इकाई 10 बहुसंरेखता*

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य होंगे कि–

- किसी समाश्रयण मॉडल में बहुसंरेखता की अवधारणा स्पष्ट कर सकें;
- निकट और पूर्ण बहुसंरेखता के बीच अंतर समझ सकें;
- बहुसंरेखता के परिणामों का वर्णन कर सकें;
- बहुसंरेखता का पता कैसे लगाया जा सकता है, इसकी व्याख्या कर सकें;
- बहुसंरेखता के उपचारात्मक उपायों का वर्णन कर सकें; तथा
- कटक समाश्रयण की अवधारणा स्पष्ट कर सकें।

10.1 विषय–प्रवेश

पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल यह मानकर चलता है कि कोई पूर्ण बहुसंरेखता की स्थिति कभी नहीं होती। सांख्यिकी में बहुसंरेखता का अर्थ होता है– किसी भी बहु–समाश्रयण मॉडल में दो या दो से अधिक व्याख्यात्मक चरों के बीच उच्च सहसंबंध की विद्यमानता।

बहुसंरेखता के अभाव का अर्थ होगा कि व्याख्यात्मक चरों के बीच कोई वास्तविक रैखिक संबंध नहीं है। किसी भी समाश्रयण मॉडल के लिए पूर्ण बहुसंरेखता की अवधारणा बहुत महत्वपूर्ण होती है क्योंकि पूर्ण बहुसंरेखता की विद्यमानता का समाश्रयण मॉडल पर गंभीर परिणाम होता है।

* डॉ. पूजा शर्मा, सहायक प्राध्यापक, दौलत राम कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।

इस इकाई में हम बहुसंरेखता के परिणामों, उसका पता लगाने के तरीकों और उसके उपचारात्मक उपायों के विषय में विस्तृत चर्चा करेंगे।

10.2 बहुसंरेखता के प्रकार

बहुसंरेखता दो प्रकार की हो सकती है– (i) पूर्ण बहुसंरेखता, और (ii) अपूर्ण बहुसंरेखता। याद रखें कि यह विभाजन व्याख्यात्मक चरों के बीच संबंध की डिग्री अथवा सीमा के अनुसार होता है। उनके द्वारा उत्पन्न की जाने वाली समस्या की प्रकृति के कारण ही यह भेद किया जाता है। नीचे दोनों प्रकार की बहुसंरेखता का वर्णन किया गया है।

10.2.1 पूर्ण बहुसंरेखता

पूर्ण बहुसंरेखता के उदाहरण में व्याख्यात्मक चर एक दूसरे के साथ पूरी तरह से सहसंबद्ध होते हैं। इसका अर्थ यह है कि व्याख्यात्मक चरों के बीच सहसंबंध का गुणांक 1 होता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि हम किसी वस्तु Y के लिए माँग वक्र प्राप्त करना चाहते हैं। हम मानकर चलते हैं कि माँग की गई मात्रा (Y) कीमत (X_2) और आय (X_3) का ही एक फलन है। संकेताक्षरों में, $Y = f(X_2, X_3)$, जहाँ X_2 वस्तु Y की कीमत है और X_3 साप्ताहिक उपभोक्ता आय है।

आइए, अब हम निम्नलिखित समाश्रयण मॉडल (समष्टि समाश्रयण फलन) पर विचार करते हैं–

$$Y_i = A_1 + A_2X_{2i} + A_3X_{3i} + u_i \qquad \text{... (10.1)}$$

उपर्युक्त समीकरण में, मान लीजिए कि–

A_2 is < 0 : इसका अर्थ यह है कि कीमतें माँग से प्रतिलोमतः संबद्ध हैं।

$A_3 > 0$: यह इंगित करता है कि जैसे–जैसे आय बढ़ती है, वस्तु की माँग भी बढ़ती है।

मान लीजिए कि पद X_2 और X_3 के बीच एक पूर्ण संबंध है, यथा–

$$X_{3i} = 300 - 2X_{2i} \qquad \text{... (10.2)}$$

उपर्युक्त उदाहरण में, यदि हम X_3 का X_3 पर समाश्रयण करते हैं तो हमें निर्धारण का गुणांक $R^2 = 1$ प्राप्त होता है।

अब यदि हम समीकरण (10.2) से लेकर X_3 के मान को प्रतिस्थापित करते हैं तो हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है–

$$\begin{aligned} Y_i &= A_1 + A_2X_{2i} + A_3(300 - 2X_{2i}) + u_i \\ &= A_1 + A_2X_{2i} + 300A_3 - 2A_3X_{2i} + u_i \\ &= (A_1 + 300A_3) + (A_2 - 2A_3)X_{2i} + u_i \qquad \text{... (10.3)} \end{aligned}$$

माना $C_1 = (A_1 + 300A_3)$ और $C_2 = (A_2 - 2A_3)$ है। तब समीकरण (10.3) को निम्नवत् लिखा जा सकेगा–

$$Y_i = C_1 + C_2X_{2i} + u_i \qquad \text{.... (10.4)}$$

तदनुसार, यदि हम समीकरण (10.4) में दिए गए समाश्रयण मॉडल का आकलन करते हैं तो हमें पद C_1 और C_2 के लिए आकलक प्राप्त होते हैं। हमें पद A_1, A_2 और A_3 के लिए अद्वितीय आकलक प्राप्त नहीं होते। परिणामतः व्याख्यात्मक चरों के बीच पूर्ण रैखिक संबंध अथवा पूर्ण बहुसंरेखता के उदाहरण में हम सभी प्राचलों के अद्वितीय आकलक प्राप्त नहीं कर सकते हैं।

चूँकि हम उनके अद्वितीय आकलक प्राप्त नहीं कर सकते हैं, हम उनके विषय में कोई सांख्यिकीय अनुमिति (परिकल्पना परीक्षण) भी नहीं कर सकते हैं। इस प्रकार, पूर्ण बहुसंरेखता के उदाहरण में, किसी भी समाश्रयण में व्यष्टिक समाश्रयण गुणांक का आकलन और परिकल्पना परीक्षण संभव नहीं होता।

10.2.2 निकट अथवा अपूर्ण बहुसंरेखता

पिछले पाठांश में अपूर्ण बहुसंरेखता की विद्यमानता ने यह संकेत दिया कि हमें मॉडल में सभी प्राचलों के लिए अद्वितीय आकलक नहीं मिल पाते हैं। व्यवहारतः हमें पूर्ण बहुसंरेखता का सामना नहीं करना पड़ता है। हमें आमतौर पर निकट अथवा अत्यधिक बहुसंरेखता का सामना करना पड़ता है। इस प्रसंग में व्याख्यात्मक चर रैखिकता से सन्निकटतः संबद्ध होते हैं। उच्च संरेखता ''निकट'' अथवा ''अपूर्ण'' बहुसंरेखता के उदाहरण को ही इंगित करती है। इस प्रकार, जब हम बहुसंरेखता की समस्या का उल्लेख करते हैं तो आमतौर पर हमारा अभिप्राय अपूर्ण बहुसंरेखता से होता है।

आइए, अब हम वस्तु Y के इसी माँग फलन पर विचार करते हैं। इस उदाहरण में हालाँकि हम यह मानते हैं कि व्याख्यात्मक चरों के बीच अपूर्ण बहुसंरेखता है (इसे पहले के उदाहरण से अलग करने के लिए हमने प्राचल संकेताक्षरों को बदल दिया है)। तदनुसार, समष्टि समाश्रयण फलन निम्नवत् होगा–

$$Y_i = B_1 + B_2X_{2i} + B_3X_{3i} + u_i \qquad \text{... (10.5)}$$

समीकरण (10.5) एक ऐसे उदाहरण को इंगित करता है जिसमें दो या दो से अधिक व्याख्यात्मक चर ठीक–ठीक रैखिक नहीं होते हैं। उपर्युक्त समाश्रयण मॉडल के लिए हम एक आकलित समाश्रयण समीकरण निम्नानुसार प्राप्त कर सकते हैं–

समीकरण (10.5) :	$\hat{Y}_i = 145.37$	$-\ 2.7975X_{2i}$	$-\ 0.3191X_{3i}$
मानक त्रुटि :	(120.06)	(0.8122)	(0.4003)
t–अनुपात :	(1.2107)	(–3.4444)	(–0.7971)

$R^2 = 0.97778$ ... (10.6)

चूँकि व्याख्यात्मक चर वास्तविक रूप से संबद्ध नहीं होते हैं, हम प्राचलों के लिए आकलन ज्ञात कर सकते हैं। ऐसी स्थिति में समाश्रयण का आकलन पूर्ण बहुसंरेखता के पूर्व उदाहरण के विपरीत किया जा सकता है। बहरहाल, इसका अर्थ यह नहीं है कि अपूर्ण बहुसंरेखता होने पर हमारे आकलकों के साथ कोई समस्या नहीं होती। हम अगले पाठांश में बहुसंरेखता के परिणामों पर चर्चा करेंगे।

बोध प्रश्न 1

1) पूर्ण बहुसंरेखता से क्या तात्पर्य होता है?

....

....

....

....

2) अपूर्ण बहुसंरेखता से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

3) स्पष्ट करें कि पूर्ण बहुसंरेखता की विद्यमानता में बहु–समाश्रयण मॉडल का आकलन करना क्यों संभव नहीं होता।

....

....

....

....

10.3 बहुसंरेखता के परिणाम

हम इकाई 4 से जानते हैं कि साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक (BLUE) होते हैं। इसका अर्थ है कि सभी रैखिक अनभिनत आकलकों के वर्ग में वे ही अपना न्यूनतम विचरण दर्शाते है। अपूर्ण बहुसंरेखता के मामले में ये आकलक (OLS) सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक (BLUE) ही बने रहते हैं। फिर समस्या क्या है? बहुसंरेखता की विद्यमानता में गुणांकों के विचरण और मानक त्रुटि में वृद्धि होती है। परिणामतः, बहुत कम ही आकलक सांख्यिकीय रूप से सार्थक होते हैं।

बहुसंरेखता के कुछ और परिणाम नीचे दिए गए हैं–

a) व्याख्यात्मक चर समष्टि में रैखिक रूप से संबद्ध नहीं हो सकते हैं (यथा, समष्टि समाश्रयण फलन में), परंतु वे किसी प्रतिदर्श विशेष में संबद्ध अवश्य हो सकते हैं। तदनुसार, बहुसंरेखता एक प्रतिदर्श समस्या है।

b) निकट अथवा उच्च बहुसंरेखता OLS आकलकों के वृहद् विचरण और मानक त्रुटियों का परिणाम होती है। फलतः आकलक के वास्तविक मान का अनुमान लगाना मुश्किल हो जाता है।

c) बहुसंरेखता के परिणामस्वरूप व्यापक विश्वास्यता अंतराल होता है। आंशिक समाश्रयण गुणांक से जुड़ी मानक त्रुटियाँ अधिक होती हैं। अतएव इसका परिणाम व्यापक विश्वास्यता अंतरालों के रूप में सामने आता है।

$$P_r\left[b_2 - t_{\alpha/2}SE(b_2) \leq \beta_2 \leq b_2 + t_{\alpha/2}SE(b_2)\right] = 1 - \alpha \qquad .... (10.7)$$

चूँकि यहाँ मानक त्रुटियों के मानों में वृद्धि हुई है, समीकरण (10.7) के निष्पीड़न में प्रकट हुआ अंतराल चौड़ा हो गया है।

d) निरर्थक *t*–अनुपात : जैसा कि ऊपर बताया गया है, बहुसंरेखता के कारण आकलकों की मानक त्रुटियाँ बढ़ जाती हैं। इस समीकरण को *t*–अनुपात $= \frac{b_2}{SE(b_2)}$ के रूप में दर्शाया जाता है। अतएव, *t*–अनुपात बहुत छोटा होता है। तदनुसार हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को स्वीकार (अथवा अस्वीकार नहीं) करते हैं और यह निष्कर्ष निकालते हैं कि इस चर का आश्रित चर पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

e) उच्च R^2 और कुछ सार्थक t–अनुपात : समीकरण (10.6) में हम देखते हैं कि R^2 बहुत अधिक है, लगभग 98% या 0.98 मान के साथ। दोनों ही व्याख्यात्मक चरों के t–अनुपात सांख्यिकीय रूप से सार्थक नहीं हैं।
केवल मूल्य चर समाश्रयण गुणांक ही सार्थक t–मान दर्शाता है। तथापि, समग्र सार्थकता $H_0: R^2 = 0$ का परीक्षण करते समय F–परीक्षण का उपयोग करते हुए हम शून्य–स्तरीय परिकल्पनाओं को अस्वीकार कर देते हैं। इस प्रकार F–परीक्षण और t–परीक्षण के परिणामों के बीच कुछ विसंगति देखी जाती है।

f) साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक मुख्यतः आंशिक समाश्रयण गुणांक होते हैं और उनकी मानक त्रुटियाँ आँकड़ों में छोटे–छोटे बदलावों के प्रति बहुत संवेदनशील हो जाती हैं। यदि आँकड़ों में कोई छोटा–सा भी परिवर्तन होता है तो समाश्रयण परिणाम काफी हद तक बदल जाते हैं।

g) समाश्रयण गुणांक के त्रुटिपूर्ण संकेत : यह बहुसंरेखता की विद्यमानता का एक बहुत ही प्रमुख प्रभाव होता है। समीकरण (10.6) में दिए गए उदाहरण में हम पाते हैं कि परिवर्तनीय आय का गुणांक ऋणात्मक होता है। आय चर एक 'त्रुटिपूर्ण' संकेत देता है क्योंकि आर्थिक सिद्धांत के अनुसार आय प्रभाव तब तक सकारात्मक रहता है जब तक कि संबद्ध वस्तु कोई निकृष्ट वस्तु न हो।

10.4 बहुसंरेखता संसूचन

पिछले पाठांश में हमने बहुसंरेखता के परिणामों के विषय पर चर्चा की। आइए, अब देखते कि बहुसंरेखता का पता लगाने के लिए किन लक्षणों की पहचान की जाती हैं।

(i) उच्च R^2 और कुछ सार्थक t–अनुपात

यह बहुसंरेखता का उत्कृष्ट लक्षण कहलाता है। यदि R^2 का मान उच्च (0.8 से अधिक) होता है तो यह शून्य–स्तरीय परिकल्पना कि आंशिक समाश्रयण गुणांक संयुक्त रूप से अथवा सहकालिक रूप से शून्य के बराबर होते हैं, अधिकांश उदाहरणों में (F–परीक्षण के आधार पर) $[H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0]$ निरस्त कर दी जाती है। फिर भी व्यक्तिगत t–परीक्षण यही दर्शाएँगे कि कोई भी नहीं अथवा बहुत कम आंशिक समाश्रयण गुणांक शून्य से सांख्यिकीय रूप से भिन्न हैं। इससे ज्ञात होता है कि बहुत कम ही समाश्रयण गुणांक सांख्यिकीय रूप से सार्थक होते हैं।

(ii) व्याख्यात्मक चरों के बीच उच्च युग्मानुसार सहसंबंध

स्वतंत्र चरों के बीच उच्च सहसंबंध के कारण आकलित समाश्रयण गुणांक में उच्च मानक त्रुटियाँ होती हैं। किंतु यह अनिवार्यतः सत्य नहीं है, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है। स्वतंत्र चरों के बीच निम्न सहसंबंध भी बहुसंरेखता की समस्या को जन्म दे सकता है।

माना r_{23}, r_{24} और r_{34} क्रमशः X_2, X_3 और X_3 के बीच युग्मानुसार सहसंबंध गुणांक निरूपित करते हैं। मान लीजिए कि $r_{23} = 0.90,$ चर X_2 और X_3 के बीच उच्च बहुसंरेखता दर्शाता है। अब हम आंशिक सहसंबंध गुणांक $r_{23.4}$ पर विचार करते हैं, जो कि X_2 और X_3 के बीच सहसंबंध दर्शाता है (जबकि चर X_4 के प्रभाव को नियत रखा जाता है)। मान लीजिए कि हमें ज्ञात होता है कि $r_{23.4} = 0.43$ है। यह इंगित करता है कि चर X_2 और X_3 के बीच आंशिक सहसंबंध उच्च बहुसंरेखता का अभाव दर्शाते हुए निम्न ही है।

इसीलिए, युग्मानुसार सहसंबंध गुणांक जब आंशिक सहसंबंध गुणांक द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है तो वह बहुसंरेखता की विद्यमानता का संकेत नहीं देता है। माना कि वास्तविक समष्टि समाश्रयण समीकरण (10.8) द्वारा निम्नवत् दर्शाया जाता है–

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_2 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + u_i \qquad \text{... (10.8)}$$

अब मान लीजिए कि सभी व्याख्यात्मक चर एक दूसरे के साथ पूरी तरह से सहसंबद्ध हैं, जैसा कि नीचे समीकरण (10.9) में दर्शाया गया है –

$$X_{4i} = \lambda_2 X_{2i} + \lambda_3 X_{3i} \qquad \text{... (10.9)}$$

यहाँ पद X_4 चर X_2 और X_3 का वास्तविक रैखिक संयोजन है। यदि हम निर्धारण के गुणांक का आकलन चर X_2 और X_3 पर पद X_4 के समाश्रयण से करते हैं तो हमें ज्ञात होता है कि–

$$R^2_{4.23} = \frac{r^2_{42} + r^2_{43} - 2r_{42}\, r_{43}\, r_{23}}{1 - r^2_{23}} \qquad \text{... (10.10)}$$

माना $r_{42} = 0.5, r_{43} = 0.5, r_{23} = -0.5$ होता है। यदि हम इन मानों को समीकरण (10.10) में प्रतिस्थापित कर देते हैं तो हमें ज्ञात होता है कि $R^2_{4.23} = 1$ होता है।

उपर्युक्त का एक निहितार्थ यह भी है कि सभी सहसंबंध गुणांक (व्याख्यात्मक चरों के बीच) बहुत अधिक मान नहीं दर्शाते, लेकिन फिर भी यहाँ पूर्ण बहुसंरेखता दिखाई पड़ती है।

(iii) पूरक अथवा सहायक समाश्रयण

मान लीजिए कि प्रत्येक शेष चर पर किसी व्याख्यात्मक चर का समाश्रयण किया जाता है और तत्स्थानी R^2 की संगणना की जाती है। इनमें से प्रत्येक समाश्रयण को पूरक अथवा सहायक समाश्रयण के रूप में जाना जाता है। उदाहरण के लिए, एक सात व्याख्यात्मक चरों वाले समाश्रयण मॉडल में, हम X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 एवं X_7 पर X_1 का समाश्रयण करेंगे और R^2_1 का मान ज्ञात करेंगे। इसी प्रकार, हम X_1, X_3, X_4, X_5, X_6 एवं X_7 पर R^2_2 का मान ज्ञात कर सकते हैं। सहायक समाश्रयण मॉडल की जाँच करके हम बहुसंरेखता की संभावना का पता लगा सकते हैं।

अनुभवसिद्ध नियम के अनुसार, यदि सहायक समाश्रयण से प्राप्त R^2_i का मान समाश्रयण मॉडल के समग्र R^2 के मान से अधिक हुआ तो बहुसंरेखता असुविधाजनक हो सकती है। इस नियम की एक कमी यह भी है कि हमें R^2 की संगणना अनेक बार करनी पड़ती है, जो कि एक बोझिल और अधिक समय खाने वाली प्रक्रिया होती है।

(iv) विचरण मुद्रास्फीति कारक (VIF)

बहुसंरेखता का एक अन्य संकेतक विचरण मुद्रास्फीति कारक (VIF) होता है। सहायक समाश्रयण से प्राप्त R^2_i बहुसंरेखता का कोई विश्वसनीय संकेतक नहीं हो सकता है। इस (VIF) पद्धति में हम आकलकों (b_2) और (b_3) के विचरण का सूत्र निम्नानुसार संशोधित करते हैं –

$$\text{var}\,(b_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x^2_{2i}(1 - R^2_2)} = \frac{\sigma^2}{\sum X^2_{2i}} \cdot \left(\frac{1}{1 - R^2_2}\right) \qquad \text{... (10.11)}$$

समीकरण (10.11) में आप देखेंगे कि R^2_2 एक ऐसा सहायक समाश्रयण है जिस पर चर्चा हम पहले ही कर चुके हैं। अब इस समीकरण (10.11) में दिए गए b_2 के विचरण की

तुलना इकाई 4 में किसी आकलक का विचरण ज्ञात करने हेतु दिए गए सामान्य सूत्र से करें। आप पाएँगे कि–

$$var(b_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2} VIF \qquad \text{... (10.12)}$$

जहाँ, $VIF = \left(\frac{1}{1-R_2^2}\right)$

इसी प्रकार, $var(b_3) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2}(VIF)$

यह ध्यान देने की बात है कि जब R_i^2 में वृद्धि होती है तो विचरण मुद्रास्फीति कारक (VIF) में भी वृद्धि होती है। इससे विचरण बढ़ता है और तदनुसार b_2 और b_3 की मानक त्रुटियाँ भी बढ़ती हैं।

यदि $R_i^2 = 0, VIF = 1 \Rightarrow V(b_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}$ और $V(b_3) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2}$

अतएव, यहाँ बहुसंरेखता दृष्टिगत नहीं होती।

दूसरी ओर,

यदि $R_i^2 = 1, VIF = \infty \Rightarrow V(b_2) \to \infty, V(b_3) \to \infty$

यदि R_i^2 उच्च मान दर्शाता हो, फिर भी $V(b_2)$ का मान ∞ की ओर प्रवृत्त होता है।

यह भी ध्यान देने की बात है कि $var(b_2)$ न केवल R_i^2 पर बल्कि σ^2 और $\sum x_{2i}^2$ पर भी निर्भर करता है।

यह संभव है कि R_i^2 उच्च मान दर्शाए (माना, 0.91), परंतु निम्न σ^2 अथवा उच्च $\sum x_{2i}^2$ होने के कारण $var(b_2)$ निम्नतर मान दर्शा सकता है।

तदनुसार, $V(b_2)$तब भी निम्नतर मान दर्शाएगा, जिसके फलस्वरूप उच्च *t*–मान प्राप्त होगा। इस प्रकार, सहायक समाश्रयण से प्राप्त R_i^2 बहुसंरेखता का एक सतही संकेतक मात्र सिद्ध होगा।

बोध प्रश्न 2

1) बहुसंरेखता के कोई चार महत्वपूर्ण परिणाम बताइए।

   ....

   ....

   ....

   ....

2) आंशिक सहसंबंधों का प्रयोग करके बहुसंरेखता का पता कैसे लगाया जा सकता है? स्पष्ट करें।

   ....

   ....

   ....

   ....

3) विचरण मुद्रास्फीति कारक (VIF) का प्रयोग करके बहुसंरेखता का पता लगाने की विधि का वर्णन करें।

....

....

....

....

10.5 बहुसंरेखता के उपचारात्मक उपाय

यदि हमारे अध्ययन का लक्ष्य आश्रित चर के माध्य मान का पूर्वानुमान करना ही हो तो बहुसंरेखता अनिवार्यतः कोई ''बुराई'' नहीं हो सकती। दूसरे, यदि व्याख्यात्मक चरों के बीच संरेखता उच्च (पूर्ण या लगभग पूर्ण) हो तो R^2 का मान बड़ा ही होगा। ऐसे उदाहरणों में आश्रित चर के माध्य मान का पूर्वानुमानन कोई समस्या नहीं होती। बहरहाल, यदि किसी अन्य प्रतिदर्श में व्याख्यात्मक चरों के बीच संरेखता की कोटि इतनी सुदृढ़ न हो तो ऐसे समाश्रयण मॉडल पर आधारित पूर्वानुमान विश्वसनीय नहीं होता। दूसरी ओर, यदि हमारे अध्ययन का उद्देश्य केवल पूर्वानुमानन ही नहीं बल्कि प्राचलों का विश्वसनीय आकलन भी हो तो हमारा उपागम भिन्न होना चाहिए। ऐसे उदाहरणों में अति बहुसंरेखता एक गंभीर समस्या के रूप में सामने आती है। ऐसे में हमें प्राचलों के विश्वसनीय आकलक नहीं मिलते।

बहुसंरेखता समस्या की गंभीरता को कम करने के लिए कुछ उपचारात्मक उपाय निर्धारित किए गए हैं। इनमें से कुछ उपचारात्मक उपायों के विषय में हम नीचे चर्चा कर रहे हैं।

10.5.1 मॉडल से कोई चर छोड़ देना

उपचारात्मक उपायों में सबसे सरल उपाय जो हमारे दिमाग में आता है, वह है– एक या एक से अधिक समरेख चरों को छोड़ देना। हालाँकि, अपने मॉडल से किसी भी चर को छोड़ देने से मॉडल विनिर्देशन त्रुटि सामने आ सकती है। दूसरे शब्दों में, जब हम छोड़ दिए गए चर के बिना अपने मॉडल का आकलन करते हैं तो लघुकृत मॉडल के आकलित प्राचल अभिनत हो सकते हैं।

अतएव, सबसे अच्छी व्यावहारिक सलाह यह होगी कि किसी ऐसे मॉडल से किसी चर को न छोड़ें जो सैद्धांतिक रूप से सही हो। किसी भी चर जिसके गुणांक का t–मान 1 से अधिक हो तो उस चर को नहीं छोड़ा जाना चाहिए क्योंकि इससे $\bar{R}^2$ में कमी आएगी।

10.5.2 अतिरिक्त आँकड़े अथवा नया प्रतिदर्श प्राप्त करना

अतिरिक्त आँकड़े प्राप्त करने का अर्थ प्रतिदर्श आकार में वृद्धि करना ही होता है। इससे बहुसंरेखता समस्या की गंभीरता कम होने की संभावना होती है। जैसा कि हम समीकरण (10.11) से जानते हैं,

$$\mathrm{var}\,(b_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 (1 - R_2^2)}$$

पद σ^2 और R_2^2 का मान दिया होने पर यदि चर X_2 का प्रतिदर्श आकार बढ़ता है तो पद $\sum x_{2i}^2$ में भी वृद्धि देखी जाती है। यह वृद्धि $\text{var}\,(b_2)$ और उसकी मानक त्रुटि में कमी की ओर अग्रसर करती है।

10.5.3 मॉडल का पुनर्विनिर्देशन

ऐसा संभव है कि आपके मॉडल से कुछ महत्वपूर्ण चर छोड़ दिए गए हों। यह भी हो सकता है कि मॉडल का फलनिक रूप ही त्रुटिपूर्ण हो। अतः मॉडल के विनिर्देशन को देखने की आवश्यकता होती है। कई बार किसी मॉडल का लघुगणक रूप लेने से भी बहुसंरेखता की समस्या का समाधान हो जाता है।

10.5.4 कुछ प्राचलों के विषय में पूर्व सूचना

वर्तमान अध्ययनों में कुछ प्राचलों के आकलित मान उपलब्ध हैं। इन मानों का उपयोग पूर्व सूचना के रूप में किया जा सकता है। ये मान हमें प्राचलों के संभाव्य मान के विषय में कोई अस्थायी विचार देते हैं।

10.5.5 कटक समाश्रयण

कटक (Ridge) समाश्रयण बहुसंरेखता की समस्या को हल करने की एक अन्य विधि है। इस विधि में प्रथम चरण आश्रित और स्वतंत्र चरों को मानकीकृत करना होता है (उनके अपने–अपने माध्य घटाकर और उनके मानक विचलन से विभाजित करके – संदर्भ के लिए पाठ्यक्रम BECC– 107 में 'मानक प्रसामान्य चर की अवधारणा' देखें)। इसका अर्थ यह है कि हम चरों को उनके मानकीकृत मानों में परिवर्तित कर दिए जाने के बाद ही उनका समाश्रयण करते हैं।

यह देखा गया है कि बहुसंरेखता की विद्यमानता में विचरण मुद्रास्फीति कारक का मान काफी अधिक होता है। यह मुख्य रूप से निर्धारण के गुणांक के उच्च मूल्य के कारण होता है। कटक समाश्रयण तब लागू होता है जब समाश्रयण समीकरण एक बड़ी संख्या में व्याख्यात्मक चर वाले आव्यूह के रूप में होते हैं।

कटक समाश्रयण सहसंबंध आव्यूह के विकर्णीय तत्वों में एक छोटी–सी संख्या, k, जोड़कर आगे बढ़ता है। आप जानते ही हैं कि सहसंबंध आव्यूह के विकर्णीय तत्व 1 होते हैं। चूँकि हम सहसंबंध आव्यूह के विकर्णीय तत्वों में एक छोटी–सी संख्या जोड़ देते हैं, यह एक ढालू टीले या पहाड़ी की भाँति दिखाई देता है। इसी कारण इस 'कटक समाश्रयण' कहा जाता है।

बोध प्रश्न 3

1) बहुसंरेखता की समस्या दूर करने की किन्हीं चार विधियों का वर्णन कीजिए।

....

....

....

....

....

....

2) बहुसंरेखता की समस्या हल करने के लिए कटक समाश्रयण की विधि की व्याख्या करें।

....

....

....

....

....

....

10.6 सार–संक्षेप

इस इकाई में हमने बहुसंरेखता की अवधारणा पर चर्चा की, जो कि बहुसमाश्रयण मॉडलों में उत्पन्न हो सकती है। यदि व्याख्यात्मक चर सहसंबद्ध हों तो हमें बहुसंरेखता की समस्या का सामना करना पड़ता है।

हमने इकाई में बहुसंरेखता के परिणामों को सामने रखा। इस इकाई में बहुसंरेखता का पता लगाने की विधियों पर भी चर्चा की गई है।

इकाई के अंत में कटक समाश्रयण की अवधारणा सहित विभिन्न उपचारात्मक उपायों को भी समझाया गया है।

10.7 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

बोध प्रश्न 1

1) पूर्ण बहुसंरेखता का उदाहरण एक ऐसी स्थिति को दर्शाता है जहाँ व्याख्यात्मक चर एक दूसरे के साथ पूरी तरह से सहसंबद्ध होते हैं; जिसका अर्थ है कि व्याख्यात्मक चरों के बीच सहसंबंध गुणांक 1 होता है।
2) यह एक ऐसे उदाहरण को इंगित करता है जिसमें दो या दो से अधिक व्याख्यात्मक चर अपने संबंध में वास्तविक रूप से रैखिक नहीं होते। व्याख्यात्मक चरों के बीच सहसम्बन्ध की विद्यमानता को ही 'अपूर्ण बहुसंरेखता' कहा जाता है।
3) पूर्ण बहुसंरेखता के उदाहरण में समाश्रयण मॉडल के सभी प्राचलों के लिए अद्वितीय आकलक प्राप्त करना संभव नहीं होता। विस्तृत विवरण के लिए पाठांश 10.2 देखें।

बोध प्रश्न 2

1) (i) अपूर्ण बहुसंरेखता के उदाहरण में कुछ आकलक सांख्यिकीय रूप से सार्थक नहीं होते। परंतु OLS आकलक तिस पर भी सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत अनुमानक (BLUE) सिद्ध होते हैं। अतएव, अपूर्ण बहुसंरेखता OLS मॉडल की किसी भी अवधारणा का उल्लंघन नहीं करती है।

(ii) यद्यपि मान बहुत अधिक है, बहुत कम ही आकलक सांख्यिकीय रूप से सार्थक हैं। तदनुसार संयुक्त परिकल्पना परीक्षण (F–परीक्षण) से पता चलता है कि इस शून्य–स्तरीय परिकल्पना को निरस्तकर दिया गया है कि सभी आंशिक गुणांक शून्य होते हैं। परंतु t–परीक्षण से पता चलता है कि बहुत कम आंशिक गुणांक ही शून्य से भिन्न होते हैं।

(iii) साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक और उनकी मानक त्रुटियाँ आँकड़ों में अल्प परिवर्तनों के प्रति बहुत अधिक संवेदनशील होते हैं।

(iv) प्राचलों के आकलन विश्वसनीय नहीं हैं। वे त्रुटिपूर्ण संकेतों के भी हो सकते हैं।

2) हम सहायक समाश्रयण चला सकते हैं। देखें खंड 10.4, बिंदु (iii)।
3) हमने विचरण मुद्रास्फीति कारक (VIF) का प्रयोग करके बहुसंरेखता का पता लगाने की विधि का वर्णन किया है। देखें पाठांश 10.4, बिंदु 4।

बोध प्रश्न 3

1) पाठांश 10.5 में हमने बहुसंरेखता को हल करने की पाँच विधियों का उल्लेख किया है। आपको यहाँ किन्हीं दो विधियों का ही वर्णन करना है।
2) कटक समाश्रयण में हम सर्वप्रथम अपने मॉडल के सभी चरों को मानकीकृत करते हैं। विस्तृत विवरण के लिए पाठांश 10.5.5 देखें।

इकाई 11 विषमविसारिता *

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य होंगे कि–

- किसी समाश्रयण मॉडल में विषमविसारिता (heteroscedasticity) की अवधारणा की व्याख्या कर सकें;
- किसी समाश्रयण मॉडल में विषमविसारिता के परिणामों की पहचान कर सकें;
- विषमविसारिता का पता लगाने की विधियों की व्याख्या कर सकें;
- विषमविसारिता के समाधान के लिए उपचारात्मक उपायों का वर्णन कर सकें;
- यह दर्शा सकें कि अपस्फीतिकारकों का प्रयोग विषमविसारिता के परिणामों पर नियंत्रण करने में कैसे मदद कर सकता है; तथा
- समाश्रयण मॉडल के सही फलनिक रूप की पहचान कर सकें ताकि विषमविसारिता से बचा जा सके।

11.1 विषय–प्रवेश

पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल (CLRM) की एक महत्वपूर्ण अवधारणा यह है कि समष्टि समाश्रयण फलन (PRF) में त्रुटि पद u_i समविसारिता (homoscedasticity)

---

* डॉ. पूजा शर्मा, सहायक प्राध्यापक, दौलत राम कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।

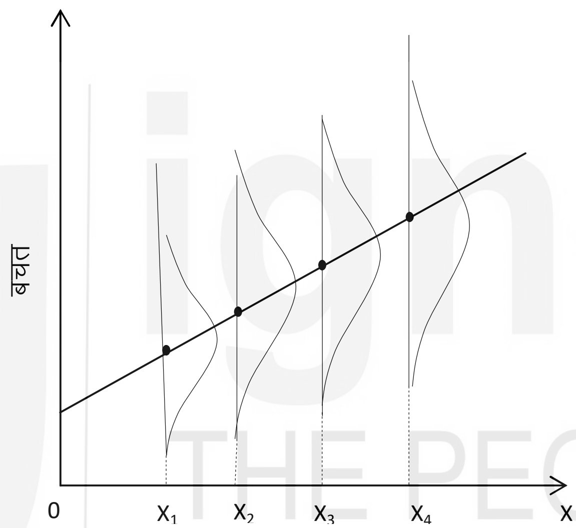
दर्शाता है। इसका अर्थ है कि पद u_i समग्र समष्टि में एक समान विचरण σ^2 दर्शाता है। एक वैकल्पिक परिदृश्य वहाँ उत्पन्न होता है जहाँ पद u_i का विचरण σ^2 होता है। दूसरे शब्दों में, त्रुटि विचरण एक प्रेक्षण से दूसरे प्रेक्षण में भिन्न होता है। ऐसे उदाहरणों को ही विषमविसारिता के उदाहरणों के रूप में जाना जाता है।

11.2 विषमविसारिता : परिभाषा

चलिए, सबसे पहले हम समविसारिता और विषमविसारिता के बीच अंतर स्पष्ट करते हैं। इससे हमें विषमविसारिता की अवधारणा को बेहतर ढंग से समझने में मदद मिलेगी।

11.2.1 समविसारिता

आइए, एक 2–चर समाश्रयण मॉडल पर विचार करते हैं, जिसमें आश्रित चर Y व्यक्तिगत बचत है और व्याख्यात्मक चर X व्यक्तिगत प्रयोज्य आय (अथवा कर–पश्चात आय) है।



चित्र 11.1: समविसारिता का उदाहरण

जैसे–जैसे व्यक्तिगत प्रयोज्य आय (PDI) बढ़ती है, बचत का माध्य या औसत स्तर भी बढ़ता है, परंतु अपने औसत मान के आसपास बचत का असंगति प्रसरण या विचरण इस आय (PDI) के सभी स्तरों पर एक समान ही रहता है। इस प्रकार का प्रकरण समविसारिता अथवा एक समान विचरण का उदाहरण प्रस्तुत करता है, जैसा कि चित्र 11.1 में दर्शाया गया है। ऐसे उदाहरणों में हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है –

$$E(u_i^2) = \sigma^2 \qquad \ldots (11.1)$$

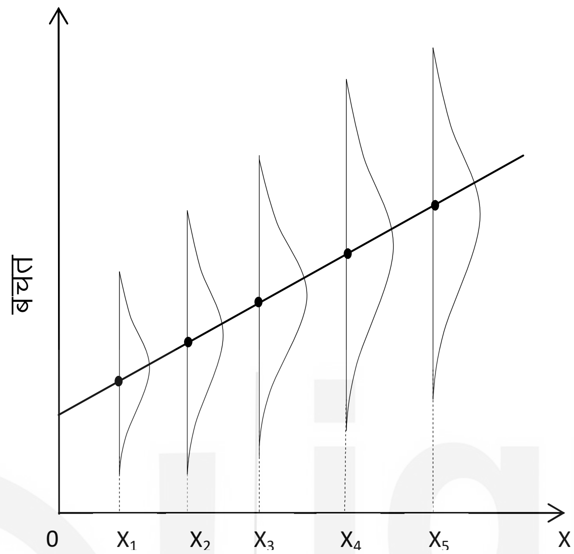
हम समीकरण (11.1) को वैकल्पिकतः एक ऐसे उदाहरण के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जहाँ वह निम्नवत् दिखाई देगा –

$$V(u_i) = \sigma^2 \qquad \ldots (11.2)$$

चित्र 11.1 में हम समविसारिता का एक ऐसा उदाहरण देखते हैं जिसमें त्रुटि पद का विचरण एक नियत मान, यथा σ^2 है। इसे ही किसी समीकरण (यथा, समीकरण 11.2) के रूप में व्यक्त किया जाता है। चूँकि त्रुटि पद का प्रत्याशित मान शून्य है, इस निष्पीड़न $V(u_i) = \sigma^2$ को समीकरण $V(u_i) = \sigma^2$ के रूप में भी लिखा जा सकता है (यथा, समीकरण 11.1)।

11.2.2 विषमविसारिता

ऊपर हमने देखा कि जैसे–जैसे व्यक्तिगत प्रयोज्य आय (PDI) बढ़ती है, बचत का औसत स्तर बढ़ता जाता है। तथापि, बचत का विचरण इस आय (PDI) के सभी स्तरों पर एक समान नहीं रहता है। यही है विषमविसारिता अर्थात् असमान विचरण का उदाहरण।



चित्र 11.2: विषमविसारिता का उदाहरण

दूसरे शब्दों में, उच्च आय–वर्ग के लोग औसतन निम्न आय–वर्ग के लोगों की तुलना में कहीं अधिक बचत करते हैं, परंतु साथ ही, उनकी बचत में अपेक्षाकृत अधिक परिवर्तनशीलता भी होती है। इस तथ्य को रेखांकन द्वारा चित्र 11.2 के रूप में दर्शाया जा सकता है। तदनुसार, हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है –

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 \quad or \quad V(u_i) = \sigma_i^2 \qquad \dots (11.3)$$

चित्र 11.2 में परिलक्षित विषमविसारिता का उदाहरण यह इंगित करता है कि त्रुटि विचरण नियत नहीं है। अधिक उचित रूप से, यह समीकरण $V(u_i) = \sigma_i^2$ की भाँति प्रत्येक प्रेक्षण के साथ बदलता है।

यह देखा गया है कि विषमविसारिता आमतौर पर प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में पाई जाती है और वह समय–शृंखला आँकड़ों में इतनी अधिक नहीं पाई जाती है। प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में इसके अधिक होने का कारण मुख्य रूप से यह है कि इन आँकड़ों के उदाहरण में समष्टि के सदस्य व्यक्तियों, फर्मों, उद्योगों, भौगोलिक विभाजन, राज्य अथवा देशों के रूप में होते हैं। ऐसे उदाहरणों में आँकड़े किसी समयबिंदु विशेष पर एकत्र किए जाते हैं। अतः समष्टि के सदस्य विभिन्न आकार के हो सकते हैं, यथा लघु, मध्यम अथवा वृहद। इस तथ्य को ही 'स्केल प्रभाव' के रूप में जाना जाता है। दूसरे शब्दों में, अर्थशास्त्र में इस 'स्केल प्रभाव' नामक तथ्य के कारण ही हम प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में विषमविसारिता के उदाहरण अधिक सामान्य रूप से पाते हैं।

दूसरी ओर, काल शृंखला के उदाहरण में एक समान चरों वाले आँकड़े समय के साथ बदलते रहते हैं। उदाहरण के लिए, सकल घरेलू उत्पाद (जीडीपी) अथवा बचत या बेरोजगारी संबंधी आँकड़े एक ही अवधि (जैसे वर्ष 1960 से 2008 तक) में भिन्न–भिन्न होते हैं।

बोध प्रश्न 1

1) विषमविसारिता से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

2) क्या विषमविसारिता की समस्या आँकड़ों से संबंधित होती है? संक्षिप्त टिप्पणी करें।

....

....

....

....

11.2 विषमविसारिता के परिणाम

विषमविसारिता के प्रभावों से सुरक्षित रहने के लिए हम पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल से एक अवधारणा यह लेकर चलते हैं कि त्रुटि पद समविसारिता दर्शाता है। हालाँकि अनेक समाश्रयण मॉडलों और वास्तविक आँकड़ों में बाधा विचरण विभिन्न प्रेक्षणों में भिन्न–भिन्न होता है। फलतः हमारे मॉडल को विषमविसारिता दर्शाते त्रुटि पद के कारण कुछ विशिष्ट प्रभावों का सामना करना पड़ता है।

विषमविसारिता की विद्यमानता में कोई भी साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) मॉडल निम्नलिखित अभिलक्षण दर्शाता है –

(i) साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक रैखिक होते हैं। समाश्रयण समीकरण भी अपने प्राचलों में रैखिक ही होते है।

(ii) साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक अनभिनत होते हैं। इसका अर्थ है कि आकलित प्राचलों का प्रत्याशित मान वास्तविक समष्टि प्राचलों के बराबर ही होता है।

(iii) यद्यपि साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक अनभिनत होते हैं, वे अब न्यूनतम विचरण नहीं दर्शाते, यथा वे अब दक्ष नहीं रहते। वस्तुतः वृहद प्रतिदर्शों में भी ये (OLS) आकलक दक्ष नहीं होते हैं। अतः ये (OLS) आकलक लघु के साथ–साथ उपगामी वृहद प्रतिदर्शों में भी सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक (BLUE) सिद्ध नहीं होते।

(iv) उपर्युक्त के आलोक में किसी भी साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक के विचरण आकलित करने के लिए सामान्य सूत्र अभिनत ही होता है, यथा, वे या तो ऊपर की ओर अभिनत (धनात्मक अभिनति) अथवा नीचे की ओर अभिनत (ऋणात्मक अभिनति) होते हैं। यह ध्यान देने की बात है कि जब साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलकों के वास्तविक विचरणों का अधिमूल्यांकन करता है तो धनात्मक अभिनति दिखाई देती है और जब आकलकों के वास्तविक विचरणों का अवप्राक्कलन किया जाता है तो हम कहते हैं कि यहाँ ऋणात्मक अभिनति है।

(v) समीकरण $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{df} = \frac{RSS}{df}$ से दर्शाया गया वास्तविक समष्टि विचरण का आकलक अभिनत होता है, यथा –

$$E(\hat{\sigma}^2) \neq \sigma^2 \qquad \dots (11.4)$$

हमें ज्ञात है कि किसी भी आकलित प्राचल के परीक्षण के लिए स्वतंत्रता की कोटि $(n-k)$ होती है, जहाँ k समाश्रयण मॉडल में प्राचलों (अथवा व्याख्यात्मक चरों) की संख्या दर्शाता है। उदाहरण के लिए, यदि इसमें तीन व्याख्यात्मक चर हों तो d.f. = $(n-3)$ होगा, जबकि दो चरों के उदाहरण में यह d.f. = $(n-2)$ होगा। यह ध्यान देने की बात है कि हम स्वतंत्रता की कोटि (d.f.) निर्धारित करने के उद्देश्य से ही अवरोधन आकलन की गणना कर रहे हैं।

(vi) समीकरण (11.4) दर्शाता है कि विषमविसारिता की विद्यमानता में त्रुटि विचरण का आकलित मान वास्तविक समष्टि त्रुटि विचरण के बराबर नहीं है। इसे देखते हुए t और F बंटनों पर आधारित सामान्य विश्वास्यता अंतराल और परिकल्पना परीक्षण अविश्वसनीय हैं (क्योंकि त्रुटि विचरण का आकलक अभिनत है)। इसीलिए त्रुटिपूर्ण अनुमिति (टाइप–II त्रुटि) किए जाने की संभावना बहुत अधिक है। इसके फलस्वरूप विषमविसारिता की विद्यमानता में सामान्य परिकल्पना–परीक्षण के परिणाम विश्वसनीय नहीं होते हैं, जिससे भ्रामक निष्कर्ष निकाल लिए जाने की संभावना बढ़ जाती है।

बोध प्रश्न 2

1) विषमविसारिता के कोई दो महत्वपूर्ण परिणाम बताइए।

....

....

....

....

....

2) विषमविसारिता की विद्यमानता में साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक त्रुटि विचरण का या तो अधिमूल्यांकन करता है या फिर अवप्राक्कलन। इस कथन का औचित्य प्रतिपादन कीजिए।

....

....

....

....

....

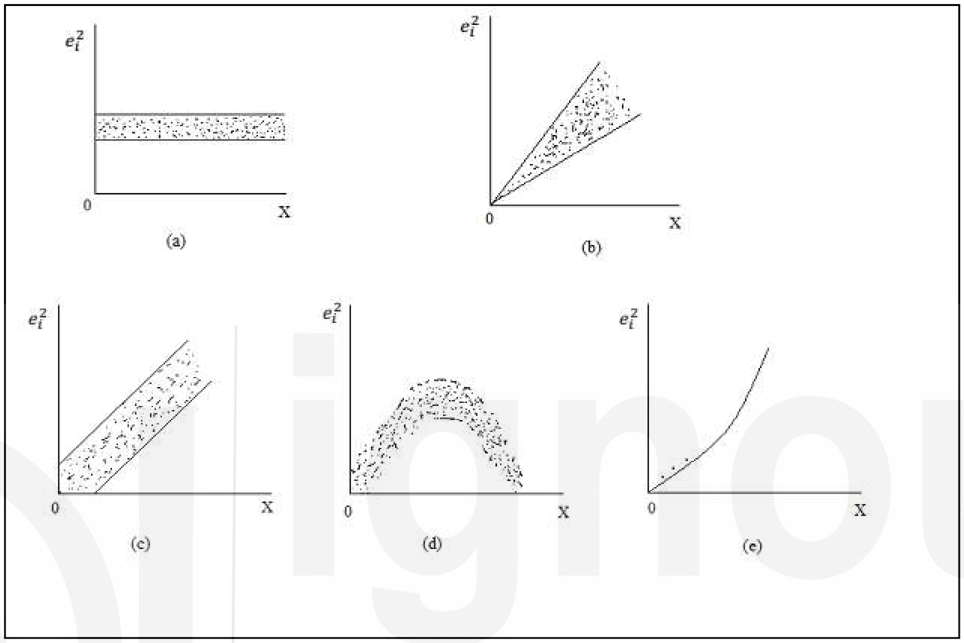
11.4 विषमविसारिता का संसूचन

अब तक हमने विषमविसारिता के परिणामों पर चर्चा की है। आइए, अब चर्चा करें कि विषमविसारिता का पता कैसे लगाया जा सकता है। विषमविसारिता का पता लगाने की बहुत–सी विधियाँ प्रचलन में हैं। इन्हीं में से कुछ विधियों का वर्णन नीचे किया गया है।

11.4.1 अवशिष्ट का आरेखीय परीक्षण

हम उपयुक्त समाश्रयण रेखा से प्राप्त अवशिष्ट की जाँच के साथ आरंभ कर सकते हैं। वर्गित शेष का अवशिष्ट आलेख विषमविसारिता की विद्यमानता का सूचक होता है। चूँकि त्रुटि पद u_i प्रेक्षण योग्य नहीं हैं, हम अवशिष्ट e_i की ही जाँच करते हैं।

अवशिष्ट का कोई भी आलेख हमें विभिन्न प्रकार के आरेख दे सकता है, जैसा कि चित्र 11.3 में दर्शाया गया है।



चित्र 11.3: समविसारिता और विषमविसारिता के उदाहरण

चित्र 11.3 में दर्शाई गई पाँच स्थितियों में हम देखते हैं कि उदाहरण (a) समविसारिता, यथा $V(u_i) = \sigma^2$ को निरूपित करता है, जबकि शेष चार उदाहरण (b), (c), (d) और (e) विषमविसारिता, यथा $V(u_i) = \sigma_i^2$ को निरूपित करते हैं।

11.4.2 पार्क परीक्षण

यदि आँकड़ों के किसी समूह में विषमविसारिता हो तो विषमविसारिता विचरण σ_i^2 नियमित रूप से एक या एक से अधिक व्याख्यात्मक चरों से संबंधित हो सकता है। अतएव हम एक या एक से अधिक व्याख्यात्मक चरों पर σ_i^2 का समाश्रयण कर सकते हैं, जैसे कि

$$\sigma_i^2 = f(X_i)$$

$$\ln\ \sigma_i^2 = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + v_i \qquad \ldots (11.5)$$

समीकरण (11.5) में त्रुटि विचरण और अवशिष्ट पद के रूप में लिए गए v_i व्याख्यात्मक चर के बीच संबंध स्थापित करने के लिए एक गैर–रेखीय (दोहरा लघुगणक) समाश्रयण चलाया जाता है। जब हमें σ_i^2 के मान ज्ञात नहीं होते हैं तो हम अवशिष्ट पद e_i को पद u_i के प्रतिनिधि के रूप में लेते हैं। तदनुसार हमें यह समीकरण प्राप्त होता है –

$$\ln e_i^2 = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + v_i \qquad \ldots (11.6)$$

विषमविसारिता का पता लगाने के लिए अपनाई जाने वाली पार्क परीक्षण विधि में निम्नलिखित चरण आते हैं –

a) विषमविसारिता समस्या के बावजूद समीकरण (11.5) में मूल समाश्रयण चलाएँ।

b) उक्त समाश्रयण से पद e_i प्राप्त करें और उनका वर्ग करें। तदोपरांत e_i^2 के लघुगणक ज्ञात करें।

c) मूल मॉडल (एक से अधिक व्याख्यात्मक चर के उदाहरण में) में किसी भी व्याख्यात्मक चर का प्रयोग करके समीकरण (11.6) में बताए गए अनुसार दोहरे लघुगणक रूप में समाश्रयण चलाएँ। फिर प्रत्येक X चर के विरुद्ध समाश्रयण चलाएँ। दूसरे शब्दों में, हम समाश्रयण को पद $\hat{Y}_i$ के आकलित मान के विरुद्ध चलाते हैं, जो कि पद Y_i का आकलित मान है।

d) शून्य–स्तरीय परिकल्पना $\beta_2 = 0$ का परीक्षण करें, यथा यहाँ कोई विषमविसारिता नहीं है।

e) किसी भी सांख्यिकीय रूप से सार्थक संबंध का अर्थ है कि बिना विषमविसारिता की शून्य–स्तरीय परिकल्पना को निरस्त कर दिया जाता है। यह विषमविसारिता की विद्यमानता का संकेत देता है, जिसके लिए उपचारात्मक उपायों की आवश्यकता होती है।

f) यदि शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार नहीं किया जाता है तो इसका अर्थ होगा है कि हम $\beta_2 = 0$ को स्वीकार करते हैं और β_1 के मान, यथा अवरोधन के मान को सामान्य, समविसारिता दर्शाते विचरण σ^2 के रूप में स्वीकार किया जा सकता है।

11.4.3 ग्लेजर परीक्षण

विषमविसारिता का पता लगाने के लिए ग्लेजर परीक्षण पार्क परीक्षण के समान ही किया जाता है। इस परीक्षण की विधि में निम्नलिखित चरण आते हैं –

a) मूल मॉडल से अवशिष्ट e_i प्राप्त करें।

b) उक्त अवशिष्ट का निरपेक्ष मान $|e_i|$ लें।

c) चर X पर पद $|e_i|$ के निरपेक्ष मानों समाश्रयण करें, जो कि विषमविसारिता विचरण σ_i^2 के साथ निकटता से जुड़े होने की प्रत्याशा की जाती है।

d) आप पद X_i के विभिन्न फलनिक रूप ले सकते हैं। हर्बर्ट ग्लेजर द्वारा सुझाए गए कुछ फलनिक रूप निम्नवत् हैं –

$$|e_i| = \beta_1 + \beta_2 X_i + v_i \qquad \dots (11.7)$$

$$|e_i| = \beta_1 + \beta_2 \sqrt{X_i} + v_i \qquad \dots (11.8)$$

$$|e_i| = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_i}\right) + v_i \qquad \dots (11.9)$$

उपर्युक्त का अर्थ है कि ग्लेजर परीक्षण विषमता की विद्यमानता की जाँच करने के लिए अवशिष्ट पद और व्याख्यात्मक चर के बीच विभिन्न संभाव्य (रैखिक के साथ–साथ गैर–रैखिक भी) संबंधों का सुझाव देता है।

e) दिए गए प्रत्येक उदाहरण के लिए यह शून्य–स्तरीय परिकल्पना परीक्षण करें कि कोई विषमविसारिता नहीं है, यथा $H_0: \beta_2 = 0$ (कोई विषमविसारिता नहीं)।

f) यदि H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है तो हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि यह विषमविसारिता का ही प्रमाण है।

यह ध्यान देने की बात है कि त्रुटि पद v_i स्वयं विषमविसारिता दर्शाने के साथ–साथ क्रमिक रूप से सहसंबद्ध भी हो सकता है। तदनुसार हम ग्लेजर परीक्षण के उदाहरण में भी पार्क परीक्षण के समान चरणों का ही पालन करते हैं। इन दो परीक्षणों के बीच अंतर वस्तुतः विचार किए जाने वाले फलनिक रूपों के बीच का अंतर ही होता है।

11.4.4 व्हाइट का सामान्य परीक्षण

आइए, यहाँ नीचे दिए गए समष्टि समाश्रयण फलन (PRF) पर विचार करते हैं –

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \qquad \ldots (11.10)$$

विषमविसारिता के लिए व्हाइट का सामान्य परीक्षण करने की विधि के चरण इस प्रकार हैं –

a) साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) द्वारा समष्टि समाश्रयण समीकरण (11.10) का आकलन करें और अवशिष्ट e_i प्राप्त करें।

b) अवशिष्टों e_i^2 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

c) निम्नलिखित सहायक समाश्रयण चलाएँ –

$$e_i^2 = A_1 + A_2 X_{2i} + A_3 X_{3i} + A_4 X_{2i}^2 + A_5 X_{3i}^2 + A_6 X_{2i} X_{3i} + v_i \qquad \ldots (11.11)$$

d) शून्य–स्तरीय परिकल्पना के तहत सहायक समाश्रयण से यह निर्धारण गुणांक R^2 प्राप्त करें कि कोई भी पद विषमविसारिता नहीं दर्शाता है (यथा, सभी समाश्रयण गुणांक शून्य हैं)। समीकरण रूप में,

$$H_0 : A_2 = A_3 \ldots A_6 = 0 \qquad \ldots (11.12)$$

समीकरण (11.12) में दी गई शून्य–स्तरीय परिकल्पना का अर्थ है कि सभी आंशिक समाश्रयण गुणांक एक साथ शून्य हैं। यह ध्यान देने की बात है कि हम समीकरण (11.12) में अवरोधन पद A_1 को शामिल नहीं करते हैं।

e) अब काई–वर्ग बंटन का प्रयोग करके समीकरण (11.12) में निम्नानुसार शून्य–स्तरीय परिकल्पना का परीक्षण करें –

$$nR^2 \sim \chi_{k-1}^2 \qquad \ldots (11.13)$$

यह समीकरण (11.13) दर्शाता है कि प्रतिदर्श आकार (n) और निर्धारण के गुणांक (R^2) स्वतंत्रता की कोटि ($k–1$) के साथ χ^2 बंटन का अनुसरण करता है। यहाँ k सहायक समाश्रयण (समीकरण 11.11) में समाश्रयियों की संख्या है।

f) यदि $\chi^2_{\text{परिकलित}} > \chi^2_{\text{क्रांतिक}}$ हो तो हम पद H_0 को निरस्त कर देते हैं और यह निष्कर्ष निकालते हैं कि समविसारिता की शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार ही किया जाना है, यथा यहाँ विषमविसारिता विद्यमान है।

विकल्पतः हम p मान (अर्थमितीय सॉफ्टवेयर द्वारा सरलता से प्रदत्त) के आधार पर भी निर्णय ले सकते हैं। यदि $p < 0.05$ हो तो हम H_0 को अस्वीकार कर देते हैं। दूसरी ओर, यदि $p > 0.05$ हो तो हम विषमविसारिता की शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार नहीं करते हैं। यह समविसारिता की विद्यमानता को दर्शाता है।

11.4.5 गोल्डफेल्ड–क्वांड्ट परीक्षण

गोल्डफेल्ड–क्वांड्ट (G-Q) परीक्षण तब व्यवहार्य होता है जब विषमविसारिता व्याख्यात्मक चरों में से किसी एक से ही संबंधित हो। चलिए, मान लेते हैं कि त्रुटि विचरण σ_i^2 समाश्रयण मॉडल में व्याख्यात्मक चरों में से एक (माना, X_i) से ही संबंधित है।

मान लीजिए कि पद σ_i^2 निम्नानुसार पद X_i) से धनात्मक रूप से संबंधित है –

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2 \qquad \ldots (11.14)$$

गोल्डफेल्ड–क्वांड्ट परीक्षण करने के लिए हम निम्नानुसार आगे बढ़ते हैं –

a) अपने प्रेक्षणों को X_i के बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें।

b) प्रेक्षण शृंखला के मध्य में कुछ प्रेक्षणों (उदाहरण के लिए, प्रतिदर्श में शून्य प्रेक्षणों में से C) को छोड़ दें। प्रेक्षण C के सटीक मान के लिए कोई कठोर नियम नहीं है और चयन काफी मनमाना है। व्यवहारतः लगभग एक–चौथाई प्रेक्षण छोड़ दिए जाते हैं।

c) प्रथम $n_1 = (n - C)/2$ प्रेक्षणों पर कोई समाश्रयण चलाएँ। इस समाश्रयण के लिए वर्गों का त्रुटि योग, यथा ESS_1, ज्ञात करें।

d) पिछले $n_2 = (n - C)/2$ प्रेक्षणों पर कोई समाश्रयण चलाएँ। इस समाश्रयण के लिए वर्गों का त्रुटि योग, यथा ESS_2, ज्ञात करें।

e) निम्नलिखित शून्य–स्तरीय परिकल्पना लें–

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \qquad \text{... (11.15)}$$

f) निम्नलिखित अनुपात ज्ञात करें–:

$$\Lambda = \frac{RSS_1 / \frac{n_1 - C - 2k}{2}}{RSS_2 / \frac{n_2 - C - 2k}{2}}$$

यदि $n_1 = n_2$ हो तो उपर्युक्त अनुपात निम्नवत् हो जाता है –

$$\Lambda = \frac{RSS_1}{RSS_2} \qquad \text{... (11.6)}$$

उपर्युक्त अनुपात (Λ) निम्नलिखित स्वतंत्रता की कोटि के साथ F–बंटन का अनुसरण करता है –

$$\left(\frac{n_1 - C - 2k}{2}, \quad \frac{n_2 - C - 2k}{2} \right) \qquad \text{... (11.17)}$$

g) हम ऊपर प्राप्त Λ के मान की तुलना पुस्तक के अंत में दिए गए F के तालिकाबद्ध मान से करते हैं। यदि $\lambda > F_{\text{क्रांतिक}}$ हो तो हम समीकरण $H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2$ को अस्वीकार कर देते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि त्रुटि विचरण में विषमविसारिता है। इसका अर्थ हुआ कि $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$ है। यदि $\lambda < F_{\text{क्रांतिक}}$ हुआ तो हम H_0 को अस्वीकार नहीं करते हैं। हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि त्रुटि विचरण में समविसारिता है, यथा $\sigma_i^2 = \sigma^2$.

बोध प्रश्न 3

1) विषमविसारिता का पता लगाने के लिए पार्क परीक्षण आयोजित करने के चरणों का वर्णन करें।

....

....

....

....

....

11.5 विषमविसारिता के उपचारात्मक उपाय

विषमविसारिता का अर्थ होता है कि साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक अनभिनत तो हैं परंतु वे अब दक्ष नहीं रहे; यहाँ तक कि वृहद प्रतिदर्शों में भी नहीं। अतएव यदि विषमविसारिता विद्यमान हो तो उपचारात्मक उपायों का सहारा लेना आवश्यक हो जाता है। इन उपचारात्मक उपायों के साथ आगे बढ़ने के लिए यह जानना आवश्यक होगा कि

हमें वास्तविक त्रुटि विचरण σ_i^2 ज्ञात है अथवा नहीं। ऐसे उदाहरणों में 'अपस्फीतिकारक' के प्रयोग से विषमविसारिता की समस्या को दूर करने में मदद मिल सकती है। हम इस पाठांश में अपस्फीतिकारकों के प्रयोग के विषय में ही जानेंगे।

11.5.1 प्रकरण I : जब σ_i^2 ज्ञात हो

यदि हमें σ_i^2 का मान ज्ञात हो तो हम भारित न्यूनतम वर्ग (WLS) की विधि का प्रयोग कर सकते हैं। नीचे इस विधि को प्रयोग करने की प्रक्रिया विस्तार से समझाई गई है।

चलिए, एक दो–चर समष्टि समाश्रयण फलन (PRF) पर विचार करते हैं, जो कि निम्नलिखित है –

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad \ldots(11.18)$$

मान लीजिए कि u_i विषमविसारिता त्रुटि विचरण दर्शाता है। यहाँ चूँकि हमें वास्तविक विचरण ज्ञात है, हम इसका उपयोग समीकरण (11.18) को σ_i से विभाजित करने के लिए कर सकते हैं। इस समीकरण (11.18) के दोनों पक्षों को σ_i से विभाजित करके हमें प्राप्त होता है –

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_1\left(\frac{1}{\sigma_i}\right) + \beta_2\left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right) + \frac{u_i}{\sigma_i} \qquad \ldots(11.19)$$

यह ध्यान देने की बात है कि σ_i से विभाजित हो जाने के कारण त्रुटि पद रूपांतरित हो जाता है। मान लीजिए कि नया त्रुटि पद v_i है। इस नए त्रुटि पद का वर्ग करके हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा –

$$v_i^2 = \frac{u_i^2}{\sigma_i^2} \qquad \ldots(11.20)$$

चूँकि त्रुटि पद का विचरण $var(v_i) = E(v_i^2)$ से दर्शाया गया है, इस समीकरण (11.20) के दोनों पक्षों की प्रत्याशा लेने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है –

$$E(v_i^2) = E\left(\frac{u_i^2}{\sigma_i^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right).E(u_i^2)$$

$$= \frac{½_i^2}{\sigma_i^2} = 1$$

इस प्रकार, रूपांतरित त्रुटि पद v_i समविसारिता दर्शाता है। अतएव समीकरण (11.19) का आकलन साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) विधि द्वारा किया जा सकता है। पद β_1 और β_2 के इस प्रकार प्राप्त किए गए ये (OLS) आकलक भारित न्यूनतम वर्ग (WLS) आकलक कहलाते हैं।

11.5.2 प्रकरण II : जब σ_i^2 अज्ञात हो

जब हमें त्रुटि σ_i^2 विचरण ज्ञात नहीं होता है तो हमें भारित न्यूनतम वर्ग (WLS) विधि का प्रयोग करने के लिए कुछ और अवधारणाएँ प्रस्तुत करने की आवश्यकता पड़ती है। यहाँ हम दो उदाहरणों पर विचार करेंगे, जो कि निम्नलिखित हैं –

(i) त्रुटि विचरण σ_i^2 पद X_i के समानुपातिक है

इस उदाहरण में हम 'वर्गमूल परिवर्तन' नामक एक मानक रूपांतरण प्रक्रिया का अनुसरण करते हैं। समानुपातिकता अवधारणा का अर्थ है कि –

$$E(u_i^2) = \sigma^2 X_i$$

अथवा, $V(u_i) = \sigma^2 X_i$ … (11.21)

अब वर्गमूल परिवर्तन के लिए आवश्यक है कि हम समीकरण (11.18) के दोनों पक्षों को $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$ से विभाजित कर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करें –

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta_2 \frac{X_i}{\sqrt{X_i}} + \frac{u_i}{\sqrt{X_i}}$$

$$= \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta_2 \sqrt{X_i} + v_i \quad \text{… (11.22)}$$

जहाँ, $v_i = \frac{u_i}{\sqrt{X_i}}$ … (11.23)

समीकरण (11.23) में त्रुटि पद एक रूपांतरित त्रुटि पद है। यह देखने के लिए कि क्या v_i विषमविसारिता से रहित है, हम समीकरण (11.23) के दोनों पक्षों का वर्ग कर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करते हैं –

$$v_i^2 = \frac{u_i^2}{X_i} \quad \text{… (11.24)}$$

अब रूपांतरित त्रुटि पद का विचरण, यथा समीकरण (11.24) निम्नवत् होगा –

$$E(v_i^2) = \frac{E(u_i^2)}{X_i} = \frac{\sigma^2 X_i}{X_i} \quad \text{... (11.25)}$$

$= \sigma^2 \Rightarrow$ समविसारिता

इस प्रकार, जब हम वर्गमूल परिवर्तन ($v_i = \frac{u_i}{\sqrt{X_i}}$) को प्रयोग में लाएँगे तो यह त्रुटि विचरण समविसारिता दर्शा सकता है।

(ii) त्रुटि विचरण X_i^2 के समानुपातिक है

यहाँ हमें ज्ञात है कि –

$$E(u_i^2) = \sigma X_i^2 \quad \text{… (11.27)}$$

$$V(u_i) = \sigma X_i^2$$

समीकरण (11.18) के दोनों पक्षों को X_i से विभाजित करने पर,

$$\frac{Y_i}{X_i} = \beta_1 \left(\frac{1}{X_i}\right) + \beta_2 + \left(\frac{u_i}{X_i}\right)$$

$$= \beta_1 \left(\frac{1}{X_i}\right) + \beta_2 + v_i \quad \text{… (11.28)}$$

समीकरण (11.28) परिवर्तित समष्टि समाश्रयण फलन (PRF) दर्शाता है, जिसमें त्रुटि पद निम्नवत् है –

$$v_i = \frac{u_i}{X_i}, \quad \text{… (11.29)}$$

समीकरण (11.29) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है –

$$v_i^2 = \frac{u_i^2}{X_i^2} \qquad \ldots (11.30)$$

समीकरण (11.30) में परिवर्तित समीकरण के त्रुटि पद का विचरण समविसारिता दर्शाता है क्योंकि

$$E(v_i^2) = \frac{E(u_i^2)}{X_i^2} = \frac{\sigma X_i^2}{X_i^2} = \sigma \qquad \ldots (11.31)$$

11.5.3 मॉडल का पुनर्विनिर्देशन

पद σ_i^2 के विषय में अनुमान लगाने के बजाय कभी–कभी कोई भिन्न फलनिक रूप चुनने से भी विषमविसारिता कम हो सकती है। उदाहरण के लिए, सामान्य समाश्रयण मॉडल को चलाने के बजाय हम मॉडल का आकलन उसके लघुगणक रूप में भी कर सकते हैं, यथा –

$$\ln Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i \qquad \ldots (11.32)$$

अनेक उदाहरणों में मूल मॉडल का रूप उपर्युक्त समीकरण की भाँति परिवर्तित कर देने से विषमविसारिता की समस्या से बचा जा सकता है।

इस पाठांश के आरंभ में हमने 'अपस्फीतिकारक' शब्द का प्रयोग किया है। ऐसे उदाहरणों में, जिन पर कि हमने ऊपर विचार किया, चर परिवर्तित करने के लिए अधिकांशतः मूल समाश्रयण मॉडल के दोनों पक्षों को किसी ज्ञात मान से विभाजित करना शामिल होता है। विभाजन द्वारा चरों का ऐसा परिवर्तन मूल मानों को अपस्फीत करने के समान होता है। यह विभाजन संक्रिया करने के लिए प्रयोग किए जाने वाले ज्ञात मानों को ही 'अपस्फीतिकारक' की संज्ञा दी जाती है।

बोध प्रश्न 4

1) अपस्फीतिकारकों का प्रयोग विषमविसारिता की समस्या के समाधान के रूप में कैसे कार्य करता है? स्पष्ट करें।

....

....

....

....

2) अपस्फीतिकारकों का प्रयोग विषमविसारिता की समस्या से निपटने के लिए उस स्थिति कैसे काम करता है जब त्रुटि विचरण X_i^2 के समानुपातिक होता है? स्पष्ट करें।

....

....

....

....

11.6 रैखिक बनाम लघुगणकीय–रैखिक रूप

किसी भी समाश्रयण मॉडल को विभिन्न फलनिक रूपों में चलाया जा सकता है, जो कि इन दो कारकों पर निर्भर करता है – (i) आश्रित और स्वतंत्र चर का संबंध, और (ii) आँकड़े।

मान लीजिए कि हमारे पास दो प्रकार के समाश्रयण मॉडल चलाने का विकल्प है। यथा – (i) एक रैखिक समाश्रयण मॉडल, और (ii) एक लघुगणकीय–रेखीय मॉडल। ऐसे मामलों में निर्णय लेने में सहायतार्थ मैकिनॉन, व्हाइट एवं डेविडसन (MWD) नामक अर्थशास्त्रियों द्वारा समाश्रयण के लिए उपयुक्त फलनिक रूप के चयन के लिए एक परीक्षण प्रतिपादित किया गया है।

इस (MWD) परीक्षण को निम्नानुसार लागू किया जाता है –

मान लीजिए कि हमारे किसी समाश्रयण के दो भिन्न–भिन्न फलनिक रूप इस प्रकार हैं –

- मॉडल 1 : $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ … (11.33)
- मॉडल 2 : $\ln Y_i = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 ln X_i + u_i$ … (11.34)

मॉडल 1 में आश्रित चर पद Xs के एक (या एक से अधिक) से रैखिक रूप से संबंधित है। मॉडल 2 में आश्रित और स्वतंत्र चर के बीच संबंध गैर–रैखिक है।

मैकिनॉन–व्हाइट–डेविडसन (MWD) परीक्षण में एक शून्य–स्तरीय और एक वैकल्पिक परिकल्पना पर विचार करना शामिल होता है, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है –

- H_0 : रैखिक मॉडल, यथा, Y समाश्रयियों का एक रैखिक फलन है (समीकरण (11.33))
- H_1 : लघुगणकीय–रैखिक मॉडल, यथा, lnY पद $\ln X_1$ का एक रैखिक फलन है (समीकरण (11.34))

उक्त (MWD) परीक्षण करने की विधि में निम्नलिखित चरण आते हैं –

(i) रैखिक मॉडल का आकलन करें और आकलित Y–मान प्राप्त करें। मान लीजिए कि आकलित Y–मानों को Y_f के रूप में दर्शाया जाता है।

(ii) लघुगणकीय–रैखिक मॉडल का आकलन करें और आकलित lnY मान प्राप्त करें। मान लीजिए लघुगणकीय–रैखिक Y के आकलित मानों को $\ln Y_f$ के रूप में निरूपित किया जाता है।

(iii) अब $Z_1 = (\ln Y_f - Y_f)$ ज्ञात करें।

(iv) चरण (iii) में पद Xs और Z_1 पर प्राप्त Y का समाश्रयण करें। यदि Z_1 का गुणांक सामान्य t–परीक्षण द्वारा सांख्यिकीय रूप से सार्थक हो तो H_0 को निरस्त कर दें।

(v) अब Z_2 = (प्रतिलघुगणक $\ln Y_f - Y_f$) ज्ञात करें।

(vi) पद Xs और Z_2 के लघुगणकीय मानों पर प्राप्त Y के लघुगणक का समाश्रयण करें। यदि Z_2 का गुणांक सामान्य t –परीक्षण द्वारा सांख्यिकीय रूप से सार्थक हो तो H_1 को निरस्त कर दें।

मान लीजिए कि समीकरण (11.33) में रैखिक मॉडल–I वास्तव में सही मॉडल है। इस उदाहरण में निर्मित चर Z_1 चरण (iv) में सांख्यिकीय रूप से सार्थक नहीं होगा क्योंकि इस स्थिति में रैखिक मॉडल से आकलित Y–मान और समीकरण (11.34) में लघुगणकीय–रैखिक मॉडल (तुलना करने के उद्देश्य से उनके प्रतिलघुगणकीय मान लेने के

बाद) से आकलित मान भिन्न नहीं होने चाहिए। वैकल्पिक परिकल्पना H_1 पर भी यही तर्क लागू होता है।

बोध प्रश्न 5

1) मैकिनॉन–व्हाइट–डेविडसन (MWD) परीक्षण के रैखिक और लघुगणकीय–रैखिक रूपों के बीच समाश्रयण मॉडल के उपयुक्त फलनिक रूप को चुनने के लिए उसकी रूपरेखा तैयार करें।

....

....

....

....

11.7 सार–संक्षेप

इस इकाई में हमने समाश्रयण प्रतिरूपों में विषमविसारिता की अवधारणा पर चर्चा की। इसमें विषमविसारिता की विद्यमानता के परिणामों और उसका पता लगाने के तरीकों की रूपरेखा प्रस्तुत की गई है।

इसमें विषमविसारिता के उपचारात्मक उपाय प्रदान करने की विभिन्न तकनीकों को भी विस्तार से समझाया गया है। इसके उपचारात्मक उपायों में अपस्फीतिकारकों के उपयोग की व्याख्या भी शामिल है।

इकाई में मैकिनॉन–व्हाइट–डेविडसन (MWD) परीक्षण के माध्यम से फलनिक रूप का चयन करने के विकल्प हेतु एक विधि भी स्पष्ट की गई है।

11.8 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

बोध प्रश्न 1

1) पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल (CLRM) की एक महत्वपूर्ण अवधारणा यह है कि किसी भी समष्टि समाश्रयण फलन (PRF) में त्रुटि पद u_i समविसारिता दर्शाता है अर्थात् उसका विचरण σ^2 एक समान ही रहता है। हालाँकि, यदि का विचरण u_i हो (दूसरे शब्दों में, वह एक प्रेक्षण में दूसरे प्रेक्षण से भिन्न हो) तो स्थिति को विषमविसारिता के रूप में जाना जाता है।
2) विषमविसारिता आमतौर पर प्रतिनिधिक आँकड़ों में पाई जाती है और वह समय–शृंखला आँकड़ों में इतनी अधिक नहीं पाई जाती है। ऐसा इसलिए है कि प्रतिनिधिक आँकड़ों के उदाहरण में समष्टि के सदस्य व्यक्तियों, फर्मों, उद्योगों, भौगोलिक विभाजन, राज्य अथवा देशों के रूप में होते हैं। समष्टि के सदस्यों से किसी समयबिंदु विशेष पर ऐसी इकाइयों के लिए एकत्र किए गए आँकड़े विभिन्न आकारों के हो सकते हैं, जैसे लघु, मध्यम अथवा वृहद उद्योग। इसे ही 'स्केल प्रभाव' के रूप में जाना जाता है। इस स्केल प्रभाव के कारण ही, प्रतिनिधिक आँकड़ों में, त्रुटि पदों में विषमविसारिता के उदाहरण अधिक सामान्य रूप से सामने आने की संभावना होती है।.

बोध प्रश्न 2

1) ये साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक अनभिनत तो हैं परंतु अब उनके पास न्यूनतम विचरण नहीं है अर्थात् वे अब दक्ष नहीं रहे। यहाँ तक कि बड़े प्रतिदर्शों में भी

ये (OLS) आकलक दक्ष नहीं सिद्ध होंगे। अतएव, ये (OLS) आकलक छोटे और बड़े (उपगामी रूप से) प्रतिदर्शों दोनों में सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक (BLUE) नहीं सिद्ध होते।

इन (OLS) आकलकों के विचरण का आकलन करने का सामान्य सूत्र अभिनत होता है अर्थात् वह या तो ऊपर की ओर अभिनति (धनात्मक अभिनति) दर्शाता है या फिर नीचे की ओर अभिनत (ऋणात्मक अभिनति) होता है।

2) त्रुटि विचरण का साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक एक अभिनत आकलक होता है। तदनुसार, वह या तो अधिमूल्यांकन करके अथवा अवप्राक्कलन करके आँका जाएगा। वास्तव में, त्रुटि विचरण का OLS आकलक अदक्ष होता है, जिसका अर्थ है कि यह बहुत उच्च मान दर्शाता है; तदनुसार, यह सदैव एक अधिमूल्यांकन ही होता है।

बोध प्रश्न 3

1) विषमविसारिता की विद्यमानता में, विषमविसारिता दर्शाने वाला विचरण σ_i^2 व्यवस्थित रूप से एक या एक से अधिक व्याख्यात्मक चर से संबंधित हो सकता है। अतएव, हम एक या एक से अधिक X– चरों पर निम्नानुसार समाश्रयण कर सकते हैं –

   $\sigma_i^2 = f(X_i)$ अथवा $\ln\sigma_i^2 = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + v_i$

   जहाँ $v_i =$ नया अवशिष्ट पद। यदि σ_i^2 ज्ञात न हो तो आकलित e_i का प्रयोग के प्रतिनिधि स्वरूप किया जा सकता है। किसी भी सांख्यिकीय रूप से महत्वपूर्ण संबंध का अर्थ होता है कि शून्य विषमविसारिता संबंधी शून्य–स्तरीय परिकल्पना को निरस्त कर दिया जाता है, जो कि विषमविसारिता की उस विद्यमानता को इंगित करता है जिसके लिए उपचारात्मक उपायों की आवश्यकता होती है। यदि शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार नहीं किया जाता है तो इसका अर्थ होगा है कि हम $\beta_2 = 0$ को स्वीकार करते हैं और पद β_1 के मान को सामान्य, समविसारिता दर्शाने वाले विचरण σ^2 के रूप में लिया जा सकता है।

बोध प्रश्न 4

1) विषमविसारिता का अर्थ है कि साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक अनभिनत तो हैं परंतु वे अब दक्ष नहीं रहे, यहाँ तक कि बड़े प्रतिदर्शों में भी नहीं। दक्षता की यह कमी इन (OLS) आकलकों के पारंपरिक परिकल्पना परीक्षण को अविश्वसनीय बना देती है। उपचारात्मक उपायों के लिए, यह जानना महत्वपूर्ण होगा कि हमें वास्तविक त्रुटि विचरण σ_i^2 ज्ञात है अथवा नहीं। ऐसे उदाहरणों में अपस्फीतिकारकों के प्रयोग से विषमविसारिता की समस्या को ठीक करने में मदद मिलेगी। विभिन्न अपस्फीतिकारकों का प्रयोग त्रुटि विचरण को परिवर्तित करने के लिए किया जा सकता है ताकि उन्हें समविसारिता दर्शाने वाला बनाया जा सके। यदि हमें σ_i^2 ज्ञात हो तो भारित न्यूनतम वर्ग (WLS) की विधि पर विचार किया जा सकता है। इसमें त्रुटि विचरण का प्रयोग समीकरण के दोनों पक्षों को σ_i^2 से भाग देने के लिए किया जाता है। विस्तृत विवरण के लिए पाठांश 11.5 देखें।
2) आकलित अवशिष्ट पहले के प्रकरण–I की भाँति कोई प्रतिमान दर्शाते हैं, परंतु त्रुटि विचरण X से रैखिक रूप से संबंद्ध नहीं है, फिर भी वह लेकिन X के वर्ग के समानुपातिक बढ़ जाती है। अतः, समीकरण $E(u_i^2) = \sigma X_i^2$ और $V(u_i) =$

σX_i^2 प्राप्त होते हैं। अब इसके दोनों पक्षों को X_i से विभाजित करके हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है –

$$\frac{Y_i}{X_i} = \beta_1\left(\frac{1}{X_i}\right) + \beta_2 + \left(\frac{u_i}{X_i}\right)$$
$$= \beta_1\left(\frac{1}{X_i}\right) + \beta_2 + v_i$$
$$v_i = \frac{u_i}{X_i}, v_i^2 = \frac{u_i^2}{X_i^2}$$
$$E(v_i^2) = \frac{E(u_i^2)}{X_i^2} = \frac{\sigma X_i^2}{X_i^2} = \sigma$$

तदनुसार, यह परिवर्तित समीकरण समविसारिता दर्शाता है।

बोध प्रश्न 5

1) मैकिनॉन, व्हाइट और डेविडसन द्वारा प्रस्तावित समाश्रयण के लिए उपयुक्त फलनिक रूप के चयन के लिए परीक्षण को MWD परीक्षण के रूप में जाना जाता है। MWD परीक्षण का उपयोग दो मॉडलों के बीच चयन करने के लिए किया जाता है। विस्तृत विवरण के लिए पाठांश 11.6 देखें।

इकाई 12 स्व–सहसंबंध*

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य होंगे कि –

- किसी समाश्रयण मॉडल में स्वसहसंबंध की अवधारणा को रेखांकित कर सकें;
- किसी समाश्रयण मॉडल में स्वसहसंबंध की विद्यमानता के परिणामों का वर्णन कर सकें;
- किसी समाश्रयण मॉडल में स्वसहसंबंध का पता लगाने की विधियों की व्याख्या कर सकें;
- स्वसहसंबंध का पता लगाने के लिए डर्बिन–वॉटसन परीक्षण करने की प्रक्रिया पर चर्चा कर सकें;
- स्वसहसंबंध को वियोजित करने के उद्देश्य से उपचारात्मक उपायों को स्पष्ट कर सकें; तथा
- उन परिस्थितियों से निपटने के लिए प्रक्रिया की रूपरेखा तैयार कर सकें जहाँ किसी पश्चायित आश्रित चर वाले मॉडल में स्वसहसंबंध विद्यमान हो।

12.1 विषय–प्रवेश

पिछली इकाई में हमने विषमविसारिता के विषय पर विस्तृत चर्चा की थी। वहाँ हमने पाया कि विषमविसारिता वस्तुतः पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल (CLRM) की अनेक

---

* डॉ. पूजा शर्मा, सहायक प्राध्यापक, दौलत राम कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।

अवधारणाओं में से एक, यथा समविसारिता, का उल्लंघन है। यदि त्रुटि पद का विचरण सभी प्रेक्षणों में नियत न हो तो हमें विषमविसारिता की समस्या से दो चार होना पड़ता है।

इस इकाई में, हम उक्त मॉडल (CLRM) की एक अन्य अवधारणा के उल्लंघन के विषय में चर्चा करेंगे। स्मरण करें कि त्रुटि पदों के विषय में एक अवधारणा यह है कि एक प्रेक्षण का त्रुटि पद दूसरे प्रेक्षण के त्रुटि पद से सहसंबद्ध नहीं होता। यदि वे सहसंबद्ध होते हैं तो इस स्थिति को 'स्वसहसंबंध' की संज्ञा दी जाती है। इसे 'क्रमिक सहसंबंध की समस्या' भी कहा जाता है। यह समस्या प्रतिनिध्यात्मक के साथ–साथ काल–श्रेणी आँकड़ों में भी उत्पन्न हो सकती है। आइए, स्वसहसंबंध की अवधारणा पर थोड़ा और विस्तार से चर्चा करते हैं।

12.2 स्व–सहसंबंध की अवधारणा

पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल (CLRM) का मानना है कि विभिन्न त्रुटि पदों के बीच सहसंबंध शून्य होता है। हम जानते हैं कि विषमविसारिता प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों के साथ अधिक जुड़ी होती है, जबकि स्वसहसंबंध आमतौर पर काल–श्रेणी आँकड़ों से अधिक जुड़ा होता है। निस्सन्देह, प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में भी स्वसहसंबंध मौजूद हो सकता है। कुछ लेखक 'स्वसहसंबंध' शब्द का प्रयोग केवल काल–श्रेणी आँकड़ों के लिए करते हैं। वे प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में स्वसहसंबंध का वर्णन करने के लिए 'क्रमिक सहसंबंध' शब्द का उपयोग करते हैं। कई लेखक समानार्थक शब्द के रूप में 'स्वसहसंबंध' और 'क्रमिक सहसंबंध' शब्दों का प्रयोग करते हैं। वे प्रतिनिध्यात्मक के साथ–साथ काल–श्रेणी आँकड़ों में भी इस शब्द का प्रयोग करते हैं।

प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में होने वाले स्वसहसंबंध को कभी–कभी स्थानिक सहसंबंध (समय की बजाय स्थान में सहसंबंध) भी कहा जाता है। उक्त मॉडल (CLRM) में हम यह मानकर चलते हैं कि कोई स्वसहसंबंध नहीं होता है। संकेताक्षरों में इसका अर्थ होगा –

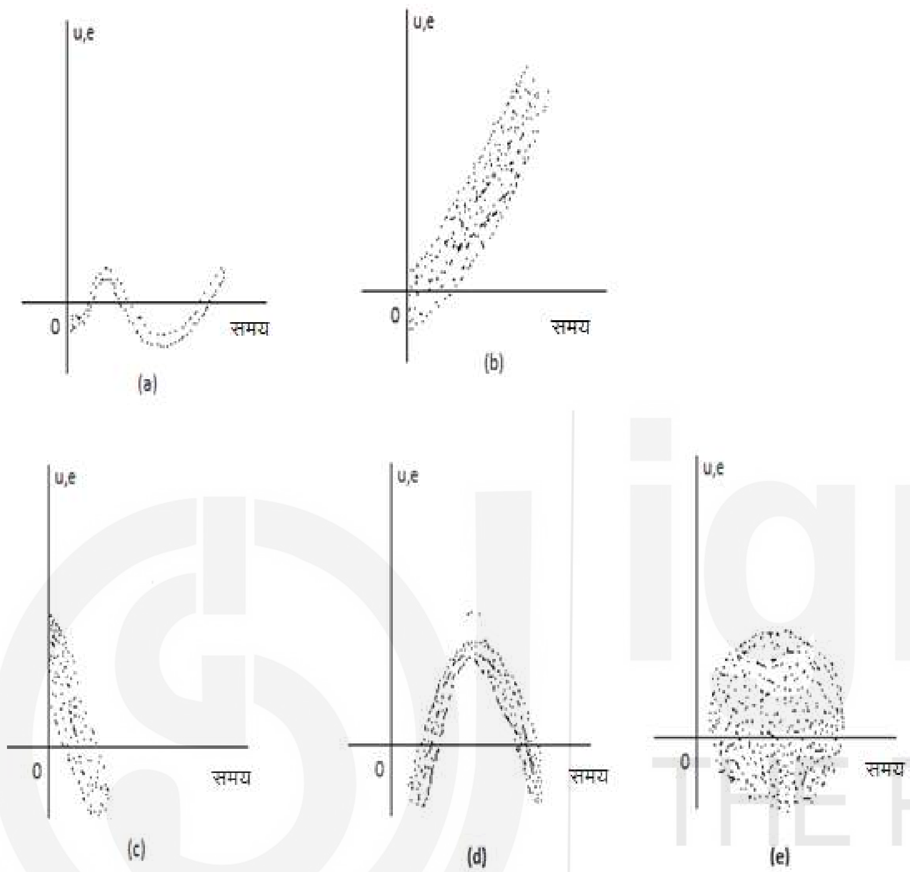
$$E(u_i, u_j) = 0 \qquad i \neq j \qquad \text{... (12.1)}$$

समीकरण (12.1) का अर्थ है कि एक प्रेक्षण से संबद्ध प्रसामान्य त्रुटि पद किसी अन्य प्रेक्षण से संबद्ध बाधा पद से संबंधित या प्रभावित नहीं है। उदाहरण के लिए, उत्पादन को प्रभावित करने वाली एक तिमाही में श्रमिक हड़ताल अगली तिमाही में उत्पादन को प्रभावित नहीं कर सकती है। इसका निहितार्थ यह है कि काल श्रेणी में कोई स्वसंबंध नहीं होता है। इसी प्रकार, पारिवारिक उपभोग व्यय के प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में उपभोग व्यय पर किसी परिवार की आय में वृद्धि से दूसरे परिवार के उपभोग व्यय को प्रभावित करने की आशा नहीं की जाती है।

उपर्युक्त श्रमिक हड़ताल के कारण प्रभावित उत्पादन के उदाहरण में, यदि $E(u_i, u_j) \neq 0$, $i \neq j$ हो तो इसका अर्थ होगा स्वसहसंबंध की स्थिति। इसका निहितार्थ यह है कि एक तिमाही में हड़ताल के कारण उत्पन्न व्यवधान अगली तिमाही में उत्पादन को प्रभावित कर रहा है। इसी प्रकार, एक परिवार के उपभोग व्यय में वृद्धि 'प्रदर्शन प्रभाव' (प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों) के कारण पास–पड़ोस में अन्य परिवारों के उपभोग व्यय को प्रभावित कर सकती है। तदनुसार, यह स्थानिक सहसंबंध का मामला अधिक है। इसीलिए यह आवश्यक है कि आँकड़ों का सावधानीपूर्वक विश्लेषण किया जाए ताकि यह पता लगाया जा सके कि वास्तव में बाधा पदों के बीच संबंध का कारण क्या है।

आइए, अब स्वसहसंबंध की विभिन्न स्थितियों या उदाहरणों पर सूक्ष्म दृष्टि डालें, जैसा कि चित्र 12.1 में दर्शाया गया है। इस चित्र (12.1) के खंड (a) से (d) तक u_t के बीच हम भिन्न–भिन्न प्रतिमान देखते हैं, परंतु चित्र (12.1) के खंड (e) में हमें ऐसा कोई प्रतिमान

नहीं दिखता है। यह ध्यान देने की बात है कि चूँकि स्वसहसंबंध अधिकांशतः काल–श्रेणी आँकड़ों में देखा जाता है, हम व्यक्तिगत प्रेक्षणों को इंगित करने के लिए पादाक्षर '*i*' के स्थान पर '*t*' का प्रयोग करते हैं। आगे हम अर्थशास्त्र के कुछ विशिष्ट उदाहरणों के साथ स्वसहसंबंध के कारणों का अध्ययन करेंगे।



चित्र 12.1: स्वसहसंबंध के उदाहरण

12.3 स्व–सहसंबंध हेतु कारण

स्वसहसंबंध की विद्यमानता हेतु उत्तरदायी विभिन्न कारणों पर चर्चा निम्नलिखित स्थूल शीर्षों के अंतर्गत की जा सकती है –

a) जड़ता या निष्क्रियता

अधिकांश आर्थिक काल–श्रेणी आँकड़े जड़ता या निष्क्रियता दर्शाते हैं। उदाहरण के लिए, सकल घरेलू उत्पाद (जीडीपी), उत्पादन, रोजगार, मुद्रा आपूर्ति आदि आर्थिक क्रियाकलाप में आवर्ती और स्वयंधारी उतार–चढ़ाव ही दर्शाते हैं। जब कोई अर्थव्यवस्था मंदी से उबर रही हो तो अधिकांश काल श्रेणी ऊपर की ओर ही बढ़ती दिखाई देती है। इसका अर्थ यह है कि एक समय–बिंदु पर किसी श्रेणी का कोई भी तदंतर मान सदैव अपने पिछले समय मान से अधिक होता है। यह गमता तब तक जारी रहती है जब तक कि वह करों या ब्याज अथवा दोनों में वृद्धि जैसे कारक के कारण धीमी न पड़ जाए। अतएव, काल–श्रेणी आँकड़ों से जुड़े समाश्रयण में क्रमिक प्रेक्षण आमतौर पर अन्योन्याश्रित अथवा सहसंबद्ध ही होते हैं।

इस प्रकार मान आदि में होने वाली वृद्धि को ही 'जड़ता' कहा जाता है, जिसका शाब्दिक अर्थ है – एक ऐसी स्थिति जो निरंतर अनेक समयावधियों तक एक समान रीति से बनी रहती है। मंदी के दौर में इसका विपरीत प्रभाव तब दिखाई पड़ता है जब अधिकांश आर्थिक क्रियाकलाप इससे पीड़ित हो जाते हैं अर्थात् निष्क्रिय हो जाते हैं।

b) मॉडल में विनिर्देशन त्रुटियाँ

मॉडल के त्रुटिपूर्ण विनिर्देशन के कारण कुछ महत्वपूर्ण चर जिन्हें मॉडल में शामिल किया जाना चाहिए था, संभवतः शामिल न किए जा सके हों (यथा, त्रुटिपूर्ण मॉडल–विनिर्देशन का उदाहरण)। यदि ऐसा त्रुटिपूर्ण मॉडल–विनिर्देशन होता है तो ऐसे त्रुटिपूर्ण मॉडल के अवशिष्ट नियमित प्रतिमान दर्शाएँगे। यदि अवशिष्ट कोई भिन्न प्रतिमान दर्शाते हैं तो यह क्रमिक सहसंबंध को जन्म देता है।

c) मकड़जाल संवृति

अनेक कृषिगत वस्तुएँ एक विशिष्ट दृश्यघटना प्रस्तुत करती हैं, जिसे 'मकड़जाल संवृति' कहा जाता है। इस दृश्यघटना में आपूर्ति किसी समय–अंतराल के साथ कीमत के प्रति अपनी प्रतिक्रिया दर्शाती है। ऐसा मुख्यतः इसलिए होता है कि आपूर्ति निर्णयों को लागू करने में समय लगता है। दूसरे शब्दों में, इसमें विकास प्रक्रिया की अवधि शामिल होती है। उदाहरण के लिए, फसल बोने का किसानों का निर्णय पिछले वर्ष की आपूर्ति की स्थिति अथवा फलन में प्रचलित कीमतों पर निर्भर हो सकता है। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है –

$$S_t = \beta_1 + \beta_2 P_{t-1} + u_t \qquad \text{... (12.2)}$$

समीकरण (12.2)में त्रुटि पद u_t संभवतः पूरी तरह यादृच्छिक न हो। ऐसा इसलिए है कि यदि वर्ष t में कृषक अत्युत्पादन करते हैं तो संभव है कि वर्ष (t+1) में वे अल्पोत्पादन करें क्योंकि वे बिना बिके माल को निपटाना चाहेंगे। यही आमतौर पर मकड़जाल संवृति की ओर ले जाता है।

d) आँकड़ा समकरण

कभी–कभी हमें प्रस्तुत किए गए आँकड़ों का औसत निकालने की आवश्यकता पड़ती है। आँकड़ों के औसत पर विचार करने का ही अर्थ 'आँकड़ा समकरण' है (उदाहरण के लिए BECC 109 की इकाई 5 देखें)। हम हर तीन महीने में अपने आँकड़ों का औसत निकालकर मासिक आँकड़ों को त्रैमासिक आँकड़ों में बदलना पसंद कर सकते हैं। बहरहाल, यह समकरण, जो कि अनेक संदर्भों में वांछित हो सकता है, स्वयं ही बाधाओं के किसी नियमित प्रतिमान को जन्म दे सकता है, जिसके परिणामस्वरूप स्वसहसंबंध सामने आ सकता है।

आँकड़ों के आधार पर स्वसहसंबंध सकारात्मक या नकारात्मक हो सकता है। आमतौर पर, आर्थिक आँकड़े सकारात्मक स्वसहसंबंध प्रदर्शित करते हैं। ऐसा इसलिए है कि उनमें से अधिकांश समय के साथ या तो ऊपर या फिर नीचे की ओर बढ़ते हैं। इस प्रकार का रुझान कम से कम कुछ समय, यथा कुछ महीनों अथवा कुछ तिमाहियों, तक जारी रहता है। इसका अर्थ है कि जब तक कोई कारण अथवा आघात प्रभावी न हो तब तक उनसे अचानक ऊपर अथवा नीचे की ओर चले जाने की उम्मीद नहीं की जाती है।

12.4 स्व–सहसंबंध के परिणाम

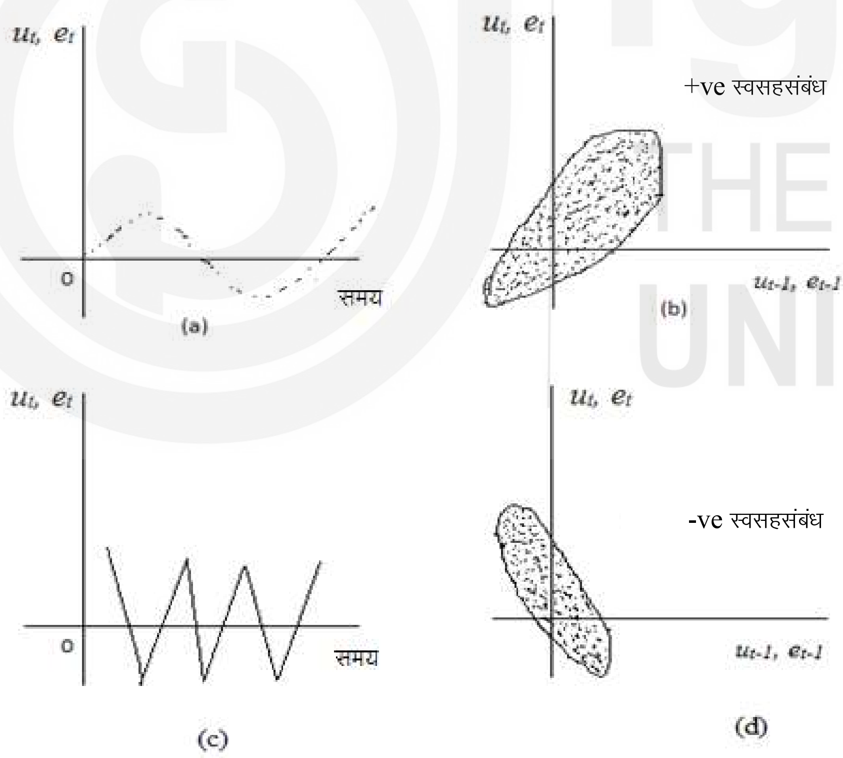
जब शून्य–स्वसहसंबंध की अवधारणा का उल्लंघन होता है तो प्रतिदर्श आँकड़ों के आधार पर समाश्रयण मॉडल के आकलक कुछ दुष्परिणामों से भी ग्रस्त हो सकते हैं। अधिक

विशिष्ट रूप से, साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक निम्नलिखित परिणामों से ग्रस्त पाए जाएँगे –

a) साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलक अब भी रैखिक और अनभिनत ही होंगे। दूसरे शब्दों में, प्राचलों के आकलित मान अनभिनत ही बने रहते हैं। बहरहाल, वे दक्ष नहीं होंगे क्योंकि उनके पास न्यूनतम विचरण नहीं होगा। अतएव, ये (OLS) आकलक सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक (BLUE) सिद्ध नहीं होते हैं।

b) साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलकों के आकलित विचरण (b_1 और b_2) अभिनत होते हैं। अतएव, विचरणों का आकलन करने के लिए प्रयोग किया जाने वाला सामान्य सूत्र, और उनकी मानक त्रुटियाँ वास्तविक विचरणों और मानक त्रुटियों को कम करके आँकते हैं। परिणामतः t–मानों के आधार पर किसी प्राचल को अस्वीकार करने का निर्णय, यह निष्कर्ष निकालना कि कोई भी विशिष्ट गुणांक शून्य से सांख्यिकीय रूप से भिन्न होता है, एक त्रुटिपूर्ण निष्कर्ष ही कहलाएगा। दूसरे शब्दों में, सामान्य t – और F–परीक्षण अविश्वसनीय हो जाते हैं।.

c) उपर्युक्त के प्रत्यक्ष परिणामस्वरूप समष्टि त्रुटि विचरण के आकलन हेतु सामान्य सूत्र, यथा $\hat{\sigma}^2 = (\mathrm{RSS/df})$ वास्तविक σ^2 का एक अभिनत आकलक प्रस्तुत करता है। विशेष रूप से, यह वास्तविक σ^2 कम करके ही आँकता है। इसके परिणामस्वरूप संगणित R^2 वास्तविक R^2 का एक अविश्वसनीय मापदंड बन जाता है।



चित्र 12.2: स्वसहसंबंध में त्रुटि पद के प्रतिमान

चित्र 12.2 स्वसहसंबंध की विभिन्न स्थितियों के तहत त्रुटि पदों के प्रतिमान को दर्शाता है। यहाँ ध्यान दें कि चूँकि समष्टि त्रुटि पद (u_t) ज्ञात नहीं हैं, हम प्रतिदर्श अवशिष्ट (e_t) को ही अंकित कर रहे हैं।

बोध प्रश्न 1

[दिए गए स्थान में प्रश्नों के उत्तर 50—100 शब्दों में दें।]

1) समाश्रयण मॉडल में स्वसहसंबंध का क्या अर्थ होता है? स्पष्ट करें।

....

....

....

....

2) किस प्रकार के आँकड़ों में स्वसहसंबंध की समस्या अपेक्षाकृत अधिक दिखाई पड़ती है? क्यों?

....

....

....

....

3) स्वसहसंबंध के प्रभावशाली कारण कौन—से होते हैं? बताइए।

....

....

....

....

4) स्वसहसंबंध के क्या परिणाम सामने आते हैं? एक—एक करके बताइए।

....

....

....

....

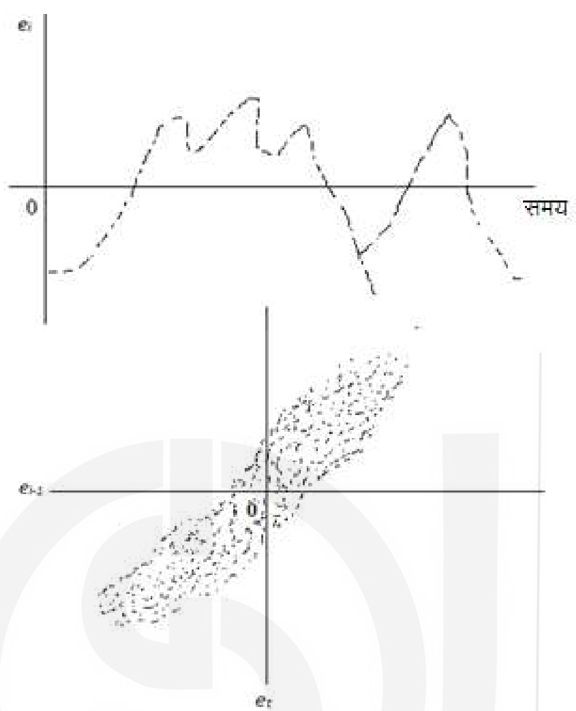
12.5 स्व—सहसंबंध का संसूचन

आँकड़ों में स्वसहसंबंध की विद्यमानता का पता लगाने के अनेक तरीके प्रचलन में हैं। आइए, इनमें से कुछ प्रमुख पर चर्चा करें —

12.5.1 आलेखीय विधि

साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) अवशिष्टों e_t की कोई दृश्य परीक्षा बहुधा त्रुटि पदों u_t के बीच स्वसहसंबंध की विद्यमानता दर्शाती है। इस तरह की चित्रमय प्रस्तुति (चित्र 12.3) को ही 'कालानुक्रम आलेख' के रूप में जाना जाता है। इस चित्र का प्रथम भाग त्रुटि पदों के

संचलन में कोई स्पष्ट प्रतिमान नहीं दर्शाता है। इसका अर्थ है कि यहाँ स्वसहसंबंध का अभाव है। परंतु चित्र के निचले भाग में आप देखेंगे कि दो अवशिष्ट पदों के बीच संबंध पहले नकारात्मक है और फिर वह सकारात्मक हो जाता है। अतएव, प्रतिदर्श अवशिष्टों का आलेखन करने से हमें स्वसहसंबंध की विद्यमानता अथवा अभाव विषयक पहला संकेत मिलता है।



चित्र 12.3: स्वसहसंबंध का संसूचन की आलेखीय विधि

12.5.2 डर्बिन–वॉटसन परीक्षण

डर्बिन–वॉटसन परीक्षण, या DW–परीक्षण, जैसा कि इसे लोकप्रिय रूप से कहा जाता है, स्वसहसंबंध की विद्यमानता का पता लगाने की एक विश्लेषणात्मक विधि है। इसका प्रतिदर्शज निम्नवत् दर्शाया जाता है –

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \qquad \text{... (12.3)}$$

समीकरण (12.3) सांख्यिकीविदों जेम्स डर्बिन और जेफ्री वॉटसन द्वारा सुझाए गए *d*–प्रतिदर्शज को आनुक्रमिक अवशिष्टों में वर्गित व्यवकलन के योगफल और वर्गों के अवशिष्ट योगफल के अनुपात के रूप में परिभाषित करता है। उक्त *d*–प्रतिदर्शज की संगणना के लिए हम प्रतिदर्श आमाप (*n*–1) लेते हैं क्योंकि आनुक्रमिक व्यवकलन लेने में एक प्रेक्षण खो जाता है। इस *d*–प्रतिदर्शज में अंतर्निहित कुछ अवधारणाएँ निम्नवत् हैं–

a) किसी भी समाश्रयण मॉडल में कोई अवरोधन पद शामिल होता है। इसीलिए इस पद्धति का प्रयोग अवरोधन पद (यथा, वह समाश्रयण समीकरण जो मूलबिंदु से होकर गुजरता है) रहित समाश्रयण मॉडलों में स्वसहसंबंध निर्धारित करने के लिए नहीं किया जा सकता है।

b) इसमें X चर गैर–प्रसंभाव्य होते हैं अर्थात् उनके मान दोहराए गए प्रतिदर्शों में तय किए जाते हैं।

c) इसमें त्रुटि पद निम्नानुसार विकसित होता है –

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t, \qquad -1 \le \rho \le 1 \qquad \dots (12.4)$$

समीकरण (12.4) दर्शाता है कि समयावधि t पर त्रुटि पद का मान समयावधि ($t-1$) में त्रुटि पद के मान और पूर्णतः यादृच्छिक पद v_t पर निर्भर है। पिछले मान पर निर्भरता की सीमा को p से मापा जाता है, जो कि –1 और 1 के बीच स्थित होता है।

समीकरण (12.4) में दिए गए समाश्रयण मॉडल को प्रथम–कोटि स्वसमाश्रयण योजना के रूप में संदर्भित किया जाता है। इसे AR(1) से इंगित किया जाता है। 'स्वसमाश्रयण' शब्द के प्रयोग का अर्थ होता है कि त्रुटि पद u_t का एक अवधि के अपने ही पश्चायित मान, यथा u_{t-1} समाश्रयण किया गया है। इसीलिए इसे प्रथम–कोटि स्वसमाश्रयण योजना कहा जाता है। यदि हम दो पश्चायित मान (यथा, u_{t-1} और u_{t-2}) शामिल करते हैं तो हमारे पास AR(2) योजना होती है। इसी प्रकार, जब हम पश्चायित मानों की संख्या को 'p' तक बढ़ाते हैं तो हमारे पास AR(p) स्कीम होती है।

d) समाश्रयण मॉडल में व्याख्यात्मक चरों में से एक के रूप में आश्रित चर का कोई पश्चायित मान नहीं होता है। दूसरे शब्दों में, उक्त परीक्षण निम्नलिखित प्रकार के मॉडलों पर लागू नहीं होता है–

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \qquad \dots (12.5)$$

जहाँ Y_{t-1} स्वतंत्र चर Y का एक–अवधि पश्चायित मान है। उपर्युक्त प्रकार के मॉडल को ही स्वसमाश्रयण (AR) मॉडल के रूप में जाना जाता है। ऐसे उदाहरणों के लिए d–प्रतिदर्शज का प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

समीकरण (12.4) से p का आकलन निम्नानुसार किया जा सकता है –

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

[स्मरण करें कि दो–चर समाश्रयण मॉडल में b_2 का आकलक $b_2 = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2}$ होता है। ऊपर $\hat{\rho}$ को अवकलित करने के लिए हम यही गणक तर्क प्रयोग करेंगे।]

अब हम समीकरण (12.3) का विस्तार कर नया समीकरण प्राप्त कर सकते हैं, यथा –

$$d = \frac{\sum e_t^2 + \sum e_{t-1}^2 - 2\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}$$

उपर्युक्त को निम्नवत् सन्निकटित किया जा सकता है –

$$d \approx 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}\right)$$

हम चर d का कोई सन्निकटित मान ले सकते हैं, यथा –

$$d \approx 2(1 - \hat{\rho}) \qquad \dots (12.6)$$

जहाँ संकेत–चिह्न 'सन्निकटतः' इंगित करता है।

समीकरण (12.6) में $\hat{\rho}$ प्रथम–कोटि स्वसहसंबंध योजना का ही एक आकलक है। नीचे दी गई तालिका 12.1 $\hat{\rho}$ के ही विभिन्न मानों के लिए d–प्रतिदर्शज का मान प्रस्तुत करती है।

उक्त तालिका (12.1) से हम पाते हैं कि $0 \leq d \leq 4$ है। तदनुसार, डर्बिन–वॉटसन प्रतिदर्शज एक निचली सीमा d_L और एक ऊपरी सीमा d_u प्रदान करता है। इसीलिए d का संगणित मान 0 और 4 के बीच का कोई मान होता है। इस प्रकार के किसी भी मान से स्वसहसंबंध की प्रकृति का अनुमान हम निम्नवत् लगा सकते हैं–

a) यदि d का मान 0 के सन्निकट है तो यह सकारात्मक स्वसहसंबंध होने का प्रमाण है।

b) यदि d का मान 2 के सन्निकट है तो यह शून्य स्वसहसंबंध होने का प्रमाण है।

c) यदि d का मान 4 के सन्निकट है तो यह नकारात्मक स्वसहसंबंध होने का प्रमाण है।

तालिका 12.1: $\hat{\rho}$ के अनुसार d–प्रतिदर्शज का मान

$\hat{\rho}$ का मान	निहितार्थ	d-प्रतिदर्शज का मान
$\hat{\rho} = -1$	पूर्ण नकारात्मक स्वसहसंबंध	4
$\hat{\rho} = 0$	शून्य स्वसहसंबंध	2
$\hat{\rho} = 1$	पूर्ण सकारात्मक स्वसहसंबंध	0

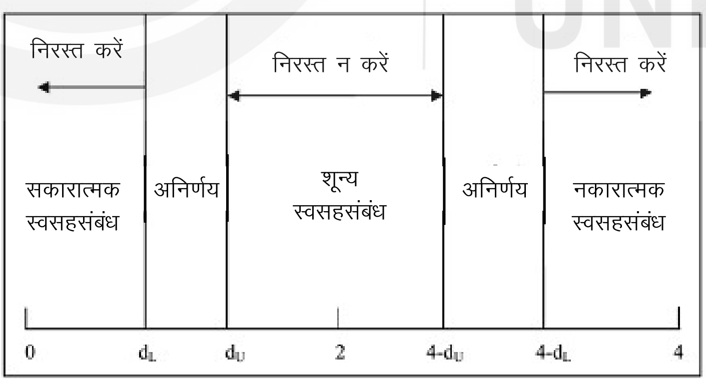
अतएव, उक्त DW–परीक्षण की प्रक्रिया में निम्नलिखित चरण आते हैं –

1. साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) समाश्रयण चलाएँ और अवशिष्ट e_t ज्ञात करें।
2. प्रतिदर्शज d का मान निम्नवत् संगणित करें –

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

3. दिए गए प्रतिदर्श आमाप और व्याख्यात्मक चरों की दी गई संख्या के लिए d_L और d_u के क्रांतिक तालिका मान ज्ञात करें।

चित्र 12.4 में दर्शाए गए अनुसार निर्णय नियम का पालन करें।



चित्र 12.4: डर्बिन–वॉटसन प्रतिदर्शज की मान शृंखला

उक्त d–परीक्षण का एक दोष यह है कि इसमें अनिर्णय के दो संस्तर होते हैं, यथा $d_L < d < d_U$ और $(4 - d_U < d < 4 - d_L)$।

12.5.3 ब्रुश–गॉडफ्रे परीक्षण

डर्बिन–वॉटसन के *d*–परीक्षण की कठिनाइयों से बचने के लिए अर्थमितिविद ट्रेवर ब्रुश और लेस्ली गॉडफ्रे ने स्वसहसंबंध के लिए एक परीक्षण मानदंड प्रतिपादित किया है, जो कि अपनी प्रकृति में सार्विक है। यह BG–परीक्षण इस अर्थ में सार्विक है कि–

a) यह गैर–प्रसंभाव्य समाश्रयियों के साथ–साथ Y_t के पश्चायित मानों को भी संभाल सकता है;

b) यह उच्चतर कोटि वाली स्वसहसंबंध योजनाओं, यथा । AR(2)... आदि से भी निपट सकता है।

c) यह सरल अथवा उच्चतर कोटि वाले गतिमान माध्य को भी संभाल सकता है।

उक्त BG–परीक्षण को LM (लैग्रेंज गुणक) परीक्षण (देखें इकाई 8) के रूप में भी जाना जाता है। इस परीक्षण को कैसे क्रियान्वित किया जाता है, यह देखने के लिए, आइए, एक दो–चर समाश्रयण मॉडल पर विचार करते हैं, यथा –

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad \text{... (12.7)}$$

जहाँ पद u_t किसी P^{th} कोटि की स्वसमाश्रयण योजना AR(P) का अनुसरण करता है –

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \ldots + \rho_\rho u_{t-p} + v_t \qquad \text{... (12.8)}$$

जहाँ v_t श्वेत रव (सफेद शोर) अथवा प्रसंभाव्य त्रुटि पद कहलाता है। अब हम निम्नलिखित समीकरण का परीक्षण करना चाहेंगे –

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \ldots \rho_p = 0 \qquad \text{... (12.9)}$$

यथा, यहाँ किसी भी कोटि का कोई स्वसहसंबंध नहीं है। अतः अब BG–परीक्षण में निम्नलिखित चरण शामिल होंगे –

a) साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) विधि से मॉडल $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ का आकलन करें और अवशिष्ट e_t ज्ञात करें।

b) उपर्युक्त चरण (a) में प्राप्त आकलित अवशिष्टों के *p*-पश्चायित मानों पर अवशिष्ट e_t का समाश्रयण करें, यथा $e_{(t-1)}$, $e_{(t-2)}$, ..., $e_{(t-p)}$ [समीकरण(12.8) की भाँति

c) उपर्युक्त चरण (b) में सहायक समाश्रयण (12.8) से R^2 ज्ञात करें।

d) अब बड़े प्रतिदर्शों के लिए ब्रुश–गॉडफ्रे परीक्षण आँकड़ों की गणना निम्नवत् की जाती है –

$$(n-p)R^2 \sim \chi_p^2 \qquad \text{... (12.10)}$$

इसे ही LM–परीक्षण कहा जाता है, क्योंकि इसका रूप इकाई 8 में दिए गए एक अन्य परीक्षण के समान ही है। उक्त BG–परीक्षण प्रतिदर्शज स्वतंत्रता की *p* डिग्री के साथ काई–वर्ग बंटन का अनुसरण करता है, जहाँ *p* सहायक समाश्रयण (समीकरण (12.8)) में समाश्रयियों की संख्या दर्शाता है।

हम BG–परीक्षण से निष्कर्ष निम्नवत् निकालते हैं–

i. यदि $(n-p)R^2 > \chi^2_{\text{क्रांतिक}}$ हो तो हम H_0 को अस्वीकार कर देते हैं और यह निष्कर्ष निकालते हैं कि यहाँ कम से कम एक p शून्य से सांख्यिकीय रूप से भिन्न है, यथा यहाँ स्वसहसंबंध विद्यमान है।

ii. यदि $(n-p)R^2 < \chi^2_{\text{क्रांतिक}}$ हो तो हम H_0 को अस्वीकार नहीं करते हैं और यह निष्कर्ष निकालते हैं कि यहाँ कोई स्वसहसंबंध विद्यमान नहीं है।

बोध प्रश्न 2

[दिए गए स्थान में प्रश्नों के उत्तर 50–100 शब्दों में दें।]

1) स्वसहसंबंध का पता लगाने की विधियों का वर्णन करें।

....

....

....

....

2) डर्बिन–वॉटसन परीक्षणमें व्यवहृत प्रतिदर्शज को निरूपित करें।

....

....

....

....

3) उन अवधारणाओं का वर्णन करें जिनके तहत डर्बिन–वॉटसन परीक्षण मान्य है।

....

....

....

....

4) डर्बिन–वॉटसन परीक्षण के सामान्य दोषों पर प्रकाश डालें।

....

....

....

....

5) स्वसहसंबंध के लिए ब्रुश–गॉडफ्रे परीक्षण को किस प्रकार डर्बिन–वॉटसन परीक्षण की तुलना में एक संशोधित रूप माना जा सकता है?

....

....

....

....

12.6 स्व–सहसंबंध हेतु उपचारात्मक उपाय

स्वसहसंबंध के लिए उपचारात्मक उपाय सुझाने के लिए हम निम्नलिखित समीकरण की भाँति किसी भी समाश्रयण मॉडल में त्रुटि पद u_t में अन्योन्याश्रय का स्वरूप मानकर चलते हैं –

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad \text{... (12.11)}$$

और यह भी कि त्रुटि पद AR (1) योजना का अनुसरण कर रहा है, यथा

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t \qquad -1 \leq \rho \leq 1 \qquad \text{... (12.12)}$$

जहाँ v_t को OLS अवधारणाओं का अनुसरण करने वाला माना जाता है। हम पहले उस उदाहरण पर विचार करते हैं जिसमें हमें ρ ज्ञात है। यहाँ मॉडल को एक विधि विशेष (जिसे कोक्रेन–ऑर्कट प्रक्रिया कहा जाता है) से बदल देने पर समीकरण एक OLS–संगत मॉडल का रूप ले लेता है। दूसरी ओर, जब ρ ज्ञात न हो तो हमें कुछ ऐसे सरल उपागमों की आवश्यकता पड़ती है जो हमें स्वसहसंबंध की स्थिति पर काबू पाने में मदद करते हैं। चलिए, अब इन उपागमों पर ही चर्चा करते हैं।

12.6.1 ज्ञात स्वसमाश्रयण योजना : कोक्रेन–ऑर्कट रूपांतरण

मान लीजिए कि हमें ρ का मान ज्ञात है। यह हमें समीकरण (12.11) में दिए गए समाश्रयण मॉडल को इस भाँति बदलने में मदद करेगा कि त्रुटि पद स्वसहसंबंध से मुक्त हो जाएगा। तदंतर हम रूपांतरित मॉडल पर ही OLS विधि लागू करेंगे। इसके लिए हम समीकरण (12.11) में किसी एक–अवधि के पश्चायन पर निम्नवत् विचार करेंगे –

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + u_{t-1} \qquad \text{... (12.13)}$$

समीकरण (12.13) को दोनों पक्षों ρ से गुणा करें। आपको नया समीकरण निम्नवत् प्राप्त होगा –

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_1 + \rho\beta_2 X_{t-1} + \rho u_{t-1} \qquad \text{... (12.14)}$$

अब हम समीकरण (12.14) को समीकरण (12.11) में से घटाएँ। आपको नया समीकरण निम्नवत् प्राप्त होगा –

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) + v_t \qquad \text{... (12.15)}$$

यहाँ ध्यान दें कि हमने उपर्युक्त नए बाधा पद के लिए v_t का प्रयोग किया है। आइए, अब इसको निरूपित करें–

$$Y_t^* = (Y_t - \rho Y_{t-1})$$

$$X_t^* = (X_t - \rho X_{t-1})$$

$$\beta_1^* = \beta_1(1-\rho)$$

नया रूपांतरित मॉडल निम्नवत् सामने आएगा –

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_t^* + v_t \qquad \text{... (12.16)}$$

अब रूपांतरित चर Yt^* और Xt^* एक वांछनीय BLUE गुणधर्म कहलाएगा। उक्त OLS विधि को समीकरण (12.16) पर प्रयोग करके प्राप्त आकलकों को सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग (GLS) आकलक कहा जाता है। ऊपर बताई गई रूप परिवर्तन की विधि को ही कोक्रेन–ऑर्कट रूपांतरण प्रक्रिया के रूप में जाना जाता है।

12.6.2 अज्ञात स्वसमाश्रयी योजना

मान लीजिए कि हमें ρ का मान ज्ञात नहीं है। तदनुसार हमें ρ आकलित करने की विधि की आवश्यकता है। हम सबसे पहले उस उदाहरण पर विचार करते हैं जिसमें $\rho = 1$ होता है। यह इस अवधारणा के समान ही होगा कि त्रुटि पद पूर्णतः सकारात्मक रूप से स्व–संशोधित होते हैं। इस उदाहरण को 'प्रथम व्यवकलन विधि' कहा जाता है। यदि यह अवधारणा सही सिद्ध होती है तो एक सामान्यीकृत व्यवकलन समीकरण पर विचार उक्त समीकरण (12.11) और उसकी प्रथम–कोटि स्वसमाश्रयण योजनाओं के बीच अंतर को लेकर निम्नानुसार किया जा सकता है–

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta_2(X_t - X_{t-1}) + v_t \qquad \text{... (12.17)}$$

यथा, $\Delta Y_t = \beta_2 \Delta X_t + v_t$ ... (12.18)

जहाँ संकेताक्षर Δ (जिसे 'डेल्टा' पढ़ा जाता है) प्रथम व्यवकलन संकारक कहलाता है। यहाँ ध्यान दें कि व्यवकलन मॉडल (समीकरण 12.17) में कोई अवरोधन विद्यमान नहीं है। यदि ρ का मान ज्ञात न हो तो निम्नलिखित दो विधियों द्वारा इसका आकलन किया जा सकता है।

(i) डर्बिन–वॉटसन विधि

उक्त समीकरण (12.6) से हम देखते हैं कि d–प्रतिदर्शज और ρ परस्पर संबद्ध हैं। हम इस संबंध का प्रयोग आकलन ρ का मान आकलित करने के लिए कर सकते हैं। उक्त d–प्रतिदर्शज और ρ निम्नानुसार संबद्ध हैं –

$$\rho \approx 1 - \frac{d}{2} \qquad \text{... (12.19)}$$

यदि चर d का मान ज्ञात हो तो d–प्रतिदर्शज से $\hat{\rho}$ का मान आकलित किया जा सकता है।

(ii) OLS अवशिष्ट (e_t) विधि

यहाँ हम समीकरण (12.12) में उल्लिखित प्रथम–कोटि स्वसमाश्रयण योजना, यथा $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$ पर विचार करते हैं। चूँकि पद u_t प्रत्यक्ष रूप से प्रेक्षणीय नहीं है, हम उसके प्रतिदर्श प्रतिस्थानी e_t का प्रयोग कर निम्नलिखित समाश्रयण चलाते हैं –

$$e_t = \hat{\rho} e_{t-1} + v_t \qquad \text{... (12.20)}$$

यह ध्यान देने की बात है कि चर $\hat{\rho}$ चर ρ का ही एक आकलक है। लघु प्रतिदर्शों में चर $\hat{\rho}$ चर ρ का एक अभिनत आकलक होता है। जैसे–जैसे प्रतिदर्श आमाप में वृद्धि होती है, यह अभिनति लुप्त होती जाती है।

12.6.3 पुनरावृत्तीय प्रक्रिया

इस प्रक्रिया को 'कोक्रेन–ऑर्कट पुनरावृति प्रक्रिया' भी कहा जाता है। जैसा कि पहले चर्चा की गई थी, हम स्वसहसंबंध के लिए दो–चर मॉडल पर विचार AR(1) योजना के साथ करते हैं।

यथा, हम $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ पर विचार करते हैं, जहाँ समीकरण $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$ शर्त $-1 \leq \rho \leq 1$ के साथ होता है।

हमने सरलता के लिए केवल एक ही व्याख्यात्मक चर लिया है, परंतु हमारे पास एक से अधिक व्याख्यात्मक चर भी हो सकते हैं। अर्थमितिविद डोनाल्ड कोक्रेन और गाइ ऑर्कट द्वारा सुझाई गई इस पुनरावृति प्रक्रिया में निम्नलिखित चरण आते हैं–

(i) सामान्य OLS विधि से समीकरण $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$ का आकलन करें।

(ii) उपर्युक्त से अवशिष्ट e_t ज्ञात करें।

(iii) अवशिष्ट e_t का प्रयोग कर समाश्रयण $e_t = \hat{\rho}\, e_{t-1} + v_t$ लाएँ और $\hat{\rho}$ ज्ञात करें।

(iv) ऊपर (iii) से प्राप्त $\hat{\rho}$ का प्रयोग समीकरण $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$ को गुणा करने के लिए करें।

(v) अब सामान्यीकृत व्यवकलन समीकरण निम्नवत् प्राप्त करें–

$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_t^* + e_t$

जहाँ, $Y_t^* = Y_t - Y_{t-1}, X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$ और

$\beta_1^* = \beta_1(1 - \hat{\rho})$

(vi) यह निश्चित नहीं है कि उपर्युक्त (iii) में आकलित $\hat{\rho}$ ही चर ρ का सर्वोत्तम आकलक है। अतएव, हम नए अवशिष्ट e_t^* प्राप्त करने के लिए चरण (ii) और (iii) एक बार फिर दोहराते हैं।

(vii) अब समाश्रयण $e_t^* = \hat{\rho} e_{t-1}^* + w_t$ चलाएँ और चर $\hat{\rho}$ का नया आकल ज्ञात करें।

इस प्रकार हम चर ρ का द्वितीय–चक्र आकल ज्ञात करते हैं। चूँकि यह निश्चित नहीं है कि चर ρ का द्वितीय–चक्र आकल ही सर्वोत्तम आकल है, तृतीय–चक्र आकल ज्ञात करेंगे और इसी प्रकार आगे भी। हम वही चरण बार–बार दोहराते हैं। दोहराए जाने वाले इन चरणों के कारण ही कोक्रेन–ऑर्कट द्वारा सुझाई गई इस प्रक्रिया को 'पुनरावृत्ति प्रक्रिया' कहा जाता है। हम पुनरावृत्ति को तभी रोकते हैं जब चर ρ के अनुवर्ती आकल किसी छोटी–सी राशि (0.01 अथवा 0.005 से भी कम) की ही भिन्नता दर्शाते हों।

12.7 पश्चायन वाले मॉडलों में स्वसहसंबंध

डर्बिन–वॉटसन विधि तब व्यवहार्य नहीं होती है जब समाश्रयण मॉडल में आश्रित चर का पश्चायित मान (lagged value) एक व्याख्यात्मक चर के रूप में शामिल हो। ऐसे मॉडलों में डर्बिन द्वारा सुझाए गए *h*–प्रतिदर्शज का प्रयोग समाश्रयण मॉडल में स्वसहसंबंध की विद्यमानता की ज्ञात करने के लिए किया जाता है। आइए, नीचे दिए गए समाश्रयण मॉडल पर विचार करें–

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + v_t \qquad \text{... (12.21)}$$

समीकरण (12.21) में हमारे पास दो व्याख्यात्मक चर हैं, यथा X_t और Y_{t-1}, जहाँ साथ में एक पश्चायित आश्रित चर के रूप में Y_{t-1} (एक–अवधि पश्चायन के साथ) भी है। समीकरण (12.21) के लिए *d*–प्रतिदर्शज स्वसहसंबंध का पता लगाने के लिए व्यवहार्य नहीं है। ऐसे मॉडलों के लिए डर्बिन ने *d*–प्रतिदर्शज को *h*–प्रतिदर्शज द्वारा प्रतिस्थापित करने का सुझाव दिया है, यथा –

$$h \approx \hat{\rho} = \sqrt{\frac{n}{1-n\,Var(b_3)}} \qquad \dots (12.22)$$

जहाँ, n = प्रतिदर्श आमाप, $\hat{\rho}$ = स्वसहसंबंध गुणांक का आकलक, तथा $var(b_3)$ = समीकरण (12.21) में पश्चायित आश्रित चर β_3 के आकलक का विचरण।

यहाँ शून्य–स्तरीय परिकल्पना $H_0: \rho = 0$ है। डर्बिन ने दर्शाया है कि वृहद प्रतिदर्शों के लिए h–प्रतिदर्शज का $h \sim N(0,1)$ के रूप में किया जाता है। सामान्य बंटन के लिए हम जानते हैं कि क्रांतिकमान सार्थकता के 5 प्रतिशत स्तर पर 1.96 है और सार्थकता के 1 प्रतिशत स्तर पर 2.58 होता है। इसी जानकारी का प्रयोग कर हम समीकरण (12.22) से निम्नानुसार निष्कर्ष निकाल सकते हैं –

i) यदि h का परिकलित मान h के क्रांतिक मान से अधिक हो तो हम H_0 को अस्वीकार कर देते हैं। इस परिणाम की व्याख्या बिना किसी स्वसहसंबंध की विद्यमानता के रूप में की जाती है।

ii) यदि h का परिकलित मान h के क्रांतिक मान से कम हो तो हम H_0 को अस्वीकार नहीं करते हैं। इस परिणाम की व्याख्या स्वसहसंबंध की विद्यमानता के रूप में की जाती है।

बोध प्रश्न 3

[दिए गए स्थान में प्रश्नों के उत्तर 50–100 शब्दों में दें।]

1) स्वसहसंबंध की समस्या को हल करने के लिए कोक्रेन–ऑर्कट द्वारा सुझाई गई परिवर्तन प्रक्रिया की रूपरेखा तैयार करें।

....

....

....

....

2) किसी आँकड़ा समूह में स्वसहसंबंध के उदाहरण में कोक्रेन–ऑर्कट की पुनरावृति प्रक्रिया को कैसे प्रयोग किया जाता है? वर्णन करें। इसे पुनरावृत्ति प्रक्रिया क्यों कहा जाता है?

....

....

....

....

3) किसी स्वसहसंबंध समस्या वाले समाश्रयण मॉडल मे h–प्रतिदर्शज प्रयोग करने का क्या लाभ होता है?

....

....

....

....

12.8 सार–संक्षेप

इस इकाई में समाश्रयण मॉडलों में स्वसहसंबंध की अवधारणा पर चर्चा की गई है। इसमें स्वसहसंबंध की विद्यमानता के परिणाम, उसकी पहचान और ऐसी स्थितियों के लिए उपचारात्मक उपाय प्रदान करने वाली तकनीकों को विस्तार से समझाया गया है।

यह इकाई पश्चायित आश्रित चरों वाले समाश्रयण मॉडलों में स्वसहसंबंध के उदाहरण पर भी विस्तृत चर्चा प्रस्तुत करती है।

12.9 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

बोध प्रश्न 1

1) स्वसहसंबंध किन्हीं भी दो प्रेक्षणों के त्रुटि पदों के बीच सहसंबंध की विद्यमानता को इंगित करता है। इसका अर्थ है कि यदि ये दो त्रुटि पद U_i और U_j हों तो *Corr (Ui, Uj) ≠ 0* होगा, जहाँ $i \neq j$ होगा। पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल (CLRM) में हमारी एक अवधारणा यह भी है कि *Corr (Ui, Uj) = 0* होता है। इसका अर्थ है कि दो त्रुटि पद सहसंबद्ध नहीं होते हैं। इस अवधारणा का उल्लंघ नही स्वसहसंबंध की स्थिति होती है।

2) काल–श्रेणी आँकड़ों में स्वसहसंबंध की समस्या अपेक्षाकृत अधिक देखी जाती है। ऐसा इसलिए है कि किसी एक समय–बिंदु पर त्रुटि पद को प्रभावित करने वाली दृश्यघटना अगले समय–बिंदु पर त्रुटि पद को प्रभावित करने की अधिक संभावना रखती है। इसे विशेष रूप से 'जड़ता या निष्क्रियता' के कारक के रूप में पहचाना जाता है। प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों की इकाइयों में इसकी अपेक्षाकृत संभावना कम होती है। बहरहाल, प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में भी इसकी विद्यमानता से इंकार नहीं किया जा सकता है। ऐसे उदाहरणों में प्रतिनिध्यात्मक आँकड़ों में स्थानिक प्रभाव के कारण, जो कि एक प्रदर्शन प्रभाव की तरह होता है, इसे विशिष्ट रूप से स्थानिक सहसंबंध कहा जाता है।

3) जड़ता या निष्क्रियता, मॉडल में विनिर्देशन त्रुटियाँ, मकड़जाल संवृति और आँकड़ा समकरण।

4) ये परिणाम निम्नवत् होते हैं – (i) न्यूनतम वर्ग आकलक दक्ष नहीं होते; (ii) OLS आकलकों के आकलित विचरण अभिनत होते हैं; (iii) वास्तविक विचरणों की मानक त्रुटि को कम करके आँका जाता है; (iv) किसी विशिष्ट आकलित गुणांक की 'शून्य सांख्यिकीय सार्थकता' संबंधी परिकल्पना पर निर्णय लेते समय इसमें त्रुटि होने की अधिक संभावना होती हैं, यथा अर्थात् t–परीक्षण और F–परीक्षण पर आधारित निर्णय अविश्वसनीय होंगे; (v) आकलित त्रुटि विचरण अभिनत होगा; तथा (vi) R^2 का मान भ्रामक अथवा अविश्वसनीय होगा।

बोध प्रश्न 2

1) कालानुक्रम आलेख (आरेखीय विधि), डर्बिन–वॉटसन परीक्षण और ब्रुश–गॉडफ्रे (BG) परीक्षण।

2) $d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$ यह आनुक्रमिक अवशिष्टों में वर्गित व्यवकलन के योगफल और वर्गों के अवशिष्ट योगफल का अनुपात होता है।

3) समाश्रयण मॉडल में एक अवरोधन पद शामिल होता है, सभी X चर गैर–प्रसंभाव्य होते हैं, त्रुटि पद निम्नलिखित कार्यविधि $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$, $-1 \leq \rho \leq 1$, का अनुसरण करता है, और समाश्रयण में व्याख्यात्मक चर के रूप में आश्रित चर का कोई भी पश्चायितमान नहीं होता है।

4) डर्बिन–वॉटसन के d–परीक्षण का एक दोष यह है कि इसमें अनिर्णय के दो संस्तर होते हैं, यथा $d_L < d < d$ और $(4 - d_U < d < 4 - d_L)$.

5) (i) यह गैर–प्रसंभाव्य समाश्रयियों के साथ–साथ Y_t के पश्चायित मानों को भी संभाल सकता है; (ii) यह उच्च–कोटि स्वसमाश्रयण योजनाओं, जैसे AR(2)..., आदि से निपट सकता है; और (iii) यह सरल अथवा उच्चतर कोटि वाले गतिमान माध्य को भी संभाल सकता है।

बोध प्रश्न 3

1) इस विधि में हम समाश्रयण समीकरण को एक अवधि पश्चायित बना देते हैं; इसे चर ρ से गुणा करें; और इसे मूल समाश्रयण समीकरण से घटाएँ। इससे हमें एक रूपांतरित समाश्रयण मॉडल प्राप्त होता है। जब इसे OLS विधि द्वारा आकलित किया जाता है तो रूपांतरित मॉडल के आकलक BLUE होते हैं।

2) पाठांश 12.6.3 में हमने पास कोक्रेन–ऑर्कट पुनरावृत्ति प्रक्रिया के चरणों की रूपरेखा प्रस्तुत की है। इसे ध्यानपूर्वक पढ़ें और उत्तर दें।

3) इस h–प्रतिदर्शज का प्रयोग व्याख्यात्मक चर के रूप में पश्चायित आश्रित चर की विद्यमानता वाले समाश्रयण मॉडलों में किया जा सकता है।