# इकाई 12 प्रतिचयन की क्रियाविधि*

इकाई की रूपरेखा


12.0 उद्देश्य

12.1 विषय प्रवेश

12.2 प्रतिचयन प्रक्रिया

12.3 प्रचियन का प्रकार

12.3.1 प्रायिकता प्रतिचयन

12.3.2 गैर–प्रायिकता प्रतिचयन

12.3.3 मिश्रित प्रतिचयन

12.4 सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन

12.4.1 लॉटरी/प्रचय विधि

12.4.2 यादृच्छिक संख्या चयन विधि

12.4.3 यादृच्छिक संख्या सारणी के प्रयोग संबंधी चरण

12.4.4 सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के उपादेयता

12.4.5 सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श की सीमाएं

12.5 क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन

12.5.1 क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन के उपादेयता

12.5.2 क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन की सीमाएं

12.6 स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन

12.6.1 समानुपातिक स्तरित प्रतिचयन

12.6.2 असमानुपातिक स्तरित प्रतिचयन

12.6.3 स्तरित प्रतिचयन के उपादेयता

12.6.4 स्तरित प्रतिचयन की सीमाएं

12.7 गुच्छ प्रतिदर्श का चयन

12.7.1 गुच्छ प्रतिचयन के चरण

12.7.2 गुच्छ प्रतिचयन के उपादेयता

12.7.3 गुच्छ प्रतिचयन की सीमाएं

12.8 बहुचरणी प्रतिचयन

12.9 गैर–प्रायिकता प्रतिचयन की क्रियाविधियाँ

12.9.1 सुविधाजनक प्रतिचयन

12.9.2 ऐच्छिक प्रतिचयन

12.9.3 कोटा/नियतमात्रात्मक प्रतिचयन

12.9.4 तुषारपिंडीय प्रतिचयन

12.10 प्रतिदर्श आमाप का निर्धारण

12.11 सार संक्षेप

12.12 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत


---


* प्रो॰ सी.जी. नायडू (सेवानिवृत) इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।

## 12.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- प्रतिदर्श की विविध विधियों का वर्णन कर सकेंगे;
- प्रतिदर्श के लिए यादृच्छिक संख्या सारणियों का प्रयोग कर सकेंगे; और
- प्रतिदर्श आमाप का निर्धारण कर सकेंगे।

## 12.1 विषय प्रवेश

इकाई 2 में आपने प्राथमिक और द्वितीयक आंकड़ों के बारे में अध्ययन किया। उस इकाई में हमने प्राथमिक आंकड़ें इकट्ठा करते समय प्रत्यक्ष साक्षात्कार, टेलीफोन सर्वेक्षण, डाक संबंधी सर्वेक्षण जैसी विविध सर्वेक्षण तकनीकों के प्रयोग के बारे में भी चर्चा की थी। इकाई 16 में आपने प्रतिचयन (sampling) के अर्थ, प्रतिचयन के लाभ और प्रतिचयन त्रुटि जैसी बातों की भी जानकारी प्राप्त की थी।

सांख्यिकी में, अक्सर समष्टि के बारे में निष्कर्ष निकालने के लिए हम प्रतिदर्श (sample) पर निर्भर करते हैं। जैसे, आगामी चुनावों में आप दिल्ली वासियों के मतदान संबंधी व्यवहार के बारे में जानना चाहते है। इस बारे में, आप किससे पूछताछ करेंगे? निस्संदेह, दिल्ली के हरेकवासी को पूछना कि वह किसे वोट देगा/देगी, संभव नहीं है। बजाय इसके, आप दिल्ली के मतदाताओं के छोटे से समूह से इस बारे में बातचीत करके, उनकी प्रतिक्रिया को ध्यान में रखकर समूची दिल्ली के बारे में अपना निष्कर्ष प्राप्त कर सकते हैं। इस मामले में दिल्ली के कुल मतदाता ऐसी समष्टि है और प्रतिदर्श के रूप में हमने उन मतदाताओं को रखा है, जिनसे असल में हमने बातचीत की थी।

आदर्श रूप से प्रतिदर्श में उस समष्टि की विशेषताएं प्रतिबिंबित होनी चाहिए, जिसमें से उसे लिया गया हैं ऐसे मामलों में, प्रतिदर्श से प्राप्त निष्कर्ष, उससे संबंधित पूरे समष्टि पर लागू किए जा सकते है।

इस इकाई में आप सीखेंगे कि समष्टि की विभिन्न विशेषताओं के अंतर्गत प्रतिदर्श किस प्रकार सृजित किए जाते हैं और प्रतिदर्श आमाप (sample size) का निर्धारण किस प्रकार किया जाता है।

## 12.2 प्रतिचयन प्रक्रिया

प्रतिदर्श सर्वेक्षण करते समय, प्रतिचयन प्रक्रिया निर्धारित करती है कि सर्वेक्षण में प्रतिचयन संबंधी कौन सी इकाइयों को शामिल किया जाएगा। संग्रहित नमूने आंकड़ों को अधिक प्रबंन्ध और लागत धार्य बनाते हैं। ये प्रतिदर्श के आधार पर समष्टि की विशेषताओं को इस योग्य बनाते हे कि इससे प्राप्त निष्कर्षों में कम से कम त्रुटियाँ नज़र आएं। प्रतिचयन प्रक्रिया में प्रतिदर्शदायक समष्टि की परिभाषा, प्रतिचयन समूह की पहचान, प्रतिचयन विधि का चयन और प्रतिचयन इकाइयों का चयन शामिल है।

1) **सर्वेक्षण का उद्देश्य** : प्रतिदर्श सर्वेक्षण में सर्वप्रथम विशिष्ट उद्देश्यों पर ध्यान केंद्रित होता है। हमें सर्वेक्षण के उद्देश्यों का स्पष्ट पता होना चाहिए, क्योंकि बाकी के सभी चरणों की रूपरेखा जैसे लक्ष्य समष्टि (target population), प्रतिचयन समूह (sampling frame). प्रतिचयन की क्रियाविधि, सर्वेक्षण संबंधी उद्देश्यों को ध्यान में रखकर बनाई जाती है।

2) **प्रश्नावली निर्माण** : सर्वेक्षण के उद्देश्यों को ध्यान में रख कर प्रश्नावली की रूपरेखा विकसित की जाती है। इस पाठ्यक्रम की इकाई 2 में हम पहले ही प्रश्नावली के निर्माण में शामिल मुख्य चरणों का अध्ययन कर चुके है। प्रश्नावली के साथ–साथ हमें जाँचकर्त्ताओं के लिए प्रशिक्षण संबंधी दस्तावेज विकसित करने की भी आवश्यकता है। (विशेषरूप से तब, जब प्रतिदर्श सर्वेक्षण बड़े पैमाने पर किया जाता है और जिसमें बड़ी संख्या में जाँचकर्ता शामिल होते है)।

3) **लक्ष्य समष्टि को परिभाषित करनाः** समष्टि से प्रतिदर्श एकत्र करने के लिए हमें ऐसे लक्ष्य समष्टि की पूरी जानकारी होनी चाहिए, जिसके बारे में प्रतिदर्श के मद्देनज़र निष्कर्ष निकाले जाने हैं। लक्ष्य समष्टि को सार्वभौमिक रूप में भी माना जाता है। यह ऐसे व्यक्तियों का समूह है जिनके लिए हम प्रतिदर्श के माध्यम से निष्कर्ष निकालते हैं या जिसे हम सामान्य रूप देना चाहते हैं। जैसे, आप दिल्ली में योग्य दंपतियों द्वारा प्रयुक्त परिवार नियोजन की विधियों पर प्रतिदर्श सर्वेक्षण करना चाहते हैं। इस संदर्भ में जनन आयु समूह में शामिल दिल्ली के ऐसे सभी दंपत्ति लक्ष्य समष्टि की रचना करते हैं।

4) **प्रतिचयन समूह (Sampling Frame) की पहचान करना** : प्रतिचयन समूह लक्ष्य समष्टि से प्राप्त इकाइयों की सूची है। यह असल में लक्ष्य समष्टि की व्यावहारिक परिभाषा है। हमारे पहले उदाहरण में, जो परिवार नियोजन विधियाँ प्रयोग करने वाले दिल्ली के योग्य दंपतियों से संबंधित था, उस उदाहरण में जनन आयु समूह में शामिल सभी व्यक्ति प्रतिचयन–समूह का निर्माण करते हैं। कई बार किसी न किसी वजह से हम लक्ष्य समष्टि की सभी इकाइयों को सूचीबद्ध करने की स्थिति में नहीं होते। जैसे, हम टेलीफोन डारेक्टरी पर आधारित सर्वेक्षण करना चाहते हैं। ऐसे मामले में निश्चित रूप से ऐसे लोगों को सूची में शामिल नहीं किया जाएगा, जिनके टेलीफोन नम्बर डारेक्टरी में नहीं हैं। इस प्रकार की त्रुटि को प्रतिचयन समूह त्रुटि कहते है।

5) **प्रतिचयन की क्रियाविधि का चयनः** प्रतिचयन समूह की एक बार पहचान हो जाने पर, हम सर्वेक्षण संबंधी प्रतिदर्श के चयन के लिए, प्रतिचयन की उपयुक्त क्रियाविधि का चयन कर सकते हैं। इस इकाई के अगले अनुभाग में हम प्रतिचयन की विविध क्रियाविधियों की विस्तृत चर्चा करेंगे।

6) **प्रतिचयन इकाइयों का चयन** : प्रतिचयन इकाइयाँ प्रतिचयन समूह की ऐसी इकाइयां हैं, जिन्हें प्रतिचयन की उपयुक्त क्रियाविधि के प्रयोग से प्रतिदर्श में शामिल किया जाता है। अनिवार्यतः एक 'प्रतिचयन इकाई' ऐसी इकाई होती है जिससे जुड़े आँकड़ों को एकत्र किया जाता है। जैसे, आप प्रतिचयन समूह से 1000 प्रतिचयन इकाइयाँ (दिल्ली के जनन आयु समूह वाले सभी व्यक्ति) अपने प्रतिदर्श सर्वेक्षण के लिए लेना चाहते हैं।

7) **सर्वेक्षण आँकड़ा प्रक्रिया** : प्रतिचयन इकाइयों के चयन के बाद, अगला चरण आँकड़ों को इकट्ठा करना और इन्हें संसाधित करना है। अब हमें अधूरी प्रश्नावलियों की जाँच और शंकाग्रस्त प्रतिक्रियाओं का निवारण करने की आवश्यकता है। इसके बाद आँकड़ा प्रविष्टि और सारणी बनाने का कार्य शुरू होता है।

8) **आँकड़ों का विश्लेषण** : श्रृंखला का अगला चरण आँकड़ों का विश्लेषण करना है। अपनी आवश्यकताओं को ध्यान में रखकर हम विविध सांख्यिकीय साधनों के प्रयोग से आँकड़ों का विश्लेषण करते हैं।

9) **परिणामों का प्रकाशन और प्रचार** : विश्लेषित आँकड़ों के आधार पर हम तकनीकी और शोध आधारित रिपोर्ट तैयार करते हैं। अंत में, संगोष्ठियों में सर्वेक्षण के सामाजिक–आर्थिक परिणामों और उनके प्रभावों की चर्चा की जाती है।

## 12.3 प्रतिचयन का प्रकार

समष्टि के प्रतिदर्श चुनने की विधि प्रतिचयन कहलाती है। मुख्यतया प्रतिचयन के दो प्रकार हैं। ये हैः प्रायिकता प्रतिचयन (probability sampling) और गैर–प्रायिकता प्रतिचयन (non-probabilty sampling)। प्रायिकता प्रतिचयन में प्रतिचयन इकाइयों का चयन कुछ संयोगी क्रियाविधि (chance machanism) या चयन की प्रायिकता के आधार पर किया जाता है। दूसरी तरफ, गैर–प्रायिकता प्रतिचयन, चयनकर्ता के विवेक या उसकी इच्छा कर आधारित है। अतः गैर–प्रायिकता प्रतिचयन में सुविधा होने के कारण कुछ निश्चित इकाइयों का चयन हो जाता है या ऐसा इसलिए भी होता है क्योंकि वे उद्देश्य के लिए कारगर सिद्ध होते हैं या शोधकर्ता मानता है कि ये इकाइयाँ समष्टि का प्रतिनिधित्व कर सकती है। यहाँ, यादृच्छिक क्रियाविधि के आधार पर इकाइयों का चयन नहीं होता।

### 12.3.1 प्रायिकता प्रतिचयन

इसे यादृच्छिक प्रतिचयन (random sampling) भी कहते हैं। यह एक ऐसी क्रियाविधि है जिसमें समष्टि के प्रत्येक सदस्य की प्रतिदर्श में चुने जाने की संभावना बनी रहती है। अतः इस संभावना आधारित नजरिए के कारण प्रतिदर्श यादृच्छिक होता है। ''यादृच्छिक'' शब्द का अर्थ यह नहीं है कि बिना किसी नियम का अनुकरण किए संयोग से प्रतिदर्श की प्राप्ति की गई है।

यादृच्छिक प्रतिचयन, प्रायिकता सिद्धांत के सुनिर्मित सिद्धांतों पर आधारित है। इसके कुछ रूपभेद भी हैं। ये हैं : सरल यादृच्छिक प्रतिचयन, क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन और स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन। इन विविध प्रकारों की चर्चा हम आगे कर रहे हैं :

#### क) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन

यदि समष्टि के सदस्यों की विशेषताओं में काफी अधिक भिन्नता न हो तो हम सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की विधि का अनुसरण कर सकते हैं। इस विधि में हम समूची समष्टि को सजातीय समूह मानकर चलते हैं और प्रतिदर्श के लिए सदस्यों के चयन के लिए यादृच्छिक प्रतिचयन के सिद्धांत का अनुसरण करते हैं।

सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के दो रूपभेद हैं : (i) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन – प्रतिस्थापन के साथ (SRSWR) और (ii) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन – बिना प्रतिस्थापन के (SRSWOR)। इनमें अंतर प्रतिदर्श इकाइयों के चयन की विधि के कारण आता है। प्रतिस्थापन वाली सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि के अनुसार हम समष्टि से एक इकाई का चयन करते हैं, उसके लक्षणों को नोट करने के बाद, पुनः उसे पूर्ण समष्टि में वापिस डाल देते हैं जिससे इस इकाई के दुबारा भी चुने जाने की संभावना बनी रहती है। इस तरीके से, समष्टि में इकाईयों की कुल संख्या ज्यों की त्यों ही बनी रहती है। अन्य शब्दों में समष्टि की रचना (composition) पहले जैसी ही अर्थात अपरिवर्तित ही रहती है और समष्टि के प्रत्येक सदस्य की प्रतिदर्श में चुने जाने की एक जैसी संभावना होती है। यदि समष्टि का आकार $N$ है तो यह प्रायिकता है $1/N$। दूसरी तरफ ना प्रतिस्थापन वाले सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के मामले में, इकाई के एक बार चुने जाने के बादा, इसे समष्टि में दुबारा शामिल नहीं किया जाता।

अतः दुबारा चयन के लिए यह अयोग्य हो जाती है जिसके परिणामस्वरूप उत्तरोत्तर इकाइयों के चयन में, समष्टि की रचना बदल जाती है। इसलिए समष्टि से परवर्ती इकाई चयन के लिए, किसी विशिष्ट इकाई के चुने जाने की प्रायकिता भी बदल जाती है।

### ख) क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन

यादृच्छिक प्रतिचयन के इस रूपभेद में, प्रतिदर्श की केवल पहली इकाई का चयन समष्टि ये यादृच्छिक रूप से किया जाता है। इसके बाद की इकाइयों का चयन कुछ निश्चित नियमों का अनुसरण करके किया जाता है। जैसे मान लीजिए, हमें कृषि के लिए भूखंडों (plots) के प्रतिदर्श का चयन करना है। क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन में हम सर्वप्रथम यादृच्छिक रूप से केवल एक भूखण्ड का चयन करेंगे और इसके बाद प्रत्येक 10वें भूखण्ड का चयन हम कर सकते हैं।

### ग) स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन

यदि विचाराधीन समष्टि में विजातीय इकाइयों का समावेश हो तो स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन उपयुक्त विधि होगी। यहाँ, हम समष्टि को कुछ निश्चित विजार्तीय समूहों या स्तरानुसार समूहों में विभाजित करेंगे। दूसरा, कुछ इकाइयों का चयन, सरल यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा किया जाता है। तीसरे, प्रत्येक स्तर से इकाइयों के चयन के बाद, इन सभी के मिले–जुले रूप से अंतिम प्रतिदर्श की प्राप्ति की जाती है।

आइए, अब एक उदाहरण पर विचार करें। मान लीजिए हम प्रतिदर्श सर्वेक्षण द्वारा दिल्ली की प्रति व्यक्ति आय का अनुमान लगाना चाहते हैं। जैसा कि हम सभी जानते हैं कि दिल्ली धनी, मध्यम वर्ग और निम्न वर्ग जैसे इलाकों में बंटी हुई है और यह विभाजन इन इलाकों के वासियों की आमदनी के आधार पर है। अब इन इलाकों में से प्रत्येक एक स्तर को गठित कर सकता है जिससे सरल यादृच्छिक प्रतिचयन क्रियाविधि को लागू करके हम कुछ लोगों का चयन कर सकते हैं।

### घ) बहु–चरणीय यादृच्छिक प्रतिचयन

आइए अब किसी ऐसी स्थिति पर विचार करें जहाँ हम किसी बड़े शहर, जैसे दिल्ली में स्थित घरों के प्रतिदर्श से जानकारी प्राप्त करना चाहते हैं। कभी–कभार, सभी घरों की सूची आसानी से प्राप्त नहीं हो सकती  जिसकी वजह से घरों के प्रतिदर्श की सीधे तौर पर प्राप्ति करना शायद संभव नहीं होगा। ऐसी स्थिति में हमें विभिन्न चरणों में प्रतिदर्श लेने होंगे। आमतौर पर प्रशासनिक प्रयोजनों की वजह से शहर को कुछ निश्चित भौगोलिक क्षेत्रों में बाँट दिया जाता है। शहरों में ऐसे क्षेत्रों को खंड (ब्लॉक) कहते हैं। इसलिए पहले चरण पर ऐसे कुछ खंडों का चयन यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा किया जाता है। इससे अगले चरण में, पहले चरण के चुनिंदा खंडों में से प्रत्येक से कुछ घरों का चयन दुबारा यादृच्छिक प्रतिचयन के सिद्धांत पर किया जाता है। इस तरीके से बड़े शहर के परिवारों के प्रतिदर्श की अंततः प्राप्ति कर ली जाती है। उपर्युक्त उदाहरण द्वि–चरणी यादृच्छिक प्रतिचयन का मामला है। लेकिन, यदि छानबीन में अपेक्षित हो तो प्रतिचयन की विधि का विस्तार दो चरणों से अधिक भी किया जा सकता है।

### 12.4.2 गैर–प्रायिकता प्रतिचयन

हमने यादृच्छिक प्रतिचयन की विधि और इसके कुछ रूप भेदों पर विचार किया है। अब हमें यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि यादृच्छिक प्रतिचयन के सिद्धांत का बुनियादी उद्देश्य, समष्टि से प्रतिदर्श के चयन में छानबीनकर्ता के व्यक्तिपरक पक्षपाती रवैये को दूर करना है या अधिकाधिक कम करना है। लेकिन कुछ निश्चित प्रयोजनों के लिए अपने विवेक का प्रयोग करना भी जरूरी होता है।

जैसे, मान लीजिए किसी अध्यापक को एक प्रतियोगिता के लिए 30 विद्यार्थियों की कक्षा से 4 विद्यार्थियों का चयन करना है। यहाँ अध्यापक कक्षा के ऐसे सर्वोच्च विद्यार्थियों का अपने

निजी विवेक के आधार पर चयन कर सकता है। यह प्रयोजनमूलक प्रतिचयन (Purposive Sampling) का उदाहरण है। इस विधि में प्रतिदर्श का प्रयोजन, समष्टि की इकाइयों या कुछ निश्चित सदस्यों के चयन में स्वयं ही मार्गदर्शन करता है।

### 12.43 मिश्रित प्रतिचयन

मिश्रित प्रतिचयन में, गैर–प्रायिकता प्रतिचयन और यादृच्छिक प्रतिचयन, दोनों के कुछ लक्षण हमें नजर आते हैं। मान लीजिए, किसी संस्थान को गर्मियों की छुट्टियों के दौरान किसी कंपनी में प्रबंधकीय प्रशिक्षण के लिए 5 विद्यार्थियों को भेजना है। सर्वप्रथम, संस्थान को अपने निजी विवेक के प्रयोग से प्रशिक्षण के लिए लगभग ऐसे 20 प्रशिक्षणार्थियों की लघु सूची बनानी होगी जिन्हें वह सर्वाधिक उपयुक्त मानता है। अब इन 20 विद्यार्थियों में से यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा 5 का अंतिम रूप से चयन किया जा सकता है।

एक समष्टि से प्रतिदर्श चयन करने कि विभिन्न प्रक्रिया के बारे में हम चर्चा करेगें।

## 12.4 सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन

सरल यादृच्छिक प्रतिचयन (simple randam sampling), प्रतिचयन की बुनियादी क्रियाविधि है जहाँ हम समष्टि से प्रतिदर्श का चयन करते हैं। इस क्रियाविधि में हरेक इकाई का चयन समग्र रूप से संयोग तंत्र (chance mechanism) के माध्यम से होता है और इसमें समष्टि की हरेक इाकई की प्रतिदर्श के रूप में शामिल होने की एक जैसी संभावना होती है। दिए गए आमाप के हरेक संभव प्रतिदर्श के चुने–जाने की समान संभावना होती है अर्थात समष्टि की हर इकाई की प्रतिचयन प्रक्रिया में किसी भी चरण पर चुने जाने की संभावना होती है और किसी एक इकाई के चयन का समष्टि में किसी दूसरी इकाई के चयन पर प्रभाव नहीं होता।

सरल यादृच्छिक प्रतिचयन का प्रयोग समरूप (homogeneous) समष्टि के लिए किया जाना चाहिए अर्थात समष्टि की सभी इकाइयों में ऐसा समान गुण होना चाहिए जिसे हम मापना चाहते हैं। समरूप विशेषताओं में आयु, लिंग, आय, सामाजिक स्थिति, भौगोलिक क्षेत्र आदि शामिल किए जा सकते हैं।

ऐसी दो सर्वाधिक सामान्य विधियाँ हैं जिनका प्रयोग सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श के सार की प्राप्ति के लिए किया जाता हैं। पहली है – लॉटरी विधि और दूसरी है – यादृच्छिक संख्या चयन विधि। हम कौन–सी विधि का प्रयोग करेंगे, इस ओर ध्यान दिए बिना, प्रतिचयन समूह में शामिल प्रत्येक इकाई को अंकित संख्या दी जानी चाहिए।

### 12.4.1 लॉटरी/प्रचय विधि

यादृच्छिक प्रतिदर्श चयन की सरलतम विधि लॉटरी निकालना है। इस विधि में, एक डिब्बे में इकाई अंकित नंबरों को रखकर, अच्छे से हिला दिया जाता है। आखिर में यादृच्छिक तरीके से डिब्बे से तब तक नंबर निकाले जाते हैं जब तक कि वांछनीय प्रतिदर्श आमाप (sample size) की प्राप्ति न हो जाएं। मान लीजिए, हम $N$ समष्टि इकाइयों से $n$ प्रतिदर्श इकाइयाँ चुनना चाहते हैं। इसके लिए आप पास 1 से $N$ तक की संख्याएं हैं। हम प्रत्येक समष्टि इकाई को एक संख्या देते हैं; और इन संख्याओं को $N$ पर्चियों पर लिखते हैं। यथासंभव, इन पर्चियों को आकृति, आकार, रंग आदि में एक जैसा होना चाहिए। अब इन पर्चियों को डिब्बे में डालकर, अच्छी तरह हिलाया जाता है।

आखिर में, एक–एक करके हम $n$ पर्चियों को निकालते हैं। निकाली गयी पर्चियों की संख्याओं के तदनुरूप वाली $n$ इकाइयाँ, यादृच्छिक प्रतिदर्श को गठित करती है।

**उदाहरण 12.1** : मान लीजिए आप किसी बैंक की शाखा से संबंधित कुछ शोधकार्य कर रहे हैं और बैंक की इस शाखा में प्रदत्त सेवा की गुणवता पर ग्राहकों के विचारों का मूल्यांकन करना चाहते हैं। आपको लॉटरी विधि से सरल यादृच्छिक प्रतिचयन क्रियाविधि के प्रयोग से प्रतिदर्श (नमूने) के रूप में 100 ग्राहकों का चयन करना है। इसके लिए, सर्वप्रथम आपको प्रतिचयन–समूह को क्रमबद्ध करना होगा। इसके लिए आपको बैंक के रिकार्ड से खाता धारकों की पहचान करनी होगी। अब, आपको इन सभी खाताधारकों को क्रमसंख्या देने की आवश्यकता है। मान लीजिए, खाताधारकों की संख्या 1000 है और आपको 100 को चुनना है तो आप 100 / 1000 = 10 प्रतिशत खाताधारकों को प्रतिदर्श के रूप में चुनेंगे। आप चाहें तो क्रम संख्या को लिख सकते हैं, उन्हें फाड़ कर अलग पर्चियों का रूप दे कर, उन्हें डिब्बे में रख सकते हैं। अब इन्हें अच्छे से हिलाइए, आँखें बंद कीजिए और पहली 100 पर्चियों को बाहर निकाल लीजिए।

लॉटरी विधि का दोष यह है कि विधि अनावश्यक लंबी है और प्राप्त प्रतिदर्श की गुणवता इस बात पर निर्भर करती है कि हमने इन पर्चियों को किस प्रकार मिलाया, और किस प्रकार बेतरतीब तरीके से इन्हें उठाया। इसके अलावा, समष्टि आमाप बढ़ने के साथ–साथ, लॉटरी विधि के प्रयोग से प्रतिदर्श निकालने में कठिनाई भी अधिकाधिक बढ़ने लगती है।

### 12.4.2 यादृच्छिक संख्या चयन विधि

यादृच्छिक संख्याएं ऐसे अंकों का संग्रहण हैं जिन्हें प्रायिकता तंत्र के माध्यम से जनित किया जाता है। यादृच्छिक संख्याओं के निम्नलिखित गुणधर्म हैं:

क) इसकी प्रायिकता कि प्रत्येक अंक (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, या 9) किसी जगह उभर सकता है, एक जैसी है अर्थात 1 / 10 है।

ख) किन्हीं दो अंकों का किन्हीं दो स्थानों पर उभरना, एक दूसरे से स्वतंत्र है।

इस विधि में समष्टि की प्रत्येक इकाई को क्रमबद्ध रूप में विशेष संख्या दी जाती है। प्रतिदर्श निकालने के लिए हम यादृच्छिक संख्याओं की सारणी (Random Number Table) को फिशर एंड येटस् (1963): स्टैटिसिटिकल टेबलस् फॉर बायोलॉजिकल, एग्रीकल्चरल एवं मेडिकल रिसर्च में अलग–अलग जगह देख सकते है। यादृच्छिक संख्या सारणी का एक उदाहरण सारणी 12.1 में दर्शाया गया हैं

**सारणी 12.1 यादृच्छिक संख्या सारणी**

| |
|---|
| 39634 62349 74088 65564 16379 19713 39153 69459 17986 24537 |
| 14595 35050 40469 27478 44526 67331 93365 54526 22356 93208 |
| 30734 71571 83722 79712 25775 65178 07763 82928 31131 30196 |
| 64628 89126 91254 24090 25752 03091 39411 73146 06089 15630 |
| 42831 95113 43511 42082 15140 34733 68076 18292 69486 80468 |
| 80583 70361 41047 26792 78466 03395 17635 09697 82447 31405 |
| 00209 90404 99457 72570 42194 49043 24330 14939 09865 45906 |
| 05409 20830 01911 60767 55248 79253 12317 84120 77772 50103 |
| 95836 22530 91785 80210 34361 52228 33869 94332 83868 61672 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65358 | 70469 | 87149 | 89509 | 72176 | 18103 | 55169 | 79954 | 72002 | 20582 |
| 72249 | 04037 | 36192 | 40221 | 14918 | 53437 | 60571 | 40995 | 55006 | 10694 |
| 41692 | 40581 | 93050 | 48734 | 34652 | 41577 | 04631 | 49184 | 39295 | 81776 |
| 61885 | 50796 | 96822 | 82002 | 07973 | 52925 | 75467 | 86013 | 98072 | 91942 |
| 48917 | 48129 | 48624 | 48248 | 91465 | 54898 | 61220 | 18721 | 67387 | 66575 |
| 88378 | 84299 | 12193 | 03785 | 49314 | 39761 | 99132 | 28775 | 45276 | 91816 |
| 77800 | 25734 | 09801 | 92087 | 02955 | 12872 | 89848 | 48579 | 06028 | 13827 |
| 24028 | 03405 | 01178 | 06316 | 81916 | 40170 | 53665 | 87202 | 88638 | 47121 |
| 86558 | 84750 | 43994 | 01760 | 96205 | 27937 | 45416 | 71964 | 52261 | 30781 |
| 78545 | 49201 | 05329 | 14182 | 10971 | 90472 | 44682 | 39304 | 19819 | 55799 |
| 14969 | 64623 | 82780 | 35686 | 30941 | 14622 | 04126 | 25498 | 95452 | 63937 |
| 58697 | 31973 | 06303 | 94202 | 62287 | 56164 | 79157 | 98375 | 24558 | 99241 |
| 38449 | 46438 | 91579 | 01907 | 72146 | 05764 | 22400 | 94490 | 49833 | 09258 |
| 62134 | 87244 | 73348 | 80114 | 78490 | 64735 | 31010 | 66975 | 28652 | 36166 |
| 72749 | 13347 | 65030 | 26128 | 49067 | 27904 | 49953 | 74674 | 94617 | 13317 |
| 81638 | 36566 | 42709 | 33717 | 59943 | 12027 | 46547 | 61303 | 46699 | 76243 |
| 46574 | 79670 | 10342 | 89543 | 75030 | 23428 | 29541 | 32501 | 89422 | 87474 |
| 11873 | 57196 | 32209 | 67663 | 07990 | 12288 | 59245 | 83638 | 23642 | 61715 |
| 13862 | 72778 | 09949 | 23096 | 01791 | 19472 | 14634 | 31690 | 36602 | 62943 |
| 08312 | 27886 | 82321 | 28666 | 72998 | 22514 | 51054 | 22940 | 31842 | 54245 |
| 11071 | 44430 | 94664 | 91294 | 35163 | 05494 | 32882 | 23904 | 41340 | 61185 |
| 82509 | 11842 | 86963 | 50307 | 07510 | 32545 | 90717 | 46856 | 86079 | 13769 |
| 07426 | 67341 | 80314 | 58910 | 93948 | 85738 | 69444 | 09370 | 58194 | 28207 |
| 57696 | 25592 | 91221 | 95386 | 15857 | 84645 | 89659 | 80535 | 93233 | 82798 |
| 08074 | 89810 | 48521 | 90740 | 02687 | 83117 | 74920 | 25954 | 99629 | 78978 |
| 20128 | 53721 | 01518 | 40699 | 20849 | 04710 | 38989 | 91322 | 56057 | 58573 |
| 00190 | 27157 | 83208 | 79446 | 92987 | 61357 | 38752 | 55424 | 94518 | 45205 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23798 | 55425 | 32454 | 34611 | 39605 | 39981 | 74691 | 40836 | 30812 | 38563 |
| 85306 | 57995 | 68222 | 39055 | 43890 | 36956 | 84861 | 63624 | 04961 | 55439 |
| 99719 | 36036 | 74274 | 53901 | 34643 | 06157 | 89500 | 57514 | 93977 | 42403 |
| 95970 | 81452 | 48873 | 00784 | 58347 | 40269 | 11880 | 43395 | 28249 | 38743 |
| 56651 | 91460 | 92462 | 98566 | 72062 | 18556 | 55052 | 47614 | 80044 | 60015 |
| 71499 | 80220 | 35750 | 67337 | 47556 | 55272 | 55249 | 79100 | 34014 | 17037 |
| 66660 | 78443 | 47545 | 70736 | 65419 | 77489 | 70831 | 73237 | 14970 | 23129 |
| 35483 | 84563 | 79956 | 88618 | 54619 | 24853 | 59783 | 47537 | 88822 | 47227 |
| 09262 | 25041 | 57862 | 19203 | 86103 | 02800 | 23198 | 70639 | 43757 | 52064 |

स्रोत : यादृच्छिक संख्याओं की सारणी *http://www.mrs.umn.edu/~sungurea/introstat//public/instruction/ranbox/randomnumbersII.html* से उद्धृत।

उपर्युक्त यादृच्छिक संख्या सारणी में 5 अंक वाली 450 यादृच्छिक संख्याएं हैं।

### 12.4.3 यादृच्छिक संख्या सारणी के प्रयोग संबंधी चरण

यादृच्छिक संख्या सारणी के प्रयोग से सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन करते समय हमें निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करना होगा।

1) समष्टि आमाप ($N$) का निर्धारण

2) प्रतिदर्श आमाप ($n$) का निर्धारण

3) समष्टि की सभी इकाइयों को सूचीबद्ध करना। संख्याओं को क्रमबद्ध तरीके से लगाना। मान लीजिए समष्टि में 100 इकाइयां हैं, ऐसी स्थिति में 00 से 99 तक को क्रम संख्या में लगाएं।

4) यादृच्छिक संख्या सारणी के पृष्ठ से प्रतिदर्श के चयन के आरंभिक बिंदु का निर्धारण करें और इसके लिए पृष्ठ पर आँखें बन्द करके किसी भी संख्या पर अपनी अंगुली रख दें।

5) दिशा का चयन करें जिसमें आप संख्याओं को पढ़ना चाहते हैं (मान लीजिए बायें से दायें या दायें से बायें और ऊपर से नीचे या नीचे से ऊपर)

6) मान लीजिए आप दो अंकों वाली (00 से 99) संख्याओं को ढूंढ रहे हैं, लेकिन इन संख्याओं को आप सारणी से सीधेतौर पर नहीं पढ़ सकते, क्योंकि ये 5 अंकों वाली संख्या अर्थात 54245 है (अर्थात् दी गई सारणी 12.1 में यादृच्छिक संख्या सारणी की 29वीं पंक्ति और 10वें स्तम्भ की संख्या) का चयन आपने किया है। इस स्थिति में दो अंकों वाली संख्या 45 हैं, यदि आपने संख्या के अंतिम दो अंकों को चुना हैं।

7) प्रत्येक समष्टि इकाई की दी गई संख्याओं पर ही ध्यान दें। यदि संख्या समष्टि की किसी एक इकाई को दर्शाती है तो वह प्रतिदर्श का भाग बन जाती है। मान लीजिए आप 10 प्रतिदर्श इकाइयों का चयन करना चाहते हैं, तो जिन अन्य संख्याओं का

आप चयन करेंगे, वे हैं; 71 (11071), 30 (44430), 64 (94664), 94 (91294), 63 (35163), 82 (32882), 04 (23904), 40 (41340), 85 (61185)। गौर कीजिए आपने 94 (05494) को छोड़ दिया है क्योंकि इस संख्या का चयन आप पहले ही कर चुके हैं।

8) संख्या का एक बार चयन करने पर, उसे दुबारा न चुनें।

9) अपेक्षित प्रतिदर्श प्राप्त करने से पहले, यदि आप सारणी के अंतिम बिंदु तक पहुँच जाते हैं तो यादृच्छिक संख्या सारणी में अन्य आरंभिक बिंदु को लें और प्रतिदर्श के लिए बाकी की इकाइयों का चयन करें।

**उदाहरण 12.2** : मान लीजिए यादृच्छिक संख्या सारणी के प्रयोग से कुल 1000 खाताधारकों में से प्रतिदर्श के रूप में आपको 100 खाताधारकों को चुनना है। यहाँ, सर्वप्रथम आप प्रत्येक खाताधारक को 000 से 999 में से कोई एक संख्या देंगे। 100 खाताधारकों का प्रतिदर्श बनाने के लिए आपको 000 से 999 में से तीन अंकों वाली 100 संख्याओं को लेना होगा। दी गई सारणी 12.1 में से किसी भी पंक्ति या स्तम्भ में यादृच्छिक संख्याओं को चुनें। मान लीजिए प्रतिदर्श बनाने के लिए, आरंभिक बिंदु के रूप में आपने चौथी पंक्ति और पहले कॉलम का चयन किया है। पहली अंक संख्या 628 (64628) है, यदि आपने अपने उद्देश्य के लिए, संख्या के रूप में अंतिम 3 अंकों को चुना है। यहाँ, आप संख्या के अंतिम 3 अंकों को पढ़ें। यदि संख्या 000 से 999 के बीच है तो संख्या को प्रतिदर्श में शामिल करें। अन्यथा संख्या को छोड़ दें और चुनी गई दिशा में अगले अंक को पढ़ें। यदि इस संख्या का चयन आप पहले से कर चुके है तो इसे छोड़ दीजिए। इस उदाहरण में चूंकि आपने चौथी पंक्ति और पहले स्तम्भ से शुरू किया था और आप बायें से दायें की दिशा में पढ़ रहे थे तो प्रतिदर्श की निम्नलिखित 100 संख्याओं का चयन किया जाएगा।

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 628 | 126 | 254 | 090 | 752 | 091 | 411 | 146 | 089 | 630 |
| 831 | 113 | 511 | 082 | 140 | 733 | 076 | 292 | 486 | 468 |
| 583 | 361 | 047 | 792 | 466 | 395 | 635 | 697 | 447 | 405 |
| 209 | 404 | 457 | 570 | 194 | 043 | 330 | 939 | 865 | 906 |
| 409 | 830 | 911 | 767 | 248 | 253 | 317 | 120 | 772 | 103 |
| 836 | 530 | 785 | 210 | 228 | 869 | 332 | 868 | 672 | 358 |
| 469 | 149 | 509 | 176 | 169 | 954 | 002 | 582 | 249 | 037 |
| 192 | 221 | 918 | 437 | 571 | 995 | 006 | 694 | 692 | 581 |
| 050 | 734 | 652 | 577 | 631 | 184 | 295 | 776 | 885 | 796 |
| 822 | 973 | 822 | 467 | 013 | 072 | 942 | 917 | 129 | 624 |

यदि समष्टि में इकाइयाँ की संख्या काफी अधिक है तो उपर्युक्त दोनों विधियों कारगर सिद्ध नहीं होगी।

आजकल कंप्यूटर के प्रयोग से हम सरलता से यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन कर सकते हैं। ऐसे बहुत से कंप्यूटर कार्यक्रम (Program) है जो यादृच्छिक संख्याओं की पूरी श्रृंखला

जनित कर सकते हैं, लेकिन इसके लिए कंप्यूटर में समष्टि की सूचीबद्ध इकाइयों का होना आवश्यक है।

कंप्यूटर जनित यादृच्छिक संख्याओं के प्रयोग से प्रतिदर्श चयन के एक अन्य तरीके का वर्णन, अब हम करेंगे। इस उदाहरण में, मान लीजिए हम एक्सेल स्प्रेडशीट (Excel spreadsheet) में स्तम्भों में खाताधारकों की सूची को उतार सकते हैं। तब, इससे दायें स्तम्भ में हम फलन = RANDO को पेस्ट करते हैं, जिसका अर्थ है कोष्ठों (cells) में 0 और 1 के बीच यादृच्छिक संख्या रखने का एक्सेल का तरीका। इसके बाद, संग्रहित सूची में हम, पहले 100 नामों को लेंगे। यह पूरी प्रक्रिया का एक मिनट का समय लेगी यदि कंप्यूटर में एक्सेल (EXCEL) कार्यक्रम प्रयोग करने से हम अवगत हों तो।

### 12.4.4 सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के उपादेयता

1) सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श में हमें समष्टि इकाइयों के एक जैसे होने (संजातीय) का भलीभांति पता होता है और इसलिए समष्टि की विशेषताओं पर अतिरिक्त जानकारी प्राप्त करने की आवश्यकता नहीं होती।

2) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के प्रयोग से हम निष्पक्ष प्रतिदर्श का चयन कर सकते हैं। ऐसा इसलिए है, क्योंकि इस प्रतिदर्श में समष्टि की प्रत्येक इकाई के शामिल होने की संभावना एक जैसी होती है। इसमें मनुष्य द्वारा पक्षपात करने की संभावना पूरी तरह कम हो जाती है।

3) प्रतिचयन त्रुटि आकलन के माध्यम से हम परिणामों की परिशुद्धता का निर्धारण कर सकते हैं।

4) यदि समष्टि का आकार अधिक बड़ा नहीं है तो सरल यादृच्छिक प्रतिचयन सरल और आसान विधि है जिसे प्रतिचयन क्रियाविधि के रूप में अपनाया जा सकता हैं

### 12.4.5 सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श की सीमाएं

1) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की सबसे बड़ी सीमा है कि यदि समष्टि आमाप काफी अधिक हो तो समष्टि की इकाइयों को सूचीबद्ध करने में हमें काफी अधिक समय लगेगा।

2) यदि समष्टि सजातीय हो तो सरल यादृच्छिक क्रियाविधि अति कारगार सिद्ध होगी। मान लीजिए लिंग, आयु, सामाजिक स्थिति जैसी विशेषताओं वाली समष्टि का हमें अध्ययन करना है। तब हमें समष्टि इकाइयों की उन सभी विशेषताओं वाल प्रतिनिधि प्रतिदर्श (Representative Sample) को रखने के लिए बड़े प्रतिदर्श आमाप की आवश्यकता पड़ेगी। इस मुद्दे से निपटने का बेहतर तरीका स्तरित प्रतिचयन की क्रियाविधि को प्रयोग में लाना है और इसकी जानकारी इकाई में आगे दी गई है।

## 12.5 क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन

क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन (systematic random sampling) की क्रियाविधि ऐसी है जो न्यूनाधिक सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि के जैसी है। इस प्रतिचयन की क्रियाविधि में, हमें यादृच्छिक रूप से आरंभिक बिंदु का चयन करना है और इसके बाद विभिन्न प्रतिचयन अंतरालों पर समष्टि इकाइयों से क्रमबद्ध तरीके से प्रतिदर्श इकाइयों का चयन करता है।

आरंभिक बिंदु और प्रतिचयन अंतराल, अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप पर निर्भर करते हैं। प्रतिचयन अंतराल को $K$ के रूप में दर्शाया जाएगा। क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन की

क्रियाविधि के प्रयोग से प्रतिदर्श का चयन करना बेहद आसान है। मान लीजिए, समष्टि में $N$ इकाइयाँ हैं और आपके क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि के प्रयोग से $n$ इकाइयों के प्रतिदर्श का चयन करने का निर्णय लिया है, तो हमें निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करना होगा।

1) 1 से $N$ तक की समष्टि में इकाइयों की संख्या (मान लीजिए आपके पास 1000 इकाइयाँ हैं)

2) आवश्यकतानुसार, प्रतिदर्श आमाप $n$ का चयन करें (मान लीजिए आप 100 इकाइयों का चयन करना चाहते हैं)

3) प्रतिदर्श आमाप से समष्टि का विभाजन करके प्रतिचयन अंतराल का निर्धारण करें अर्थात $K = N/n$ = अंतराल आमाप (यहाँ $K = 1000 / 100 = 10$)

4) पहले $K$ इकाइयों (1 से $K$) से यादृच्छिक तरीके से इकाई का चयन करें (मान लीजिए पहली प्रतिदर्श इकाई के रूप में आपने इकाई संख्या 5 का चयन किया है)।

5) इसके बाद पिछली इकाई में $K$ कों जोड़ते हुए बाद की प्रतिदर्श इकाइयों का चयन करें। बाद के प्रतिदर्श होंगेः 15 ($= 5 + 10$), 25 ($= 15 + 10$), ..., 995 ($= 985 + 10$)।

**उदाहरण 12.3** : 500 इकाइयों वाली समष्टि से, क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि के प्रयोग से 60 इकाइयों का प्रतिदर्श बनाइए।

क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन विधि का प्रयोग करने के लिए, सर्वप्रथम 1 से 500 तक संख्याओं को देते हुए यादृच्छिक रूप में समष्टि इकाइयों को सूचीबद्ध कीजिए। प्रतिचयन अंतराल है $K = 500 / 60 = 8.3$ या 8 (मान लीजिए)। अब पहली 8 समष्टि इकाइयों से यादृच्छिक रूप से पहली प्रतिदर्श इकाई का चयन कीजिए। इसके बाद की चयनित प्रतिदर्श इकाइयाँ हैंः 13, 21, 29, 37 ........ 477। इसलिए, प्रतिदर्श में चयनित समष्टि इकाइयाँ इस प्रकार हैं :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 13 | 21 | 29 | 37 | 45 | 53 | 61 | 69 | 77 |
| 85 | 93 | 101 | 109 | 117 | 125 | 133 | 141 | 149 | 157 |
| 165 | 173 | 181 | 189 | 197 | 205 | 213 | 221 | 229 | 237 |
| 245 | 253 | 261 | 269 | 277 | 285 | 293 | 301 | 309 | 317 |
| 325 | 333 | 341 | 349 | 357 | 365 | 373 | 381 | 389 | 397 |
| 405 | 413 | 429 | 429 | 437 | 445 | 453 | 461 | 469 | 477 |

अतः क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि में, पहली प्रतिदर्श इकाई का चयन यादृच्छिक रूप से किया जाता है और यह प्रतिदर्श इकाई आगे चल कर चुनी जाने वाली बाद की प्रतिदर्श इकाइयों का निर्धारण करती है। लेकिन, समष्टि में इकाइयों का यादृच्छिक अवस्था में होना अनिवार्य है। कुछ मामलों में, हम सरल यादृच्छिक प्रतिचयन क्रियाविधि की तुलना में हम क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि को प्रयोग में लाना बेहतर समझते हैं, क्योंकि प्रतिदर्श इकाइयों के चयन में यह अधिक सरल है। जैसे, यदि कहीं आप नारियल के पेड़ों की फसल का पता लगाना चाहते हैं तो क्रमबद्ध यादृच्छिक रूप से पेड़ को यादृच्छिक तौर पर लें, अन्य पेड़ों का, प्रतिचयन अंतराल के बराबर की दूरी पर स्वतः चयन हो जाएगा।

### 12.5.1 क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन के उपादेयता

क) इस विधि के प्रयोग का मुख्य फायदा है कि सरल यादृच्छिक प्रतिचयन क्रियाविधि की तुलना में इस विधि के प्रयोग से समय कम लगता है और मेहनत भी कम करनी पड़ती है। चुनावों में वोटरों की प्रवृत्ति और विपणन शोधकार्य में उपभोक्ताओं की राय और विचार लेने के लिए इस विधि का भरपूर प्रयोग किया जाता है।

ख) इस क्रियाविधि के प्रयोग का अन्य फायदा है कि इस विधि का प्रयोग समष्टि इकाइयों की कोई औपचारिक सूची उपलब्ध न हो, तब भी किया जा सकता है। जैसे, मान लीजिए हम बैंक द्वारा प्रदत्त सेवाओं को बेहतर बनाने पर उपभोक्ताओं की राय जानना चाहते हैं, तब हम उस बैंक शाखा में जाने वाले हर $K$ खाताधारक का आसानी से चयन कर सकते हैं, बशर्ते हमें उस बैंक के खाताधारकों की कुल संख्या का पता होः (1) जैसे, समष्टि में 2000 खाताधारक हैं और प्रतिदर्श आमाप के रूप में हमें 200 खाताधारकों की आवश्यकता है। तब, $K = 2000 / 200 = 10$। हम बैंक जाने वाले प्रत्येक 10वें खाताधारक का चयन करेंगे।

### 12.5.2 क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन की सीमाएं

क) क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन क्रियाविधि का मुख्य दोष है कि समष्टि की इकाइयाँ यदि अलग–अलग समय में उभरती हैं तो क्रमबद्ध प्रतिचयन क्रियाविधि का प्रयोग अत्यंत प्रतिनिधित्वहीन प्रतिदर्श प्रदान करता है। जैसे, मान लीजिए आप अपने इलाके के एक स्टोर पर आने वाले उपभोक्ताओं के विचार/राय जानने के इच्छुक हैं। आप उस स्टोर पर आने वाले सभी उपभोक्ताओं को उस स्टोर पर आने की तारीख के अनुसार क्रमबद्ध कीजिए और हर महीने की पहली तारीख को उस स्टोर पर आने वाले उपभोक्ताओं को प्रतिदर्श के रूप में चुनें। आप जानते हैं कि हरेक माह का पहला दिन, पूरे महीने का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता।

ख) क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन क्रियाविधि का अन्य दोष है कि समष्टि की प्रत्येक इकाई की चुने जाने की एक जैसी संभावना नहीं होती। इसके बजाए, प्रतिदर्श में समष्टि इकाइयों का चयन, पहली चुनिंदा इकाई पर निर्भर करता है। इस ओर ध्यान दिए बिना कि प्रतिदर्श की पहली इकाई का चयन हम किस प्रकार करते हैं, बाद की इकाइयों का निर्धारण स्वतः हो जाता है। इस विधि से सभी कुछ क्रमबद्ध ही रहता है।

## 12.6 स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन

कुछ मामलों में समष्टि समरूप नहीं होती, अर्थात जिसका सर्वेक्षण हम करना चाहते हैं, उसकी इकाइयाँ की विशेषताएं एक जैसी नहीं होती। इसमें देखने योग्य बातें, समष्टि की इकाइयों से जुड़ी हो सकती हैं जैसे, महिला/पुरूष, ग्रामीण/शहरी, साक्षर/निरक्षर, उच्च उच्च आय/निम्न आय समूह आदि। ऐसी स्थितियों में जहाँ इकाइयाँ में भारी विविधता है वहाँ सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि या क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि हमें प्रतिनिधि प्रतिदर्श प्रदान नहीं करेंगी।

ऐसी स्थिति में हम स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन (stratified random sampling) के प्रयोग से ही प्रतिनिधि प्रतिदर्श प्राप्त कर सकते हैं।

स्तरित प्रतिचयन में, हम समष्टि को ऐसे तरीके से विभिन्न स्तरों में बांट देते हैं कि प्रत्येक स्तर की इकाइयाँ समरूप हो। ये स्तर एक–दूसरे से अलग होंगे। मान लीजिए स्त्री/पुरूष वितरण के आधार पर हम समष्टि को स्तरों में बाँटना चाहते हैं। ऐसी स्थिति में हम स्त्री या पुरूष के अनुसार अलग अलग रूप से समष्टि इकाइयों को सूचीबद्ध करेंगे। इसके बाद, हम प्रतिदर्श आमाप तय करेंगे जिसके लिए प्रत्येक स्तर से प्रतिदर्श हम प्राप्त करेंगे। प्रत्येक स्तर से प्रतिदर्श आमाप तय करने के, दो उपागम हैं; (क) समानुपातिक (proportional) स्तरित प्रतिदर्श, और (ख) असमानुपातिक (disproportional) स्तरित प्रतिदर्श। इन दोनों क्रियाविधियों की चर्चा हम आगे कर रहे हैं।

### 12.6.1 समानुपातिक स्तरित प्रतिचयन

जब हम विविधि स्तरों वाली समष्टि से प्रतिदर्श लेते हैं तो प्रत्येक स्तर से हमें प्रतिदर्श लेने की आवश्यकता पड़ती है। ऐसे प्रतिदर्श कुल समष्टि आमाप से स्तरित समष्टि आमाप के समानुपात में हो सकते हैं। मान लीजिए हम समष्टि ($N$) और $K$ गैर अतिव्याप्त स्तरों $N_1, N_2, N_3$ ---- अर्थात $N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots + N_k = N$ में बांट देते हैं। हम $n$ माप का प्रतिदर्श बनाना चाहते हैं। तब विविध स्तरों के प्रतिदर्श समानुपातों को निम्नलिखित द्वारा दर्शाया जाता है :

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_3}{N_3} = \ldots = \frac{n_{12}}{N_K}$$

**उदाहरण 12.4 :** मान लीजिए 1000 इकाइयों वाली समष्टि से 200 इकाइयों का प्रतिदर्श आप बनाना चाहते हैं। समष्टि में उच्च/निम्न आय और ग्रामीण/शहरी जैसी प्रकृति वाले विभिन्न समूह शामिल हैं। ऐसे स्तरित समष्टि आमाप इस प्रकार है :

| | | |
|---|---|---|
| उच्च आय–शहरी | = | 200 |
| निम्न आय–शहरी | = | 400 |
| उच्च आय–ग्रामीण | = | 100 |
| निम्न आय–ग्रामीण | = | 300 |

प्रतिनिधि प्रतिदर्श की प्राप्ति के लिए, प्रतिदर्श के प्रत्येक स्तर को समष्टि में तदनुरूप स्तर को दर्शाना होगा। इसके लिए हमें स्तर आमाप के आधार पर प्रत्येक स्तर से विभिन्न प्रतिदर्श आमाप लेने चाहिए। प्रत्येक स्तर में निर्णायक गुणक उतना ही है जितना कि समष्टि के कुल प्रतिदर्श का समानुपात। हमारे उदाहरण में, 200 इकाइयों के प्रतिदर्श के प्राप्ति में, प्रत्येक स्तर में समष्टि के लिए प्रतिदर्श का समानुपात है:

$$\frac{n}{N} = \frac{200}{1000} = 0.2$$

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक स्तर के लिए हम एक जैसे ही अनुपात पर विचार कर रहे हैं। तब, प्रत्येक स्तर से प्राप्त प्रतिदर्श इस प्रकार होगा:

| स्तर श्रेणी | स्तर समष्टि आमाप ($N_i$) | प्रतिदर्श (समष्टि अनुपात संबंधी) | स्तर प्रतिदर्श |
|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4)=(2)×(3) |
| उच्च आय–शहरी | 200 | 0.2 | 40 |
| निम्न आय–शहरी | 400 | 0.2 | 80 |
| उच्च आय–ग्रामीण | 100 | 0.2 | 20 |
| निम्न आय–ग्रामीण | 300 | 0.2 | 60 |
| **कुल** | 1000 | 0.2 | 200 |

सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की तुलना में स्तरित प्रतिचयन के कई अधिक फायदे हैं स्तरित प्रतिचयन ने केवल समग्र समष्टि बल्कि प्रत्येक स्तर के प्रतिदर्श प्रतिनिधि को भी

सुनिश्चित करता है। जहां स्तर का आकार छोटा है, वहां इस बात का विशेष महत्व है। इसके अलावा स्तरित प्रतिचयन के सामान्यतौर पर सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की तुलना में, जो आंकड़ें प्राप्त होते हैं वे अधिक सार्थक होते हैं।

### 12.6.2 असमानुपातिक स्तरित प्रतिचयन

समानुपातिक स्तरित प्रतिचयन में, हमने माना था कि समष्टि का प्रत्येक स्तर एक जैसा है। जिसके परिणामस्वरूप हम अपेक्षा करते हैं कि समग्र रूप से समष्टि संबंधी परिवर्तनशीलता से स्तर के भीतर की परिवर्तनशीलता निम्न है। दूसरी तरफ, यदि प्रत्येक स्तर के भीतर परिवर्तनशीलता कम नहीं हो तो हम असमानुपातिक स्तरित प्रतिचयन क्रियाविधि का प्रयोग करते हैं। ऐसी क्रियाविधि में स्तर आबंटन, आकार और परिवर्तनशीलता (अर्थात विचाराधीन विशेषताओं के मानक विचलन) पर आधारित होता है। इस क्रियाविधि को कभी–कभार द्विशः तोलन योजना (double weighing scheme) भी कहते हैं और दिए गए प्रतिदर्श आमाप के लिए यह सर्वाधिक उपयुक्त प्रतिदर्श और विश्वसनीय आकलन भी प्रदान करती है। इसके लिए, हां हमें केवल प्रत्येक स्तर के भीतर विचाराधीन विशेषता के मानक विचलन का ज्ञान/आकलन प्राप्य होना चाहिए।

असमानुपातिक स्तरित प्रतिचयन के प्रयोग के लिए, निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करें।

1) अपने द्वारा चयनित किसी विशेषता/गुण को ध्यान में रखकर, समष्टि स्तरों का विभाजन करें (जैसे ग्रामीण/शहरी, महिला/पुरूष आदि)।

2) प्रत्येक स्तर से ली गई इकाइयों की संख्या सीधे तौर पर स्तर $n_i$ के सापेक्षिक आकार और विचारधीन विशेषता के मानक विचलन $s_i$ के प्रतिलोम में समानुपातिक है। मान लीजिए $s_1, s_2, s_3$ -----$s_k$, $k$ स्तर के मानक विचलन है और $P_1, P_2, P_3$ .... $P_k$ कुल समष्टि के स्तरित अनुपात हैं और $n$ ( $= n_1 + n_2 + ..... + n_2$) अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप है। अब असमानुपातिक स्तरित प्रतिचयन की क्रियाविधि का प्रयोग करते हुए स्तरित प्रतिदर्श आमाप होगा।

$$n_i = \frac{P_i \times \sigma_i \times n}{\sum P_i \sigma_i}$$

3) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन या क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन अर्थात दोनों में से किसी एक के प्रयोग से प्रत्येक स्तर से प्रतिदर्श का चयन करें।

आइए उदाहरण 12.4 पर दुबारा से नज़र डालें, जहां हमने समष्टि को 4 स्तरों में विभाजित किया है। हम देखते हैं कि उच्च आय स्तर में कई परिवार हैं और निम्न आय स्तर में परिवारों की बड़ी संख्या शामिल है। मान लीजिए कि उच्च आय समूहों में आय परिवर्तनशीलता निम्न आय समूहों की परिवर्तनशीलता से उच्च है। इसलिए प्रतिदर्श में उच्च आय समूहों के अवप्रतिनिधित्व (under-representation) को अनदेखा करने के लिए, प्रत्येक स्तर में एक असमानुपातिक प्रतिदर्श को शामिल किया गया है। इसका अर्थ है, यदि स्तर के भीतर परिवर्तनशीलता निम्न है तो उस स्तर का छोटा प्रतिदर्श आमाप ही पर्याप्त रहेगा। अर्थात् उच्च स्तर प्रसरण के लिए उच्च स्तर प्रतिदर्श आमाप और निम्न स्तर प्रसरण के लिए निम्न प्रतिदर्श आमाप। यह इस तथ्य के अलावा है कि बड़े स्तरित आमाप के लिए बड़ा प्रतिदर्श आमाप चाहिए।

**उदाहरण 12.2** : उदाहरण 12.4 पर दुबारा विचार कीजिए। मान लीजिए स्तर प्रसरण (Stratum Variances) इस प्रकार हैं, जैसा कि नीचे दिए गए हैं:

| स्तर | प्रसरण ($s^2$) |
|---|---|
| उच्च आय शहरी | 6.5 |
| निम्न आय शहरी | 2.5 |
| उच्च आय ग्रामीण | 4.5 |
| निम्न आय ग्रामीण | 2.0 |

असमानुपातिक स्तरित प्रतिचयन की क्रियाविधि का प्रयोग करें और प्रत्येक स्तर से प्रतिदर्श आमाप का चयन करें। कुल प्रतिदर्श आमाप 200 है।

इस उदाहरण के लिए, प्रत्येक स्तर के लिए असमानुपातिक प्रतिदर्श आमाप इस प्रकार है:

| स्तर | स्तर समष्टि | स्तर समष्टि अनुपात ($P_i$) | स्तर प्रसरण ($\sigma_i^2$) | स्तर मानक विचलन ($\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$) | $P_i \times \sigma_i$ | प्रतिदर्श आमाप $\frac{P_i \times \sigma_i \times n}{\sum P_i \sigma_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| उच्च आय–शहरी | 200 | 0.20 | 6.5 | 2.5 | 0.5 | 56 |
| निम्न आय–शहरी | 400 | 0.40 | 2.5 | 1.6 | 0.64 | 72 |
| उच्च आय–ग्रामीण | 100 | 0.10 | 4.5 | 2.1 | 0.21 | 24 |
| निम्न आय–ग्रामीण | 300 | 0.3. | 2.0 | 1.4 | 0.42 | 47 |
| कुल | 1000 | | | | 1.77 | 200 |

### 12.6.3 स्तरित प्रतिचयन के उपादेयता

क) स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन में, समष्टि के प्रत्येक स्तर से प्रतिदर्श निकाले जाते हैं। इसलिए स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि अधिक दर्शाने योग्य है।

ख) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की तुलना में स्तरित यादृच्दिक प्रतिचयन की क्रियाविधि अधिक सटीक है। इसलिए बड़ी सीमा तक, यह क्रियाविधि प्रतिदर्श चयन संबंधी पक्षपात को दूर करती है।

ग) जैसाकि हमने सरल यादृच्छिक प्रतिचयन और क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन क्रियाविधियों में देखा, जहां समष्टि में विविधता है, वहां उपयुक्त प्रतिदर्श की प्राप्ति के लिए हमें बड़े प्रतिदर्श आमाप की आवश्यकता है। लेकिन, स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन से हम छोटे आकार के प्रतिदर्श प्राप्त कर सकते हैं। इससे आंकड़ों को इकट्ठा करने में समय, धन और अन्य संसाधनों की बचत होती है।

### 12.6.4 स्तरित प्रतिचयन की सीमाएं

क) स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि का मुख्य दोष है कि हमें समष्टि में विशेषताओं के वितरण की विस्तृत जानकारी प्राप्त करने की आवश्यकता होती। यदि हम सही तरीके से सजातीय समूहों की पहचान नहीं कर सकते तो बेहतर होगा कि

हम सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श का प्रयोग करें, क्योंकि गलत स्तरीकरण से गंभीर त्रुटियां उत्पन्न हो सकती है।

ख) स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन का अन्य दोष है कि हमें प्रत्येक स्तर के लिए, अलग से, समष्टि संबंधी इकाइयों की सूची बनाने की आवश्यकता है। प्रत्येक विशेषता के लिए यदि समष्टि की इकाइयों की सूची तत्काल रूप से उपलब्ध न हो तो सूची बनाना और भी अधिक कठिन कार्य बन जाता है।

## 12.7 गुच्छ प्रतिदर्श का चयन

अक्सर समष्टि इकाइयों का फेलाव, विशाल भौगोलिक क्षेत्र तक होता है। ऐसे मामले में, सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के माध्यम से आंकड़ों को इकट्ठा करने में, समय, धन और जनशक्ति की अधिक जरूरत पड़ती है, क्योंकि चुनिंदा इकाइयों पर आंकड़ों को इकट्ठा करने के लिए समग्र भौगोलिक क्षेत्र को तय करना पड़ता है। मान लीजिए आपको व्यक्तिगत इंटरव्यू लेने के लिए समूचे उत्तर प्रदेश में व्याप्त उत्तरदाताओं का प्रतिदर्श लेना है। चूंकि उत्तरदाताओं का फेलाव पूरे राज्य में है, इसलिए सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श के प्रयोग में, आपको उत्तरदाताओं से मिलने के लिए यात्रा करनी पड़ेगी और इसमें खर्चा भी काफी होगा। ऐसी स्थिति में गुच्छ प्रतिचयन (cluster sampling) की क्रियाविधि अधिक उपयोगी सिद्ध होगी।

गुच्छ प्रतिचयन के बुनियादी सिद्धांत इस प्रकार हैं:

i) गुच्छ के भीतर मौजूद अंतर या परिवर्तनशीलता (variability) यथासंभव अधिक होनी चाहिए। जितना संभव हो, प्रत्येक गुच्छ के भीतर परिवर्तनशीलता उतनी होनी चाहिए जितनी सकल समष्टि में है।

ii) गुच्छों के बीच की परिवर्तनशीलता यथासंभव कम होनी चाहिए। गुच्छों का चयन एक बार हो जाए तो चयनित गुच्छों की सभी इकाइयों को आकड़ों की प्राप्ति के लिए, प्रतिदर्श में शामिल किया जाता है।

गुच्छ प्रतिचयन में हम समष्टि को समूहों में बांट देते हैं, जिन्हें गुच्छ (cluster) कहते है। तब हम सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि के प्रयोग से प्रतिदर्श गुच्छ का चयन करते हैं। प्रत्येक गुच्छ की 'समष्टि' इकाइयों को उतना ही विषमतापूर्ण माना गया है जितनी विषमता सकल समष्टि में पाई जाती है। इसका अर्थ है प्रत्येक गुच्छ स्वयं समष्टि का प्रतिनिधि है।

### 12.7.1 गुच्छ प्रतिचयन के चरण

गुच्छ प्रतिचयन में, हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं:

1) समष्टि को अलग–अलग गुच्छों में बांटें।

2) अपने प्रतिदर्श की आवश्यकतानुसार गुच्छों की संख्या का निर्धारण करें।

3) गुच्छों के प्रतिदर्श का चयन यादृच्छिक रूप से करें।

4) प्रतिदर्श गुच्छों के भीतर सभी इकाइयों का सर्वेक्षण करें।

मान लीजिए, गुच्छों का बंटवारा, समष्टि की भौगोलिक सीमाओं पर आधारित है, ऐसी स्थिति में इसे क्षेत्र प्रतिचयन (area sampling) कहते हैं। आपने देखा होगा कि गुच्छ प्रतिचयन के मामले में, यादृच्छिक प्रतिचयन विधि के प्रयोग से, गुच्छों का चयन किया जाता है। तत्पश्चात् प्रत्येक प्रतिदर्श गुच्छ के भीतर की सभी समष्टि इकाइयों को प्रतिदर्श में शामिल किया जाता है।

मान लीजिए प्रत्येक चुनिंदा गुच्छ की सभी इकाइयों को शामिल करने के बजाए, आपने प्रत्येक गुच्छ के भीतर केवल कुछ इकाइयों के प्रतिदर्श को शामिल करने का निर्णय लिया तब आप भलीभांति समझ सकते हैं कि यहां दो चरण हैं।

पहले चरण में आप गुच्छों को प्रतिदर्श का रूप देते हैं और दूसरे चरण में आप प्रत्येक प्रतिदर्श गुच्छ के भीतर प्रतिदर्श इकाई का चयन करते हैं, इस प्रतिचयन की क्रियाविधि को द्वि–चरणी प्रतिचयन कहते हैं। यहां, गुच्छों को प्राथमिक इकाइयां और प्रतिदर्श इकाइयों के भीतर की इकाइयां 'द्वितीयक इकाइयां' कहलाती हैं।

**उदाहरण 12.6 :** मान लीजिए आप उत्तर प्रदेश राज्य के किसी बैंक के एटीएम प्रयोगकत्ताओं की राय जानना चाहते हैं। हम राज्य को 30 गुच्छों (अर्थात हम जिले को इकाई के रूप में मान कर, एक या दो जिलों को एक गुच्छ) में परिवर्तित कर सकते हैं। यहां, मान लीजिए, इन गुच्छों में से प्रत्येक समग्र रूप से उत्तर प्रदेश के एटीएम प्रयोगकर्ताओं की राय को दर्शाएंगें। इसके बाद हम गुच्छों के प्रतिदर्श का चयन करेंगे और प्रत्येक गुच्छ में से सभी एटीएम प्रयोगकर्ताओं की राय प्राप्त करेंगे।

### 12.7.2 गुच्छ प्रतिचयन के उपादेयता

क) गुच्छ प्रतिचयन का मुख्य फायदा है कि इससे यात्रा में लगने वाला समय कम लगेगा और इस संदर्भ में आंकड़ों को इकट्ठा करने में कम खर्चा होगा।

ख) शोधकर्त्ता को सभी गुच्छों पर प्रकाश डालने की आवश्यकता नहीं रहती, इसलिए केवल प्रतिदर्श गुच्छ पर ही ध्यान केंद्रित किया जाएगा। यह अधिक व्यावहारिक विधि है जो क्षेत्रकार्य को अधिक सरल बनाती है।

### 12.7.3 गुच्छ प्रतिचयन की सीमाएं

क) गुच्छ प्रतिचयन में हम मान लेते है कि प्रत्येक गुच्छ, सभी गुच्छों की समष्टि इकाइयों की विसमता को दर्शाती है। लेकिन यह कल्पना कई मामलों में सही साबित नहीं होती क्योंकि बहुधा प्रवृत्ति है कि समग्र समष्टि की इकाइयों की तुलना में गुच्छों की इकाइयां अधिक समरूप होती है। इसका अर्थ है कि विषम गुच्छों को गठित करना कठिन कार्य है।

ख) यादृच्छिक प्रतिचयन और स्तरित प्रतिचयन की तुलना में, दिए गए प्रतिदर्श आमाप के लिए, गुच्छ प्रतिचयन की प्रतिचयन क्षमता निम्न होती है। यह केवल कम खर्चीली विधि है, लेकिन सांख्यिकीय दृष्टिकोण से अधिक कुशल विधि नहीं है।

## 12.8 बहुचरणी प्रतिचयन

गुच्छ प्रतिचयन में हमने देखा कि जब हम प्रत्येक गुच्छ से सभी इकाइयों को लेने के बजाए, प्रतिदर्श का चयन करते हैं तो हम इसे द्धि–चरणी प्रतिचयन कहते हैं। बहुचरणी प्रतिचयन (multistage sampling), द्धि–चरणी प्रतिचयन का विस्तार है।

अभी तक हमने चार विधियों का अध्ययन किया, जो हैं :

(क) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन,

(ख) क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन,

(ग) स्तरित प्रतिचयन, और

(घ) गुच्छ प्रतिचयन।

ये सरलतम प्रायिकता (या यादृच्छिक) प्रतिचयन की क्रियाविधियां हैं। लेकिन, असल–जीवन या सामाजिक विज्ञान शोध में हम जिन प्रतिचयन की विधियों का प्रयोग करते हैं, वे उपर्युक्त चार विधियों की तुलना में अधिक जटिल हैं। बहुचरणी प्रतिचयन का बुनियादी सिद्धांत है कि अपनी प्रतिचयन संबंधी आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए, विविध उपयोगी तरीकों से हम इन सरल विधियों को एक दूसरे से जोड़ सकते हैं। जब हम उपर्युक्त प्रतिचयन की दो या अधिक विधियों को एक दूसरे से जोड़ देते हैं तो ऐसे प्रतिचयन को हम बहुचरणी प्रतिचयन कहते हैं।

**उदाहरण 12.7** : मान लीजिए आप हरियाणा में किसी स्कूल के बच्चों से बातचीत करना चाहते हैं ताकि अभिभावकों की सामाजिक–आर्थिक पृष्ठभूमि के आधार पर स्कूलों को श्रेणीबद्ध किया जा सके। इसके लिए, आपको पहले चरण में, गुच्छ प्रतिचयन विधि लागू करनी होगी। हमें हरियाणा को विविध गुच्छ या जिलों में बांटना होगा। इसके बाद, सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि का प्रयोग करते हुए हम जिलों (गुच्छों के प्रतिदर्श का चयन करेंगे। दूसरे चरण में हम स्तरित प्रतिचयन विधि का प्रयोग करते हुए स्कूलों को बांटेंगे। इस संदर्भ में स्तर से आशय हे; सरकारी स्कूल, सरकारी सहायता प्राप्त स्कूल, केंद्रीय विद्यालय और पब्लिक स्कूल। हम सरल यादृच्छिक प्रतिचयन या क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन अर्थात दोनों में से कोई भी एक विधि का प्रयोग करते हुए प्रत्येक स्तर में स्कूलों के प्रतिदर्श का चयन करेंगे। तीसरे चरण में, हम दुबारा सरल यादृच्छिक प्रतिचयन या क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन विधि का प्रयोग करते हुए प्रतिदर्शी कक्षा से प्रतिदर्श–विद्यार्थियों का चयन करेंगे।

बहुचरणी प्रतिचयन में प्रतिनिधि प्रतिदर्श की प्राप्ति के लिए, विविध चरणों के प्रयोगों पर विचार करना संभव है। प्रत्येक चरण में प्रतिचयन की उपयोगी विधि का प्रयोग किया जाता है। प्रत्येक चरण के अंत में प्रतिदर्श का आकार कम हो जाता है।

उपादेयता

क) बहुचरणी प्रतिचयन की क्रियाविधि, आंकड़ा संग्रहण संबंधी लागतों में कटौती द्वारा खर्चा बचाती है।

ख) बहुचरणी प्रतिचयन विधि अधिक खर्चीली हैं और प्रतिचयन के विविध चरणों में प्रतिचयन की विविध क्रियाविधियों के प्रयोग की अनुमति प्रदान करती है।

ग) यदि समष्टि का फेलाव, विस्तृत भौगोलिक क्षेत्र में है तो बहुचरणी प्रतिचयन, सर्वाधिक उपयुक्त प्रतिचयन की विधि है।

**सीमाएं** : यदि विविध चरणों पर चयनित प्रतिचयन की इकाइयां प्रतिनिधि नहीं है तो बहुचरणी प्रतिचयन विधि अपेक्षाकृत कम सटीक और कम कारगर सिद्ध होती है।

**बोध प्रश्न 1**

सही उत्तर पर निशान (√) लगाइए।

1) निम्नलिखित में से कौन सी समष्टि प्रतिदर्श चयन करने की क्रियाविधि है?

   क) यादृच्छिक प्रतिचयन

   ख) गैर–यादृच्छिक प्रतिचयन

   ग) स्तरित प्रतिचयन

   घ) उपर्युक्त सभी

2) मान लीजिए आप समष्टि के लिए स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन की क्रियाविधि लागू कर रहे हैं, तो आप प्रतिदर्श का चयन किस प्रकार करेंगे?

क) प्रत्येक स्तर से यादृच्छिक रूप से इकाइयों की समान संख्या का चयन

ख) प्रत्येक स्तर से समान संख्या में इकाइयों को लेना और निष्कर्षों की तुलना करना।

ग) समष्टि के अनुपात में, प्रत्येक स्तर से यादृच्छिक रूप से प्रतिदर्श का चयन

घ) ख और ग

च) क और ग

3) बताइए, निम्नलिखित कथनों में से कौन से सही है और कौन से गलतः

क) प्रतिचयन की ऐसी क्रियाविधि जो एकसमान अंतरालों पर समष्टि से इकाइयों का चयन करती है, सरल यादृच्छिक प्रतिचयन कहलाती है।

ख) प्रतिचयन की ऐसी क्रियाविधि जो समष्टि को ऐसे सुपरिभाषित समूहों में विभाजित करती है जिससे यादृच्छिक प्रतिदशों की प्राप्ति होती है, स्तरित प्रतिचयन कहलाती है।

4) किसी समष्टि में ऐसे विभिन्न समूह हैं जहां समूह एक दूसरे से काफी भिन्न हैं लेकिन प्रत्येक समूह के भीतर अधिक भिन्नता नहीं है। ऐसी स्थिति में प्रयोग हेतु, सर्वाधिक उपयुक्त प्रतिचयन की क्रियाविधि हैः

क) गुच्छ प्रतिचयन

ख) क्रमबद्ध प्रतिचयन

ग) स्तरित प्रतिचयन

घ) बहुचरणी प्रतिचयन

## 12.9 गैर–प्रायिकता प्रतिचयन की क्रियाविधियां

गैर–प्रायिकता प्रतिचयन के विविध प्रकार हैं, जैसे;

1) सुविधाजनक प्रतिचयन (convenience sampling)
2) ऐच्छिक प्रतिचयन (judgement sampling)
3) कोटा/नियतमात्रात्मक प्रतिचयन (quota sampling)
4) तुषारपिंडीय प्रतिचयन (snowball sampling)

आइए गैर–प्रायिकता प्रतिचयन प्राप्ति की क्रियाविधि की चर्चा करें।

### 12.9.1 सुविधाजनक प्रतिचयन

यह गैर–प्रायिकता प्रतिचयन की सर्वाधिक सामान्य रूप से प्रयुक्त विधियों में से एक है। इस विधि में शोधकर्ता की सहूलियत, प्रतिदर्श के चयन का आधार बनती है। विशेषरूप से सर्वेक्षण संबंधी शोध के लिए, आंकड़े इकठ्ठे करने पर विशेष जोर दिया जाता है। ऐसी स्थितियों में प्रतिचयन संबंधी इकाइयों के चयन का जिम्मा साक्षात्कर्ता पर होता है। समष्टि इकाइयों को सहजता से प्रतिदर्श में शामिल किया जाता है क्योंकि वे सही समय में सही जगह पर मिल जाती है। बहुधा इस विधि का प्रयोग प्रारंभिक शोध–प्रयासों के दौरान किया जाता है ताकि प्रतिदर्श चयन के लिए बिना समय और धन की बर्बादी के परिणामों

का कुल अनुमान प्राप्त किया जा सकें। उदाहरण के तौर पर बजट सत्र के दौरान या जब किसी वस्तु की कीमत बढ़ जाती है या जब नयी सरकार बनती है, तो आम जनता की राय जानने के लिए शोधकर्त्ता/पत्रकार सुविधाजनक प्रतिदर्शों का प्रयोग करते हैं। विपणन संबंधी शोधकार्यों में इनका विस्तृत प्रयोग किया जाता है।

सुविधाजनक प्रतिचयन का लाभ है कि यह कम खर्चीली विधि है और इसमें समय भी कम लगता है। इस विधि की सीमाएं हैंः क) इसमें प्रतिदर्श चयन एक तरफा हो सकता है, और ख) इससे समष्टि का प्रतिनिधि प्रतिदर्श प्राप्त नहीं होता और इसलिए हम परिणामों को व्यावहारिक रूप नहीं दे सकते।

### 12.9.2 ऐच्छिक प्रतिचयन

गैर–प्रायिकता प्रतिचयन की यह ऐसी क्रियाविधि है जो सामान्य रूप से प्रयोग में लाई जाती है। इस क्रियाविधि को अक्सर उद्देश्यपूर्ण प्रतिचयन के रूप में जाना जाता है। इस क्रियाविधि में शोधकर्ता अपने निर्णय/विवेक के आधार पर प्रतिदर्श का चयन करता है। शोधकर्ता का मानना है कि चुनिंदा, प्रतिदर्श अवयव, समष्टि के प्रतिनिधि हैं। जैसे, उपभोक्ता कीमत सूचकांक की गणना, ऐच्छिक प्रतिचयन पर आधारित होती है। इस विधि में प्रतिदर्श में उपभोक्ता वस्तुओं की टोकरी और अन्य वस्तुओं और सेवाएं शामिल हैं जो प्रतिनिधि प्रतिदर्श को प्रतिबिंबित कर सकती हैं। इन वस्तुओं की कीमत, ऐसे चुनिंदा शहरों से ली जाती है जिन्हें ऐसे विशिष्ट शहरों का दर्जा दिया गया है जहां की जनसांख्यिकीय रूपरेखा राष्ट्रीय रूपरेखा से मेल खाती है।

ऐच्छिक प्रतिचयन का लाभ है कि यह सस्ती, सरल और आसानी से अपनाई जाने वाली विधि है। इसका दोष है कि यह समष्टि के प्रत्यक्ष सामान्यीकरण की अनुमति नहीं देती। प्रतिदर्श की गुणवता शोधकर्ता के विवेक पर निर्भर करती है।

### 12.9.3 कोटा/नियतमात्रात्मक प्रतिचयन

इस क्रियाविधि में, समष्टि को लिंग, आयु शिक्षा, धर्म, आय–समूह आदि जैसी कुछ विशेषताओं के आधार के समूहों में बांट दिया जाता है। प्रत्येक समूह से इकाइयों के कोटे का निर्धारण किया जाता है। यह कोटा समानुपातिक या गैर–समानुपातिक हो सकता है। समानुपातिक कोटा प्रतिचयन, समष्टि की प्रत्येक विशेषता के समानुपात पर आधारित होता है क्योंकि प्रतिदर्श समानुपात, समष्टि समानुपात को दर्शाता है। जैसे, यदि आप जानते हैं कि शहर में ऐसे 80 प्रतिशत परिवार हैं जिनकी आय प्रतिवर्ष 1,00,000 रूपए से कम है और 20 प्रतिशत परिवार है जिनकी प्रतिवर्ष आय 10,00,000 से ऊपर है। यहां हमारा उद्देश्य, समष्टि की प्रत्येक विशेषता के आधार पर प्रतिचयन के समानुपातिक कोटे की पूर्ति करना है।

गैर–समानुपातिक कोटा प्रतिचयन विधि अपेक्षाकृत कम प्रतिबंधी है। इस क्रियाविधि में आप प्रत्येक समूह से प्रतिदर्शी इकाइयों की न्यूनतम संख्या का विशेष रूप से उल्लेख कर सकते हैं। इसमें आपका समष्टि से संबंधित अनुपातों से कोई सरोकार नहीं है। जैसे, उपर्युक्त उदाहरण में, आप 80 प्रतिशत और 20 प्रतिशत की बजाए, प्रत्येक आय समूह से केवल 50 परिवारों का इंटरव्यू ले सकते हैं। साक्षात्कर्ता को अपने विवेक या निर्णय के आधार पर प्रत्येक समूह के लिए कोटा पूरा करने की हिदायत दी जाती है। कोटा प्रतिचयन का मुख्य उद्देश्य, समष्टि में विविध समूहों को उस सीमा तक दर्शाना है, जहां तक जांचकर्ता दर्शाना चाहता है। कोटा प्रतिचयन को स्तरित प्रतिचयन (जिसका अध्ययन आपने पहले किया था) की भांति ने समझें। स्तरित प्रतिचयन में आप प्रत्येक स्तर या समूह

से यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन करते हैं जबकि कोटा प्रतिचयन में साक्षात्कर्ता का नियत कोटा होता है। जैसे, किसी शहर में पांच विपणन केन्द्र हैं। कंपनी अपने नये उत्पाद के लिए मांग का निर्धारण करना चाहती है और प्रत्येक केंद्र से 50 संभावित ग्राहकों से प्रश्न पूछने के लिए अपने 5 जांचकर्ताओं को भेजती है जो इन लोगों से बातचीत करके मांग का निर्धारण करेंगे। यदि उत्पाद, महिलाओं से संबंधित हैं तो आप घरेलू, नौकरीपेशा, युवा या वृद्धि महिलाओं जैसे महिला ग्राहकों के विविध समूहों से पूरी जानकारी प्राप्त नहीं कर सकते। प्रतिचयन की इस विधि में आपको प्रत्येक जाँचकर्ता के लिए कोटा निर्धारित करना पड़ेगा।

यदि आपके विचारानुसार प्रतिदर्श, समष्टि की विशेषताओं के अनुरूप है तो अन्य विधियों की तुलना में, कोटा प्रतिचयन के अधिक फायदे हैं। इसके अलावा आंकड़े इकट्ठे करने में इससे धन और समय भी कम लगता है। लेकिन, इसके साथ–साथ इस विधि के कुछ दोष भी हैं। कोटा प्रतिचयन में, यादृच्छिक प्रतिदर्श चयन की बजाए, प्रतिदर्शों को जांचकर्ता को सहूलियत के आधार पर चुना जाता है। इसलिए चुनिंदा प्रतिदर्श एक तरफा भी हो सकते हैं। यदि ऐसी विशेषताओं की संख्या अधिक है जिनके आधार पर कोटा तय किया जाता है तो प्रत्येक समूह/उप–समूह के लिए कोटा/उप–कोटा तय करना बेहद कठिन होता है। इसके अलावा, जांचकर्ता भी आमतौर पर ऐसे लोगों से ही सूचना इकट्ठा करना चाहते हैं जो इसके इच्छुक होते हैं। वे स्वयं भी अनिच्छुक इकाइयों को अनदेखा करते हैं।

### 12.9.4 तुषारपिंडीय प्रतिचयन

तुषारपिंडीय प्रतिचयन में हम सर्वप्रथम ऐसे व्यक्ति की पहचान करते हैं जो हमारे अध्ययन के अनुरूप है और हमारे मानदंडों को पूरा करता है। ऐसे व्यक्ति को चुनने के बाद हम उससे ऐसे अन्य व्यक्तियों की सिफारिश करने को कहते हैं जो सभी हमारे मानदंडों को पूरा कर सकते हों। यद्यपि इस विधि से प्रतिनिधि प्रतिदर्श की प्राप्ति बेहत मुश्किल है लेकिन कभी–कभी यह श्रेष्ठ उपलब्ध विधि भी हो सकती है। यह विशेषरूप से उपयोगी होती है जब आप ऐसी समष्टि तक पहुंच स्थापित करना चाहते हैं जिस तक पहुंचा नहीं जा सकता या जिन्हें ढूंढ़ना मुश्किल है। जैसे, मान लीजिए आप बेघर लोगों का अध्ययन कर रहे हैं। लेकिन किसी विशिष्ट भौगोलिक क्षेत्र में आप उन्हें ढूंढ़ नहीं पा रहे। लेकिन उस क्षेत्र में यदि आप एक या दो ऐसे लोगों की पहचान कर लेते हैं तो वे अपने क्षेत्र के ऐसे अन्य लोगों को कैसे और कहां ढूंढ़ना है, इसकी जानकारी आपको स्वयं दे देंगे।

## 12.10 प्रतिदर्श आमाप का निर्धारण

प्रतिनिधि प्रतिदर्श की प्राप्ति के लिए, उपयुक्त प्रतिचयन की क्रियाविधि को प्रयोग में लाना बेहद जरूरी है। लेकिन यह शर्त पर्याप्त नहीं है। उपर्युक्त के अलावा, हमें प्रतिदर्श आमाप का निर्धारण भी करना चाहिए। प्रतिदर्श का आकार कितना हो, यह एक कठिन प्रश्न है। विविध विचारों द्वारा प्रतिदर्श आकार आमाप का निर्धारण किया जा सकता है। प्रतिदर्श आमाप निर्धारित करने में, ऐसे कुछ विचार निम्नलिखित हैं:

क) प्रतिचयन त्रुटि (sampling error)

ख) संभावित तुलनाओं की संख्या

ग) प्रतिक्रिया दर (response rate)

घ) उपलब्ध निधियां

क) **प्रतिचयन त्रुटिः** इकाई 11 में आपने सीखा कि बड़े प्रतिदर्श स्थापित करने की तुलना में छोटे प्रतिदर्श बनाते समय प्रतिचयन संबंधी त्रुटियां अधिक होने की संभावना होती है। दूसरी तरफ, छोटे प्रतिदर्शों की तुलना में बड़े प्रतिदशों की गैर–प्रतिचयन त्रुटियां अधिक होती है। प्रतिचयन त्रुटि ऐसी संख्या है जो प्रतिदर्श के अनुमान की परिशुद्धता को व्यक्त करती है। इसे आमतौर पर सांख्यिकीय विश्वस्यता स्तर (Level of confidence) से संबंद्ध त्रुटि उपांत (margin of error) के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। जैसे, आप कह सकते है कि प्रधान मंत्री अधिमानी निर्वाचन में पदासीन को 95 प्रतिशत विश्वास्यता स्तर पर 5 प्रतिशत (–) या (+) बिंदुओं के त्रुटि उपांत (परिशुद्धता) से 65 प्रतिशत लोगों का समर्थन मिल रहा है। इसका अर्थ है कि यदि ऐसे ही सर्वेक्षण, मतदाताओं के 100 विविध प्रतिदर्शों पर किए जाएें तो ऐस 95 सर्वेक्षण दिखाएंगे कि पदाधिकारी को 60 प्रतिशत और 70 प्रतिशत के मतदाताओं के बीच ($65\% \pm 5\%$) के किसी प्रतिशत का समर्थन मिला है। ध्यान रखें अपने परिणामों के परिशुद्धता स्तर को जितना बढ़ाएंगें, उतने ही बड़े प्रतिदर्श की आपको आवश्यकता होगी।

ख) **संभावित तुलनाओं की संख्याः** कभी कभार हम प्रतिदर्श में दो या अधिक समूहों (स्तरों) की तुलना करना चाहते हैं। जैसे, हम महिला और पुरूष उत्तरदाताओं या ग्रामीण और शहरी उत्तरदाताओं के बीच तुलना करना चाहते हैं। या हम देश के 4 भौगोलिक क्षेत्र जैसे उत्तर, दक्षिण, पूर्व और पश्चिम के लिए परिणामों की तुलना करना चाहते हैं। इसके लिए हमें समष्टि के प्रत्येक क्षेत्र या स्तर में पर्याप्त आकार के प्रतिदर्श की आवश्यकता होगी। इसलिए, समष्टि, विशेषताओं की विषमता प्रतिदर्श आमाप तय करने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है।

ग) **प्रतिक्रिया दरः** डाक संबंधी सर्वेक्षणों में, हमें पता है कि उत्तरदाताओं को भेजी जाने वाली सभी प्रश्नवालियां, भरी हुई वापस नहीं आती। डाक सर्वेक्षण से प्राप्त अनुभवों के आधार पर, प्रतिक्रिया दरें 10 प्रतिशत से 50 प्रतिशत तक के बीच की होती हैं। तब, यदि आप 20 प्रतिशत प्रतिक्रिया, दर की आशा करते हैं तो आपको अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप की संख्या से 5 गुना अधिक प्रश्नावलियां डाक से भेजनी होगी।

घ) **उपलब्ध निधियां** : उपलब्ध निधियां, प्रतिदर्श आमाप को प्रभावित कर सकती हैं। यदि अध्ययन के लिए उपलब्ध निधियां सीमित हैं तो आंकड़ों को इकठ्ठा करने के लिए आप उपलब्ध कुल धन की निश्चित राशि से अधिक खर्च करने की स्थिति में नहीं होंगे।

जब आप गैर–प्रायिकता प्रतिचयन की क्रियाविधियों का प्रयोग करते हैं तो प्रतिदर्श का आकार, तय करना और भी कठिन हो जाता है। ऐसा इसलिए है कि गैर–प्रायिकता प्रतिचयन की क्रियाविधियां के ऐसे कुछ सुनिश्चित नियम नहीं है। जिनका अनुसरण करना, हमारे लिए आवश्यक है। यह सब कुछ विशिष्ट बातों पर निर्भर करता है जैसे; आप क्या जानना चाहते हैं, पूछताछ का उद्देश्य क्या है, क्या उपयोगी होगा, इसकी विश्वसनीयता क्या है और उपलब्ध समय और संसाधनों से हम क्या कर सकते हैं। उद्देश्यपूर्ण प्रतिचयन में, प्रतिदर्श का निर्णय उद्देश्य के आधार पर लिया जाता है। गैर–प्रायिकता प्रतिचयन की क्रियाविधियों में प्रतिदर्श आमाप के जरिए वैधता (validity), सार्थकता (meaningfulness) और पूरी जानकारी का चुनिंदा प्रतिदर्श इकाइयों की सूचना–उत्कृष्टता से अधिक गूढ़ संबंध होता है।

### प्रतिदर्श आमाप निर्धारण के कुछ सूत्र

तकनीकी विशेषज्ञों का मानना है कि अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप, ऐसे आकलनों की परिशुद्धता का फल है जिसकी प्राप्ति आप करना चाहते है और समष्टि के प्रसरण और विश्वस्यता का ऐसा स्तर है जिसका प्रयोग आप करना चाहते है। यदि आपको परिशुद्धता और विश्वस्यता का स्तर अधिक बड़ा चाहिए तो प्रतिदर्श का आकार भी आपको बड़ा करना होगा। सर्वाधिक प्रयुक्त विश्वस्यता का स्तर 95 प्रतिशत और 99 प्रतिशत है और अधिकाधिक प्रयुक्त परिशुद्धता के स्तर (precision level) 5 प्रतिशत और 1 प्रतिशत है। उपर्युक्त चर्चित विविध विचारों के मद्देनजर, ऐसे बहुत से सूत्र हैं जिनका प्रयोग प्रतिदर्श के आकार का निर्धारण करने में किया जाता है। इस अनुभाग में हम इनमें से तीन की चर्चा करेंगे।

i) यदि हम जवाबी (responding) प्रतिदर्श के प्रतिशत (समानुपातों) के रूप में परिणामों को दर्शाना चाहते हैं तो हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे:

$$n_i = \frac{P_i(1-P_i)}{\frac{A^2}{Z^2} + \frac{P_i(1-P_i)}{N_i}}$$

जहां $n_i$ = अपेक्षित i वें गुण का प्रतिदर्श आमाप है

$P_i$ = विषय (interest) के i वे गुण वाली समष्टि का आकलित समानुपात है जैसे, महिला, पुरूष, शहरी, ग्रामीण आदि के समानुपात।

A = अपेक्षित परिशुद्धता (0.01, 0.05 आदि)

Z = विश्वास्यता स्तर दर्शाने वाला का मानकित मूल्य (95 प्रतिशत विश्वास्यता स्तर पर z = 1.96 और 99 प्रतिशत विश्वास्यता स्तर पर z = 2.58)

$N_i$ = i वे गुण की समष्टि का आमाप (निर्धारित या आकलित)

**उदाहरण 12.8** : किसी समष्टि में 80 प्रतिशत ग्रामीण और 20 प्रतिशत शहरी व्यक्ति शामिल हैं। यदि उस समष्टि की संख्या 50,000 है अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप का निर्धारण कीजिए। मान लीजिए वांछनीय परिशुद्धता और विश्वस्यता का स्तर क्रमशः 1 प्रतिशत और 99 प्रतिशत हैं

इस उदाहरण में,

$P_1$ = ग्रामीण व्यक्तियों का समानुपात = 0.80 शहरी

$P_2$ = शहरी व्यक्तियों का समानुपात = 0.20

$N_1$ = ग्रामीण समष्टि आमाप 50000 x 0.80 = 40000

$N_2$ = शहरी समष्टि आमाप 50000 x 0.20 = 10000

A = 0.01

Z = 2.58 (99 प्रतिशत विश्वस्यता स्तर पर)

अपेक्षित समष्टि आमाप है

$$n_1 = \text{ग्रामीण प्रतिदर्श} = \frac{P_1(1-P_1)}{\frac{A^2}{Z^2} + \frac{P_1(1-P_1)}{N_1}}$$

$$= \frac{0.80(1-0.80)}{\frac{0.01^2}{2.58^2}+\frac{0.80(1-0.80)}{40000}}$$

$$= \frac{0.80(0.20)}{\frac{0.0001}{6.6564}+\frac{0.80(0.20)}{40000}}$$

$$= \frac{0.16}{0.000019+\frac{0.16}{40000}}$$

$$= \frac{0.16}{0.000019+0.000004}$$

$$= \frac{0.16}{0.000023} = 8410.8$$

अथवा आप लिख सकते है, 8411

$$n_2 = \text{शहरी प्रतिदर्श} = \frac{P_2(1-P_2)}{\frac{A^2}{Z^2}+\frac{P_2(1-P_2)}{N_2}}$$

$$= \frac{0.20(1-0.20)}{\frac{0.01^2}{2.58^2}+\frac{0.20(1-0.20)}{10000}}$$

$$= \frac{0.20(0.80)}{\frac{0.0001}{6.6564}+\frac{0.20(0.80)}{10000}}$$

$$= \frac{0.16}{0.000019+\frac{0.16}{10000}}$$

$$= \frac{0.16}{0.000019+0.000016}$$

$$= \frac{0.16}{0.000035} = 4568.4$$ अथवा आप लिख सकते है, 4568

अतः हमें 8411 + 4568 = 12979 इकाइयों के आमाप का प्रतिदर्श चाहिए।

ii) यदि हम जवाबी (responding) प्रतिदर्श के माध्य या औसत के रूप में परिणाम देना चाहते हैं, तो हमें निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करना होगा :

$$n_i = \frac{P_i^2}{\frac{A^2}{Z^2}+\frac{P_i^2}{N_i}}$$

जहां = अपेक्षित i वे गुण का अतिदर्श आमाप है

$p_i$ = i वे गुण का आकलित मानक विचलन है (जैसे उच्च आय समूह, निम्न आय समूह आदि की औसतन आय)

A = अपेक्षित परिशुद्धता (0.01 या 0.05 मामलानुसार)

$Z$ = विश्वस्यता स्तर (95 प्रतिशत विश्वस्यता स्तर पर $z$ = 1.96 और 99 प्रतिशत विश्वास्यता स्तर पर $z$ = 2.58) दर्शाने का मानकित मूल्य)

$N_i$ = $i$ वे गुण की समष्टि का आकार (निश्चित या आकलित)

**उदाहरण 12.9:** किन्हीं परिवारों की औसतन आय जानने के लिए, कोई अध्ययन करने की योजना बनाई जाती है। यदि परिवारों का मानक विचलन 2.5 और समष्टि संख्या 10,000 हो तो अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप का निर्धारण कीजिए। मान लीजिए इष्ट परिशुद्धता ओर विश्वस्यता के स्तर क्रमशः 5 प्रतिशत और 95 प्रतिशत है।

इस उदाहरण में,

$P_1$ = आय का मानक विचलन हैं = 2.5

$N_1$ = परिवारों की संख्या हैं = 10,000

$A$ = 0.05

$Z$ = 1.96 (95 प्रतिशत विश्वस्यता के स्तर पर)

अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप है।

$$n_1 = \frac{P_1^2}{\frac{A^2}{Z^2} + \frac{P_1^2}{N_1}}$$

$$= \frac{2.5^2}{\frac{0.05^2}{1.96^2} + \frac{2.5^2}{10000}}$$

$$= \frac{6.25}{\frac{0.0025}{3.8416} + \frac{6.25}{10000}}$$

$$= \frac{6.25}{0.000651 + 0.000625}$$

$$= \frac{6.25}{0.001276} \text{ त्र } 4898$$

iii) यदि हम परिणामों को अलग–अलग तरीकों से देना चाहते हैं या विषय के गुण के मानक विचलन या समानुपात के आकलन में हमें कठिनाई है तो हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे : $n = \frac{0.25}{\frac{A^2}{Z^2} + \frac{0.25}{N}}$

जहां, $n$ = अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप है

$A$ = अपेक्षित परिशुद्धता (0.01 या 0.05 यथा मामला)

$Z$ = विश्वस्यता स्तर दर्शान का मानकित मूल्य

(95 प्रतिशत विश्वास्यता स्तर पर $z$ = 1.96 और 99 प्रतिशत विश्वास्यता स्तर पर $z$ = 2.58)

$N$ = समष्टि आमाप (निश्चित या आकलित)

**उदाहरण 12.10** : किसी समष्टि में 10,000 व्यक्ति हैं। अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप का निर्धारण कीजिए जब इष्ट परिशुद्धता और विश्वास्यता के स्तर क्रमशः 5 प्रतिशत और 99 प्रतिशत हैं।

इस उदाहरण में,

$N = 10000$

$A = 0.05$

$Z = 2.58$ (99% विश्वस्यता स्तर पर)

अपेक्षित प्रतिदर्श आमाप है

$$n = \frac{0.25}{\frac{0.05^2}{2.58^2} + \frac{0.25}{10000}}$$

$$n = \frac{0.25}{\frac{0.0025}{6.6564} + \frac{0.25}{10000}}$$

$$n = \frac{0.25}{0.0003756 + 0.000025} = \frac{0.25}{0.000401} = 624$$

**बोध प्रश्न 2**

1) बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से यही या गलत हैं।

   क) जब इकाइयों को जांचकर्ता की जांच के आधार पर प्रतिदर्श में शामिल किया जाता है तो ऐसे प्रतिचयन को यादृच्छिक कहते हैं।

   ख) जैसे–जैसे प्रतिदर्श का आकार (आमाप) बढ़ता जाता है, प्रतिचयन त्रुटियां कम होती जाती हैं।

   ग) सुविधाजनक प्रतिचयन का दोष है कि यह प्रतिनिधि प्रतिदर्श नहीं हो सकती।

2) ऐच्छिक प्रतिचयन का मुख्य दोष है कि

   क) यह क्रियाविधि लंबी और जटिल है।

   ख) प्रतिदर्श–चयन, जांचकर्ता की व्यक्तिगत जांच पर निर्भर करता है।

   ग) इससे लघु प्रतिदर्श आकार (आमाप) की प्राप्ति होती है।

   घ) यह अत्यंत खर्चीली है।

## 12.11 सार संक्षेप

सरल यादृच्छिक प्रतिचयन ऐसी क्रियाविधि है जिनका प्रयोग सर्वाधिक किया जाता है, क्योंकि यह सभी समष्टि इकाइयों को प्रतिदर्श में शामिल किए जाने की अनुमति देती है। यादृच्छिक संख्या सारणी के प्रयोग से प्रतिदर्श इकाइयों का चयन किया जाता हैं क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिदर्श विधि में आरंभिक बिंदु के रूप में यादृच्छिक रूप से पहली प्रतिदर्श इकाई का प्रयोग किया जाता है और इसके बाद की प्रतिदर्श इकाइयों का चयन स्वतः हो जाता है। स्तरित प्रतिदर्श, प्रत्येक स्तर से इकाइयों के समावेश को सुनिश्चित करता है। गुच्छ प्रतिदर्श में यादृच्छिक रूप से चुने एक या अधिक गुच्छों की पूर्ण गणना शामिल है।

गैर–प्रायिकता प्रतिचयन की क्रियाविधियों में सुविधाजनक प्रतिचयन, ऐच्छिक प्रतिचयन, कोटा प्रतिचयन और तुषारपिंडीय प्रतिचयन शामिल हैं।

ये प्रतिचयन की क्रियाविधियां प्रतिचयन संबंधी पक्षपात से मुक्त नहीं है, लेकिन कुछ स्थितियों विशेष रूप से विपणन संबंधी शोधकार्यों में अभी भी, ये प्रचलित हैं।

प्रतिदर्श आमाप का निर्णय लेने में बहुत से कारक शामिल हैं। ये समष्टि में शामिल विविध समूह, समष्टि विषमता और उपलब्ध निधियां और समय जैसे कारक हो सकते हैं। शोधकार्यों में प्रतिदर्श के प्रयोग से समय, धन और जनशक्ति की बचत होती है, यदि इकाइयों के चयन में उपयोगी प्रतिचयन क्रियाविधि का प्रयोग किया जाए तो उपयुक्त प्रतिदर्श आमाप का चयन किया जाता है और प्रतिचयन त्रुटियों को कम करने की अनिवार्य सावधानियां बरती जाती है। इससे समष्टि के बारे में चुनिंदा प्रतिदर्श से हमें वैध और विश्वसनीय जानकारी ही प्राप्त होगी।

## 12.12 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1) घ
2) च
3) क)सही ख) सही
4) ग

**बोध प्रश्न 2**

1) क) गलत ख) सही ग) सही
2) ख

# इकाई 13 सांख्यिकीय आकलन*

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य
13.1 विषय प्रवेश
13.2 सांख्यिकीय पृष्ठभूमि
13.3 कुछ संकल्पनाएँ
13.3.1 प्राचल
13.3.2 प्रतिदर्शज
13.3.3 आकलक एवं आकल
13.3.4 प्रतिदर्शी बंटन
13.3.5 प्रतिदर्शज की मानक त्रुटि
13.4 गैर–प्रतिचयन और प्रतिचयन त्रुटियाँ
13.4.1 गैर–प्रतिचयन त्रुटि
13.4.2 प्रतिचयन त्रुटि
13.5 आकलक के वांछनीय गुणधर्म
13.5.1 अनभिनता
13.5.2 न्यूनतम प्रसरण
13.5.3 संगति और दक्षता
13.6 सांख्यिकीय अनुमिति की संकल्पना
13.7 बिंदु आकलन
13.8 अंतराल आकलन
13.8.1 विश्वस्यता अंतराल
13.8.2 विश्वस्यता सीमाएं
13.8.3 अज्ञात प्रसरण संबंधी विश्वस्यता अंतराल
13.9 सार संक्षेप
13.10 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

## 13.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- प्रतिचयन त्रुटि और गैर–प्रतिचयन त्रुटि के बीच के संबंध को स्पष्ट कर सकेंगे;
- प्रतिदर्श बंटन की संकल्पना को व्यक्त कर सकेंगे;
- मानक त्रुटि की संकल्पना को समझा सकेंगे;
- आकलन की संकल्पना को व्यक्त कर सकेंगे;
- बिंदु आकलन और अंतराल आकलन के बीच अंतर को स्पष्ट कर सकेंगे;
- प्राचल के लिए विश्वस्यता–अंतराल का का आकलन कर सकेंगे; और
- विश्वस्यता–स्तर की संकल्पना की व्याख्या कर सकेंगे।

* प्रो॰ कौस्तुभ बारिक, इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।

## 13.1 विषय प्रवेश

कई बार कुछ सीमाओं, जैसे अपर्याप्त निधि या श्रम शक्ति का अभाव या समय की कमी के कारण हम समष्टि की सभी इकाइयों का सर्वेक्षण नहीं कर पाते। ऐसी स्थिति में हम प्रतिचयन का सहारा लेते हैं अर्थात हम समष्टि के किन्हीं अंशों का ही सर्वेक्षण करते हैं। प्रतिदर्श में शामिल सूचना के आधार पर हम समष्टि के बारे में निष्कर्ष निकालते हैं। यह प्रक्रिया सांख्यिकीय अनुमिति कहलाती है। हमारा यकीन है कि सांख्यिकीय अनुमिति का अर्थशास्त्र के साथ–साथ अन्य अनेक क्षेत्रों, जैसे समाजशास्त्र, मनोविज्ञान, राजनीति विज्ञान, आयुर्विज्ञान आदि में भी बड़े पैमाने पर इस्तेमाल किया जाता है। उदाहरण के लिए चुनाव की प्रक्रिया शुरू होने से पहले या चुनाव परिणामों की घोषणा होने से ठीक पहले अनेक समाचार पत्र और दूरदर्शन के चैनल चुनाव सर्वेक्षण या एक्जिट पोल का संचालन करते हैं। इनका उद्देश्य वास्तविक परिणाम घोषित होने से पहले चुनावी परिणामों के बारे में पूर्वानुमान लगाना है। उस स्थिति में सर्वेक्षणकर्ताओं के लिए सभी मतदाताओं से उनके पसंद के प्रत्याशी के बारे में जान पाना संभव नहीं होता। यह समयावधि बहुत छोटी होती है, संसाधन बहुत सीमित होते हैं, पर्याप्त संख्या में इस काम के लिए व्यक्ति उपलब्ध नहीं होते हैं और चुनाव से पहले पूर्ण रूप से सर्वेक्षण करने से चुनाव का मूल उद्देश्य ही समाप्त हो जाता है।

उपर्युक्त उदाहरण में सर्वेक्षणकर्ता वास्तव में उस परिणाम के बारे में नहीं जानता है, जो मतदाता के मतदान के फलस्वरूप दिखाई देगा। यहाँ पर सभी मतदाताओं की कुल संख्या से समष्टि का निर्माण होता है। इस संदर्भ में सर्वेक्षणकर्ता समष्टि के 'प्रतिनिधि' प्रतिदर्श से आँकड़े इकट्ठा करता है, सभी मतदाताओं से नहीं। प्रतिदर्श से प्राप्त सूचना के आधार पर सर्वेक्षणकर्ता समग्र समष्टि के बारे में अपना पूर्वानुमान व्यक्त करता है।

इस इकाई में सांख्यिकीय अनुमिति की संकल्पना और सांख्यिकीय आकलन की विधियों के बारे में अध्ययन करेंगे। प्रांचल, जैसा कि आप जानते हैं, समष्टि इकाइयों का एक फलन है जबकि प्रतिदर्शज प्रतिदर्शी इकाइयों का फलन है। प्राचल और संगत प्रतिदर्शजों की संख्या काफी हो सकती है। लेकिन, अपनी प्रस्तुति को आसान बनाने के लिए हम इसे केवल समांतर माध्य तक ही सीमित रखेंगे।

## 13.2 सांख्यिकीय पृष्ठभूमि

पिछले दो इकाईयाँ में हमने दो महत्वपूर्ण पहलुओं की चर्चा की हैः सैद्धांतिक प्रायिकता बंटन और प्रतिदर्श तकनीक। ये दो पहलू बुनियादी सांख्यिकीय अनुमिति का निर्माण करते हैं।

इकाई 10 में हमने यादृच्छिक चर की संकल्पना का वर्णन किया था। हमने सीखा कि $X$ एक यादृच्छिक चर है, इसके मान $x_1, x_2, .........., x_n$ और संगत प्रायिकताएँ $p_1, p_2, ......, p_n$ हैं। यहाँ $x_1$ के उपभने की प्रायिकता $p_1$ है तो $x_2$ की प्रायिकता $p_2$ है। यदि मान $x_1, x_2, ........., x_n$ असंतत हैं तो $x$ के वियुक्त मानो (isolated values) की प्रायिकता ज्ञात हो सकती है। दूसरी तरफ $X$ यदि सतत् यादृच्छिक चर हो तो निश्चित परिसर के भीतर $X$ की प्रायिकता ज्ञात की जाएगी जैसा कि $P(a \le X \le b) = p_1$ ण

इकाई 10 और 11 में हमने सैद्धांतिक असतत् प्रायिकता बंटन (जैसे कि द्विपद और पाइसो) और सतत् प्रायिकता बंटन (जैसेकि प्रसामान्य और $t$) की चर्चा की। हमने सीख कि यदि $X$ की प्रसर अनंत हो, तब ये प्रायिकता बंटन, प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करते हैं।

अतः प्रसामान्य बंटन इन प्रायिकता बंटनों की परिसीमित स्थिति है और इसे एक आदर्श प्रायिकता बंटन माना जा सकता है।

प्रसामान्य बंटन को दो प्राचलों द्वारा परिभाषित किया जाता है। ये हैंः माध्य $\mu$ और मानक विचलन $\sigma$ । यदि यादृच्छिक चर से संबंद्ध प्रायिकताएँ, प्रसामान्य बंटन के आधार पर बंटित हों (इसका अर्थ है कि यदि $X$, प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करता है) तब इसके प्रायकिता बंटन फलन के लिए समीकरण का प्रयोग करते हुए हम $P(a \leq X \leq b) = p_1$ प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं।

यहाँ हमारे समक्ष एक समस्या है कि $\mu$ और $\sigma$ कोई भी मान ग्रहण कर सकते हैं और संगत प्रायिकता ज्ञात करने में काफी समय लगता है। इस समस्या का समाधान है कि प्रसामान्य चर से $\mu$ को घटाना ओर इसे $\sigma$ से विभाजित करना। इस तरह हम मानक प्रसामान्य विचर, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ प्राप्त करते हैं, जिसका माध्य = 0 और मानक विचलन = 1 है। आलेख पर $z$ के विभिन्न मानों के लिए प्रायिकताओं के आलेखन से हम 'मानक प्रसामान्य वक्र' (standard normal curve) को प्राप्त करते हैं, जो सममित है और वक्र के नीचे का क्षेत्र = 1 है। ध्यान रखें कि मानक प्रसामान्य वक्र के मामले में हम $x$-अक्ष पर $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ को मापते हैं और $y$-अक्ष पर $x$ के उभरने की प्रायिकता अर्थात $p(z)$ है। अतः मान लीजिए यदि हम प्रसामान्य वक्र के किसी विशेष भाग (जैसे $z$ के दो मानों से बद्ध, मान लीजिए, $z_1$ और $z_2$) पर विचार करें तो वक्र के नीचे का क्षेत्र इसकी प्रायिकता हमें देगा। ध्यान रखें कि इस पाठ्यक्रम के इकाई 2 में वर्णित बारम्बारता वक्र से प्रसामान्य वक्र भिन्न होता है। प्रसामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल से बारम्बारता प्राप्त नहीं होती। इससे हम प्रायिकताओं की प्राप्ति करते हैं।

## 13.3 कुछ संकल्पनाएँ

प्रतिचयन सिद्धांत में आमतौर पर प्रयुक्त कुछ संकल्पनाएँ इस प्रकार हैंः

### 13.3.1 प्राचल

आंकड़ों की छानबीन करने में, हमारा ध्यान मुख्य रूप से समष्टि की एक या अधिक विशेषताओं पर केंद्रित रहता है। ऐसी विशेषता के माप को प्राचल (parameter) कहते हैं। उदाहरण के रूप में, हम किसी विशेष वर्ष के लिए कुछ क्षेत्रों के व्यक्तियों की माध्य आय जानना चाहते हैं। हम इन व्यक्तियों की आमदनी का मानक विचलन भी जानना चाहेंगे। यहाँ, माध्य और मानक विचलन अर्थात् दोनों प्राचल हैं।

प्राचलों को हम सुविधा के लिए ग्रीक अक्षरों में दर्शाते हैं। जैसे समष्टि माध्य को $\mu$ और समष्टि मानक विचलन को $\sigma$ द्वारा दर्शाया जाता है।

यहाँ सभी समष्टि प्रेक्षणों से प्राचल का मान परिकलित करना अत्यंत महत्वपूर्ण है। अतः प्राचल 'माध्य आय' ऐसे सभी विभिन्न व्यक्तियों की आमदनी संबंधी आंकडों से परिकलित की जा सकती है जो समष्टि का गठन करते हैं। इसी तरह, 'ऊँचाई और भार संबंधी सहसंबंध गुणांक' प्राचल की गणना के लिए हमें समष्टि के ऊँचाई एवं भार संबंधी सभी युग्मों के मानों की प्राप्ति की आवश्यकता है। अतः, हम प्राचल को समष्टि मानों के फलन के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। यदि $\theta$ प्राचल है जिसे हमें समष्टि मानों से प्राप्त करना है, $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_N$ तब

$$\theta = f(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_N)$$

### 13.3.2 प्रतिदर्शज

जनगणना और प्रतिदर्श सर्वेक्षण की चर्चा करते समय, हमने देखा कि विभिन्न मौजूद अवरोधों के कारण, कभी कभार समष्टि के बारे में सूचना एकत्रित करना कठिन होता है। अन्य शब्दों में, समष्टि प्राचल अभिकलित करना सदैव संभव नहीं होता। ऐसी स्थितियों में, प्रतिदर्श से प्राप्त सूचना से हम प्राचल का अनुमान बना सकते हैं। प्रतिदर्श संबंधी यह सूचना, प्रतिदर्शज (statistic) के रूप में संक्षिप्त कर दी जाती है। उदाहरण स्वरूप, प्रतिदर्श माध्य या प्रतिदर्श माध्यिका या प्रतिदर्श बहुलक को प्रतिदर्शज कहते हैं। अतः प्रतिदर्शज की गणना, इकाइयों के ऐसे मानों से की जाती है जो प्रतिदर्श में शामिल किए जाते हैं। इसलिए प्रतिदर्शज को प्रतिदर्श मानों के फलन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। आसानी से समझने के लिए, प्रतिदर्शज को रोमन वर्ण माला के अक्षरों द्वारा दर्शाया जाता है। प्रतिदर्श माध्य को $\bar{x}$ और प्रतिदर्श मानक विचलन को $s$ से दर्शाया जा सकता है। यदि $T$ ऐसा प्रतिदर्शज है जिसे हमें $x_1, x_2, \ldots, x_n$ प्रतिदर्श मानों से प्राप्त करना हैं, तब $T = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

### 13.3.3 आकलक एवं आकल

प्रतिदर्शज का मूल उद्देश्य कुछ समष्टि प्राचलों का अनुमान लगाना है। इस संदर्भ में अनुकूल विधि या प्रतिदर्शज परिकलन में प्रयुक्त सूत्र को आकलक (estimator) कहते हैं और परिकलित किया गया प्रतिदर्शज का मान आकल (estimate) कहलाता है।

प्रतिदर्शज परिकलन के लिए हम $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ सूत्र का प्रयोग करते हैं। यह सूत्र आकलक है। इसके बाद, यदि हम इस सूत्र का प्रयोग करते हैं और $\bar{x} = 10$ प्राप्त करते हैं तब '10' आकल होगा।

### 13.3.4 प्रतिदर्शी बंटन

अभी तक आपको स्पष्ट हो चुका होगा कि आमतौर पर मूल समष्टि की तुलना में प्रतिदर्श का आकार अपेक्षाकृत काफी छोटा होता है। जिसके परिणामस्वरूप समान समष्टि से ऐसे बहुत से प्रतिदर्शों का चयन किया जा सकता है जो एक–दूसरे से भिन्न होते हैं। चूंकि प्राचल का आकल, प्रतिदर्श मानों पर निर्भर करता है और ये मान, एक प्रतिदर्श से दूसरे प्रतिदर्श में बदलते रहते हैं। इसलिए समान प्राचल के लिए प्रतिदर्शज के आकल या मान भी अलग–अलग हो सकते हैं। मानों में ऐसे बदलाव को प्रतिचयन उच्चावचन कहते हैं। मान लीजिए, हम $N$ आकार की समष्टि से बहुत से प्रतिदर्शों, जिनमें से प्रत्येक $n$ आकार का है, प्राप्ति करते हैं और प्रत्येक प्रतिदर्श के लिए, प्रतिदर्शज का मान परिकलित किया जाता है। यदि प्रतिदर्शों की संख्या बड़ी है तो सापेक्षिक बारंबारता बंटन के रूप में इन मानों को व्यवस्थित किया जा सकता है। जब प्रतिदर्शों की संख्या अनन्त (infinity) की ओर प्रवृत्त हो तो प्रतिदर्शज के मानों की परिणामी सापेक्षिक बारंबारता बंटन, दिए गए प्रतिदर्शज का प्रतिदर्शी बंटन (sampling distribution) कहलाएगी।

मान लीजिए, हम समष्टि माध्य को आकलित करने के इच्छुक हैं (जो कि प्राचल है) और जिसे $\mu$ द्वारा दर्शाया जाता है। इस समष्टि ($N$ आकार की) से $n$ आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन किया जाता है। प्रतिदर्श माध्य $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ प्रतिदर्शज है जो समष्टि माध्य $\mu$ के तदनुरूपी है। ध्यान दीजिए कि  यादृच्छिक चर है, इसके मान एक प्रतिदर्श से दूसरे में प्रायिकता के रूप में बदलते रहते हैं।

**उदाहरण 13.1**

यदि किसी समष्टि में 5 इकाइयाँ, 2, 4, 6, 8 और 10 शामिल हैं तो मान लीजिए इसमें से बिना प्रतिस्थापन वाली सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की विधि से 2 आकार वाले प्रतिदर्शों का चयन हमें करना है। हम प्रतिदर्श माध्य का प्रतिदर्शों बंटन और इसकी मानक त्रुटि की प्राप्ति करना चाहते हैं।

बिना प्रतिस्थापन के चुने जाने वाले प्रतिदर्शों की संख्या

$$={}^{N}c_{n}={}^{5}c_{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!\,3!}=\frac{5\times 4}{2\times 1}=\frac{20}{2}=10.$$

संगत प्रतिदर्श माध्य $\left(\bar{x}\right)$ सहित संभावित प्रतिदर्शों को तालिका 13.1 में दर्शाया गया है।

**तालिका 13.1: संभावित प्रतिदर्श और प्रतिदर्श माध्य**

| प्रतिदर्श | प्रतिदर्श माध्य $\left(\bar{x}\right)$ |
|---|---|
| (2, 4) | 3 |
| (2, 6) | 4 |
| (2, 8) | 5 |
| (2, 10) | 6 |
| (4, 6) | 5 |
| (4, 8) | 6 |
| (4, 10) | 7 |
| (6, 8) | 7 |
| (6, 10) | 8 |
| (8, 10) | 9 |

अब हम प्रतिदर्श माध्य के बारंबारता बंटन की प्राप्ति कर सकते हैं:

**सारणी 13.2: प्रतिदर्श माध्यों का बांरबारता बंटन**

| प्रतिदर्श माध्य $\left(\bar{x}\right)$ | बारंबारता $(f)$ |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 2 |
| 6 | 2 |
| 7 | 2 |
| 8 | 1 |
| 9 | 1 |

तालिका 13.2 में दिए गए बारंबारता बंटन से, जैसा कि तालिका 13.3 में दर्शाया गया है, हम प्रतिदर्श माध्य के प्रायिकता बंटन को दर्शा सकते हैं।

**तालिका 13.3: प्रतिदर्श माध्यों का प्रतिदर्शी बंटन**

| प्रतिदर्श माध्य $(\bar{x})$ | प्रायिकता $\left(\frac{f}{\Sigma f}\right)$ |
|---|---|
| 3 | $\frac{1}{10}$ |
| 4 | $\frac{1}{10}$ |
| 5 | $\frac{2}{10}$ |
| 6 | $\frac{2}{10}$ |
| 7 | $\frac{2}{10}$ |
| 8 | $\frac{1}{10}$ |
| 9 | $\frac{1}{10}$ |

ध्यान दीजिए कि $\sum f$ जो पहले दर्शाए गए प्रतिदर्श माध्य का बारंबारता बंटन है, 10 के बराबर है। तालिका 13.3 में, हमने प्रायिकताओं के परिकलन के लिए सापेक्षिक बारंबारता का प्रयोग करती है।

### 13.3.5 प्रतिदर्शज की मानक त्रुटि

पिछले अनुभाग में हमने सीखा था कि समष्टि और प्रतिदर्श आकारों के आधार पर हम विविध प्रतिदर्शों की प्राप्ति कर सकते हैं। प्रत्येक प्रतिदर्शज से, हम अपेक्षित प्रतिदर्शज के लिए अलग–अलग मानों की प्राप्ति कर सकते हैं। इन मानों को प्रायिकता बंटन के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं, जिसे संबद्ध प्रतिदर्शज का प्रतिदर्शी बंटन कहते हैं। प्रतिदर्शज भी यादृच्छिक चर की ही भांति होता है। क्योंकि इसके द्वारा प्राप्त प्रत्येक मान से प्रायिकता जुड़ी रहती है। पिछले अनुभाग की तालिका 13.3 में हमने प्रतिदर्शज व उसकी प्रायिकता को दर्शाया है।

इकाई 10 में हमने सीखा था कि यादृच्छिक चर की गणितीय प्रत्याशा, इसके समांतर माध्य के बराबर होती है। आइए, प्रतिदर्शी बंटन के मानक विचलन और गणितीय प्रत्याश का आकलन करें।

प्रतिदर्शी बंटन के दो महत्वपूर्ण गुणधर्मों पर ध्यान दीजिए।

1) प्रतिदर्शज के बंटन की प्रत्याशा, समष्टि प्राचल के बराबर होती है। यदि हम प्रतिदर्श माध्यों का प्रतिदर्शी बंटन प्राप्त करते हैं तब इसका प्रत्याशित मान, समष्टि माध्य के बराबर होता है। सांकेतिक रूप से $E(\bar{x}) = \mu$ .

2) प्रतिदर्शी बंटन का मानक, चलन, संबंद्ध प्रतिदर्शज की ''मानक त्रुटि'' (standard error) कहलाता है। अतः यदि हमें प्रतिदर्श माध्य का प्रतिदर्शी बंटन प्राप्त है तब इसका मानक विचलन, प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि'' कहलाएगा। अतः मानक त्रुटि समष्टि माध्य के गिर्द प्रतिदर्श माध्य के फैलाव को दर्शाता है।

इकाई 14 में हम देखेंगे कि मानक त्रुटि का प्रयोग परिकल्पना परीक्षण और सांख्यिकीय आकलन के लिए किया जाता है।

**उदाहरण 13.2**

तालिका 13.3 में दिए गए प्रतिदर्शी बंटन की मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हम जानते हैं कि प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि, प्रतिदर्शी बंटन का मानक विचलन है। अतः,

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{E\left(\bar{x}\right)^2 - \left[E\left(\bar{x}\right)\right]^2}$$

अब,

$$E\left(\bar{x}\right) = 3\times\frac{1}{10} + 4\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{2}{10} + 6\times\frac{2}{10} + 7\times\frac{2}{10} + 8\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

और

$$E\left(\bar{x}\right)^2 = 9\times\frac{1}{10} + 16\times\frac{1}{10} + 25\times\frac{2}{10} + 36\times\frac{2}{10} + 49\times\frac{2}{10} + 64\times\frac{1}{10} + 81\times\frac{1}{10} = \frac{390}{10}$$

$$= 39.$$

$$\therefore \sqrt{E\left(\bar{x}\right)^2 - \left[E\left(\bar{x}\right)\right]^2} = \sqrt{39-36} = \sqrt{3} = 1.73.$$

अतः इस मामले में प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि 1.73 है।

अब आपके मस्तिष्क में प्रश्न उठ रहा होगा कि, क्या मानक त्रुटि ज्ञात करने के लिए, हमें सभी संभावित प्रतिदर्शों को प्राप्त करना होगा? उपर्युक्त उदाहरण 13.2 में हमने सर्वप्रथम सभी संभावित प्रतिदर्शों को नोट किया, उन्हें आपेक्षिक बारंबारता बंटन के रूप में व्यवस्थित किया और तत्पश्चात् मानक त्रुटि को परिकलित किया। उदाहरण 13.2 में समष्टि का आकार और प्रतिदर्श आकार काफी छोटा था और इसी वजह से कार्य नियंत्रित दायरे में संपन्न किया जा सकता था। लेकिन, क्या आप कल्पना कर सकते हैं कि जब हमारे पास बड़े आकार की समष्टि और प्रतिदर्श हो तो? क्या होगा यह कार्य न केवल जटिल है बल्कि थकाऊ भी होगा। दरअसल, प्रतिचयन का समग्र लाभ लुप्त हो जाएगा यदि हम सभी संभावित प्रतिदर्शों का चयन शुरू कर देंगे।

दूसरे, क्या प्रतिदर्शी के लिए सैद्धांतिक प्रायिकता बंटन को फिट करना संभव है? दरअसल केंद्रीय सीमा प्रमेय (central limit theorem) के अनुसार, यदि किसी समष्टि से $n$ आकार के प्रतिदर्श लिए जाते हैं तो $n$ के बड़े मानों के लिए प्रतिदर्श माध्य सन्निकटतः प्रसामान्य रूप से बंटित हैं। इसलिए समष्टि का बंटन चाहो कुछ भी हो, $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन, पर्याप्त रूप से बड़े प्रतिदर्शी आकारों के लिए सन्निकटतः रूप से प्रसामान्य होगा। यदि समष्टि प्रसामान्य है तब $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन किसी भी प्रतिदर्श आकार के लिए प्रसामान्य होगा। यदि समष्टि प्रसामान्य रूप अलग बंटित है तक $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन, यहाँ तक कि छोटे प्रतिदर्श आकारों के लिए भी लगभग प्रसामान्य होगा। इसके अलावा, यदि समष्टि प्रसामान्य रूप से बंटित नहीं भी है तब भी $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन बड़े प्रतिदर्श आकारों के लिए सन्निकटतः प्रसामान्य होगा। तीसरे, ऐसी समष्टि जिससे प्रतिदर्श लिए गए हैं, के मानक विचलन $\sigma$ और $\bar{x}$ की मानक त्रुटि के बीच क्या संबंध है? निस्संदेह, समष्टि इकाइयों के प्रसार की तुलना में $\bar{x}$ का प्रसार कम होगा। $\bar{x}$ की मानक त्रुटि हैः

$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ जहाँ $\sigma_{\bar{x}}$ $\bar{x}$ की मानक त्रुटि है और $\sigma$ मूल समष्टि का मानक विचलन है।

अतः मानक त्रुटि का मान, समष्टि के मानक विचलन की तुलना में सदैव छोटा होता है क्योंकि मानक त्रुटि, प्रतिदर्श आकार के वर्ग मूल द्वारा विभाजित समष्टि के मानक विचलन के बराबर होती है।

उपर्युक्त कथन प्रतिस्थापन सहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के मामले में सत्य हैं। जब प्रतिचयन बिना प्रतिस्थापन के हो तो ऐसे मामले में कुछ परिमित समष्टि शुद्धिकरण (finite population corection) करना होगा और मानक त्रुटि होगी $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \dfrac{N-n}{N-1}$. जब अनुपात $\dfrac{n}{N}$ काफी कम हो तो दोनों क्रियाविधियाँ एक जैसा ही परिणाम देती हैं। लेकिन जब समष्टि के आकार की तुलना में प्रतिदर्श आकार भी काफी बड़ा हो तो संशोधन गुणक को लागू करना जरूरी होता है।

मानक त्रुटि को हम कैसे व्यक्त करें? जैसा कि पहले बात हुई है, इससे प्रतिदर्शज के फैलाव का पता चलता है। लेकिन यदि मानक त्रुटि छोटी है तब ये अधिक संभावना होती है कि आकाल, संबद्ध प्राचल के सन्निकट है।

**बोध प्रश्न 1**

1) निम्नलिखित संकल्पनाओं को परिभाषित कीजिए:

   क) समष्टि

   ख) प्रतिदर्श

   ग) प्राचल

   घ) प्रतिदर्शज

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

2) निम्नलिखित के बीच के अंतर को स्पष्ट कीजिए:

   क) आकलक और आकल

   ख) जनगणना और प्रतिदर्श सर्वेक्षण

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

   ......................................................................................................

3) निम्नलिखित संकल्पनाओं को परिभाषित कीजिएः

क) प्रतिदर्शी बंटन

ख) मानक त्रुटि

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

4) समष्टि 2, 4, 6 है। मान लीजिए बिना प्रतिस्थापन वाली यादृच्छिक प्रतिचयन विधि का प्रयोग करते हुए आकार 2 के प्रतिदर्श का चयन हमें इस समष्टि से करना है।

क) प्रतिदर्श माध्य का प्रतिदर्शी बंटन प्रस्तुत कीजिए।

ख) मानक त्रुटि परिकलित कीजिए।

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

## 13.4 गैर–प्रतिचयन और प्रतिचयन त्रुटियाँ

जैसा कि हमने ऊपर बताया, प्रतिचयन का मूल उद्देश्य प्रतिदर्श के आधार पर समष्टि के बारे में अनुमिति निकालना है। जैसे, मान लीजिए हमें किसी गाँव की प्रति व्यक्ति आय ज्ञात करनी है। समय, धन और अपेक्षित कार्मिकों के अभाव में हम पूर्ण जनगणना की बजाए, प्रतिदर्श सर्वेक्षण पर ध्यान केंद्रित करते हैं। इस मामले में स्पष्ट है कि प्रतिदर्श से प्राप्त प्रति व्यक्ति आय, गाँव की वास्तविक प्रति व्यक्ति आय के बराबर नहीं होगी। ऐसी त्रुटि होने के दो कारण हो सकते हैं।

हम समष्टि के केवल एक भाग से ही आँकड़े एकत्रित कर रहे हैं (अर्थात् हमारे द्वारा चयनित प्रतिदर्श के आधार पर), प्रतिदर्श माध्य (इस मामले में प्रति व्यक्ति आय) समष्टि माध्य के बराबर नहीं है। यदि संभवतया दोनों बराबर ही हों तो यह अनोखी घटना ही होगी। इसलिए यदि हम प्रतिदर्श माध्य को समष्टि माध्य के रूप में ले रहे हैं, कुछ त्रुटि रह जाती है। इसे प्रतिचयन त्रुटि (sampling error) कहते हैं।

त्रुटि होने का एक अन्य कारण है, आँकड़ों की गलत जानकारी देना या उन्हें रजिस्टर में गलत तरीके से भरना या उनकी गलत तालिका बनाना या आंकड़ों को गलत तरीके से संसाधित करना। इस प्रकार की त्रुटि को गैर–प्रतिचयन त्रुटि (non-sampling error) कहते हैं। ध्यान रखें, गलत–प्रतिचयन त्रुटि, जैसा कि इसके नाम से इंगित है, हमारी प्रतिचयन प्रक्रिया से इसका कोई सरोकार नहीं है। प्रतिदर्श सर्वेक्षण में आंकड़ों की गलत जानकारी प्रस्तुति या इनका गलत संसाधन होने की संभावना बनी रहती है।

इन त्रुटियों के स्रोतों का वर्णन निम्न प्रकार है।

### 13.4.1 गैर–प्रतिचयन त्रुटि

गैर–प्रतिचयन त्रुटि के विविध स्रोत इस प्रकार हैं:

1) **माप आधार त्रुटि**

   यह जाना माना तथ्य है कि किसी भी परिमाण का सही/सटीक माप (measurement) लेना संभव नहीं है। यदि कुछ व्यक्तियों को उदाहरण के रूप में बारी–बारी से कपड़े के किसी एक टुकड़े की लंबाई मापने को कहा जाए, (मान लीजिए दो दशमलव बिंदुओं तक), तो हम सुनिश्चित तौर पर कह सकते हैं कि सबके उत्तर एक जैसे नहीं होंगे। वास्तव में मापने वाले फीते की परिशुद्धता की कोटि भी एक जैसी नहीं होगी।

   किसी छानबीन के मामले में उत्तरदाताओं के प्रतिचयन के संदर्भ में, उदाहरण के रूप में, उनकी आमदनी के बारे में सही आँकड़े प्राप्त नहीं किए जा सकते। यह समस्या ऐसे व्यक्तियों की स्थिति में तो नहीं आएगी जो मजदूरी या वेतन के रूप में निश्चित आय अर्जित करते हैं। लेकिन, स्व–रोजगारी व्यक्ति शायद सही जानकारी देने की स्थिति में नहीं होंगे।

2) **गैर–प्रतिक्रिया (non-response) आधारित त्रुटि**

   कभी कभार उत्तरदाताओं को प्रश्नावली भेजकर अपेक्षित आंकड़ों को एकत्रित किया जाता है। ऐसे व्यक्तियों में से बहुत से अधूरे उत्तर वाली प्रश्नावली वापिस भेजते हैं या प्रश्नावली भेजते ही नहीं। इसका कारण हो सकता है:

   क) उत्तरदाता पूछे गए प्रश्नों का उत्तर सावधानी से पढ़ने के बाद नहीं देते।

   ख) वे प्रश्नों को समझने की स्थिति में नहीं होते, या

   ग) वे अपेक्षित सूचना को बताना नहीं चाहते।

   हम ध्यान से देखें तो पाएँगे कि प्रतिक्रिया व्यक्त न करने का कारण, प्रश्नावली का रास्ते में ही खो जाना, भी हो सकता है।

   यदि वैयक्तिक साक्षात्कारों के माध्यम से आंकड़े एकत्रित किए जाते हैं तो उपर्युक्त कुछ कारणों में अवश्य कमी आएगी। लेकिन, ऐसे मामले में, कुछेक व्यक्तियों के कारण ऐसी त्रुटि भी उत्पन्न हो सकती है:

   क)वे सूचना देना नहीं चाहते, या

   ख)बार–बार जाने के बावजूद भी, वे मिलते ही नहीं।

3) **आँकड़ों को दर्ज करने में त्रुटि**

   ऐसी त्रुटि ऐसे चरण पर नज़र आती है जब जाँचकर्ता (investigator) उत्तरों का लिखित रूप दर्ज करता है। ऐसी त्रुटि का मुख्य कारण पूछताछकर्ता का लापरवाही बरतना है।

4) **जाँचकर्ता के पक्षपातपूर्ण रवैये पर आधारित त्रुटि**

   प्रत्येक व्यक्ति निजी पूर्वाग्रहों और पक्षपाती रवैयों से ग्रस्त रहता है। जाँचकर्ताओं को सर्वाधिक संभावित प्रशिक्षण देने के बावजूद भी, उनकी निजी सोच बीच में बाधक बन जाती है जब वे उत्तरदाताओं के प्रश्नों को अपनी समझ के आधार पर समझना शुरू कर देते हैं और इन्हें लिखित स्वरूप भी अपने विचारों के अनुरूप देने लगते हैं।

पूर्ण गणना विधि में गैर–प्रतिचयन त्रुटि होने की संभावना काफी अधिक होती है, क्योंकि आंकड़ा संग्रह प्रक्रिया में बहुत से व्यक्ति शामिल रहते हैं। लेकिन निम्न बातों को अपनाकर हम इस त्रुटि को न्यूनतम कर सकते हैं। ये हैं:

i) सर्वेक्षण की योजना सोच–समझकर बनाना,

ii) जाँचकर्ताओं को उचित प्रशिक्षण देना,

iii) प्रश्नावली को सरल रूप देना।

लेकिन, यहाँ हम इस बात पर जोर देना चाहेंगे कि पूर्ण गणना में काफी अधिक गैर–प्रतिचयन त्रुटियों के होने की संभावना बनी रहती है।

### 13.4.2 प्रतिचयन त्रुटि

अब तक आप समझ चुके होंगे कि प्रतिचयन विधि में भी गैर–प्रतिचयन त्रुटियाँ उत्पन्न हो सकती हैं। आंकड़ों को पूर्णतया ऐसी त्रुटियों के बिना एकत्रित करना लगभग असंभव होता है। लेकिन, यदि प्रतिदर्श सर्वेक्षण में उत्तरदाताओं की संख्या जनगणना विधि की तुलना में काफी कम हो तो प्रतिचयन विधि में सामान्य तौर पर गैर–प्रतिचयन त्रुटि काफी कम नजर आती है। गैर–प्रतिचयन त्रुटियों के अलावा, प्रतिदर्श सर्वेक्षण में प्रतिचयन त्रुटि भी उत्पन्न होती है। प्रतिचयन त्रुटि, प्राचल और संगत प्रतिदर्शज के बीच का पूर्ण अंतर अर्थात $|T-\theta|$ है।

प्रतिचयन त्रुटि, उत्तरदाता, जाँचकर्ता या कुछ अन्य कारण की वजह से उत्पन्न नहीं होती। ये तो प्रतिचयन क्रियाविधि की प्रकृति से ही उत्पन्न होती है। इनका पूर्ण निवारण संभव नहीं है। लेकिन हमारे पास कुछ ऐसे प्रतिचयन के सुविकसित सिद्धांत मौजूद हैं जिनकी सहायता से ऐसी त्रुटियों को न्यूनतम किया जा सकता है।

## 13.5 आकलक के वांछनीय गुणधर्म

मान लीजिए, $\theta$ ऐसा अज्ञात प्राचल है जिसकी हम अपेक्षा करते हैं। हम समष्टि से प्राप्त यादृच्छिक प्रतिदर्श के आधार पर $\theta$ को आकलन करना चाहते हैं। इस प्रयोजन के लिए हम प्रतिदर्शज $T$ का प्रयोग करेंग (जो प्रतिदर्श मानों का फलन है)। यहाँ ज्ॅ $\theta$ का आकलक है और $T$ का मान जिसे प्राप्त प्रतिदर्श से हमने प्राप्त किया है, $\theta$ का आकल है। दरअसल, इस मान को बिंदु आकल (point estimate) कहते हैं, क्योंकि यह आकलक का एक विशिष्ट मान है (अधिक जानकारी के लिए इकाई 14 देखें)।

इससे पहले, हमने प्रतिचयन और गैर–प्रतिचयन त्रुटियाँ से संबंधित संकल्पनाओं की चर्चा की थी। यदि हम उन्हें दुबारा ध्यान में लाएँ तो हमें पता है कि प्रतिदर्श प्रतिदर्शज और समष्टि प्राचल के बीच (संकेत को अनदेखा करते हुए) का पूर्ण अंतर अर्थात $|T-\theta|$, प्रतिचयन त्रुटि के विस्तार को मापता है। ध्यान दीजिए कि आकलक अनिवार्यतः प्राचल के आकल को परिकलित करने का एक सूत्र है। और ऐसे ही बहुत से संभावित आकलक (वैकल्पिक सूत्र) हो सकते हैं जिन्हें इस प्रयोजन के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है। अतः ऐसे कुछ वांछनीय गुणधर्म होने चाहिए जिनके आधार पर हम प्राचल का अनुमान लगाने के लिए किसी विशिट आकलक का चयन कर सकते हैं।

$T$ का एक अच्छा आकलक होने के लिए $T$ और $\theta$ के बीच का अंतर यथासंभव कम होना चाहिए। यह सुनिश्चि करने के लिए विविध नजरियों का सुझाव दिया गया है।

### 13.5.1 अनभिनता

हमने पहले ही देखा है कि प्रतिचयन परिवर्तनशीलता के कारण प्रतिदर्शज के मान, एक प्रतिदर्श से दूसरे प्रतिदर्श में अलग–अलग होते हैं। यद्यपि प्रतिदर्शज के एकल मान, औसतन, अज्ञात प्राचल से अलग हो सकते हैं लेकिन प्रतिदर्शज का मान, प्राचल के बराबर होना चाहिए। अन्य शब्दों में, $T$ के प्रतिदर्शी बंटन की $\theta$ के प्रति केंद्रीय प्रवृत्ति होनी चाहिए। इसे आकलक का अनभिनता (unbiasedness) संबंधी गुण कते हैं। इसका अर्थ है कि यद्यपि प्राचल के अज्ञात मान की तुलना में दिए गए प्राचल का एकल उच्च या निम्न हो सकता है, फिर भी आकलक ऐसे ही मानों की प्राप्ति करने का पक्षधर नहीं होता जो अज्ञात प्राचल की तुलना में सदैव बड़े या छोटे होते हैं। यदि हम मान लें कि माध्य (यहाँ प्रत्याशा) केंद्रीय प्रवृत्ति के लिए सही मान है तब $\theta$ के लिए $T$ अनभिनत आकलक है, यदि $E(T)=\theta$ है।

### 13.5.2 न्यूनतम प्रसरण

यह भी वांछनीय है कि समटि प्राचल के इर्द–गिर्द किसी अनभिनत आकलक के सभी संभावित मानों का औसतन प्रसार यथासंभव कम होना चाहिए। इससे प्राचल से आकल के दूर होने की संभावना कम हो जाएगी। यदि हम मान लें कि प्रकीर्णन के लिए प्रसरण उचित माप है तब हम चाहेंगे कि सभी अनभिनत आकलकों में से $T$ का न्यनूतम प्रसरण होना चाहिएः सांकेतिक रूप से $V(T) \le V(T')$ जहाँ $V$ प्रसरण और $T'$ कोई अन्य अनभिनत आकलक है।

कोई आकलक $T$, जो अनभिनत है और जिसका सभी अनभिनत आकलकों में से न्यूनतम प्रसरण हो, ''न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आकलक'' (Minimum Variance Unbiased Estimator) कहलाता है। आइए किसी उदाहरण पर विचार करें। मान लीजिए $N$ आकार की प्राप्त समष्टि से हमारे पास $n$ आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं। इस मामले में प्रतिदर्श माध्य है। $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ जहाँ $x_i$ प्रतिदर्श का $i$वां सदस्य है। यह सिद्ध किया जा सकता है कि यह समष्टि माध्य $\mu$ का अनभिनत आकलक है। सांकेतित रूप से

$$E(\bar{x}) = \mu$$

तथापि, यह दर्शाया जा सकता है कि

प्रतिदर्श प्रसरण $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ का प्रत्याशा $\sigma^2$ के बराबर नहीं है।

$$E(s^2) \ne \sigma^2$$

इसके विपरीत यदि हम $s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, के रूप में प्रतिदर्श प्रसरण को परिभाषित करें, तक $\sigma'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ का $s'^2$ अनभिनत आकलक है।

मान लीजिए, इसके बाद प्रतिदर्श मान न केवल यादृच्छिक है बल्कि स्वतंत्र (प्रतिस्थापन सहित यादृच्छिक प्रतिदर्श) भी हैं और निहित समटि प्रसामान्य है। यह भी दर्शाया जा सकता है कि प्रतिदर्श माध्य $\bar{x}$ समष्टि माध्य $\mu$ का न केवल अनभिनत आकलक है बल्कि $\mu$ के सभी अनभिनत आकलकों में से इसका प्रसरण न्यूनतम भी है।

### 13.5.3 संगति और दक्षता

एक अन्य दृष्टिकोण कि आकलक $T$ को प्रतिदर्श आकार $n$ के बढ़ने के साथ–साथ अज्ञात समष्टि प्राचल $\theta$ के सन्निकट पहुंचना चाहिए। यहां $T$ स्वयं भी यादृच्छिक चर है। इस बात को हम प्रायिकतात्मक या प्रसंभाव्यता के रूप में अभिव्यक्त कर सकत हैं क्योंकि प्रदिर्शज $T$ को प्रसंभाव्यता प्राचल $\theta$ के प्रति अभिसरित होना चाहिए जब $n \to \infty$. । इस गुणधर्म वाला प्रतिदर्शज $T, \theta$ का संगत (consistent) आकलक कहलाता है।

असल जीवन में समान प्राचल $\theta$ के संगत आकलकों की बड़ी संख्या बहुधा देखने को मिलती है। ऐसी स्थिति में निस्संदेह ऐसे संगत आकलकों से कुछ अतिरिक्त निकष (कसोटी) का चयन आवश्यक होता है। ऐसा एक निकष यह माँग सकता है कि न केवल $T$ प्रसंभाव्य रूप से अभिसरित हो बल्कि इस कार्य को यह यथाशीघ्र भी करे। अधिक गहन अध्ययन न करते हुए हम सिर्फ इतना उल्लेख करना चाहेंगे कि जब किसी प्रतिदर्श का आकार $n$ लगातार बढ़ता है तो आकलक, प्रसामान्य बंटन का रूप धारण कर लेता है। ऐसे आकलक उपगामी रूप से प्रसामान्य (asymptotically normal) द्वारा दर्शायी जाती है। दरअसल, न्यूनतम उपगामी प्रसरण आकलक के लिए अभिसरण सबसे तीव्र रूप से होता है। समष्टि प्राचल के ऐसे सभी उपगामी प्रसामान्य संगत आकलकों में से इस प्रकार के आकलक को 'दक्ष आकलक' (efficient estimator) कहते हैं।

**बोध प्रश्न – 2**

1) गैर–प्रतिचयन त्रुटियों का स्त्रोत क्या है?

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

2) निम्नलिखित संकल्पनाओं को स्पष्ट कीजिए:

   क) अनभिनत आकलक

   ख) न्यूनतम प्रसरण आकलक

   ग) संगति आकलक

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

3) बताइएं कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत।

क) प्रसामान्य बंटन, द्विपद बंटन का परिसीमित रूप है।

ख) प्रतिदर्शज के प्रतिदर्शी बंटन का मानक विचलन, मानक त्रुटि कहलाता है।

ग) पाइसो बंटन, सतत् बंटन का एक उदाहरण है।

घ) सांख्यिकीय आकलन, सांख्यिकीय अनुमिति का एक भाग है।

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

## 13.6 सांख्यिकीय अनुमिति की संकल्पना

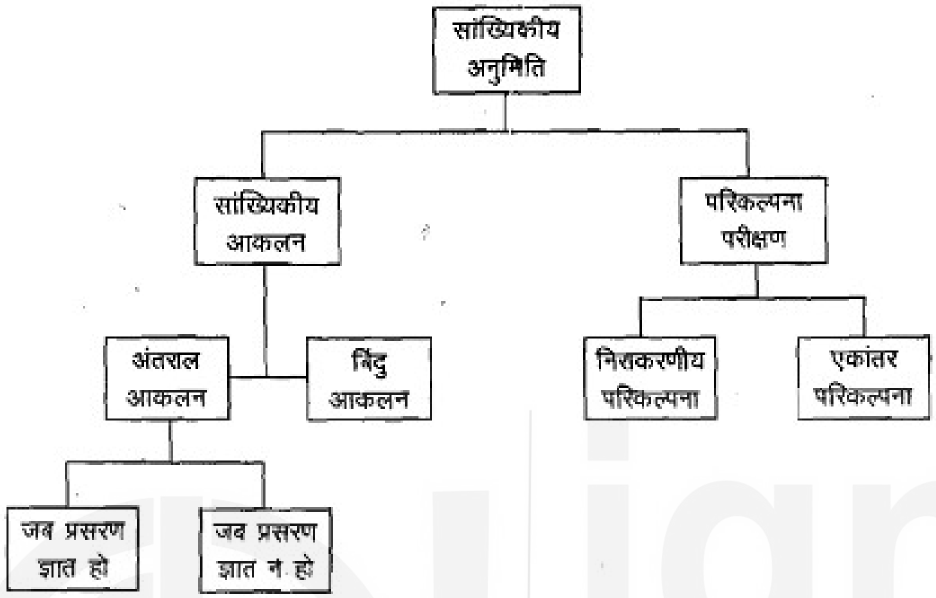
जैसा कि पहले उल्लेख किया गया है, सांख्यिकीय अनुमिति, समष्टि (population) से प्राप्त प्रतिदर्श (sample) मं शामिल जानकारी के आधार पर समष्टि विशेषताओं के बारे में निष्कर्ष निकालने की विधियों से संबंधित है। ध्यान रखें कि हमें समष्टि माध्य का पता नहीं है लेकिन प्रतिदर्श माध्य की जानकारी हमें है। सांख्यिकीय अनुमिति में हम दो प्रकार के प्रश्नों के उत्तर जानना चाहेंगे। पहला, समष्टि माध्य का मान क्या होगा?

हमारा उत्तर, समष्टि माध्य के बारे में सोचे–समझे अनुमान में निहित है। सांख्यिकीय अनुमिति का यह पहलू 'आकलन' (estimation) कहलाता है। हमारा दूसरा प्रश्न समष्टि माध्य के बारे में हमारे कुछ विशेष दावे से संबंधित है। मान लीजिए, बिजली के बल्ब बनाने वाले किसी उत्पादक का दावा है कि बिजली के बल्बों का माध्य जीवन 2000 घंटों के बराबर है। प्रतिदर्श सूचना के आधार पर क्या हम कह सकते हैं कि यह दावा सही नहीं है? सांख्यिकीय अनुमिति का यह पक्ष परिकल्पना परीक्षण (hypothesis testing) कहलाता है।

अतः सांख्यिकीय अनुमिति के दो पहलू हैं: आकलन और परिकल्पना परीक्षण। इस इकाई में हम सांख्यिकीय आकलन के बारे में चर्चा करेंगे और परिकल्पना परीक्षण की चर्चा हम अगली इकाई में करेंगे। नीचे चित्र 13.1 में सांख्यिकीय अनुमिति के विविध पहलुओं को संक्षेप में हमने दर्शाया है। यहाँ ध्यान देने योग्य महत्वपूर्ण कारक है कि क्या हमें समष्टि प्रसरण (population variance) का पता है या नहीं। निस्संदेह जब हमें समष्टि माध्य का पता न हो तो हम समष्टि प्रसरण का पता कैसे लगा सकते हैं? हम ऐसे मामले से शुरू करते हैं जहाँ हमें समष्टि प्रसरण का पता हो, क्योंकि संकल्पनाओं की व्याख्या में यह कारगर सिद्ध होगा। तत्पश्चात हम अज्ञात समष्टि प्रसरण के अपेक्षाकृत अधिक यथार्थिक मामलों पर ध्यान केंद्रित करेंगे।

आकलन दो तरह का होता है: (i) बिंदु आकलन, और (ii) अंतराल आकलन। बिंदु आकलन में हम एकल बिंदु के रूप में समष्टि प्राचल के मान का आकलन करते हैं। जबकि दूसरी तरफ, अंतराल आकलन के मामले में हम प्रतिदर्श माध्य के इर्द–गिर्द निम्न एवं उच्च परिबंधों का आकलन करते हैं जिनके भीतर समष्टि माध्य रहता है।

समष्टि के बारे में हमारा दावा, निराकरणीय परिकल्पना (null hypothsis) और इसके प्रतिपक्ष एकांतर या वैकल्पिक परिकल्पना (alternative hypothesis) के रूप में होगा। परिकल्पना के परीक्षण की विधियों और इसकी संकल्पनाओं का वर्णन हमारी अगली इकाई में है।




चित्र 13.1: सांख्यिकीय अनुमिति

## 13.7 बिंदु आकलन

जैसा कि हमने पहले बताया था, हमें प्राचल मान का पता नहीं है और प्रतिदर्श सूचना के प्रयोग से हम इसका अनुमान लगाना चाहते हैं। निस्संदेह, प्रतिदर्शज का मान, श्रेष्ठ अनुमान होगा। उदाहरण के तौर पर हमें समष्टि माध्य का पता नहीं है तो इस स्थिति में प्रतिदर्श माध्य, श्रेष्ठ अनुमान है। यहाँ इस मामले में हम प्राचल के 'अनुमान' के रूप में एकल मान या बिंदु का प्रयोग करेंगे।

स्मरण कीजिए कि आकलक एक सूत्र और आकल, इस सूत्र के प्रयोग से प्राप्त विशिष्ट मान। जैसे, समष्टि माध्य के आकलन के लिए हम प्रतिदर्श माध्य का प्रयोग करते हैं तब $\frac{1}{n}\sum_i x_i$ आकलक है। मान लीजिए किसी प्रतिदर्श पर आंकड़ों को एकत्रित किया जाता है और इस सूत्र में प्रतिदर्शी इकाइयों को रखकर, प्रतिदर्श माध्य के लिए, ऐसे किसी विशिष्ट मान की प्राप्ति की जाती है; मान लीजिए यह 120 है। तब ऐसी स्थिति में 120 समष्टि माध्य का आकल है। यह संभव है कि आप समान समष्टि से एक अन्य प्रतिदर्श प्राप्त कर लें, प्रतिदर्श माध्य के लिए सूत्र $\frac{1}{n}\sum_i x_i$ का प्रयोग करें, और एक अलग मान जैसे 123 की प्राप्ति करें। यहाँ 120 और 123 अर्थात दोनों समष्टि माध्य के आकल हैं। लेकिन इन दोनों मामलों में आकलक एक ही है अर्थात् $\frac{1}{n}\sum_i x_i$ । याद रखें कि पारिभाषिक शब्द प्रतिदर्शज, जो प्रतिदर्श मानों के फलन के संदर्भ में प्रयुक्त है, आकलक शब्द का समानार्थक है।

ऐसी स्थितियाँ भी हो सकती हैं जब आप प्राचल के लिए एक से अधिक संभावी (potential) आकलकों (एकांतर सूत्र) की प्राप्ति करेंगे। इन प्राचलों में से श्रेष्ठ के चयन के लिए हमें कुछ निर्धारित मानदंडों का अनुसरण करना होगा। इन मानदंडों के आधार पर आकलक को कुछ निश्चित वांछनीय गुणधर्मों को पूरा करना होगा।

वैसे तो आकलक के लिए वांछनीय गुणधर्म गिने–चुने हैं, लेकिन सर्वाधिक महत्वपूर्ण है इसकी अनभिनता (unbiasedness)।

अनभिनता का अर्थ है कि आकल, प्राचल के अज्ञात मान से उच्च या निम्न हो सकता है। लेकिन आकल का प्रत्याशित मान प्राचल के बराबर होना चाहिए। जैसे, प्रतिदर्श माध्य एक प्रतिदर्श से दूसरे प्रतिदर्श में अलग–अलग होता है लेकिन औसतन यह समष्टि माध्य के बराबर होगा। अन्य शब्दों में $E(\bar{x}) = \mu$ लेकिन, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ समष्टि प्रसरण $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(X_i - \bar{X})^2$ का अनभिनत आकलक नहीं है। दरअसल यदि हम $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$ को परिभाषित करें तब $s^2$, $\sigma^2$ का भी अनभिनत आकलक है। अतः प्रतिदर्श मानक विचलन $s$ की, समष्टि मानक विचलन $\sigma$ से कम होने की प्रवृत्ति है। इस शर्त को संशोधित करने के लिए हम $n$ की बजाए कृत्रिम रूप से किसी छोटी संख्या ($n$-1) से $s$ को उच्च करने के लिए विभाजित करते हैं।

परिकल्पना के परीक्षण के लिए बिंदु आकलन का विशेष महत्व है और इसका अध्ययन हम इकाई 14 में करेंगे।

## 13.8 अंतराल आकलन

जैसा कि हमने ऊपर बिंदु आकलन में देखा, आमतौर पर हम एकल मान अर्थात् संगत प्रतिदर्शज द्वारा प्राचल को आकलित करते हैं। इस तरीके से बिंदु आकलन वास्तविकता पूर्ण होना जरूरी नहीं होता, क्योंकि प्रायल का मान इससे भिन्न भी हो सकता है। इसकी एक वैकल्पिक प्रक्रिया है, अंतराल का निर्धारण जो प्राचल को कुछ निश्चित प्रायिकता तक बाँधे रखे। यहाँ हम निम्न सीमा एवं उच्च सीमा पर विशेष ध्यान देते हैं जिसके भीतर प्राचल का मान बना रहेगा। इसके अलावा हम प्राचल की प्रायिकता पर भी विशेष ध्यान डालते हैं जो उस अंतराल में बनी हुई है। इस संदर्भ में अंतराल को हम 'विश्वश्यता अंतराल' और इस अंतराल में प्राचल की प्रायिकता को विश्वस्यता स्तर या विश्वस्यता गुणांक कहते हैं।

### 13.8.1 विश्वस्यता अंतराल

आइए अब एक उदाहरण लें। मान लीजिए आपको छतीसगढ़ राज्य के रायगढ़ जिले के लोगों की औसतन आमदनी का अनुमान लगाना है। आपने 500 परिवारों के प्रतिदर्श से आंकडत्रे एकत्रित किए और पाया कि औसतन आमदनी (मान लीजिए $\bar{x}$) प्रति वर्ष 18,250 रूपये है। प्रतिदर्शी त्रुटि के कारण छतीसगढ़ के रायगढ़ जिले की वास्तविक औसतन आमदनी ($\mu$) के संदर्भ में यह प्रतिदर्श शायद सही परिणाम नहीं दे रहा होगा। इसलिए हम निश्चित रूप से नहीं कर सकते कि जिले की औसतन आमदनी 18,250 रूपए है या नहीं। दूसरी तरफ, यह कहना बेहतर होगा कि छतीसगढ़ के रायगढ़ जिले की औसतन आमदनी प्रति वर्ष 17,900 रूपए और 18,600 रूपए के बीच है। इसके अलावा हमें यह भी स्पष्ट करना होगा कि औसतन आमदनी इन सीमाओं में ही रहेगी, इसका प्रायिकता 95

प्रतिशत है। अतः इस मामले में हमारा विश्वस्यता अंतराल 17,900–18,600 रूपए है और विश्वस्यता स्तर या विश्वस्यता गुणांक 95 प्रतिशत है।

इस संदर्भ में हमारे मस्तिष्क में उठने वाला प्रश्न होगा कि हम विश्वस्यता अंतराल और विश्वस्यता गुणांक की प्राप्ति कैसे करते हैं?

आइए, विश्वस्यता गुणांक से शुरूआत करें। हमें पता है कि बड़े प्रतिदर्शों के लिए $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन प्रसामान्य रूप से बंटित होता है और इसका माध्य $\mu$ और मानक त्रुटि $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है और जहाँ $n$ प्रतिदर्श का आकार है। प्रतिदर्शी बंटन को परिवर्तित करने पर हमें मानक प्रसामान्य विचर $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ की प्राप्ति होती है। जिसका मूल्य शून्य और प्रसरण 1 है। मानक प्रसामान्य वक्र सममित है। इसलिए, $0 \le z \le \infty$ वक्र के नीचे का क्षेत्रफल 0.5 है। इसे हमने इस पुस्तक के अंत में दी गई **परीशिष्ट सारणी A1** में दर्शाया है। आइए अब मान लें कि हमारा विश्वस्यता गुणांक 95 प्रतिशत (अर्थात 0.95) है। इस संदर्भ में हमें z के लिए परिसर ज्ञात करना होगा जो मानक प्रसामान्य वक्र का 0.95 क्षेत्र ढक लेगा। चूँकि z का बंटन सममित है, इसलिए z = 0 के दायें ओर 0.475 क्षेत्र और बायें ओर 0. 475 क्षेत्र रहना चाहिए। यदि हम प्रसामान्य क्षेत्र परिशिष्ट तालिका 11 देखें तो पाते हैं कि 0.475 क्षेत्र आच्छादित होगा जब z = 1.96 होगा। अतः इसकी प्रायिकता कि $z$ का परिसर –1.96 और 1.96 के बीच हो, 0.95 होगी। इस सूचना के आधार पर आइए पिछले प्रश्न पर दुबारा ध्यान केंद्रित करें और ऐसा परिसर ज्ञात करें जिसके भीतर बना $\mu$ रहेगा।

हम पाते हैं कि

$$P(-1.96 \le z \le 1.96) = 0.95 \qquad \ldots(13.1)$$

$$or\ P\left(-1.96 \le \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96\right) = 0.95$$

$$or\ P\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x}-\mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$or\ P\left(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \qquad \ldots(13.2)$$

आइए, उपर्युक्त की व्याख्या करें। स्मरण कीजिए कि हरेक प्रतिदर्श हमें $\bar{x}$ का अलग मान देगा। इसी आधार पर, विश्वस्यता अंतराल भी अलग होगा। प्रत्येक मामले में विश्वस्यता अंतराल में अज्ञात प्राचल शामिल हो सकता है या नहीं भी। समीकरण (13.2) से आशय है कि यदि यादृच्छिक प्रतिदर्शों की संख्या अधिक है तो प्राप्त समष्टि से $n$ आकार का हरेक प्रतिदर्श लिया जाता है और यदि ऐसे हरेक प्रतिदर्श के लिए $\left(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ अंतराल का निर्धारण हो जाता है तब लगभग 95 फीसदी मामलों में, अंतराल में समष्टि माध्य $\mu$ शामिल होगा।

विश्वस्यता गुणांक को $(1-\alpha)$ से दर्शाया जाता है जहाँ $\alpha$ सार्थकता का स्तर है (इकाई 14 में हम 'सार्थकता के स्तर' की संकल्पना की चर्चा करेंगे)। विश्वस्यता गुणांक किसी भी मान को ले सकता है। हम अपनी निष्कर्षों की सार्थकता का अनुमान लगाने के लिए, मान लीजिए 81 प्रतिशत या 97 प्रतिशत को विश्वस्यता का स्तर मान सकते हैं। सुविधा के

नज़रिए से अक्सर दो विश्वस्यता स्तर अर्थात् 95 प्रतिशत और 99 प्रतिशत ही व्यापक रूप से प्रयोग में लाए जाते हैं।

हाँ, कभी–कभार 90 प्रतिशत विश्वस्यता स्तर भी प्रयोग में हम लाते हैं। आइए, विश्वस्यता अंतराल ज्ञात करें जब विश्वस्यता गुणांक (1–$\alpha$) = 0.99 हो। इस मामले में 0.495 मानक प्रसामान्य वक्र के दायें/बायें अर्थात दोनों में से किसी एक तरफ होना चाहिए। यदि हम प्रसामान्य क्षेत्र तालिका (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A1) पर नजर डालें तो हम पाते हैं कि 0.495 क्षेत्र आच्छादित होगा जब z = 2.58 होगा।

अतः

$$P\left(-2.58. \leq z \leq 2.58\right) = 0.99 \qquad \ldots(13.3)$$

उपर्युक्त में मदों को पुनःव्यवस्थित करने पर हम पाते हैं कि

$$P\left(\bar{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99 \qquad \ldots(13.4)$$

समीकरण (13.4) से पता चलता है कि $\mu$ के लिए 99 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल $\bar{x} \pm 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. द्वारा दिखाया गया है।

प्रसामान्य क्षेत्र तालिका में नजर डालें तो 0.90 के विश्वस्यता गुणांक के लिए अब हम विश्वस्यता अंतराल निकाल सकते हैं और पता लगा सकते हैं कि

$$P\left(\bar{x} - 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90 \qquad \ldots(13.5)$$

हमने उपर्युक्त समीकरण (13.2), (13.4) और (13.5) पर गौर किया कि जैसे–जैसे विश्वस्यता अंतराल विस्तृत होते जाते हैं, प्राचल (इस मामले में ) को अंतराल में रखने की संभावना बढ़ जाती है।

### 13.8.2 विश्वस्यता सीमाएं

विश्वस्यता अंतराल की दो सीमाएँ **विश्वस्यता सीमाएँ** (confidence limits) कहलाती हैं। जैसे, 95 प्रतिशत विश्वस्यता के लिए, निम्न विश्वस्यता सीमा है $\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ और उच्च विश्वस्यता सीमा है $\bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu$. की अंतराल में ही सही ढंग से बनाए रखने के लिए इन दो सीमाओं में जो विश्वास हम कायम कर लेते हैं, उसे विश्वस्यता गुणांक के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

**उदाहरण 13.3**

कोई पेपर कंपनी अनुमान लगाना चाहती है कि नयी मशीन पर एक रीम पेपर बनाने में औसतन कितना समय लगता है। 36 रिमों का यादृच्छिक प्रतिदर्श दर्शाता है कि एक रिम पेपर औसतन 1.5 मिनट में बनते हैं। समष्टि मानक विचलन 0.30 मिनट है। 95 प्रतिशत विश्वस्यता स्तर पर अंतराल आकल निर्मित कीजिए।

प्राप्त जानकारी के आधार पर $\bar{x} = 1.5, \sigma = 0.30$ और $n = 36$

चूँकि $n = 36$ ( $> 30$), यहाँ प्रतिदर्श को बड़ा प्रतिदर्श माना गया है और इसी आधार पर $\bar{x}$ प्रसामान्य रूप से बंटित है। और इसका माध्य $\mu$ और मानक त्रुटि $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.30}{\sqrt{36}} = 0.05$$

95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल इस प्रकार होगा,

$$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$or\ 1.5 - 1.96 \cdot 0.05 \le \mu \le 1.5 + 1.96 \cdot 0.05$$

$$i.e.,\ 1.402 \le \mu \le 1.598$$

अतः यदि 95 प्रतिशत विश्वस्यता स्तर है तो हम कह सकते हैं कि नई मशीन के लिए औसतन उत्पादन समय 1.402 मिनट और 1.598 मिनट के बीच होगा। यहाँ 1.402 निम्न विश्वस्यता सीमा है और 1.598 उच्च विश्वस्यता सीमा है।

### 13.8.3 अज्ञात प्रसरण संबंधी विश्वस्यता अंतराल

पिछले अनुभाग में हमने समष्टि माध्य के लिए विश्वस्यता अंतराल (confidence interval) आकलित किया था और इस संदर्भ में हमने माना था कि समष्टि प्रसरण हमें ज्ञात है। यह थोड़ा या अविश्वसनीय प्रतीत होता है कि समष्टि माध्य का हमें पता नहीं (हम उसे आकलन करना चाहते हैं) और हमें समष्टि प्रसरण का पता है। इस संदर्भ में अधिक उपयुक्त धारणा तो यह होती है कि समष्टि माध्य और प्रसरण दोनों अज्ञात हैं। प्रतिदर्श माध्य और प्रसरण के आधार पर हम समष्टि माध्य के लिए विश्वस्यता स्तर ज्ञात करना चाहते हैं।

चूँकि समष्टि मानक $(\sigma)$ विचलन अज्ञात है, इसलिए इसके बदले हम प्रतिदर्श मानक विचलन $(s)$ का प्रयोग करते हैं। लेकिन ऐसे मामले में $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन प्रसामान्य नहीं है और इसके बदले यह स्टूडेंट $t$ बंटन का अनुसरण करता है। प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि $\frac{s}{\sqrt{n}}$ होगी।

मानक प्रसामान्य विचर की भांति, $t$ बंटन का माध्य शून्य है और माध्य के लिए यह सममित है और इसका परिसर $-\infty$ से $\infty$ के बीच है। लेकिन इसका प्रसरण 1 से अधिक है। असल में इसका प्रसरण, स्वतंत्रता की कोटि के आधार पर बदलता है । लेकिन जब $n > 30$ हो तब $t$ बंटन का प्रसरण 1 के काफी निकट होता है और तब z- बंटन नजर आता है।

z-प्रतिदर्शज की भांति $t$ –प्रतिदर्शज इस प्रकार परिकलित किया जाता है।

$t$ बंटन की क्षेत्रफल सारणी ( पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A3) पर यदि निगाह डालें तो आपेक्षित विश्वस्यता स्तर के प्रायिकता मान हम प्राप्त करते हैं। अतः विश्वस्यता अंतराल होगा,

$$\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(13.6)$$

**उदाहरण 13.4**

20 बालकों का माध्य वजन (किग्रा में) 15 और मानक विचलन 4 है। उपर्युक्त जानकारी के आधार पर ऐसी समष्टि के माध्य वजन का 95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल आकलित कीजिए जिससे हमने प्रतिदर्श लिए हैं। मान लीजिए कि समष्टि प्रसामान्य रूप से बंटित है।

चूँकि समष्टि प्रसामान्य है और प्रतिदर्श आकार छोटा है, इसलिए विश्वस्यता अंतराल के आकलन के लिए हम $t$–बंटन लागू करते हैं। चूँकि $n = 20$ है इसलिए स्वतंत्रता की कोटियाँ = 19 हैं। अब हम परिशिष्ट सारणी A.3 के पहले स्तंभ से नीचे ऐसी पंक्ति की ओर बढ़ते हैं जो 19 के संगत में है। चूँकि हमें 95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल चाहिए इसलिए $t = 0$ के दोनों तरफ हमें 0.025 क्षेत्र छोड़ना होगा और पिछले अनुभाग में भी हमने ऐसा ही किया था। स्वतंत्रता की कोटियाँ = 19 और $\alpha = 0.025$ के लिए हम पाते हैं कि $t$ का मान 2.093 है।

यहां विश्वस्यता अंतराल निम्नलिखित हैः

$$15 - 2.093 \times \frac{4}{\sqrt{20}} \le \mu \le 15 + 2.093 \times \frac{4}{\sqrt{20}}$$

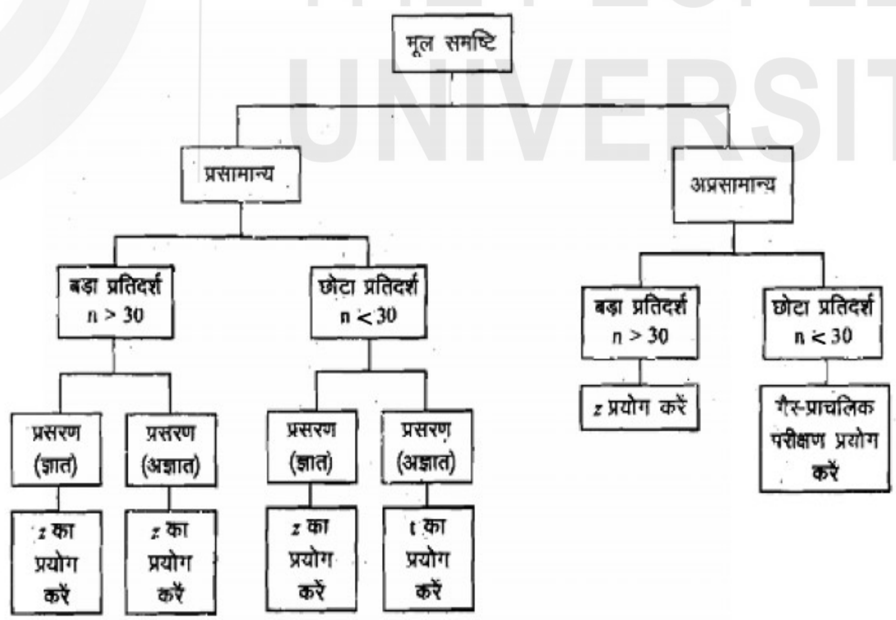
और $\quad 15 - 1.87 \le \mu \le 15 + 1.87$

और $\quad 13.13 \le \mu \le 16.87$

ठीक इसी तरह से, हम विभिन्न प्रतिदर्श के आकारों एवं विश्वस्य गुणांको से विश्वास्यता अन्तराल का आकलन कर सकते है। विश्वस्यता अन्तराल के आकलन के लिए (z) एवं ($t$) सांख्यिकी के प्रयोग की विधियों का संक्षिप्त विवरण निम्नलिखित है।

1. यदि प्रतिदर्श का आकार बड़ा है ($n$>30) तो z-सांख्यिकी का प्रयोग होगा–यहां–(1) मूल जनसंख्या(समष्टि)का सामान्य या असामान्य होना एवं (z) प्रसरण का ज्ञात होना अथवा न होने से कोई अंतर नहीं पड़ता है।
2. यदि प्रतिदर्श का आकार (n≤30) छोटा है, तो देखना पडेगा कि (1) मूल जनसंख्या(समष्टि)सामान्य है या असमान्य है (2) प्रसरण ज्ञात है या अज्ञात है। इसके लिए निम्नलिखित तीन वर्ग हो सकते है।

क) यदि मूल जनसंख्या (समष्टि) सामान्य नहीं है, तो अप्राचलित (nonparametric) परीक्षण का प्रयोग किया जाता है।




चित्र 13.2: उपयुक्त परीक्षण प्रतिदर्शज का चयन

ख) यदि मूल जनसंख्या(समष्टि)सामान्य है एवं प्रसरण ज्ञात है तो z-सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है।

ग) यदि मूल जनसंख्या(समष्टि) सामान्य है एवं प्रसरण अज्ञात है तो *t*-सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है।

चित्र. 13.2 हम उपरोक्त को एक चार्ट के रूप में दे रहे है।

**बोध प्रश्न 3**

1) किसी प्रतिदर्श में शामिल 50 कर्मचारियों से घर से दफ्तर तक तय की जाने वाली दूरी के बारे में पूछा जाता है तो हम पाते हैं कि समष्टि माध्य 4.5 कि.मी. है। समष्टि के लिए 95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल ज्ञात कीजिए। मान लीजिए कि समष्टि प्रसामान्य रूप से बंटित है और इसका प्रसरण 0.36 है।

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

2) किसी प्रतिदर्श में शामिल स्कूल के 25 विद्यार्थियों की माध्य ऊँचाई 95 से.मी. है और मानक विचलन 4 से.मी. है। 99 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल ज्ञात कीजिए।

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

3) बताइए कि निम्नलिखित कथन सही है या गलत।

क) जब मूल समष्टि अप्रसामान्य नहीं हो और प्रतिदर्श का आकार छोटा हो तो विश्वस्यता अंतराल आकलन करने के लिए हम *t*–बंटन का प्रयोग करते हैं।

ख) *t*–बंटन का परिसर 0 से अनंत होता है।

ग) जब विश्वस्यता स्तर 90 प्रतिशत हो तो सार्थकता का स्तर 10 प्रतिशत होगा।

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

## 13.9 सार संक्षेप

प्रतिदर्श सूचना के आधार पर समष्टि के बारे में निष्कर्ष निकालने को सांख्यिकीय अनुमिति कहते हैं। इस संदर्भ में हमें मूलतः दो कार्य करने हैं: आकलन और परिकल्पना परीक्षण। इस इकाई में हमने मुख्यतया आकलन पर ध्यान केंद्रित किया था जबकि परिकल्पना परीक्षण की चर्चा हम आगे की कइाइयों में करेंगे।

अज्ञात प्राचल का आकल बिंदु या अंतराल, अर्थात् दोनों में से कोई एक, हो सकता है। दूसरी तरफ, अंतराल आकलन में हम प्रतिदर्श माध्य के इर्द–गिर्द दो सीमाएँ (उच्च एवं निम्न) का निर्माण करते हैं। विश्वस्यता के निर्धारित स्तर को ध्यान में रखकर हम कह सकते हैं कि समष्टि माध्य, जिसका फिलहाल हमें पता नहीं है, विश्वस्यता अंतराल में बना रहेगा। विश्वस्यता अंतराल का निर्मित करने के लिए हमें समष्टि प्रसरण या इसके आकल का पता होना जरूरी है। जब हमें समष्टि प्रसरण का पता है तो विश्वस्यता अंतराल निर्मित करने के लिए हम प्रसामान्य बंटन लागू करते हैं। ऐसे मामले में जहाँ समष्टि प्रसरण अज्ञात हो, उपर्युक्त उद्देश्य के लिए हम स्टूडेंट $t$ का प्रयोग करते हैं। स्मरण रहे कि जब प्रतिदर्श का आकार बड़ा ( $n>30$) होता है तो $t$-बंटन, प्रसामान्य बंटन के सन्निकटतः होता है। अतः बड़े प्रतिदर्शों के लिए यदि समष्टि प्रसरण अज्ञात होता है तो हम प्रतिदर्श माध्य और प्रतिदर्श प्रसरण के आधार पर विश्वस्यता अंतराल ज्ञात करने के लिए प्रसामान्य बंटन का प्रयोग कर सकते हैं।

## 13.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

**बोध प्रश्न 1**

1) अनुभाग 13.3 का अध्ययन कीजिए एवं एक या दो वाक्यों में इन शब्दों का वर्णन कीजिए।

2) अनुभाग 13.5 का अध्ययन करें; एवं इन शब्दों के अन्तर को एक या दो वाक्यों में बताईएः

3) अनुभाग 13.3 का अध्ययन करें एवं व्याख्या कीजिए।

4) क) सभी सम्भावित प्रतिदर्श लिखिए; प्रतिदर्श माध्य की गणना कीजिए, बारम्बारता वितरण के रूप में प्रतिदर्श माध्य को क्रमबद्ध कीजिए। प्रत्येक प्रतिदर्श माध्य के धटित होने की प्रायिकता को ज्ञात कीजिए।

   ख) मानक त्रुटि शब्द का अर्थ समझाइए। सूत्र का प्रयोग कीजिए। इसका उत्तर 0.94 होना चाहिए।

**बोध प्रश्न 2**

1) अनुभाग 13.4 का अध्ययन करें एवं उत्तर दें।

2) अनुभाग 13.5 का अध्ययन करें एवं उत्तर दें।

3) क) सही ख) सही ग) गलत घ) सही।

**बोध प्रश्न 3**

1) क्योंकि यह बड़ा प्रतिदर्श है, इसलिए हम z-प्रतिदर्शज का प्रयोग करते हैं। यहाँ विश्वस्यता अंतराल $4.40 \le \mu \le 4.60$ है।

2) क्योंकि यह छोटा प्रतिदर्श है, और समष्टि प्रसरण नहीं दिया गया है, इसलिए हम $t$ प्रतिदर्शज फका प्रयोग करते हैं, ($t$ = 2.49)। यहां विश्वस्यता अंतराल $93.01 \le \mu \le 96.99$ है।

3) क) गलत ख) गलत ग) सही।

# इकाई 14 परिकल्पना परीक्षण*

**इकाई की रूपरेखा**

14.0 उद्देश्य

14.1 विषय प्रवेश

14.2 परिकल्पना का सूत्रण

14.3 निराकृत क्षेत्र और त्रुटियों के प्रकार

14.3.1 बड़े प्रतिदर्शों के लिए निराकृत क्षेत्र

14.3.2 एकपुच्छ परीक्षण और द्विपुच्छ परीक्षण

14.3.3 टाइप-I और टाइप-II संबंधी त्रुटियाँ

14.3.4 छोटे प्रतिदर्शों के लिए निराकृत क्षेत्र

14.4 एकल प्रतिदर्श संबंधी परिकल्पना परीक्षण

14.4.1 समष्टि प्रसरण ज्ञात हो

14.4.2 समष्टि प्रसरण अज्ञात हो

14.5 प्रतिदर्श के बीच के अंतर से संबंधित परीक्षण

14.5.1 समष्टि प्रसरण ज्ञात हो

14.5.2 समष्टि प्रसरण अज्ञात हो

14.6 सार संक्षेप

14.7 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

## 14.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आपः

- निराकरणीय परिकल्पना और वैकल्पिक परिकल्पनाओं की अवधारणाओं का वर्णन कर सकेंगे,
- सार्थकता के स्तर के आधार पर क्रांतिक क्षेत्र की पहचान कर सकेंगे,
- टाइप-I और टाइप-II संबंधी त्रुटियों के बीच के अंतर को स्पष्ट कर सकेंगे,
- एकल प्रतिदर्श के आधार पर समष्टि माध्य से संबंधित परिकल्पना-परीक्षण कर सकेंगे, और
- दो प्रतिदर्शों से प्राप्त प्रतिदर्श माध्यों के बीच के अंतर के लिए परीक्षण कर सकेंगे।

---

* प्रो॰ कौस्तुभ बारिक, इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।

## 19.1 विषय प्रवेश

पिछली इकाई में हमने प्रतिदर्श आँकड़ों के आधार पर समष्टि माध्य के लिए विश्वास्यता अंतराल का आकलन करना सीखा था। हमारी इस मौजूदा इकाई में हम सांख्यिकीय अनुमिति के अन्य पहलू अर्थात परिकल्पना परीक्षण पर ध्यान केंद्रित करेंगे। परिकल्पना समष्टि प्राचल के बारे में दिया जाने वाला कथन/घोषणा या एक दावा है जैसे मान लीजिए कि हमें पता चलता है कि छत्तीसगढ़ राज्य की प्रति व्यक्ति आय प्रति वर्ष 20,000 रुपए है। यदि हमें इस राज्य के समग्र परिवारों की संपूर्ण जनगणना का पता है तो हम उपर्युक्त कथन को सही मान सकते हैं। इसे पता चलता है कि हमने छत्तीसगढ़ राज्य के सभी परिवारों की आमदनी पर आँकड़े इकट्ठे किए हैं और राज्य की प्रति व्यक्ति आय को परिकलित किया है। लेकिन, समय, धन और जनशक्ति जैसे अवरोध, प्रतिदर्श सर्वेक्षण में बाधा डालते हैं और इसी वजह से प्रतिदर्श सूचना के आधार पर हम ऐसे कथन के बारे में निष्कर्ष निकालते हैं। उपर्युक्त अध्ययन की प्रक्रिया, परिकल्पना-परीक्षण की विषयवस्तु है।

परिकल्पना परीक्षण का विविध क्षेत्रों और विविध स्थितियों में विस्तृत प्रयोग किया जाता है। जैसे, मान लीजिए हमें क्षय रोग के निवारण में प्रयुक्त नई दवा की प्रभाविता की जाँच करनी है। इस संदर्भ में ज़रूरी नहीं है कि इस दवा की प्रभाविता देखने के लिए क्षय रोग से पीड़ित सभी रोगियों को नयी दवा दी जाए। यहाँ हमारा काम है प्रतिनिधि प्रतिदर्श की प्राप्त करना और परीक्षण करना कि क्या नई दवा मौजेदा दवाइयों से अधिक कारगर है। आइए, एक अन्य उदाहरण लें जहाँ योजनाकार का मानना है कि बिहार और राजस्थान में अशोधित जन्म दर एक समान है। इस मामले में पिछले वर्ष के दौरान बिहार और राजस्थान में सभी जन्म लेने वाले शिशुओं की गणना का सर्वेक्षण करके, अशोधित जन्म दर परिकलित करना शायद संभव नहीं होगा। बजाए इसके, प्रतिदर्श सर्वेक्षण करके, योजनाकार द्वारा प्राप्त निष्कर्ष का परीक्षण किया जाता है।

परिकल्पना परीक्षण में हम निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास करते हैं : क्या विचाराधीन प्रतिदर्श किसी विशिष्ट समष्टि से निकाला गया है? क्या दो प्रतिदर्शों के बीच का अंतर इतना पर्याप्त रूप से महत्वपूर्ण है कि वे एक ही समष्टि से संबंधित नहीं हो सकते।

## 14.2 परिकल्पना का सूत्रीकरण

समष्टि के अभिलक्षण के बारे में परिकल्पना एक अस्थायी कथन है। जैसे हाल ही के वर्षों के सरकारी आँकड़े दर्शाते हैं कि उड़ीसा में महिला साक्षरता 51 प्रतिशत है। यहाँ महिला साक्षरता की दर के बारे में एक कथन या दावा प्रस्तुत किया गया है। अतः इसे हम परिकल्पना समझ सकते हैं।

परिकल्पना परीक्षण में चार महत्वपूर्ण घटक शामिल हैं : प) निराकरणीय परिकल्पना, पप) वैकल्पिक परिकल्पना, iii) परीक्षण प्रतिदर्श, और पअ) निष्कर्षों की व्याख्या। आइए, अब इनमें से हरेक की चर्चा करें।

आमतौर पर सांख्यिकीय परिकल्पना को $H$ वर्ण से दर्शाया जाता है। परिकल्पना दो तरह की होती हैः निराकरणीय परिकल्पना और वैकल्पिक परिकल्पना। निराकरणीय परिकल्पना ऐसा कथन है जिसे हम समष्टि के संदर्भ में सत्य मानते हैं और परीक्षण प्रतिदर्शज द्वारा इसका परीक्षण करते हैं।

आमतौर पर निराकरणीय परिकल्पना को $H_0$ द्वारा दर्शाया जाता है। उड़ीसा में महिला साक्षरता पर आधारित हमारे उदाहरण में, हमारी निराकरणीय परिकल्पना है।

$$H_0 : \mu = 0.51 \qquad \ldots(14.1)$$

जहाँ $\mu$ प्राचल है, इस मामले में उड़ीसा में महिला साक्षरता संभावना है कि निराकरणीय परिकल्पना जिसका परीक्षण हम करना चाहते हैं, सही नहीं है और महिला साक्षरता 51 प्रतिशत के बराबर नहीं है। अतः निराकरणीय परिकल्पना करने की आवश्यकता है जो मामले मं सत्य साबित होती है कि निराकरणीय परिकल्पना सत्य नहीं है। वैकल्पिक परिकल्पनाओं को हम $H_A$ संकेत से दर्शाते हैं। और इसे इस तरह सूत्रबद्ध करते हैंः

$$H_A : \mu \neq 0.51 \qquad \ldots(14.2)$$

हमें ध्यान में रखना होगा कि निराकरणीय परिकल्पना और वैकल्पिक परिकल्पना परस्पर अपवर्जी हैं अर्थात दोनों एक-सा सत्य नहीं हो सकते। दूसरा $H_0$ और $H_A$ दोनों, प्राचल के संदर्भ में सभी संभावित विकल्पों को नकारते हैं अर्थात इस संदर्भ में तीसरी संभावना नहीं हो सकती। जैसे, उड़ीसा में महिला साक्षरता के मामले में दो संभावनाएँ हैंः साक्षरता का दर 51 प्रतिशत होना या 51 प्रतिशत न होना अर्थात यहाँ कोई तीसरी संभावना नहीं है।

यह एक विरल संयोग है कि प्रतिदर्श माध्य ($\bar{x}$), समष्टि माध्य ($\mu$) के बराबर है। अधिकांश मामलों में हम $\bar{x}$ और $\mu$ के बीच अंतर पाते हैं। क्या यह अंतर प्रतिचयन उच्चावचन की वजह से है या सही मायने में प्रतिदर्श और समष्टि के बीच कोई अंतर है। इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें दोनों के बीच के अंतर के परीक्षण के लिए परीक्षण प्रतिदर्शज की आवश्यकता है। परीक्षण प्रतिदर्शज के प्रयोग से हमें जो परिणाम प्राप्त होगा, उसे खोलकर समझाने की आवश्यक है और निराकरणीय परिकल्पना को स्वीकार करना है या निराकृत करना है, इस संदर्भ में यह निर्णय लेने की भी आवश्यकता है।

परिकल्पना परीक्षण के लिए परीक्षण प्रतिदर्शज के संवर्धन और परिणामों की व्याख्या को खुलकर समझाने की आवश्यकता है। इन दो चरणों पर आगे चर्चा करने से पहले हम एक अन्य अवधारणा - क्रांतिक या निराकृत क्षेत्र पर प्रकाश डालते हैं।

## 14.3 निराकृत क्षेत्र एवं त्रुटियों के प्रकार

परिकल्पना परीक्षण और (पिछली इकाई में चर्चित) अंतराल आकलन के पीछे की विचारधारा एक ही है। इकाई 13 को ध्यान में लाइए जहाँ हमने अध्ययन किया था कि कुछ निश्चित विश्वास्यता स्तर के साथ प्रतिदर्श माध्य के इर्द-गिर्द विश्वास्यता अंतराल निर्मित किया जाता है। 95 प्रतिशत के विश्वास्यता स्तर का अर्थ है कि 95 प्रतिशत मामलों में प्रतिदर्श माध्य से आकलित विश्वास्यता स्तर में समष्टि माध्य ज्यों का त्यों ही रहेगा। यहाँ स्पष्ट नहीं होगा कि 5 प्रतिशत मामलों में समष्टि माध्य विश्वास्यता स्तर के भीतर बना नहीं रहेगा। ध्यान दीजिए कि जब समष्टि माध्य विश्वास्यता अंतराल के भीतर नहीं रहता तो हमें निराकरणीय परिकल्पना को निराकृत कर देना चाहिए।

### 14.3.1 बड़े प्रतिदर्शों के लिए निराकृत क्षेत्र

आइए, बड़े प्रतिदर्शो के लिए क्रांतिक क्षेत्र की अवधारणा का वर्णन करें। इसके बाद हम छोटे प्रतिदर्शों तक अपनी संकल्पना का विस्तार करेंगे। जैसा कि पिछली इकाइयों में हम पहले ही अध्ययन कर चुके हैं, प्रतिदर्श् माध्य ($\bar{x}$) का प्रतिदर्शी बंटन प्रसामान्य बंटन का

अनुसरण करता है और जिसका माध्य $\mu$ और मानक विचलन $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है। अतः $\bar{x}$ का मानक प्रसामान्य विचर, z में परिवर्तित किया जा सकता है ताकि यह प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करे और जिसका माध्य 0 और मानक विचलन 1 हो।

सांकेतिक रूप से $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ और $z \sim N(0,1)$

इकाई 11 में हमने सीखा कि मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्र, Z द्वारा माने गए विविध प्रकार के मानों के लिए प्रायिकता देता है। इन प्रायिकताओं को सारणी के रूप में भी प्रस्तुत किया जा सकता है (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A1 देखें)।

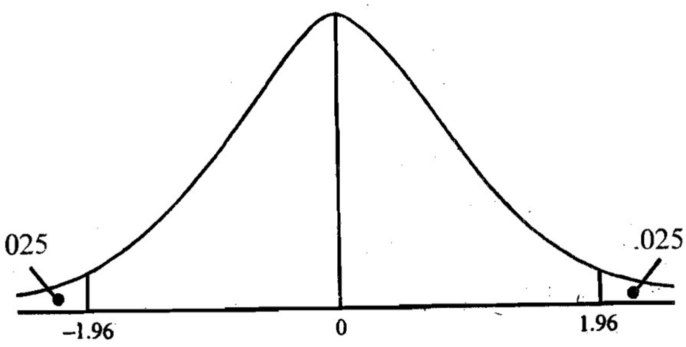
आइए, चित्र 14.1 में प्रस्तुत मानक प्रसामान्य चर पर ध्यान केंद्रित करें, जहॉ अक्ष, चर को और अक्ष, की प्रायिकता अर्थात $p(z)$ को दर्शाते हैं। हमें निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिए।

- जब प्रतिदर्श माध्य समष्टि माध्य के बराबर हो (अर्थात $\bar{x} = \mu$), तब $z = 0$ होगा। जब $\bar{x} < \mu$ तब z सकारात्मक होगा। दूसरी तरफ जब $\bar{x} < \mu$ तब z नकारात्मक होगा।
- ध्यान दीजिए हम $\bar{x}$ और $\mu$ के बीच के अंतर पर ध्यान दे रहे हैं। इसलिए z का संकेत नकारात्मक हो या धनात्मक हो, इससे कोई फर्क नहीं पड़ता।
- $\bar{x}$ और $\mu$ के बीच का अंतर जितना उच्च होगा, z का निरपेक्ष मान भी उतना ही उच्च होगा। अतः z-मान, $\bar{x}$ और $\mu$ के बीच की त्रुटि का पता लगता है और इसलिए परीक्षण प्रतिदर्शज के रूप में इसे प्रयुक्त किया जा सकता है।
- हमें z के क्रांतिक मान का पता होना चाहिए क्योंकि इसके परे $\bar{x}$ और $\mu$ के बीच का अंतर विशेष महत्व रखता है।
- यदि z का निरपेक्ष मान, क्रांतिक मान से निम्न है, तो हमें निराकरणीय परिकल्पना को निराकृत नहीं करना चाहिए।

अतः बड़े प्रतिदर्शों के मामले में z के निरपेक्ष मान को परिकल्पना परीक्षण के लिए परीक्षण प्रतिदर्शज के रूप में लिया जा सकता है, जैसे कि

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \ldots(14.3)$$

आइए, नीचे चित्र 14.1 में दिए गए मानक प्रसामान्य वर्क के माध्यम से क्रांतिक क्षेत्र की संकल्पना का वर्णन करें। जब हमारे पास 95% का विश्वास्यता गुणांक हो तो मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे का आच्छादित क्षेत्र 95% है। अतः वक्र के नीचे का 95% क्षेत्र $-1.96 \le z \le 1.96$ से बद्ध है। बाकी का 5% क्षेत्र $z \le -1.96$ और $z \ge 1.96$ से आच्छादित है। अतः मानक प्रसामान्य वक्र के दोनों तरफ पर क्षेत्र का 2.5% भाग निराकृत क्षेत्र (rejection region) को गठित करता है। इस क्षेत्र को चित्र 14.1 में दर्शाया गया है। यदि प्रतिदर्श माध्य निराकृत क्षेत्र में आ जाता है तो हम निराकरणीय परिकल्पना को निराकृत करते हैं।




**अस्वीकृति क्षेत्र**

चित्र 14.1

### 14.3.2 एकपुच्छ एवं द्विपुच्छ परीक्षण

चित्र 14.1 में हमने मानक प्रसामान्य वक्र के दोनों तरफ निराकृत क्षेत्र को दर्शाया है। हालांकि, बहुत से मामलों में हम मानक प्रसामान्य वक्र के (बायें या दायें) अर्थात किसी भी एक तरफ निराकृत क्षेत्र बना सकते हैं।

याद रखिए यदि $\alpha$ सार्थकता का स्तर है, तब द्विपुच्छ परीक्षण $\frac{\alpha}{2}$ क्षेत्र के लिए, इसे मानक प्रसामान्य वक्र के दोनों तरफ रखा जाता है। लेकिन यदि यह एकपुच्छ है, तब $\alpha$ क्षेत्र को मानक प्रसामान्य वक्र के एक-तरफ ही रखा जाता है। अतः एकपुच्छ और द्विपुच्छ परीक्षण के लिए क्रांतिक मान एक-दूसरे से अलग होते हैं।

एकपुच्छ या द्विपुच्छ परीक्षण का चयन वैकल्पिक परिकल्पना के सूत्रीकरण पर निर्भर करता है। जब वैकल्पिक परिकल्पना $H_A : \bar{x} \neq \mu$ प्रकार की है तो हम द्विपुच्छ परीक्षण करते हैं क्योंकि $\bar{x}$, $\mu$ से बड़ा या छोटो हो सकता है। दूसरी तरफ यदि वैकल्पिक परिकल्पना, $H_A : \bar{x} < \mu$ प्रकार की है तो समूचा निराकृत क्षेत्र, मानक प्रसामान्य वक्र के बायें तरफ होगा। इसी तरह यदि वैकल्पिक परिकल्पना $H_A : \bar{x} > \mu$ प्रकार की है तो समूचा निराकृत क्षेत्र, मानक प्रसामान्य वक्र के दायें तरफ होगा।

$z$ के क्रांतिक मान, सार्थकता के स्तर पर निर्भर करते हैं। सारणी 14.1 में सार्थकता $(\alpha)$ के निर्धारित स्तरों के लिए, इन कांतिक मानों को प्रसामान्य बंटन की अभीधारणा के अंतर्गत किए जाने वाले परीक्षणों के लिए, दिया गया है। ये मान द्वि-पुच्छ और एकपुच्छ परीक्षणों के लिए दिए गए हैं।

**सारणी 14.1 : z-प्रतिदर्शज संबंधी क्रांतिक मान**

| सार्थकता का स्तर $(\alpha)$ | 0.10 | 0.05 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|
| द्वि-पुच्छ परीक्षण | 1.65 | 1.96 | 2.58 | 2.81 |
| एक-पुच्छ परीक्षण | 1.28 | 1.65 | 2.33 | 2.58 |

नोट : यह सारणी, परीशिष्ट सारणी A1 से व्युत्पन्न है।

### 14.3.3 टाइप-I और टाइप-II संबंधी त्रुटियाँ

परिकल्पना परीक्षण में हम विश्वास्यता की निश्चित कोटि पर परिकल्पना को निराकृत करते हैं या नहीं करते। जैसा कि आपको पता है 0.95 के विश्वास्यता गुणांक का अर्थ है कि 100 प्रतिदर्शों में से 95ः भाग में प्राचल, स्वीकृत क्षेत्र के भीतर रहता है जबकि बाकी के 5ः भाग में प्राचल, निराकृत क्षेत्र में रहता है। अतः इस 5ः मामलों में, प्रतदर्श की प्राप्ति समष्टि से की जाती है जबकि प्रतिदर्श माध्य, समष्टि माध्य से काफी दूरी बनाए रखताहै। ऐसे मामलों में प्रतिदर्श समष्टि से संबद्ध होता है, लेकिन हमारी परीक्षण प्रक्रिया इसे निराकृत कर देती है। जैसे कि $H_0$ सही है लेकिन इसे निराकृत कर दिया जाता है। इसे "टाइप-I त्रुटि" कहते हैं। इसी तरह ऐसी भी स्थितियाँ हो सकती हैं जब $H_0$ सत्य नहीं होता लेकिन प्रतिदर्श सूचना के आधार पर हम इसे निराकृत नहीं करते। निर्णय लेने में ऐसी त्रुटि को टाइप-II त्रुटि कहते हैं (देखें सारणी 14.2)।

ध्यान दीजिए कि टाइप-I त्रुटि से पता चलता है कि किस सीमा तक गलती प्रभावहीन नज़र आती है। टाइप-I त्रुटि, सार्थकता के स्तर के बराबर होती है और इसे $\alpha$ से दर्शाया जाता है। याद रखिए कि विश्वास्यता गुणांक $1-\alpha$ के बराबर है।

सारणी 14.2ः त्रुटियों के प्रकार

| | $H_0$ सही | $H_0$ सही नहीं |
|---|---|---|
| अस्वीकृत $H_0$ | टाइप-I त्रुटि | सही निर्णय |
| स्वीकृत $H_0$ | सही निर्णय | टाइप-II त्रुटि |

### 14.3.2 छोटे प्रतिदर्शों के लिए निराकृत क्षेत्र

आइए, इकाई 13 के चित्र 13.2 पर दुबारा निगाह डालें जहाँ अंतराल आकलन में उचित परीक्षण प्रतिदर्श के प्रयोग के लिए हमने कुछ मानदंड दिए हैं। जैसा कि छोटे प्रतिदर्शों के मामले में ($n \leq 30$), यदि समष्टि मानक विचलन ज्ञात हो तो परिकल्पना परीक्षण के लिए हम $z$ प्रतिदर्शज लागू करते हैं। हमारी तरफ, यदि समष्टि मानक विचलन अज्ञात हे तो हम $t$-प्रतिदर्शज लागू करते हैं। परिकल्पना परीक्षण में भभ् हम इन्हीं मानदंडों को लागू करते हैं।

छोटे प्रतिदर्शों के मामले में, यदि समष्टि मानक विचलन ज्ञात हो तो परीक्षण प्रतिदर्शज हैः

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \text{...(14.4)}$$

दूसरी तरफ, यदि समष्टि मानक विचलन अज्ञात हो तो तो परीक्षण प्रतिदर्शज हैः

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}} \qquad \text{...(14.5)}$$

टी-बंटन के मामले में, हालांकि वक्र के नीचे का क्षेत्र (जिसे प्रायिकता कहते हैं) स्वतंत्रता की कोटियों के अनुसार बदल जाता है। अतः $t$ का क्रांतिक मान ज्ञात करते समय हमें स्वतंत्रता की कोटियों को भी ध्यान में रखना चाहिए। जब प्रतिदर्श आकार $n$ है तो स्वतंत्रता की कोटि $n-1$ होगी। अतः $t$ का क्रांतिक मान ज्ञात करते समय हमें दो बातें अवश्य ध्यान में रखनी चाहिए, (i) सार्थकता का स्तर और (ii) स्वतंत्रता की कोटि।

**बोध प्रश्न 1**

1. निम्नलिखित के बीच के अंतर को स्पष्ट कीजिएः

   क) निराकरणीय परिकल्पना और वैकल्पिक परिकल्पना

   ख) एक-पुच्छ और द्वि-पुच्छ परीक्षण

   ग) विश्वास्यता का स्तर और और सार्थकता का स्तर

   घ) टाइप-। और टाइप-।। संबंधी त्रुटियाँ

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

2. मान लीजिए 100 विद्यार्थियों के प्रतिदर्श की माध्य आयु 12.5 वर्ष की है। 5% के साक्षरता स्तर पर निराकृत क्षेत्र के आरेख को दर्शाते हुए पिरकल्पना परीक्षण कीजिए कि प्रतिदर्श की माध्य आयु, समष्टि आयु से अधिक है। मान लीजिए कि समष्टि आयु और मानक विचलन क्रमशः 10 वर्ष और 2 वर्ष है।

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

## 19.3 एकल प्रतिदर्श संबंधी परिकल्पना

बहुत सी स्थितियों में हमें पता लगाना होता है कि क्या प्रतिदर्श मुख्यतया प्राप्त समष्टि से भिन्न है या नहीं। जैसे, मान लीजिए हमने छत्तीसगढ़ के रायगढ़ जिले में 400 परिवारों के प्रतिदर्श का सर्वेक्षण किया और इन परिवारों की प्रति पूंजी आय को परिकलित किया। जिसके फलस्वरूप हमारा कार्य परिकल्पना परीक्षण करना है कि क्या प्रतिदर्श से परिकलित प्रति व्यक्ति आय, जिले की प्रति व्यक्ति आय से अलग तो नहीं है।

उपर्युक्त उदाहरण में हमारे सम्मुख दो विभिन्न स्थितियाँ हैंः (i) समष्टि (इस मामले में जिले के सभी परिवार) प्रसरण ज्ञात है, (ii) हमें समष्टि प्रसरण का पता नहीं है। हम हरेक मामले में शामिल चरणों का वर्णन इस प्रकार करते हैंः

### 14.4.1 समष्टि प्रसरण ज्ञात हो

आइए, एक ऐसे मामले पर विचार करें जहाँ हमें छत्तीसगढ़ के रायगढ़ जिले की प्रति व्यक्ति आय और इसके प्रसरण का पता है। मान लीजिए कि सरकारी रिकार्डों में उपलब्ध आंकड़े दर्शाते हैं कि रायगढ़ जिले की प्रति व्यक्ति आय 10,000 रु$_0$ और प्रति व्यक्ति आय

का मानक विचलन 1500 रु$_0$ है। हालांकि हमने 400 परिवारों का प्रतिदर्श सर्वेक्षण किया तो था और पाया भी था कि इनकी प्रति व्यक्त् आय 10,500 रु$_0$ है। क्या सरकारी रिकार्डों में प्रदत्त आंकड़े हमें स्वीकृत होने चाहिए?

इस मामले में $\mu$ = रु$_0$ 10000

$\sigma$ = रु$_0$ 1500

$\bar{x}$ = रु$_0$ 10500

$n = 400$

केंद्रीय सीमा प्रमेय से हमें पता चलता है कि जब प्रतिदर्श आकार बड़ा होगा तो प्रतिदर्श भी सन्निकटतःप्रसामान्य रूप से बंटित होगा। यह बात ऐसे मामलों में भी सत्य है जहाँ मूल समष्टि प्रसामान्य रूप से बंटित है। अतः यह उदाहरण, प्रसामान्य बंटन के अनुप्रयोग में उपयुक्त है।

इस मामले में हमारी निराकरणीय परिकल्पना है

$$H_0 : \bar{x} = \mu$$

निराकरणीय परिकल्पना से पता चलता है कि प्रतिदर्श माध्य, समष्टि माध्य के बराबर है। अन्य शब्दों में प्रतिदर्श से प्राप्त प्रति पूँजी आय वही है जैसा कि सरकारी रिकर्डों में वर्णित है। हमारी वैकल्पिक परिकल्पना हैः

$$H_A : \bar{x} \neq \mu$$

मान लीजिए हमारे पास बताने के लिए कोई कारण नहीं है कि प्रतिदर्श ($\bar{x}$) से प्राप्त प्रति व्यक्ति आय, सरकारी आंकड़ों में उपलब्ध प्रति व्यक्ति आय से अधिक है या कम। अतः हमारी वैकल्पिक परिकल्पना है कि $\bar{x}$, $\mu$ के किसी भी तरफ हो सकता है। इसलिए, हमें द्वि-पुच्छ परीक्षण करना होगा ताकि निराकृत क्षेत्र, मानक प्रसामान्य वक्र के दोनों तरफ हो और परीक्षण प्रतिदर्शज है।

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} . \qquad \text{...(14.5)}$$

उपर्युक्त में मानों के प्रतिस्थापन पर, हम पाते हैं:

$$z = \frac{|10500 - 10000|}{1500/\sqrt{400}} = \frac{500}{500/20} = \frac{500}{75} = 6.67$$

मानक प्रसामान्य वक्र और z के विविध मानों से संबंधित क्षेत्र को ध्यान में लाइए (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A1 देखें)। हम देखते हैं कि जब $z = 1.96$ हो तो मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे का आच्छादत क्षेत्र 0.4750 होगा। इसलिए सार्थकता का स्तर 5 प्रतिशत है। इसी तरह जब $z = 2.58$ तब मानकप्रसामान्य वक्र के नीचे का आच्छादित क्षेत्र 0.495 है, इसलिए सार्थकता का स्तर 1 प्रतिशत है। उपर्युक्त मामले में चूँकि $z = 6.67$ है, इसलिए प्रतिदर्श, तार्किक क्षेत्र में निहत है और हम परिकल्पना को निराकृत करते हैं। अतः प्रतिदर्श से प्राप्त प्रति व्यक्ति आय सरकारी रिकॉर्डों में प्रदत्त प्रति व्यक्ति आय से मोटे तौर पर भिन्न है। अनुसरण संबंधी चरण हैं:

1. निराकरणीय परिकल्पना का विशेष रूप से उल्लेखक कीजिए।

2. पता लगाइए कि क्या इसमें एक-पुच्छ या द्वि-पुच्छ परीक्षण की आवश्यकता है या नहीं। इसी आधार पर तार्किक क्षेत्र की पहचान कीजिए। वैकल्पिक परिकल्पना के विस्तृत ब्यौरे में यह सहायक होगा।
3. (14.5) को ध्यान में रखकर $z$-प्रतिदर्श के लिए प्रतिदर्श मानों को लागू कीजिए।
4. सार्थकता के स्तर के अनुरूप $z$-सारणी से क्रांतिक मान का पता लगाइए।
5. यदि क्रांतिक मान निम्न मान की प्राप्ति होती है तो निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत नहीं कीजिए।
6. यदि क्रांतिक मान से बड़े मान की प्राप्ति होती है तो निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत करें और वैकल्पिक परिकल्पना को स्वीकार करें।

**उदाहरण 14.1**

मान लीजिए किसी विशेष ब्रांड की बैटरी से जनित वोल्टेज प्रसामान्य रूप से बंटित है। ऐसी 100 बैटरियों के यादृच्छिक प्रतिदर्श का परीक्षण किया गया और 1.4 वोल्ट की माध्य वोल्टेज पाई गई। 0.01 के सार्थकता के स्तर पर क्या इससे पता चलता है कि इन बैटरियों की सामान्य औसतन वोल्टेज है और जो 1.3 वोल्ट से भिन्न है। मान लीजिए समष्टि मानक विचलन 0.21 वोल्ट है।

यहाँ $H_0: \mu = 1.5$

चूँकि प्रतिदर्श की औसतन वोल्टेज, समष्टि की औसतन वोल्टेज से भिन्न हो सकती है। यदि यह 1.5 वोल्ट से कम हो या अधिक। हमारा निराकृत क्षेत्र, प्रसामान्य वक्र के दोनों तरफ है। अतः यह द्वि-पुच्छ परीक्षण का मामला है और वैकल्पिक परिकल्पना है।

$H_1: \mu \neq 1.5$

चूंकि समष्टि मानक विचलन $\sigma$ ज्ञात है और परीक्षण प्रतिदर्शज हैः

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|1.4 - 1.5|}{\frac{0.21}{\sqrt{100}}} = 4.8$$

मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्र से संबंधित सारणी से हमें पाते हैं कि 1ः सार्थकता के स्तर पर क्रांतिक मान 2.58 है। चूँकि का प्रेक्षित मान, 2.58 से बड़ा है, इसलिए हम 1ः स्तर पर निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत करते हैं और वैकल्पिक परिकल्पना को स्वीकार करते हैं कि बैटरियों का औसतन जीवन 1.5 वोल्ट से भिन्न है।

### 14.4.2 समष्टि प्रसरण अज्ञात हो

यह अभिधारणा है कि समष्टि मानक विचलन ($\sigma$) हमें ज्ञात है, अवास्तविक नज़र आती है क्योंकि हमें स्वयं समष्टि माध्य का पता नहीं है। जब $\sigma$ अज्ञात हो तो हमें प्रतिदर्श मानक विचलन ($s$) द्वारा इनका अनुमान लगाना पड़ता है।

ऐसी स्थितियों में प्रतिदर्श आकार के आधार पर दो संभावनाएँ नज़र आती हैं। यदि प्रतिदर्श आकार बड़ा है $(n > 30)$, तब हम z- प्रतिदर्श लागू करते हैं अर्थात

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}} \qquad \text{...(14.6)}$$

यदि प्रतिदर्श आकार छोटा है $(n \le 30)$ तो हम $t$ प्रतिदर्शज लागू करते हैं। जहाँ स्वतंत्रता की कोटि $n-1$ है। परीक्षण प्रतिदर्शज हैः

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}} \qquad \text{...(14.7)}$$

अनुरक्षण करने योग्य चरण हैंः

1. निराकरणीय परिकल्पना का विशेष रूप से उल्लेख कीजिए।
2. पता लगाइए कि क्या एक-पुच्छ या द्वि-पुच्छ परीक्षण करना ज़रूरी है। इसी आधार पर मानक प्रसामान्य वक्र में निराकृत क्षेत्र की पहचान कीजिए। वैकल्पिक परिकल्पना को स्पष्ट करने में यह सहायक होगा।
3. जाँच कीजिए कि प्रतिदर्श आकार बड़ा $(n > 30)$ है या छोटा $(n \le 30)$।
4. यदि $n > 30$ है, तो (14.6) को ध्यान में रखकर $t$- प्रतिदर्शज लागू कीजिए।
5. सार्थकता के स्तर $(\alpha)$ के आधार पर z-सारणी से क्रांतिक मान को ज्ञात कीजिए।
6. यदि $n > 30$ है, तो (14.7) को ध्यान में रखकर $t$- प्रतिदर्शज लागू कीजिए।
7. $n-1$ (स्वतंत्रता की कोटि) और सार्थकता के स्तर $(\alpha)$ के लिए $t$-सारणी से क्रांतिक मान का पता लगाइए।
8. यदि क्रांतिक मान से छोटा मान प्राप्त होता है तो निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत न कीजिए।
9. यदि क्रांतिक मान से बड़ा मान प्राप्त होता है तो निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत कीजिए और वैकल्पिक परिकल्पना को अपनाइए।

**उदाहरण 14.2 :**

मान लीजिए दवा की गोली में एस्प्रीन की औसतन 10 मिग्रा. मात्रा शामिल है। 100 गोलियों का यादृच्छिक प्रतिदर्श 10.2 मिग्रा. मात्रा का माध्य एस्प्रीन दर्शाता है और जहाँ मानक विचलन 1.4 मिग्रा. है। क्या 0.05 सार्थकता के स्तर पर आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि माध्य एस्प्रीन की मात्रा वास्तव में 10 मिग्रा. ही है।

यहाँ निराकरणीय परिकल्पना हैः $H_0 : \mu = 10$

निराकृत क्षेत्र, 10 मिग्रा. के दोनों तरफ है। अतः यहाँ द्वि-पुच्छ परीक्षण करना होगा और $H_A : \mu \ne 10$

इसके अलावा प्रतिदर्श माध्य $\bar{x} = 10.2$ है और प्रतिदर्श आकार $n = 100$ चूँकि समष्टि मानक विचलन अज्ञात है, इसलिए इसका अनुमान हम प्रतिदर्श मानक विचलन से लगाते हैं और हमार परीक्षण प्रतिदर्शज है : $z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}}$ प्रतिदर्श से प्रासंगिक मानों को लागू करके, हम प्राप्त करते हैं:

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{|10.2 - 10|}{\frac{1.4}{\sqrt{100}}} = 1.43$$

5ः के सार्थकता के स्तर पर z का क्रांतिक मान 1.96 है। चूँकि z का मान, जिसकी प्राप्ति हमने की है, 1.96 से कम है। इसलिए हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत नहीं कर सकते। अतः एस्प्रीन का माध्य स्तर 10 मिग्रा. है।

**उदाहरण 14.3ः**

हरिपुरा जिला की समष्टि की माध्य जीवन प्रत्याशा 60 वर्ष है। जिले में स्वास्थ्य देखभाल संबंधी कुछ विशेष उपायों को अपनाया गया जिसके फलस्वरूप 25 व्यक्तियों का यादृच्छिक प्रतिदिर्श 60.5 वर्षों की औसतन जीवन प्रत्याशा को दर्शाता है और इसका मानक विचलन 2 वर्ष है। क्या हम 0.05 प्रतिशत सार्थकता के स्तर पर निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि जिले की औसतन जीवन प्रत्याशा वास्तव में बढ़ गई है?

यहाँ $H_0$: $\mu = 60$

जीवन प्रत्याशा में बढ़ोत्तरी के लिए हमें परीक्षण करना होगा। अतः यह एकल-पुच्छ परीक्षण का मामला है और निराकृत क्षेत्र, मानक प्रसामान्य वक्र के दायें हाथ (पुच्छ) पर होगा।

अतः हमारी वैकल्पिक परिकल्पना हैः

$H_1$: $\mu > 60$

यहाँ समष्टि मानक विचलन $\sigma$ अज्ञात है और हम प्रतिदर्श मानक विचलन $s$ द्वारा इसका अनुमान लगा सकते हैं। यहाँ प्रतिदर्श का आकार छोटा है। अतः (14.7) को ध्यान में रखकर हमें $t$- प्रतिदर्शज को लागू करना होगा।

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{|60.5 - 60|}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = 1.25$$

प्रतिदर्श का आकार 25 है ओर स्वतंत्रता की कोटियाँ 25-1 = 24 है। हम t-सारणी से पाते हैं कि 24 स्वतंत्रता की कोटियाँ, 5 प्रतिशत सार्थकता का स्तर और एक-पुच्छ परीक्षण के लिए t-का मान 1.71 है। चूँकि $t$-का मान जिसकी प्राप्ति हमने ऊपर की, क्रांतिक मान से छोटा है, इसलिए हम परिकल्पना को अस्वीकृत नहीं करते। अतः जीवन प्रत्याशा में कोई बदलाव नहीं आया है। इसलिए हम वैकल्पिक परिकल्पना को स्वीकार करते हैं कि स्वास्थ्य देखभाल संबंधी उपायों को अपनाने के बावजूद भी जिला की जीवन प्रत्याशा में कोई बदलाव नहीं आया।

**बोध प्रश्न 2**

1. एक रिपोर्ट का मानना है कि किसी स्कूल की परीक्षा में गणित में औसतन 78 अंक प्राप्त किए गए, जिनका मानक विचलन 16 था। हालांकि, 37 विद्यार्थियों का यादृच्छिक प्रतिदर्श गणित में औसतन 84 अंक दर्शाता है। इस प्रमाण को ध्यान में रखकर क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि गणित में औसतन 84 अंक प्राप्त किए गए थे। 0.05 की सार्थकता के स्तर का प्रयोग करें।

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

2. यात्री कार बनाने वाली किसी कंपनी का दावा है कि कारों की औसतन क्षमता 35 किमी. प्रति लीटर पैट्रोल है। 50 कारों के यादृच्छिक प्रतिदर्श से ऐसी क्षमता औसतन 32 किमी. प्रति लीटर नज़र आती है और जिसका मानक विचलन 1.2 किमी. है। क्या यह प्रमाण 0.01 सार्थकता के स्तर पर कंपनी के दावे को गलत साबित करता है?

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

3. नारियल के तेल के 200 टिनों के यादृच्छिक प्रतिदर्श से औसतन प्रति टिन 4.95 किग्रा. के भार का पता चलता है और जिसका मानक विचलन 0.21 किग्रा. है। क्या आप 0.01 के सार्थकता के स्तर पर प्रति टिन 5 किग्रा. के नेट भार की परिकल्पना को स्वीकार करते हैं?

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

4. किसी रिपोर्ट के अनुसार, हाल ही के वर्ष के दौरान सरकारी कर्मचारियों की राष्ट्रीय औसतन वार्षिक आय 24,632 रुपए थी और जिसका मानक विचलन 1827 रुपए था। इसी वर्ष के दौरान 49 सरकारी कर्मचारियों के यादृच्छिक प्रतिदर्श से 25,415 रुपए की औसतन वार्षिक आमदनी का पता चलता है। इस प्रतिदर्श को ध्यान में रखकर, 0.05 के सार्थकता के स्तर पर क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सरकारी कर्मचारियों की राष्ट्रीय औसतन वार्षिक आय सही मायने में 24,632 रुपए ही थी।

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

## 14.5 प्रतिदर्श के बीच के अंतर से संबंधित परीक्षण

कई बार हमें दो प्रतिदर्शों के बीच के अंतर के लिए परीक्षण करना पड़ता है। इसका उद्देश्य पता लगाना होता है कि क्या दोनों प्रतिदर्श समान समष्टि से लिए गए हैं या इससे जाँच की जाती है कि क्या दोनों समष्टियों में कोई एक सामान्य लक्षण मौजूद है। जैसे, हम एक परिकल्पना करते हैं कि किसी प्लांट ए में प्रति कामगार उत्पादन उतना ही है जितना कि प्लांट बी में प्रति कामगार है। ऐसी परिकल्पना के परीक्षण की प्रक्रिया की चर्चा हम नीचे कर रहे हैं।

यहाँ दुबारा हमारे सम्मुख दो अलग-अलग स्थितियाँ हैं : क्या दोनों समष्टियों का प्रसरण हमें ज्ञात है। दूसरी कि प्रतिदर्श की आकार छोटा है या बड़ा।

निराकरणीय परिकल्पना ऐसा कथन है जिससे पता चलता है कि दोनों समष्टियों का समष्टि माध्य समान है। सांकेतिक रूप से

A B $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ...(14.8)

वैकल्पिक परिकल्पना ऐसा कथन है, जहॉ दोनों समष्टि माध्य अलग-अलग होते हैं। सांकेतिक रूप से

$H_A : \mu_1 \neq \mu_2$ ...(14.9)

### 14.5.1 समष्टि प्रसरण ज्ञात हो

जब दोनों समष्टियों का मानक विचलन (प्रसरण का सकारात्मक वर्गमूल) ज्ञात हो तो हम निम्नलिखित की भांति z प्रतिदर्शज को लागू करेंगे।

$$z = \frac{\left|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)\right|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad ...(14.10)$$

उपर्युक्त (14.10) में, पादांक 1 से आशय पहले प्रतिदर्श से है और पादांक 2 से आशय आशय दूसरे प्रतिदर्श से है। (14.10) में उपयुक्त आंकड़ों को लागू करके हम z के प्रेक्षित मान की प्राप्ति करते हौ और सार्थकता के विशिष्ट स्तर के लिए इसकी तुलना क्रांतिक मान से करते हैं।

**उदाहरण 14.4:**

कोई बैंक दिल्ली और कोलकाता के अपने ग्राहकों की औसतन बचत का पता लगाना चाहता है। दिल्ली के 250 खातों के प्रतिदर्श से 22,500 रुपए की औसतन बचत का पता चलताहै जबकि कोलकाता के 200 खातों के प्रतिदर्श से 21,500 रुपए की औसत बचत का पता चलता है। यह ज्ञात है कि दिल्ली में बचत का मानक विचलन 150 रु. है और कोलकाता में यह 200रुपए है। क्या 1 प्रतिशत के सार्थकता स्तर पर हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दिल्ली और कोलकाता में ग्राहकों का बैंकिंग पैटर्न एक जैसा है?

इस मामले में निराकरणीय परिकल्पना है $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

और वैकल्पिक परिकल्पना है $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$

पप्राप्त जानकारी के आधार पर

$\bar{x}_1$ = 2200 रुपए $\sigma_1 = 150$ रुपए

$\bar{x}_2$ = 22400 रुपए $\sigma_2 = 200$ रुपए

$n_1$ = 250 रुपए $n_2 = 200$

चूँकि $\sigma_1$ और $\sigma_2$ हमें ज्ञात हैं, इसलिए हम z- परीक्षण लागू करते हैं

परीक्षण प्रतिदर्शज है $z = \dfrac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.

उपर्युक्त जानकारी को लागू करके, हमें प्राप्त है :

$$z = \frac{|22500 - 22400|}{\sqrt{\dfrac{150^2}{250} + \dfrac{200^2}{200}}} = \frac{100}{\sqrt{90 + 200}} = 5.87$$

हम पाते हैं कि 1 प्रतिशत के सार्थकता के स्तर पर सारणी 14.2 से प्राप्त क्रांतिक मान 2.58 है।

चूँकि *t* का प्रेक्षित मान, *t* के क्रांतिक मान से अधिक है, इसलिए निराकरणीय परिकल्पना निराकृत की जाती है और वैकल्पिक परीकल्पना स्वीकार की जाती है। अतः दिल्ली और कोलकाता में ग्राहकों का बैंकिंग पैटर्न अलग-अलग है।

### 19.5.2 समष्टि प्रसरण अज्ञात हो

जब समष्टि मानक प्रसरण ($\sigma^2$) अज्ञात हो तो हम प्रतिदर्श मानक प्रसरण ($s^2$) से इसका पता लगाते हैं। यदि दोनों प्रतिदर्श आकार में बड़े हैं अर्थात ($n$>30) तब हम प्रतिदर्श को इस प्रकार लागू करेंगेः

$$z = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \qquad \ldots(14.11)$$

दूसरी तरफ, यदि प्रतिदर्श का आकार छोटा है अर्थात ($n \le 30$) तब निम्नलिखित की भांति हम -प्रतिदर्शज को लागू करेंगेः

$$t = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \qquad \ldots(14.12)$$

*t*-परीक्षण स्वतंत्रता की कोटियाँ हैं = $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$

**उदाहरण 14.5:**

गणित की कोई अध्यापिका, कक्षा X के दो अनुभागों की कार्य प्रगति की तुलना करना चाहती हैं। वह अनुभाग ए में 25 विद्यार्थि और अनुभाग बी में 20 विद्यार्थि को एक जैसा प्रश्न पत्र हल करने के लिए देती हैं। उसने पाया कि अनुभाग ए विद्यार्थियों का माध्य स्कोर 78 अंक है और मानक विचलन 4 अंक है जबकि अनुभाग बी के विद्यार्थियों का माध्य

स्कोर 75 अंकों का है और मानक विचलन 5 अंक है। क्या दोनों अनुभागों में विद्यार्थियों की प्रगति 1 प्रतिशत के सार्थकता के स्तर पर अलग-अलग है?

इस मामले में निराकरणीय परिकल्पना है $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

और वैकल्पिक परिकल्पना है $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$

प्राप्त जानकारी के आधार पर

| | |
|---|---|
| $\bar{x}_1 = 78$ | $s_1 = 4$ |
| $\bar{x}_2 = 75$ | $s_2 = 5$ |
| $n_1 = 25$ | $n_2 = 20$ |

चूँकि $\sigma_1$ और $\sigma_2$ अज्ञात हैं और प्रतिदर्शों का आकार छोटा है, इसलिए हम $t$-परीक्षण लागू करते हैं

$$t = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{|78 - 75|}{\sqrt{\frac{4^2}{25} + \frac{5^2}{20}}} = \frac{3}{1.37} = 2.18$$

इस मामले में स्वतंत्रता की कोटियाँ हैं: $25+20-2 = 43$.

सारणी 15.2 से पता चलता है कि 43 स्वतंत्रता की कोटियों के लिए 1 प्रतिशत के सार्थकता के स्तर पर $t$ का मान 2.69 है।

चूँकि $t$ का क्रांतिक मान, $t$ के प्रेक्षित मान से कम है, इसलिए हमक निराकरणीय परिकल्पना को निराकृत करते हैं और वैकल्पिक परिकल्पना को स्वीकृत करते हैं। इसलिए गणित में कार्य-प्रगति के संदर्भ में अनुभाग ए के विद्यार्थी अनुभाग बी से भिन्न हैं।

**बोध प्रश्न 3 :**

1. निम्नलिखित निम्नलिखित सूचना प्राप्त है:

| | |
|---|---|
| $n_1=50$ | $n_2=50$ |
| $\bar{x}_1=52.3$ | $\bar{x}_2=52.3$ |
| $\sigma_1 = 6.1$ | $\sigma_2 = 6.1$ |

निम्नलिखित परिकल्पना का परीक्षण कीजिए :

$H_o : \mu_1 = \mu_2$

$H_A : \mu_1 \neq \mu_2$

$\alpha = 0.05$

....................................................................................................................

....................................................................................................................

....................................................................................................................

....................................................................................................................

....................................................................................................................

2. दो प्रसामान्य समष्टियों से दो प्रतिदर्श निकाले जाते हैं और निम्नलिखित सूचना प्राप्त की जाती है:

$n_1=15$ $n_2=10$

$\bar{x}_1=140$ $\bar{x}_2=150$

$s_1=10$ $s_2=15$

1 प्रतिशत के सार्थकता के स्तर पर परिकल्पना का परीक्षण कीजिए कि दोनों समष्टियों के बीच कोई अंतर नहीं है।

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

3. मान लीजिए दो प्रसामान्य समष्टियों से $n_1=20$ और $n_2=15$ आकार के प्रतिदर्श प्राप्त किए जाते हैं। प्रतिदर्श प्रतिदर्शज इस प्रकार हैं :

$\bar{x}_1=110$ $\bar{x}_2=125$

$s_1^2=225$ $s_2^2=150$

क्या हम 5 प्रतिशत के सार्थकता के स्तर पर निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\mu_1<\mu_2$ ?

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

## 14.6 सार संक्षेप

इस इकाई में हमने परिकल्पना परीक्षण और समष्टि के बारे में निष्कर्ष निकालने की विधियों के बारे में चर्चा की। परिकल्पना एक ऐसा कथन है जो समष्टि प्राचल से संबंधित है। परिकल्पना परीक्षण के लिए उपलब्ध जानकारी के आधार पर हम परीक्षण प्रतिदर्शज को सूत्रबद्ध करते हैं। इस इकाई में हम स्थितियों पर विचार करते हैं : i) एकल प्रतिदर्श की व्याख्या, और ii) दो प्रतिदर्शों के बीच की तुलना।

परीक्षण प्रतिदर्शज का निर्माण, समष्टि प्रसरण और प्रतिदर्श आकार से संबंधित जानकारी पर निर्भर करता है। जब समष्टि प्रसरण हमें ज्ञात हो या प्रतिदर्श का आकार बड़ा हो तो हम प्रसामान्य बंटन लागू करते हैं और परिकल्पना परीक्षण के लिए z प्रतिदर्शज का प्रयोग करते हैं। दूसरी तरफ जब हमें समष्टि प्रसरण का पता नहीं होता और प्रतिदर्श आकार छोटा

हो तो ज.बंटन के आधार पर हम परीक्षण प्रतिदर्शज का निर्माण करते हैं। याद रखिए कि बड़े प्रतिदर्शों के लिए ही बंटन सन्निकटतः प्रसामान्य बंटन होता है और इसलिए हम z प्रतिदर्शज का प्रयोग कर सकते हैं।

## 14.7 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1. अनुभाग 14.2 और 14.3 को पढ़कर उत्तर दें।
2. यह बड़ा प्रतिदर्श है और अज्ञात है। इसके लिए एक-पुच्छ परीक्षण करना होगा। अतः निराकृत क्षेत्र, मानक प्रसामान्य वक्र की दायें तरफ की पुच्छ है। इसी आधार पर आरेख बनाइए।

**बोध प्रश्न 2**

1. चूँकि यह ज्ञात प्रसरण वाला, बड़ा प्रतिदर्श है, इसलिए हम z-प्रतिदर्श लागू करते हो। चूँकि वैकल्पिक परिकल्पना $\mu > 78$ है, इसलिए हम एक-पुच्छ परीक्षण करेंगे। z का प्रेक्षित मान 2.28 है। 5 प्रतिशत के सार्थकता के स्तर पर z का क्रांतिक मान 1.65 है। चूँकि क्रांतिक मान की तुलना में प्रेक्षित मान बड़ा है, इसलिए हम निराकरणीय परिकल्पना को निराकृत करते हैं। अतः निष्कर्ष है कि औसतन अंक 78 से अधिक थे।
2. यह एक बड़ा प्रतिदर्श है और जिसका प्रसरण अज्ञात है। इसके लिए द्वि-पुच्छ परीक्षण करना होगा। z का प्रेक्षित मान 17.68 है और 1 प्रतिशत के सार्थकता के स्तर पर z का क्रांतिक मान 2.58 है। चूँकि प्रेक्षित मान, क्रांतिक मान से अधिक है, इसलिए निराकरणीय परिकल्पना निराकृत की जाती है।
3. अज्ञात प्रसरण वाला यह एक बड़ा प्रतिदर्श है। इसके लिए z-प्रतिदर्शज वाला द्वि-पुच्छ परीक्षण करना होगा। z का प्रेक्षित मान 3.37 है। निराकरणीय परिकल्पना निराकृत की जाती है।
4. चूँकि यह ज्ञात मानक विचलन वाला बड़ा प्रतिदर्श है। इसके लिए द्वि-पुच्छ परीक्षण करना होगा। z का प्रेक्षित मान 3.00 है और 5 प्रतिशत के सार्थकता के स्तर पर z का क्रांतिक मान 2.58 है। निराकरणीय परिकल्पना निराकृत की जाती है। इसलिए, सरकारी कर्मचारियों की राष्ट्रीय औसतन आय 24,632रुपए से भिन्न है।

**बोध प्रश्न 3**

1. प्रतिदर्श बड़े आकार के हैं और समष्टि मानक विचलन ज्ञात हैं। इसलिए हम z-प्रतिदशजों को लागू करते हैं और z का प्रेक्षित मान 2.58 है। चूँकि वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_1 \neq \mu_2$ है। अतः $\sigma = 0.05$ पर द्वि-पुच्छ परीक्षण करना होगा और z का क्रांतिक मान 1.96 है। निराकरणीय परिकल्पना निराकृत की जाती है।
2. प्रतिदर्श का आकार छोटा है और $\sigma$ अज्ञात है। इसलिए हम z प्रतिदर्शज लागू करते हैं और t का प्रेक्षित मान 0.61 है। $H_A$: $\mu_1 \neq \mu_2$ की तुलना में परिकल्पना $H_o$: $\mu_1 = \mu_2$ है। अतः इसके लिए द्वि-पुच्छ परीक्षण करना होगा। 1 प्रतिशत के सार्थकता

के स्तर पर 23 स्वतंत्रता की कोटियों के लिए, का क्रांतिक मान 2.50 है। निराकृत नहीं है।

3. प्रतिदर्श आकार में छोटे हैं और $\sigma$ अज्ञात है, z प्रतिदर्शज लागू किया जाता है। t का प्रेक्षित मान 0.72 है। $H_o$ है $\mu_1 = \mu_2$ और $H_A$ है $\mu_1 < \mu_2$ । अतः एक पुच्छ परीक्षण करना होगा। 33 स्वतंत्रता की कोटियों पर 5 प्रतिशत सार्थकता के स्तर के लिए, t का क्रांतिक मान 2.00 है। $H_o$ निराकृत नहीं है।

# इकाई 15 नामीय आंकड़ों से संबंधित काई-वर्ग परीक्षण*

**इकाई की रूपरेखा**


15.0 उद्देश्य

15.1 विषय प्रवेश

15.2 आसंग सारणी

15.3 प्रत्याशित बारंबारता

15.4 काई-वर्ग परीक्षण प्रतिदर्शज

15.5 सार संक्षेप

15.6 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत


## 15.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप,

- आसंग सारणी के रूप में नामीय आंकड़ों को प्रस्तुत कर सकेंगे,
- काई-वर्ग परीक्षण प्रतिदर्शज को व्यक्त कर सकेंगे, और
- आसंग सारणियों के संदर्भ में काई-वर्ग परीक्षण को लागू कर सकेंगे।

## 15.1 विषय प्रवेश

पिछली दो इकाइयों में हमने प्रतिदर्श सूचना के आधार पर समष्टि प्राचलों के बारे में निष्कर्ष निकालने की प्रक्रिया की चर्चा की थी। बहुत से मामलों में, विशेष रूप से नामीय चरों के लिए हमें प्राचल प्राप्त नहीं हैं। इस संदर्भ में एक चर (या गुण) ऐसा मान बन जाता है, जो परिमित संख्या की श्रेणियों से संबंधित होता है और हम हरेक श्रेणी में प्रेक्षणों की संख्या की गिनती कर सकते हैं। नामीय आंकड़ों के मामले में निष्कर्ष निकालना ही, हमारी इस मौजूदा इकाई की विषयवस्तु है।

पिछली इकाई में हमने परिकल्पना परीक्षण की विधि की चर्चा की थी और जिसमें समष्टि से संबंधित कुछ निश्चित अवधारणाओं को शामिल करना ज़रूरी होता है और जिससे हम प्रतिदर्श की प्राप्ति करत हैं। जैसे, छोटे प्रतिदर्शों के लिए टी-परीक्षण लागू करने के लिए ज़रूरी है कि मूल समष्टि प्रसामान्य रूप से बंटित हो। इसी तरह प्राचल के लिए कोई विशिष्ट मान निर्धारित करके परिकल्पना को सूत्रबद्ध किया जाता है। अतः ऐसे परीक्षणों को प्राचलिक परीक्षण कहते हैं।

यदि प्राचल के मान के बारे में कोई भी अभिधारणा कायम करना संभव नहीं है तो पिछली इकाई में वर्णित परीक्षण प्रक्रिया असफल रहेगी। ऐसी स्थितियाँ जहॉ समष्टि प्रसामान्य बंटन का अनुसरण नहीं करती या जिन स्थितियों में प्राचल मान निर्धारित करना संभव नहीं होता, वहाँ हम गैर-प्राचलिक परीक्षणों का प्रयोग करते हैं।

---


* प्रो. कौस्तुभ बारिक, इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।

हमारी आवश्यकता के आधार पर काफी कुछ गैर–पैरामीट्रिक परीक्षण हैं। हालांकि, हम खुद को एक सामान्य प्रक्रिया तक सीमित कर लेते हैं, यानी काई–वर्ग परीक्षण।

यूनिट 11 में हमने काई–वर्ग वितरण और इसकी महत्वपूर्ण विशेषताओं को परिभाषित किया है। आपको याद रखना चाहिए कि **काई–वर्ग** वितरण एक वर्ग मानक सामान्य चर है, जिसे $z = (X-\mu)/\sigma$ द्वारा दिया गया है, जहाँ $\mu$ माध्य है और $\sigma$ जनसंख्या का मानक विचलन है। इस प्रकार काई–वर्ग प्रतिदर्शज केवल गैर–नकारात्मक मान लेता है। इसके अलावा, काई–वर्ग प्रतिदर्शज में तिरछा वितरण (दाएं–तिरछा) होता है। तिरछापन की सीमा इसकी स्वतंत्रता की डिग्री ( degree of freedom) पर निर्भर करती है। स्वंत्रता की डिग्री बढ़ने के साथ, इसका तिरछापन कम हो जाता है (अर्थात, यह अधिक सममित हो जाता है)। काई–वर्ग परीक्षण का व्यापक रूप से अर्थमिति में उपयोग किया जाता है; मुख्य रूप से विचरण की तुलना के लिए। कई परिस्थितियों में हम जनसंख्या विचरण को नहीं जानते हैं और एक नमूने से इसका अनुमान लगाते हैं। विचरण के अनुमानित मूल्य की तुलना काई–वर्ग परीक्षण के आधार पर सैद्धांतिक वितरण के साथ की जाती है। इस प्रकार, काई–वर्ग प्रतिदर्शज का उपयोग विश्वास्यता–अंतराल के निर्माण में भी किया जाता है। हालांकि, इस इकाई में हम चर के बीच स्वतंत्रता के परीक्षण के लिए काई–वर्ग प्रतिदर्शज के उपयोग तक खुद को सीमित करेंगे।

## 15.2 आसंग सारणी (CONTINGENCY TABLE)

आसंग सारणी एक आयताकार सारणी है जिसमें समष्टि से प्राप्त प्रेक्षणों को दो अभिलक्षणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। इसे द्विघात सारणी भी कहते हैं। ऐसे गुणात्मक आंकड़ों को ध्यान में लाइए जिन्हें श्रेणियों में वर्गीकृत किया जा सकता है और जिन्हें हमने द्विधा सारणी में प्रस्तुत किया था।

काई-वर्ग परीक्षण के अनुप्रयोग को समझाने के लिए, आइए, एक उदाहरण लें। तालिका 15.1 में संमकों के प्रस्तुतीकरण में पिता का व्यवसाय एक नामिक चर तथा बच्चों की संख्या एक संख्यात्मक चर है। हमने व्यवसाय को पाँच श्रेणियों में विभाजित किया - i) बेरोजगार, ii) अकुशल श्रमिक, iii) कुशल श्रमिक, iv) स्व-रोजगार प्राप्त, और v) पेशेवर। इसी तरह, बच्चों की संख्या के आधार पर हमने परिवारों को पाँच श्रेणियों में विभाजित किया - i) निःसंतान, ii) एक संतान, iii) दो संतान, iv) तीन संतान, और v) तीन से अधिक संतान वाले परिवार। 650 परिवारों के प्रतिदर्श के लिए प्राप्त आँकड़ों को सारणी 15.1 में प्रस्तुत किया गया है।

**तालिका 15.1 : व्यवसाय और बच्चों की संख्या पर आधारित प्रेक्षित बारंबारता**

| *बच्चों की संख्या* | *व्यवसाय* | | | | | *कुल* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *बेरोजगार* (1) | *अकुशल श्रमिक* (2) | *कुशल श्रमिक* (3) | *स्व-रोजगार* (4) | *पेशेवर* (5) | |
| 0 | 10 | 15 | 10 | 12 | 11 | 58 |
| 1 | 35 | 25 | 17 | 18 | 25 | 120 |
| 2 | 22 | 33 | 45 | 40 | 43 | 183 |
| 3 | 11 | 40 | 48 | 58 | 30 | 187 |
| $\geq 4$ | 11 | 33 | 30 | 19 | 9 | 102 |
| कुल | 89 | 146 | 150 | 147 | 118 | 650 |

सारणी 15.1, आसंग सारणी है क्योंकि हम पता करने का प्रयास कर रहे हैं कि क्या बच्चों की संख्या, पिता के व्यवसाय पर आश्रित है।

हमारा उद्देश्य पिता के व्यवसाय और बच्चों की संख्या के बीच के संभावित संबंध का परीक्षण करना है। अतः निराकरणीय परिकल्पना इस प्रकार होगीः

$H_0$ : वैकल्पिक परिकल्पना के संदर्भ में पिता का व्यवसाय और बच्चों की संख्याएक-दूसरे से अलग है।

$H_A$ : बच्चों की संख्या और पिता का व्यवसाय एक-दूसरे पर निर्भर है।

सारणी 15.1 में हमने प्रत्येक कोष्ठिका (cell) के लिए प्रेक्षित बारंबारता को सारणी में प्रस्तुत किया है। जब विचाराधीन चरों के बीच कोई संबंध नहीं है तो प्रत्याशित बारंबारता क्या होनी चाहिए। इसका उत्तर हम नीचे देंगे।

## 15.3 प्रत्याशित बारंबारताएँ (EXPECTED FREQUENCIES)

जैसा कि हमने ऊपर बताया, प्रत्याशित बारंबारता को ऐसी अभिधारणा के अंतर्गत परिकलित किया जाता है जब बच्चों की संख्या और पिता के व्यवसाय के बीच कोई संबंध नहीं होता। तालिका 15.1 में प्रत्येक कोष्ठिका के लिए प्रत्याशित बारंबारता की प्राप्ति, कोष्ठिका प्रायिकता द्वारा $n$ आकार के प्रतिदर्शों को गुणा करके की जाती है। कोष्ठिका प्रायिकता परिकलित करने के लिए हमें सर्वप्रथम हरेक पंक्ति और स्तंभ के लिए उपांत बारंबारता को ज्ञात करना होगा। जैसा कि इकाई 7 में हमने बताया था, पंक्ति उपांत (row marginal) पंक्ति के कुल योग (row total) से दिए जाते हैं और इसी तरह "स्तम्भ उपांत" स्तम्भ के कुल योग (column totals) द्वारा प्राप्त होते हैं। पंक्तियों के लिए, हम "उपांत पंक्ति प्रायिकता" ज्ञात कर सकते हैं। पहली पंक्ति के लिए, उपांत पंक्ति प्रायिकता $p(r_1)$ होगी।

$$p(r_1) = \frac{58}{650} = 0.09 \qquad ...(15.1)$$

अन्य पंक्तियों के लिए उपांत पंक्ति प्रायिकताएँ हैं:

$$p(r_2) = \frac{120}{650} = 0.18 \qquad p(r_3) = \frac{183}{650} = 0.28$$

$$p(r_4) = \frac{187}{650} = 0.29 \qquad p(r_5) = \frac{102}{650} = 0.16$$

इसी तरह स्तम्भ 1 के लिए उपांत स्तम्भ प्रायिकता $p(c_1)$ होगी।

$$p(c_1) = \frac{89}{650} = 0.14 \qquad ...(15.2)$$

अन्य स्तम्भों के लिए सीमांत स्तम्भ प्रायिकताएँ हैं:

$$p(c_2) = \frac{146}{650} = 0.22 \qquad p(c_3) = \frac{150}{650} = 0.23$$

$$p(c_4) = \frac{147}{650} = 0.23 \qquad p(c_5) = \frac{118}{650} = 0.18$$

इकाई 13 को ध्यान में लाइए जहाँ हमने अध्ययन किया था कि यदि $A$ और $B$ अलग-अलग घटनाएँ हैं, तो $A$ और $B$ के अनुसार संयुक्त रूप से उभरने की प्रायिकता होगी

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

इसलिए, यदि हम निराकरणीय प्रायिकता को सत्य मान लें तब पहली कोष्ठिका $(c_1, r_1)$ के लिए कोष्ठिका प्रायिकता होगीः

$$p(r_1 \cap c_1) = p(r_1).p(c_1) = \frac{58}{650} \times \frac{89}{650} = 0.0892 \times 0.1369 = 0.0122 \quad ...(15.3)$$

अतः पहली कोष्ठिका के लिए प्रत्याशित बारंबारता होगीः

$$E_{11} = n.p(r_1 \cap c_1) = 650 \times 0.0122 = 7.94 \quad ...(15.4)$$

सामान्य भाषा में हम कह सकते हैं कि $ij$ कोष्ठिका की प्रत्याशित बारंबारता है

$$E_{ij} = \frac{(\text{पंक्ति } i \text{ का कुल योग})(\text{स्तम्भ } j \text{ का कुल योग})}{\text{प्रतिदर्श आकार}} \quad ...(15.5)$$

(15.5) को लागू कर हम हरेक कोष्ठिका के लिए प्रत्याशित कोष्ठिका बारंबारता को परिकलित कर सकते हैं और सारणी 15.2 को ध्यान में रखकर सारणी तैयार कर सकते हैं।

तालिका 15.2 : हरेक कोष्ठिका के लिए प्रत्याशित बारंबारता का परिकलन

| बच्चों की संख्या | | व्यवसाय | | | | | कुल |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *बेरोजगार* | *अकुशल श्रमिक* | *कुशल श्रमिक* | *स्व-रोजगार* | *पेशेवर* | |
| | | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | |
| 0 | $r_1$ | 7.94 | 13.03 | 13.38 | 13.12 | 10.53 | 58.00 |
| 1 | $r_2$ | 16.43 | 26.95 | 27.69 | 27.14 | 21.78 | 120.00 |
| 2 | $r_3$ | 25.06 | 41.10 | 42.23 | 41.39 | 33.22 | 183.00 |
| 3 | $r_4$ | 25.60 | 42.00 | 43.15 | 42.29 | 33.95 | 187.00 |
| ≥ 4 | $r_5$ | 13.97 | 22.91 | 23.54 | 23.07 | 18.52 | 102.00 |
| कुल | | 89.00 | 146.00 | 150.00 | 147.00 | 118.00 | 650.00 |

हमारा अगला चरण प्रत्याशित बारंबारता से प्रेक्षित बारंबारता की तुलना करना है।

## 15.4 काई-वर्ग परीक्षण प्रतिदर्शज

प्रेक्षित बारंबारता से प्रत्याशित बारंबारता की तुलना करने के लिए हम काई-वर्ग प्रतिदर्शज (chi-squared statistic) का निर्माण करेंगे, जो हैः

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad ...(15.6)$$

जहाँ $O$ प्रेक्षित बारंबारता है और $E$ प्रत्याशित बारंबारता।

काई-वर्ग प्रतिदर्शज की स्वतंत्रता की कोटियाँ $(r-1)(c-1)$ हैं। जैसे, यदि 3 पंक्तियाँ और 4 स्तम्भ हैं तो स्वतंत्रता की कोटियाँ हैं $(3-1)(4-1) = 6$

आइए काई-वर्ग परीक्षण का अनुसरण करने में शामिल चरणों को संक्षेप में समझें। ये हैं:

1. निराकरणीय और वैकल्पिक परिकल्पनाओं को स्पष्ट कीजिए।
2. समीकरण (15.5) का प्रयोग कर हरेक कोष्ठिका के लिए प्रत्याशित बारंबारता (expected frequency) परिकलित कीजिए।
3. समीकरण (15.6) का प्रयोग कर $\chi^2$ प्रतिदर्शज के प्रेक्षित मान (observed value) को परिकलित कीजिए।
4. सूत्र $(r-1)(c-1)$ के आधार पर स्वतंत्रता की कोटियों (degress of freedom) का निर्धारण कीजिए।
5. अपेक्षित सार्थकता के स्तर $(\alpha)$ की जाँच कीजिए।
6. पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A3 से $\alpha$ और प्रासंगिक स्वतंत्रता की कोटियों के लिए $\chi^2$ के क्रांतिक मान (critical value) ज्ञात कीजिए।
7. $\chi^2$ के प्रेक्षित मान की तुलना $\chi^2$ के क्रांतिक मान से कीजिए।
8. यदि प्रेक्षित मान, क्रांतिक मान से कम है तो $H_0$ को अनदेखा मत कीजिए (do not reject $H_0$)।
9. यदि प्रेक्षित मान, क्रांतिक मान से बड़ा है तब $H_0$ को छोड़ दीजिए (reject $H_0$) और $H_A$ को ले लीजिए।

सारणी 15.1 में प्रदत्त आंकड़ों के लिए, आइए $\chi^2$ के प्रेक्षित मान को ज्ञात करें।

सारणी 15.3 : हरेक कोष्ठिका के लिए $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

| बच्चों की संख्या | | व्यवसाय | | | | | कुल |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | बेरोजगार | अकुशल श्रमिक | कुशल श्रमिक | स्व-रोजगार | पेशेवर | |
| | | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | |
| 0 | $r_1$ | 0.53 | 0.30 | 0.86 | 0.10 | 0.02 | 1.80 |
| 1 | $r_2$ | 20.99 | 0.14 | 4.13 | 3.08 | 0.47 | 28.81 |
| 2 | $r_3$ | 0.37 | 1.60 | 0.18 | 0.05 | 2.88 | 5.08 |
| 3 | $r_4$ | 8.33 | 0.10 | 0.54 | 5.84 | 0.46 | 15.26 |
| $\geq 4$ | $r_5$ | 0.63 | 4.44 | 1.77 | 0.72 | 4.89 | 12.46 |
| कुल | | 30.85 | 6.58 | 7.48 | 9.77 | 8.72 | 63.41 |

चूंकि 5 पंक्तियाँ और 5 स्तम्भ हैं, इसलिए स्वतंत्रता की कोटियाँ (5 - 1) (5 - 1) = 16 हैं। 16 (स्वतंत्रता की कोटियों) के लिए, 5% के सार्थकता के स्तर पर $\chi^2$ का तार्किक मान 26.30 होगा (सारणी 15.3 देखें)। सारणी 15.3 से हम पाते हैं कि $\chi^2$ का प्रेक्षित मान 63.41 है। चूँकि प्रेक्षित मान, क्रांतिक मान से बड़ा है, इसलिए हम निराकरणीय परिकल्पना ($H_0$) को छोड़ देते हैं और वैकल्पिक परिकल्पना ($H_A$) को अपना लेते हैं। अतः निष्कर्ष निकलता है कि बच्चों की संख्या और पिता का व्यवसाय एक-दूसरे पर निर्भर हैं।

**बोध प्रश्न 1**

1) निम्नलिखित अवधारणाओं का वर्णन कीजिए:
   क) उपांत बारंबारता
   ख) कोष्ठिका प्रायिकता
   ग) प्रत्याशित बारंबारता
   घ) $\chi^2$ के व्रांतिक मान

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

2) किसी कंपनी द्वारा तीन तरह के (संतरा, कोला और नींबू) जैसे पेय पदार्थ तैयार किए जाते हैं। दो राज्यों (पहला उत्तर का पंजाब और दूसरा दक्षिण - तमिलनाडु) में 160 व्यक्तियों के सर्वेक्षण से निम्नलिखित जानकारी प्राप्त होती है।

| | संतरा | कोला | नींबू |
|---|---|---|---|
| पंजाब | 33 | 26 | 31 |
| तमिलनाडु | 17 | 24 | 29 |

   परिकल्पना परीक्षण कीजिए कि दोनों राज्यों में किसी एक पेय पदार्थ को विशेष रूप से अधिक पसंद नहीं किया जा रहा है ($\alpha = 0.05$).

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

   ..............................................................................................................

## 15.5 सार संक्षेप

गुणात्मक आंकड़ों के मामले में हम प्राचलिक मान प्राप्त नहीं कर सकते। इसलिए, $z$ - प्रतिदर्शज या $t$ - प्रतिदर्शज के आधार पर परिकल्पना परीक्षण नहीं किया जा सकता । ऐसी स्थितियों में काई-वर्ग परीक्षण लागू किया जाता है। काई-वर्ग परीक्षण गैर-प्राचलिक परीक्षण है जहाँ समष्टि के बारे में कोई अभिधारणा कायम करना जरूरी नहीं होता । काई-वर्ग परीक्षण के अलावा कुछ अन्य प्रकार के गैर-प्राचलिक परीक्षण भी होते हैं। हालांकि आसंग सारणी के अलावा बहुत सी स्थितियों में काई-वर्ग परीक्षण लागू किया जा सकता है।

आसंग सारणी में हम निरागरणीय परिकल्पना का परीक्षण करे हैं। वैकल्पिक परिकल्पना की तुलना में जहाँ चर एक-दूसरे से संबद्ध होते हैं, वहीं विचाराधीन चर एक-दूसरे से अलग होते हैं। यहाँ हम प्रत्याशित बारंबारता की तुलना प्रेक्षित बारंबारता से करते हैं और काई-वर्ग प्रतिदर्शज का निर्माण करते हैं। यदि काई वर्ग का प्रेक्षित मान, काई-वर्ग के प्रत्याशित मान से बड़ा होता है तो हम निराकरणीय परिकल्पना का खंडन करते हैं।

## 15.6 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

**बोध प्रश्न 1**

1. इकाई का अध्ययन कर आवधारणाओं को स्पष्ट करें।

2. प्रत्याशित बारंबारता हैः

| | संतरा (orange) | कोला (cola) | नींबू (lemon) |
|---|---|---|---|
| पंजाब | 28.13 | 28.13 | 33.75 |
| तमिलनाडु | 21.88 | 21.88 | 26.25 |

काई-वर्ग प्रतिदर्शज का प्रेक्षित मान 2.98 है और स्वतंत्रता की कोटियाँ 2 हैं। 2 स्वतंत्रता की कोटियों पर 5 प्रतिशत के सार्थकता स्तर पर, काई-वर्ग का क्रांतिक मान 5.99 है। अतः निराकरणीय परिकल्पना का खंडन नहीं किया जा सकता । क्षेत्र में पेय पदार्थ का उपभोग अलग-अलग है।

## परिशिष्ट सारणीयाँ

### सारणी **A1:** प्रसामान्य क्षेत्र सारणी

| **Z** | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| **0.1** | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| **0.2** | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| **0.3** | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| **0.4** | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| **0.5** | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| **0.6** | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| **0.7** | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| **0.8** | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| **0.9** | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| **1.0** | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| **1.1** | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| **1.2** | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| **1.3** | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| **1.4** | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| **1.5** | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| **1.6** | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| **1.7** | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| **1.8** | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| **1.9** | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| **2.0** | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| **2.1** | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| **2.2** | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| **2.3** | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| **2.4** | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| **2.5** | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| **2.6** | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| **2.7** | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| **2.8** | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| **2.9** | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| **3.0** | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

सारणी **A2:** $\chi^2$ बटंन का क्रांतिक मान

| df\area | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| **2** | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 |
| **3** | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 |
| **4** | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 |
| **5** | 9.236 | 11.071 | 12.833 | 15.086 | 16.750 |
| **6** | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 |
| **7** | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 |
| **8** | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 |
| **9** | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 |
| **10** | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 |
| **11** | 17.275 | 19.675 | 21.920 | 24.725 | 26.757 |
| **12** | 18.549 | 21.026 | 23.337 | 26.217 | 28.300 |
| **13** | 19.812 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 |
| **14** | 21.064 | 23.685 | 26.119 | 29.141 | 31.319 |
| **15** | 22.307 | 24.996 | 27.488 | 30.578 | 32.801 |
| **16** | 23.542 | 26.296 | 28.845 | 32.000 | 34.267 |
| **17** | 24.769 | 27.587 | 30.191 | 33.409 | 35.718 |
| **18** | 25.989 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 |
| **19** | 27.204 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 |
| **20** | 28.412 | 31.410 | 34.170 | 37.566 | 39.997 |
| **21** | 29.615 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.401 |
| **22** | 30.813 | 33.924 | 36.781 | 40.289 | 42.796 |
| **23** | 32.007 | 35.172 | 38.076 | 41.638 | 44.181 |
| **24** | 33.196 | 36.415 | 39.364 | 42.980 | 45.559 |
| **25** | 34.382 | 37.652 | 40.646 | 44.314 | 46.928 |
| **26** | 35.563 | 38.885 | 41.923 | 45.642 | 48.290 |
| **27** | 36.741 | 40.113 | 43.195 | 46.963 | 49.645 |
| **28** | 37.916 | 41.337 | 44.461 | 48.278 | 50.993 |
| **29** | 39.087 | 42.557 | 45.722 | 49.588 | 52.336 |
| **30** | 40.256 | 43.773 | 46.979 | 50.892 | 53.672 |

सारणी **A3:** $t$ – बटंन का क्रांतिक मान

| df\p | 0.25 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1.0000 | 3.0777 | 6.3138 | 12.7062 | 31.8205 | 63.6567 |
| **2** | 0.8165 | 1.8856 | 2.9200 | 4.3027 | 6.9646 | 9.9248 |
| **3** | 0.7649 | 1.6377 | 2.3534 | 3.1825 | 4.5407 | 5.8409 |
| **4** | 0.7407 | 1.5332 | 2.1318 | 2.7765 | 3.7470 | 4.6041 |
| **5** | 0.7267 | 1.4759 | 2.0150 | 2.5706 | 3.3649 | 4.0321 |
| **6** | 0.7176 | 1.4398 | 1.9432 | 2.4469 | 3.1427 | 3.7074 |
| **7** | 0.7111 | 1.4149 | 1.8946 | 2.3646 | 2.9980 | 3.4995 |
| **8** | 0.7064 | 1.3968 | 1.8595 | 2.3060 | 2.8965 | 3.3554 |
| **9** | 0.7027 | 1.3830 | 1.8331 | 2.2622 | 2.8214 | 3.2498 |
| **10** | 0.6998 | 1.3722 | 1.8125 | 2.2281 | 2.7638 | 3.1693 |
| **11** | 0.6974 | 1.3634 | 1.7959 | 2.2010 | 2.7181 | 3.1058 |
| **12** | 0.6955 | 1.3562 | 1.7823 | 2.1788 | 2.6810 | 3.0545 |
| **13** | 0.6938 | 1.3502 | 1.7709 | 2.1604 | 2.6503 | 3.0123 |
| **14** | 0.6924 | 1.3450 | 1.7613 | 2.1448 | 2.6245 | 2.9768 |
| **15** | 0.6912 | 1.3406 | 1.7531 | 2.1315 | 2.6025 | 2.9467 |
| **16** | 0.6901 | 1.3368 | 1.7459 | 2.1199 | 2.5835 | 2.9208 |
| **17** | 0.6892 | 1.3334 | 1.7396 | 2.1098 | 2.5669 | 2.8982 |
| **18** | 0.6884 | 1.3304 | 1.7341 | 2.1009 | 2.5524 | 2.8784 |
| **19** | 0.6876 | 1.3277 | 1.7291 | 2.0930 | 2.5395 | 2.8609 |
| **20** | 0.6870 | 1.3253 | 1.7247 | 2.0860 | 2.5280 | 2.8453 |
| **20** | 0.6870 | 1.3253 | 1.7247 | 2.0860 | 2.5280 | 2.8453 |
| **21** | 0.6864 | 1.3232 | 1.7207 | 2.0796 | 2.5177 | 2.8314 |
| **22** | 0.6858 | 1.3212 | 1.7171 | 2.0739 | 2.5083 | 2.8188 |
| **23** | 0.6853 | 1.3195 | 1.7139 | 2.0687 | 2.4999 | 2.8073 |
| **24** | 0.6849 | 1.3178 | 1.7109 | 2.0639 | 2.4922 | 2.7969 |
| **25** | 0.6844 | 1.3163 | 1.7081 | 2.0595 | 2.4851 | 2.7874 |
| **26** | 0.6840 | 1.3150 | 1.7056 | 2.0555 | 2.4786 | 2.7787 |
| **27** | 0.6837 | 1.3137 | 1.7033 | 2.0518 | 2.4727 | 2.7707 |
| **28** | 0.6834 | 1.3125 | 1.7011 | 2.0484 | 2.4671 | 2.7633 |
| **29** | 0.6830 | 1.3114 | 1.6991 | 2.0452 | 2.4620 | 2.7564 |
| **30** | 0.6828 | 1.3104 | 1.6973 | 2.0423 | 2.4573 | 2.7500 |
| **inf** | 0.6745 | 1.2816 | 1.6449 | 1.9600 | 2.3264 | 2.5758 |

## सारणी A4: $F$ – बटंन का क्रांतिक मान (5% सार्थकता का स्तर)

| df2/ df1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 161.448 | 199.500 | 215.707 | 224.583 | 230.162 | 233.986 | 236.768 | 238.883 | 240.543 | 241.882 |
| **2** | 18.513 | 19.000 | 19.164 | 19.247 | 19.296 | 19.330 | 19.353 | 19.371 | 19.385 | 19.396 |
| **3** | 10.128 | 9.552 | 9.277 | 9.117 | 9.014 | 8.941 | 8.887 | 8.845 | 8.812 | 8.786 |
| **4** | 7.709 | 6.944 | 6.591 | 6.388 | 6.256 | 6.163 | 6.094 | 6.041 | 5.999 | 5.964 |
| **5** | 6.608 | 5.786 | 5.410 | 5.192 | 5.050 | 4.950 | 4.876 | 4.818 | 4.773 | 4.735 |
| **6** | 5.987 | 5.143 | 4.757 | 4.534 | 4.387 | 4.284 | 4.207 | 4.147 | 4.099 | 4.060 |
| **7** | 5.591 | 4.737 | 4.347 | 4.120 | 3.972 | 3.866 | 3.787 | 3.726 | 3.677 | 3.637 |
| **8** | 5.318 | 4.459 | 4.066 | 3.838 | 3.688 | 3.581 | 3.501 | 3.438 | 3.388 | 3.347 |
| **9** | 5.117 | 4.257 | 3.863 | 3.633 | 3.482 | 3.374 | 3.293 | 3.230 | 3.179 | 3.137 |
| **10** | 4.965 | 4.103 | 3.708 | 3.478 | 3.326 | 3.217 | 3.136 | 3.072 | 3.020 | 2.978 |
| **11** | 4.844 | 3.982 | 3.587 | 3.357 | 3.204 | 3.095 | 3.012 | 2.948 | 2.896 | 2.854 |
| **12** | 4.747 | 3.885 | 3.490 | 3.259 | 3.106 | 2.996 | 2.913 | 2.849 | 2.796 | 2.753 |
| **13** | 4.667 | 3.806 | 3.411 | 3.179 | 3.025 | 2.915 | 2.832 | 2.767 | 2.714 | 2.671 |
| **14** | 4.600 | 3.739 | 3.344 | 3.112 | 2.958 | 2.848 | 2.764 | 2.699 | 2.646 | 2.602 |
| **15** | 4.543 | 3.682 | 3.287 | 3.056 | 2.901 | 2.791 | 2.707 | 2.641 | 2.588 | 2.544 |
| **16** | 4.494 | 3.634 | 3.239 | 3.007 | 2.852 | 2.741 | 2.657 | 2.591 | 2.538 | 2.494 |
| **17** | 4.451 | 3.592 | 3.197 | 2.965 | 2.810 | 2.699 | 2.614 | 2.548 | 2.494 | 2.450 |
| **18** | 4.414 | 3.555 | 3.160 | 2.928 | 2.773 | 2.661 | 2.577 | 2.510 | 2.456 | 2.412 |
| **19** | 4.381 | 3.522 | 3.127 | 2.895 | 2.740 | 2.628 | 2.544 | 2.477 | 2.423 | 2.378 |
| **20** | 4.351 | 3.493 | 3.098 | 2.866 | 2.711 | 2.599 | 2.514 | 2.447 | 2.393 | 2.348 |
| **21** | 4.325 | 3.467 | 3.073 | 2.840 | 2.685 | 2.573 | 2.488 | 2.421 | 2.366 | 2.321 |
| **22** | 4.301 | 3.443 | 3.049 | 2.817 | 2.661 | 2.549 | 2.464 | 2.397 | 2.342 | 2.297 |
| **23** | 4.279 | 3.422 | 3.028 | 2.796 | 2.640 | 2.528 | 2.442 | 2.375 | 2.320 | 2.275 |
| **24** | 4.260 | 3.403 | 3.009 | 2.776 | 2.621 | 2.508 | 2.423 | 2.355 | 2.300 | 2.255 |
| **25** | 4.242 | 3.385 | 2.991 | 2.759 | 2.603 | 2.490 | 2.405 | 2.337 | 2.282 | 2.237 |
| **26** | 4.225 | 3.369 | 2.975 | 2.743 | 2.587 | 2.474 | 2.388 | 2.321 | 2.266 | 2.220 |
| **27** | 4.210 | 3.354 | 2.960 | 2.728 | 2.572 | 2.459 | 2.373 | 2.305 | 2.250 | 2.204 |
| **28** | 4.196 | 3.340 | 2.947 | 2.714 | 2.558 | 2.445 | 2.359 | 2.291 | 2.236 | 2.190 |
| **29** | 4.183 | 3.328 | 2.934 | 2.701 | 2.545 | 2.432 | 2.346 | 2.278 | 2.223 | 2.177 |
| **30** | 4.171 | 3.316 | 2.922 | 2.690 | 2.534 | 2.421 | 2.334 | 2.266 | 2.211 | 2.165 |
| **40** | 4.085 | 3.232 | 2.839 | 2.606 | 2.450 | 2.336 | 2.249 | 2.180 | 2.124 | 2.077 |
| **60** | 4.001 | 3.150 | 2.758 | 2.525 | 2.368 | 2.254 | 2.167 | 2.097 | 2.040 | 1.993 |
| **120** | 3.920 | 3.072 | 2.680 | 2.447 | 2.290 | 2.175 | 2.087 | 2.016 | 1.959 | 1.911 |
| **inf** | 3.842 | 2.996 | 2.605 | 2.372 | 2.214 | 2.099 | 2.010 | 1.938 | 1.880 | 1.831 |

सारणी **A4:** ***F*** — बटंन का क्रांतिक मान **(5%** सार्थकता का स्तर**)** (क्रमशः)

| **df2/ df1** | **12** | **15** | **20** | **24** | **30** | **40** | **60** | **120** | **INF** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 243.906 | 245.950 | 248.013 | 249.052 | 250.095 | 251.143 | 252.196 | 253.253 | 254.314 |
| **2** | 19.413 | 19.429 | 19.446 | 19.454 | 19.462 | 19.471 | 19.479 | 19.487 | 19.496 |
| **3** | 8.745 | 8.703 | 8.660 | 8.639 | 8.617 | 8.594 | 8.572 | 8.549 | 8.526 |
| **4** | 5.912 | 5.858 | 5.803 | 5.774 | 5.746 | 5.717 | 5.688 | 5.658 | 5.628 |
| **5** | 4.678 | 4.619 | 4.558 | 4.527 | 4.496 | 4.464 | 4.431 | 4.399 | 4.365 |
| **6** | 4.000 | 3.938 | 3.874 | 3.842 | 3.808 | 3.774 | 3.740 | 3.705 | 3.669 |
| **7** | 3.575 | 3.511 | 3.445 | 3.411 | 3.376 | 3.340 | 3.304 | 3.267 | 3.230 |
| **8** | 3.284 | 3.218 | 3.150 | 3.115 | 3.079 | 3.043 | 3.005 | 2.967 | 2.928 |
| **9** | 3.073 | 3.006 | 2.937 | 2.901 | 2.864 | 2.826 | 2.787 | 2.748 | 2.707 |
| **10** | 2.913 | 2.845 | 2.774 | 2.737 | 2.700 | 2.661 | 2.621 | 2.580 | 2.538 |
| **11** | 2.788 | 2.719 | 2.646 | 2.609 | 2.571 | 2.531 | 2.490 | 2.448 | 2.405 |
| **12** | 2.687 | 2.617 | 2.544 | 2.506 | 2.466 | 2.426 | 2.384 | 2.341 | 2.296 |
| **13** | 2.604 | 2.533 | 2.459 | 2.420 | 2.380 | 2.339 | 2.297 | 2.252 | 2.206 |
| **14** | 2.534 | 2.463 | 2.388 | 2.349 | 2.308 | 2.266 | 2.223 | 2.178 | 2.131 |
| **15** | 2.475 | 2.403 | 2.328 | 2.288 | 2.247 | 2.204 | 2.160 | 2.114 | 2.066 |
| **16** | 2.425 | 2.352 | 2.276 | 2.235 | 2.194 | 2.151 | 2.106 | 2.059 | 2.010 |
| **17** | 2.381 | 2.308 | 2.230 | 2.190 | 2.148 | 2.104 | 2.058 | 2.011 | 1.960 |
| **18** | 2.342 | 2.269 | 2.191 | 2.150 | 2.107 | 2.063 | 2.017 | 1.968 | 1.917 |
| **19** | 2.308 | 2.234 | 2.156 | 2.114 | 2.071 | 2.026 | 1.980 | 1.930 | 1.878 |
| **20** | 2.278 | 2.203 | 2.124 | 2.083 | 2.039 | 1.994 | 1.946 | 1.896 | 1.843 |
| **21** | 2.250 | 2.176 | 2.096 | 2.054 | 2.010 | 1.965 | 1.917 | 1.866 | 1.812 |
| **22** | 2.226 | 2.151 | 2.071 | 2.028 | 1.984 | 1.938 | 1.889 | 1.838 | 1.783 |
| **23** | 2.204 | 2.128 | 2.048 | 2.005 | 1.961 | 1.914 | 1.865 | 1.813 | 1.757 |
| **24** | 2.183 | 2.108 | 2.027 | 1.984 | 1.939 | 1.892 | 1.842 | 1.790 | 1.733 |
| **25** | 2.165 | 2.089 | 2.008 | 1.964 | 1.919 | 1.872 | 1.822 | 1.768 | 1.711 |
| **26** | 2.148 | 2.072 | 1.990 | 1.946 | 1.901 | 1.853 | 1.803 | 1.749 | 1.691 |
| **27** | 2.132 | 2.056 | 1.974 | 1.930 | 1.884 | 1.836 | 1.785 | 1.731 | 1.672 |
| **28** | 2.118 | 2.041 | 1.959 | 1.915 | 1.869 | 1.820 | 1.769 | 1.714 | 1.654 |
| **29** | 2.105 | 2.028 | 1.945 | 1.901 | 1.854 | 1.806 | 1.754 | 1.698 | 1.638 |
| **30** | 2.092 | 2.015 | 1.932 | 1.887 | 1.841 | 1.792 | 1.740 | 1.684 | 1.622 |
| **40** | 2.004 | 1.925 | 1.839 | 1.793 | 1.744 | 1.693 | 1.637 | 1.577 | 1.509 |
| **60** | 1.917 | 1.836 | 1.748 | 1.700 | 1.649 | 1.594 | 1.534 | 1.467 | 1.389 |
| **120** | 1.834 | 1.751 | 1.659 | 1.608 | 1.554 | 1.495 | 1.429 | 1.352 | 1.254 |
| **inf** | 1.752 | 1.666 | 1.571 | 1.517 | 1.459 | 1.394 | 1.318 | 1.221 | 1.000 |

सारणी **A4:** $F$ – बटंन का क्रांतिक मान **(1%** सार्थकता का स्तर**)**

| **df2/ df1** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 4052.181 | 4999.500 | 5403.352 | 5624.583 | 5763.650 | 5858.986 | 5928.356 | 5981.070 | 6022.473 | 6055.847 |
| **2** | 98.503 | 99.000 | 99.166 | 99.249 | 99.299 | 99.333 | 99.356 | 99.374 | 99.388 | 99.399 |
| **3** | 34.116 | 30.817 | 29.457 | 28.710 | 28.237 | 27.911 | 27.672 | 27.489 | 27.345 | 27.229 |
| **4** | 21.198 | 18.000 | 16.694 | 15.977 | 15.522 | 15.207 | 14.976 | 14.799 | 14.659 | 14.546 |
| **5** | 16.258 | 13.274 | 12.060 | 11.392 | 10.967 | 10.672 | 10.456 | 10.289 | 10.158 | 10.051 |
| **6** | 13.745 | 10.925 | 9.780 | 9.148 | 8.746 | 8.466 | 8.260 | 8.102 | 7.976 | 7.874 |
| **7** | 12.246 | 9.547 | 8.451 | 7.847 | 7.460 | 7.191 | 6.993 | 6.840 | 6.719 | 6.620 |
| **8** | 11.259 | 8.649 | 7.591 | 7.006 | 6.632 | 6.371 | 6.178 | 6.029 | 5.911 | 5.814 |
| **9** | 10.561 | 8.022 | 6.992 | 6.422 | 6.057 | 5.802 | 5.613 | 5.467 | 5.351 | 5.257 |
| **10** | 10.044 | 7.559 | 6.552 | 5.994 | 5.636 | 5.386 | 5.200 | 5.057 | 4.942 | 4.849 |
| **11** | 9.646 | 7.206 | 6.217 | 5.668 | 5.316 | 5.069 | 4.886 | 4.744 | 4.632 | 4.539 |
| **12** | 9.330 | 6.927 | 5.953 | 5.412 | 5.064 | 4.821 | 4.640 | 4.499 | 4.388 | 4.296 |
| **13** | 9.074 | 6.701 | 5.739 | 5.205 | 4.862 | 4.620 | 4.441 | 4.302 | 4.191 | 4.100 |
| **14** | 8.862 | 6.515 | 5.564 | 5.035 | 4.695 | 4.456 | 4.278 | 4.140 | 4.030 | 3.939 |
| **15** | 8.683 | 6.359 | 5.417 | 4.893 | 4.556 | 4.318 | 4.142 | 4.004 | 3.895 | 3.805 |
| **16** | 8.531 | 6.226 | 5.292 | 4.773 | 4.437 | 4.202 | 4.026 | 3.890 | 3.780 | 3.691 |
| **17** | 8.400 | 6.112 | 5.185 | 4.669 | 4.336 | 4.102 | 3.927 | 3.791 | 3.682 | 3.593 |
| **18** | 8.285 | 6.013 | 5.092 | 4.579 | 4.248 | 4.015 | 3.841 | 3.705 | 3.597 | 3.508 |
| **19** | 8.185 | 5.926 | 5.010 | 4.500 | 4.171 | 3.939 | 3.765 | 3.631 | 3.523 | 3.434 |
| **20** | 8.096 | 5.849 | 4.938 | 4.431 | 4.103 | 3.871 | 3.699 | 3.564 | 3.457 | 3.368 |
| **21** | 8.017 | 5.780 | 4.874 | 4.369 | 4.042 | 3.812 | 3.640 | 3.506 | 3.398 | 3.310 |
| **22** | 7.945 | 5.719 | 4.817 | 4.313 | 3.988 | 3.758 | 3.587 | 3.453 | 3.346 | 3.258 |
| **23** | 7.881 | 5.664 | 4.765 | 4.264 | 3.939 | 3.710 | 3.539 | 3.406 | 3.299 | 3.211 |
| **24** | 7.823 | 5.614 | 4.718 | 4.218 | 3.895 | 3.667 | 3.496 | 3.363 | 3.256 | 3.168 |
| **25** | 7.770 | 5.568 | 4.675 | 4.177 | 3.855 | 3.627 | 3.457 | 3.324 | 3.217 | 3.129 |
| **26** | 7.721 | 5.526 | 4.637 | 4.140 | 3.818 | 3.591 | 3.421 | 3.288 | 3.182 | 3.094 |
| **27** | 7.677 | 5.488 | 4.601 | 4.106 | 3.785 | 3.558 | 3.388 | 3.256 | 3.149 | 3.062 |
| **28** | 7.636 | 5.453 | 4.568 | 4.074 | 3.754 | 3.528 | 3.358 | 3.226 | 3.120 | 3.032 |
| **29** | 7.598 | 5.420 | 4.538 | 4.045 | 3.725 | 3.499 | 3.330 | 3.198 | 3.092 | 3.005 |
| **30** | 7.562 | 5.390 | 4.510 | 4.018 | 3.699 | 3.473 | 3.304 | 3.173 | 3.067 | 2.979 |
| **40** | 7.314 | 5.179 | 4.313 | 3.828 | 3.514 | 3.291 | 3.124 | 2.993 | 2.888 | 2.801 |
| **60** | 7.077 | 4.977 | 4.126 | 3.649 | 3.339 | 3.119 | 2.953 | 2.823 | 2.718 | 2.632 |
| **120** | 6.851 | 4.787 | 3.949 | 3.480 | 3.174 | 2.956 | 2.792 | 2.663 | 2.559 | 2.472 |
| **inf** | 6.635 | 4.605 | 3.782 | 3.319 | 3.017 | 2.802 | 2.639 | 2.511 | 2.407 | 2.321 |

सारणी **A4:** $F$ – बटंन का क्रांतिक मान **(1%** सार्थकता का स्तर**)**(क्रमशः)

| **df2/ df1** | **12** | **15** | **20** | **24** | **30** | **40** | **60** | **120** | **INF** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 6106.321 | 6157.285 | 6208.730 | 6234.631 | 6260.649 | 6286.782 | 6313.030 | 6339.391 | 6365.864 |
| **2** | 99.416 | 99.433 | 99.449 | 99.458 | 99.466 | 99.474 | 99.482 | 99.491 | 99.499 |
| **3** | 27.052 | 26.872 | 26.690 | 26.598 | 26.505 | 26.411 | 26.316 | 26.221 | 26.125 |
| **4** | 14.374 | 14.198 | 14.020 | 13.929 | 13.838 | 13.745 | 13.652 | 13.558 | 13.463 |
| **5** | 9.888 | 9.722 | 9.553 | 9.466 | 9.379 | 9.291 | 9.202 | 9.112 | 9.020 |
| **6** | 7.718 | 7.559 | 7.396 | 7.313 | 7.229 | 7.143 | 7.057 | 6.969 | 6.880 |
| **7** | 6.469 | 6.314 | 6.155 | 6.074 | 5.992 | 5.908 | 5.824 | 5.737 | 5.650 |
| **8** | 5.667 | 5.515 | 5.359 | 5.279 | 5.198 | 5.116 | 5.032 | 4.946 | 4.859 |
| **9** | 5.111 | 4.962 | 4.808 | 4.729 | 4.649 | 4.567 | 4.483 | 4.398 | 4.311 |
| **10** | 4.706 | 4.558 | 4.405 | 4.327 | 4.247 | 4.165 | 4.082 | 3.996 | 3.909 |
| **11** | 4.397 | 4.251 | 4.099 | 4.021 | 3.941 | 3.860 | 3.776 | 3.690 | 3.602 |
| **12** | 4.155 | 4.010 | 3.858 | 3.780 | 3.701 | 3.619 | 3.535 | 3.449 | 3.361 |
| **13** | 3.960 | 3.815 | 3.665 | 3.587 | 3.507 | 3.425 | 3.341 | 3.255 | 3.165 |
| **14** | 3.800 | 3.656 | 3.505 | 3.427 | 3.348 | 3.266 | 3.181 | 3.094 | 3.004 |
| **15** | 3.666 | 3.522 | 3.372 | 3.294 | 3.214 | 3.132 | 3.047 | 2.959 | 2.868 |
| **16** | 3.553 | 3.409 | 3.259 | 3.181 | 3.101 | 3.018 | 2.933 | 2.845 | 2.753 |
| **17** | 3.455 | 3.312 | 3.162 | 3.084 | 3.003 | 2.920 | 2.835 | 2.746 | 2.653 |
| **18** | 3.371 | 3.227 | 3.077 | 2.999 | 2.919 | 2.835 | 2.749 | 2.660 | 2.566 |
| **19** | 3.297 | 3.153 | 3.003 | 2.925 | 2.844 | 2.761 | 2.674 | 2.584 | 2.489 |
| **20** | 3.231 | 3.088 | 2.938 | 2.859 | 2.778 | 2.695 | 2.608 | 2.517 | 2.421 |
| **21** | 3.173 | 3.030 | 2.880 | 2.801 | 2.720 | 2.636 | 2.548 | 2.457 | 2.360 |
| **22** | 3.121 | 2.978 | 2.827 | 2.749 | 2.667 | 2.583 | 2.495 | 2.403 | 2.305 |
| **23** | 3.074 | 2.931 | 2.781 | 2.702 | 2.620 | 2.535 | 2.447 | 2.354 | 2.256 |
| **24** | 3.032 | 2.889 | 2.738 | 2.659 | 2.577 | 2.492 | 2.403 | 2.310 | 2.211 |
| **25** | 2.993 | 2.850 | 2.699 | 2.620 | 2.538 | 2.453 | 2.364 | 2.270 | 2.169 |
| **26** | 2.958 | 2.815 | 2.664 | 2.585 | 2.503 | 2.417 | 2.327 | 2.233 | 2.131 |
| **27** | 2.926 | 2.783 | 2.632 | 2.552 | 2.470 | 2.384 | 2.294 | 2.198 | 2.097 |
| **28** | 2.896 | 2.753 | 2.602 | 2.522 | 2.440 | 2.354 | 2.263 | 2.167 | 2.064 |
| **29** | 2.868 | 2.726 | 2.574 | 2.495 | 2.412 | 2.325 | 2.234 | 2.138 | 2.034 |
| **30** | 2.843 | 2.700 | 2.549 | 2.469 | 2.386 | 2.299 | 2.208 | 2.111 | 2.006 |
| **40** | 2.665 | 2.522 | 2.369 | 2.288 | 2.203 | 2.114 | 2.019 | 1.917 | 1.805 |
| **60** | 2.496 | 2.352 | 2.198 | 2.115 | 2.028 | 1.936 | 1.836 | 1.726 | 1.601 |
| **120** | 2.336 | 2.192 | 2.035 | 1.950 | 1.860 | 1.763 | 1.656 | 1.533 | 1.381 |
| **inf** | 2.185 | 2.039 | 1.878 | 1.791 | 1.696 | 1.592 | 1.473 | 1.325 | 1.000 |

## शब्दावली

| | | |
|---|---|---|
| अपवर्जी वर्ग अंतराल | : | ऐसा वर्ग अंतराल जिसमें वे सभी प्रेक्षण सम्मिलत होते हैं जिनका मान निम्न सीमा के बराबर या अधिक तथा उच्च सीमा से कम होता है। |
| असंतत बारंबारता बंटन | : | जब चर केवल असंतत मान जैसे 1, 2, 3 ... लेता हो तो बंटन को असंतत बंटन कहते हैं। असंतत चर के उदाहरण, परिवार में बच्चों की संख्या, एक विश्वविद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या आदि होते हैं। |
| आयत चित्र | : | यह साथ–साथ खड़ी हुई आयतों का समूह होता है जिसमें आयतों का क्षेत्रफल बारंबारताओं का आनुपातिक होता है। |
| आयतन आरेख | : | इनको त्रिविमीय आरेख भी कहते हैं। इनको तैयार करने में लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई का उपयोग होता है। यह बॉक्स, घन, खण्ड, गोला तथा बेलन के आकार का होता है। |
| आधार वर्ष | : | यह वर्ष, विचाराधीन चर की दृष्टि से, सामान्य होता है। आधार वर्ष का सूचकांक हमेशा 100 लिया जाता है। वर्तमान वर्ष के सूचकांक को आधार वर्ष के सूचकांक के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। |
| आकलन (**Estimation**) | : | प्रतिदर्शजों के आधार पर प्राचल मानों का पूर्वानुमान लगाने की विधि। |
| आकलन की समस्या (**Problem of Estimation**) | : | समष्टि की किसी ऐसी विशेषता को जानना जिसके बारे में पूरी तरह से कुछ नहीं जानते और समष्टि से लिए यादृच्छिक प्रतिदर्श के आधार पर हम कोई विशेष अनुमान लगाना चाहते हैं। सांख्यिकीय अनुमिति की यह समस्या आकलन की समस्या कहलाती है। |
| आसंग सारणी (**Contingency Table**) | : | द्विचर आंकड़ों को प्रस्तुत करने की द्विघा सारणी। इसे आसंग सारणी भी कहते हैं क्योंकि हम पता लगाने का प्रयास करते हैं कि क्या एक चर, दूसरे चर पर आश्रित है या नहीं। |
| असतत् प्रायिकता बंटन (**Discrete Probability Distribution**) | : | यह असतत् यादृच्छिक चर के लिए प्रायिकता बंटन है। |
| असतत् यादृच्छिक चर (**Discrete Random Variable**) | : | ऐसा यादृच्छिक चर जिसके मान अनंत हैं या जिसका अनुक्रम अनंत संख्या वाला है (जैसे, 1,2,3, .....)। |
| अन्वेषक | : | ये प्रत्यार्थी से सूचना प्राप्त करने वाला व्यक्ति होता है। |
| अनियमित विचरण | : | काल श्रेणी का यादृच्छिक संचलन जिसकी अन्य घटकों द्वारा व्याख्या नहीं होती। इस दृष्टि से यह अन्य घटकों का अवशिष्ट होता है। |

| | | |
|---|---|---|
| उपशीर्षक | : | यह सारणी के स्तंभ में प्रस्तुत समंकों का लेबल होता है। इसको कक्ष शीर्ष भी कहते हैं। इसमें एक से अधिक स्तंभ शीर्ष हो सकते हैं। |
| ऐच्छिक प्रतिचयन **(Judgement Sampling)** | : | प्रतिचयन की ऐसी क्रियाविधि जिसमें प्रतिदर्श इकाइयों की अपेक्षित उपयुक्त विशेषताओं के बारे में शोधकर्ता के व्यक्तिगत निर्णय के आधार पर प्रतिदर्श का चयन किया जाता हैं। |
| एफ– बंटन **(F-Distribution)** | : | यह एक असममित बंटन है जो दायीं ओर विषम है। जब स्वतंत्रता की कोटि काफी अधिक है तो यह भी प्रसामान्य बंटन का अनुगामी बन जाता है। |
| एफ–चर **(F-Variable)** | : | ऐसा यादृच्छिक चर जो एफ बंटन का अनुगामी है। |
| क्रम विन्यास | : | यह समंकों का आरोही या अवरोही विन्यास होता है। इसको सरल क्रम विन्यास भी कहते हैं। |
| कालिक चित्र | : | काल श्रेणी के रेखा आलेख को कालिक चित्र कहते हैं जैसे 1950 से स्टील का उत्पादन। |
| कोटा/ नियतमात्रात्मक प्रतिचयन **(Quota Sampling)** | : | प्रतिचयन की इस क्रियाविधि में, कुछ मानकों जैसे; आयु, लिंग, भौगोलिक क्षेत्र, शिक्षा, आय, धर्म आदि के आधार पर प्रतिदर्शों का चयन किया जाता है। |
| क्रमबद्ध प्रतिचयन **(Systematic Sampling)** | : | प्रतिचयन की ऐसी क्रियाविधि जिसमें समष्टि से इकाइयों का चयन एक समान अंतराल पर होता है और जिसे समय, नियम या स्थान में मापा जा सकता है। |
| काई–स्क्वैयर बंटन **(Chi-square Distribution)** | : | यह एक असममित बंटन है जहाँ यादृच्छिक चर के लिए विचरण का परिसर शून्य से अनंत है। जब स्वतंत्रता की कोटि काफी अधिक हो तो यह उपगामी प्रसामान्य बंटन है। |
| काई–स्क्वैयर चर **(Chi-square Variable)** | : | ऐसा यादृच्छिक चर जो काई–स्क्वैयर बंटन का अनुगामी है। |
| कोटि सहसंबंध गुणांक **(Rank Correlation Coefficient)** | : | बहुत सी परिस्थितियों में चरों का माप प्राप्त करना, सुविधाजनक अथवा कम खर्चीला नहीं होता। कई बार तो यह संभव नहीं होता। ऐसी स्थिति में उनको क्रम के अनुसार कोटिबद्ध किया जाता है। इन परिस्थितियों में कोटि सहसंबंध गुणांक का प्रयोग किया जा सकता है। जब चरों में अरैखिक संबंध हो तो भी कोटि सहसंबंध गुणांक उपयुक्त होता है। |
| गाउसीय वितरण **(Gaussian Distribution)** | : | प्रसामान्य बंटन को इस नाम से भी जाना जाता है। |
| गुच्छ प्रतिचयन **(Cluster Sampling)** | : | प्रतिचयन की ऐसी क्रियाविधि जहां समग्र समष्टि को समूहों या गुच्छों में बांट दिया जाता है और इसके बाद यादृच्छिक तरीके से गुच्छों का चयन किया जाता है। चुनिंदा गुच्छों के सभी प्रेक्षण, प्रतिचयन में शामिल किए जाते हैं। |

| | | |
|---|---|---|
| **गुणोत्तर माध्य** | : | यह चर के $n$ मानों के गुणनफल का $n$ वाँ मूल होता है। |
| **गणितीय प्रत्याशा (Mathematical Expectation)** | : | यादृच्छिक चर की गणितीय प्रत्याशा या प्रत्याशित मान, यादृच्छिक चर के मूल्यों और संगत प्रायिकताओं के गुणनफलों का योग होता है। |
| **चित्रलेख** | : | इसमें समंकों को चित्रों के उपयोग द्वारा प्रस्तुत किया जाता है। |
| **जीवाशा (Life expectancy)** | : | व्यक्ति के ऐसे अतिरिक्त वर्षों की औसतन संख्या जिसे उस व्यक्ति ने आगे जीना है, बशर्ते मौजूदा मृत्यु दर की प्रवत्तियाँ उस व्यक्ति के शेष जीवन के लिए निरंतर कार्य रहें। आमतौर पर जन्म के समय जीवाशा का प्रयोग किया जाता है। |
| **चक्रीय विचरण** | : | कालश्रेणी का दोलनी संचलन जहाँ पर दोलन की अवधि, जिसको चक्र कहते हैं, एक वर्ष से अधिक होती है। |
| **चल–माध्य विधि** | : | चल–माध्य, एक उपयुक्त अवधि लेकर, मान लीजिए 3 वर्ष, तीन लगातार वर्षों के मानों का औसत परिकलित करके एक श्रेणी के रूप में प्राप्त किए जाते हैं। प्राप्त माध्य, अवधि के मध्य में लिखा जाता है। |
| **तोरण (ogive)** | : | यह संचयी बारंबारता बंटन का आलेख होता है। 'से कम' संचयी बारंबारताओं में 'से अधिक' तोरण प्राप्त होता है। |
| **तुषारपिंडीय प्रतिचयन (Snowball Sampling)** | : | तुषारपिंडीय प्रतिचयन अतिरिक्त प्रतिचयन की इकाइयों को सृजित करने के लिए प्रारंभिक प्रतिचयन इकाइयों से प्राप्त परामर्श पर निर्भर करती है। |
| **दण्ड आरेख** | : | चर के विभिन्न मानों के अनुरूप खींची गई मोटी रेखाओं के समूह को दण्ड आरेख कहते हैं। यह आयत चित्र से भिन्न होता है जिसमें आयत की चौड़ाई का महत्त्व होता है। |
| **द्वितीयक समंक** | : | किसी अन्य संस्था द्वारा संकलित समंकों से प्राप्त समंक होते हैं। |
| **न्यूनतम वर्ग विधि** | : | जब कालश्रेणी में एक बहुपद का समंजन किया जाता है तो न्यूनतम वर्ग विधि के लिए यह आवश्यक है कि फलन के प्राचलों का चयन इस प्रकार किया जाए जिससे वास्तविक प्रेक्षण तथा प्रत्याशित मानों के विचलनों के वर्ग का योग न्यूनतम हो जाय। |
| **निर्धारण गुणांक (Coefficient of Determination)** | : | इसका मान $r^2$ अर्थात सहसंबंध गुणांक के वर्ग, के बराबर होता है, आश्रित चर में परिवर्तन की व्याख्या स्वतंत्र चर $X$ के द्वारा की जाती है। |
| **नामीक चर (Nominal Variable)** | : | ऐसे चर के गुणात्मक मान होते हैं और इनमें कोई क्रमबद्ध संबंध नहीं होता। जैसे लिंग में दो मान अर्थात स्त्री और पुरुष शामिल होते हैं लेकिन इसमें स्त्री/पुरुष की कोई क्रमबद्ध स्थिति का समावेश नहीं होता। नामीक चर को गुण (attribute) भी कहते हैं। |
| **परिसर (range)** | : | यह प्रेक्षणों के अधिकतम तथा न्यूनतम प्रेक्षणों का अंतर होता है। |
| **प्रसरण (variance)** | : | यह प्रेक्षणों के माध्य से विचलनों के वर्गों का समांतर माध्य होता है। |

| | | |
|---|---|---|
| **प्रथुशीर्षत्व गुणांक** | : | यह एक बारंबारता वक्र के शिखर के नुकीलेपन का माप होता है। |
| **प्रायिकता** | : | यह एक घटना के सहचारी निश्चितता (तथा अप्रत्यक्ष रूप से अनिश्चिता) की कोटि का तुलनात्मक परिमाप होता है। एक घटना $A$ के लिए $0 \le P(A) \le 1$ प्रायिकता होती है। |
| **पूरक घटना** | : | यदि $A$ एक घटना है जहां $A$ के घटित न होने को $\overline{A}$ से सूचित करते हैं, तो $A$ की पूरक घटना कहलाती हैं। एक घटना और उसकी पूरक घटना का प्रायिकताओं का योग सदैव इकाई के बराबर होता है। |
| **पूर्ववर्ती (a priori) प्रायिकता** | : | चिरप्रतिष्ठित परिभाषा, सांख्यिकीय परिभाषा या व्यक्तिपरक पर आधारित विभिन्न घटनाओं की प्रायिकताओं को पूर्ववर्ती प्रायिकताएँ कहा जाता है। |
| **परवर्त्ती (a posteriori) प्रायिकता** | : | विभिन्न घटनाओं की संशोधित प्रायिकताओं को परवर्ती प्रायिकताएँ कहते हैं। यह संशोधन बेज–प्रमेय के प्रयोग से किया जाता है। |
| **प्राचल (Parameter)** | : | समष्टि की कुछ विशेषताओं का माप। |
| **प्रतिदर्श (Sample)** | : | समष्टि का उप–समुच्चय। इसे प्रायिकता के नियमों को लागू करके वैज्ञानिक तरीके से समष्टि से प्राप्त किया जा सकता है जिससे व्यक्तिगत पक्षपात दूर किया जा सके। किसी समष्टि से अनेक प्रतिदर्श लिए जा सकते हैं और प्रतिदर्श ज्ञात करने की विधियाँ अनेक होती है। |
| **प्रतिदर्श त्रुटि (Sampling error)** | : | प्रतिचयन विधि में प्राप्त समष्टि के कुछ लक्षणों को इससे प्राप्त प्रतिदर्श के सन्निकट करने का प्रयास करते हैं। अब चूँकि प्रतिदर्श में समष्टि के सभी सदस्यों को शामिल नहीं किया जाता है, इसलिए निकटतम ही सन्निकट होता है। यह समष्टि के आपेक्षित लक्षण के समरूप नहीं होती और इसी वजह से त्रुटि हो जाती है। इस त्रुटि को प्रतिदर्शी त्रुटि कहते हैं। |
| **प्रतिदर्शी बंटन (Sampling Distribution)** | : | प्रतिदर्शज का प्रायिकता बंटन। |
| **प्रतिचयन उच्चावचन (Sampling Fluctuation)** | : | विभिन्न प्रतिदर्शों से परिकलित प्रतिदर्शज के मानों में पाया जाने वाला अन्तर। |
| **प्रतिदर्शज (Statistic)** | : | प्रतिदर्श में शामिल की जाने वाली इकाइयों के मानों का फलन। इसका मूल प्रयोजन कुछ प्राचलों का आकलन करना है। |
| **प्रत्याशित बारंबारता (Expected Frequency)** | : | इस अभिधारणा के अंतर्गत प्रत्याशित कोष्ठिका बारंबारता कि दोनों चर एक-दूसरे से भिन्न हैं। |

| | | |
|---|---|---|
| प्रतिचयन त्रुटि **(Sampling Error)** | : | प्रतिचयन विधि में हम प्राप्त समष्टि से प्रतिदर्श प्राप्त करके ऐसी समष्टि के कुछ लक्षणों को सन्निकट करने का प्रयास करते हैं। चूँकि प्रतिदर्श मं समष्टि के सभी सदस्य शामिल नहीं किए जाते, इसलिए सन्निकट सदस्यों को ही शामिल किया जाता है। अपेक्षित जानकारी के लक्षण से यद्यपि यह समरूप नहीं होता और इसी वजह से कुछ त्रुटि हो जाती है। ऐसी त्रुटि को प्रतिचयन त्रुटि कहते हैं। |
| प्रायिकता घनत्व फलन **(Probability Denisty Function)** | : | यह सतत् यादृच्छिक चर का फलन है, लेकिन प्रायिकता द्रव्यमान फलन की भांति, यह यादृच्छिक चर के विशिष्ट मान के लिए सीधे तौर पर प्रायिकता नहीं दे सकता। यहाँ हम केवल अंतराल के भीतर यादृच्छिक चर की प्रायिकता प्राप्त कर सकते हैं। |
| प्रायिकता बंटन **(Probability Distribution)** | : | यह यादृच्छिक चर और उसकी प्रायिकताओं के संभावित मानों का प्रकथन है। |
| प्रायिकता द्रव्यमान फलन **(Probability Mass Function)** | : | यह ऐसा फलन है जो असतत् यादृच्छिक चर के विशिष्ट मान की प्रायिकता देता है। |
| प्रमेयात्मक / अनुमित बंटन **(Theoretical Distribution)** | : | यह प्रायिकता बंटन है जो यादृच्छिक प्रयोग की विशिष्ट स्थितियों द्वारा जनित होता है। अनुमित प्रायिकता बंटन के कुछ उदाहरण हैं : द्विपद बंटन, पाइसों बंटन, प्रसामान्य बंटन आदि। |
| प्रसरण **(Variance)** | : | यदि यादृच्छिक चर $X$ की गणितीय प्रत्याशा $E(X)$ है तो $X$ के प्रसरण को $E[X-E(X)]^2$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। |
| प्रवास **(Migration)** | : | नयी या अर्ध–स्थायी रिहायशों को स्थापित करने के उद्देश्य से व्यक्तियों का किन्हीं निश्चित सीमाओं के आर–पार होना। |
| प्रसामान्य बंटन **(Normal Distribution)** | : | सभी सैद्धांतिक प्रायिकता बंटनों में से सर्वाधिक प्रचलित बंटन। यह घंटाकार सममित प्रायिकता वक्र के रूप में नज़र आती है। |
| प्रसामान्य चर **(Normal Variable)** | : | ऐसा यादृच्छिक चर जो प्रसामान्य बंटन का अनुगामी है। |
| प्रायिकता बंटन **(Probability Distribution)** | : | यादृच्छिक चर के संभावित मानों और उनकी प्रायिकता से संबंधित प्रकथन। |
| प्रकीर्ण आरेख **(Scatter Diagrams)** | : | ऐसा आरेख है जो दो चरों x और y के बीच संयुक्त परिवर्तन को दर्शाता है। प्रत्येक व्यष्टि को एक बिंदु द्वारा निरूपित किया जाता है जिसके साधारण आयताकार अक्षों पर निर्देशांक, चरों के मान होते हैं। इस प्रकार $n$ प्रेक्षणों को समुच्चय, आरेख पर $n$ बिंदु प्रदान करता है। इन बिंदुओं का प्रकीर्ण x तथा y के बीच संबंध को दर्शाता है। |

| | | |
|---|---|---|
| प्राथमिक समंक | : | एक विचाराधीन अन्वेषण के अन्तर्गत इकाइयों के प्रेक्षण से प्राप्त समंक होते हैं। |
| प्रश्नावली या प्रश्न सूची | : | वर्तमान अन्वेषण से सम्बन्धित प्रश्नों की सूची होती है। |
| प्रत्यार्थी **(respondent)** | : | ये सूचना देने वाला व्यक्ति होता है। |
| परिकल्पना **(hypothesis)** | : | यह समष्टि के बारे में एक कथन होता है। |
| परिकल्पना जाँच | : | संकलित समंकों के आधार पर किसी परिकल्पना की वैधता की जाँच करना। |
| बहुचरणी प्रतिचयन (**Multi-Stage Sampling**) | : | इस विधि में प्रतिदर्श का चयन विभिन्न चरणों के माध्यम से किया जाता है। |
| बारंबारता क्रम विन्यास | : | इस क्रम विन्यास को चर के विभिन्न संभावित मानों के समक्ष उनकी क्रमशः बारंबारताओं को लिखकर तैयार किया जाता है। |
| ब्हुलक **(mode)** | : | यह प्रेक्षणों के समुच्चय में वह मान होता है, जिसकी बारंबारता अधिकतम |
| बारंबारता बहुभुज | : | यह बारंबारता बंटन को चित्रित करने के लिए एक बहुभुज चित्र होती है जो आयत चित्र या बंटन से प्रत्यक्ष बनाई जा सकती है। |
| बारंबारता बंटन | : | समंकों का बारंबारता बंटन के रूप में विन्यास, समंकों के ढेर में निहित प्रतिरूप की व्याख्या करता है। |
| बारंबारता वक्र | : | यह एक बारंबारता बंटन का निष्कोणीय आलेख होता है जो कि बारंबारता बहुभुज से, स्वतंत्र हाथ अनुरेखन द्वारा, इस प्रकार प्राप्त किया जाता है जिससे दोनों के अन्तर्गत क्षेत्रफल लगभग बराबर रहे। |
| बीमा विज्ञान (**Actuarial Science**) | : | बीमा विज्ञान, वित्त और बीमा के संदर्भ में गणितीय और सांख्यिकीय विधियों के अनुप्रयोग से संबंधित है। यह विशेषरूप से दीर्घावधि में बीमा आदि के क्षेत्र में जोखिमों के निर्धारण से संबंधित है। बीमा विज्ञान में हम बीमा संबंधी जोखिमों और प्रीमियमों को परिकलित करते है। |
| माध्यिका **(median)** | : | एक समुच्चय के प्रेक्षणों को परिमाण कोटि (order of magnitude) के अनुसार व्यवस्थित करने पर इनके मध्यवर्ती मान को माध्यिका कहते हैं। |
| माध्य विचलन | : | यह प्रेक्षणों के माध्य या अन्य निर्धारित माप (जैसे माध्यिका, बहुलक) से निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य होता है। |
| मानक विचलन | : | यह प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल होता है। |
| मात्रा सूचकांक | : | इस सूचकांक में विचाराधीन चर वस्तुओं की मात्राएँ होती है। |
| मानक त्रुटि (**Standard Error**) | : | प्रतिदर्श में शामिल की जाने वाली इकाइयों के मानों का फलन। इसका मूल प्रयोजन कुछ प्राचलों का आकल करना है। |

| | | |
|---|---|---|
| मध्य वर्ष जनसंख्या **(Mid-year population)** | : | यह एक वर्ष के अंत के आकलनों का औसतन माना जाता है। जैसे 2020 की मध्य वर्ष जनसंख्या 31 दिसंबर 2019 और 31 दिसम्बर 2020 की जनसंख्या की औसतन संख्या होगी। |
| मानक प्रसामान्य विचर **(Standard Normal Variate)** | : | प्रसामान्य चर जिसका माध्य 0 और मानक विचलन 1 के बराबर है। |
| मौसमी विचरण | : | ऐसा आवर्ती संचलन जिसकी अवधि एक वर्ष से अधिक नहीं होती। |
| मध्य बिन्दु | : | इसको मध्यमान भी कहते हैं, तथा यह वर्ग की दो सीमाओं का माध्य होता है। इसका स्थान वर्ग के मध्य में होता है। |
| यादृच्छिक प्रतिदर्श **(Random Sampling)** | : | ऐसी प्रक्रिया जिसमें समष्टि के प्रत्येक सदस्य के प्रतिदर्श के लिए चुने जाने को निश्चित संभावना और प्रायिकता होती हैं। इसे प्रायिकता प्रतिदर्श भी कहा जाता है। |
| यादृच्छिक प्रतिचयन **(Random Sampling)** | : | यह प्रतिचयन की तकनीक है जहां हम समष्टि से प्रतिदर्श का चयन करते हैं। यहां, समष्टि की प्रत्येक इकाई की प्रतिदर्श में शामिल होने की संभावना होती है। |
| रेख आलेख | : | यह आलेख X तथा Y के निर्देशांकों से प्राप्त बिन्दुओं को सरल रेखा से मिलाने पर प्राप्त होता है। |
| *r* वीं कोटि की परिघात | : | यह प्रेक्षणों के विचलों की *r*वीं घात का सामान्तर माध्य होता है। |
| विवृत–छोर वर्ग | : | ऐसा वर्ग जिसकी एक सीमा निश्चित न हो। |
| वर्ग तथा वर्ग सीमाएँ | : | यह एक निश्चित आकारों का समूह होता है जिसके दो सिरे, जो वर्ग सीमाएँ या वर्ग परिसीमाएँ कहलाती हैं, होते हैं। |
| वर्ग–परिसर | : | इसको वर्ग अंतराल भी कहते हैं, तथा यह वर्ग की दो सीमाओं, उच्च तथा निम्न सीमा, का अंतर होता है। इसे वर्ग की चौड़ाई भी कहते हैं। |
| विषमता | : | सम्मितता से विचलन को विषमता कहते हैं। |
| विचरण गुणांक | : | यह प्रकीर्णन का सापेक्षिक माप है जोकि मापन इकाई से स्वतंत्र होता है। इसके विपरीत मानक विचलन, प्रकीर्णन का निरपेक्ष माप है। |
| वृत्तारेख | : | यह एक वृत्त होता है जिसको उपभागों में बाँटकर किसी संख्या के अनुपातों को दर्शाया जाता है। इसे वृत्त चित्र भी कहते हैं। |
| विश्वस्यता स्तर **(Confidence level)** | : | प्रतिदर्शों की प्रतिशत (प्रायिकता) जहाँ समष्टि माध्य, प्रतिदर्श माध्य के इर्दगिर्द विश्वस्यता अंतराल में निहित रहता है। वे यदि $a$ सार्थकता का स्तर (level of significance) है तो विश्वस्यता स्तर $(1-\alpha)$ है। |
| श्रृंखला सूचकांक | : | वर्तमान वर्ष के सूचकांक को इससे पहले वर्ष के सूचकांक के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। |

| | | |
|---|---|---|
| शिशु मृत्यु दर **(Infant Mortality Rate)** | : | निश्चित समयावधि में प्रति 1000 जीवित जन्मों में से एक वर्ष की आयु पूरी करने से पहले मरने वाले शिशुओं की संख्या। |
| स्तरित प्रतिचयन **(Stratified Sampling)** | : | इस प्रतिचयन की क्रियाविधि में समष्टि को समूहों (स्तरों) में बांटा जाता है और इसके बाद यादृच्छिक प्रतिचयन विधि के प्रयोग से प्रत्येक स्तर से प्रतिदर्शों का चयन किया जाता है। |
| स्वाभाविक वृद्धि **(Natural Increase)** | : | निश्चित समयावधि में जनसंख्या में मौतों की तुलना में अतिरिक्त जन्मों का होना। |
| स्वाभाविक वृद्धि दर **(Rate if Natural increase)** | : | होने वाली मौतों की तुलना में अतिरिक्त जन्मों के कारण, दिए गए वर्ष में जिस दर पर जनसंख्या बढ़ती है और जिसे आधार जनसंख्या के प्रति 1000 व्यक्तियों के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। इसमें आप्रवास की दर शामिल नहीं है। |
| स्वतंत्रता की कोटि **(Degree of Freedom)** | : | इससे आशय विभिन्न प्रकार की सूचनाओं से है जिनकी किसी प्रेक्षण समुच्चय के कुछ अभिलक्षणों के परिकलन में आवश्यकता पड़ती है। |
| स्वतंत्रता की कोटियाँ **(Degrees of Freedom)** | : | विभिन्न प्रकार की जानकारी, जो प्रेक्षणों के प्राप्त समुच्चय के कुछ अभिलक्षणों को परिकलित करने में आवश्यक होती है। |
| स्टूडैंट–टी चर **(Student's t-Variable)** | : | ऐसा यादृच्छिक चर जो स्टूडैंट–टी बंटन का अनुगामी है। |
| सरल तथा अंतर्विभक्त दण्ड आरेख | : | सरल दण्ड आरेख द्वारा केवल एक चर को प्रस्तुत किया जा सकता है जबकि अंतर्विभक्त दण्ड आरेख का उपयोग एक घटना के विभिन्न घटकों को प्रस्तुत करने के लिए किया जाता है। |
| समांतर माध्य | : | एक समुच्चय के प्रेक्षित मानों के योग को प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करने पर समांतर माध्य या औसत प्राप्त होता है। |
| सारणीयन **(tabulation)** | : | यह समंकों का पंक्तियों तथा स्तंभों में सुव्यवस्थित विन्यास होता है। |
| सारणी का मुख्य अंग | : | निःसंदेह यह सारणी का महत्त्वपूर्ण अंग होता है तथा इसमें संख्यात्मक सूचना दी होती है जिसका संकेत सारणी के शीर्षक से प्राप्त होता है। यह सारणी का क्षेत्रफल भी कहलाता है। |
| संचयी बारंबारता बंटन | : | एक असंतत या संतत बंटन की सरल बारंबारताओं के आनुक्रमिक योग द्वारा प्राप्त बंटन संचयी बारंबारता बंटन होता है। यह योग उपर से ('से कम' बारंबारता बंटन के लिए) या नीचे से ('से अधिक' बारंबारता बंटन के लिए) किया जा सकता है। |
| समंकों का संक्षेपण | : | यह समंकों के असंगठित तथा जटिल ढेर का वर्गीकरण तथा विन्यास करने की प्रक्रिया है जिससे उनको तुलना तथा विश्लेषण के उपयुक्त बनाया जा सके। |

| | | |
|---|---|---|
| सतत बारंबारता बंटन | : | एक संतत बारंबारता बंटन में चर का दो संख्याओं के बीच में कोई भी मान हो सकता है। जैसे ऊँचाई, वजन, आय, तापमान आदि। |
| समाजवेशी वर्ग अंतराल | : | ऐसा वर्ग अंतराल जिसमें वे सभी प्रेक्षण सम्मिलत होते हैं। |
| सापेक्षिक बारंबारता बंटन | : | एक बारंबारता बंटन जिसमें प्रत्येक मान की बारंबारता कुल प्रेक्षणों की संख्या का प्रतिशत होती है। |
| सतत् प्रायिकता बंटन **(Continuous Probability Distribution)** | : | यह सतत् यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन है। |
| सूचकांक | : | यह केवल एक संख्या है जोकि आधार वर्ष के मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त की जाती है। सूचकांक द्वारा एक समयावधि में, वस्तुओं के एक वर्ग के विचाराधीन चर (कीमत, बिक्री मात्रा या निर्यात आदि) में परितर्वन को मापा जाता है। यह सम्मिलित की गई वस्तुओं की कीमतों (या कोई और गुण) का एक विशेष भारित माध्य होता है। |
| सप्रतिबंध प्रायिकता | : | यदि $A$ तथा $B$ दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं है तो $B$ की प्रायिकता, जबकि $A$ पहले ही घटित हो चुकी है, वह $B$ की सप्रतिबंध प्रायिकता कहलाती है। इस प्रायिकता को $P(B/A)$ से सूचित किया जाता है। |
| सांख्यिकीय अन्वेषण | : | यह एक अन्वेषण होता है जिसकी जाँच के लिए संख्याओं में सूचना की आवश्यकता होती है। |
| सांख्यिकीय सर्वेक्षण | : | यह एक दी हुई समस्या के अन्तर्गत आने वाली सभी या प्रतिदर्श में सम्मिलित इकाइयों के प्रेक्षण से समंक प्राप्त करनी की विधि होती है। |
| समष्टि **(Poplulation)** | : | किसी निश्चित समय और स्थान पर विशिष्ट प्रकार की इकाइयों का समूचा संग्रह। |
| सुविधाजनक प्रतिचयन **(Convenience Sampling)** | : | इसका अर्थ, प्रतिदर्श प्राप्त करने की ऐसी विधि से है जो शोधकर्ता को सर्वाधिक आसान तरीके से उपलब्ध हो। |
| सार्थकता का स्तर **(Level of significance)** | : | कुछेक प्रतिदर्श ऐसे हो सकते हैं, जिनमें समष्टि माध्य, प्रतिदर्श माध्य के इर्दगिर्द विश्वस्यता अंतराल में नहीं रहता। इस प्रकार के मामलों की प्रतिशत (प्रायिकता) सार्थकता का स्तर कहलाती है। इस आमतौर पर $a$ द्वारा दर्शाया जाता है। जब = 0.05 (अर्थात् 5 प्रतिशत) हम कह सकते हैं कि 5 प्रतिशत मामलों में हम गलत निर्णय पर पहुँचते हैं या प्रथम कोटि की त्रुटि करते हैं। सार्थकता का स्तर किसी भी स्तर पर हो सकता है लेकिन आमतौर पर इसे 5 प्रतिशत या 1 प्रतिशत स्तर माना जाता है। |

| | | |
|---|---|---|
| **सांख्यिकीय इकाई** | : | एक व्यक्ति या वस्तु का एक या अधिक अभिलक्षण होता है जिनका समंक संकलन के लिए प्रेक्षण किया जाता है। |
| **सांख्यिकीय अनुमिति(Statistical Inference)** | : | समष्टि से प्राप्त ज्ञात, प्रतिदर्श के आधार पर अज्ञात समष्टि विशेषताओं के बारे में निष्कर्ष निकालने की प्रक्रिया। |
| **सतत् यादृच्छिक चर (Continuous Random Variable)** | : | यह यादृच्छिक चर है जो निश्चित अंतराल में सभी मानों को धारण कर सकता है। |
| **असतत् यादृच्दिक चर (Discrete Random Variable)** | : | यह ऐसा यादृच्छिक चर है जिसके परिमित संख्या वाले मान या अनंत अनुक्रम (जैसे 1, 2, 3, ....) हो सकते हैं। |
| **सरल यादृच्छिक प्रतिचयन (Simple Random Sampling)** | : | ऐसी प्रतिचयन संबंधी प्रक्रिया जिसमें समष्टि के प्रत्येक सदस्य की प्रतिदर्श में चुने जाने की संभावना एक जैसी होती है। |
| **सहगण (Cohort)** | : | ऐसे व्यक्तियों का समूह जो निश्चित समयावधि में एक जैसे सांसारिक/जनांकिकीय अनुभव प्राप्त करते हैं। जैसे 2003 के जन्म सहगण में ऐसे व्यक्तियों का समूह शामिल है जिन सभी का उसी वर्ष में जन्म हुआ था। |
| **सहसंबंध विश्लेषण (Correlation Analysis)** | : | इससे अर्थ दो यादृच्छिक चरों के बीच साहचर्य का परिमाप है। जो दो यादृच्छिक चर इस प्रकार के हैं कि एक में परिवर्तन से दूसरे से संबंधित तरीके से परिवर्तन होता है तो इनको सहसंबंधित कहते हैं। जो चर स्वतंत्र होते हैं, वे सहसंबंधित नहीं होते। सहसंबंध गुणांक –1 तथा 1 के बीच एक संख्या होती है। यह प्रेक्षणों के बहुत से युग्मों, जिनको बिंदु (x,y) से सूचित किया जाता है, से परिकलित किया जाता है। जब गुणांक का मान +1 है तो इसका अर्थ पूर्ण धनात्मक सहसंबंध, गुणांक का मान –1 है तो इसका अर्थ पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध तथा गुणांक का मान 0 है तो इसका अर्थ कोई सहसंबंध नहीं होता है। |
| **सहप्रसरण (Covariance)** | : | यह दो चरों का उनके माध्य से प्रथम गुणन आघूर्ण (First Product Moment) होता है। इसे परिकलित करने का सूत्र है; $\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$ या $\frac{1}{n}\left(\sum X_iY_i-\frac{\sum X_i\sum Y_i}{n}\right)$ जहाँ गए y प्रत्येक चर के मान हैं तथा $n$ प्रेक्षणों की संख्या है। |
| **समंक बिन्दु** | : | यह एक व्यक्ति या वस्तु से प्राप्त प्रेक्षण होता है। |
| **समंक समुच्चय** | : | यह सभी समंक बिन्दुओं का समुच्चय होता है। |

**संगणना समुच्चय** : समष्टि की सभी इकाइयों के प्रेक्षण से प्राप्त समंक होते हैं।

**हरात्मक माध्य** : यह समुच्चय के प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है।

**क्षेत्रफल आरेख** : इनको द्विविमीय आरेख भी कहते हैं। इनमें आरेख की लंबाई तथा चौड़ाई का महत्व होता है। इसीलिए इनको क्षेत्रफल आरेख भी कहते हैं। यह आयत या वर्ग या वृत्त हो सकता है।

## कुछ उपयोगी पुस्तकें


Devore, Jay L., 2010, *Probability and Statistics for Engineers*, Cengage Learning

Freund, John E., 1992, *Mathematical Statistics*, Prentice Hall

Larsen, Richard J. and Morris M. Marx, 2011, *An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications*, Prentice Hall

Cochran, William G., 2007, *Sampling Techniques*, John Wiley