1, 0, 1$$

आइए x के कुछ विशिष्ट मानों (–1, 0 और 1) पर हम x की प्रायिकता का आकलन करें। जब $x = -1$:

$$p(x) = \frac{x^3}{2}, x = -1, 0, 1$$

लेकिन हम जानते हैं कि किसी भी घटना की प्रायिकता नकारात्मक नहीं हो सकती। इसलिए, यहां प्रायिकता द्रव्यमान फलन की पहली शर्त का उल्लंघन हो रहा है। अतः दिया गया फलन, मान्य प्रायिकता द्रव्यमान फलन नहीं हो सकता।

उदाहरण 10.4

फलन $p(x) = \frac{k}{x} x = 3, 4, 5$में k स्थिरांक है। k का मान ज्ञात कीजिए ताकि ये फलन मान्य प्रायिकता द्रव्यमान फलन हो जाए।

इस फलन से हम देख सकते हैं कि:

$$p(3) = \frac{k}{3}$$

$$p(4) = \frac{k}{4}$$

$$p(5) = \frac{k}{5}$$

प्रायिकता द्रव्यमान फलन की दूसरी शर्त को पूरा करने के लिए, आवश्यक है कि

$$\sum p(x) = \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} = 1$$

$$or\ k\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 1$$

$$or\ k \cdot \frac{47}{60} = 1$$

$$or\ k = \frac{60}{47}$$

या $k = \frac{60}{47}$

आइए जाँच करें कि k का उपर्युक्त मान क्या पहली शर्त को पूरा करता है:

$$p(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{60}{47} = \frac{60}{141} \geq 0$$

$$p(4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{60}{47} = \frac{60}{188} \geq 0$$

$$p(5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{60}{47} = \frac{60}{235} \geq 0$$

अतः, $k = \frac{60}{47}$, प्रायिकता द्रव्यमान फलन के लिए पहली शर्त को भी पूरी करता है।

10.3.2 सतत् प्रायिकता बंटन

सतत् यादृच्छिक चर X की अपने किसी भी मान विशेष को सही मायने में धारण करने की प्रायिकता शून्य होती है। निश्चय ही, यह एक विचित्र सा कथन है। आइए इसे समझने का प्रयास करें। अब हम भार (weight) को यादृच्छिक चर मान कर पर विचार करते हैं। निस्संदेह भार एक सतत् यादृच्छिक चर है, क्योंकि यह निरंतर बदलता रहता है। मान लीजिए हमें किसी एक व्यक्ति का सही भार नहीं पता लेकिन मोटे तौर पर हम जानते हैं, कि उसका भार 60 कि.ग्रा. और 61 कि.ग्रा. के बीच में है। इन दो सीमाओं के बीच संभावित भारों की अनंत संख्याएं शामिल हैं। इसकी परिभाषा के परिणामस्वरूप व्यक्ति के किसी विशेष भार जैसे (60.3 किग्रा.) के लिए प्रायिकता काफी कम होगी, लगभग शून्य के बराबर। लेकिन हम निश्चित रूप से व्यक्ति के भार जैसे 60 किग्रा. और 61 किग्रा. के बीच के लिए कुछ प्रायिकता तय कर सकते हैं। अतः सतत् यादृच्छिक चर X के लिए किसी अंतराल (न कि किसी विशिष्ट मान) की प्रायिकता तय की जायेगी।

यहाँ, हमें फलन $p(x)$ चाहिए जिसे प्रायिकता घनत्व फलन (probability denisity function) कहते हैं। इस फलन की सहायता से हम प्रायिकता को अभिकलित कर सकते है।

$P(a < x < b)$ यहां a और b अंतराल (a, b) की सीमाएं हैं तथा $a < b$

प्रायिकता घनत्व फलन $p(x)$ को इस ढंग से परिभाषित किया जाता है कि जब x के प्रांत पर अभिकलिन किया जाये तो इसके वक्र के नीचे x- अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल इकाई के बराबर हो। प्रायिकता घनत्व फलन को वास्तविक संख्याओं R के पूरे समुच्चय पर परिभाषित सतत् यादृच्छिक चर के रूप में मान्य होने के लिए निम्नलिखित तीन शर्तों को पूरा करना होगा :

1) $p(x) > 0$ सभी $x \in R$ के लिए

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

3) $p(a < X < b) = \int_{a}^{b} p(x)dx$

यद्यपि सतत् यादृच्छिक चर के प्रायिकता बंटन को असतत् यादृच्छिक चर की भांति सारणी के रूप में नहीं दर्शाया जा सकता, फिर भी प्रायिकता घनत्व फलन $p(x)$ के विशिष्ट रूप से अभिव्यक्त किया जा सकता है। ऐसे कुछ रूपों (forms) का अध्ययन हम अगली इकाई में करेंगे, जो सतत् यादृच्छिक चरों से संबंधित सैद्धांतिक बंटनों पर आधारित है।

10.3.3 प्रमेयात्मक/अनुमित बंटन

प्रायिकता बंटन, प्रायिकता प्रयोग (experiments) से संबद्ध आनुभाविक प्रेक्षणों पर आधारित होते है। सुसंगत प्रायिकता बंटन की प्राप्ति के लिए, प्रयोग को समान स्थितियों में कई बार दोहराना पड़ता है यह कभी–कभी अत्यंत कठिन कार्य सिद्ध होता है। वैकल्पिक रूप से सूत्र के प्रयोग से हम प्रायिकता द्रव्यमान फलन या प्रायिकता घनत्व फलन को स्पष्ट कर सकते हैं। हमें यह ध्यान रखना पड़ता है कि इसमें सभी सैद्धांतिक शर्तें की पूरी हो रही हो। इस प्रकार के प्रायिकता बंटन को प्रमेयात्मक अथवा अनुमित बंटन कहते हैं। ऐसे बंटन का एक मुख्य फायदा है, कि कुछ अनुमित बंटन, जीवन की अनेक घटनाक्रमों को सटीक रूप से व्यक्त कर सकते है। परिणामस्वरूप प्रयोग किए बिना भी हम उन बंटनों के माध्यम से सीधे ही जीवन की सच्ची घटनाओं को समझ सकते हैं। अनुमित बंटन असतत् या सतत् हो सकता है। हम आगे दो महत्वपूर्ण असतत् अनुमित बंटनों की चर्चा कर रहे हैं। इन्हें अक्सर सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए प्रयोग किया जाता है। अगली इकाई में हम कुछ सतत् अनुमित बंटनों का अध्ययन करेंगे।

10.4 यादृच्छिक चर का माध्य एवं प्रसरण

यादृच्छिक चर के माध्य को इसकी गणितीय प्रत्याशा या प्रत्याशित मान के रूप में भी जाना जाता है। इसे यादृच्छिक चर के मूल्यों और संगत प्रायिकताओं के गुणनफलों के योग के रूप में परिभाषित किया जाता है। अतः यदि X असतत् यादृच्छिक चर है, जिसकी क्रमशः विशिष्ट प्रायिकताएँ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ और $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ मान हैं, तब X की गणितीय प्रत्याशा (mathematical expectation) है :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

मजेदार बात यह है कि यादृच्छिक चर की गणितीय प्रत्याशा, साधारण चर के समांतर माध्य के समान होती है। असतत् यादृच्छिक चर के लिए, इसे आसानी से दर्शाया जा सकता है। हमने प्रायिकता की सापेक्षिक बारंबारता परिभाषा में देखा है कि किसी घटना की प्रायिकता को, उस घटना के घटित होने की सापेक्षिक बारंबारता की सीमा के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जब अभिप्रायों की संख्या अनंत की ओर प्रवृत हो, अर्थात :

$$p_i = \frac{f_i}{N}$$

जहाँ f_i x_i की बारंबारता है और $N = \sum_{t-1}^{n} f_i$ कुल बारंबारता है।

अतः $E(X) = \sum_{i=1}^{N} p_ix_i = \sum_{t-1}^{n} \frac{f_i}{N} x_i$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_ix_i = \overline{X}$$

अतः हमने देखा कि यादृच्छिक चर की गणितीय प्रत्याशा उसका समांतर माध्य है।

उदाहरण 10.5

एक अनभिनत (unbiased) सिक्के को उछाला जाता है। यदि शीर्ष आता है तो आप 20 रूपए जीतंगे और अगर 'पुच्छ' है तो आप 10 रूपए हारेंगे। वह राशि बताइए जिसे हर बार सिक्का उछालने पर आप जीतंगे या हारेंगे।

क्योंकि सिक्का अनभिनत है, इसलिए 'शीर्ष' या 'पुच्छ' प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। मान लीजिए X यादृच्छिक चर है जो ऐसे मानों को लेता है जो हार और जीत वाली राशियों के बराबर है। इसलिए $\frac{1}{2}$ प्रायिकता के साथ $x = 20$ और दुबारा $\frac{1}{2}$ प्रायिकता के साथ $x = -10$ (हानि को नकारात्मक फायदा माना जा सकता है)।

इसलिए, प्रति उछाल पर हारने या जीतने की प्रत्याशित राशि हैः

$$Rs. \left[20 \cdot \frac{1}{2} + (-10) \cdot \frac{1}{2} \right] = Rs.\ 5$$

सकारात्मक प्रत्याशित फायदे वाले खेल को, खिलाड़ी के पक्ष में एकतरफा कहा जाता है। यदि प्रत्याशित फायदा शून्य (0) है तो खेल को निष्पक्ष कहते है। उपर्युक्त खेल को निष्पक्ष बनाया जा सकता है यदि प्रवेश शुल्क (प्रत्याशित मूल्य के बराबर की राशि के रूप में) हम 5 रूपए वसूल करें। यादृच्छिक चर X के संभावित मूल्य अब 15 और –15 और प्रत्याशित मूल्य $E(X) = 0$ है।

सतत् यादृच्छिक चर के लिए, गणितीय प्रत्याशा, निश्चित समाकल (definite integral) का रूप ले लेती है। इसलिए, $E(X) = \int_a^b xp(x)dx$

जहाँ a से b तक के प्रांत में X एक सतत् यादृच्छिक चर है और $p(x)$ इसका प्रायिकता घनत्व है।

10.4.1 गणितीय प्रत्याशा आधारित कुछ प्रमेय

i) स्थिरांक की गणितीय प्रत्याशा स्थिरांक स्वयं होता है। यदि c स्थिरांक है तब,

$$E(c) = c$$

ii) स्थिरांक और यादृच्छिक चर के गुणनफल की गणितीय प्रत्याशा, यादृच्छिक चर की गणितीय प्रत्याशा और स्थिरांक का गुणनफल है। यदि c स्थिरांक है और x यादृच्छिक चर है, तब

$$E(cX) = cE(X)$$

iii) यादृच्छिक चर के किसी भी फलन की गणितीय प्रत्याशा, फलन के मानों और यादृच्छिक चर के मानों की तदनुरूप प्रायिकताओं के गुणनफलों का योग है। अतः यदि *f(X)*, यादृच्छिक चर X का फल है जो विशिष्ट प्रायिकताओं $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ के साथ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ मानों को लेता है तो *f(X)* की गणितीय प्रत्याशा हैः

$$E[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i$$

हमें यहाँ ध्यान रखना है कि उपर्युक्त संकलन सही अर्थों में असतत् यादृच्छिक चर पर ही लागू होता है। लेकिन बिना अपनी सामान्यता खोए यह प्रमेय, सतत् यादृच्छिक चर के लिए भी मान्य है। यहाँ कुछ सीमित मानों के संकलन की बजाय, यादृच्छिक चर के प्रांत का समाकलन (integration) आवश्यक है।

iv) यादृच्छिक चरों की दी गई संख्या के योगफल की गणितीय प्रत्याशा, उसकी प्रत्याशाओं का योगफल है। यदि X और Y दो यादृच्छिक चर हैं, $X+Y$ की गणितीय प्रत्याशा है;

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

v) स्वतंत्र यादृच्छिक चरों की दी गई संख्या के गुणनफल की गणितीय प्रत्याशा, उनकी प्रत्याशाओं का गुणनफल है। यदि X और Y दो स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं, XY की गणितीय प्रत्याशा हैः

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

यादृच्छिक चर X का प्रसरण होगा

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

उदाहरण 10.5 (सिक्का उछालने वाले) में यादृच्छिक चर का प्रसरण, निम्नलिखित तरीके से अभिकलित किया जा सकता है।

पहले हम अभिकलित करेंगे

$$E(X^2) = 20^2 \cdot \frac{1}{2} + 10^2 \cdot \frac{1}{2} = 200 + 50 = 250$$

$$[E(X)]^2 = 5^2 = 25$$

अब

$$V(X) = \sigma_X^{\,2} = 250 - 25 = 225$$

X का मानक विचलन भी

$$\sigma_X = \sqrt{225} = \text{Rs. } 15$$

10.4.2 प्रसरण आधारित कुछ प्रमेय

i) स्थिरांक का प्रसरण शून्य है। यदि c स्थिरांक है,

$$V(c) = 0$$

ii) स्थिरांक और यादृच्छिक चर के गुणनफल का प्रसरण यादृच्छिक चर का प्रसरण और स्थिरांक के वर्ग का गुणनफल है। यदि c स्थिरांक और X यादृच्छिक चर है, तब

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

iii) यादृच्छिक चरों की दी गई संख्या के योगफल का प्रसरण उनके प्रसरणों तथा सह प्रसरण का योगफल है। यदि X और Y दो यादृच्छिक चर हैं, तब $X+Y$ का प्रसरण है

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$$

यहाँ $Cov\ (X,\ Y)$, X और Y के बीच सहप्रसरण (Covariance) कहलाता है। ध्यान रहे कि सहप्रसरण, दो चरों की एक साथ परिवर्तनशीलता का माप है।

सहप्रसरण को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$Cov(X,Y) = E[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

लेकिन, यदि X और Y स्वतंत्र हैं तब एक चर में होने वाला परिवर्तन दूसरे चर में परिवर्तन उत्पन्न नहीं कर सकता। जिसके परिणामस्वरूप, $Cov\ (X,\ Y) = 0$ और

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

यहाँ ध्यान देने योग्य बात है कि उपर्युक्त चर्चित गणितीय प्रत्याशा और प्रसरण पर आधारित सभी मूल प्रमेय सतत् और असतत् अर्थात दोनों प्रकार के यादृच्छिक चरों के लिए मान्य है।

अब हम एक महत्वपूर्ण परिणाम को व्यक्त और सिद्ध कर सकते हैं।

10.4.3 मानक प्रसामान्य विचर

दिए गए माध्य और मानक विचलन वाले किसी भी चर (यादृच्छिक या किसी अन्य) के लिए, जब भी माध्य को चर के कर मानक विचलन से विभाजित किया जाता है तो परिणामी चर का माध्य शून्य के बराबर और मानक विचलन एक के बराबर होता है।

आइए उपर्युक्त कथन को सिद्ध करें।

मान लीजिए X एक यादृच्छिक चर है। जिसका माध्य (प्रत्याशा) μ और मानक विचलन σ है। यदि $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$E(z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}[E(X) - E(\mu)] = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

अब $V(z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}[V(X) - (-1)V(\mu)]$

उपरलिखित सहप्रसरण की टर्म $\text{cov}(X, \mu)$ गायब हो गई है। क्योंकि दोनों X, μ स्वतंत्र है। इसलिए

$$V(z) = \frac{1}{\sigma^2}[V(X)] = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2\,[V(\mu) = 0]$$

अब

$$Std.dev.(z) = \sqrt{V(z)} = \sqrt{1} = 1$$

इस प्रकार हम कह सकतें है। कि

$$E(z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0$$

और

$$Std.dev.(z) = Std.dev\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1$$

उपर्युक्त विधि से परिभाषित चर z को बहुधा मानक प्रसामान्य विचर (Standard Normal Variate) कहते हैं।

अगली इकाई में हम विचार करेंगे कि किस प्रकार प्रसामान्य बंटन के संदर्भ में इस परिणाम को प्रयोग किया जाता है।

बोध प्रश्न 1

1) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित मान्य प्रायिकता द्रव्यमान फलन है या नहीं?

$$p(x) = \frac{x^2 - x}{16}, \ X = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

....

....

....

....

2) k का ऐसा एक मान ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित मान्य प्रायिकता द्रव्यमान फलन बन जाए।

$$p(x) = \frac{k}{x^2}, \ X = 1, 2$$

....

....

....

....

3) 99 रूपए के एक पुरस्कार के लिए A और B एक पासा उछालते हैं जो खिलाड़ी पहले छह उछालेगा, वह पुरस्कार जीतेगा। अगर पासे की पहली उछाल A शुरू करता है तो क्रमशः उनकी प्रत्याशाएं क्या हैं?

....

....

....

4) एक ठेकेदार विनिर्माण और बोली लगाने संबंधी खर्च निकालने के बाद, किसी निर्माण परियोजना पर बोली लगाने के लिए 3,000 रूपए खर्च करता है और अगर वह बोली जीत लेता है, तो इससे उसे 25,000 रूपए का मुनाफा होगा। यदि बोली जीतने की संभावना 10 प्रतिशत है, तो ठेकेदार के प्रत्याशित मुनाफे को अभिकलित कीजिए और बताइए कि उसे बोली लगानी चाहिए या नहीं।

....

....

....

....

....

5) निम्नलिखित परिणामों को सिद्ध कीजिए।

क) $E(cX) = cE(X)$, जहाँ c स्थिरांक है।

ख) $V(c) = 0$, जहाँ c स्थिरांक है।

ग) $V(cX) = c^2 V(X)$, जहाँ c स्थिरांक है।

....

....

....

....

....

10.5 द्विपद बंटन

द्विपद बंटन (binomial distribution) असतत् प्रायिकता बंटन का एक उदाहरण है। जेम्स बर्नोली ने वर्ष 1700 में इसे प्रस्तुत किया था। 'बायनोमियल' शब्द ''दो'' का संकेत है। यह प्रयोग के दो संभावित परिणामों को दर्शाता है, अर्थात् किसी घटना का घटित होना या घटित न होना। एक प्रायिकता प्रयोग को बर्नोली प्रयोग कहा जा सकता है, यदि वह निम्नलिखित शर्तों को पूरा करें,

1) प्रयोग में n पुनरावृत्त अभिप्रयोगों (repeated trials) का अनुक्रम शामिल हो।

2) प्रत्येक अभिप्रयोग का परिणाम ऐसा होना चाहिए जिसे सफलता या असफलता के रूप में वर्गीकृत किया जा सके।

3) सफलता की प्रायिकता, जिसे p द्वारा दर्शाया जाता है, पूर्व ज्ञात हो तो और यह प्रत्येक अभिप्रयोग में स्थिर रहती हो, परिणामस्वरूप, $q = (1-p)$ द्वारा अभिव्यक्त असफलता की प्रायिकता का भी पता रहता है और यह भी प्रत्येक अभिप्रयोग में स्थिर रहती हो।

4) प्रत्येक अभिप्रयोग एक दूसरे से स्वतंत्र हो।

हम बर्नोली प्रयोग के बारे में कुछ आधार बनाने के लिए एक अनभिनत सिक्का उछालने का उदाहरण लेते हैं। सिक्का बार–बार उछाला जाता है, और आने वाले शीर्षों की संख्या की गिनती की जाती है। मान लीजिए हमने एक अनभिनत सिक्का 5 बार उछाला।

यह स्पष्ट है, कि प्रयोग में 5 समान अभिप्रयोगों का अनुक्रम शामिल है। प्रत्येक उछाल के दो संभावित परिणाम है, शीर्ष (सफलता) और पुच्छ (असफलता)। शीर्ष (सफलता) की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है, और एक उछाल से दूसरे उछाल अर्थात कई बार उछालने पर भी इसमें कोई परिवर्तन नहीं होता। पुच्छ (असफलता) की प्रायिकता भी $\frac{1}{2}$ है और इसके प्रायिकता में भी पहले की ही तरह कोई परिवर्तन नहीं होता। अंततः प्रत्येक उछाल दूसरे उछाल से बिल्कुल अलग है, कि एक उछाल का परिणाम, किसी भी तरह से दूसरे उछाल के परिणाम पर निर्भर नहीं करता। अतः हम पाते हैं कि कुछ निश्चित संख्या में सिक्का उछालने का यह प्रयोग और आने वाले शीर्षों की संख्या पर ध्यान देते हुए यह बर्नोली प्रयोग की सभी शर्तों को भलीभांति पूरा करता है।

बर्नोली प्रयोग में हम सफलताओं की दी गई संख्या की प्रायिकता जानने के इच्छुक हैं, जैसें n अभिप्रयोग में उभरने वाले x (जैसे, पिछले उदाहरण में हम 5 उछाल में 3 शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता जानने के इच्छुक थे। अब यह स्पष्ट है कि यादृच्छिक चर X, का मान 0, 1, 2, 3, ... n में से कोई भी हो सकता है। मान लीजिए हम सफलता को S और असफलता को F से दर्शाते हैं। तब x सफलताएं और $(n-x)$ असफलताएं अलग–अलग अनुक्रमों में उभर सकती है। एक संभावित अनुक्रम है, कि पहले वाले x अभिप्रयोग, सभी सफलताएं हैं और बाकी के $(n-x)$ अभिप्रयोग सारी असफलताएं हैं। सांकेतिक रूप से, इस अनुक्रम को ऐसे दर्शाया जाता है।

$$\frac{SS....S}{x \text{ बार}} \times \frac{FF....F}{(n-x) \text{ बार}}$$

x सफलताओं और $(n\text{-}x)$ असफलताओं के उपर्युक्त अनुक्रम की प्रायिकता को, प्रायिकता की गुणन प्रमेय को लागू करके प्राप्त किया जा सकता है। यह प्रायिकता

$$\frac{PP....P}{x \text{ बार}} \times \frac{(1-P)\,(1-P)\,...\,(1-P)}{(n-x) \text{ बार}} = P^x\,(1-P)^{n-x} \text{ है।}$$

लेकिन, जैसाकि हमने ऊपर बताया था, x सफलताएं और $(n\text{-}x)$ असफलताएं, अन्य अनुक्रमों में भी उभर सकती है। लेकिन ऐसा प्रत्येक अनुक्रम जिसमें x सफलताएं और $(n\text{-}x)$ असफलताएं उभरेगी $p^x(1-p)^{n-x}$ की प्रायिकता को प्राप्त करेंगे। अतः n अभिप्रयोगों में x सफलताओं की प्रायिकता, किसी भी संभावित अनुक्रमों में x सफलताओं और $(n-x)$ असफलताओं के घटित होने की प्रायिकता हैं। संभावित क्रमों पर प्रायिकता की योगफल प्रमेय को लागू करके, इस प्रायिकता, प्रत्येक संभावित अनुक्रम के लिए एक जैसी है, तो n अभिप्रयोगों में x सफलताओं की अपेक्षित प्रायिकता, संभावित अनुक्रमों की कुल संख्या और अनुक्रम के घटित होने की प्रायिकता का गुणनफल है। अनुक्रमों की कुल संख्या (जिसमें x सफलताएं और $n-x$ असफलताओं, n अभिप्रयोगों में उभर सकती हैं) मूलरूप से समय में x द्वारा n वस्तुओं के संचय की संख्या प्राप्त करने की समस्या और इसे ${}^nC_x$ द्वारा दर्शाया जाता है। क्रमचय और संचय (permutation and combination) के गणित से हम जानते ही हैं कि :

$${}^nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

जहाँ

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots 2.1$$
$$x! = x(x-1)(x-2) \ldots 2.1$$

और

$$0! = 1.$$

हमें पता होना चाहिए कि चिह्न '!' को क्रमगुणन (factorial) कहते हैं। जैसे 4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24

${}^{n}C_{x}$ में संकेत X संचय को दर्शाता है। जैसे

$${}^{5}C_{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1} = 10$$

अतः nअभिप्रयोगों में x सफलताओं की प्रायिकता

$$p(x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x}(1-p)^{n-x} \text{ है।}$$

जहाँ x = 0, 1, 2, ... n मानों को ले सकता है।

उपर्युक्त व्यंजक द्विपद बंटन के लिए प्रायिकता द्रव्यमान फलन है। इस फलन का प्रयोग सारणी 10.3 में n अभिप्रयोगों में x = 0, 1, 2, ... n सफलताओं के द्विपद बंटन को दर्शाने के लिए किया गया है। यहाँ हम देखते हैं कि द्विपद बंटन के दो प्राचल n और p हैं। इसका अर्थ है कि यदि n और p के मानों का पता हो तो बंटन पूरी तरह से स्पष्ट होता है।

सारणी 10.3 : द्विपद बंटन

सफलताओं की संख्या x	प्रायिकता $p(x)$
0	$(1-p)^{n}$
1	$np(1-p)^{n-1}$
2	$\frac{n(n-1)}{2.1}p^{2}(1-p)^{n-2}$
.	.
.	.
N	p^{n}
कुल	1

आइए अब द्विपद बंटन का माध्य को ज्ञात करें।

मान लीजिए अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता के रूप में द्विपद प्रयोग में p और अभिप्रयोगों की n संख्या है। इसका अर्थ है असफलता की प्रायिकता *(1–p)* है।

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\ {}^{n}C_{x}\, p^{x}(1-p)^{n-x}$$

उपर्युक्त को सरल करने पर हम पाते हैं कि द्विपद बंटन का माध्य, np है। हम उपर्युक्त का प्रमाण अभी प्रस्तुत नहीं कर रहे क्योंकि यह एक लंबा कार्य है।

इसी तरह से द्विपद बंटन का प्रसरण,

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

उपर्युक्त के सरलीकरण से दर्शाया जा सकता है कि द्विपद बंटन का प्रसरण npq होता है [जो np $(1-p)$] के बराबर है।

अतः हम देखते हैं कि द्विपद बंटन का माध्य और प्रसरण, उसके दो प्राचल n और p है। हमने नीचे ऐसे कुछ उदाहरण दिए हैं जो द्विपद बंटन के अनुप्रयोग पर आधारित है।

उदाहरण 10.6

एक मशीन के उत्पादन में आमतौर पर 20 प्रतिशत उत्पाद दोषपूर्ण होता है। गुणवत्ता नियंत्रण इंस्पेक्टर यादृच्छिक रूप से 5 इकाइयों का चयन करता है। (i) 1 दोषपूर्ण इकाई, तथा (ii) कम से कम 3 दोषपूर्ण इकाईयों को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

यह द्विपद बंटन का उदाहरण है जिसमें p = 0.20 और n = 5 है।

आइए इस प्रश्न को हल करें।

i) हमें पता है n इकाई में x दोषपूर्ण इकाईयों (अर्थात, $n-x$ गैर दोषपूर्ण इकाई) की प्रायिकता ${}^nC_x p^x (1-p)^{n-x}$ । यहाँ n= 5 और x= 1 है।

   अतः 1 दोषपूर्ण इकाई की प्रायिकता है

$$p(1) = {}^5C_1 (0.20).(0.80)^4 = 0.4096 .$$

ii) कम से कम 3 दोषपूर्ण इकाईयों का अर्थ है कि यहाँ 3 या 4 या 5 दोषपूर्ण इकाई हो सकते है। अतः कम से कम 3 दोषपूर्ण इकाईयों की प्रायिकता, का अर्थ 3 दोषपूर्ण इकाईयों और 4 दोषपूर्ण इकाईयों और 5 दोषपूर्ण इकाईयों की कुल प्रायिकता है।

   अब, 3 दोषपूर्णइकाईयों की प्रायिकता है

$$p(3) = {}^5C_3 (0.20)^3 (0.80)^2 = 0.0512$$

   4 दोषपूर्णइकाईयों की प्रायिकता है

$$p(4) = {}^5C_4 (0.20)^4 \cdot 0.8 = 0.0064$$

   5 दोषपूर्णइकाईयों की प्रायिकता है

$$P(5) = {}^5c_5 (0.20)^5 = 0.0003$$

इसलिए, कम से कम 3 दोषपूर्ण इकाईयों की प्रायिकता है = $0.0512 + 0.0064 + 0.0003 = 0.0579$.

उदाहरण 10.7

यदि एक अनभिनत सिक्के को 36 बार उछाला जाए तो 6 प्राप्त करने की प्रत्याशित संख्या क्या है? इसका प्रसरण क्या है?

यदि 6 प्राप्त करने की प्रायिकता p है, तब $p = \frac{1}{6}$ और $(1-p) = \frac{5}{6}$

अब, n = 36

गणितीय प्रत्याशा

$$np = 36 \cdot \frac{1}{6} = 6$$

अतः यदि पासे को 36 बार उछाला जाए तो 6 को 6 बार प्राप्त किया जा सकता है। प्रसरण होगा

$$np(1-p) = 36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5$$

10.6 पाइसों बंटन

पाइसों बंटन (Poisson distribution) एक अन्य असतत् प्रायिकता बंटन है। इसका नामकरण फ्रांसीसी गणितज्ञ पाइसों के नाम पर हुआ है जिन्होंने 1837 में इस बंटन को निरूपण किया था। यह बंटन असल में द्विपद बंटन का एक विशेषरूप है। जब द्विपद बंटन में सफलता की प्रायिकता p बहुत कम हो और अभिप्रयोगों की संख्या n, इतनी अधिक है कि प्रत्याशा, $\mu = np$ परिमित परिमाण हो। तो द्विपद बंटन, पाइसों बंटन की ओर प्रवृत होता है। यह बंटन विशेषरूप से समय या समष्टि के निर्धारित अंतराल में किसी वस्तु आदि के घटित होने की संख्या से संबंधित है। जैसे, मान लीजिए विचाराधीन यादृच्छिक चर, 1 घंटे में टेलीफोन स्विच बोर्ड पर आने वाली टेलीफोन कॉलों की संख्या है या 100 किलोमीटर की पाइपलाइन में रिसाव की संख्या है या दिल्ली में किसी निर्धारित दिवस पर होने वाली बस दुर्घटनाओं की संख्या है।

पाइसों बंटन के प्रायिकता द्रव्यमान फलन की प्राप्ति के लिए उदाहरण के रूप में हम एक घंटे में टेलीफोन कॉल x की संख्या पर विचार कर सकते हैं और मान लेते हैं कि प्रति घंटा टेलीफोन कॉलों की प्रत्याशित संख्या (अर्थात गणितीय प्रत्याशा) λ है। द्विपद बंटन लागू करने के लिए हम एक घंटे के अंतराल को उप–अंतरालों में विभाजित करते हैं और जो इतने छोटे हैं कि उप–अंतराल में टेलीफोन कॉल करने की प्रायिकता p भी काफी छोटी (कम) है और जो एक कॉल से अधिक कॉलों की प्राप्ति पर लगभग शून्य है। अतः प्रत्येक उप–अंतराल को बर्नोली अभिप्रयोग के रूप में माना जा सकता है और जिसके केवल दो संभावित परिणाम हैं अर्थात् या तो टेलीफोन काल का आना (सफलता) या टेलीफोन कॉल का न आना (असफलता)। उप–अंतरालों की संख्या को अभिप्रयोगों की कुल संख्या, अर्थात, n के बराबर माना गया है। हम देखते हैं कि टेलीफोन कॉलों की प्रत्याशित संख्या λ वैसी ही रहती है और np के बराबर है (जैसाकि हमने द्विपद बंटन से देखा था)। इसलिए उप–अंतराल में टेलीफोन कॉल की प्रायिकता $\frac{\lambda}{n}$ है। अतः एक घंटे में x टेलीफोन कॉलों की प्रायिकता n अभिप्रयोगों में x सफलताओं की प्रायिकता प्राप्त करने जैसी ही है, (जब n अनंत की ओर प्रवृत हो)। हमने ऊपर तर्क किया था, n अभिप्रयोग, n उप–अन्तरालों के तदनुरूप है जो एक घंटे को पूरा करते हैं। यह प्रत्येक उप–अभिप्रयोग को अत्यंत छोटा बनाने का परिणाम है ताकि अभिप्रयोगों की कुल संख्या, बहुत बड़ी अनंत की ओर प्रवृत हो जाए। यह प्रायिकता, द्विपद बंटन की निम्नलिखित सीमा के रूप में है:

$$\lim_{n \to \infty} {}^{n}C_x \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

आइए उल्लिखित सीमा ज्ञात करने का प्रयास करें।

पाइसों बंटन के प्रायिकता द्रव्यमान फलन उल्लिखित सीमा से मिल सकता है। यह इस प्रकार हैं :

$$p(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$
$$x=0,1,2\cdots$$

जहाँ X यादृच्छिक चर है जो विशिष्ट समय अंतराल या लंबाई अंतराल में सफलताओं की संख्या को दर्शाता है।

λ = समय या लंबाई आदि के अंतराल में घटित होने वालों का प्रत्याशित मान या औसत संख्या है।

e = एक स्थिरांक है (प्राकृतिक लघुगुणक का आधार) जिसका मान e = 2.7182.... है।

सारणी 10.4 : पाइसों बंटन

पाइसों यादृच्छिक चर x का मान	प्रायिकता $p(x)$
0	$e^{-\lambda}$
1	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$
2	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$
.	.
.	.
कुल	1

पाइसों बंटन में, यादृच्छिक चर X (घटनाओं की संख्या की कोई ऊपरी सीमा नहीं है। यह असतत् यादृच्छिक चर है जो (X = 0, 1, 2, 3, ...) मानों के असीम अनुक्रमों को धारण कर सकता है। इस बंटन का केवल एक प्राचल λ है। तालिका 10.4 पाइसों प्रायिकता द्रव्यमान फलन द्वारा जनित पाइसों बंटन को दर्शाती है।

माध्य और प्रसरण

जैसा कि हमने ऊपर देखा, पाइसों बंटन की प्रत्याशा, स्थिरांक λ है। यह दर्शाया जा सकता है कि पाइसों बंटन का प्रसरण भी λ है।

उदाहरण 10.8

एक आंकड़ों का विश्लेषण दर्शाता है कि 15 मिनट के समय में पेट्रोल पंप पर औसत 10 कारें आती हैं। 15 मिनटों में 5 कारें आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 3 मिनटों में 1 कार आने की प्रायिकता क्या है?

यहाँ, λ = 10 और x = 5, अतः अपेक्षित प्रायिकता है

$$p(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0.0378$$

यदि 15 मिनट में कारों के आने की प्रत्याशित संख्या 10 है तब 3 मिनट में कारों के आने की प्रत्याशित संख्या है, $\frac{10}{15} \times 3 = 2$

अतः प्रश्न के दूसरे भाग के लिए, $\lambda = 2$ और $x = 1$ है। इसलिए, 3 मिनट में एक कार आने की प्रायिकता है

$$p(1) = \frac{2e^{-2}}{1!} = 0.2707$$

बोध प्रश्न 2

1) किसी अस्पताल में मरीजों को लाने और ले जाने के लिए 3 एम्बुलेंस हैं। एम्बुलेंस की उपलब्धता की प्रायिकता 0.75 है। यदि किसी एम्बुलेंस की जरूरत पड़ती है तो प्रायिकता क्या है कि

   क) कोई भी एम्बुलेंस उपलब्ध न हो?

   ख) कम से कम एक एम्बुलेंस उपलब्ध हो?

   ....

   ....

   ....

   ....

2) क्या द्विपद बंटन के लिए, माध्य और प्रसरण क्रमशः 3 और 5 हो सकते हैं? बताईए

   ....

   ....

   ....

   ....

3) पिछले अनुभवों से पता चलता है कि किसी मशीन में प्रति माह औसतन 4 औद्योगिक दुर्घटनाएं होती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दिए गए माह में 4 से कम दुर्घटनाएं होंगी। इसे पाइसों बंटन मान कर हल करें।

   ....

   ....

   ....

   ....

10.7 सार संक्षेप

इस इकाई में हमने प्रायिकता बंटन का अर्थ समझने के लिए प्रायिकता की अवधारणा का प्रयोग किया है। हमने गणितीय प्रत्याशा की संकल्पनाओं और प्रायिकता बंटन के प्रसरण को समझा। हमने असतत् प्रायिकता बंटन और सतत् प्रायिकता बंटन के बीच के अंतर को समझा। इस संदर्भ में, हमने प्रायिकता द्रव्यमान फलन और प्रायिकता घनत्व फलन की

अवधारणा को समझा। हमने दो निम्नलिखित विशिष्ट असतत् प्रायिकता बंटनों का अध्ययन किया, द्विपद बंटन और पाइसों बंटन। हमने इन बंटनों (विशेषरूप से इनके माध्य और प्रसरण के व्यंजक की विशेषताओं) का अध्ययन किया। हमने विभिन्न स्थितियों में दोनों बंटनों के प्रयोग को समझने का प्रयास भी किया है।

10.8 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) $p(-2)=\frac{3}{8}, p(-1)=\frac{1}{8},$

$p(0)=0$

$p(1)=0$

$p(2)=\frac{1}{8}$

$p(3)=\frac{3}{8}$

चूंकि x के सभी मानों के लिए $p(x)\geq 0$, अतः पहली शर्त पूरी होती है।

$\sum p(x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+0+0+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=1$; अतः दूसरा शर्त भी पूरी होती है।

इसलिए, दिया गया फलन मान्य प्रायिकता द्रव्यमान फलन है।

2) $k=\frac{4}{5}$

3) A जीत सता है यदिA पहली बार में छह लाता है या A पहली बार में छह नहीं लाता है B दूसरी बार में छह नहीं लाता और A तीसरी बारे में छह लाता है और इसी तरह आगे। इसलिए, प्रायकिता कि A पहले छह लायेगा :

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{6}{11}$$

अतः A का प्रत्याशित लाभ है; $99\cdot\frac{6}{11}=$ Rs. 54

B द्वारा पहले '6' का आंकड़ा पाने की प्रायिकता है $=1-P=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$

अतः B का प्रत्याशित लाभ होगा$99\cdot\frac{5}{11}=$ Rs.45 रूपए

4) 200 रूपए

5) क) $E\ (cX)=E\ (c)E\ (X)=cE\ (X)$ (क्योंकि स्थिरांक की प्रत्याशा स्थिरांक ही है)।

ख) $V(c)=E\left(c^2\right)-[E(c)]^2=c^2-c^2=0$

ग) $V\ (cX) = E\ \left(c^2 X^2\right) - \left[E\ (cX)\right]^2 = c^2 E\ \left(X^2\right) - c^2 \left[E\ (X)\right]^2$

$= c^2 \left[E\ \left(X^2\right) - \left\{E\ (X)\right\}^2\right] = c^2 V\ (X)$

बोध प्रश्न 2

1) क) $\frac{1}{64}$ ख) $\frac{63}{64}$

2) माध्य $np = 3$, प्रसरण $np(1-p) = 5$ अब

$$\frac{np\,(1-p)}{np} = \frac{5}{3}$$

या $1 - p = \frac{5}{3}$

$p = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} < 0$, जो संभव नहीं है।

3) 0.4332

इकाई 11 सतत् प्रायिकता बंटन *

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप;

- प्रसामान्य बंटन की व्याख्या कर सकेंगे और इसके प्रयोग भी कर पाएंगे;
- स्वतंत्रता की कोटि की संकल्पना को समझ सकेंगे; और
- काई–स्कवैयर बंटन, स्टूडैन्ट–'t' बंटन और एफ (F) बंटन के बारे में कुछ मूल विचार समझ पाएंगे।

11.1 विषय प्रवेश

पिछली इकाई में हमने असतत् यादृच्छिक चर और सतत् यादृच्छिक चर के बीच अंतर को समझा था। उस इकाई में हमने, आपको प्रायिकता बंटन की संकल्पना से अवगत कराया था। और हमने पाया कि यह अनिवार्य रूप से यादृच्छिक चर और उससे संबंद्धित प्रायिकताओं के मानों से संबंधित प्रकथन है। उस इकाई में हमने दो महत्वपूर्ण असतत् प्रायिकता बंटनों अर्थात द्विपद बंटन और पाइसों बंटन का अध्ययन किया। इस इकाई में हम इसी विषय को आगे बढ़ाएगें और एक महत्वपूर्ण सतत् प्रायिकता बंटन का अध्ययन करेंगे जिसे हम प्रसामान्य बंटन (normal distribution) कहते हैं। यहां उल्लेख करना आवश्यक है कि सांख्यिकीय अनुमिति और परिकल्पना परीक्षण में प्रसामान्य बंटन की भूमिका अत्यंत महत्वपूर्ण होती है। खंड–7 में हम इसी विषय–वस्तु पर बातचीत जारी रखेंगे। हम इकाई–13 में प्रतिदर्शी बंटन के विषय में विचार करेंग जो सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण के आधार है। इसलिए प्रसामान्य बंटन के साथ–साथ हम अन्य तीन सतत् प्रायिकता बंटनों के बारे में भी कुछ मूल विचारों की चर्चा से हम प्रतिदर्शी बंटन के

---

* डॉ० अनुप चटर्जी (सेवानिवृत) ए.आर.एस.डी. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।

गुणों का अधिक स्पष्ट विवेचन कर पाएंगे। इन तीन सतत् प्रायिकता बंटनों से हमारा अभिप्राय काई–स्कवैयर बंटन, स्टूडैन्ट–'टी' (t) बंटन और एफ (F) बंटन से है। इन प्रायिकता बंटनों के बारे में हम इसी इकाई में चर्चा करेंगे।

11.2 प्रसामान्य बंटन

प्रसामान्य बंटन शायद सांख्यिकी और संबंधित विषयों में सर्वाधिक व्यापक रूप से प्रयुक्त होने वाला बंटन है। इसका प्रयोग व्यक्तियों की लंबाई और भार से संबंधित पूछतांछ करने, आई क्यू (IQ) (बौद्धिक विकास) स्तर निर्धारण करने तथा मापन की त्रुटि और वर्षा आदि के विश्लेषणों में किया जाता है। इब्राहिम दि माइर (Ibrahim de Moivre) ने 1733 में प्रसामान्य बंटन का गणितीय समीकरण दिया था। कार्ल फ्रेडरिच गाउस ने भी अलग से समान परिमाण की पुनरावर्त मापन त्रुटियों के अध्ययन से इसके समीकरण को व्युत्पन्न किया। इसी आधार पर कभी–कभी इसे 'गॉससीय वितरण' के रूप में भी जाना जाता है। गणितीय सांख्यिकी के परवर्ती विकास को इस वितरण ने आधार प्रदान किया है।

हमने पिछली इकाई में देखा कि सतत् यादृच्छिक चर के लिए प्रायिकता द्रव्यमान फलन का प्रतिरूप, **प्रायिकता घनत्व फलन** है। प्रायिकता घनत्व फलन को हम $p(x)$ द्वारा भी सूचित करते हैं। प्रसामान्य बंटन का अनुगमन करने वाले सतत् यादृच्दिक चर का प्रायिकता घनत्व फलन है;

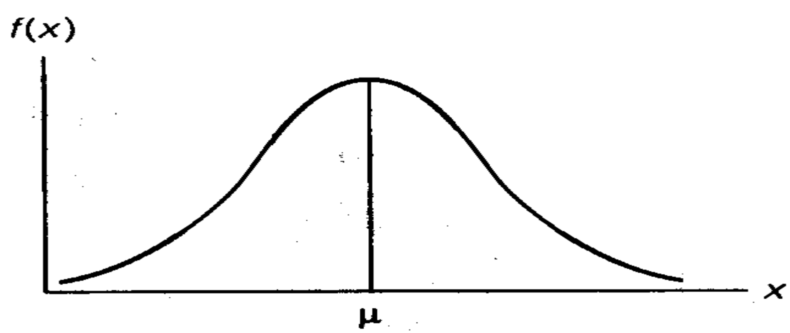
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

where $-\infty < x < \infty$, and

$$\pi = 3.17141 \text{ (सन्निकटतः)}$$

$$e = 2.71828 \text{ (सन्निकटतः)}$$

यह स्पष्ट है कि प्रसामान्य घनत्व फलन पूरी तरह प्राचल μ और σ से निर्धारित किया जाता है। इसका अर्थ है कि यदि μ और σ के मान दिए हैं तो हम x के विभिन्न मानों के लिए $p(x)$ के मानों की प्राप्ति करके प्रसामान्य वक्र का पता लगा सकते हैं। हम यह भी दिखा सकते हैं कि μ और σ क्रमशः प्रसामान्य बंटन के माध्य और मानक विचलन हैं। जब यादृच्छिक चर x माध्य μ और मानक विचलन σवाले प्रसामान्य बंटन का अनुगमन करता है। तो संकेतिक रूप में इसे $X \sim N(\mu, \sigma)$ लिखते हैं और इसे पढ़ते हैं कि 'X' माध्य μ और मानक विचलन σ वाले प्रसामान्य बंटन का अनुगामी है।



चित्र 11.1: प्रसामान्य वक्र

जैसा कि चित्र 11.1 में दर्शाया गया है, प्रसामान्य वक्र सममित घंटाकार वक्र है।

प्रसामान्य बंटन की महत्वपूर्ण विशेषताएं इस प्रकार हैं:

1) प्रसामान्य वक्र का परिसर $-\infty$ से $+\infty$ के बीच का है। इसका अर्थ है कि प्रसामान्य यादृच्छिक चर (X) के मान $-\infty$ से $+\infty$ के बीच के हैं।

2) वक्र अपने माध्य के लिए सममित है अर्थात $\bar{x} = \mu$. इसका अर्थ है कि $x = \mu + a$ और $x = \mu - a$ के संवात में, p(x) के मान समान रहते हैं (किसी भी मनमाने चयनित *'a'* के लिए)।

3. बंटन की माध्यिका (median) और बहुलक (mode) माध्य के साथ संपाती (coin cide) है। अतः माध्य = माध्यिका = बहुलक = μ

4. प्रसामान्य वक्र का अधिकतम भाग $x = \mu$ पर उभरता है। अतः p(x) अधिकतम है जब $x = \mu$

5. प्रसामान्य वक्र के मोड़ बिंदु (points of inflexion), $x = \mu + \sigma$ और $x = \mu - \sigma$ पर उभरते हैं। नतिपरिर्वतन बिंदु पर, प्रसामान्य वक्र अपना वक्राकार बदल लेता है।

निम्नलिखित क्षेत्र–गुणधर्म प्रसामान्य बंटन पर मान्य रहते हैं। नीचे चित्र 11.2 में हमने माध्य $\mu = 50$ और मानक विचलन $\sigma = 4$ वाला प्रसामान्य वक्र खींचा है;

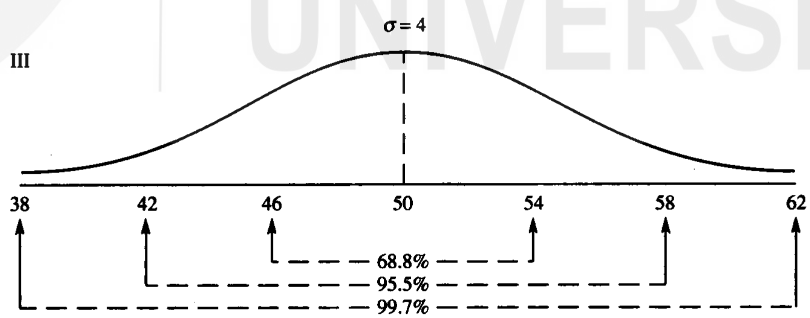
क) प्रसामान्य वक्र के नीचे 68.8% क्षेत्रफल $\mu - \sigma$ और $\mu + \sigma$ कोटियों के बीच निहित है। अतः चित्र 11.2 में जब x का परिसर 46 और 54 के बीच है तो 68.8% क्षेत्र ढ़का हुआ है।

ख) प्रसामान्य वक्र के नीचे 95.5% क्षेत्रफल $\mu - 2\sigma$ और $\mu + 2\sigma$ कोटियों के बीच निहित है। अतः जब $42 \leq x \leq 58$, तब चित्र 11.2 में 95.5% क्षेत्र ढका हुआ है।

ग) प्रसामान्य वक्र के नीचे 99.7% क्षेत्रफल (अर्थात बंटन का लगभग पूरा क्षेत्र)

$\mu - 3\sigma$ और $\mu + 3\sigma$ कोटियों के बीच निहित है।

यदि हमारे पास μ और σ के अलग अलग मान हैं तो चित्र 11.2 में उल्लिखित x की रेंज बदल जायेगी।



चित्र 11.2 : प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल

11.2.1 मानक प्रसामान्य वक्र

हमने पिछले इकाई में देखा कि किसी भी सतत् प्रायिकता बंटन या प्रायिकता घनत्व फलन के लिए वक्र इस प्रकार होना चाहिए कि $x = x_1$ और $x = x_2$ के साथ की दो कोटियों से बद्ध वक्र के नीचे क्षेत्रफल इस प्रकार की प्रायिकता देगा कि यादृच्छिक चर का मान $x = x_1$ और $x = x_2$ के बीच का होगा। अतः प्रसामान्य वक्र के लिए।

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

निस्संदेह यह प्रायिकता दो प्राचलों μ और σ के मानों पर निर्भर करती है। लेकिन, प्रसामान्य बंटन के उपर्युक्त उल्लिखित समाकल (integral) को हल करना बहुत कठिन है। इसी कारण विभिन्न अंतरालों में प्रसामान्य चर के मानों की तत्काल प्रायिकताओं की प्राप्ति के लिए प्रसामान्य वक्र क्षेत्रफल की सारणी बनाना ज़रूरी है। लेकिन μ और σ के मानों के प्रत्येक विचारणीय संयोजन के लिए अलग सारणी निर्मित करना पूरी तरह निरर्थक है। सौभाग्यवश इस जटिलता को हल करने में सांख्यिकी में मानक परिणाम का अनुप्रयोग सार्थक सिद्ध होता है और पिछली इकाई में हमने यह देखा भी और इसे सिद्ध भी किया। आइए अब परिणाम को संक्षेप में दोहराए। हमने देखा कि *दिए गए माध्य और मानक विचलन वाले किसी चर के लिए, जब कभी भी माध्य को चर से घटाया जाता है तो प्राप्त परिणाम को मानक विचलन से विभाजित किया जाता है; तो परिणामी चर का माध्य शून्य के बराबर और मानक विचलन एक के बराबर होता है।*

अतः यदि X, माध्य (प्रत्याशा) μ और मानक विचलन σ वाला चर है तब $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ का माध्य शून्य के बराबर और मानक विचलन एक के बराबर है।

इसका अर्थ है कि μ और σ के विभिन्न संयोजन वाले प्रसामान्य चरों को माध्य 0 और मानक विचलन 1 वाले अनोखे प्रसामान्य चर के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है।

अतः, यदि X माध्य (प्रत्याशा) μ और मानक विचलन σ वाला प्रसामान्य चर है तब μ और σ के किसी भी संयोजन के लिए $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ सदैव 0 माध्य और 1 मानक विचलन वाला प्रसामान्य चर है।

सांकेतिक रूप से, यदि $X \sim N(\mu, \sigma)$

तो किसी भी μ और σ के लिए

$z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ होगा।

ऐसे परिवर्तित प्रसामान्य चर को मानक प्रसामान्य विचर (Standard normal variate) कहते हैं। *मानक प्रसामान्य विचर* z का प्रायिकता घनत्व फलन है;

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < z < \infty$$

एक बार आप मानक प्रसामान्य विचर प्राप्त कर लेने पर μ और σ के विभिन्न संयोजनों के लिए प्रायिकता क्षेत्र प्राप्त करने का जटिल कार्य बहुत ही सरल बन जायेगा। आइए देखें कि यह कैसे होगा। हमें पता होना चाहिए कि मानक प्रसामान्य विचर का अनूठा माध्य 0 और अनूठा मानक विचलन 1 है। इसका अर्थ है कि हम ऐसे अनूठे मानक प्रसामान्य विचर के प्रायिकता क्षेत्रफलों के लिए सारणी बना सकते हैं और माध्य और मानक विचलन के किसी भी संयोजन वाले सामान्य चर की प्रायिकता प्राप्त करने में उसका प्रयोग किया जा सकता है। यहाँ ध्यान रखना चाहिए कि दिए गए प्रसामान्य चर को मानक प्रसामान्य विचर में परिवर्तित किया जाना है। विभिन्न क्षेत्रफलों (या प्रायिकताओं) के लिए ऐसी सारणी को मानक प्रसामान्य विचर के लिए संकलित किया जा चुका है (पुस्तक के अंत में दिया गया

परीशिष्ट सारणी A1 देखें)। मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल हम सांख्यिकी में कितनी ही दशाओं में प्रयोग करते है। अतः कुछ माध्य और मानक विचलन वाले किसी प्रसामान्य चर की अपेक्षित प्रायिकता के परिकलन के लिए, दिए गए अंतराल की ऊपरी और निम्न सीमा (मान लीजिए $x = x_1$ और $x = x_2$) को z-मानों ($z = z_1$ और $z = z_2$) में परिवर्तित कर दिया जाता है। और इस पुस्तक के अंत में दी गई परीशिष्ट सारणी A1 से सुसंगत क्षेत्रफल की प्राप्ति की जाती है।

याद रखिए कि मानक प्रसामान्य वक्र सममित है और इसका क्षेत्रफल 1.0 है। चूंकि z मान का परिसर $-\infty$ और ∞ के बीच का है तो हम पाते हैं, कि $0 < z < \infty$ के बीच क्षेत्रफल 0.5 (अर्थात मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल का आधा) है। इसी तरह, $-\infty < z < 0$ के बीच का क्षेत्रफल 0.5 है। चूंकि मानक प्रसामान्य वक्र सममित है, इसलिए हमें इसका एक फायदा है : वक्र के नीचे क्षेत्रफल दोनों तरफ से समान हैं। परीशिष्ट सारणी A1 में z के अलग–अलग मानों का क्षेत्रफल दिया गया है।

यदि हम परीशिष्ट सारणी A1 के स्तंभ 1 में देखें तो हम पायेंगे कि z के मानों का परिसर 0.0 से 3.0 तक है। हरेक मान के तदनुरूप ऐसे 10 स्तंभ हैं जो .00, .01, ...09 के रूप में हैं। ये स्तंभ दशमलव के बाद के दूसरे अंक को दर्शाते हैं। जैसे यदि $z = 0.45$ है तब हम 0.4 के तदनुरूप वाली पंक्ति को देखेंगे। इस पंक्ति में हम दायें ओर बढ़ेंगे और ऐसे स्तंभ को देखेंगे जो 0.05 को दर्शाता है। परीशिष्ट सारणी A1 में हम पायेंगे कि जब $z = 0.45$ है तब ढ़का हुआ क्षेत्र 0.1736 है। ध्यान दीजिए जब $z = -0.45$, तब मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल दुबारा से 0.1736 है। एक अन्य उदाहरण में, जब $z = 1.31$ है तब मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल 0.4049 है। सैद्धांतिक रूप से $-\infty$ और ∞ के बीच z का कोई भी मान हो सकता है। इसलिए, जब $z = 3.00$ तब ढ़का हुआ क्षेत्र 0.4990 है। इसलिए परीशिष्ट सारणी A1 में $z > 3.00$ के लिए क्षेत्रफल नहीं दिए गए।

आइए अब प्रसामान्य क्षेत्रफल सारणी (normal area table) के अनुप्रयोग के लिए, कुछ उदाहरणों पर विचार करें;

उदाहरण 11.1

मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल वाली तालिका के प्रयोग से निम्नलिखित प्रत्येक मामले में मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

क) $z = 0$ और $z = 1.8$ के बीच

ख) $z = -0.25$ और $z = 0$ के बीच

ग) $z = -0.25$ और $z = 2.25$ के बीच

उत्तर :

क) परीशिष्ट सारणी A1 में आइए z कॉलम के नीचे की तरफ बढ़े जब तक कि हम 1.8 तक न पहुंच जायें। अब दाहिने और 0 के नीचे वाले स्तंभ में देखें। यहाँ हम 0.4641 अंकित पाते हैं। यही आपेक्षित क्षेत्रफल है।

ख) मानक प्रसामान्य वक्र अपने माध्य के संदर्भ में सममित है; तब $z = -0.25$ और $z = 0$ के बीच की आपेक्षित प्रायिकता की प्राप्ति तालिका से $z = 0$ और $z = 0.25$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करके की जा सकती है। आइए अब z लिखे कॉलम के नीचे, नीचे की तरफ 0.2 तक पहुंचने तक बढ़ते रहें। अब हम .05 लिखे स्तंभ के दायें ओर देखते हैं। यहाँ हम 0.0987 के बराबर की प्रविष्टि प्राप्त करते हैं। यह आपेक्षित क्षेत्रफल है।

ग) यह स्पष्ट है कि आपेक्षित क्षेत्र है; ($z = -0.52$ और $z = 0$ के बीच का क्षेत्रफल) + ($z = 0$ और $z = 2.25$ के बीच का क्षेत्रफल)

= ($z = 0$ और $z = 0.52$ के बीच का क्षेत्रफल) (सममिता द्वारा) + ($z = 0$ और $z = 2.25$ के बीच का क्षेत्रफल)

$= 0.1985 + 0.4878 = 0.6863$

उदाहरण 11.2

किसी फैक्टरी में 120 मज़दूरों के प्रतिदर्श में दैनिक मज़दूरी प्राप्त करने का माध्य और मानक विचलन क्रमशः 11.35 रुपए और 3.03 रुपए हैं। फैक्टरी में 9 रु. और 17रु. के बीच की मज़दूरी प्राप्त करने वाले मज़दूरों का प्रतिशत बताइए। मान लीजिए कि मज़दूरी प्रसामान्य बंटित है।

मान लीजिए x मज़दूरी (दर्शाने वाला) यादृच्छिक चर है। तब x एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य $\mu = 11.35$ और मानक विचलन $\sigma = 3.03$ मानक प्रसामान्य विचर है।

$$z = \frac{x - 11.35}{3.03}$$

जब $x = 9,\ z = \frac{9 - 11.35}{3.03} = \frac{-2.35}{3.03} = -0.78$

जब $x = 17,\ z = \frac{17 - 11.35}{3.03} = \frac{5.65}{3.03} = 1.86$

$\therefore\ P(9 \le x \le 17) = P(-0.78 \le z \le 1.86)$

$= P(-0.78 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.86)$

$= P(0 \le z \le 0.78) + P(0 \le z \le 1.86)$

$= 0.2823 + 0.4686$

$= 0.7509.$

अतः 9 रु. और 17 रु. के बीच मज़दूरी पाने वाले 75.09% मज़दूर हैं।

11.2.2 द्विपद बंटन का प्रसामान्य सन्निकटन

कभी–कभी सांख्यिकी में एक बंटन को दूसरे बंटन के सीमित रूप में देखा जाता है। जैसे, इकाई 10 में हमने सीखा कि द्विपद बंटन में सफलता की प्रायिकता, P काफी कम है और अभिप्रयोगों की संख्या n काफी अधिक है तब प्रत्याशा $\mu = np$ परिमित परिमाण हो जाती है। ऐसे मामलों में द्विपद बंटन पाइसो बंटन की ओर प्रवृत है। आपको याद होगा कि द्विपद बंटन और पाइसो बंटन दोनों सतत् बंटन है। लेकिन, आवश्यक नहीं है कि सतत् द्विपद बंटन का सीमित स्वरूप सदाढंग से सतत् पाइसो बंटन ही हो। दरअसल जब n काफी अधिक हो और p, 0 और 1 के बहुत ही निकट न हो तब द्विपद बंटन, सतत् प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करता है। इसी कारण प्रसामान्य बंटन का अक्सर द्विपद बंटन के सन्निकटन प्रयोग किया जाता है।

हम पहले भी देख चुके हैं कि मानक प्रसामान्य सारणी, निश्चित अंतराल के भीतर आने वाले प्रसामान्य चर की प्रायिकता प्राप्त करने में काफी उपयोगी है। अब हम ऐसा परिणाम दे सकते हैं जो यादृच्छिक चर के द्विपद गुणधर्मो को सन्निकट करने के लिए मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे वाले क्षेत्रफल के प्रयोग में हमारे लिए सहायक होगा।

यदि X द्विपद चर है जिसका माध्य $\mu = np$ और प्रसरण $\sigma^2 = npq$ तब

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत है और जिसका माध्य 0 और मानक विचलन 1 है, क्योंकि n अनंत संख्याओं की ओर प्रवृत है।

सांकेतिक रूप से $\lim_{n\to\infty} \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$

यह देखा गया है कि प्रसामान्य बंटन द्विपद बंटन के लिए अच्छा सन्निकटन प्रदान करता है चाहे n की संख्या काफी अधिक न हो और p भी किसी वजह से 0.5 के निकट हो। आइए यहां एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 11.3

मान लीजिए किसी विशेष प्रकार की मशीन के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता 0.4 है। गुणवत्ता नियंत्रण इंस्पैक्टर दोषपूर्ण मशीनों की पहचान करने के लिए ऐसी 15 मशीनों की जांच करता है। प्रायिकता बताइए कि इंस्पैक्टर 4 दोषपूर्ण मशीनों की पहचान कर लेगा।

जैसा कि हम जानते हैं कि इकाई 13 में द्विपद बंटन पर आधारित हमारी चर्चा में, हमने देखा था कि उपलब्ध मशीनों में दोषपूर्ण मशीनों का बंटन द्विपद चर है। यहाँ $n = 15, p = 0.4$ और $q = 1 - p = 0.6$

इसलिए 4 दोषपूर्ण मशीनों की प्रायिकता है।

$^{15}C_4\,(0.4)^4(0.6)^{11} = (0.4)^4(0.6)^{11} = 1365 \times 0.0256 \times 0.0036279 = 0.1268$

अब मान लीजिए, हम प्रसामान्य सन्निकटन द्वारा अपेक्षित प्रायिकता ज्ञात करना चाहते हैं।

तब

$np = 15\times0.4 = 6,\ npq = np(1-p) = 15 \times 0.4 \times 0.6 = 3.6$ और $\sqrt{npq} = \sqrt{3.6} = 1.897$

यहाँ

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

जो सन्निकटतः मानक प्रसामान्य चर है। लेकिन मानक प्रसामान्य विचर सतत् यादृच्छिक चर है, हम जानते हैं कि ऐसे यादृच्छिक चर के लिए कि यह किसी विशिष्ट मान को ले, इसकी प्रायिकता का निर्धारण नहीं किया जा सकता। केवल अंतराल के भीतर वाले यादृच्छिक चर की प्रायिकता की प्राप्ति की जा सकती है। अतः इसकी प्रायिकता कि द्विपद चर का मान 4 हो इसे अपेक्षित असामान्य सन्निकटन के लिए, ऐसे प्रसामान्य चर की प्रायिकता में परिवर्तित करना होगा जो मान 4 के आसपास के अंतराल में है। चूंकि द्विपद चर शून्य और धनात्मक पूर्णांक है। इसलिए 4 से तुरंत पहले का मान और 4 के तुरंत आगे का मान जोकि विचाराधीन द्विपद चर ले सकता है, क्रमशः 3 और 5 है। जिसके फलस्वरूप मान 4 के बराबर का मान लेने वाले द्विपद चर की प्रायिकता को तार्किक रूप से अंतराल (3.5, 4.5) के बीच आने वाले प्रसामान्य चर की प्रायिकता के सन्निकट किया जा सकता है। तब अपेक्षित प्रायिकता $x_1 = 3.5$ और $x_2 = 4.5$ कोटियों के बीच के प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल के सन्निकटतः बराबर होगी। यदि z- मानों को संसोधित किया जाए तो प्राप्त होगा।

$$z_1 = \frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3.5 - 6}{1.897} = -1.32$$

और

$$z_2 = \frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4.5 - 6}{1.897} = -0.79.$$

यदि X द्विपद चर है और z मानक प्रसामान्य विचर, तब

$P(X = 4) = P(-1.32 \leq z \leq -0.79) = 0.1214$ (मानक प्रसामान्य सारणी A1 से प्राप्त)

हम देख सकते हैं कि 0.1214 का प्रसामान्य सन्निकटन, द्विपद बंटन से प्राप्त 4 दोषपूर्ण मशीनों के लिए 0.1268 की वास्तविक प्रायिकता के काफी निकट है।

बोध प्रश्न 1

1. निम्नलिखित स्थितियों में प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   क) $z = 1.55$ और $z = 2.55$ के बीच
   ख) $z = -1.5$ के बायें तरफ
   ग) $z = 2.5$ के दायें तरफ

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. 1000 पुरुषों की माध्य ऊँचाई 68 इंच और मानक विचलन 5 इंच है। यदि ऊँचाई प्रसामान्य रूप से बंटित है तो बताइए कि कितने पुरुषों की ऊँचाई 67 इंच और 69 इंच के बीच है?

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. एक कंपनी एक वर्ष में 5,000 बैटरियों की बिक्री करती है और इन बैटरियों की 24 महीनों की गॉरंटी है। यदि बैटरियों की जीवन अवधि (life span) 34 महीनों के बराबर के प्रसामान्य माध्य और 5 महीनों के बराबर के मानक विचलन के संन्निकटतः प्रसामान्य रूप से आकलित है। तो ऐसी बैटरियों की संख्या बताइए जिन्हें गॉरंटी की समयावधि के दौरान बदला जाना है।

   ....
   ....
   ....
   ....

11.3 कुछ अन्य सतत् बंटन

कुछ ऐसे अन्य सतत् प्रायिकता बंटन भी हैं जिनका सांख्यिकी की विविध शाखाओं में विशेष महत्व है। खंड 4 में हम सांख्यिकीय अनुमितियों का अध्ययन करेंगे। इस खंड में हम प्रसामान्य बंटन के अलावा, बहुधा तीन अन्य सतत् बंटनों की संकल्पनाओं का भी प्रयोग करेंगे। जो हैं; काई स्क्वैयर (χ^2) **बंटन**, स्टूडैन्ट–'टी' बंटन, और एफ (F) बंटन। इस अनुभाग में हम इन बंटनों की संक्षेप में चर्चा करेंगे। सर्वप्रथम हम स्वतंत्रता की कोटि अर्थात इसकी सामान्य संकल्पना पर नज़र डालेंगे क्योंकि उपर्युक्त सभी बंटनों में इसका प्रयोग किया जाता है।

11.3.1 स्वतंत्रता की कोटि

उपर्युक्त लिखित बंटनों के संदर्भ में बहुधा हम स्वतंत्रता की कोटि (Degrees of Freedom)नामक शब्द को पढ़ते हैं। आइए शब्द को समझने का प्रयास करें। सामान्य शब्दों में *स्वतंत्रता की कोटि का अर्थ अलग–अलग प्रकार* की स्वतंत्र सूचना से है जिससे किसी प्रेक्षणों के समुच्चय की कुछ विशेषता (जैसे, प्रसरण) को परिकलित करना है। यहाँ हम एकउदाहरण पर विचार करेंगे।

आइए 5 प्रेक्षणः 4, 7, 12, 3 और 15 पर गौर करें। समांतर माध्य $\bar{X}$, 8 है। प्रसरण के परिकलन में माध्य से प्रेक्षणों के वर्गों का योगफल प्रयोग किया जाता है :

$(4–8)^2 + (7–8)^2 + (12–8)^2 = (3–8)^2 + (14–8)^2$

$= (-4)^2 + (–1)^2 + (4)^2 + (–5)^2 + (6)^2$

समांतर माध्य ($\bar{X}$) के विशेषता से, हम जानते हैं कि कोष्ठकों के भीतर के मानों का योगफल शून्य के बराबर होना चाहिए अर्थात सामान्य रूप में $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}) = 0.$ इसका अर्थ है कि प्रसरण के परिकलन में, यदि कोष्ठकों के भीतर पहले चार पद, क्रमशः –4, –1, 4 और –5 है तो पाँचवां पद कुछ और नहीं बल्कि 6 ही होगा। अतः इस उदाहरण में, कोष्ठकों के भीतर हमारे पास पांच अलग–अलग सूचनाएं नहीं हैं। कोष्ठक के भीतर पांचवी सूचना अर्थात '6' अपने से संबंधित कोष्ठकों के भीतर की पहली चार सूचनाओं पर आधारित है।

यदि इसका और विस्तार करें तो हम ऐसे व्यक्ति के बारे में सोच सकते हैं जिसे किसी एक प्रेक्षण की जानकारी नहीं है। उसे केवल इतना ही बताया गया है कि कुल 5 प्रेक्षण हैं और पांच प्रेक्षणों के माध्य से प्राप्त मानों के पहले 4 विचलन हैं क्रमशः –4, –1, 4 और –5 अब उसे 5 प्रेक्षणों के प्रसरण को परिकलित करने को कहा जाता है। यदि वह नियम जानता है कि चर के मानों के विचलन का योगफल जो उनके समांतर माध्य से प्राप्त होता है, सदैव शून्य के बराबर होता है तो वह 5वें मान के विचलन को उसके समांतर माध्य से प्राप्त करके 6 बताएंगा। इसके बाद वह इन विचलनों के वर्गमूल प्राप्त करके उन्हें जोड़ देगी और यही अपेक्षित प्रसरण के परिकलन का अंतिम चरण है। अंतिम चरण में उनके समांतर माध्य के लिए मानों के औसत परिक्षेपण के अनुमान लगाने के लिए इन्हें प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करना होता है। (यहाँ अपेक्षित माप के रूप में हम प्रसरण को लेते हैं) ऐसा सन्निकट मान कौन सा है जिसे, उसे प्रेक्षणों की संख्या के लिए लेना चाहिए? क्या यह 5 है? आइए इस पर गौर करें। हमने देखा कि पांचवां विचलन, पहले चार विचलनों से निर्धारित किया जाता है जिसका अर्थ है, कि ऐसी पांच विभिन्न सूचनाएं हैं, जो उनके समांतर माध्य के लिए, दिए गए पांच मानों का परिक्षेपण बनाती हैं। इसलिए

औसत परिक्षेपण अर्थात प्रसरण का पता लगाने के लिए, पांच विचलनों के वर्गमूल के योग को 5 की बजाए 4 से विभाजित करना चाहिए। अतः इस उदाहरण में स्वतंत्रता की कोटि 4 है। यदि हम उपर्युक्त उदाहरण को n प्रेक्षणों के प्रसरण की प्राप्ति के लिए व्यापक करें तो $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X}) = 0.$ प्रतिबंध के कारण यहाँ n–1 स्वतंत्रता की कोटियाँ हैं। जिसके परिणाम स्वरूप, प्रसरण के लिए $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2$ को n–1 से विभाजित किया जाता है अर्थात $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{X})^2$, जहाँ, S^2 प्रसरण है।

उपर्युक्त चर्चा से हम कह सकते हैं कि किसी भी लक्षण के परिकलन से संबंधित हमें प्राप्त स्वतंत्रता की कोटियाँ, ऐसी संख्या के बराबर है, जो हमें (प्रेक्षणों की संख्या – अपेक्षित अभिलक्षण के परिकलन के लिए लगाई गई प्रतिबंधों की संख्या) प्राप्त करके मिलती है। सांकेतिक रूप से $d.f. = n - r$ जहाँ $d.f.$ स्वतंत्रता की कोटि है, n प्रेक्षणों की संख्या है और r प्रतिबंधों की संख्या है।

हमें यहाँ ध्यान देना चाहिए कि जब प्रसरण या इसके धनात्मक वर्गमूल, अर्थात मानक विचलन के परिकलन के लिए उपलब्ध प्रेक्षणों की संख्या बहुत बड़ी होतब हम n–1 की बजाए, बहुधा n से $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2$ को विभाजित करते हैं। लेकिन, कड़े शब्दों में हमें n–1 से $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2$ को विभाजित करना चाहिए विशेषरूप से जब n छोटा हो।

11.3.2 χ^2 (काई–स्क्वैयर) बंटन

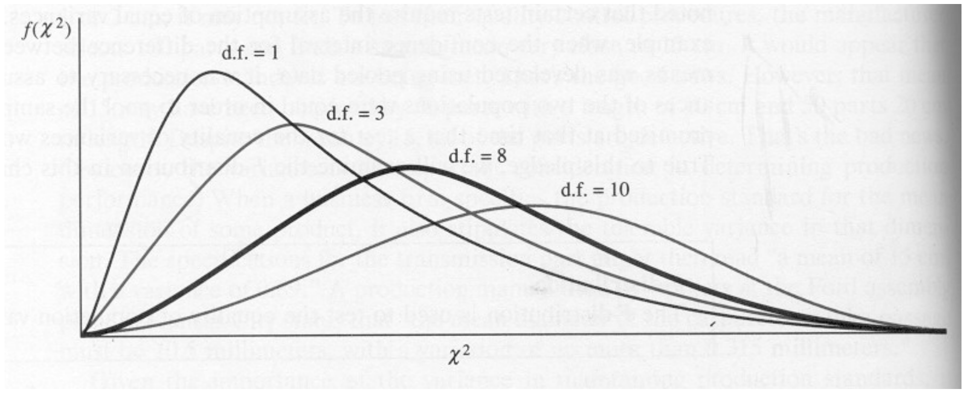
मान लीजिए, X प्रसामान्य चर है जिसकी माध्य (प्रत्याशा) μ और मानक विचलन σ है, तब $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ मानक प्रसामान्य विचर अर्थात $z \sim N(0,1)$ है। यदि हम z का वर्ग करें अर्थात $z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$, तब z^2 ऐसे x^2 चर के रूप में बंटित है जिसकी स्वतंत्रता की कोटि 1 है और इसे $\chi_1{}^2$ के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

यह स्पष्ट है कि चूंकि $\chi_1{}^2$ वर्गित पद है; अतः $-\infty < z < -\infty$ के लिए χ^2 का मान 0 तथा ∞ के बीच रहेगा (क्योंकि वर्गित पद के नकारात्मक मान नहीं हो सकते)। आगे, चूंकि z का माध्य, 0 के बराबर है इसलिए z के अधिकतम मान 0 के सन्निकट होंगे। जिसके परिणामस्वरूप χ^2 चर के अधिकाधिक प्रायिकता घनत्व शून्य के निकट हो।

उपर्युक्त परिणाम को यदि सामान्य रूप में दें तो यदि $z_1, z_2, \ldots.., z_k$ स्वतंत्र मानक प्रसामान्य विचर (अर्थात 0 माध्य और 1 प्रसरण वाले प्रसामान्य चर हैं) तब

$$z = \sum_{i=1}^{ki} z_1^2$$

z = ऐसा χ^2 चर है जिसकी स्वतंत्रता की कोटि k है और जिसे χ_k^2 द्वारा सूचित किया जाता है। चित्र 11.3 विभिन्न स्वतंत्रता की कोटि वाले χ^2 चरों के लिए प्रायिकता वक्रों को दर्शाता है।



चित्र 11.3: काई स्क्वैयर प्रायिकता वक्र

हमें x^2 बंटन की निम्नलिखित विशेषताओं को ध्यान में रखना चाहिए।

1. जैसा कि चित्र 11.3 दर्शाता है, χ^2 धनात्मक विषम बंटन है। इसकी विषमता (तिरछेपन) की कोटि, इसकी स्वतंत्रता की कोटियों पर निर्भर करती है। निम्न स्वतंत्रता की कोटियों के लिए बंटन काफी विषम है। स्वतंत्रता की कोटियों की संख्या जैसे–जैसे बढ़ती जाती है, बंटन भी धीरे धीरे सममित होता चला जाता है। असल में, 100 से अधिक स्वतंत्रता की कोटियों के लिए, $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{(2k-1)}$ चर को मानक प्रसामान्य विचर के रूप में देखा जा सकता है जहाँ k स्वतंत्रता की कोटि है।

2. काई–स्क्वैयर बंटन का माध्य k है और इसका प्रसरण $2k$ है जहाँ k स्वतंत्रता की कोटि है।

3. यदि Z_1 और Z_2 दो स्वतंत्र काई–स्क्वैयर बंटन हैं जिनकी स्वतंत्रता की कोटि क्रमशः k_1 और k_2 है, तब $Z_1 + Z_2$ भी काई–स्क्वैयर चर है जिसकी स्वतंत्रता की कोटि $k_1 + k_2$ के बराबर हैं।

प्रसामान्य बंटन के मामले की भांति x^2 बंटन के लिए भी इसी तरह की सारणी बनाई गई है (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A2 देखें)। हमें स्वतंत्रता की विभिन्न कोटि के लिए, x^2 चर की अपेक्षित प्रायिकता की प्राप्ति के लिए इस तालिका को सिर्फ देखना होता है।

परीशिष्ट सारणी A2 में df स्वतंत्रता की कोटियों को दर्शाता है। जबकि स्तंभ $\chi^2_{0.05}$ और $\chi^2_{0.01}$ क्रमशः 5% और 1% (सार्थकता के लिए) χ^2 मानों को सूचित करता है। सार्थकता के स्तर की संकल्पना का वर्णन हम इकाई 14 में करेंगे।

निम्नलिखित उदाहरण, काई–स्क्वैयर सारणी के प्रयोग को दर्शाता है।

उदाहरण 11.4

34 या अधिक के χ^2 मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी यदि स्वतंत्रता की कोटि 25 है?

परीशिष्ट सारणी A2 से हम देख सकते हैं कि यदि हम 25 के अंक तक पहुंचने के लिए स्वतंत्रता की कोटि कॉलम में नीचे की ओर जाते हैं तो 34 से निकटतम अंक, वहाँ 34.08747 है और 34.08704 की प्रायिकता 0.10 है। अतः अपेक्षित प्रायिकता 0.10 है।

11.3.3 स्टूडैन्ट–'टी' बंटन

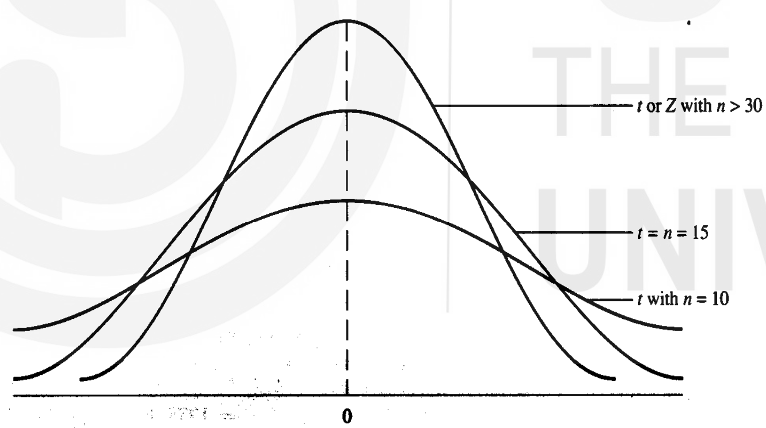
डब्ल्यू. एस. गौसेट (W.S. Gosset) ने टी–बंटन की प्रस्तुति की। यह एक रोचक कहानी है कि गौसेट, आयरलैंड में किसी ब्रीवरी में कर्मचारी थे और कंपनी के नियम के अनुसार कोई भी कर्मचारी अपने शोध परिणामों को अपने नाम से प्रकाशित नहीं कर सकता था। तब गौसेट ने उपनाम 'स्टूडैंट' को अपनाया और इस बंटन के बारे में अपने अध्ययन पर आधारित परिणामों को इस नाम के से प्रकाशित कराया। तभी से इस बंटन को स्टूडैंट–टी बंटन या सरल रूप में टी (t) बंटन के नाम से जाना जाता है।

यदि z_1 मानक प्रसामान्य विचर अर्थात $z_1 \sim N(0, 1)$ है और z_2 अन्य स्वतंत्र प्रसामान्य विचर है जो ऐसे काई स्क्वैयर बंटन का अनुगमन करता है जिसकी k (स्वतंत्रता की कोटि) है अर्थात $z_2 \sim X_k^2$, तब चर

$$t = \frac{z_1}{\sqrt{(z_2/k)}} = \frac{z_1\sqrt{k}}{\sqrt{z_2}}$$

k कोटि बंटन वाले स्टूडैंट–टी बंटन का अनुगामी है।

अलग–अलग स्वतंत्रता की कोटि वाले स्टूडैंट–टी बंटन से संबंधित प्रायिकता वक्रों को चित्र 11.4 में दर्शाया गया है;



चित्र 11.4: स्टूडैन्ट–टी प्रायिकता वक्र

इस बंटन की मुख्य विशेषताएं हैं;

1) जैसा कि चित्र 11.4 में हम देख सकते हैं प्रसामान्य बंटन की भांति ही, स्टूडैन्ट–टी बंटन भी सममित है और इसके विचरण का परिसर भी $-\infty$ से $+\infty$ के बीच का ही है; लेकिन प्रसामान्य बंटन की तुलना में यह अधिक सपाट है। हमें यहाँ ध्यान देना चाहिए कि जैसे जैसे स्वतंत्रता की कोटि बढ़ोत्तरी बढ़ेगी वैसे–वैसे स्टूडैन्ट–'टी' बंटन प्रसामान्य बंटन का अनुगमन करेगा।

2) स्टूडैन्ट–'टी' बंटन का माध्य शून्य है और इसका प्रसरण $\frac{k}{(k-2)}$ है जहाँ k स्वतंत्रता की कोटि है।

प्रसामान्य बंटन की भांति, स्टूडैन्ट–टी बंटन का भी प्रयोग बहुधा सांख्यिकीय अनुमितियों और परिकल्पना–परीक्षण के लिए किया जाता है। इस कार्य में इसके धनत्व फलन का समाकलन शामिल है और जो एक लंबा कार्य है। जिसके फलस्वरूप इस मामले में भी, प्रसामान्य बंटन की भांति, संदर्भ तालिकाएं निर्मित की गई है (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A3 देखें)। इस सारणी का प्रयोग सीखने के लिए अब हम एक उदाहरण पर विचार करेंगे;

उदाहरण 11.5

यदि स्वतंत्रता की कोटि 10 के बराबर है तो (i) 2.764 या अधिक (ii) –2.764 या निम्न के t मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर

i) स्टूडैंट–टी बंटन वाली परीशिष्ट सारणी A3 में, हम स्वतंत्रता की कोटि वाले कॉलम में नीचे की ओर जाते हैं और 10 के अंक तक पहुंचते हैं तब साथ वाली पंक्ति में 2.764 के अंक का पता लगाते हैं। 0.01 वाला निम्न प्रायिकता अंक, आपेक्षित प्रायिकता है।

ii) चूंकि स्टूडैंट– टी बंटन सममित है, इसलिए –2.764 या इससे कम का t मान प्राप्त करने की प्रायिकता भी 0.01 है।

11.3.4 एफ (F) बंटन

इस इकाई में अंतिम सतत्प्रायिकता बंटन जिस पर अब हम विचार करेंगे, वह F बंटन है।

यदि z_1 और z_2 दो काई–स्क्वैयर चर हैं और जो स्वतंत्रता की कोटि क्रमशः k_1 और k_2 से स्वतंत्र रूप से बंटित हैं, तब चर

$$F = \frac{z_1/k_1}{z_2/k_2}$$

F बंटन का अनुगमन करता है जिसकी स्वतंत्रता की कोटि क्रमशः k_1 और k_2 है। चर को $F_{k1,k2}$ से सूचित किया जाता है जहाँ पादांक k_1 और k_2 काई–स्क्वैयर चरों से संबंद्ध स्वतंत्रता की कोटि हैं।

यहाँ हम देखते हैं कि k_1 अंश स्वतंत्रता की कोटि है और इसी तरह k_2 हर स्वतंत्रता की कोटि है।

F बंटन के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मो का उल्लेख इस प्रकार है;

1. काई–स्क्वैयर बंटन की भांति, F बंटन भी दायें ओर विषम है। लेकिन जैसे–जैसे k_1 और k_2 बढ़ते हैं, F बंटन, प्रसामान्य बंटन का अनुगामी बन जाता है।

2. F बंटन का माध्य k_1 $(k_2 - 2)$ है जो $k_2 > 2$ के लिए परिभाषित है और इसका प्रसरण $\frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)}$ है जो $k_2 > 4$ के लिए परिभाषित है।

3. ऐसा F बंटन जिसकी अंश और हर स्वतंत्रता की कोटि क्रमशः I और k है, स्टूडैंटी–टी बंटन का वर्ग है और जिसकी स्वतंत्रता की कोटि k है। सांकेतिक रूप से, $F_{1,k} = t_k^2$

4. बड़े हर वाली स्वतंत्रता की कोटि k_2 के लिए स्वतंत्रता की कोटि k_1 के अंश और F मान का गुणनफल सन्निकटतः ऐसे काई–स्क्वैयर मान के बराबर होगा जिसकी स्वतंत्रता की कोटि k_1 अर्थात $k_1 F = \chi^2_{k_1}$. है।

जैसा कि अन्य संतत प्रायिकता बंटनों के संदर्भ में हमने उल्लेख किया था, F बंटन का भी सांख्यिकीय अनुमितियों और परिकल्पना परीक्षणों में विस्तृत प्रयोग किया जाता है और ऐसे प्रयोगों के लिए, F प्रायिकता वक्र के नीचे क्षेत्रफल प्राप्त करने की और इसके बाद F घनत्व फलन के समाकलन की आवश्यकता पड़ती है। लेकिन इस स्थिति में भी F सारणी के होने से से हमारा कार्य आसान बन जाता है (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A4 देखें)।

11.3.5 प्रसामान्य बंटन से संबंधित बंटन

हम काई–स्क्वैयर, स्टूडैन्ट–टी बंटन और एफ (F) बंटनों की विशेताओं को पहले ही समझ चुके हैं कि अधिक संख्या वाली स्वतंत्रता की कोटि के लिए, ये बंटन, प्रसामान्य बंटन के अनुगामी हैं। जिसके फलस्वरूप, इन बंटनों को प्रसामान्य बंटन से संबंधित बंटनों के रूप में भी देखा जाता है। एक तरफ काई–स्क्वैयर बंटन, स्टूडैंटी–टी बंटन और F बंटन के बीच का यह संबंध और दूसरी तरफ प्रसामान्य बंटन अर्थात इनके महत्वपूर्ण व्यावहारिक निहितार्थ हैं। जब स्वतंत्रता की कोटि अधिक होती है तो हम प्रायः काई–स्क्वैयर बंटन या स्टूडैंटी–टी बंटन या F बंटन का अलग से प्रयोग करने के बजाए, प्रसामान्य बंटन का प्रयोग कर सकते हैं।इससे कार्य अपेक्षाकृत सरल हो जाता है।

बोध प्रश्न 2

1. 8 या अधिक वाले x^2 मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है, यदि स्वतंत्रता की कोटि 20 है?

....

....

....

....

....

2. यदि स्वतंत्रता की कोटि 25 के बराबर है तो 1.708 या अधिक का t मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

....

....

....

....

....

3. यदि $k_1 = 10$ और $k_2 = 8$ है तो 5.8 या अधिक का F मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

....

....

....

....

11.4 सार संक्षेप

इस इकाई में हमने कुछ सतत् प्रायिकता बंटनों का अध्ययन किया। इन बंटनों में से प्रसामान्य बंटन को सर्वाधिक महत्वपूर्ण माना गया है। हमने इसकी विशेषताओं का अध्ययन किया और इसके व्यावहारिक निहितार्थों को देखा। हमने मानक प्रसामान्य विचर की महत्वपूर्ण संकल्पना पर विचार किया। हमने प्रसामान्य बंटन से संबंधित समस्याओं के समाधान के लिए मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफलों को ज्ञात करने के लिए सारणी का प्रयोग सीखा। प्रसामान्य बंटन के अतिरिक्त हमने तीन अन्य सतत् प्रायिकता बंटनों पर भी विचार किया। जैसे, काई–स्क्वैयर बंटन, स्टूडैंटी–t बंटन और f बंटन। इन तीनों बंटनों में, स्वतंत्रता की कोटि का प्रयोग शामिल है। इसलिए हमने स्वतंत्रता की कोटि की संकल्पना को समझाया है। हमने इन बंटनों की विशेषताओं का अध्ययन किया और देखा कि इन बंटनों से संबंधित सारणियों के प्रयोग से कैसे विभिन्न स्थितियों में इन बंटनों को लागू किया जा सकता है। अंत में हमने देखा, कि जब स्वतंत्रता की कोटि काफी अधिक हो, तो ये तीनों बंटन प्रसामान्य बंटन के अनुगामी बन जाते हैं।

11.5 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

1. क) 0.0552
   ख) 0.0668
   ग) 0.0062

2. 67 इंच और 69 इंच की बीच की ऊँचाई वाले पुरुषों का समानुपात है 0.1586 इसलिए 67 इंच और 69 इंच के बीच की ऊचाई वाले पुरुषों की संख्या है

   $= 1000 \times 0.1586 = 159$ (लगभग)

3. $z = \dfrac{24-34}{5} = -2$

मानक प्रसामान्य सारणी से, $z = 0$ और $z = 2$ के बीच का क्षेत्रफल 0.4772 है। इसलिए, $z=0$ और $z = -2$ के बीच का क्षेत्रफल 0.4772 है (क्योंकि मानक प्रसामान्य बंटन सममित है)। जिन बैटरियों को बदला जाना है, उनकी संख्या का पता लगाने के लिए, हमें $z=2$ के बायें ओर का क्षेत्रफल जो $z=2$ के दायें ओर का क्षेत्रफल है, पर विचार करना होगा। अब, $z=2$ के दायें ओर का क्षेत्रफल 0.5 – 0.4772 $= 0.0228$ है। इसलिए दोषपूर्ण बैटरी होने की प्रायिकता 0.0228 है। अतः 5000 बैटरियों में से जिन बैटरियों को बदला जाना है, उनकी संख्या होगी $= 0.0228 \times 5000 = 114$

बोध प्रश्न 2

1. 0.99
2. 0.05
3. 0.01