इकाई 13 मॉडल चयन मापदंड*

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य होंगे कि–

- किसी अर्थमितीय मॉडल के सही विनिर्देशन का महत्व समझ सकें;
- अर्थमितीय मॉडलों के विनिर्देशन में महत्वपूर्ण मुद्दों की पहचान कर सकें;
- किसी अप्रासंगिक चर को शामिल करने के परिणामों का पता लगा सकें;
- किसी प्रासंगिक चर को शामिल न करने के परिणामों का पता लगा सकें; तथा
- आश्रित और स्वतंत्र चरों में मापन की त्रुटियों के प्रभाव का पता लगा सकें।

13.0 विषय–प्रवेश

इस पाठ्यक्रम की पिछली इकाइयों में हमने विभिन्न अर्थमितीय उपकरणों के बारे में चर्चा की है। हमने पारम्परिक दो–चर समाश्रयण मॉडल के साथ शुरुआत की। बाद में हमने इसे पारम्परिक बहु समाश्रयण मॉडल में विस्तारित किया। फिर साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) पद्धति को पूरा करने के चरणों पर विस्तार से चर्चा की गई।

आपको याद ही होगा कि पारम्परिक समाश्रयण मॉडल कुछ अवधारणाओं पर आधारित है। जब इन अवधारणाओं का पालन किया जाता है तो उक्त वर्ग (OLS) के आकलक सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक (BLUE) सिद्ध होते हैं। जब इन अवधारणाओं का उल्लंघन किया जाता है तो ये आकलक (OLS) सर्वोत्तम रैखिक और अनभिनत नहीं रहते – वे अपने

---

* डॉ॰ सहबा फातिमा, स्वतंत्र शोधकर्ता, लखनऊ।

कुछ वांछनीय गुणों को खो देते हैं। अतः जब किन्हीं पारंपरिक अवधारणाओं का पालन नहीं किया जाता है तो हमें कोई अन्य आकलन पद्धति अपनानी पड़ती है।

अब तक हमारा उद्देश्य यह समझाना रहा है कि विभिन्न आकलन विधियों को कैसे लागू किया जाता है। आइए, अब हम अर्थमितीय मॉडलों के विनिर्देशन से संबंधित कुछ अन्य महत्वपूर्ण मुद्दों पर विचार करते हैं।

13.2 अर्थमितीय मॉडल के विनिर्देशन में मुद्दे

कोई भी मॉडल वास्तविकता के किसी न किसी सरलीकृत संस्करण को इंगित करता है। यह सरलीकृत रूप हमें आर्थिक व्यवहार की व्याख्या करने, विश्लेषण करने और पूर्वानुमान व्यक्त करने में मदद करता है। एक आर्थिक मॉडल किसी परिवार अथवा फर्म जैसे किसी व्यष्टि–अर्थशास्त्रीय अभिकर्ता के लिए हो सकता है। दूसरी ओर, समष्टि अर्थशास्त्र में यह समग्र अर्थव्यवस्था के व्यवहार का प्रतिनिधित्व करता है।

किसी भी आर्थिक मॉडल में हम प्रासंगिक आर्थिक चरों (जैसे आय, उत्पादन, व्यय, निवेश, बचत, निर्यात, आदि) की पहचान करते हैं और उनके बीच संबंध स्थापित करते हैं। इन चरों के बीच संबंधों को आरेखों अथवा गणितीय समीकरणों के माध्यम से व्यक्त किया जा सकता है। हालाँकि गणितीय निष्पीड़न के बिना भी आर्थिक मॉडल हो सकते हैं, परंतु ऐसे मॉडल संभवतः सटीक न हों।

इस पाठ्यक्रम की इकाई 1 से आपको याद ही होगा कि किसी भी अर्थमितीय अध्ययन में हमें आठ चरणों का पालन करना होता है। इनमें पहले तीन चरण इस प्रकार हैं –

1. सिद्धांत अथवा परिकल्पना की कोई समुक्ति तैयार करना;
2. उक्त सिद्धांत के गणितीय मॉडल की विस्तारपूर्वक व्याख्या करना; तथा
3. अर्थमितीय मॉडल की विस्तारपूर्वक व्याख्या करना।

किसी सिद्धांत अथवा तर्क के आधार पर ही किसी परिकल्पना की रचना करते हैं। इस परिकल्पना को फिर हम गणितीय पदों में निर्दिष्ट करते हैं। इसके अलावा, हम इसे किसी अर्थमितीय मॉडल में बदलने के लिए इसमें कोई प्रसंभाव्य त्रुटि पद (u_i) जोड़ देते हैं। इसके बाद हम अपनी आकलन विधि (जैसे OLS, GLS, अधिकतम संभावना, आदि) पर निर्णय लेते हैं।

13.2.1 मॉडल का विनिर्देशन

किसी भी अर्थमितीय मॉडल की रचना करते समय हम सबसे पहले अपने मॉडल के पीछे के तर्क अथवा सिद्धांत पर विचार करते हैं। तदोपरांत ही हम अपने अनुभवजन्य अथवा सुव्यवस्थित सरोकारों पर विचार करते हैं। आकलित प्राचलों की सटीकता और किसी मॉडल से निकाले गए निष्कर्ष उस मॉडल के सही विनिर्देशन पर ही निर्भर करते हैं।

किसी भी अर्थमितीय मॉडल में कोई आश्रित चर, एक या एक से अधिक स्वतंत्र चर और त्रुटि पद शामिल होते हैं। किसी भी आश्रित चर को स्वतंत्र चरों द्वारा तार्किक रूप से समझाया जाना चाहिए।

आगे हम समाश्रयण मॉडल के फलनिक रूप पर विचार करेंगे, जिसे सही ढंग से निर्दिष्ट किया जाना चाहिए। चलिए, इस बात को एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं।

किसी भी फर्म के मामले में हम यह मानकर चलते हैं कि उत्पादन के दो उपादान होते हैं, यथा– पूँजी और श्रम। सभी प्रकार के श्रम को हम एक ही सजातीय श्रेणी में जोड़कर देखते हैं– कार्यक्षेत्र में हम किसी प्रबंधक और किसी कार्यकर्ता के बीच अंतर नहीं करते

हैं। तदनुसार, आपको याद रखना चाहिए कि किसी भी मॉडल में हम विवरणों की उपेक्षा करते हैं और प्रमुख मुद्दों पर ही ध्यान केंद्रित करते हैं।

दूसरे, हम मानते हैं कि उत्पादन फलन एक विशेष रूप ले लेता है, माना कॉब–डगलस उत्पादन फलन। फिर भी याद रखें कि यह एक अवधारणा मात्र है! वास्तव में उत्पादन फलन कोई अन्य रूप भी ले सकता है। अतः हमें मॉडल के फलनिक रूप (समाश्रयण समीकरण) की तार्किक व्याख्या करनी होगी।

समाश्रयण विश्लेषण इस अवधारणा से ही अपनी दृढ़ता अर्जित करता है कि अध्ययन के अंतर्गत अर्थमितीय मॉडल सही ढंग से निर्दिष्ट होता है। इस पाठ्यक्रम की इकाई 4 में हमने सभी आकलन इस प्रकार निर्दिष्ट किए कि अर्थमितीय मॉडल उस मॉडल में प्राचलों का दक्ष आकलन ही प्रस्तुत करे। साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) विधि इस अवधारणा पर आधारित है कि समाश्रयण मॉडल सही ढंग से निर्दिष्ट होता है। सही विनिर्देशन में तीन महत्वपूर्ण तत्व होते हैं, यथा –

(i) मॉडल में सभी आवश्यक स्वतंत्र चर शामिल होते हैं,

(ii) मॉडल में कोई अनावश्यक चर शामिल नहीं होता, और

(iii) मॉडल को सही फलनिक रूप का उपयोग करके ही निर्दिष्ट किया जाता है।

13.2.2 मूल अवधारणाओं का उल्लंघन

कोई भी आर्थिक मॉडल कुछ अवधारणाओं पर आधारित होता है। याद करें कि हमने बहु समाश्रयण मॉडल के संबंध में निम्नलिखित अवधारणाएँ (देखें इकाई 7) प्रस्तुत की थीं –

a) समाश्रयण मॉडल प्राचलों में रेखीय होता है।

b) $E(X_i u_i) = 0$ (समाश्रयी गैर–प्रसंभाव्य होता है)

c) $E(u_i) = 0$

d) $E(u_i)^2 = \sigma^2$

e) $E(u_i u_j) = 0$ क्योंकि $i \neq j$

f) व्याख्यात्मक चर (X_i) एक दूसरे से स्वतंत्र होते हैं।

आइए, अब एक–एक करके उपर्युक्त अवधारणाओं के निहितार्थ समझते हैं–

अवधारणा (a) के अनुसार, समाश्रयण मॉडल प्राचलों में रैखिक होता है। मानक समाश्रयण मॉडल आमतौर पर निम्नलिखित रूप लेता है –

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \qquad \text{... (13.1)}$$

समीकरण (13.1) प्राचलों में रैखिक है (उदाहरण के लिए, यहाँ β_i^2 की भाँति कोई पद नहीं है) और यह चरों में भी रैखिक ही है। गैर–रेखीय समाश्रयण मॉडल के उदाहरण हैं– लघुगणकीय फलन, तार्किक फलन, त्रिकोणमितीय फलन, घातीय फलन आदि। गैर–रैखिक मॉडलों के आकलन के लिए OLS विधि प्रयोग नहीं की जा सकती है।

अवधारणा (b) के अनुसार,चर X_i और u_i स्वतंत्र होता हैं। तदनुसार, यदि हम X_i मानों को यादृच्छिक रूप से लेते हैं तो X_i और u_i दोनों की संयुक्त प्रायिकता शून्य नहीं होगी। इस समस्या से बचने के लिए हम यह मानकर चलते हैं कि X_i गैर–प्रसंभाव्य होता है। सभी व्याख्यात्मक चर पुनरावृत्त प्रतिदर्शन में तय किए जाते हैं।

अवधारणा (c) के अनुसार, त्रुटि पद (u_i) का माध्य शून्य होता है। व्यक्तिगत प्रेक्षणों में त्रुटियाँ हो सकती हैं; कुल मिलाकर ये त्रुटियाँ निरस्त हो ही जाती हैं। यदि $E(u_i) \neq 0$ हो तो OLS अवरोधन पद (β_1) का OLS आकलक अभिनत ही होगा। यहाँ समाश्रयी प्राचलों के आकलक β_2 और β_3 अनभिनत मान निम्नवत् होगा –

$$E(Y_i) = E(\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i)$$

याद रखें कि β_i मॉडल के प्राचल होते हैं। ये स्थिरांक होते हैं। अपने सभी प्रतिदर्शों में हम X_i को निर्धारित मानकर चल रहे हैं। तदनुसार,

$$E(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + E(u_i) \qquad \text{... (13.2)}$$

यदि $E(u_i) = 3$, हो तो हम कह सकते हैं कि

$$E(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + 3$$

अतः अवरोधन पद $(\beta_1 + 3)$ होगा।

शेष तीन अवधारणाओं के संदर्भ में याद रखें कि –

- यदि अवधारणा (d) का उल्लंघन किया जाता हैतो हमें विषमविसारिता की समस्या का सामना करना पड़ता है, जिस पर विस्तृत चर्चा इकाई 11 में की गई है।
- यदि अवधारणा (e) का उल्लंघन किया जाता है तो हमारे समक्ष स्वसहसंबंध की समस्या उत्पन्न होती है, जिस पर विस्तृत चर्चा हमने इकाई 12 में की है।
- यदि अवधारणा (f) का उल्लंघन किया जाता है तो हमें बहुसंरेखता की समस्या का सामना करना पड़ता है, जिस पर विस्तृत चर्चा इकाई 10 में की गई है।

बोध प्रश्न 1

1) पारंपरिक समाश्रयण मॉडल की सभी अवधारणाओं को सूचीबद्ध करें।

....

....

....

....

....

2) क्या आप इस बात सहमत हैं कि अर्थमितीय मॉडल का सही विनिर्देशन महत्वपूर्ण है? क्यों?

....

....

....

....

....

3) पारंपरिक समाश्रयण मॉडल की मूल अवधारणाओं के उल्लंघन के क्या निहितार्थ होते हैं? स्पष्ट करें।

....

....

....

....

....

4) किसी अर्थमितीय मॉडल में ऐसी तीन प्रकार की विनिर्देश त्रुटियों को सूचीबद्ध करें जिनका हमें प्रायः सामना करना पड़ता है।

....

....

....

....

....

13.3 विनिर्देशन में त्रुटियों के परिणाम

जैसा कि ऊपर बताया गया है, किसी भी अर्थमितीय मॉडल में हम आमतौर पर तीन प्रकार की समस्याओं का सामना करते हैं, यथा –

1) अप्रासंगिक/अनावश्यक चरों का समावेश

2) मॉडल में प्रासंगिक चरों का छूट जाना

3) मॉडल का त्रुटिपूर्ण फलनिक रूप

उपर्युक्त प्रत्येक समस्या का परिणाम किसी भिन्न प्रकार की अभिनत त्रुटि में दिखाई देता है। चलिए, अब इनमें से प्रत्येक समस्या पर कुछ विस्तार से चर्चा करते हैं।

13.3.1 अप्रासंगिक चरों का समावेश

आइए, उस स्थिति पर विचार करें जहाँ हमारे समाश्रयण मॉडल में कुछ अप्रासंगिक चर शामिल हो गए हैं। मान लीजिए कि वास्तविक मॉडल निम्नवत् है–

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + u_i \quad \text{... (13.3)}$$

परंतु इसमें किसी प्रकार एक अनावश्यक चर शामिल कर लिया गया है, यथा हम निम्नलिखित समीकरण का आकलन करते हैं –

$$Y_i = \beta_{0s} + \beta_{1s} X_{1i} + \beta_{2s} X_{2i} + v_i \quad \text{... (13.4)}$$

अपने वास्तविक मॉडल (13.3) के लिए समाश्रयण गुणांक को निम्नवत् व्यक्त किया जाता है –

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum y x_1}{\sum x_1^2} \quad \text{... (13.5)}$$

जो कि अनभिनत है।

उक्त मॉडल (13.4) जो हमने लिया है, के लिए हमें प्राप्त होता है–

$$\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_{1s} = \frac{(\sum yx_1)(\sum x_2^2) - (\sum yx_2)(\sum x_1x_2)}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2} \quad \text{... (13.6)}$$

अब विचलन रूप में वास्तविक मॉडल निम्नवत् होगा –

$$y_i = \beta_1 x_1 + (u_i - \bar{u}) \quad \text{... (13.7)}$$

समीकरण (13.7) से y_i का मान लेकर और उसे समीकरण (13.6) में प्रतिस्थापित कर हल करने पर हमें प्राप्त होता है –

$$E(\tilde{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_{1s}) = \beta_1 \frac{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2} \quad \text{... (13.8)}$$

समीकरण (13.8) से हमें ज्ञात होता है कि

$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$

इस प्रकार, अप्रासंगिक चर का समावेश हमें पद β_1 का एक अनभिनत आकलक प्रदान करता है। अनावश्यक चर $\hat{\beta}_{2s}$ का आकलक निम्नवत् दर्शाया जाता है –

$$\hat{\beta}_{2s} = \frac{(\sum yx_2)(\sum x_1^2) - (\sum yx_1)(\sum x_1x_2)}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2} \quad \text{... (13.9)}$$

यदि समीकरण (13.7) से y_i का मान लेकर हम समीकरण (13.9) में प्रतिस्थापित कर दें और फिर पदों को पुनर्व्यवस्थित कर दें तो हमें प्राप्त होगा –

$$E(\tilde{\beta}_2) = E(\hat{\beta}_{2s}) = \beta_2 \frac{(\sum x_1x_2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1x_2)(\sum x_1^2)}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2} \quad \text{... (13.10)}$$

तदनुसार, $E(\tilde{\beta}_2) = E(\hat{\beta}_{2s}) = 0$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि पद $\hat{\beta}_{2s}$ जो वास्तविक मॉडल से गायब है, अपना गुणांक 0 दर्शाता है। तदनुसार, हमें दोनों ही प्राचलों के लिए अनभिनत आकलक प्राप्त होते हैं।

यह हमें इस निष्कर्ष पर ले जाता है कि अप्रासंगिक चरों को शामिल करना उतना हानिकारक नहीं होता जितना कि प्रासंगिक चरों को छोड़ देना। जब इस मॉडल में कोई अतिरिक्त चर जोड़ा जाता है तो हम देखते हैं कि R-वर्गित में वृद्धि हुई है। बहरहाल, इन प्राचलों का विचरण दक्ष नहीं होगा। अतएव, उक्त मॉडल में अप्रासंगिक चरों के समावेशन की प्रकृति में विनिर्देशन त्रुटि इन प्राचलों के अनभिनत परंतु अदक्ष न्यूनतम वर्ग आकलकों को जन्म देगी।

अधिक बड़ा विचरण आकलनों की सटीकता को कम करता है, जिसके फलस्वरूप व्यापक विश्वास्यता अंतराल दिखाई देने लगते हैं। इससे टाइप-II प्रकार की त्रुटि हो सकती है, यथा वैकल्पिक परिकल्पना के वस्तुतः सत्य होने पर भी किसी शून्य–स्तरीय परिकल्पना को निरस्त न किए जाने की गलती।

13.3.2 प्रासंगिक चरों का छूट जाना

चलिए, अब हम मानावली के दूसरे पक्ष पर गौर करते हैं – किसी प्रासंगिक चर को छोड़ देना। चूँकि कि हमारे मॉडल में कोई प्रासंगिक चर शामिल नहीं है (हालाँकि यह आश्रित चर को प्रभावित करता है), इसके प्रभाव को अवशिष्ट में शामिल किया जाएगा। परिणामतः यह शेष गॉस–मार्कोव प्रमेय द्वारा अपेक्षित श्वेत रव (सफेद शोर) सिद्ध होने के बजाय एक सुव्यवस्थित प्रतिमान दर्शाएगा। साथ ही, समाविष्ट चर का गुणांक अभिनत प्राप्त होगा।

माना कि वास्तविक समीकरण (विचलन रूप में) निम्नवत् है –

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad \text{... (13.11)}$$

समीकरण (13.11) का आकलन करने की बजाय मान लीजिए कि हम पद x_2 को मिटा देते हैं या छोड़ देते हैं। अब इस समीकरण का आकलन किया जाएगा–

$$y = \beta_1^* x_1 + e \qquad \text{... (13.12)}$$

समीकरण (13.12) छोड़ दिए गए चर का उदाहरण प्रस्तुत करता है, और इस कारण यह त्रुटिपूर्ण मॉडल विनिर्देशन कहलाएगा। इस छोड़ दिए गए चर वाले मॉडल (त्रुटिपूर्ण मॉडल) मे β_1^* का आकलन निम्नवत् होगा –

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{\sum x_1 y}{\sum x_1^2} \qquad \text{... (13.13)}$$

सही मॉडल (समीकरण (13.11)) की तुलना में त्रुटिपूर्ण मॉडल (समीकरण (13.12)) के आकलित मान β_1 में अभिनति की गणना करने के लिए हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं–

समीकरण (13.11) में वास्तविक मॉडल से y के निष्पीड़न को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह समीकरण प्राप्त होता है –

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{\sum x_1(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u)}{\sum x_1^2} = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum x_1 x_2}{\sum x_1^2} + \frac{\sum x_1 u}{\sum x_1^2} \qquad \text{... (13.14)}$$

चूँकि $E(\sum x_1 u) = 0$ होता है, हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा–

$$E(\hat{\beta}_1^*) = \beta_1 + b_{21}\beta_2 \qquad \text{... (13.15)}$$

जहाँ $b_{21} = \frac{\sum x_1 x_2}{\sum x_1^2}$ ही चर x_1 पर x_2 (छोड़ दिया गया चर) के किसी समाश्रयण से प्राप्त 'समाश्रयण गुणांक' कहलाएगा।

तदनुसार, पद $\hat{\beta}_1^*$ पद β_1 के लिए एक अनभिनत आकलक होगा और यह अभिनति निम्नवत् दर्शायी जाएगी–

अभिनति = (बहिष्कृत चर का गुणांक) **×** (समाविष्ट चर पर बहिष्कृत चर में समाश्रयण से प्राप्त समाश्रयण गुणांक) ... (13.16)

अपने विचलन रूप में यह तीन–चर समष्टि समाश्रयण मॉडल निम्नवत् लिखा जा सकता है–

$$y_i = \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + (u_i - \bar{u}) \qquad \text{... (13.17)}$$

उपर्युक्त को पहले चर x_2 से और फिर चर x_2 से बारी–बारी गुणा करके हमें सामान्य समीकरण निम्नवत् प्राप्त होंगे –

$$\sum y_i x_{2i} = \beta_2 \sum x_{2i}^2 + \beta_3 \sum x_{2i} x_{3i} + \sum x_{2i}(u_i - \bar{u}) \qquad \text{... (13.18)}$$

$$\sum y_i x_{3i} = \beta_2 \sum x_{2i} x_{3i} + \beta_3 \sum x_{3i}^2 + \sum x_{3i}(u_i - \bar{u}) \qquad \text{... (13.19)}$$

समीकरण (13.18) के दोनों पक्षों को $\sum x_{2i}^2$ से भाग देकर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा –

$$\frac{\sum y_i x_{2i}}{\sum x_{2i}^2} = \beta_2 + \beta_3 \frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2} + \frac{\sum x_{2i}(u_i - \bar{u})}{\sum x_{2i}^2} \qquad \text{... (13.20)}$$

तदनुसार, हमें प्राप्त होता है –

$$b_{y2} = \frac{\sum y_i x_{2i}}{\sum x_{2i}^2}$$

$$b_{32} = \frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2}$$

अतः समीकरण (13.20) निम्नवत् भी लिखा जा सकता है –

$$b_{y2} = \beta_2 + \beta_3 b_{32} + \frac{\sum x_{2i}(u_i - \bar{u})}{\sum x_{2i}^2} \quad \text{... (13.21)}$$

समीकरण (13.21) का प्रत्याशित मान लेकर हमें प्राप्त निम्नलिखित समीकरण होता है–

$$E(b_{y2}) = \beta_2 + \beta_3 b_{32} \quad \text{... (13.22)}$$

इसी प्रकार, यदि चर x_2 को मॉडल से निकाल दिया जाता है तो पद $E(b_{y3})$ में अभिनति की गणना की जा सकेगी।

पद β_1^* (त्रुटिपूर्ण मॉडल का प्राचल) का विचरण सामान्य विचरण हेतु प्रयुक्त सूत्र का प्रयोग करके भी अवकलित किया जा सकता है। चूँकि यह थोड़ा जटिल है, हम इसे यहाँ प्रस्तुत नहीं कर रहे हैं। यह ध्यान देने की बात है कि चर β_1^* का विचरण चर β_1 के विचरण की तुलना में अधिक है। उपर्युक्त का एक निहितार्थ यह भी है कि यदि किन्हीं प्रासंगिक चरों को किसी मॉडल से बाहर रखा जाता है तो प्राचलों से संबंधित सार्थकता के सामान्य परीक्षण अमान्य हो जाते हैं।

इस प्रकार, हमें ज्ञात होता है कि–

(i) जब मॉडल में कोई अप्रासंगिक चर शामिल कर लिया जाता है तो (a) प्राचलों के आकलक अनभिनत होते हैं, (b) आकलकों की दक्षता में गिरावट आती है, और (c) त्रुटि विचरण का आकलक अनभिनत होता है। तदनुसार, परिकल्पना के पारंपरिक परीक्षण मान्य हैं। हालाँकि निकाले गए निष्कर्ष किंचित त्रुटिपूर्ण हो सकते हैं।

(ii) जब किसी प्रासंगिक चर को मॉडल से हटा दिया जाता है तो (a) प्राचलों के आकलक अनभिनत होते हैं, (b) आकलकों की दक्षता में गिरावट आती है, और (c) त्रुटि विचरण का आकलक अभिनत होता है। तदनुसार, परिकल्पना के पारंपरिक परीक्षण अमान्य हैं – निकाले गए निष्कर्ष त्रुटिपूर्ण हैं।

13.3.3 त्रुटिपूर्ण फलनिक रूप

अर्थमितीय मॉडल में केवल प्रासंगिक चरों को शामिल करने से भिन्न, एक अन्य विनिर्देशन त्रुटि उसके फलनिक रूप से संबंध रखती है। शोधकर्ताओं की ओर से चरों के बीच एक रैखिक संबंध माने जाने की प्रवृत्ति देखी जाती है। हालाँकि यह हमेशा सच नहीं होता है। यदि वास्तविक संबंध गैर–रेखीय हो और हम आकलन के लिए कोई रेखीय समाश्रयण मॉडल लें तो हम सही निष्कर्ष नहीं निकाल पाएँगे। फलनिक रूपों में से चुनने के लिए अनेक परीक्षण आँकड़े उपलब्ध हैं। हम इन परीक्षण आँकड़ों पर चर्चा इकाई 14 में करेंगे।

बोध प्रश्न 2

1) किसी अप्रासंगिक चर को मॉडल में शामिल करने के परिणामों की व्याख्या करें।

....

....

....

....

....

....

2) किसी प्रासंगिक चर को मॉडल से बाहर करने के परिणामों की व्याख्या करें।

....

....

....

....

....

....

13.4 चरों में मापन की त्रुटि

अब तक हम यह मानकर चले हैं कि अध्ययन के तहत अर्थमितीय मॉडल में चरों को सही ढंग से मापा जाता है। इसका अर्थ है कि व्याख्या किए गए और व्याख्या किए जाने वाले दोनों ही प्रकार के चरों में कोई मापन त्रुटि नहीं होती। कभी–कभी हमारे पास ऐसे चरों पर आँकड़ों का अभाव होता है जिन्हें हम मॉडल में प्रयोग करना चाहते हैं। ऐसा विभिन्न कारणों से हो सकता है, यथा– अननुक्रिया त्रुटि, रिपोर्टिंग त्रुटि और कंप्यूटिंग त्रुटि।

मापन त्रुटि का एक उत्कृष्ट उदाहरण मिल्टन फ्रीडमैन मॉडल में प्रयुक्त परिवर्तनीय स्थायी आय से संबंधित है। अर्थमितीय अध्ययनों में चरों की मापन संबंधी त्रुटि एक गंभीर समस्या बन जाती है। ये मापन त्रुटियाँ दो प्रकार की होती हैं, यथा –

1) आश्रित चर में मापन त्रुटि, और

2) स्वतंत्र चर में मापन त्रुटि।

13.4.1 आश्रित चर में मापन त्रुटि

आइए, नीचे दिए गए मॉडल पर विचार करें –

$$Y_i^* = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad \text{... (13.23)}$$

जहाँ Y_i^* स्थायी उपभोग व्यय है

X_i वर्तमान आय है, और

u_i प्रसंभाव्य बाधा पद है

(हम उस चर को तारांकित (*) कर देते हैं जिसे त्रुटियों के साथ मापा जाता है)

चूँकि Y_i^* सीधे मापने योग्य नहीं है, हम एक प्रेक्षणीय व्यय चर Y_i का प्रयोग कर सकते हैं, जैसे कि –

$$Y_i = Y_i^* + e_i \qquad \text{... (13.24)}$$

जहाँ e_i चर Y_i^* में मापन त्रुटि इंगित करता है।

अतएव,

$Y_i^* = \alpha + \beta X_i + u_i$ का आकलन करने की बजाय हम निम्नलिखित का आकलन करते हैं–

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i + e_i = \alpha + \beta X_i + (u_i + e_i)$$

चलिए, उपर्युक्त समीकरण को निम्नलिखित रूप में पुनः लिखते हैं–

$Y_i = \alpha + \beta X_i + v_i$ ... (13.25)

जहाँ $v_i = u_i + e_i$

समीकरण (13.25) में हम चर v_i को समष्टि बाधा पद (u_i) और मापन त्रुटि पद (e_i) वाले एक संयुक्त त्रुटि पद के रूप में लेते हैं।

चलिए, मान लेते हैं कि निम्नलिखित पारंपरिक अवधारणाएँ सर्वथा सिद्ध हैं–

a) E(u_i) = E(e_i) = 0

b) Cov (X_i, u_i) = 0

c) Cov (u_i, e_i) = 0

उपरोक्त (c) का एक निहितार्थ यह भी है कि प्रसंभाव्य त्रुटि पद और मापन त्रुटि पद परस्पर असंबद्ध हैं। तदनुसार, संयुक्त त्रुटि पद का प्रत्याशित मान शून्य होगा; यथा इसे $E(v) = 0$ लिखा जा सकता है। इकाई 4 में दिए गए तर्क का विस्तार करके हम कह सकते हैं कि $E(\hat{\beta}) = \beta$ होता है। इसका अर्थ है कि चर $\hat{\beta}$ अनभिनत है।

आइए, अब हम आश्रित चर में मापन त्रुटि होने की स्थिति में विचरण के विषय पर विचार करते हैं। जैसा कि आप जानते हैं, दो–चर समाश्रयण मॉडल (13.23) में आकलक $\hat{\beta}$ का विचरण निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है–

Var($\hat{\beta}$) = $\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}$,

संयुक्त त्रुटि पद के लिए उपर्युक्त निम्नवत् नजर आएगा–

Var($\hat{\beta}$) = $\frac{\sigma_u^2 + \sigma_e^2}{\sum x_i^2} = \frac{\sigma_v^2}{\sum x_i^2}$ ... (13.26)

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि आश्रित चर में मापन त्रुटि हो तो त्रुटि पद का विचरण अधिक बड़ा होता है। यह आकलकों की अदक्षता की ओर ले जाता है। अतः इन्हें सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक (BLUE) नहीं कहा जा सकता है।

13.4.2 स्वतंत्र चर में मापन त्रुटि

व्याख्यात्मक चरों में भी मापन त्रुटि हो सकती है। चलिए, मान लेते हैं कि वह वास्तविक समाश्रयण मॉडल जिसका आकलन किया जाना है, निम्नवत् है–

$Y_i = \alpha + \beta X_i^* + u_i$ ... (13.27)

मान लीजिए कि हमारे पास चर X_i^* पर आँकड़े उपलब्ध नहीं हैं। दूसरी ओर, मान लीजिए कि हमारे पास चर X_i पर आँकड़े उपलब्ध हैं। ऐसी स्थिति में X_i^* का अवलोकन करने की बजाय हम निम्नलिखित समीकरण का अवलोकन करेंगे –

$X_i = X_i^* + w_i$ ... (13.28)

जहाँ w_i चर X_i^* में मापन की त्रुटि को निरूपित करता है।

स्थायी आय परिकल्पना मॉडल में, उदाहरण के लिए–

$Y_i = \alpha + \beta X_i^* + u_i$

जहाँ Y_i वर्तमान उपभोग व्यय है

X_i^* स्थायी आय है

u_i प्रसंभाव्य बाधा पद (समीकरण त्रुटि) है

समीकरण (13.27) और (13.28) से हमें ज्ञात होता है कि–

$$Y_i = \alpha + \beta(X_i - w_i) + u_i \qquad \text{... (13.29)}$$

$$= \alpha + \beta X_i + (u_i - \beta w_i)$$

$$= \alpha + \beta X_i + z_i \qquad \text{... (13.30)}$$

जहाँ $z_i = (u_i - \beta w_i)$ होता है। यह ध्यान देने की बात है कि चर z_i दो पदों से मिलकर बना है, यथा प्रसंभाव्य त्रुटि और मापन त्रुटि।

चलिए, अब मान लेते हैं कि चर w_i का माध्य शून्य है; यह क्रमिक रूप से स्वतंत्र है; और यह u_i से असंबद्ध है। इस स्थिति में भी संयुक्त त्रुटि पद z_i व्याख्यात्मक चर X_i से स्वतंत्र नहीं होगा।

$$\text{Cov}(z_i, X_i) = \text{E}[z_i - E(z_i)][X_i - E(X_i)]$$

$$= \text{E}(u_i - \beta w_i)(w_i)$$

$$= \text{E}(-\beta w_i^2)$$

$$= -\beta \sigma_w^2 \qquad \text{... (13.31)}$$

समीकरण (13.31) से हम पाते हैं कि स्वतंत्र चर और त्रुटि पद परस्पर संबद्ध हैं। यह संबंध पारंपरिक समाश्रयण मॉडल की इस मूल अवधारणा का उल्लंघन करता है कि व्याख्यात्मक चर प्रसंभाव्य बाधा पद से असंबद्ध होते हैं। ऐसी स्थिति में OLS आकलक न केवल अभिनत होते हैं, बल्कि असंगत भी होते हैं, अर्थात् वे अभिनत बने रहते हैं, भले ही प्रतिदर्श आकार n असीम रूप से बढ़ जाए।

बोध प्रश्न 3

1) आश्रित चरों में मापन त्रुटि के परिणामों की व्याख्या करें।

....

....

....

....

....

2) व्याख्यात्मक चरों में मापन त्रुटि के परिणामों की व्याख्या करें।

....

....

....

....

....

3) किसी आश्रित चर में मापन त्रुटि को किसी व्याख्यात्मक चर में मापन त्रुटि से कम दोषपूर्ण माना जाता है। क्यों?

....

....

....

....

....

13.5 सार–संक्षेप

किसी भी अर्थमितीय मॉडल का सही विनिर्देशन ही प्राप्त आकलनों की सटीकता को निर्धारित करता है। अतः सभी प्रकार के अर्थमितीय मॉडलों का सही विनिर्देशन बहुत महत्वपूर्ण होता है। आर्थिक सिद्धांत और तर्क ही अर्थमितीय मॉडलों के विनिर्देशन में हमारा मार्गदर्शन करते हैं।

किसी भी अर्थमितीय मॉडल को सही ढंग से निर्दिष्ट करने के लिए सभी प्रासंगिक व्याख्यात्मक चरों को उस मॉडल में शामिल किया जाना चाहिए। किसी भी प्रासंगिक व्याख्यात्मक चर को मॉडल से बाहर नहीं रखा जाना चाहिए। इसके अलावा, मॉडल का फलनिक रूप सही होना भी जरूरी होता है।

कभी–कभी हमें अर्थमितीय मॉडल में अपेक्षित उपयुक्त चर नहीं मिलते हैं। ऐसे मामलों में ऐसे उदाहरण भी हो सकते हैं जहाँ या तो आश्रित चर या फिर स्वतंत्र चर को कुछ त्रुटि के साथ मापा जाता है। आश्रित चर में मापन त्रुटि स्वतंत्र चर में मापन त्रुटि की तुलना में कम दोषपूर्ण मानी जाती है।

13.6 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

बोध प्रश्न 1

1) पारंपरिक समाश्रयण मॉडल की मूल अवधारणाएँ निम्नवत् हैं–
   a) समाश्रयण मॉडल प्राचलों में रेखीय होता है।
   b) $E(X_i u_i) = 0$ (समाश्रयी गैर–प्रसंभाव्य होता है)
   c) $E(u_i) = 0$
   d) $E(u_i)^2 = \sigma^2$
   e) $E(u_i u_j) = 0$ क्योंकि $i \neq j$
   f) व्याख्यात्मक चर (X_i) एक दूसरे से स्वतंत्र होते हैं।
2) पाठांश 13.2 का अध्ययन करें। यह महत्वपूर्ण है क्योंकि त्रुटिपूर्ण विनिर्देशन का आकलकों के वांछनीय गुणधर्मों पर गंभीर प्रभाव पड़ता है।
3) पाठांश 13.2.2 को पढ़ें और उत्तर दें।
4) महत्वपूर्ण विशिष्ट मुद्दे हैं– अप्रासंगिक/अनावश्यक चरों का समावेश; प्रासंगिक चरों का छूट जाना; और मॉडल का त्रुटिपूर्ण फलनिक रूप।

बोध प्रश्न 2

1) आकलक अनभिनत परंतु अदक्ष है। पाठांश 13.3.1 देखें।

2) आकलक अभिनत होने के साथ–साथ अदक्ष भी है। पाठांश 13.3.2 देखें।

बोध प्रश्न 3

1) पाठांश 13.4.1 को पढ़ें और उत्तर दें।

2) पाठांश 13.4.2 को पढ़ें और उत्तर दें।

3) यदि आश्रित चर में मापन त्रुटि हो तो आकलक अनभिनत परंतु अदक्ष होगा। व्याख्यात्मक चर में मापन त्रुटि अभिनत आकलक के रूप में परिणाम देती है। विवरण के लिए पाठांश 13.4 देखें।

इकाई 14 विनिर्देशन त्रुटि हेतु परीक्षण*

इकाई की रूपरेखा

14.1 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य होंगे कि–

- ऐसे अर्थमितीय मॉडलों की पहचान कर सकेंगे जो सही ढंग से निर्दिष्ट न हों;
- विनिर्देशन त्रुटि को ठीक करने के लिए उपचारात्मक उपाय कर सकें; तथा
- प्रतिस्पर्धी मॉडलों के प्रदर्शन का मूल्यांकन कर सकें।

14.2 विषय–प्रवेश

पिछली इकाई में हमने विनिर्देशन त्रुटियों के परिणामों पर प्रकाश डाला था। आमतौर पर तीन प्रकार की विनिर्देशन त्रुटियाँ हो सकती हैं, यथा किसी अप्रासंगिक चर का समावेश, किसी प्रासंगिक चर का छूट जाना, और त्रुटिपूर्ण फलनिक रूप। जब कभी अर्थमितीय मॉडल को सही ढंग से निर्दिष्ट नहीं किया जाता है तो गुणांक आकलन, विश्वास्यता अंतराल और परिकल्पना परीक्षण भ्रामक और असंगत होते हैं। इसे देखते हुए, अर्थमितीय मॉडलों को सही ढंग से ही निर्दिष्ट किया जाना चाहिए।

किसी मॉडल का निर्माण करते समय हमें उस मॉडल को सही ढंग से निर्दिष्ट करने में बहुत–सी कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है। कुछ मामलों में आश्रित चर और स्वतंत्र चर के विषय में आर्थिक सिद्धांत काफी पारदर्शी होता है, जबकि कुछ अन्य मामलों में यह अभी भी एक परिकल्पना चरण में ही नजर आता है।

शोधकर्ता अभी भी दूसरों द्वारा सुझाई गई परिकल्पना की पुष्टि करने के लिए उस क्षेत्र में काम कर रहे हैं। ऐसे मामलों में हमारे पास मात्र एक आश्रित चर और व्याख्यात्मक चरों की एक शृंखला होती है। इन व्याख्यात्मक चरों में से ही हमें सर्वाधिक उपयुक्त चरों का चयन करना होता है। अर्थमितीय सिद्धांत कुछ मानदंड और परीक्षण आँकड़े सुझाता है।

* डॉ॰ सहबा फतिमा, स्वतंत्र शोधकर्ता, लखनऊ।

इन मानदंडों के आधार पर ही हम सर्वाधिक उपयुक्त अर्थमितीय मॉडल का चयन करते हैं। आगे इनमें से ही कुछ मानदंडों का वर्णन किया गया है।

14.3 सर्वाधिक दक्ष मॉडल की पहचान हेतु परीक्षण

जैसा कि ऊपर उल्लेख किया गया है, अर्थमितीय मॉडल को सही ढंग से निर्दिष्ट किया जाना चाहिए। किसी भी मिथ्या संबंध की पहचान कर ली जानी चाहिए और उसे मॉडल से बाहर कर दिया जाना चाहिए। इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु कुछ परीक्षण प्रचलित हैं। इन परीक्षणों का प्रयोग विशिष्ट परिस्थितियों में चरों की व्यावहारिक समझ और संबद्ध शास्त्रों के माध्यम से उसके एक प्रबुद्ध अध्ययन के संयोजन में किया जा सकता है। मॉडल परीक्षण और मूल्यांकन के लिए निम्नलिखित परीक्षणों का सबसे अधिक उपयोग किया जाता है।

14.3.1 R^2 परीक्षण और समायोजित—R^2 परीक्षण

हमने इकाई 4 में निर्धारण के गुणांक (R^2) की अवधारणा पर चर्चा की है। जैसा कि आप जानते हैं, निर्धारण का गुणांक किसी मॉडल की व्याख्यात्मक गुणवत्ता को इंगित करता है। यदि, उदाहरण के लिए, $R^2 = 0.76$ हो तो हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि आश्रित चर में 76 प्रतिशत विचरण को मॉडल में व्याख्यात्मक चर द्वारा समझाया गया है।

चर R^2 को हम निम्नवत् परिभाषित करते हैं –

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS} \qquad \text{... (14.1)}$$

जहाँ TSS = वर्गों का कुल योगफल

ESS = वर्गों का परिभाषित योगफल

RSS = वर्गों का शेष योगफल

जैसा कि आपको ज्ञात है,

$$TSS = RSS + ESS \qquad \text{... (14.2)}$$

अब समीकरण (14.2) के दोनों पक्षों को TSS से विभाजित कर हमें ज्ञात होता है कि–

$$\frac{RSS}{TSS} + \frac{ESS}{TSS} = 1 \qquad \text{... (14.3)}$$

चूँकि $R^2 = \frac{ESS}{TSS}$, हम देखते हैं कि R^2 अनिवार्य रूप से 0 और 1 के बीच स्थित है। अंक 1 से इसकी निकटता मॉडल के अपेक्षाकृत अधिक उपयुक्त होने का संकेत देती है। यदि R^2 एक के निकट हो तो RSS का मान ESS के मान की तुलना में बहुत कम होता है। अतएव, बहुत कम ही शेष बचेगा। इस प्रकार, किसी उच्चतर R^2 वाले मॉडल को ही प्राथमिकता दी जाती है। बहरहाल, आप यह ध्यान रखें कि बहुत ही उच्च R^2 मान मॉडल में बहुसंरेखता की विद्यमानता को इंगित करता है यदि R^2 का मान तो अधिक हो परंतु गुणांकों का t–अनुपात सांख्यिकीय रूप से महत्वपूर्ण न हो तो आपको बहुसंरेखता की जाँच करनी चाहिए।

चर R^2 प्रतिदर्श आँकड़ों के आधार पर ही परिकलित किया जाता है। तदनुसार, मॉडल में सम्मिलित व्याख्यात्मक चरों पर ही R^2 के आकलन हेतु विचार किया जाता है। मॉडल में सम्मिलित नहीं किए गए चर आश्रित चर में विचरण के लिए उत्तरदायी नहीं होते।

अधिक व्याख्यात्मक चर जोड़े जाने पर R^2 वृद्धि की प्रवृत्ति दर्शाता है। तदनुसार, हम मॉडल की व्याख्यात्मक शक्ति को बढ़ाने के लिए और अधिक व्याख्यात्मक चर जोड़ने के लिए ललचाते हैं।

यदि हम किसी मॉडल में अप्रासंगिक व्याख्यात्मक चर जोड़ते हैं तो आकलक अनभिनत होते हैं, परंतु आकलकों के विचरण में वृद्धि अवश्य होती है। ऐसे मॉडलों के आधार पर ही हमारा पूर्वानुमान और विश्लेषण अविश्वसनीय हो जाता है।

उक्त कठिनाई को दूर करने के लिए ही हम 'समायोजित–R^2' का प्रयोग करते हैं। इसे $\bar{R}^2$ से इंगित किया जाता है और निम्नानुसार परिभाषित किया जाता है–

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{ESS/(n-k)}{TSS/(n-1)} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k} \qquad \text{... (14.4)}$$

जहाँ n प्रेक्षणों की संख्या और k समाश्रयियों की संख्या है। जैसा कि आपको ज्ञात है TSS का मान $(n-1)$ अंकित स्वतंत्रता की कोटि दर्शाता है, जबकि ESS का मान $(n-k)$ अंकित स्वतंत्रता की कोटि दर्शाता है। तदनुसार, $\bar{R}^2$ मॉडल की स्वतंत्रता की कोटि को ध्यान में रखता है। पद $\bar{R}^2$ व्याख्यात्मक चर के अतिरिक्त को दण्डनीय ठहराता है। यह देखा गया है कि पद $\bar{R}^2$ में केवल तभी वृद्धि होती है जब अतिरिक्त व्याख्यात्मक चर का *t*-मान (निरपेक्ष संख्या) 1 से अधिक हो। अतः मिथ्या चरों को पहचान कर मॉडल से बाहर किया जा सकता है। यहाँ नियम यह है कि सभी स्वतंत्र चरों का एक ही आश्रित चर के प्रति समाश्रयण किया जाना है।

याद रखें कि हम $\bar{R}^2$ के किन्हीं दो मॉडलों की तुलना तभी कर सकते हैं जब उनके आश्रित चर एक समान हों। उदाहरण के लिए, यदि एक मॉडल में व्याख्यात्मक चर *Y* हो और दूसरे मॉडल में व्याख्यात्मक चर *log*Y हो तो हम इन दोनों मॉडलों की तुलना नहीं कर सकते हैं।

14.3.2 एकाइके सूचना मानदंड (AIC)

किसी भी मॉडल में मिथ्या विनिर्देशन की पहचान करने के लिए एक अन्य विधि एकाइके सूचना मानदंड (AIC) अपनाई जाती है। जैसा कि हम नीचे दिए गए सूत्र से देख सकते हैं, यह विधि समाश्रयियों की संख्या वृद्धि को भी दण्डनीय ठहराती है–

$$AIC = e^{2k/n} \sum \frac{\hat{u}_i^2}{n} = e^{2k/n} \frac{RSS}{n} \qquad \text{... (14.5)}$$

जहाँ k समाश्रयियों (व्याख्यात्मक चर) की संख्या है और n समुक्तियों की संख्या है।

समीकरण (14.5) को हम निम्नानुसार और भी सरल कर सकते हैं–

$$\ln AIC = \left(\frac{2k}{n}\right) + \ln\left(\frac{RSS}{n}\right) \qquad \text{... (14.6)}$$

जहाँ $\ln AIC$ मानदंड AIC का प्राकृतिक लघुगणक है, और $\frac{2k}{n}$ दंडकारक है।

याद रखें कि ln *AIC* के किसी भी निम्नतर मान वाले मॉडल को बेहतर माना जाता है। तदनुसार, जब हम AIC मानदंड का प्रयोग करके दो मॉडलों की तुलना करते हैं तो AIC के कम मान वाले मॉडल में बेहतर विनिर्देशन देखा जाता है। इसका कारण बड़ा ही सरल है। ऐसा कोई भी अर्थमितीय मॉडल जो वर्गों के शेष योगफल को कम करता हो, एक बेहतर निर्दिष्ट मॉडल कहलाता है।

14.3.3 श्वार्ज सूचना मानदंड

श्वार्ज सूचना मानदंड (SIC) भी ऊपर उल्लिखित AIC मानदंड की भाँति RSS के मान पर निर्भर करता है। यह विधि किसी अर्थमितीय मॉडल के त्रुटिहीन विनिर्देशन का विश्लेषण करने के लिए भी लोकप्रिय है। यहाँ SIC के मान को निम्नानुसार परिभाषित किया जाता है–

$$SIC = n^{k/n}\frac{\sum \hat{u}^2}{n} = n^{k/n}\frac{RSS}{n} \qquad \dots (14.7)$$

यदि इसे हम लघुगणक के रूप में लें तो समीकरण (14.7) निम्नवत् दर्शाया जाएगा –

$$\ln SIC = \frac{k}{n}\ln n + \ln\left(\frac{RSS}{n}\right) \qquad \dots (14.8)$$

जहाँ $[(k/n)\ln n]$ ही दंडकारक है। यह ध्यान देने की बात है कि SIC मानदंड AIC मानदंड की तुलना में व्याख्यात्मक चर को सम्मिलित करने के लिए एक कठोरतर दंड लगाता है।

14.3.4 मॉलो का C_p मानदंड

जब हम किसी मॉडल में सभी प्रासंगिक चर शामिल नहीं करते हैं तो हमारे आकलक अभिनत कहलाते हैं। मॉलो का C_p मानदंड इस प्रकार के अभिनति का मूल्यांकन यह पता लगाने के लिए करता है कि क्या निष्पक्ष आकलकों से कोई महत्वपूर्ण विचलन उत्पन्न होता है। इस प्रकार, मॉलो का C_p मानदंड प्रतिस्पर्धी अर्थमितीय मॉडलों में से सर्वोत्तम का चयन करने में हमारी सहायता करता है।

यदि कुछ व्याख्यात्मक चर किसी मॉडल से हटा दिए जाते हैं तो वर्गों के शेष योगफल (RSS) में वृद्धि होती है। चलिए, मान लेते हैं कि वास्तविक मॉडल में k समाश्रयी हैं। इस मॉडल के लिए पद $\hat{\sigma}^2$ ही वास्तविक चर σ^2 का आकलक होगा।

मान लीजिए कि हम अपने मॉडल से p समाश्रयी हटा देते हैं। अब छाँटकर छोटा कर दिए गए मॉडल से प्राप्त वर्गों का शेष योगफल RSS_p कहलाएगा। मॉलो का C_p मानदंड निम्नलिखित सूत्र पर आधारित होता है–

$$C_p = \frac{RSS_p}{\hat{\sigma}^2} - (n - 2p) \qquad \dots (14.9)$$

जहाँ n प्रेक्षणों की संख्या है।

उक्त C_p मानदंड के अनुसार किसी मॉडल को चुनते समय निम्नतम C_p मान वाले मॉडल को वरीयता दी जाती है।

14.4 मॉडल चयन मानदंड के विषय में सावधानी

अब तक हम इस बात पर जोर देते आए हैं कि अर्थमितीय मॉडल आर्थिक सिद्धांत और तर्क पर ही आधारित होने चाहिए। अतः किसी भी अर्थमितीय मॉडल को निकुंचित करते समय आपको किसी भी चर को शामिल करने अथवा छोड़ देने की सैद्धांतिक उपयुक्तता पर ध्यान देना चाहिए। एक सुनिर्दिष्ट मॉडल प्राप्त करने के लिए सैद्धांतिक अवधारणाओं और संबद्ध शास्त्रों की गहन समझ आवश्यक है। साथ ही, वे जो मॉडल जो हम तय करते हैं, उतने ही अच्छे बन पाते हैं जितने कि अच्छे हमारे द्वारा एकत्र किए गए आँकड़े होते हैं। यदि एकत्र किए गए आँकड़े बहुसंरेखण अथवा स्वसहसंबंध से ग्रस्त न हों तो हमारे पास अपेक्षाकृत अधिक सुदृढ़ मॉडल होने की संभावना होती है।

जैसा कि पहले उल्लेख किया गया है, किसी भी उपयुक्त मॉडल के चयन का मानदंड मुख्य रूप से उसके आधारभूत सिद्धांत और एकत्रित आँकड़ों की गुणवत्ता पर निर्भर करता है। कई बार हम दो चरों के बीच कुछ संबंध देखते हैं। हालाँकि ऐसा संबंध सतही अथवा मिथ्या हो सकता है। चलिए, एक उदाहरण लेते हैं। किसी चौराहे पर बत्ती लाल होने पर वाहन रुक जाते हैं। इसका अर्थ यह नहीं है कि सामने लाल बत्ती होने पर वाहन नहीं चल सकते। इसका अर्थ यह भी नहीं है कि चलते वाहनों पर यातायात संकेतों का कोई हानिकारक प्रभाव पड़ता है। यहाँ एकमात्र कारण है– यातायात नियमों का पालन। जब तक हम यातायात के नियमों को नहीं देखते और निगरानी रखते हुए नहीं चलते, तब तक हमारी विवेक बुद्धि गलत ही साबित होगी। आश्रित चर और स्वतंत्र चर दोनों ही किसी अन्य चर से प्रभावित हो सकते हैं। ऐसे मामलों में संबंध गलत साबित हो जाता है।

अर्थमितीय मॉडलों के चयन के संबंध में आपको एक मुद्दे पर और ध्यान देना चाहिए। विभिन्न परीक्षण मानदंड भिन्न–भिन्न मॉडलों का सुझाव दे सकते हैं। उदाहरण के लिए, आर्थिक तर्क से कहा जाएगा कि किसी भी विशिष्ट मुद्दे के लिए दो संभावित अर्थमितीय मॉडल (जैसे, मॉडल A और मॉडल B) हो सकते हैं। आपको ऐसी स्थिति का सामना भी करना पड़ सकता है कि परीक्षण मॉडल A का सुझाव दे और AIC मानदंड मॉडल B का सुझाव दे। ऐसी स्थितियों में आपको एकाधिक परीक्षण करने चाहिए और उसके बाद ही सबसे अच्छा मॉडल चुना जाना चाहिए। समायोजित R-वर्गित, मॉलो का C_p,*P*-मान, आदि अर्थमितिविद् को बिना अधिक स्पष्टता के विभिन्न समाश्रयण समीकरणों की ओर संकेत कर सकते हैं।

इस प्रकार, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि मॉडल चयन के लिए ऊपर सूचीबद्ध कोई भी तरीका अपने आप में पर्याप्त नहीं है। किसी अर्थमितीय मॉडल को निर्दिष्ट करते समय संबद्ध शास्त्रों की सैद्धांतिक समझ, सटीक रूप से एकत्र किए गए आँकड़े, समस्या की व्यावहारिक समझ, और सामान्य ज्ञान का कोई विकल्प नहीं है। 'मॉडल चयन मानदंड' विषय पर विस्तृत चर्चा हम 'BECC 142: व्यावहारिक अर्थमिति' नामक पाठ्यक्रम में करेंगे।

बोध प्रश्न 1

1) स्पष्ट करें कि मॉडल विनिर्देशन में पद $\bar{R}^2$ पद R^2 से बेहतर मानदंड क्यों होता है।

....

....

....

....

2) व्याख्या करें कि अर्थमितीय मॉडल के चयन में AIC और AIC मानदंड कैसे लागू किए जाते हैं।

....

....

....

....

3) किसी अर्थमितीय मॉडल का चयन करते समय आपको क्या सावधानी बरतनी चाहिए?

....

....

....

....

14.5 सार–संक्षेप

किसी उपयुक्त अर्थमितीय मॉडल का चयन एक दुष्कर कार्य है। इसके लिए हमें अपने अर्थमितीय मॉडल के आधारभूत आर्थिक सिद्धांत और तर्क को ध्यान में रखना होगा। किसी विशिष्ट मुद्दे के लिए अनेक प्रतिस्पर्धी मॉडल हो सकते हैं।

ऐसे कुछ मानदंड उपलब्ध हैं जिनके आधार पर ही सर्वोत्तम अर्थमितीय मॉडल का चयन किया जाता है। ये मानदंड हो सकते हैं– $\bar{R}^2$ और मॉलो का C_p मानदंड। इस इकाई में इन परीक्षण मानदंडों के सूत्रों का भी वर्णन किया गया है।

14.6 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

बोध प्रश्न 1

1) हमने R^2 और $\bar{R}^2$ के बीच तुलना पाठांश 14.3.1 में की है। पद $\bar{R}^2$ स्वतंत्रता की कोटि को ध्यान में रखता है।

2) आपको AIC और BIC मानदंडों में प्रयुक्त परीक्षण आँकड़ों का वर्णन करना चाहिए (देखें खंड 14.3)। परीक्षण आँकड़ों के न्यूनतम मान वाले मॉडल को प्राथमिकता दी जाती है।

3) पाठांश 14.4 का अध्ययन करें और उत्तर दें।

परिशिष्ट सारणीयाँ

सारणी **A1:** प्रसामान्य क्षेत्र सारणी

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

सारणी **A2:** χ^2 बटंन का क्रांतिक मान

df\area	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**
1	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672

सारणी **A3:** t – बटंन का क्रांतिक मान

df\p	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1825	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7765	3.7470	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6849	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
inf	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

सारणी **A4:** ***F*** **–** बटंन का क्रांतिक मान **(5%** सार्थकता का स्तर**)**

df2/ df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.014	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.410	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.773	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.501	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.257	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.136	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.791	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.073	2.840	2.685	2.573	2.488	2.421	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.237
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.266	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.450	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.911
inf	3.842	2.996	2.605	2.372	2.214	2.099	2.010	1.938	1.880	1.831

सारणी **A4:** ***F*** – बटंन का क्रांतिक मान **(5%** सार्थकता का स्तर) (क्रमशः)

df2/ df1	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**INF**
1	243.906	245.950	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.253	254.314
2	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	8.745	8.703	8.660	8.639	8.617	8.594	8.572	8.549	8.526
4	5.912	5.858	5.803	5.774	5.746	5.717	5.688	5.658	5.628
5	4.678	4.619	4.558	4.527	4.496	4.464	4.431	4.399	4.365
6	4.000	3.938	3.874	3.842	3.808	3.774	3.740	3.705	3.669
7	3.575	3.511	3.445	3.411	3.376	3.340	3.304	3.267	3.230
8	3.284	3.218	3.150	3.115	3.079	3.043	3.005	2.967	2.928
9	3.073	3.006	2.937	2.901	2.864	2.826	2.787	2.748	2.707
10	2.913	2.845	2.774	2.737	2.700	2.661	2.621	2.580	2.538
11	2.788	2.719	2.646	2.609	2.571	2.531	2.490	2.448	2.405
12	2.687	2.617	2.544	2.506	2.466	2.426	2.384	2.341	2.296
13	2.604	2.533	2.459	2.420	2.380	2.339	2.297	2.252	2.206
14	2.534	2.463	2.388	2.349	2.308	2.266	2.223	2.178	2.131
15	2.475	2.403	2.328	2.288	2.247	2.204	2.160	2.114	2.066
16	2.425	2.352	2.276	2.235	2.194	2.151	2.106	2.059	2.010
17	2.381	2.308	2.230	2.190	2.148	2.104	2.058	2.011	1.960
18	2.342	2.269	2.191	2.150	2.107	2.063	2.017	1.968	1.917
19	2.308	2.234	2.156	2.114	2.071	2.026	1.980	1.930	1.878
20	2.278	2.203	2.124	2.083	2.039	1.994	1.946	1.896	1.843
21	2.250	2.176	2.096	2.054	2.010	1.965	1.917	1.866	1.812
22	2.226	2.151	2.071	2.028	1.984	1.938	1.889	1.838	1.783
23	2.204	2.128	2.048	2.005	1.961	1.914	1.865	1.813	1.757
24	2.183	2.108	2.027	1.984	1.939	1.892	1.842	1.790	1.733
25	2.165	2.089	2.008	1.964	1.919	1.872	1.822	1.768	1.711
26	2.148	2.072	1.990	1.946	1.901	1.853	1.803	1.749	1.691
27	2.132	2.056	1.974	1.930	1.884	1.836	1.785	1.731	1.672
28	2.118	2.041	1.959	1.915	1.869	1.820	1.769	1.714	1.654
29	2.105	2.028	1.945	1.901	1.854	1.806	1.754	1.698	1.638
30	2.092	2.015	1.932	1.887	1.841	1.792	1.740	1.684	1.622
40	2.004	1.925	1.839	1.793	1.744	1.693	1.637	1.577	1.509
60	1.917	1.836	1.748	1.700	1.649	1.594	1.534	1.467	1.389
120	1.834	1.751	1.659	1.608	1.554	1.495	1.429	1.352	1.254
inf	1.752	1.666	1.571	1.517	1.459	1.394	1.318	1.221	1.000

सारणी **A4:** ***F*** — बटंन का क्रांतिक मान (**1%** सार्थकता का स्तर)

df2/ df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472
inf	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321

सारणी **A4:** ***F*** **–** बटंन का क्रांतिक मान **(1%** सार्थकता का स्तर**)**(क्रमशः)

df2/ df1	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**INF**
1	6106.321	6157.285	6208.730	6234.631	6260.649	6286.782	6313.030	6339.391	6365.864
2	99.416	99.433	99.449	99.458	99.466	99.474	99.482	99.491	99.499
3	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
4	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
5	9.888	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.859
9	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.909
11	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.602
12	4.155	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.361
13	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.868
16	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.653
18	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566
19	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	3.231	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.421
21	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.360
22	3.121	2.978	2.827	2.749	2.667	2.583	2.495	2.403	2.305
23	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.535	2.447	2.354	2.256
24	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.403	2.310	2.211
25	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.169
26	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.131
27	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.097
28	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.064
29	2.868	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.034
30	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.006
40	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.805
60	2.496	2.352	2.198	2.115	2.028	1.936	1.836	1.726	1.601
120	2.336	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.381
inf	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.473	1.325	1.000

सारणी **A5:** डार्बिन वॉटसन **d-**प्रतिदशर्ज का क्रांतिक मान **(5%** सार्थकता का स्तर**)**

	k=1		k=2		k=3		k=4	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.6102	1.4002						
7	0.6996	1.3564	0.4672	1.8964				
8	0.7629	1.3324	0.5591	1.7771	0.3674	2.2866		
9	0.8243	1.3199	0.6291	1.6993	0.4548	2.1282	0.2957	2.5881
10	0.8791	1.3197	0.6972	1.6413	0.5253	2.0163	0.3760	2.4137
11	0.9273	1.3241	0.7580	1.6044	0.5948	1.9280	0.4441	2.2833
12	0.9708	1.3314	0.8122	1.5794	0.6577	1.8640	0.5120	2.1766
13	1.0097	1.3404	0.8612	1.5621	0.7147	1.8159	0.5745	2.0943
14	1.0450	1.3503	0.9054	1.5507	0.7667	1.7788	0.6321	2.0296
15	1.0770	1.3605	0.9455	1.5432	0.8140	1.7501	0.6852	1.9774
16	1.1062	1.3709	0.9820	1.5386	0.8572	1.7277	0.7340	1.9351
17	1.1330	1.3812	1.0154	1.5361	0.8968	1.7101	0.7790	1.9005
18	1.1576	1.3913	1.0461	1.5353	0.9331	1.6961	0.8204	1.8719
19	1.1804	1.4012	1.0743	1.5355	0.9666	1.6851	0.8588	1.8482
20	1.2015	1.4107	1.1004	1.5367	0.9976	1.6763	0.8943	1.8283
21	1.2212	1.4200	1.1246	1.5385	1.0262	1.6694	0.9272	1.8116
22	1.2395	1.4289	1.1471	1.5408	1.0529	1.6640	0.9578	1.7974
23	1.2567	1.4375	1.1682	1.5435	1.0778	1.6597	0.9864	1.7855
24	1.2728	1.4458	1.1878	1.5464	1.1010	1.6565	1.0131	1.7753
25	1.2879	1.4537	1.2063	1.5495	1.1228	1.6540	1.0381	1.7666
26	1.3022	1.4614	1.2236	1.5528	1.1432	1.6523	1.0616	1.7591
27	1.3157	1.4688	1.2399	1.5562	1.1624	1.6510	1.0836	1.7527
28	1.3284	1.4759	1.2553	1.5596	1.1805	1.6503	1.1044	1.7473
29	1.3405	1.4828	1.2699	1.5631	1.1976	1.6499	1.1241	1.7426
30	1.3520	1.4894	1.2837	1.5666	1.2138	1.6498	1.1426	1.7386
31	1.3630	1.4957	1.2969	1.5701	1.2292	1.6500	1.1602	1.7352
32	1.3734	1.5019	1.3093	1.5736	1.2437	1.6505	1.1769	1.7323
33	1.3834	1.5078	1.3212	1.5770	1.2576	1.6511	1.1927	1.7298
34	1.3929	1.5136	1.3325	1.5805	1.2707	1.6519	1.2078	1.7277
35	1.4019	1.5191	1.3433	1.5838	1.2833	1.6528	1.2221	1.7259
36	1.4107	1.5245	1.3537	1.5872	1.2953	1.6539	1.2358	1.7245
37	1.4190	1.5297	1.3635	1.5904	1.3068	1.6550	1.2489	1.7233
38	1.4270	1.5348	1.3730	1.5937	1.3177	1.6563	1.2614	1.7223
39	1.4347	1.5396	1.3821	1.5969	1.3283	1.6575	1.2734	1.7215
40	1.4421	1.5444	1.3908	1.6000	1.3384	1.6589	1.2848	1.7209
41	1.4493	1.5490	1.3992	1.6031	1.3480	1.6603	1.2958	1.7205

शब्दावली

अर्थमितीय मॉडल	:	ये ऐसे सांख्यिकीय मॉडल हैं जो विभिन्न आर्थिक चरों के बीच संबंध निर्दिष्ट करते हैं।
आकलन	:	किसी भी प्राचल को आँकने अथवा उसका अनुमान लगाने की प्रक्रिया।
असतत यादृच्छिक चर	:	यह ऐसे यादृच्छिक चरों को इंगित करता है जो केवल गणनीय मान ग्रहण कर सकते हों।
अवशिष्ट पद e_i	:	चर Y का वास्तविक मान अवशिष्ट पद को चर Y के आकलित मान में जोड़कर प्राप्त किया जाता है। अवशिष्ट पद समष्टि समाश्रयण फलन के यादृच्छिक त्रुटि पद u_i का आकलित मान होता है।
विश्वास्यता अंतराल (confidence interval)	:	यह अंतराल इस प्रायिकता को इंगित करता है कि कोई समष्टि प्राचल दी गई तालिका से निकाले गए क्रांतिक मानों की शृंखला में ही शामिल होगा।
अन्योन्य प्रतिरूप चर (interactive dummy variable)	:	यह DX की भाँति एक ऐसा चर होता है जिसमें एक प्रतिरूप चर और एकमात्रात्मक चर होता है। यह हमें इस बात को देखने में सक्षम करने वाले गुणक रूप में माना जाता है कि दो समूहों के समाश्रयण गुणांक समान हैं अथवा भिन्न हैं। इसी प्रकार, जब माना जाने वाला प्रकार्यात्मक रूप निम्नलिखित प्रकार का होतो यह 'अन्योन्य प्रतिरूप' का उदाहरण भी हो सकता है– $Y_i = \beta_1 + \beta_2 D_{2i} + \beta_3 X_i + \beta_4 (D_i X_i) + u_i$.
अवकल अवरोधन गुणांक (differential intercept coefficient)	:	एनोवा मॉडल $Y_i = \beta_1 + \beta_2 D_i + u_i$ में चूँकि कोई निरंतर समाश्रयण रेखा शामिल नहीं होती है, प्रतिक्रमण गुणांक वास्तव में यह मापता है कि विचाराधीन दो श्रेणियों (जैसे पुरुष / महिला) के बीच अवरोधन पद का मान कितना भिन्न है। इसी कारण इसे अधिक उपयुक्त रूप से 'अवकल अवरोधन गुणांक' कहा जाता है।
असदृश समाश्रयण	:	यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें अवरोधन और समाश्रयण गुणांक दोनों ही भिन्न–भिन्न होते हैं।
आंशिक समाश्रयण गुणांक	:	ये गुणांक Y के औसत मान में परिवर्तन को मापते हैं, यथा, X में $E(Y)$ प्रति इकाई परिवर्तन, जबकि अन्य व्याख्यात्मक चरों के मान नियत रहेंगे।
अपूर्ण बहुसंरेखता	:	यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें दो या दो से अधिक व्याख्यात्मक चर सहसंबद्ध होते हैं परंतु वे वस्तुतः रैखिक नहीं होते हैं।

अधिकतम संभावना आकल	:	अधिकतम संभावना आकलन किसी भी संभाव्यता बंटन के प्राचलों का आकलन करने की एक ऐसी विधि है जिससे संभावना फलन को अधिकतम किया जा सकता है। वे प्राचल जो प्रायिकता फलन को अधिकतम करते हैं, अधिकतम संभावना आकल कहलाते हैं। कोई भी संभावना फलन प्रायिकता फलन से भिन्न होता है। पूर्ववर्ती किन्हीं प्रतिदर्श आँकड़ों के लिए किसी सांख्यिकीय मॉडल की सुमानकता मापता है, जबकि परवर्ती पुनरावृत्त यादृच्छिक परीक्षणों की किसी शृंखला में एक विशिष्ट संभावित परिणाम आते रहने की कोई संख्या होती है, जिसे सरल शब्दों में 'प्रायिकता मान' कहा जाता है।
एनोवा (**ANOVA**) मॉडल	:	यह एक ऐसा समाश्रयण मॉडल है जिसमें केवल एक प्रतिरूप व्याख्यात्मक चर होता है। इसका प्रकार्यात्मक रूप इस प्रकार हो सकता है : $Y_i = \beta_1 + \beta_2 D_i + u_i$
एनकोवा (**ANCOVA**) मॉडल	:	यह एक ऐसा मॉडल है जिसमें मात्रात्मक और प्रतिरूप दोनों चर शामिल होते हैं। ऐसे मॉडल का यह रूप हो सकता है : $Y_i = \beta_1 + \beta_2 D + \beta_3 X_i + u_i$
कार्य–कारण संबंध	:	विभिन्न चरों के बीच एक ऐसा संबंध जिसमें किन्हीं दो चरों के बीच कारणता अर्थात् कारण और प्रभाव का पता लगाया जा सकता हो।
काई–वर्ग बंटन	:	काई–वर्ग बंटन एक ऐसा वितरण है जो k स्वतंत्र मानक प्रसामान्य यादृच्छिक चरों के वर्गों का योगफल होता है।
कटक समाश्रयण	:	यह बहुसंरेखता की समस्या को हल करने की एक विधि है। कटक समाश्रयण में पहला चरण चर को मानकीकृत करना और फिर उस मानकीकृत चर के समाश्रयण को क्रियान्वित करना होता है।
कोक्रेन–ऑर्कट प्रक्रिया	:	यह कोक्रेन–ऑर्कट द्वारा सुझाई गई रूपांतरण प्रक्रिया है। यह त्रुटि पदों के बीच सहसंबंध गुणांक के मान का आकलन करने में सहायक सिद्ध होती है।
गोल्डफेल्ड–क्वांड्ट परीक्षण	:	विषमविसारिता के परीक्षण की इस पद्धति में हम सबसे पहले प्रेक्षणों को X_i चर के बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करते हैं। फिर हम आँकड़ा समूहों के बीच से C प्रेक्षणों को निकाल बाहर करते हैं। तदनुसार, पहले भाग में $(n - C)/2$ प्रेक्षण और अंतिम भाग में $(n - C)/2$ प्रेक्षण दो समूहों का गठन करते हैं। फिर हम वर्गों RSS_1 और RSS_2 का अपना–अपना अवशिष्ट योगफल प्राप्त करने के लिए आगे बढ़ते हैं। यहाँ RSS_1 लघु X_i मानों के अनुरूप समाश्रयण के लिए और RSS_2 वृहत्तर X_i मानों के लिए वर्गों के अवशिष्ट योगफल (RSS) को निरूपित करता है। हम विषमविसारिता की विद्यमानता की जाँच के लिए F–परीक्षण करते हैं।

गॉस–मार्कोव प्रमेय	:	पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल की अवधारणाओं के तहत न्यूनतम वर्ग आकलक सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलन (BLUE) सिद्ध होते हैं। इसका अर्थ है कि सभी अनभिनत रैखिक आकलकों के वर्ग में साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) आकलन ही न्यूनतम अथवा अल्पतम विचरण दर्शाते हैं।
डर्बिन–वॉटसन परीक्षण (*d*–परीक्षण)	:	यह परीक्षण प्रथम–कोटि स्वसहसंबंध का पता लगाने में मदद करता है। इसमें प्रयोग किया जाने वाला परीक्षण प्रतिदर्शज निम्नवत् है– $$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$
डर्बिन *h*–प्रतिदर्शज	:	डर्बिन–वॉटसन तकनीक तब काम करने में विफल हो जाती है जब हमारे समाश्रयण मॉडल में आश्रित चर (dependent variable) का पश्चायित मान (lagged value) किसी व्याख्यात्मक चर के रूप में शामिल हो। ऐसे मॉडलों में *h*–प्रतिदर्शज, जो कि डर्बिन द्वारा ही सुझाया गया है, समाश्रयण मॉडल में स्वसहसंबंध की विद्यमानता का पता लगाने में कारगर सिद्ध होता है।
निर्धारक घटक	:	यह समाश्रयण समीकरण के नियमित घटक को निरूपित करता है। यह व्याख्यात्मक चर के दिए गए मानों के लिए आश्रित चर का अपेक्षित मान होता है।
परिकल्पना	:	यह एक ऐसी अस्थायी समुक्ति होती है जिसका हम परीक्षण करने का प्रस्ताव करते हैं। यह सीमित साक्ष्य पर आधारित होती है। परिकल्पना आर्थिक सिद्धांत अथवा किसी तर्क के आधार परही प्रतिपादित की जाती है।
परीक्षण की शक्ति (power of a test)	:	सांख्यिकीय सार्थकता के किसी भी परीक्षण की शक्ति को इस प्रायिकता के रूप में परिभाषित किया जाता है कि यह किसी भी असत्य शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार कर देगा। परीक्षण की शक्ति का मान $(1 - \beta)$ से दर्शाया जाता है।
पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल (classical linear regression model)	:	यह एक ऐसे रैखिक समाश्रयण मॉडल को इंगित करता है जो कुछ निर्दिष्ट अवधारणाओं के आधार पर चरों के बीच एक रेखीय संबंध स्थापित करता है।
परिकल्पना परीक्षण (hypothesis testing)	:	यह परीक्षण इस बात का आकलन करने के लिए किया जाता है कि दी गई समुक्ति अथवा निष्कर्ष कथित परिकल्पना के अनुकूल हैं या नहीं। यहाँ' सुसंगतता' शब्द का अर्थ होता है – दिए गए या परिकल्पित मूल्य के 'पर्याप्त रूप से निकट'। यह इस बात का भी संकेत करता है कि ऐसी स्थिति में हम उल्लिखित शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार नहीं करते हैं।

पूर्वानुमान (prediction)	:	कोई भी समाश्रयण मॉडल व्याख्या किए जाने वाले चरों के आधार पर आश्रित चर में भिन्नता की व्याख्या करता है। व्याख्यात्मक चरों के मानों को देखते हुए ही हम उक्त आश्रित चर के मान की भविष्यवाणी करते हैं। अनुमानित मान वास्तविक मान से भिन्न होता है।
प्राचल (parameter)	:	यह किसी चर की माप होता है अर्थात् एक संख्यात्मक मात्रा जो किसी दिए गए जनसमुदाय की विशेषता बताती है।
प्रसामान्य बंटन (normal distribution)	:	यह एक बहुत ही सामान्य प्रायिकता बंटन होता है। इसका वक्र घंटी के आकार का होता है और प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल 1 होता है।
प्रसंभाव्य त्रुटि (standard error)	:	त्रुटि पद उन चरों के प्रभाव को निरूपित करता है जो समाश्रयण मॉडल में शामिल नहीं होते। यह स्पष्ट है कि यदि हम आश्रित चर को प्रभावित करने वाले सभी कारकों को शामिल करने का प्रयास करते हैं तो भी दो चरों के बीच कुछ अंतर्जात यादृच्छिकता विद्यमान रहती ही है।
प्रतिरूप चर (dummy variable)	:	ऐसे अनेक चर हैं जो अपनी प्रकृति में गुणात्मक होते हैं। डमी अर्थात् प्रतिरूप चरों के रूप में भी जाने जाने वाले इन चरों को भिन्न–भिन्न प्रकार से संदर्भित किया जाता है, जैसे संकेतक चर, द्विआधारी चर, श्रेणीबद्ध चर, और द्विभाजित चर।
प्रतिरूप चर जाल (dummy variable trap)	:	किसी प्रतिरूप चर, यथा लिंग (पुरुष / महिला), जाति (सामान्य /SC&ST/OBC), आदि के प्रति व्यक्त प्रतिक्रिया को 'श्रेणी' कहा जाता है। ऐसी श्रेणियों की 'संख्या' के आधार पर हमें समाश्रयण में प्रतिरूप चर की संख्या को ध्यानपूर्वक शामिल करने पर विचार करना चाहिए। आमतौर पर यह 'श्रेणियों की संख्या से एक कम' होना चाहिए। ऐसा करने में विफल रहने पर हम 'प्रतिरूप चर जाल' नामक स्थिति में आ जाते हैं। इसका अर्थ है कि हमें प्राचलों के बिना किसी अद्वितीय आकलन अथवा दक्ष अनुमानों के ही बहुसंरेखण की स्थिति का सामना करना पड़ सकता है। प्रतिरूपों की संख्या प्रस्तुत करने का सामान्य नियम यह है कि यदि हमारे पास m विशेषताएँ अथवा श्रेणियाँ हों तो प्रस्तुत किए गए प्रतिरूप चरों की संख्या '$m - 1$' होनी चाहिए।
पूर्ण बहुसंरेखता (perfect multicollinearity)	:	पूर्ण बहुसंरेखता उस स्थिति को दर्शाती है जब व्याख्यात्मक चर पूरी तरह से सहसंबद्ध होते हैं। इसका अर्थ है कि व्याख्यात्मक चर एक दूसरे के रैखिक संयोजन होते हैं।
परीक्षण प्रतिदर्शज (test statistic)	:	कोई भी परीक्षण प्रतिदर्शज एक मानकीकृत मान होता है, जो कि परिकल्पना परीक्षण के दौरान किसी प्रतिदर्श से परिकलित किया जाता है। परीक्षण के प्रतिदर्शजों के आधार पर हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार अथवा स्वीकार कर सकते है।

पार्क परीक्षण (Park Test)	:	यदि किसी आँकड़ा समूह में विषमविसारिता होती है तो विषमविसारिता विचरण σ_i^2 व्यवस्थित रूप से एक या एक से अधिक व्याख्यात्मक चरों से संबद्ध हो सकता है। ऐसे उदाहरणों में हम एक या एक से अधिक X–चरों पर का σ_i^2 समाश्रयण कर सकते हैं। पार्क–परीक्षण में अपनाया गया ऐसा ही कोई उपागम विषमविसारिता की विद्यमानता का पता लगाने में मदद करता है।
प्राचलों का आकलन	:	यह प्रक्रिया ऐसे मापित अनुभवजन्य आँकड़ों के आधार पर प्राचलों के मान का आकलन करने से संबंध रखती है जिनमें कोई यादृच्छिक घटक विद्यमान हो।
ब्रुश–गॉडफ्रे (BG) परीक्षण	:	स्वसहसंबंध का पता लगाने के लिए ब्रुश एवं गॉडफ्रे प्रक्रिया एक अपेक्षाकृत अधिक सामान्य परीक्षण है। यह उन स्थितियों पर लागू होता है जहाँ उच्च कोटि की स्वसमाश्रयण योजनाएँ होती हैं।
बहुसंरेखता (multicollinearity)	:	यह शब्द एक ऐसी समस्या को इंगित करता है जिसमें व्याख्यात्मक चर सहसंबद्ध होते हैं। बहुसंरेखता के मुख्य लक्षण हैं– उच्च R^2 और निम्न t–अनुपात।
टाइप–I त्रुटि	:	सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण में टाइप–I त्रुटि वास्तविक शून्य–स्तरीय परिकल्पना की त्रुटिपूर्ण अस्वीकृति होती है। यह मान अल्फा स्तर की सार्थकता से दर्शाया जाता है।
टाइप–II त्रुटि	:	यह त्रुटि तब होती है जब हम किसी ऐसी शून्य–स्तरीय परिकल्पना को स्वीकार कर लेते हैं जो वास्तव में त्रुटिपूर्ण हो। यह असत्य सिद्ध होने पर शून्य–स्तरीय परिकल्पना को स्वीकार कर लिए जाने की प्रायिकता दर्शाती है।
बहु समाश्रयण मॉडल (multiple regression model)	:	कोई भी साधारण दो–चर समाश्रयण मॉडल तब एक बहु समाश्रयण मॉडल बन जाता है जब एक से अधिक व्याख्यात्मक चरों को समाश्रयियों के रूप में जोड़ लिया जाता है। सबसे सरल संभव बहु समाश्रयण मॉडल एक तीन–चर समाश्रयण होता है, जिसमें एक आश्रित चर और दो व्याख्यात्मक चर होते हैं।
मानक प्रसामान्य बंटन	:	यह माध्य 0 और मानक विचलन 1 के साथ किसी प्रसामान्य बंटन को इंगित करता है।
मैकिनॉन–व्हाइट–डेविडसन (MWD) परीक्षण	:	मैकिनॉन–व्हाइट–डेविडसन (**MWD**) परीक्षण समाश्रयण के लिए उपयुक्त फलनिक रूप के चयन हेतु एक सफल परीक्षण है। यह तीन अर्थशास्त्रियों – जेम्स मैकिनॉन, हेलबर्ट व्हाइट और रसेल डेविडसन द्वारा प्रतिपादित किया गया, इसीलिए इसको **MWD** परीक्षण के रूप में जाना जाता है।

यादृच्छिक चर (random variable)	:	एक ऐसा चर जो उन मानों को ग्रहण करता है जो किसी अनियमित या सांयोगिक दृश्यघटना के संख्यात्मक परिणाम हों।
रैखिक समाश्रयण (linear regression)	:	रैखिक समाश्रयण मॉडल में चरों के बीच संबंध का फलनिक रूप रेखीय होता है।
विषमविसारिता (heteroscedasticity)	:	यदि पद u_i का विसरण विषम हो अर्थात् वह एक प्रेक्षण में दूसरे प्रेक्षण से भिन्न हो तो ऐसी स्थिति को विषमविसारिता के उदाहरण के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।
विचरण का विश्लेषण (ANOVA)	:	यह एक ऐसी तकनीक है जो आँकड़ों की कुल विचरणशीलता को दो भागों में विभाजित करती है, यथा एक सांख्यिकीय विचरण और दूसरा यादृच्छिक विचरण ।
वैकल्पिक परिकल्पना (alternative hypothesis)	:	परिकल्पना परीक्षण में वैकल्पिक परिकल्पना एक ऐसी स्थिति का उल्लेख करते है जो शून्य परिकल्पना के विपरीत होती है। यह शून्य की भाँति होता है, यथा समाश्रयण गुणांक शून्य से भिन्न होता है। यह धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है।
विश्वास्यता अंतराल (confidence interval) **उपागम**	:	समष्टि प्राचल का परीक्षण करने के लिए वास्तविक परंतु अज्ञात माध्य के विषय में किसी विश्वास्यता अंतराल का निर्माण किया जा सकता है। यदि समष्टि प्राचल विश्वास्यता अंतराल के भीतर ही हो तो शून्य–स्तरीय परिकल्पना स्वीकार कर ली जाती है; अन्यथा इसे निरस्त कर दिया जाता है।
सांख्यिकीय निष्कर्ष (statistical inference)	:	यह आँकड़ों का विश्लेषण करके प्राचलों के अंतर्निहित संभाव्यता वितरण के लक्षणों की उत्पत्ति का पता लगाने की प्रक्रिया को इंगित करता है।
साहचर्य (association)	:	यह विभिन्न चरों के बीच सह–संबंध अथवा संबंध को इंगित करता है।
सांख्यिकीय अनुमिति	:	यह यादृच्छिक प्रतिदर्शन के आधार पर जनसंख्या प्राचल के विषय में निष्कर्ष निकालने की विधि को इंगित करता है।
सतत यादृच्छिक चर (continuous random variable)	:	ऐसे यादृच्छिक चर जो किसी अंतराल में अनंत संख्या में मान ले सकते हों, सतत यादृच्छिक चर कहलाते हैं।
समाश्रयण (regression)	:	कोई भी समाश्रयण विश्लेषण व्याख्यायित या आश्रित चर और स्वतंत्र या व्याख्यात्मक चर के संबंध के अध्ययन से संबंध रखता है।
समष्टि समाश्रयण फलन (PRF)	:	कोई भी समष्टि समाश्रयण फलन किसी आश्रित चर और किसी स्वतंत्र या व्याख्यात्मक चरों के समुच्चय के बीच एक सैद्धांतिक संबंध की परिकल्पना करता है। यह एक रैखिक फलन होता है। यह फलन परिभाषित करता है कि कैसे किसी चर Y की सशर्त प्रत्याशा स्वतंत्र चर X में परिवर्तन के प्रति अपनी प्रतिक्रिया देती है।

साधारण न्यूनतम वर्ग विधि (ordinary least squares method)	:	साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) किसी रैखिक समाश्रयण मॉडल में अज्ञात प्राचलों के आकलन हेतु एक विधि का नाम है। यह विधि त्रुटियों के वर्गों के योगफल को कम करके दिखाती है।
सुमानकता	:	आसमंजन सुष्ठुता जो हमें यह बताती है कि आकलित समाश्रयण रेखा वास्तविक Y मानों के प्रति कितनी श्रेष्ठ सिद्ध होती है। इस प्रकार के मापदंड को निर्धारण के गुणांक के रूप में जाना जाता है, जिसे पद R^2 से दर्शाया जाता है। यह वर्गों के कुल योग (ESS) और वर्गों के व्याख्यायित योगफल (TSS) का अनुपात होता है।
शून्य–स्तरीय परिकल्पना (null hypothesis)	:	शून्य–स्तरीय अथवा निराकरणीय परिकल्पना (जिसे स्ट्रॉमैन परिकल्पना भी कहा जाता है) में कहा गया है कि चरों के बीच कोई संबंध नहीं होता। यह पता लगाने के लिए कि क्या चर Y चर X से बिल्कुल भी संबंधित है अथवा नहीं, गुणांकों को जानबूझकर शून्य के रूप में चुना जाता है। यदि चर X वास्तव में मॉडल से संबंधित होता है तो हम पूरी तरह से शून्य–निराकरणीय परिकल्पना H_0 को वैकल्पिक परिकल्पना H_1 के पक्ष में यह अस्वीकार कर दिए जाने की आशा करेंगे कि वह शून्य नहीं है।
द्विपक्षीय परिकल्पना (two sided hypothesis)	:	परिकल्पना परीक्षण में कोई भी सम्मिश्रित परिकल्पना उन मानों के किसी समूह को सम्मिलित करती है जो दी गई अथवा बताई गई शून्य–स्तरीय परिकल्पना (null hypothesis) के बराबर न हों।
सार्थकता का परीक्षण	:	पद H_0 को स्वीकार अथवा अस्वीकार करने का निर्णय प्रतिदर्श आँकड़ों से प्राप्त परीक्षण प्रतिदर्शज के मान के आधार पर किया जाता है। इसका अर्थ है कि प्रतिदर्श माध्य और समष्टि माध्य के बीच का अंतर सांख्यिकीय रूप से महत्वपूर्ण होता है। सार्थकता के 5 प्रतिशत स्तर पर किए गए किसी भी परीक्षण का अर्थ होगा कि केवल पाँच प्रतिशत मामलों में ही हम गलत होंगे अर्थात् किसी भिन्न निष्कर्ष पर पहुँचेंगे। शेष 95 प्रतिशत मामलों में हम उसी निष्कर्ष पर पहुँचेंगे। इसका अर्थ है कि हम जिस निष्कर्ष पर आ रहे हैं उसके प्रतिदर्श बार–बार लेने में अथवा उस परीक्षण के परिणाम जिसका हम एक प्रतिदर्श के आधार पर आकलन कर रहे हैं (अर्थात् शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार करना या अस्वीकार करना) में हमारे एक समान रूप से लिए गए 100 में से 95 यादृच्छिक प्रतिदर्शों में निष्कर्ष एक समान ही आने की संभावना होगी।
समवर्ती समाश्रयण	:	यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें दो समाश्रयणों में एक ही अवरोधन होता है परंतु प्रतिक्रमण भिन्न–भिन्न होते हैं।

समानांतर समाश्रयण	:	यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें दो समाश्रयण गुणांक एक समान होते हैं परंतु उनके अवरोधन (intercept) भिन्न–भिन्न होते हैं।
समायोजित R^2	:	समायोजित R^2 एक ऐसा मापदंड है जो समाश्रयण मॉडल में सुमानकता की सीमा का प्रग्रहण करता है। इसका प्रयोग विशेष रूप से तब किया जाता है जब किसी को व्याख्यात्मक चरों की भिन्न संख्या वाले दो समाश्रयण मॉडलों की तुलना करनी होती है। यह तथ्य को '$n-k$' की भाँति स्वतंत्रता की कोटि में शामिल करके आकलित प्राचलों की संख्या को हिसाब में लेता है।
सहायक समाश्रयण	:	यह पदबंध शेष व्याख्यात्मक चरों पर व्याख्यात्मक चरों में से किसी एक के समाश्रयण को इंगित करता है।
समविसारिता (homoscedasticity)	:	पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल (CLRM) की एक महत्वपूर्ण अवधारणा यह है कि किसी भी समष्टि समाश्रयण फलन (PRF) में त्रुटि पद u_i समविसारिता दर्शाता है अर्थात् उसका विचरण एक समान ही रहता है। इस अवधारणा को समविसारिता के रूप में जाना जाता है।
सामान्य विषमविसारिता परीक्षण	:	यह किसी भी समाश्रयण मॉडल में विषमविसारिता की विद्यमानता का परीक्षण करने की एक विधि है। इसमें मूल समाश्रयण से प्राप्त अवशिष्टों को मूल चरों, उनके वर्गित मानों और उनके अन्योन्य गुणन पर वर्गित और प्रतिक्रमित किया जाता है। इसमें मूल X चर की अतिरिक्त अगणित संख्याएँ जोड़ी जा सकती हैं।
स्वसहसंबंध (autocorrelation)	:	पारंपरिक रैखिक समाश्रयण मॉडल यह मानकर चलता है कि यादृच्छिक त्रुटि पद एक दूसरे से संबद्ध नहीं होते हैं। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक प्रेक्षण से जुड़े त्रुटि पदों के बीच कोई संबंध नहीं होता है। इस अवधारणा को शून्य किसी स्वसहसंबंध की धारणा के रूप में जाना जाता है।
सांख्यिकीय परिकल्पना	:	यह समष्टि प्राचल के विषय में एक अवधारणा है। यह अवधारणा सत्य हो भी सकती है और नहीं भी। यह सांख्यिकीय परिकल्पना परिकल्पना परीक्षण के आधार पर या तो स्वीकृत कर ली जाती है या फिर अस्वीकृत कर दी जाती है।
शून्य–स्तरीय परिकल्पना	:	यह परिकल्पना दर्शाती है कि निर्दिष्ट समष्टि के भीतर कोई सार्थक अंतर नहीं होता है; प्रेक्षित अंतर मुख्य रूप से प्रतिदर्शन अथवा प्रयोगात्मक त्रुटि के कारण होता है।
सार्थकता का परीक्षण उपागम	:	अनुमिति की यह विधि शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार अथवा स्वीकार करने के लिए प्रयोग की जाती है। यह उपागम किसी भी सांख्यिकीय अनुमिति को क्रियान्वित करने के लिए परीक्षण प्रतिदर्शज का प्रयोग करता है।

***F*–बंटन**	:	यह एक दाएँ–तिरछा बंटन होता है जिसका प्रयोग विचरण के विश्लेषण के लिए किया जाता है। किसी भी *F*–आँकड़े का प्रयोग सांख्यिकीय मॉडलों की तुलना करने और उस मॉडल की पहचान करने के लिए किया जाता है जो जनसंख्या के लिए सर्वाधिक उपयुक्त हो।
***p*–मान**	:	यह मान उस समय सार्थकता का निम्नतम स्तर होता है जब शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार किया जा सकता हो।
***t*–बंटन**	:	यह एक ऐसे सतत प्रायिकता बंटन को इंगित करता है जो सामान्य रूप से बंटित जनसंख्या के माध्य का आकलन करते हुए प्राप्त किया जाता है, जहाँ प्रतिदर्श आकार छोटा होता है और जनसंख्या मानक विचलन अज्ञात होता है।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

Dougherty, C. (2011). *Introduction to Econometrics*, Fourth Edition, Oxford University Press

Gujarati, D. N. and D.C. Porter (2010). *Essentials of Econometrics*, Fourth Edition, McGraw Hill

Kmenta, J. (2008). *Elements of Econometrics*, Second Edition, Khosla Publishing House

Maddala, G.S., and Kajal Lahiri (2012). *Introduction to Econometrics*, Fourth Edition, Wiley

Wooldridge, J. M. (2014). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*, Cengage Learning, Fifth Edition