इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय
मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-131
कलन

खंड

2

सीमा और सांतत्य

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति*

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पूणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन. आई. एस. ई. आर., भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई. आई. एस. ई. आर., मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई. आई. टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य, विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
प्रो. महेन्द्र सिंह नाथावत (निदेशक)
डॉ. दीपिका
प्रो. परवीन सिंक्लेयर

प्रो. पूर्णिमा मित्तल
श्री पवन कुमार

प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. सु. वेंकटरामन

* पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. अंबर हबीब (संपादक)
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर, उ.प्र.

डॉ. दीपिका
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयकर्त्ता: प्रो. परवीन सिंक्लेयर तथा डॉ. दीपिका

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन सी ई आर टी, नई दिल्ली

डॉ. दीपिका
विज्ञान विद्यापीठ, इं.गां.रा.मु.वि

आभार: इस खण्ड के कुछ भाग पिछले पाठ्यक्रम कलन (MTE-01) पर आधारित है।

सामग्री निर्माण

श्री राजीव गिरधर
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

श्री हेमन्त कुमार परिदा
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

नवम्बर, 2019

ISBN 978-93-89200-42-3

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in *से प्राप्त की जा सकती है।*

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. महेन्द्र सिंह नाथावत, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेज़र टाईपसेटिंग : डिज़ाईन क्रिएशन, E-mail: dzine.creations2@gmail.com

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली–110002

खंड 2 सीमा और सांतत्य

यह खंड आपके द्वारा अध्ययन किए जाने वाले कलन पाठ्यक्रम के पाँच खंडों में से दूसरा खंड है। हम यह मान कर चल रहे हैं कि आप वास्तविक संख्या पद्धति तथा वास्तविक फलनों से परिचित हैं। परंतु आपकी याददाश्त को केवल तरोताजा करने के लिए, हमने इकाई 6 में वास्तविक संख्याओं और उनके गुणों तथा साथ ही कुछ प्रकार के फलनों का संक्षिप्त में वर्णन किया है। ऐसा भी संभव है कि आप में से कुछ ने तो वास्तविक संख्या पद्धति और फलनों के कुछ पहलुओं का पहले अध्ययन नहीं किया हो। ऐसी स्थिति में, इकाई 6 आगे आने वाली कलन की एक सुस्पष्ट संरचना के लिए एक मजबूत पृष्ठभूमि तैयार करने में आपकी सहायता करेगी।

कलन की मौलिक रूप से दो प्रविधियाँ अवकलन और समाकलन होती हैं, जिन्हें, 'सीमा' नामक संकल्पना के पदों में सूत्रित किया जा सकता है। इकाई 7 में, हम प्रारंभ में इस संकल्पना का एक सहजज्ञानात्मक आभास करने में आपकी सहायता करेंगे। शब्द 'सहजज्ञानात्मक' का अनेक अर्थों में प्रयोग किया जा सकता है। यहाँ इसका अर्थ ''बिना उपपत्ति के अनुभव पर आधारित'' है। इस सहजज्ञानात्मक निरूपण का अनुपालन करते हुए, हम 'सीमा' (limit) की औपचारिक परिभाषा प्रस्तुत करते हैं। इसके साथ ही, हम आपका परिचय फलनों से कराएँगे जिनमें सीमाओं के उपयोग की आवश्यकता होती है, जैसे कि चरघातांकी, लघुगणक और अतिपरवलयिक फलन आदि।

इकाई 8 में, एक नई संकल्पना सांतत्य की खोज के लिए, हम 'सीमा' का उपयोग जारी रखेंगे। हम असंतता के प्रकारों की भी चर्चा करेंगे तथा संतत फलनों के लिए मध्य–मान प्रमेय का उल्लेख करने और उसके कुछ अनुप्रयोगों को देकर इस इकाई का अंत करेंगे।

इकाई 6 से इकाई 8 में, हमने अनेक उदाहरण सम्मिलित किए हैं। कृपया इनका ध्यानपूर्वक अध्ययन करें। ये चर्चा की गई संकल्पनाओं को एक बेहतर रूप से समझने में आपकी सहायता करेंगे तथा प्रश्नों को हल करने में आपके एक मार्गदर्शक के रूप में कार्य करेंगे।

इस खंड के अंत में आप इसमें अध्ययन की गई संकल्पनाओं से संबंधित **विविध प्रश्नों का एक समुच्चय** देखेंगे। कृपया इन्हें अवश्य पढ़ें तथा स्वयं प्रत्येक प्रश्न को करने का प्रयास करें। इससे आपको संबंधित संकल्पनाओं के साथ जूझने में, तथा उन्हें अच्छे से समझने में, सहायता मिलेगी। अब, इस इकाई में प्रयुक्त कुछ चिह्नों के बारे में एक शब्द! प्रत्येक इकाई में आप प्रमेयों, उदाहरणों और सवालों को पाएंगे। किसी प्रमेय की उपपत्ति के अंत को चिह्न ■ से दर्शाया गया है। एक उदाहरण के अंत को *** से दर्शाया गया है। आगे, हर इकाई में जिन समीकरणों को संदर्भित करने की जरूरत है, उन्हें क्रमानुसार संख्याएँ दी गई हैं। यही बात इकाई में दी गई प्रश्नों और चित्रों के लिए भी की गई है। E1, E2, इत्यादि प्रश्न व्यक्त करते हैं, तथा चित्र 1, चित्र 2, इत्यादि चित्रों को व्यक्त करते हैं।

संकेत और प्रतीक (खंड 2 में प्रयोग होने वाले)

$\in (\notin)$	का अंग है (का अंग नहीं है)
$\mathbb{N}$	प्राकृत संख्याओं का समुच्चय
$\mathbb{Z} / \mathbb{Z}^{+} / \mathbb{Z}^{-}$	पूर्णांकों का समुच्चय । धनात्मक पूर्णाकों का समुच्चय। ऋणात्मक पूर्णांकों का समुच्चय
$\mathbb{R} / \mathbb{R}^{+} / \mathbb{R}^{-}$	वास्तविक संख्याओं का समुच्चय/धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय/ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
$\Rightarrow$	का तात्पर्य है
iff$(\Rightarrow)$	यदि और केवल यदि
$\therefore$	इसलिए
w.r.t.	के सापेक्ष
s.t.	ताकि
$<(\leq)$	से छोटा (से छोटा या बराबर)
$>(\geq)$	से बड़ा (से बड़ा या बराबर)
$\exists$	का अस्तित्व है
$\forall$	सभी के लिए
$f: X \to Y$	f समुच्चय x से समुच्चय y तक फलन है
{ x|x, p को संतुष्ट करता है}	सभी x का समुच्चय ताकि x गुण P को संतुष्ट करता है
$\|x\|$	वास्तविक x का मापांक
$\lim_{x \to a} f(x)$	f(x) की सीमा, जैसे-जैसे x, a की ओर अग्रसर होता है
$x \to f(x)$	x को f(x) तक ले जाने वाला फलन
$^{n}C_{r}$	n में से r वस्तुएँ लेकर बने संचयों की संख्या $^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
$\approx$	के लगभग बराबर है।
max (x,y)	x और y का अधिकतम
min (x, y)	x और y का न्यूनतम

साथ ही खंड 1 मे प्रयुक्त संकेत और प्रतीकों की सूची भी देखिए।

इकाई 6

वास्तविक संख्याएँ

संरचना **पृष्ठ संख्या**

6.1 प्रस्तावना

इस इकाई में, हम आपको वास्तविक संख्याओं की पद्धति के बारे में मौलिक तथ्यों की एक समीक्षा प्रदान करेंगे। शायद, अपने स्कूल के अध्ययनों द्वारा, आप इनमें से कुछ से पहले ही से अवगत होंगे। परंतु इस इकाई पर एक तुरंत दृष्टि आपको अपनी याददाश्त तरोताजा करने में सहायता करेगी। साथ ही, कुछ संकल्पनाएँ, जैसे निम्नक और उच्चक आपके लिए नई हो सकती हैं।

इस इकाई के भाग 6.2 में, हम वास्तविक संख्या पद्धति के अंकगणित तथा क्रम संबंधी गुणों को प्रस्तुत करेंगे। भाग 6.3 में, हम उच्चक और निम्नक की संकल्पनाओं का परिचय देंगे। हम निरपेक्ष मान तथा वास्तविक रेखा पर अंतरालों की चर्चा क्रमशः भागों 6.4 और 6.5 में करेंगे। आप इकाइयों 2 और 3 में फलनों और उनके आलेखों का अध्ययन पहले ही कर चुके हैं। भाग 6.6 में, आप फलनों और उनके आलेखों के और अधिक उदाहरण प्राप्त करेंगे। हम इस इकाई का अंत, भाग 6.7 में सम और विषम फलनों, एकदिष्ट फलनों तथा आवर्ती फलनों की चर्चा करते हुए करेंगे।

अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची दे रहे हैं। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा यह सुनिश्चित कर लें कि आपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो पाएँगे :

- वास्तविक संख्याओं के मौलिक गुणों को लिखना,
- मौलिक गुणों की सहायता से वास्तविक संख्याओं के अन्य गुणों को व्युत्पन्न करना,
- एक दिए हुए समुच्चय के उच्चक और निम्नक को परिभाषित करना,
- एक वास्तविक संख्या का निरपेक्ष मान प्राप्त करना,
- निर्धारित करना कि एक दिया हुआ फलन सम, विषम, एकदिष्ट या आवर्ती है।

6.2 वास्तविक संख्याओं के गुण

वास्तविक संख्या पद्धति (जिसे हम प्रायः केवल वास्तविक कह देते हैं) सर्वप्रथम एक समुच्चय है, जिस पर संक्रियाएँ (operations) परिभाषित हैं। वास्तविक संख्या पद्धति एक आधारशिला है जिस पर गणित, जिसमें कैलकुलस भी सम्मिलित है, का एक बड़ा भाग टिका हुआ है। इसलिए कैलकुलस का वास्तव में अध्ययन करने से पहले, वास्तविक संख्या पद्धति का समझना आवश्यक है।

यहाँ हम वास्तविक संख्याओं के कुछ गुणों का संक्षिप्त रूप में पुनरावलोकन कर रहे हैं।

योग की संक्रिया

***A1* $\mathbb{R}$ योग के अंतर्गत संवृत (closed) है।**

यदि x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, तो $x+y$ एक अद्वितीय वास्तविक संख्या होती है।

उदाहरणार्थ : $3+5=8$ एक वास्तविक संख्या है।

***A2* $\mathbb{R}$ में योग सहचारी होता है।**

$\mathbb{R}$ में सभी x, y और z के लिए, $x+(y+z)=(x+y)+z$ सत्य है।

उदाहरणार्थ : $(0.2+0.5)+0.3=0.2+(0.5+0.3)$ है।

***A3* योज्य तत्समक (शून्य) का अस्तित्व होता है।**

एक अद्वितीय वास्तविक संख्या 0 ऐसी है कि $\mathbb{R}$ में सभी x के लिए $x+0=0+x=x$ होता है। 0 को $\mathbb{R}$ में **योज्य तत्समक (additive identity)** कहा जाता है।

उदाहरणार्थ : $\frac{1}{4}+0=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ है।

A4 योज्य प्रतिलोम का अस्तित्व

प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, एक वास्तविक संख्या y का अस्तित्व है (जिसे x का **योज्य प्रतिलोम** कहा जाता है तथा $-x$ से व्यक्त किया जाता है) ताकि $x+y=y+x=0$ हो।

उदाहरणार्थ : $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=0$ है।

A5 योग क्रमविनिमेय है।

$\mathbb{R}$ में सभी x, y के लिए, $x+y=y+x$ सत्य है।

उदाहरणार्थ : $32.2+42.8=42.8+32.2$ है।

गुणन की संक्रिया

M1 $\mathbb{R}$ गुणा की संक्रिया के अंतर्गत संवृत है।

यदि x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, तो xy भी एक वास्तविक संख्या है।

उदाहरणार्थ : $3\times 4=12$ एक वास्तविक संख्या है।

M2 गुणा सहचारी है।

$\mathbb{R}$ में, सभी x, y, z के लिए, $x\,(yz)=(xy)\,z$ सत्य है।

उदाहरणार्थ : $\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{4}{5}$ है।

M3 गुणा के लिए तत्समक (इकाई या 1) का अस्तित्व

$\mathbb{R}$ में प्रत्येक x के लिए, एक अद्वितीय वास्तविक संख्या 1 का अस्तित्व है, ताकि $x1=1x=x$ है।

उदाहरणार्थ : $8.5\times 1=1\times 8.5=8.5$ है।

M4 गुणा के प्रतिलोम का अस्तित्व

प्रत्येक शून्येतर वास्तविक संख्या x के लिए, एक वास्तविक संख्या y का अस्तित्व है (जिसे x का गुणनात्मक प्रतिलोम कहा जाता है तथा x^{-1} या $1/x$ से व्यक्त किया जाता है) ताकि $xy=yx=1$ है।

उदाहरणार्थ : $6\times\left(\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)\times 6=1$ है।

M5 गुणन क्रमविनिमेय है।

$\mathbb{R}$ में सभी x, y के लिए, $xy=yx$ सत्य है।

उदाहरणार्थ : $7\times 8=8\times 7$ है।

अगले गुण में योग और गुणन दोनों सम्मिलित हैं।

D **गुणन योग पर वितरित है।**

$\mathbb{R}$ में सभी x, y, z के लिए, $x(y+z)=xy+xz$ सत्य है।

$\mathbb{R}$ में सभी x, y, z के लिए, $(x+y)z=xz+yz$ सत्य है।

उदाहरणार्थ : $\frac{1}{2}\times(2+4)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 4$ तथा $(2+3)\times 4=2\times 4+3\times 4$ है।

ध्यान दीजिए कि किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं x और y के लिए, x में से y को घटाने के परिणाम को $x-y$ से व्यक्त किया जाता है तथा इसे $x+(-y)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। इसी प्रकार, विभाजन $x\div y$ (जिसे x/y द्वारा भी व्यक्त, किया जाता है) को xy^{-1} के रूप में परिभाषित किया जाता है, यदि $y\neq 0$ हो।

अब हम वास्तविक संख्याओं के कुछ और गुणों को लिख सकते हैं।

1. $\mathbb{R}$ में सभी x के लिए $0x=0, -(-x)=x$ तथा $(-1)x=-x$, है।
2. $\mathbb{R}$ में सभी x, y के लिए $-(x+y)=(-x)+(-y)$ है।

   उदाहरणार्थ : $-(4+5)=(-4)+(-5)=-9$ है।
3. यदि $xy=0$ है, तो या तो $x=0$ या $y=0$ है।

   उदाहरणार्थ, $(x-1)(x-2)=0$ से $x-1=0$ या $x-2=0$ प्राप्त होता है।
4. $\mathbb{R}$ में सभी x के लिए, $(x^{-1})^{-1}=x$ होता है।

   उदाहरणार्थ : $\left((5)^{-1}\right)^{-1}=(1/5)^{-1}=5$ है।
5. यदि x और y शून्येतर संख्याएँ ऐसी हैं कि $x^{-1}=y^{-1}$ है, तो $x=y$ होता है।

उदाहरण 1: एक व्यक्ति $\frac{80}{9}$ का मान नीचे दिए चरणों का प्रयोग करते हुए निकालता है:

$$\frac{80}{9}=\frac{80}{4+5} \quad \text{(पंक्ति 1)}$$

$$=\frac{80}{4}+\frac{80}{5} \quad \text{(पंक्ति 2)}$$

$$=20+16 \quad \text{(पंक्ति 3)}$$

$$=36 \quad \text{(पंक्ति 4)}$$

इस परिकलन की कौन सी पंक्ति गलत है और क्यों?

हल : पंक्ति 2 गलत है, क्योंकि वितरण (बंटन) नियम विभाजन के लिए कार्य नहीं करता है।

अर्थात्, $a\div(b+c)\neq(a\div b)+(a\div c)$ or $\frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$ है।

* * *

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E1) क्या $\mathbb{R}$ का निम्नलिखित उपसमुच्चय गुणन के सापेक्ष संवृत है? कारण दीजिए।

$S = \{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}.$

E2) निम्नलिखित पंक्तियों में परिकलन की कोई गलती ज्ञात कीजिए। त्रुटि की प्रकृति को स्पष्ट कीजिए।

$1573 - 697 = 1573 - (700 - 3)$ पंक्ति 1

$= (1573 - 700) - 3$ पंक्ति 2

$= 873 - 3$ पंक्ति 3

$= 870$ पंक्ति 4

अब, हम $\mathbb{R}$ पर क्रम संबंध की चर्चा करेंगे।

$\mathbb{R}$ पर क्रम संबंध : क्रम संबंध '>' के निम्नलिखित गुण हैं: (आप इन्हें पहले से ही प्रयोग करते रहे हैं। उदाहरणार्थ – सभी घनात्मक संख्याएँ शून्य से बड़ी होती हैं।)

$O1$ त्रिविकल्पता का नियम सत्य है।

किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं x और y के लिए, निम्नलिखित में से एक और केवल एक ही सत्य होता है:

$x > y, x = y, x < y.$

उदाहरणार्थ : क्योंकि $9 > 5$ है, इसलिए $9 \neq 5$ और $9 \not< 5$ है।

हम $x < y$ लिखते हैं (और x, y से छोटा है पढ़ते हैं), जिसका अर्थ $y > x$ होता है। हम $x \leq y$ लिखते है (और x, y से छोटा या बराबर है, पढ़ते हैं) जिसका अर्थ या तो $x < y$ या $x = y$ होता है। हम $x \geq y$ लिखते हैं, (और x, y से बड़ा या y के बराबर है, पढ़ते हैं), जिसका अर्थ या तो $x > y$ या $x = y$ होता है।

$O2$ '>' संक्रामक है।

यदि $x > y$ और $y > z$ है, तो $x > z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ है

उदाहरणार्थ : क्योंकि $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$ है और $\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$, है, इसलिए $\frac{1}{5} > \frac{1}{9}$ है। प्रतीक $\forall$ सभी के लिए या प्रत्येक के लिए व्यक्त करता है।

$O3$ योग एकदिष्ट है।

यदि $\mathbb{R}$ में x, y, z इस प्रकार हैं कि $x > y$ है, तो $x + z > y + z$ होता है।

उदाहरणार्थ : क्योंकि $9.5 > 7.5$ है, इसलिए $9.5 + 4 > 7.5 + 4$ है, अर्थात् $13.5 > 11.5$ है।

चिह्न '$\forall$' का अर्थ 'सभी के लिए' या 'प्रत्येक के लिए' होता है।

$O4$ गुणन एक विशिष्ट प्रतिबंध के अंतर्गत एकदिष्ट होता है।

यदि $\mathbb{R}$ में x, y, z इस प्रकार हैं कि $x > y$ और $z > 0$ है, तो $xz > yz$ होता है।

उदाहरणार्थ : क्योंकि $6 > 3$ है, इसलिए $6 \times 2 > 3 \times 2$, अर्थात् $12 > 6$ है।

सावधानी : $x > y$ और $z < 0 \Rightarrow xz < yz$ है।

उदाहरणार्थ : क्योंकि $6 > 3$ है, इसलिए $6 \times (-2) < 3 \times (-2)$, अर्थात् $-12 < -6$ है। कुछ और गुण इस प्रकार हैं,

1. यदि $a < b$ और $c < d$ है, तो $a + c < b + d$ होता है।

   उदाहरणार्थ : क्योंकि $5 < 7$ है और $4 < 6$ है, इसलिए $5 + 4 < 7 + 6$ है।

2. $\mathbb{R}$ में सभी a के लिए a^2 ऋणेतर (non–negative) होता है।

   उदाहरणार्थ : $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$ ऋणेतर है।

   केवल $a \in \mathbb{R}$, जिसके लिए $a^2 = 0$ है, वह $a = 0$ है।

3. यदि a और b घनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, तो

   प्रतीक $\Leftrightarrow$ 'द्विघा निहितार्थ' व्यक्त करता है, जो 'यदि और केवल यदि' के तुल्य है।

   i) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$

   ii) $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$

   iii) $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$

   उदाहरणार्थ : "यदि x घनात्मक है, तो $x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$" है।

4. यदि $b > 0$ है, तो $a^2 < b^2 \Leftrightarrow -b < a < b$ है।

   यदि किसी वास्तविक संख्या का वर्ग एक घनात्मक वास्तविक संख्या के वर्ग से छोटा है, तो उस संख्या को उस घनात्मक वास्तविक संख्या के घनात्मक और ऋणात्मक मानों के बीच में स्थित होना चाहिए।

   उदाहरणार्थ : $x^2 < 25 \Leftrightarrow -5 < x < 5$ है।

5. किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं x और y के लिए, यदि $x \neq y$ है, तो $\frac{x+y}{2}$ दोनों संख्याओं x और y के बीच स्थित होता है। अर्थात्

   $x < \frac{x+y}{2} < y$ अथवा $y < \frac{x+y}{2} < x$ है।

   उदाहरणार्थ : $x = 4$ और $y = 10$ को लीजिए। तब, $4 < \frac{4+10}{2} = 7 < 10$ है।

अब, अगले भाग में हम उच्चक और निम्नक की चर्चा करेंगे।

6.3 उच्चक और निम्नक

अब, आइए एक वास्तविक संख्या जैसे कि $\sqrt{2}$ पर विचार कीजिए, जिसे हम वास्तविक संख्या रेखा पर अंकित करना चाहते हैं। हम इसकी स्थिति का किस प्रकार निर्धारण करें? सर्वप्रथम, हम देखते हैं कि $\sqrt{2}$ से 1 छोटा है (क्योंकि $1^2 = 1 < 2$) है), जबकि 2 इससे बड़ा है (क्योंकि $2^2 = 4 > 2$) है)। अतः $\sqrt{2}$, 1 और 2 के बीच स्थित है। एक दशांश (tenths) को लेने पर, हमें इसकी स्थिति का एक बेहतर विचार प्राप्त होता है। हम देखते हैं कि 1.4 बहुत छोटा है $(1.4^2 = 1.96 < 2)$, जबकि 1.5 बहुत बड़ा है $1.5^2 = 2.25 > 2)$।

अतः, 1.4 और 1.5 के बीच $\sqrt{2}$ स्थित है। यदि हमें अधिक शुद्धता चाहिए, तो हम एक शतांश (hundredths) के स्तर पर जा सकते हैं तथा देख सकते हैं कि 1.41 और 1.42 के बीच $\sqrt{2}$ स्थित है ($1.41^2 = 1.988 < 2$ और $1.42^2 = 2.016 > 2$) है)। इस प्रकार, कि किसी संख्या को संख्या रेखा पर अंकित करने के लिए, जो परिशुद्ध रूप से ज्ञात नहीं है, हम ऐसी ज्ञात संख्याओं की ओर देखते हैं जो उस संख्या से ठीक ऊपर और ठीक नीचे होती है।

एक अकेली संख्या के स्थान पर, हमें संपूर्ण समुच्चय की स्थिति की चिंता हो सकती है तथा इस समुच्चय के प्रत्येक अवयव को ज्ञात करना इतना सरल कार्य नहीं होगा। उदाहरणार्थ, क्या आप परिशुद्ध रूप से $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + x - 1 = 0\}$? के अवयवों को लिख सकते हैं? संभवतः, नहीं। परंतु आप न्यूनतम यह देख सकते हैं कि कोई भी $x > 1$ समीकरण $x^4 + x - 1 = 0$ को संतुष्ट नहीं करता है, क्योंकि इस स्थिति में $x^4 + x - 1 > 1^4 + 1 - 1 = 1$ है। इस प्रकार, समुच्चय A संपूर्ण रूप से 1 के बाईं ओर स्थित है। इसी प्रकार, हम देखते हैं कि कोई भी $x < -2$ एक हल नहीं है, क्योंकि इस स्थिति में $x^4 + x - 1 = x(x^3 + 1) - 1 > (-2)(-7) - 1 = 13$ है। इस प्रकार, समुच्चय A संपूर्ण रूप से –2 के दाईं ओर स्थित है। हमने सीखा कि A के सभी अवयव –2 और 1 के बीच स्थित हैं। प्रायः, A के बारे में उपयोगी निण्कर्षों तक पहुँचने के लिए, इतना ज्ञान पर्याप्त रहता है।

इस चर्चा से, हम निम्नलिखित परिभाषा तक पहुँचते हैं:

परिभाषा : मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ का एक उपसमुच्चय S है। $\mathbb{R}$ में एक अवयव u समुच्चय S का **उपरि परिबंध** (upper bound) कहा जाता है, यदि S में प्रत्येक x के लिए $u \geq x$ सत्य हो। दूसरे शब्दों में, एक दिए हुए समुच्चय के लिए, एक संख्या जो उसके सभी अवयवों से बड़ी हो या उनके बराबर हो उस समुच्चय का उपरि परिबंध कहलाती है। हम कहते हैं कि S **ऊपर की ओर परिबद्ध है**। यदि S का एक उपरि परिबंध हो।

इसी प्रकार से कार्य करते हुए, हम निम्नलिखित परिभाषा में निम्न परिबंध को परिभाषित करते हैं।

परिभाषा : एक दिए हुए समुच्चय S के लिए **निम्न परिबंध** एक ऐसी संख्या v होती है कि सभी $x \in S$ के लिए $v \leq x$ हो। हम कहेंगे कि यह समुच्चय **नीचे की ओर परिबद्ध** है, यदि हम इसके लिए निम्न परिबंध ज्ञात कर सकें।

आइए, निम्नलिखित उदाहरण में उपरि और निम्न परिबंध ज्ञात करें।

उदाहरण 2 : $A = \left\{\frac{n+2}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ के उपरि और निम्न परिबंध ज्ञात कीजिए।

हल : उपरि परिबंध के लिए, हमें एक ऐसी संख्या u ज्ञात करने की आवश्यकता है ताकि सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $\frac{n+2}{n} \leq u$ हो।

हमें प्राप्त है कि $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \leq 3 \; \forall n \in \mathbb{N}$ है। इस प्रकार, समुच्चय A के लिए 3 एक उपरि परिबंध है।

साथ ही, $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ है। इस प्रकार, समुच्चय A के लिए 1 एक निम्न परिबंध है।

आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि यदि किसी समुच्चय S का u एक उपरि परिबंध है, तो $u+1$ भी उसका एक उपरि परिबंध होता है।

***

आप यह देख सकते हैं। कि यदि u एक उपरि परिबंध है तो $u+1$ भी S का एक उपरि परिबंध होगा। वास्तव में, $u+2, u+3, ..., u+r$, सभी S के उपरि परिबंध हैं, जहाँ r एक घनात्मक वास्तविक संख्या है। व्यापक रूप में, किसी समुच्चय s के सभी उपरि परिबंधों में से क्या हम सदैव एक ऐसा उपरि परिबंध u चुन सकते हैं कि u समुच्चय s के प्रत्येक उपरि परिबंध छोटा हो या उसके बराबर हो। हम चुन सकते हैं तथा इस उपरि परिबंध का एक विशिष्ट नाम है। हम इस u को s का न्यूनतम उपरि परिबंध (l.u.b.) या **उच्चक (supremum)** कहते हैं। उदाहरणार्थ, Z^- का उच्चक -1 है, जहाँ $Z^- = \{...-4,-3,-2,-1\}$ है।

इससे निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है:

परिभाषा : $\mathbb{R}$ के किसी भी उपसमुच्चय S का एक ऐसा उपरि परिबंध, जो S के किसी भी अन्य उपरि परिबंध से छोटा हो उसका **उच्चक (supremum) या न्यूनतम उपरि परिबंध** (l.u.b) कहलाता है। इसी प्रकार, S का ऐसा निम्न परिबंध जो S के किसी भी अन्य निम्न परिबंध से बड़ा हो, उसका **निम्नक (infimum)** या अधिकतम निम्न **परिबंध (g.l.b)** कहलाता है।

कभी-कभी हम एक समुच्चय S के उच्चक को Sup (S) और S के निम्नक को Inf (S) लिखते हैं।

उदाहरण 3 : समुच्चय $T = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \le 4\}$ पर विचार कीजिए तथा उसके उच्चक और निम्नक ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $x^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le x \le 2$ है। यहाँ समुच्चय T के सभी सदस्य 2 से छोटे या उसके बराबर हैं। इस प्रकार, T का एक उपरि परिबंध 2 है तथा 2 से बड़ी सभी वास्तविक संख्याएँ T के उपरि परिबंध हैं। क्योंकि 2 इन सभी उपरि परिबंधों में न्यूनतम है, इसलिए T का उच्चक 2 है। इसी प्रकार, T के सभी सदस्य -2 से बड़े हैं या उसके बराबर हैं। इस प्रकार, T का एक निम्न परिबंध -2 है। -2 से छोटी सभी वास्तविक संख्याएँ भी T के निम्न परिबंध हैं। यहाँ T के सभी निम्न परिबंधों में -2 अधिकतम है। इस प्रकार, T का निम्नक -2 है।

***

टिप्पणी 1 : ध्यान दीजिए कि उदाहरण 3 के समुच्चय T का l.u.b. उस समुच्चय का ही एक सदस्य है। इसका व्यापक रूप में सत्य होना आवश्यक नहीं है। सभी ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं $\mathbb{R}^- = \{x : x < 0\}$ पर विचार कीजिए। इस समुच्चय का l.u.b क्या है? क्या यह 0 नहीं होगा? यहाँ $0 \notin \mathbb{R}^-$ है, परंतु यह $\mathbb{R}^-$ का l.u.b है।

जैसा कि l.u.b. की स्थिति में है, याद रखिए कि किसी समुच्चय का g.l.b., उस समुच्चय का सदस्य हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। उदाहरणार्थ, $S = \{x \in \mathbb{R}, 1 < x < 2\}$ पर विचार कीजिए। निम्नक $(S) = 1$ समुच्चय S का अंग नहीं है। अब, प्रश्न उठता है कि क्या प्रत्येक समुच्चय का एक उपरि प्रतिबंध या एक निम्न प्रतिबंध होता है? $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$ पर विचार कीजिए। यहाँ, $\text{Sup}(S_1) = \sqrt{5}$ तथा $\text{Inf}(S_1) = -\sqrt{5}$ है। इसीलिए S_1 परिबद्ध है। अब, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{8}\}$ पर विचार

कीजिए। S_2 का कोई उपरि परिबंध नहीं है, परंतु इसका एक निम्न परिबंध है। यदि किसी समुच्चय का एक उपरि परिबंध हो, तो उसे ऊपर की ओर परिबद्ध कहते हैं तथा यदि किसी समुच्चय का एक निम्न परिबंध हो, तो उसे नीचे की ओर परिबद्ध कहते हैं। एक समुच्चय परिबद्ध कब कहा जाता है, उसकी नीचे परिभाषा दी गई है।

परिभाषा : एक समुच्चय $S \subset \mathbb{R}$ **परिबद्ध** होता है, यदि इसका एक उपरि परिबंध और एक निम्न परिबंध दोनों हों।

क्या आप इससे सहमत हैं कि उदाहरण 3 में दिया गया समुच्चय T परिबद्ध है?

इस चर्चा के आधार पर, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर पाएँगे।

E3) $\mathbb{R}$ के निम्नलिखित उपसमुच्चयों के उच्चक और निम्नक ज्ञात कीजिए:

i) $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$

ii) $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$

iii) $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 7\}$

iv) $S_4 = \{-\frac{1}{x} : x \in \mathbb{N}\}$

E4) निम्नलिखित में से प्रत्येक का, स्पष्टीकरण देते हुए, एक उदाहरण दीजिए:

i) वास्तविक संख्याओं का एक समुच्चय, जिसका एक निम्न परिबंध हो परंतु उपरि परिबंध कोई नहीं हो।

ii) बिना किसी निम्न परिबंध वाला वास्तविक संख्याओं का एक समुच्चय, जिसका एक उच्चक हो।

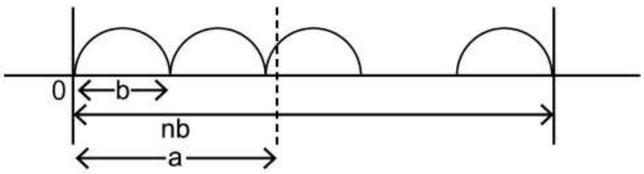
iii) वास्तविक संख्याओं का एक ऐसा समुच्चय जिसका g.l.b. उस समुच्चय का अंग नहीं हो।

iv) वास्तविक संख्याओं का एक परिबद्ध समुच्चय जिसके inf और sup उसमें स्थित नहीं हों।

अब, हम $\mathbb{R}$ के एक महत्वपूर्ण गुण का कथन देने के लिए तैयार हैं

आर्किमिडीय गुण प्राचीन यूनानी गणितज्ञ आर्किमिडीज, के नाम पर दिया गया है।

आर्किमिडीय गुण : यदि a और b कोई वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार हैं ताकि $b > 0$ है, तो एक घनात्मक पूर्णांक x ऐसा होता है कि $nb > a$ है। अर्थात् $\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{n \text{ बार}} > a$ है। इसे चित्र 1 में दर्शाया गया है।



चित्र 1: किन्हीं वास्तविक संख्याओं a और b के लिए, जहाँ $b > 0$, है, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ ताकि $a < nb$ है

उदाहरणार्थ, यदि $a = 1$ और $b = \frac{1}{2} > 0$ है, तो मान लीजिए कि $n = 3$ ऐसा है कि $nb > a$ है। ध्यान दीजिए कि n अद्वितीय नहीं है। यदि $nb > a$ है, तो $(n+1)\,b > a$ है, इत्यादि।

यदि a एक वास्तविक संख्या है, तो एक घनात्मक पूर्णांक n ऐसा है ताकि $n > a$ है। (a और 1 पर आर्किमिडीय गुण के अनुप्रयोग से) अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E5) मान लीजिए कि $A = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in N\right\}$ है। क्या यह परिबद्ध है? यदि हाँ है, तो A के उच्चक और निम्नक ज्ञात कीजिए। यदि यह परिबद्ध नहीं है, तो इसका एक उपसमुच्चय ज्ञात कीजिए, जो परिबद्ध हो।

E6) सिद्ध कीजिए, कि किसी समुच्चय के उच्चक और निम्नक अद्वितीय होते हैं, यदि उनका अस्तित्व हो तो।

अब, हम वास्तविक संख्या के निरपेक्ष मान पर चर्चा करेंगे।

6.4 निरपेक्ष मान

आपको याद होगा कि इकाई 3 में मापांक फलन और उसके आलेख की चर्चा की गई थी। इस भाग में, हम निरपेक्ष मान को परिभाषित करेंगे। आप इस सरल संकल्पना के महत्व का अनुभव तब करेंगे जब आप बाद में आने वाली इकाइयों का अध्ययन करेंगे।

प्रत्येक ओर एक ऊर्ध्वाधर रेखा वाला संकेतन $|x|$ वर्ष 1841 में कार्ल वायर्स्ट्रास ने सर्वप्रथम दिया था।

किसी वास्तविक संख्या का निरपेक्ष मान उसका परिणाम होता है। अथवा वास्तविक संख्या रेखा पर मूलबिंदु और उस वास्तविक संख्या को निरूपित करने वाले बिंदु के बीच की दूरी होती है। इसके लिए, वास्तविक संख्या रेखा पर दो बिंदुओं 2.5 और -2.5 पर विचार कीजिए। दोनों बिंदुओं की O (मूलबिंदुओं या 0) से दूरी 2.5 है। हम इस दूरी को $|2.5|$ और $|-2.5|$ से क्रमशः व्यक्त करते हैं तथा इसे 2.5 का निरपेक्ष मान (absolute value) कहते हैं।

परिभाषा : यदि x एक वास्तविक संख्या है, तो इसके **निरपेक्ष मान** को $|x|$ से व्यक्त किया जाता है (x का मापांक या mod x पढ़ा जाता है)। इसे निम्नलिखित नियमों द्वारा परिभाषित किया जाता है:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{if } x \geq 0 \\ -x, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

उदाहरण के लिए,

$$|4| = 4, |-4| = -(-4) = 4,$$

$$|2.5| = 2.5, |-3| = 3 \text{ है।}$$

ध्यान, दीजिए कि एक वास्तविक संख्या का निरपेक्ष मान कभी ऋणात्मक नहीं होता है, क्योंकि यदि x ऋणात्मक है, तो $-x$ धनात्मक होता है। एक वास्तविक संख्या का निरपेक्ष मान या तो धनात्मक होता है या शून्य। साथ ही, केवल 0 ऐसी, वास्तविक संख्या है, जिसका निरपेक्ष मान 0 होता है। इसलिए, $|0| = 0$ है।

उदाहरण 4 : निम्नलिखित संख्याओं के निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए:

i) $|\pi - 2|$ ii) $|2 - \pi|$

हलः i) $|\pi - 2| = \pi - 2$ (क्योंकि $\pi - 2 > 0$ है)

ii) $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$ (क्योंकि $2 - \pi < 0$ है)

* * *

उदाहरण 5 : $|x - 2| = 5$ को हल कीजिए।

हलः अब, $|x-2| = \begin{cases} x-2 \,;\; x-2 \geq 0 \\ -(x-2) \,;\; x-2 < 0 \end{cases}$

यदि $|x - 2| = 5$ है, तो दो संभावनाएँ $x - 2 = 5$ या $-(x - 2) = 5$ हैं। इनसे हमें $x = 7, -3$ प्राप्त होते हैं।

* * *

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E7) निम्नलिखित के मान निकालिए :

i) $|-15|$ ii) $\left|\frac{2}{3}\right|$ iii) $|-4.3|$ iv) $-|-6|$ v) $\left|\sqrt{2} - 2\right|$

E8) $\frac{|x|}{x}$ का मान निकालिए : i) $x > 0$ के लिए ii) $x < 0$ के लिए

E9) वास्तविक संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच में उचित प्रतीक ($<, >$ या $=$) लगाइए :

i) $|5|$ और $|-7|$

ii) $\left|\frac{1}{-8}\right|$ और $\left|\frac{1}{8}\right|$

iii) $|2^x|$ और $|(-2)^x|$ किसी भी प्राकृत सख्या x के लिए

iv) $-|-\sqrt{10}|$ और $|-\sqrt{10}|$

निम्नलिखित प्रमेयों में, हम $|x|$ के कुछ महत्वपूर्ण गुणों की चर्चा करेंगे, जिनका हम कलन में प्रयोग करेंगे।

प्रमेय 1: यदि a और b कोई वास्तविक संख्याएँ हैं, तो

i) $|a| \geq 0$ (अऋणात्मकता)

ii) $|a| = \max\{-a, a\}$

उपपत्तिः (i) त्रिविकल्पता के नियम (भाग 6.2 में 01) को वास्तविक संख्याओं a और 0 पर अनुप्रयोग करने पर, हमें $a > 0, a = 0$ या $a < 0$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित तीन स्थितियाँ प्राप्त होती हैं:

i) यदि $a > 0$ है, तो $|a| = a > 0$ है।

ii) यदि $a = 0$ है, तो $|a| = 0$ है।

iii) यदि $a < 0$ है, तो $|a| = -a > 0$ है।

इस प्रकार, (i), (ii) और (iii) से, हमें सभी $a \in \mathbb{R}$ के लिए $|a| \geq 0$ प्राप्त होता है।

(ii) पुनः किसी भी $a \in \mathbb{R}$ के लिए इन तीनों स्थितियों $a > 0$ या $a = 0$ या $a < 0$ के प्रयोग के लिए।

i) क्योंकि $a > 0$ है, इसलिए $|a| = a$ और $a > -a$ है। इससे $\max\{-a, a\} = 0$ है। अतः, $|a| = \max\{-a, a\}$ है।

ii) क्योंकि $a = 0$ है, इसलिए $-a = 0$ है। साथ ही, $|a| = 0$ है। इससे $\max\{-a, a\} = 0$ है, इस प्रकार $\max\{-a, a\} = |a|$ है।

iii) क्योंकि $a < 0$ है, इसलिए $|a| = -a$ और $-a > a$ है। इससे $\max\{-a, a\} = -a$ है। अतः, $|a| = \max\{-a, a\}$ है।

इस प्रकार, (i), (ii) और (iii) से हमें प्राप्त होता है कि $|a| = \max\{-a, a\}$ है। ■

अगली प्रमेय 2 में दी गई सर्वसमिका को कभी-कभी एक वास्तविक संख्या के निरपेक्ष मान की परिभाषा के रूप में प्रयोग किया जाता है।

प्रमेय 2: किसी भी वास्तविक संख्या a के लिए $\sqrt{a^2} = |a|$ होता है।

उपपत्तिः क्योंकि $a^2 = (-a)^2$ है, इसलिए a^2 के दो वर्गमूल a और $-a$ हैं।

यदि $a \geq 0$ है, तो $\sqrt{a^2} = a$ है।

यदि $a < 0$ है, तो $\sqrt{a^2} = -a$ है।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\sqrt{a^2} = |a|$ है। ■

वास्तविक संख्याओं के निरपेक्ष मानों के कुछ अतिरिक्त उपयोगी गुण निम्नलिखित प्रमेयों में दिए जा रहे हैं:

प्रमेय 3: यदि x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, तो

i) $|-x| = |x|$ [समता (आलेख की परावर्तन सममिति)]

ii) $|xy| = |x||y|$ [निरपेक्ष मानों की गुणनात्मकता]

iii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, यदि $y \neq 0$ है। [विभाजन का संरक्षण]

उपपत्तिः i) प्रमेय 2 के प्रयोग से, $|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$ है।

ii) पुनः, प्रमेय 2 के प्रयोग से, $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$ है।

iii) आप इसे स्वयं ही सिद्ध करना चाहेंगे। ■

टिप्पणी 2 : प्रमेय 3 (ii) के परिणाम को नीचे दिए अनुसार व्यापीकृत किया जा सकता है:

यदि $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं, तो $|x_1 x_2 ....x_n| = |x_1||x_2|.....|x_n|$ है।

यदि $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$ है, तो $|x^n| = |x|^n$ है।

अगली प्रमेय में, हम त्रिभुज असमिका को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 4: (त्रिभुज असमिका) : यदि x और y दो वास्तविक संख्याएँ हैं, तो $|x+y| \le |x| + |y|$ होता है।

उपपत्तिः आइए (i) $x+y \ge 0$ और (ii) $x+y<0$ पर विचार करें।

i) यदि $x+y \ge 0$ है, तो $|x+y| = x+y$

$\le |x| + |y|$ [क्योंकि $x \le |x|$ और $y \le |y|$, प्रमेय 1 के प्रयोग से, $|x| = \max\{x, -x\}$]

ii) यदि $x+y<0$ है, तो $|x+y| = -(x+y)$

$= (-x) + (-y)$

$\le |x| + |y|$ [क्योंकि $-x \le |x|$ और $-y \le |y|$, प्रमेय 1 के प्रयोग से]

अतः, $|x+y| \le |x| + |y|$ है। ■

असमिकाओं से संबंधित दो अन्य गुण निम्नलिखित हैं:

i) $|a| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$ होता है।

ii) $|a| \ge b \Leftrightarrow a \le -b$ या $b \le a$ होता है।

इन संबंधों का निरपेक्ष मानों से संबद्ध असमिकाओं को हल करने में किया जा सकता है।

उदाहरणार्थः $|x-5| \le 11 \Leftrightarrow -11 \le (x-5) \le 11$

$\Leftrightarrow -6 \le x \le 16$ है।

उदाहरण 6: $|\pi-2| + |\pi-3| + |2\pi-7|$ को परिकलित कीजिए।

हलः राशियाँ $\pi-2$ और $\pi-3$ धनात्मक हैं। इसलिए निरपेक्ष रेखाओं को हटाने पर इनके मान बदलते नहीं हैं। परंतु क्योंकि $2\pi-7$ ऋणात्मक है, इसलिए हम प्राप्त करते हैं:

$$|\pi-2|+|\pi-3|+|2\pi-7| = \pi-2+\pi-3-(2\pi-7)$$

$$= 2$$

* * *

उदाहरण 7: $\left|2\times\left(\frac{2}{3}-0.5\right)\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\left|2\times\left(\frac{2}{3}-0.5\right)\right| = \left|2\times\frac{1}{6}\right|$

$= \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ है।

* * *

उदाहरण 8: समीकरण $|x-3|+|x-4|=1$ को हल कीजिए।

हल : हमें निम्नलिखित तीनों स्थितियों की चर्चा करने की आवश्यकता है:

i) $x \le 3$
ii) $3 < x \le 4$
iii) $x \ge 4$

i) जब $x \le 3$ है, तब

$$|x-3|+|x-4|=1 \Rightarrow -(x-3)-(x-4)=1$$

$$\Rightarrow x = 3$$

ii) जब $3 < x \le 4$ है, तब

$$|x-3|+|x-4|=1 \Rightarrow (x-3)-(x-4)=1$$

$\Rightarrow 3 < x \le 4$ एक हल है।

iii) जब $x > 4$ है, तब

$$|x-3|+|x-4|=1 \Rightarrow (x-3)+(x-4)=1$$

$\Rightarrow x = 4$ है।

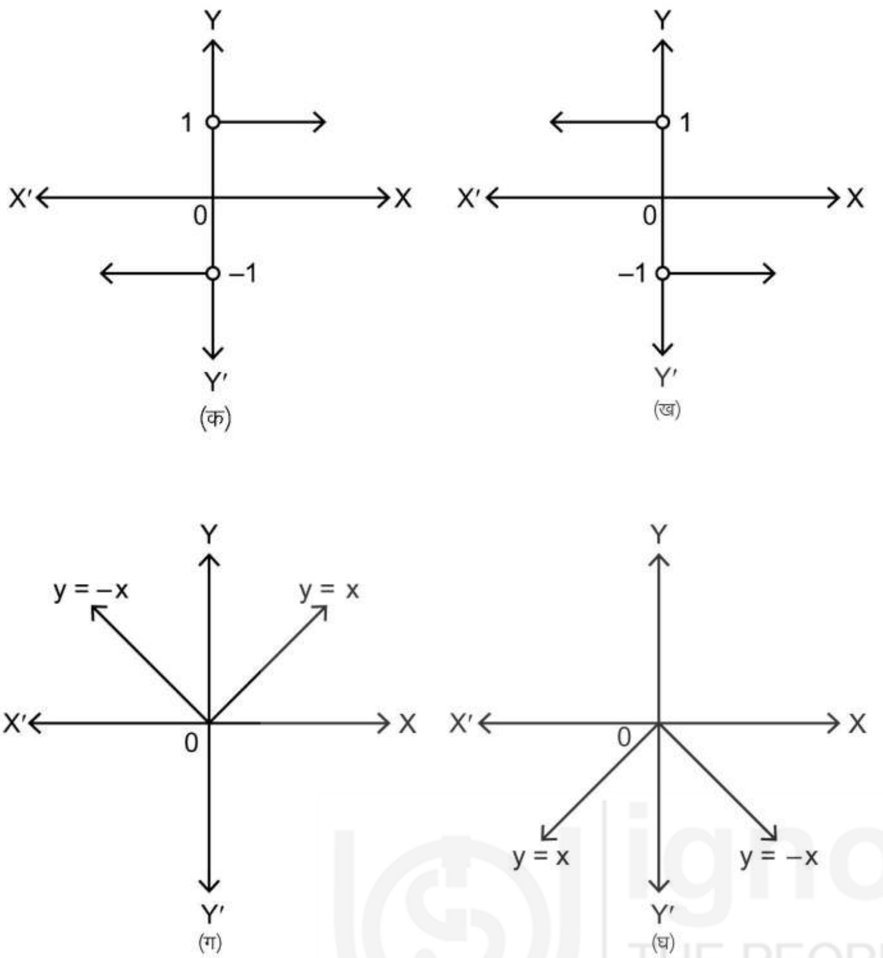
क्योंकि हमने $x > 4$ की कल्पना की है, इसलिए $x > 4$ के लिए कोई हल नहीं है।

निष्कर्ष यह है कि समीकरण $|x-3|+|x-4|=1$ के हल $3 \le x \le 4$ हैं।

* * *

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E10) निम्नलिखित में से कौन $y = \frac{x}{|x|}$ ($x \ne 0$ के लिए) का आलेख नहीं है?



चित्र 2

E11) किन्हीं भी वास्तविक संख्याओं x और y के लिए, सिद्ध कीजिए:

i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

ii) $|1/x| = 1/|x|$, यदि $x \neq 0$ है।

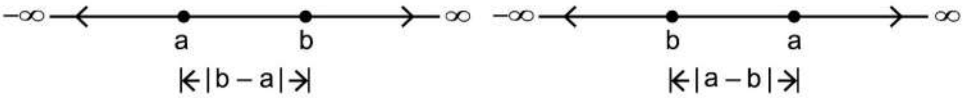
iii) $|x - y| \leq |x| + |y|$

निरपेक्ष मानों से संबद्ध असमिकाएँ (Inequalities) कलन में अनेक स्थानों पर प्रयोग होती रहती हैं। अगले भाग में, हम देखेंगे कि समुच्चय $\{x : |x - a| < k\}$ को किस प्रकार ज्यामितीय रूप से निरूपित किया जा सकता है।

6.5 वास्तविक संख्या रेखा पर अंतराल

हमने चर्चा की है कि किसी संख्या a का निरपेक्ष मान या मापांक और कुछ नहीं बस वास्तविक संख्या रेखा पर इस संख्या को निरूपित करने वाले बिंदु की बिंदु 0 से दूरी ही होती है। इसी प्रकार, $|a - b|$ दोनों संख्याओं a और b के बीच की दूरी को व्यक्त करता है। यह ध्यान दिया जा सकता है कि $a < b$ है, यदि और केवल यदि a वास्तविक संख्या रेखा पर b के बाईं ओर स्थित हो, जैसा कि चित्र 3 (क) में दर्शाया गया है, तथा

$a > b$ है, यदि और केवल यदि a वास्तविक संख्या रेखा पर b के दाईं ओर स्थित हो, जैसा कि चित्र 3 (ख) में दर्शाया गया है।



(क) $b > a$ **(ख) $a > b$**

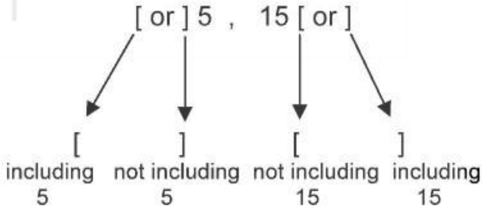
चित्र 3: $b > a$ और $a > b$ का निरूपण

अब, आइए वास्तविक संख्याओं के एक ऐसे समुच्चय S पर विचार करें जो दो दी हुई वास्तविक संख्याओं मान लीजिए 0 और 2.3 के बीच में स्थित हैं। इसलिए, $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 2.3\}$ यहाँ हम यह कहते हैं कि x संख्याओं 0 और 2.3 के बीच के मानों को ग्रहण करता है।

उदाहरण के लिए, अंतराल 2 से 4 में 2.1, 2.1111, 2.5,2.75, 2.80001, π, 7 / 2, 3.7937 जैसी सभी वास्तविक संख्याएँ तथा और बहुत सी संख्याएँ सम्मिलित हैं। एक संख्या रेखा पर अंतरालों के निरूपण के लिए एक सुविधाजनक संकेतन **अंतराल संकेतन** कहलाता है। $a < b$ के साथ दी हुई, दो वास्तविक संख्याओं a और b के लिए **बंद या संवृत अंतराल** $[a, b]$ को ऐसी सभी वास्तविक संख्याओं x के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया जाता है ताकि $a \le x$ और $x \le b$ हो या अधिक संक्षिप्त रूप में $a \le x \le b$ हो। **खुला अंतराल या विवृत अंतराल** $]a, b[$ को ऐसी सभी वास्तविक संख्याओं x के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया जाता है ताकि $a < x < b$ हो।

कुछ पुस्तकों में आप विवृत अंतराल के लिए कोष्ठक ( ) देख सकते हैं।

उदाहरण के लिए, अंतराल [5, 15] पर विचार कीजिए।



ध्यान दीजिए कि निरूपणों को दर्शाने के लिए मिश्रित कोष्ठकों का प्रयोग भी किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,]4, 13] का अर्थ 4 से 13 तक की संख्याएँ हैं, जिनमें 4 सम्मिलित नहीं है, परंतु 13 सम्मिलित है।

वास्तविक संख्या रेखा पर, सम्मिलित किए गए मानों को दर्शाने के लिए, हम एक मोटी रेखा खींचते हैं तथा जब हम अंत बिंदुओं को सम्मिलित करना चाहते हैं, तो वृत्त को भर देते हैं और जब अंत बिंदुओं को सम्मिलित नहीं करना चाहते हैं, तो वृत्त को बिना भरे छोड़ देते हैं।

उदाहरण के लिए,

दी गई मोटी रेखा और उस पर दर्शाये गोले दर्शाते हैं कि सभी संख्याएँ 5 और 15 के बीच स्थित हैं, परंतु 5 सम्मिलित नहीं है और 15 सम्मिलित है।

अंतराल में अंत बिंदुओं को सम्मिलित करने से, हमें सारणी 1 के दिए अनुसार चार विभिन्न समुच्चय प्राप्त होते हैं। एक संवृत अंतराल के निरूपण में, हम a और b पर मोटे और काले बिंदु अंकित कर देते हैं, जो यह सूचित करते हैं, कि ये a और b समुच्चय में सम्मिलित हैं। एक **संवृत अंतराल** के अंत बिंदु उस अंतराल में सम्मिलित होते हैं। एक **विवृत अंतराल** के अंत बिंदु उस अंतराल में सम्मिलित नहीं होते हैं। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में हम a और b को एक-एक खोखले वृत्त से घेर देते हैं, जो यह सूचित करते हैं कि ये अंतराल में सम्मिलित नहीं हैं। समुच्चय [a, b[और]a, b] अर्ध-विवृत (या अर्ध-संवृत) अंतराल कहलाते हैं, क्योंकि इनमें केवल एक ही अंत बिंदु सम्मिलित होता है।

सारणी 1: वास्तविक संख्या रेखा पर अंतराल

क्रम सं0	संकेतन	अंतराल का प्रकार	समुच्चय	ज्यामितीय निरूपण
1.	]a, b[	विवृत अंतराल	$\{x : a < x < b\}$, a और b सम्मिलित नहीं हैं।	
2.	[a, b]	संवृत अंतराल	$\{x : a \le x \le b\}$, a और b दोनों सम्मिलित हैं।	
3.	]a, b[	अर्धविवृत या अर्धसंवृत या वाईं ओर विवृत, दाईं ओर संवृत	$\{x : a < x \le b\}$, b सम्मिलित है, परंतु a नहीं।	
4.	[a, b [	बाईं ओर संवृत, दाईं ओर विवृत	$\{x : a \le x < b\}$, a सम्मिलित है परंतु b नहीं।	

विशेष रूप से, यदि $a = b$ है, तो $]a, a[\; = \;]a, a] = [a, a[= \phi$ तथा $[a, a] = a$ होता है।

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि सारणी 1 में दिए हुए चारों प्रकार के अंतराल परिबद्ध हैं।

यदि किसी अंतराल में, दोनों अंतबिंदु वास्तविक संख्याएँ हैं, तो वह अंतराल एक **परिमित अंतराल (परिबद्ध अंतराल)** कहलाता है। एक परिबद्ध अंतराल विवृत होता है, यदि इसमें कोई भी अंतबिंदु सम्मिलित नहीं हो, अर्ध-विवृत होता है, यदि इसमें केवल एक अंतबिंदु सम्मिलित हो तथा संवृत होता है, यदि इसमें दोनों अंतबिंदु सम्मिलित हों।

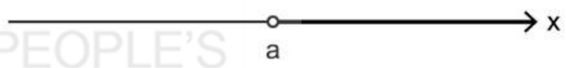
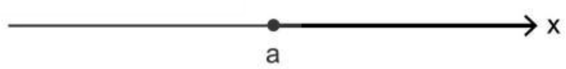
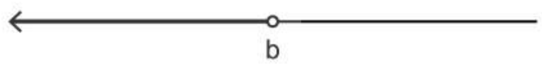
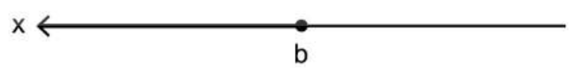
प्रतीक "∞" [जिसे अनंत (infinity) बोला जाता है] का प्रयोग ऐसे अंतरालों के लिए किया जाता है, जो एक या अन्य दिशा में सीमित नहीं होते हैं।

ध्यान दीजिए कि ∞ किसी वास्तविक संख्या को व्यक्त नहीं करता है, यह केवल यह सूचित करता है कि एक अंतराल बिना किसी अंत के विस्तृत (या जारी) है। हम अनंत के साथ खुले कोष्ठक का प्रयोग करते हैं, क्योंकि हम वहाँ पहुँच नहीं पाते हैं। हम कह सकते हैं कि ∞ या −∞ के रूप में एक अंत बिंदु वाला अंतराल

* बाईं ओर परिबद्ध है, यदि बाईं ओर का अंतबिंदु एक वास्तविक संख्या है।
* दाई ओर परिबद्ध है, यदि दाईं ओर का अंतबिंदु एक वास्तविक संख्या है।
* अपरिबद्ध है, यदि कोई भी अंत बिंदु वास्तविक संख्या नहीं है, दोनों ही अनंत अंतबिंदु हैं।

सारणी 1 में दिए हुए चार प्रकार के अंतरालों के अतिरिक्त, कुछ और प्रकार के अंतराल भी होते हैं। ये सारणी 2 में दिए हैं।

सारणी 2 : वास्तविक संख्या रेखा पर अपरिबद्ध अंतराल

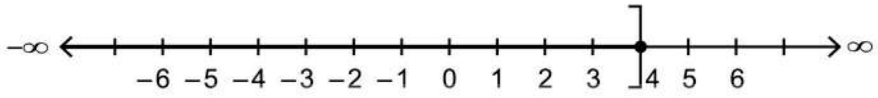
संकेतन	अंतराल का प्रकार	समुच्चय	ज्यामितीय निरूपण
$]a, \infty[$	विवृत दाईं अर्ध रेखा	$\{x : a < x\}$ a से बड़ा	
$[a, \infty[$	संवृत दाईं अर्ध रेखा	$\{x : a \le x\}$ a से बड़ा या उसके बराबर	
$]-\infty, b[$	विवृत बाईं अर्ध रेखा	$\{x : x < b\}$ b से छोटा	
$]-\infty, b]$	संवृत बाईं अर्ध रेखा	$\{x : x \le b\}$ b से छोटा या उसके बराबर	
$]-\infty, \infty[$	विवृत अंतराल	$\mathbb{R}$	

इस पर आधारित, यहाँ एक उदाहरण है।

उदाहरण 9: निम्नलिखित असमिकाओं को निरूपित करने वाली वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चयों को प्रस्तुत कीजिए। साथ ही, उन्हें वास्तविक संख्या रेखा पर भी दर्शाइए।

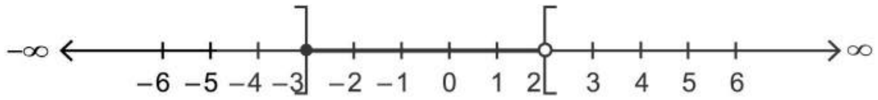
(क) $x \le 4$ (ख) $-3 \le x < 2$

हलः (क) असमिका $x \le 4$ उन सभी वास्तविक संख्याओं को व्यक्त करती है, जो 4 से छोटी हैं या उसके बराबर हैं, जैसा कि चित्र 4 में दर्शाया गया हैः



चित्र 4: $x \le 4$ का निरूपण

(ख) असमिका $-3 \le x < 2$ व्यक्त करती है कि $x \ge -3$ है तथा $x < 2$ है। यह "द्वि असमिका" -3 और 2 के बीच सभी वास्तविक संख्याओं को व्यक्त करता है, जिनमें -3 सम्मिलित है परंतु 2 सम्मिलित नहीं है, जैसा कि चित्र 5 में दर्शाया गया है।



चित्र 5: $-3 \le x < 2$ का निरूपण

* * *

अब आप निम्नलिखित अभ्यास प्रश्नों को करने का प्रयास कर सकते हैं।

E12) बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के लिए, कारण दीजिए।

i) $0 \in [1, 8]$

ii) $-1 \in \,]-\infty, 2[$

iii) $1 \in [1, 2]$

iv) $5 \in \,]5, \infty[$

E13) E12) में दिए अंतरालों के लिए, असमिकाएँ लिखिए साथ ही, इन्हें वास्तविक संख्या रेखा पर भी दर्शाइए।

आप इकाई 2 में फलनों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। अब, अगले भाग में, हम विभिन्न फलनों की उनके आलेखों के साथ चर्चा करेंगे।

6.6 फलन और उनके आलेख

आप इकाई 2 और इकाई 3 में, फलन की धारणा का, अचर फलन, तत्समक फलन, रैखिक फलन, x^2 और $|x|$, इत्यादि जैसे कुछ विशिष्ट फलनों सहित अध्ययन पहले ही कर चुके हैं, जिनमें उनके आलेख भी सम्मिलित थे। इकाई 2 में, दो फलनों के योग, अंतर, गुणन, विभाजन, संयोजन, इत्यादि का भी अध्ययन किया गया था। क्योंकि फलन

की संकल्पना गणित में तथा साथ ही अन्य विषयों में भी अति महत्वपूर्ण है, इसलिए हम फलनों के अपने अध्ययन को उस स्थान से आगे बढ़ाना चाहेंगे जहाँ हमने पहले समाप्त किया था। इस पूरे कोर्स में, हम उन **फलनों** पर विचार करेंगे जिनके प्राँत और सहप्राँत दोनों $\mathbb{R}$ के उपसमुच्चय हैं। ऐसे फलनों को प्रायः एक वास्तविक चर के **वास्तविक फलन** या **वास्तविक मान फलन** कहा जाता है। परंतु हम एक वास्तविक फलन के लिए केवल शब्द 'फलन' का ही प्रयोग करेंगे।

फलनों में, किसी फलन की व्याख्या करने में प्रयुक्त किए गए चर x को प्रायः एक **मूक (dummy)** चर कहा जाता है, क्योंकि इसे किसी भी अक्षर द्वारा बदला जा सकता है। इस प्रकार, उदाहरण के लिए, नियम $f(x) = -x,\ x \in \mathbb{N}$ को $f(t) = -t,\ t \in \mathbb{N}$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। चर x (या t या u) को **स्वतंत्र (independent) चर** कहा जाता है तथा f(x) स्वतंत्र चर पर आश्रित (dependent) चर है।

आइए फलनों पर आधारित कुछ और उदाहरणों की चर्चा करें।

उदाहरण 10: मान लीजिए कि $f(x) = 2x^3 - x$ है। $f(-1), f(0), f(2), f(\pi), f(x+h)$ और $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ x और h वास्तविक संख्याएँ हैं और $h \neq 0$ है।

हलः इस स्थिति में, फलन f के लिए परिभाषित नियम हमें बताता है कि स्वतंत्र चर x को उसके घन के दुगुने में से घटाइए। इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं:

$$f(-1) = 2(-1)^3 - (-1) = -2+1 = -1$$

$$f(0) = 2(0)^3 - (0) = 0$$

$$f(2) = 2(2)^2 - (2) = 6$$

$$f(\pi) = 2\pi^3 - \pi$$

$f(x+h)$ ज्ञात करने के लिए, f के सूत्र को अधिक निष्पक्ष प्राकृति पदों में लिखना प्रारंभ करते हैं, जैसे कि

$$f(\square) = 2(\square)^3 - (\square)$$

फिर हम प्रत्येक बॉक्स में $(x+h)$ लिखते हैं। हमें प्राप्त होता हैः

$$\begin{aligned} f(x+h) &= 2(x+h)^2 - (x+h) \\ &= 2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x+h) \\ &= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - x - h \end{aligned}$$

अंत में, यदि $h \neq 0$ हैं, तो

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{[2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - x - h] - (2x^3 - x)}{h} \\ &= 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 1 \text{ है।} \end{aligned}$$

* * *

ध्यान दीजिए कि व्यंजक $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ एक अंतर भागफल कहलाता है तथा इसका उपयोग बाद में आने वाली इकाइयों में अवकलजों को अभिकलित करने में किया जाएगा।

उदाहरण 11 : यह ज्ञात है कि रिक्तता में किसी ऊँचाई से गिराई गई वस्तु t सैकण्ड में d मीटर दूरी सूत्र $d(t)=9t^2, t\ge 0$ के अनुसार गिरेगी।

i) प्रथम सैकण्ड में वह वस्तु कितनी दूर गिरेगी? अगले 2 सैकण्डों में कितनी?

ii) समय अंतराल $t=1$ से $t=1+h$ सैकण्डों में वह कितनी दूर गिरेगी?

iii) समय अंतराल 1 सैकण्ड से $t=3$ सैकण्डों में दूरी परिवर्तन की औसत दर (m / सैकण्ड में) क्या है?

iv) समय अंतराल $t=x$ सैकण्ड से $t=(x+h)$ सैकण्ड में दूरी परिवर्तन की औसत दर क्या है?

हलः i) यहाँ $d(1)=9$ है।

इसलिए प्रथम सैकण्ड में वह वस्तु 9 m की दूरी गिरेगी।

अगले दो सैकण्डों में वह वस्तु $d(3)-d(1)=81-9=72m$ की दूरी गिरेगी।

ii) $d(1+h)-d(1)=9(1+h)^2-9(1)^2=9h^2+18h$

iii) वाँछित दूरी परिवर्तन की औसत दर

$$=\frac{\text{दूरी में परिवर्तन}}{\text{समय में परिवर्तन}}=\frac{d(3)-d(1)}{3-1}=\frac{72}{2}=36\text{m/सैकण्ड}$$

iv) $t=x$ से $t=x+h$ में दूरी परिवर्तन की औसत दर

$$=\frac{d(x+h)-d(x)}{(x+h)-x}=\frac{d(x+h)-d(x)}{h}=\frac{9(x+h)^2-9x^2}{h}=9h+18$$

* * *

कुछ फलनों को उनके प्रॉंत के विभिन्न भागों पर विभिन्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है तथा इन्हें एक से अधिक सूत्रों के पदों में व्यक्त किया जाता है। ऐसे फलनों को हम **टुकड़ों अनुसार – परिभाषित फलन** कहते हैं। नीचे दिया उदाहरण टुकड़ों अनुसार परिभाषित फलन का है।

उदाहरण 12: मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक एक फलन f

$$f(x)=\begin{cases} x\cos x & \text{if } x<2 \\ 3x^2-1 & \text{if } x\ge 2 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। $f(-0.5), f(\pi/2)$ और $f(2)$ ज्ञात कीजिए।

यहाँ x रेडियन में है।

हल: $f(-0.5)$ ज्ञात करने के लिए, हम सूत्र की पहली पंक्ति का प्रयोग करते हैं, क्योंकि $-0.5 < 2$ है।

$\therefore f(-0.5) = -0.5\cos(-0.5) = -0.5\cos 0.5 \approx -0.5\times 0.27 = -1.35$ है।

प्रतीक '≈' लगभग के लिए प्रयोग किया जाता है।

$f(\pi/2)$ ज्ञात करने के लिए भी हम सूत्र की पहली पंक्ति का प्रयोग करते हैं, क्योंकि $\frac{\pi}{2} \approx 1.57 < 2$ है।

$\therefore f(\pi/2) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(0) = 0$ है।

अंत में, क्योंकि $2 > 2$ है, इसलिए हम $f(2)$ ज्ञात करने के लिए, सूत्र की दूसरी पंक्ति का प्रयोग करते हैं।

$f(2) = 3(2)^2 - 1 = 11$ है।

* * *

अब आप निम्नलिखित अभ्यास प्रश्न करने का प्रयास कर सकते हैं।

E14) निम्नलिखित फलनों के प्राँत और परिसर ज्ञात कीजिए:

i) $y = 3 - |x|$

ii) $y = \frac{12}{x}$

iii) $y = x^4 - 2x^2 - 3$

E15) यदि $f(t) = \sqrt{t^2 - 16}$ है, तो t के वे सभी मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(t)$ एक वास्तविक संख्या है। साथ ही, t का वह मान भी ज्ञात कीजिए, जिसके लिए $f(t) = 3$ है।

E16) यदि $g(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + x}$ है, तो $g(x)$ का प्राँत ज्ञात कीजिए। साथ ही, $g(x) = 0$ को हल भी कीजिए।

E17) मान लीजिए कि $f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$ है।

i) $f(-7)$ और $f(3)$ ज्ञात कीजिए।

ii) x के किस मान के लिए फलन परिभाषित है?

iii) f का परिसर ज्ञात कीजिए।

iv) क्या $f(2+8)$, $f(2) + f(8)$ के बराबर है? पुष्टि कीजिए।

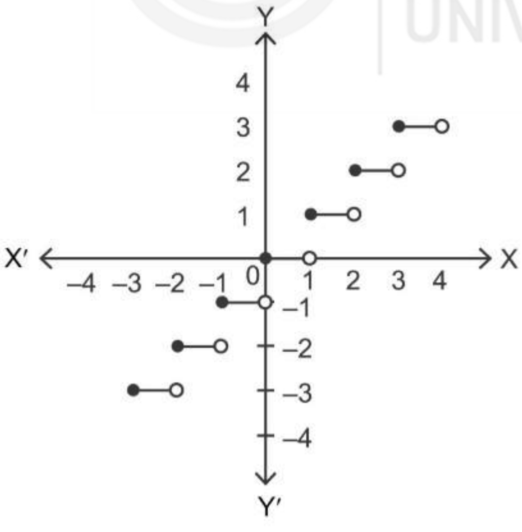
v) क्या $f(-1+6)$, $f(-1) + f(6)$ के बराबर है? पुष्टि कीजिए।

E18) मान लीजिए कि $f(x) = 3x + 2$ है। क्या $f(a^2)$ कभी $(f(a))^2$ के बराबर होगा? पुष्टि कीजिए।

E19) किसी चार्टर बस में 56 सीटें हैं तथा वह तब तक नहीं चलेगी जब तक कि उसकी 30 सीटें भर न जाएँ। जब 30 यात्री हों, तो एक टिकट की लागत रु 30 है, परंतु 30 के ऊपर प्रत्येक यात्री के लिए प्रत्येक टिकट में रु 5 की कमी कर दी जाती है। उस चार्टर बस द्वारा एकत्रित कुल राशि को यात्रियों की संख्या p के एक फलन के रूप में व्यक्त कीजिए।

इकाई 2 में आपके द्वारा अध्ययन किए गए विभिन्न प्रकार के फलनों के अतिरिक्त, हम और अधिक फलनों जैसे अधिकतम पूर्णांक फलन, परिमेय फलन, बहुपद फलन, त्रिकोणमितीय फलन, इत्यादि के बारे में अपने अध्ययन को आगे बढ़ाएँगे।

1. अधिकतम पूर्णांक फलन : एक वास्तविक संख्या x को लीजिए। या तो यह एक पूर्णांक, मान लीजिए n है (ताकि $x = n$ है) या यह एक पूर्णांक नहीं है। यदि यह एक पूर्णांक नहीं है, तो l.u.b. गुण का प्रयोग करते हुए, यह दर्शाया जा सकता है कि एक $n \in \mathbb{Z}$ ऐसा है कि $n \leq x < n+1$ है। [इसकी उपपत्ति इस कोर्स में सम्मिलित नहीं है]। साथ ही, एक दी हुई वास्तविक संख्या x के लिए, हम ऐसा केवल एक ही पूर्णांक n ज्ञात कर सकते हैं। हम कहते हैं कि n अधिकतम पूर्णांक है जो x से बड़ा नहीं है और हम इसे [x] द्वारा व्यक्त करते हैं। उदाहरणार्थ, $[3] = 3, [3.5] = 3$ और $[-3.5] = -4$ है। आइए, $f(x) = [x], x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ पर विचार करें, जो **अधिकतम पूर्णांक का मान ग्रहण करता है अर्थात् x से छोटा या उसके बराबर पूर्णांक। ऐसे फलन को अधिकतम पूर्णांक फलन (greatest integer function)** कहते हैं। इस फलन का आलेख चित्र 6 में दर्शाया गया है। (यह एक अनंत सीढ़ी के सोपानों के प्रकार का दिखता है।



चित्र 6: $f(x) = [x]$

ध्यान दीजिए कि इस आलेख में, इकाई लंबाई वाले अपरिमित रूप से अनेक रेखाखंड सम्मिलित हैं, जो सभी x-अक्ष के समांतर है। साथ ही, [x] की परिभाषा से, हम देख सकते हैं कि

$[x] = -2$ है, $-2 \leq x < -1$ के लिए

$[x] = -1$ है, $-1 \leq x < 0$ के लिए

$[x]=0$ है, $0 \le x < 1$ के लिए

$[x]=1$ है, $1 \le x < 2$ के लिए

$[x]=2$ है $2 \le x < 3$ के लिए, इत्यादि।

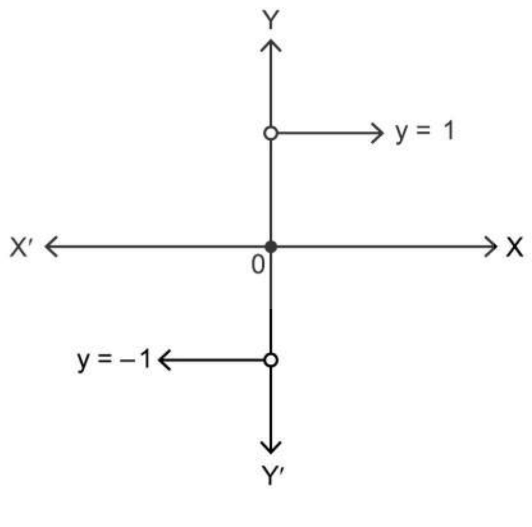
2. बहुपद फलन : एक बहुपद फलन $f(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ होता है, जहाँ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$ है तथा n एक ऋणेत्तर (non–negative) पूर्णांक है। यदि $a_0 \ne 0$ है, तो पूर्णांक n उस बहुपद की घात (degree) कहलाता है। $f(x)=2x^3+5x-\frac{1}{2}$, $f(x)=\sqrt{2}x^4-\pi x$, इत्यादि बहुपद फलनों के कुछ उदाहरण हैं, जबकि $g(x)=2x^{1/2}+3$ द्वारा परिभाषित फलन g एक बहुपद फलन नहीं है। (क्यों?)

3. परिमेय फलन : एक परिमेय फलन दो बहुपद फलनों का भागफल होता है। इसे $f(x)=g(x)/k(x)$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $g(x)$ और $k(x)$ क्रमशः घातों n और m के बहुपद फलन हैं। यह उन सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए परिभाषित है, जिनके लिए $k(x) \ne 0$ है। उदाहरणार्थ,

$f(x)=\dfrac{2x-3}{x^4+2x-5}, f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ इत्यादि

4. सिगनम फलन : $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ if } x>0 \\ 0, \text{ if } x=0 \\ -1, \text{ if } x<0 \end{cases}$

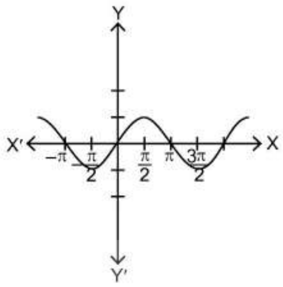
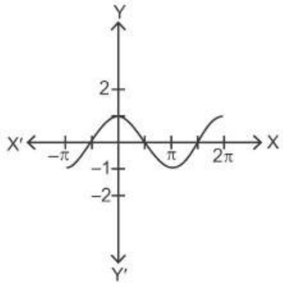
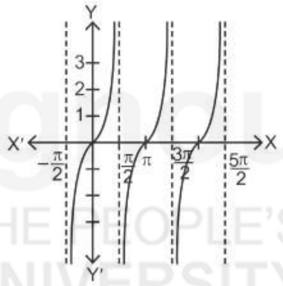
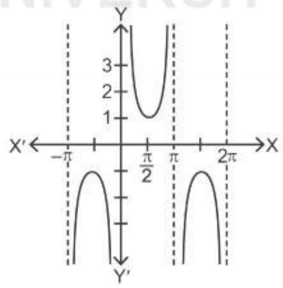
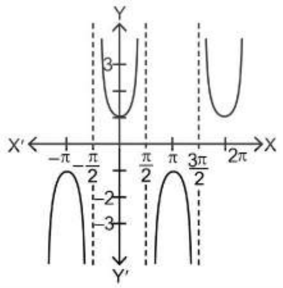
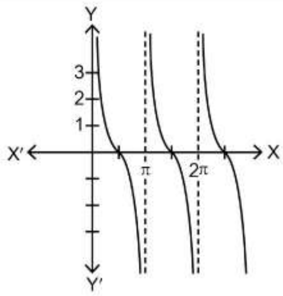
द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक **सिगनम चिह्नक फलन (signum function)** कहलाता है। इस सिगनम फलन का प्रांँत $\mathbb{R}$ है तथा परिसर $\{-1, 0, 1\}$ है। इस सिगनम फलन का आलेख चित्र 7 में दर्शाया गया है।



चित्र 7: सिगनम फलन

5. त्रिकोणमितीय (या वृत्तीय) फलन : त्रिकोणमितीय फलन हैः साइन, कोसाइन, टैनजेन्ट, सीकेंट, कोसीकेंट और कोटेजेन्ट फलन। त्रिकोणमितीय फलनों के रूपों को उनके प्रांँत, परिसर और आलेख के साथ सारणी 3 में दर्शाया गया है।

सारणी 3 : त्रिकोणमितीय फलन

फलन	प्राँत	परिसर	आलेख
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - 1]-1, 1[$	
$f(x) = \sec x$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} -]-1, 1[$	
$f(x) = \cot x$	$\mathbb{R} = \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	

आइए, निम्नलिखित उदाहरणों में फलनों के आलेख खींचें।

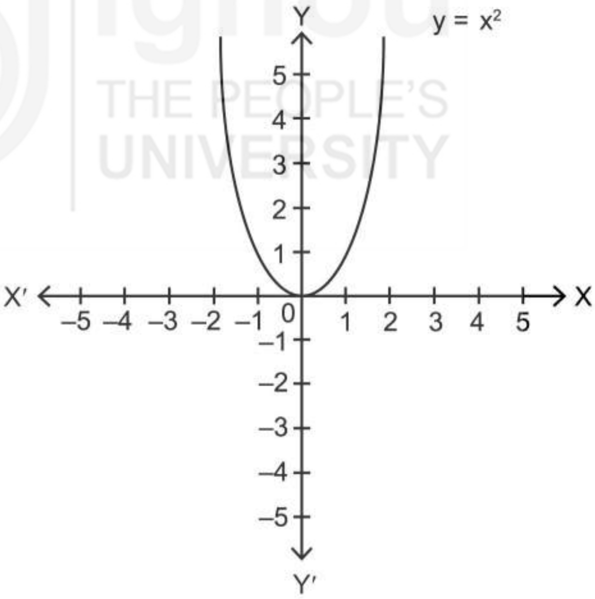
उदाहरण 13 : $y = f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ द्वारा फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को परिभाषित करें। नीचे दी हुई सारणी को पूरा करें। इस फलन के प्रॉंत और परिसर क्या हैं? f का आलेख खींचिए।

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

हल : पूर्ण की हुई सारणी नीचे दी जा रही है:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

f का प्रॉंत $= \{x : x \in \mathbb{R}\}$ है। f का परिसर $= \{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$ है। f का आलेख चित्र 8 में दिया गया है।



चित्र 8: $f(x) = x^2$ का आलेख

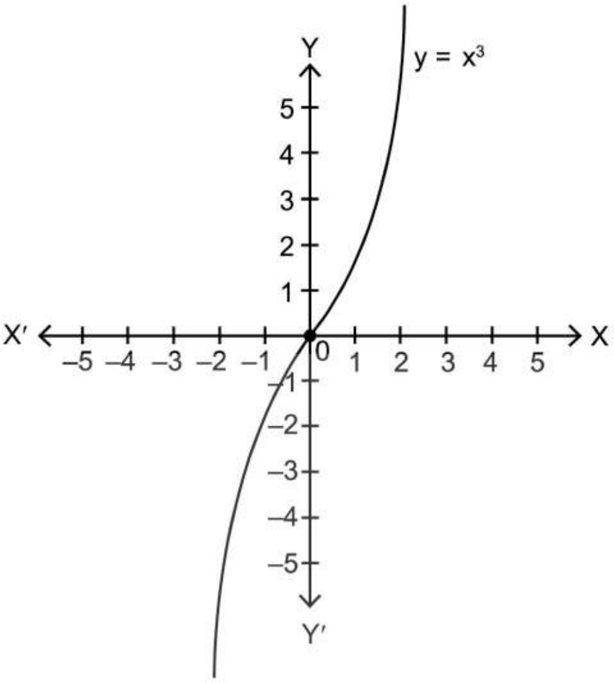
* * *

उदाहरण 14 : $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ का आलेख खींचिए।

हल : हमें प्राप्त है:

$f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = -1, f(2) = 8, f(-2) = -8, f(3) = 27, f(-3) = -27,$ इत्यादि।

f का आलेख चित्र 9 में दिया गया है।



चित्र 9: $f(x) = x^3$ का आलेख

* * *

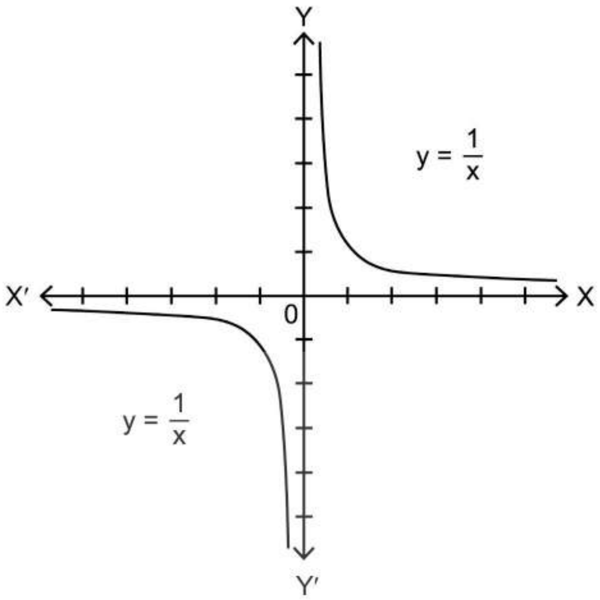
उदाहरण 15 : $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ से परिभाषित एक वास्तविक मान फलन $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ को लीजिए। इस परिभाषा का उपयोग करते हुए, नीचे दी हुई सारणी को पूरा कीजिए। इस फलन के प्राँत और परिसर क्या हैं?

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

हल : पूरी की गई सारणी नीचे दी गई है :

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	−0.5	−0.67	−1	−2	4	2	1	0.67	0.5

इसका प्राँत 0 को छोड़ते हुए, सभी वास्तविक संख्याए हैं तथा परिसर भी 0 को छोड़कर सभी वास्तविक संख्याएँ हैं। f का आलेख चित्र 10 में दिया गया है।



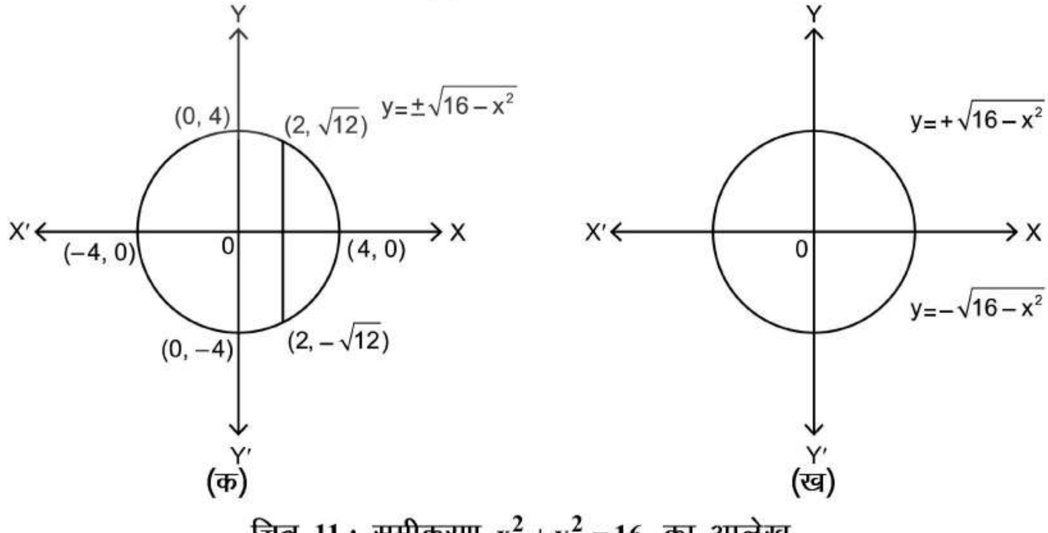
चित्र 10: $f(x) = \frac{1}{x}$ का आलेख

* * *

उदाहरण 16 : समीकरण $x^2 + y^2 = 16$ का आलेख त्रिज्या 4 वाला एक वृत्त है, जिसका केन्द्र मूलबिंदु पर है। इस समीकरण को y के लिए x के पदों में बीजीय रूप से हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

यह समीकरण y को x के एक फलन के रूप में परिभाषित नहीं करती है, क्योंकि दायाँ पक्ष इस अर्थ में ''बहु मानों वाला'' "(multiple valued)" है कि अंतराल $]-4, 4[$ में, x के मानों द्वारा y के दो संगत मान प्राप्त होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि $x = 2$ है, तो $y = \pm\sqrt{12}$ है और इसीलिए $(2, \sqrt{12})$ और $(2, -\sqrt{12})$ वृत्त पर स्थित ऐसे दो बिंदु हैं जो एक ही ऊर्ध्वाधर रेखा पर स्थित हैं, जैसा कि चित्र 11 (क) में दर्शाया गया है। परंतु हम इस वृत्त को दो अर्धवृत्तों $y = \sqrt{16 - x^2}$ और $y = -\sqrt{16 - x^2}$ के सम्मिलन के रूप में समझ सकते हैं, जैसा कि चित्र 11 (ख) में दर्शाया गया है।



चित्र 11 : समीकरण $x^2 + y^2 = 16$ का आलेख

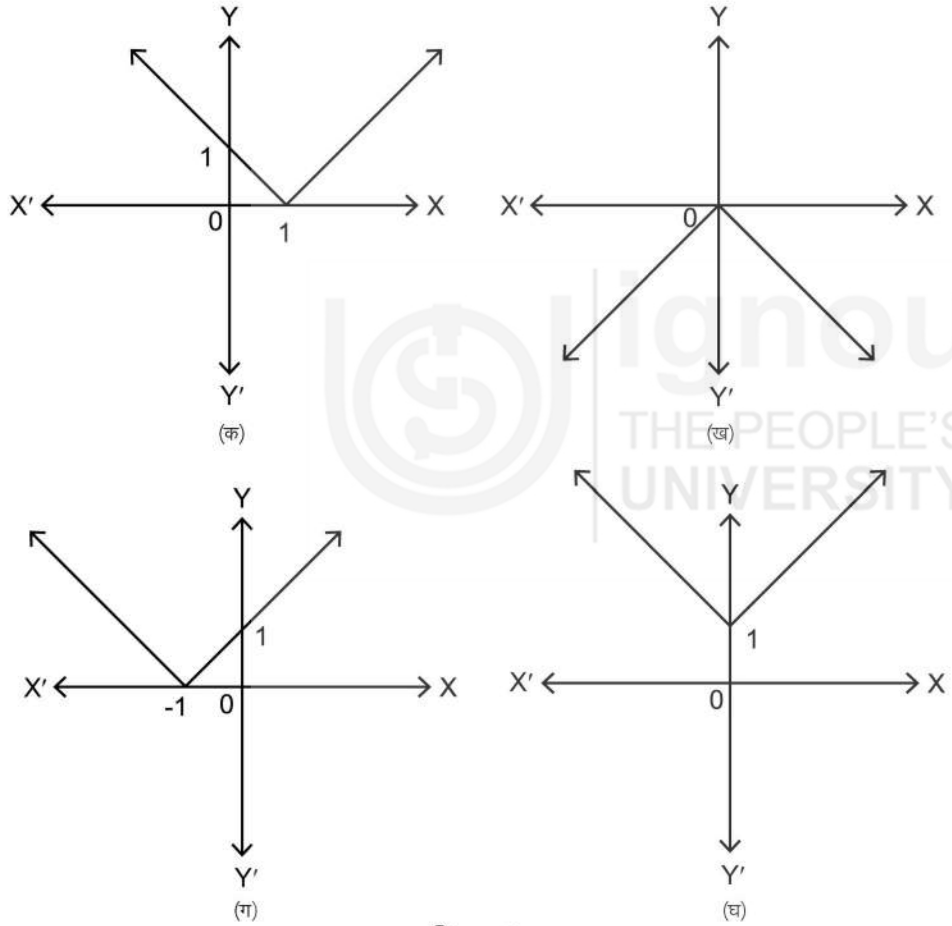
* * *

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E20) टुकड़ों के अनुसार, निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित फलन का आलेख खींचिए:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$$

E21) नीचे निरपेक्ष मान की धारणा पर चार फलनों के आलेख दिए गए हैं। ये फलन $x \to -|x|$, $x \to |x|+1$, $x \to |x+1|$ और $x \to |x-1|$ हैं, यद्यपि आवश्यक रूप से ये इसी क्रम में नहीं हैं। (प्रत्येक स्थिति में प्रांत $\mathbb{R}$ है)। क्या आप इनकी पहचान कर सकते हैं?



चित्र 12

अभी तक, इसी भाग में, हमने फलनों तथा उनके आलेखों की चर्चा की है। आप इकाई 2 में, यह अध्ययन कर चुके हैं कि किसी फलन f के प्रतिलोम, जिसे f^{-1} से व्यक्त किया जाता है, का अस्तित्व तभी होता है जब f एकैकी और आच्छादक हो। यहाँ हम प्रतिलोम फलनों के अपने अध्ययन को आगे बढ़ाएँगे।

आइए इसका प्रारंभ कुछ उदाहरणों द्वारा करें।

उदाहरण 17: $f(x)=\frac{x^5}{5}+2$ के रूप में परिभाषित $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक एक फलन f पर विचार कीजिए। f^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल : प्रतिलोम ज्ञात करने से पहले, आइए पहले जाँच करें कि यह फलन एकैकी और आच्छादक है या नहीं।

मान लीजिए कि $x, y \in \mathbb{R}$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y)$ है।

$\frac{x^5}{5} + 2 = \frac{y^5}{5} + 2 \Rightarrow x = y$ है।

अतः, f एकैकी है।

अब, हम $\frac{x^5}{5} + 2 = y$ को x के लिए y के पदों में हल करते हैं।

इससे हमें $x = \{5(y-2)\}^{\frac{1}{5}}$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, हमने f के लिए पूर्व–प्रतिबिंब प्राप्त कर लिया है तथा इसीलिए परिभाषा द्वारा f अच्छादक है।

अतः, f एकैकी आच्छादक है। इस प्रकार, f^{-1} का अस्तित्व हैं तथा f^{-1}, $\mathbb{R}$ पर एक फलन है, जो $f^{-1}(y) = \{5(y-2)\}^{\frac{1}{5}}$ द्वारा परिभाषित है।

* * *

उदाहरण 18 : फलन $f : \{3,5\} \to \{2,4\}$ पर विचार कीजिए। यदि $f(3) = 4$ और $f(5) = 2$ है, तो प्रतिलोम के अस्तित्व के संभव होने की स्थिति में, $f^{-1}(3), f^{-1}(4), f^{-1}(5), f^{-1}(2)$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ फलन एकैकी और आच्छादक है। इसलिए, f^{-1} का अस्तित्व है। f का प्राँत $\{3, 5\}$ है तथा f का परिसर $\{4, 2\}$ है। तदानुसार, f^{-1} का प्राँत $(4, 2)$ है और f^{-1} का परिसर $\{3, 5\}$ है। इस प्रकार, $f^{-1}(3)$ का अस्तित्व नहीं है।

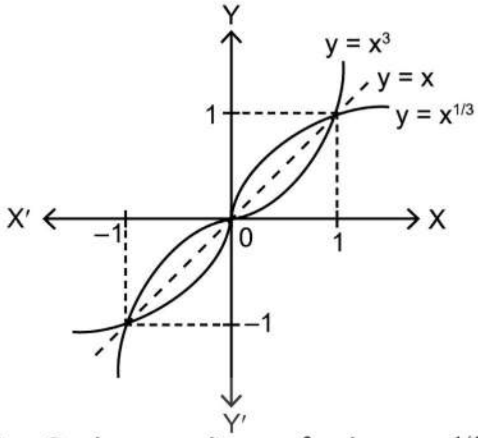
इसी प्रकार, $f^{-1}(4) = 3$ है, $f^{-1}(5)$ का अस्तित्व नहीं है तथा $f^{-1}(2) = 5$ है।

***

अब, आइए एक प्रतिलोम फलन का आलेख खींचने की समस्या को लें। फलनों और उनके प्रतिलोम फलनों के एक युग्म के आलेखों के बीच एक रोचक संबंध है, जिसके कारण, यदि इनमें से एक का आलेख ज्ञात हो, तो दूसरे का आलेख सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।

w.r.t के सापेक्ष को व्यक्त करता है।

मान लीजिए कि $f : X \to Y$ एक एकैकी और आच्छादक फलन है मान लीजिए कि $g : Y \to X$ फलन f का प्रतिलोम है। f के आलेख पर एक बिंदु (p, q) स्थित है $\Leftrightarrow q = f(p) \Leftrightarrow p = g(q) \Leftrightarrow (q, p)$ फलन g के आलेख पर स्थित है। अब, बिंदु (p, q) और (q, p) रेखा $y = x$ के सापेक्ष (w.r.t) एक दूसरे के परावर्तन है बिंदु। इसलिए, हम कह सकते हैं कि f और g के आलेख रेखा $y = x$ के सापेक्ष एक दूसरे के परावर्तन (या दर्पण प्रतिबिंब) हैं। इसलिए इससे निष्कर्ष निकलता है कि यदि f और g के आलेखों में से एक आलेख दिया हो, तो दूसरे फलन के आलेख को पहले आलेख को रेखा $y = x$ के सापेक्ष परावर्तित करने से प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरण के तौर पर, फलनों $y = x^3$ और $y = x^{1/3}$ के आलेख चित्र 13 में से दिए गए हैं। क्या आप इससे सहमत हैं कि ये दोनों फलन एक दूसरे के (परस्पर) प्रतिलोम हैं? यदि कागज की शीट, जिस पर से आलेख खींचे गए हैं, को रेखा $y = x$ के अनुदिश मोड़ा जाए, तो दोनों आलेख परस्पर संपाती (coincide) हो जाते हैं।



चित्र 13: दो प्रतिलोम फलनों $y = x^3$ और $y = x^{1/3}$ के आलेख

यदि एक दिया हुआ फलन एकैकी और आच्छादक अपने प्राँत में नहीं है, तो हम उसके प्राँत और साथ ही सहप्राँत के ऐसे उपसमुच्चय चुन सकते हैं कि वह एकैकी और आच्छादक हो जाए तथा उसके बाद उस प्राँत में उसके प्रतिलोम फलन को परिभाषित कर सकते हैं, जिसमें वह एकैकी और आच्छादक है। उदाहरणार्थ, फलन $f(x) = \sin x$ पर विचार कीजिए। क्योंकि हम जानते हैं कि $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ है, इसलिए यह फलन $\mathbb{R}$ पर न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है। परंतु यदि हम प्राँत को अंतराल $[-\pi/2, \pi/2]$ तक ही सीमित रखें, तथा सहप्राँत को $[-1,1]$ तक सीमित रखें, तो हम पाएँगे कि यह एकैकी और आच्छादक है। इस प्रकार, यदि $f(x) = \sin x \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$ हो, तो हम परिभाषित कर सकते हैं कि $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) = y$ यदि $\sin y = x$ है।

इसी प्रकार, हम फलनों $\cos^{-1}$ और $\tan^{-1}$ को क्रमशः कोसाइन और टेन्जेंट फलनों के प्रतिलोमों के रूप में परिभाषित कर सकते हैं, यदि हम इनके प्राँतों को क्रमशः $[0, \pi]$ और $[-\pi/2, \pi/2]$ तक सीमित कर लें। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों को उनके प्राँतों और परिसरों के साथ सारणी 4 में दिया गया है।

सारणी 4 : प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	प्राँत	परिसर
$\sin^{-1}$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
cosec^{-1}	$\mathbb{R} -]-1,1[$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$\sec^{-1}$	$\mathbb{R} -]-1,1[$	$[0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\tan^{-1}$	$\mathbb{R}$	$\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$\cot^{-1}$	$\mathbb{R}$	$]0,\pi[$

टिप्पणी 3 : फलन $\sin^{-1} x$ की $(\sin x)^{-1}$ से भ्राँति नहीं होनी चाहिए। वास्तव में, $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ होता है तथा इसी प्रकार अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के लिए भी ऐसा सत्य है।

निम्नलिखित अभ्यास प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E22) सारणी 4 में दिए प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख खींचिए तथा इनकी तुलना संगत त्रिकाणमितीय फलनों के आलेखों से कीजिए।

आइए अब अगले भाग में फलनों के विभिन्न प्रकारों की चर्चा करें।

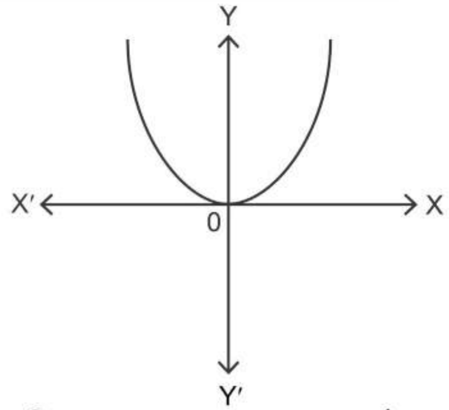
6.7 फलनों के प्रकार

इस भाग में, हम विभिन्न प्रकार के फलनों, जैसे सम्, विषम्, वर्धमान, ह्रासमान और आवर्ती फलन के बारे में बात करेंगे। प्रत्येक स्थिति में, हम संकल्पना को आलेखों द्वारा स्पष्ट करने का प्रयास करेंगे।

6.7.1 सम और विषम फलन

$f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। आप देखेंगे कि $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ है। यह एक सम फलन का उदाहरण है। आइए इस फलन के आलेख (चित्र 14) को देखें। हम पाते हैं कि यह आलेख (एक परवलय) y-अक्ष के प्रति सममित है। यदि हम कागज को y-अक्ष के अनुदिश मोड़ें, तो हम देखेंगे कि y-अक्ष के दोनों आलेख के भाग परस्पर संपाती हैं। ऐसे फलनों को **सम फलन** (even functions) कहा जाता है।

इसी प्रकार, प्राँत D में परिभाषित एक फलन f एक सम फलन कहलाता है, यदि प्रत्येक $x \in D$ के लिए $f(-x) = f(x)$ हो।



चित्र 14 : सम फलन का आलेख

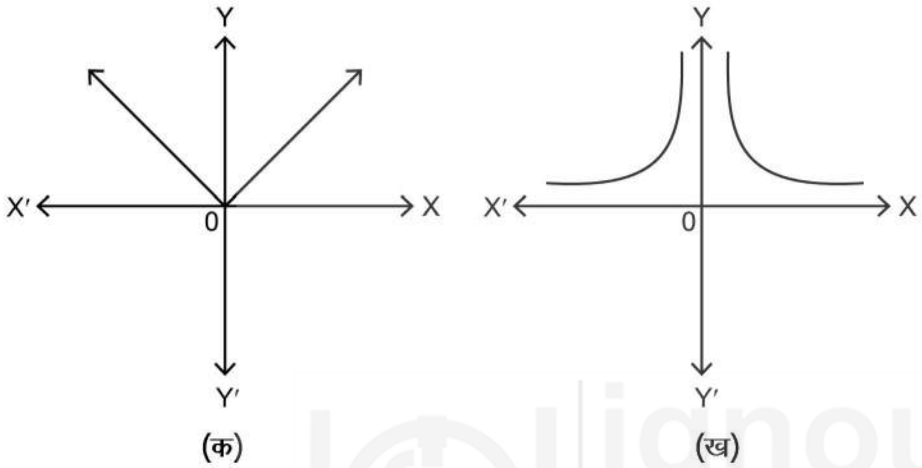
एक सम फलन का आलेख y-अक्ष के सापेक्ष सममित होता है। हम यह भी देखते हैं कि यदि किसी फलन का आलेख y-अक्ष के सापेक्ष सममित हो, तो वह फलन अवश्य ही सम फलन होना चाहिए। इस प्रकार, यदि हमें किसी सम फलन का आलेख खींचना हो, तो हमें इस गुण का लाभ उठाना चाहिए। हमें केवल आलेख के उस भाग को खींचने की आवश्यकता है, जो y-अक्ष के दाईं ओर है तथा फिर y-अक्ष के बाईं ओर आलेख के भाग को प्राप्त करने के लिए इस भाग का केवल y-अक्ष के सापेक्ष परावर्तन ले लेना चाहिए।

अब, निम्नलिखित अभ्यास प्रश्न हल कीजिए।

E23) नीचे सम फलनों के दो उदाहरण उनके आलेखों के साथ दिए हुए हैं। स्वयं अपने को, परिकलनों द्वारा और साथ ही आलेखों को देख कर, संतुष्ट भी करने का प्रयास कीजिए कि दोनों फलन वास्तव में सम फलन हैं।

i) $\mathbb{R}$ पर निरपेक्ष मान फलन $f : x \to |x|$ है। f का आलेख चित्र 15 (क) में दर्शाया गया है।

ii) $g(x) = 1/x^2, x \neq 0$ द्वारा स्थापित करते हुए, शून्येतर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित फलन g है। g का आलेख चित्र 15 (ख) में दर्शाया गया है।

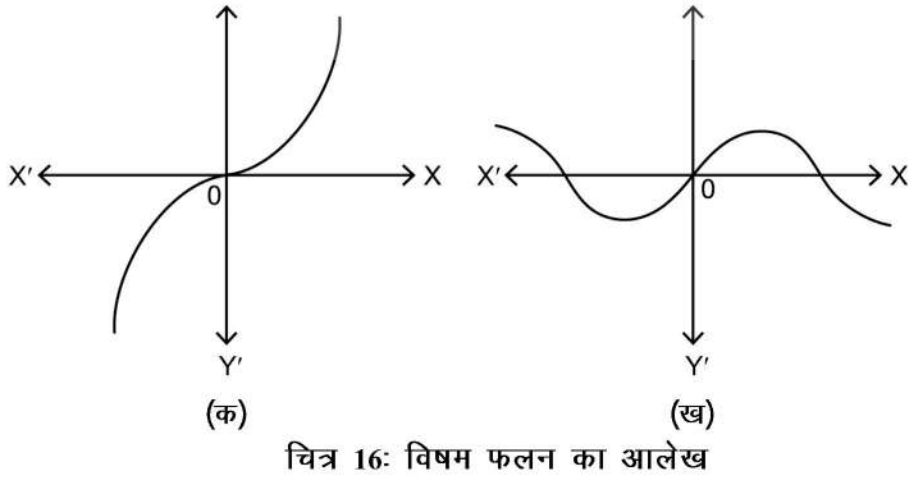


चित्र 15

आइए अब $f(x) = x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$ स्थापित करने से परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$ है।

यदि हम एक अन्य फलन g को लें जो $g(x) = \sin x$ से परिभाषित है, तो हम पुनः देख पाएँगे कि $g(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -g(x)$ है।

ऊपर दर्शाए गए फलन f और g एक दृष्टिकोण से एक जैसे हैं : $-x$ का प्रतिबिंब x के प्रतिबिंब का ऋणात्मक है। जैसे फलन विषम फलन (odd function) कहलाते हैं। इस प्रकार, D पर परिभाषित कोई फलन f एक विषय फलन कहा जाता है, यदि $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in D$ हो।



चित्र 16: विषम फलन का आलेख

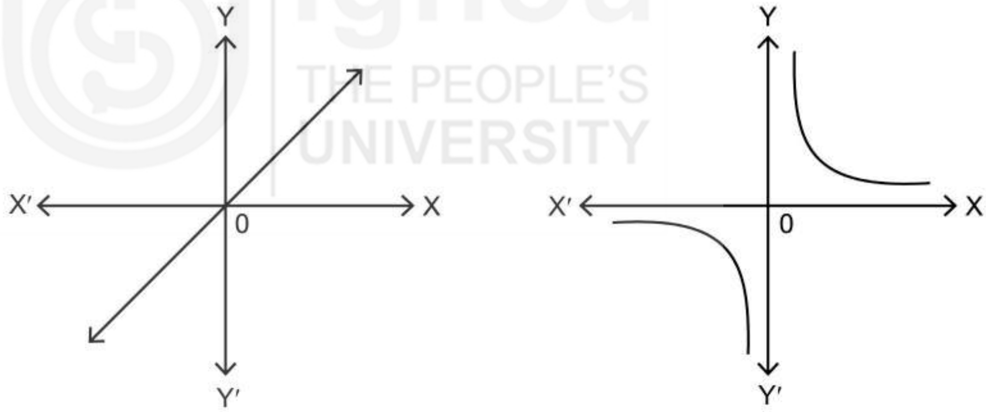
यदि किसी विषय फलन f के आलेख पर कोई बिंदु $(x, f(x))$ हो, तो बिंदु $(-x, -f(x))$ भी उस आलेख पर स्थित होगा। इसे यह कह कर व्यक्त किया जा सकता है कि एक विषय फलन का आलेख मूल बिंदु के सापेक्ष सममित होता है। दूसरे शब्दों में, यदि आप एक विषय फलन के आलेख को मूल बिंदु के परित 180^o के कोण पर घुमाएँ, तो आप पाएँगे कि आपको प्रारंभिक आलेख पुनः प्राप्त हो गया है, जैसा चित्र 16 में दर्शाया गया है। विलोमतः, यदि किसी फलन का आलेख मूलबिंदु के सापेक्ष सममित हो, तो वह फलन अवश्य ही विषम फलन होना चाहिए। उपरोक्त तथ्य, विषय फलनों के साथ कार्य करने में प्रायः उपयोगी रहते हैं।

अब, निम्नलिखित अभ्यास प्रश्न हल कीजिए।

E24) हम नीचे दो फलनों को उनके आलेखों के साथ दे रहे हैं। परिकलनों द्वारा तथा साथ ही आलेखों को देख कर, ज्ञात कीजिए कि इनमें से प्रत्येक सम है या विषय है।

i) $f(x) = x$ द्वारा परिभाषित $\mathbb{R}$ पर तत्समक फलन, जो कि चित्र 17(क) में दर्शाया गया है।

ii) $g(x) = 1/x, x \neq 0$ द्वारा परिभाषित शून्येतर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित फलन g, जो कि चित्र 17(ख) में दर्शाया गया है।



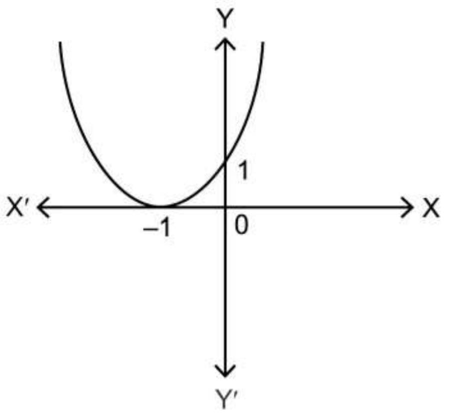
(क) (ख)

चित्र 17

जब कि इस पाठ्यक्रम में आपके सामने जो अनेक फलन आएँगे, वो या तो सम होंगे या विषय, परंतु ऐसे फलन भी होंगे जो न तो सम होंगे और न ही विषम होंगे।

उदाहरणार्थ, $f(x) = (x+1)^2$ द्वारा परिभाषित $\mathbb{R}$ पर फलन f पर विचार कीजिए। यहाँ, $f(-x) = (-x+1)^2 = x^2 - 2x + 1$ है। क्या $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ है?

इसका उत्तर हैः 'नहीं'। इसलिए, f एक सम फलन नहीं है। क्या $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ है? पुनः, उत्तर 'नहीं' है। इसलिए, f एक विषम फलन नहीं है। यही निष्कर्ष f के आलेख को देख कर निकाला जा सकता था, जो चित्र 18 में दिया गया है।



चित्र 18 : ऐसे फलन का आलेख जो न तो सम है और न ही विषम

आप देखेंगे कि यह आलेख न तो y-अक्ष के सापेक्ष सममित है और न ही मूलबिंदु के सापेक्ष सममित है।

अब नीचे दिए हुए प्रश्न को हल करने में कोई कठिनाई नहीं आनी चाहिए।

E25) निम्नलिखित फलनों में से कौन से सम हैं, कौन से विषम हैं तथा कौन से न तो सम हैं और न ही विषम हैं?

i) $f(x) \to x^2 + 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) \to x^3 - 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) \to \cos x, \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x) \to x\,|x| \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

v) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$

6.7.2 एकदिष्ट फलन

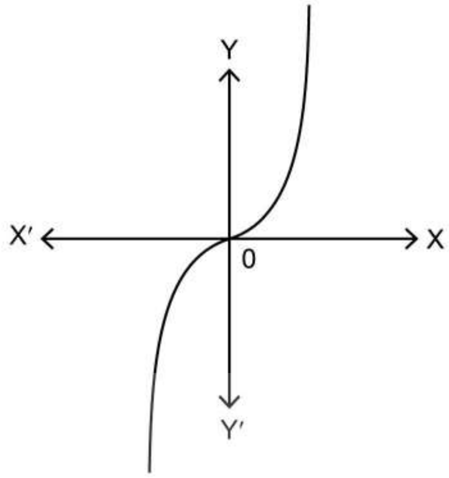
क्या किसी कंपनी के लाभ में उत्पादन के साथ वृद्धि होती है? क्या गैस के आयतन में दाब की वृद्धि के साथ कभी होती है? इस प्रकार की समस्याओं में वर्धमान या ह्रासमान फलन के प्रयोग की आवश्यकता होती है। कोई भी फलन जो इनमें से किसी एक प्रकार का हो **एकदिष्ट फलन (monotone function)** कहलाता है। आइए अब देखें कि एक **वर्धमान फलन (increasing function)** से हमारा क्या तात्पर्य है।

उदाहरण 19 : नीचे दिए अनुसार परिभाषित फलनों g और h पर विचार कीजिए:

$g(x) = x^3$ और $h(x) = \begin{cases} -1, & \text{यदि } x \le 0 \text{ है} \\ 1, & \text{यदि } x > 0 \text{ है} \end{cases}$

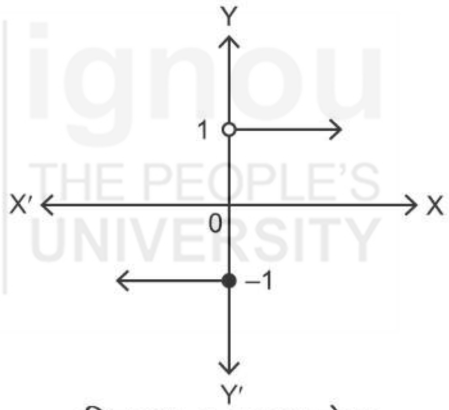
ध्यान दीजिए कि जब भी $x_2 > x_1$ हो, तो हमें $x_2^3 > x_1^3$ प्राप्त होता है, अर्थात् $g(x_2) > g(x_1)$ है।

दूसरे शब्दों में, जैसे-जैसे x में वृद्धि होती है, $g(x)$ में भी वृद्धि होती है। इस तथ्य को चित्र 19 में दर्शाए g के आलेख से देखा जा सकता है।



चित्र 19 : g का आलेख

आइए ज्ञात करें कि x में वृद्धि होने पर $h(x)$ किस प्रकार से व्यवहार करता है। इस स्थिति में, हम देखते हैं कि यदि $x_2 > x_1$ है, तो $h(x_2) \geq h(x_1)$ है। (आप इसका सत्यापन x_1 और x_2 के किन्हीं भी मानों को चुन कर कर सकते हैं।) तुल्य रूप से, हम कह सकते हैं कि जैसे-जैसे x में वृद्धि होती है, $h(x)$ में वृद्धि होती है (या उसमें कभी नहीं होती है। इसी को चित्र 20 में दिए h के आलेख से भी देखा जा सकता है।



चित्र 20 : h का आलेख

***

ऊपर दर्शाए g और h प्रकार के फलन **वर्धमान या ह्रासमान फलन** कहलाते हैं। इस चर्चा से हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है।

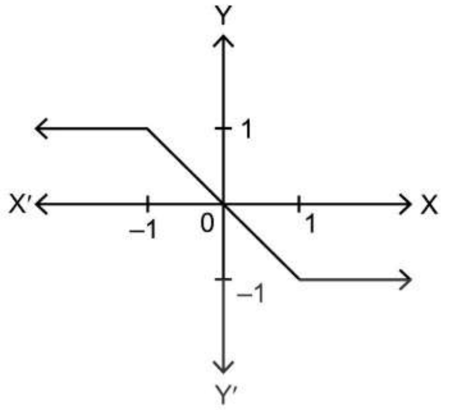
परिभाषा : प्राँत D में परिभाषित एक फलन f को **वर्धमान (या अह्रासमान)** कहा जाता है, यदि अवयवों $x_1\ x_2 \in D$ के प्रत्येक युग्म के लिए $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ हो। साथ ही, हम कहते हैं कि f **निरंतर वर्धमान (strictly increasing)** है, यदि $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (निरंत असमिका) हो।

स्पष्टतः, ऊपर बताया गया फलन $g(x) = x^3$ एक निरंतर वर्धमान फलन है, जबकि h एक निरंतर वर्धमान फलन नहीं है।

अब हम एक अन्य संकल्पना का अध्ययन करेंगे, जो कुछ अर्थ में, वर्धमान फलन की संकल्पना की पूरक है।

उदाहरण 20 : $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \leq -1 \\ -x, & \text{यदि } -1 < x < 1 \\ -1, & \text{यदि } x \geq 1 \end{cases}$

द्वारा $\mathbb{R}$ पर परिभाषित एक फलन f पर विचार कीजिए। f का आलेख चित्र 21 में दर्शाया गया है।



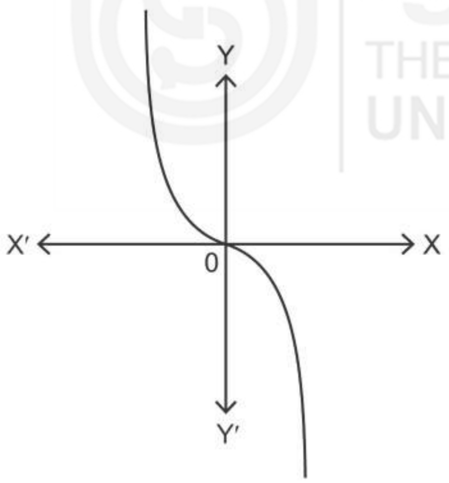
चित्र 21 : f का आलेख

आलेख से, हम सरलता से देख सकते हैं कि जैसे-जैसे x में वृद्धि होती है, f में वृद्धि नहीं होती है।

अर्थात्, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$ या $f(x_2) \not> f(x_1)$ है।

अब, फलन $g : x \to -x^3 (x \in \mathbb{R})$ पर विचार कीजिए।

g का आलेख चित्र 22 में दर्शाया गया है



चित्र 22 : g का आलेख

क्योंकि $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2^3 > x_1^3 \Rightarrow -x_2^3 < -x_1^3 \Rightarrow g(x_2) < g(x_1)$ है, इसलिए हम ज्ञात करते हैं कि जैसे–जैसे x में वृद्धि होती है, $g(x)$ में कभी होती हैं। उपरोक्त f और g जैसे फलन **ह्रासमान** या **अवर्धमान फलन** कहलाते हैं।

***

उपरोक्त, दोनों उदाहरणों से निम्नलिखित परिभाषाओं का सुझाव मिलता हैः

परिभाषा : किसी प्राँत D पर परिभाषित एक फलन f **ह्रासमान** या **(अवर्धमान)** कहा जाता है, यदि अवयवों $x_1, x_2 \in D$ के प्रत्येक युग्म के लिए, जिसमें $x_2 > x_1$ हो, हमें $f(x_2) \le f(x_1)$ प्राप्त हो। साथ ही, f को **निरंतर ह्रासमान** कहा जाता है, यदि $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ हो।

उदाहरण 20 में, हम देख चुके हैं कि दो ह्रासमान फलनों f और g में से फलन g निरंतर ह्रासमान है, जबकि f ह्रासमान है, परंतु निरंतर ह्रासमान नहीं है।

अब हम एकदिष्ट फलन की परिभाषा दे रहे हैं।

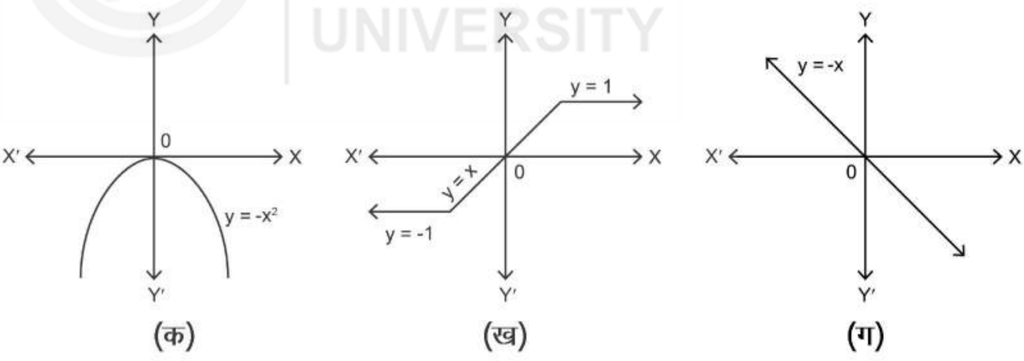
परिभाषा : प्राँत D पर परिभाषित एक फलन **एकदिष्ट (monotonic) फलन** कहलाता है, यदि वह या तो D पर वर्धमान हो या ह्रासमान हो।

प्रायः वाक्यांश 'एकदिष्ट वर्धमान' और 'एकदिष्ट ह्रासमान' क्रमशः 'वर्धमान' और 'ह्रासमान' के लिए प्रयोग किए जाते हैं। जबकि अनेक फलन एकदिष्ट होते हैं, परंतु ऐसे बहुत से फलन हैं, जो एकदिष्ट नहीं होते। उदाहरणार्थ, फलन $f: x \to x^2 (x \in \mathbb{R})$ पर विचार कीजिए। आपने चित्र 8 में f का आलेख देखा था। यह फलन न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

यदि हम पाते हैं कि दिया हुआ फलन एकदिष्ट नहीं है, फिर भी हम इसके प्राँत के कुछ उपसमुच्चय ऐसे निर्धारित कर सकते हैं, जिन पर फलन वर्धमान या ह्रासमान हो। उदाहरणार्थ, फलन $f(x) = x^2$ अंतराल $]-\infty, 0]$ में निरंतर ह्रासमान है तथा $[0, \infty[$ से निरंतर वर्धमान है।

अब निम्नलिखित अभ्यास प्रश्न हल कीजिए।

E26) नीचे कुछ फलनों के आलेख दिए गए हैं। इन्हें वर्धमान, निरंतर ह्रासमान, न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान के रूप में वर्गीकृत कीजिए।



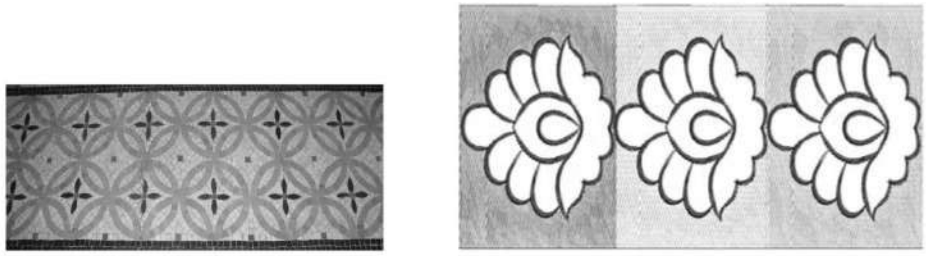
चित्र 23

अब हम आवर्ती फलनों की चर्चा करेंगें।

6.7.3 आवर्ती फलन

आवर्ती फलन बहुत बार विज्ञान की विभिन्न शाखाओं में गणित के अनुप्रयोगों में प्रकट होते रहते हैं। प्रकृति में अनेक परिघटनाएँ जैसे जल तरंगों, ध्वनि तरंगों, प्रकाश तरंगों, विद्युत चुम्बकीय तरंगों का संचारण, हृदय कंपन, परिपथों में गति आदि आवर्ती हैं तथा इनकी व्याख्या करने के लिए हमें आवर्ती फलनों की आवश्यकता होती है। इसी प्रकार, ऋतुओं, मानसून, इत्यादि को भी आवर्ती फलनों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

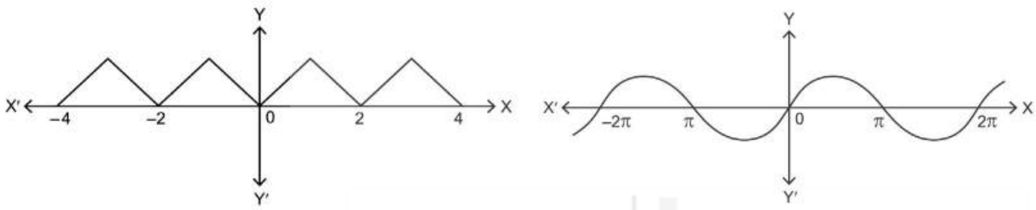
नीचे दिए पैटर्न पर दृष्टि डालिए:



(क) (ख)

चित्र 24 : पैटर्न

आपने चित्र 19 में दर्शाए गए आलेखों जैसे कुछ पैटर्न साड़ियों के बार्डरों, वॉल पेपर्स (wall papers), इत्यादि पर बने अवश्य ही देखे होंगे। इनमें से प्रत्येक पैटर्न में एक डिज़ाइन की बार–बार आवर्ती होती रहती है। ऐसी ही स्थिति आवर्ती फलनों के आलेखों में प्रकट होती है। चित्र 25 में दिए आलेखों को देखिए।



(क) (ख)

चित्र 25 : एक आवर्ती फलन का आलेख

ऊपर दर्शाई गई प्रत्येक चित्र में, उसके आलेख में एक निश्चित पैटर्न है, जिसकी आवर्ती अपरिमित रूप से अनेक बार होती है। ये दोनों आलेख आवर्ती फलनों (periodic functions) को निरूपित करते हैं। इस स्थिति को समझने के लिए, आइए इन आलेखों की निकटता से जाँच करें।

चित्र 25 (क) में दिए आलेख पर विचार कीजिए। $x=-1$ और $x=1$ के बीच में स्थित् आलेख का भाग प्राँत $-1\le x\le 1$ पर फलन $x\to|x|$ का आलेख है।

इस भाग की x-अक्ष के अनुदिश आलेख को दो इकाई स्थानांतरित करके (चला कर) बाईं ओर तथा दाईं ओर भी बार-बार आवर्ती होती है। अर्थात् यह कहना चाहिए कि यदि $[-1, 1]$ पर x कोई बिंदु है, तो $x, x\pm 2, x\pm 4, x\pm 6, \ldots$ पर सभी कोटियाँ बराबर हैं। इसीलिए, यह आलेख $f(x)=|x|$, यदि $-1\le x\le 1$ और $f(x+2)=f(x)$ द्वारा परिभाषित फलन को निरूपित करता है।

चित्र 25 (ख) में दिया आलेख साइन फलन $x\to\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$ का आलेख है। आप देखेंगे कि 0 और 2π के बीच आलेख के भाग की दाईं ओर और बाईं ओर दोनों ओर आवर्ती होती है। आप पहले से जानते हैं कि $\sin(x+2\pi)=\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$ है। अब हम पद ''एक आवर्ती फलन'' को एक परिशुद्ध अर्थ देते हैं।

परिभाषा : प्राँत D पर परिभाषित कोई फलन f एक **आवर्ती फलन** कहा जाता है, यदि एक ऐसी धनात्मक संख्या p का अस्तित्व हो ताकि सभी $x\in D$ के लिए $f(x+p)=f(x)$ हो। संख्या p को फलन f का एक आवर्तक (period) कहते हैं। यदि ऊपर वर्णित गुण के साथ एक न्यूनतम धनात्मक p का अस्तित्व हो, तो इसे **f का आवर्तक** कहा जाता है। जैसा कि आप जानते हैं कि $\tan(x+n\pi)=\tan x\ \forall n\in N$ है। इसका अर्थ है कि

$n\pi, n \in N$ में से सभी टैन्जेंट फलन के आवर्तक हैं। इनमें से सबसे छोटा, अर्थात् π, टैन्जेंट फलन का आवर्तक है।

देखिए, कि क्या आप इस प्रश्न को कर सकते हैं।

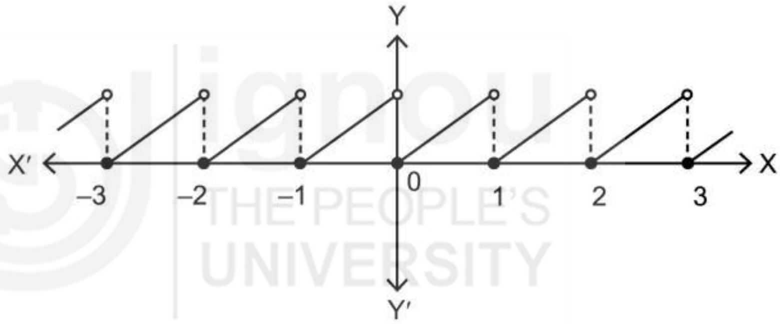
E27) i) चित्र 25 में दिए फलनों के आवर्तक क्या हैं?

ii) क्या आप इन फलनों में प्रत्येक का एक अन्य आवर्तक दे सकते हैं?

आवर्ती फलन के एक अन्य उदाहरण के रूप में स्थापन $f(x) = x - [x]$ द्वारा $\mathbb{R}$ पर परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए।

आपको याद होगा कि [x] उस अधिकतम पूर्णांक को निरूपित करता है, जो x से बड़ा नहीं है। इस फलन का आलेख चित्र 26 में दर्शाया गया है।

आलेख से (तथा परिकलन से भी) हम सरलता से देख सकते हैं कि $\forall x \in \mathbb{R}$ और प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक x के लिए, $f(x+n) = f(x)$ है।



चित्र 26 : f का आलेख

इसलिए, दिया हुआ फलन आवर्ती है तथा संख्याएँ $1, 2, 3, 4$ इसके आवर्तक हैं। इनमें से सबसे छोटा, अर्थात् 1 आवतर्क है। इस प्रकार, दिया हुआ फलन आवर्ती है और इसका आवतर्क है।

टिप्पणी 4 : एकदिष्टता और आवर्तता फलनों के ऐसे दो गुण हैं, जो एक अचर फलन के अतिरिक्त एक साथ नहीं रह सकते। एक एकदिष्ट फलन कभी आवर्ती नहीं हो सकता तथा एक आवर्ती फलन कभी एकदिष्ट नहीं हो सकता।

व्यापक रूप में, यह सुनिश्चित करना कि एक दिया हुआ फलन आवर्ती या नहीं इतना सरल नहीं होता। परंतु कभी-कभी इसे तुरंत सीधे-सीधे प्रकार से किया जा सकता है।

उदाहरण 21 : ज्ञात कीजिए कि फलन $f : x \to x^2 \; \forall x \in \mathbb{R}$ आवर्ती है या नहीं।

हल : हम यह कल्पना करके प्रारंभ करते हैं कि यह आवर्तक p के साथ आवर्ती है। तब, हमें $p > 0$ प्राप्त होना चाहिए तथा $f(x+p) = f(x) \; \forall x$ होना चाहिए।

$\Rightarrow \; (x+p)^2 = x^2 \; \forall x$

$\Rightarrow \; 2xp + p^2 = 0 \; \forall x$

$\Rightarrow \; p(2x+p) = 0 \; \forall x$

$x \neq -p/2$ पर विचार करने पर, हम ज्ञात करते हैं कि $2x+p \neq 0$ है। इस प्रकार, $p=0$ है। यह एक अंतर्विरोध है।

अतः, ऐसी किसी धनात्मक संख्या p का अस्तित्व नहीं है कि $f(x+p)=f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ हो तथा इसके परिणामस्वरूप f आवर्ती नहीं है।

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

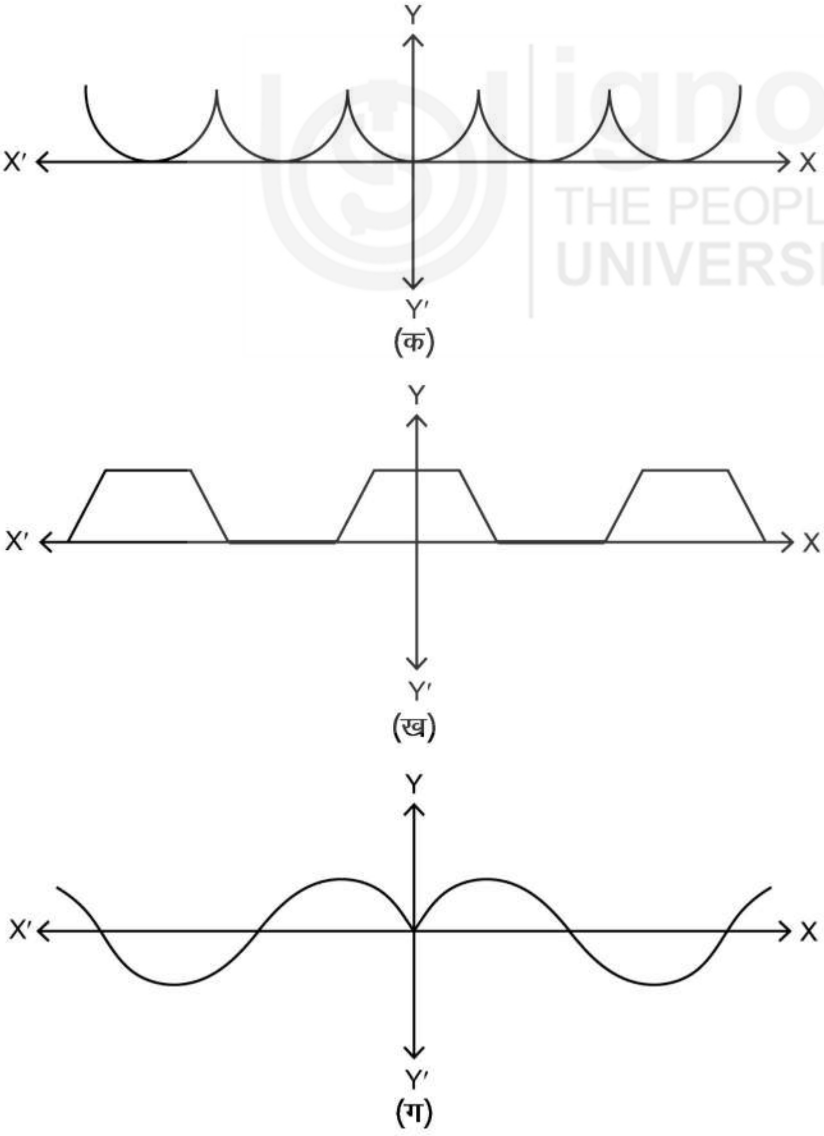
E28) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन आवर्ती हैं या नहीं। आवर्ती फलनों के आवर्तक लिखिए।

i) $x \to \cos x$ ii) $x \to x+2$

iii) $x \to \sin 2x$ iv) $x \to \tan 3x$

v) $x \to \cos(2x+5)$ vi) $x \to \sin x + \sin 2x$

E29) तीन फलनों के आलेख नीचे दिए गए हैं। इन फलनों को इन फलनों को आवर्ती और आवर्ती नहीं में वर्गीकृत कीजिए।



चित्र 27

E30) क्या दो आवर्ती फलनों का योग भी आवर्ती होता है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

इस इकाई में जो हमने चर्चा की है उसका सारांश देकर हम इस इकाई को समाप्त करते हैं।

6.8 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं के बारे में पढ़ा है:

1. योग, गुणन, आर्किमिडीय गुण, इत्यादि के मौलिक गुणों की संक्षिप्त रूप से समीक्षा की है।

2. मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ का एक उपसमुच्चय S है। $\mathbb{R}$ में एक अवयव u समुच्चय S का **उपरि परिबंध** (upper bound) कहा जाता है, यदि S में प्रत्येक x के लिए $u \geq x$ सत्य हो। दूसरे शब्दों में, एक दिए हुए समुच्चय के लिए, एक संख्या जो उसके सभी अवयवों से बड़ी हो या उनके बराबर हो उस समुच्चय का उपरि परिबंध कहलाती है। हम कहते हैं कि S **ऊपर की ओर परिबद्ध है**। यदि S का एक उपरि परिबंध हो।

3. एक दिए हुए समुच्चय S के लिए **निम्न परिबंध** एक ऐसी संख्या v होती है कि सभी $x \in S$ के लिए $v \leq x$ हो। हम कहेंगे कि यह समुच्चय **नीचे की ओर परिबद्ध** है, यदि हम इसके लिए निम्न परिबंध ज्ञात कर सकें।

4. $\mathbb{R}$ के किसी भी उपसमुच्चय S का एक ऐसा उपरि परिबंध, जो S के किसी भी अन्य उपरि परिबंध से छोटा हो उसका **उच्चक (supremum) या न्यूनतम उपरि परिबंध** (l.u.b) कहलाता है। इसी प्रकार, S का ऐसा निम्न परिबंध जो S के किसी भी अन्य निम्न परिबंध से बड़ा हो, उसका **निम्नक (infimum)** या अधिकतम निम्न **परिबंध (g.l.b)** कहलाता है।

5. एक समुच्चय $S \subset \mathbb{R}$ **परिबद्ध** होता है, यदि इसका एक उपरि परिबंध और एक निम्न परिबंध दोनों हों।

6. एक वास्तविक संख्या x के निरपेक्ष मान इस रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{यदि } x \geq 0 \\ -x, \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

7. $\mathbb{R}$ में विभिन्न प्रकार के अंतराल, जहाँ $a, b \in \mathbb{R}$ हैं, निम्नलिखित हैं:

   विवृत : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

   संवृत : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

   अर्धविवृत : $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ या $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

8. हमने प्रतिलोम फलनों के आलेखों की चर्चा की।

9. प्राँत D में परिभाषित एक फलन f सम फलन कहलाता है, यदि प्रत्येक $x \in D$ के लिए $f(-x) = f(x)$ हो।

10. प्राँत D में परिभाषित एक फलन f विषम फलन कहलाता है, यदि प्रत्येक $x \in D$ के लिए $f(-x) = -f(x)$ हो।

11. प्राँत D में परिभाषित एक फलन f को **वर्धमान (या अह्रासमान)** कहा जाता है, यदि अवयवों $x_1\, x_2 \in D$ के प्रत्येक युग्म के लिए $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ हो। साथ ही, हम कहते हैं कि f **निरंतर वर्धमान (strictly increasing)** है, यदि $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (निरंत असमिका) हो।

12. किसी प्राँत D पर परिभाषित एक फलन f **ह्रासमान** या **(अवर्धमान)** कहा जाता है, यदि अवयवों $x_1, x_2 \in D$ के प्रत्येक युग्म के लिए, जिसमें $x_2 > x_1$ हो, हमें $f(x_2) \leq f(x_1)$ प्राप्त हो। साथ ही, f को **निरंतर ह्रासमान** कहा जाता है, यदि $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ हो।

13. प्राँत D पर परिभाषित एक फलन **एकदिष्ट (monotonic) फलन** कहलाता है, यदि वह या तो D पर वर्धमान हो या ह्रासमान हो।

14. प्राँत D पर परिभाषित कोई फलन f एक **आवर्ती फलन** कहा जाता है, यदि एक ऐसी धनात्मक संख्या p का अस्तित्व हो ताकि सभी $x \in D$ के लिए $f(x+p) = f(x)$ हो। संख्या p को फलन f का एक आवर्तक (period) कहते हैं। यदि ऊपर वर्णित गुण के साथ एक न्यूनतम धनात्मक p का अस्तित्व हो, तो इसे **f का आवर्तक** कहा जाता है।

6.7 हल / उत्तर

E1) नहीं, $(-3) \times (-2) = 6 \notin S$

E2) पंक्ति 2, क्योंकि सहचारी नियम व्यवकलन के लिए सत्य नहीं है, अर्थात् $a-(b-c) \neq (a-b)-c$ है।

E3) i) स्पष्टतः, S_1 के लिए उपरि परिबंध 2 है तथा अन्य सभी उपरि परिबंध 2 से बड़े हैं। अतः, $(S_1) = 2$ है।

इसी प्रकार, S_1 के लिए 1 एक निम्न परिबंध है तथा अन्य सभी निम्न परिबंध 1 से छोटे हैं। इस प्रकार, $\text{Inf}(S_1) = 1$ है।

ii) ध्यान दीजिए कि $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$ है। इसलिए, S_2 का $\sqrt{5}$ न्यूनतम उपरि परिबंध है। $\text{Sup}(S_2) = \sqrt{5}$ है। $-\sqrt{5}$ का महत्तम निम्न परिबंध है। इस प्रकार, $\text{Inf}(S_2) = -\sqrt{5}$ है।

iii) $\text{Sup}(S_3)$ का अस्तित्व नहीं है तथा $\inf(S_3)$ का अस्तित्व नहीं है।

iv) $\text{Sup}(S_4) = 0$ है, $\text{Inf}(S_4) = -1$ है।

E4) प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाला कोई भी उदाहरण दिया जा सकता है। प्रत्येक समुच्चय का एक उदाहरण नीचे दिया है।

i) समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots\}$ का एक निम्न परिबंध, उदाहरणार्थ, 0 है।

ii) समुच्चय $\{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ का कोई निम्न परिबंध नहीं है।

iii) समुच्चय $S = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ का g.l.b. 0 है x तथा $0 \notin S$ है।

iv) $\{x : x \in \mathbb{R}$ और $1 \le x \le 2\}$ एक परिबद्ध समुच्चय है, क्योंकि यह ऊपर की ओर 2 से परिबद्ध है तथा नीचे की ओर 1 से परिबद्ध है।

E5) हाँ, यह परिबद्ध है, क्योंकि A का उच्चक = 2 है और A का निम्नक = 1 है। क्योंकि समुच्चय A ऊपर की ओर तथा साथ ही नीचे की ओर से भी परिबद्ध है, इसलिए यह परिबद्ध है।

E6) आइए सिद्ध करें कि एक समुच्चय का उच्चक, यदि उसका अस्तित्व है तो, अद्धितीय होता है। मान लीजिए कि $S \subseteq \mathbb{R}$ ऊपर की ओर परिबद्ध है तथा यह कि $a, b \in \mathbb{R}$ समुच्चय S के उच्चक हैं। आप यह ध्यान दे सकते हैं कि a और b दोनों S के उपरि परिबंध हैं। क्योंकि a, S का न्यूनतम उपरि परिबंध है तथा S का b एक उपरि परिबंध है, इसलिए $a \le b$ है। इसी प्रकार, S का b एक न्यूनतम उपरि परिबंध है तथा a एक उपरि परिबंध है। इसलिए $b \le a$ है। इस प्रकार, $a = b$ हुआ, जो यह दर्शाता है कि किसी समुच्चय का उच्चक अद्धितीय होता है।

आप निम्नक की अद्धितीयता स्वयं सिद्ध करना चाहेंगे।

E7) i) 15, ii) 2/3 iii) 4.3, iv) −6, v) $2-\sqrt{2}$

E8) i) यदि $x > 0$ है, तो $|x| = x$ और $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ है।

ii) यदि $x > 0$ है, तो $|x| = -x$ और $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ है।

E9) i) $|-5| < |7|$, ii) $|\frac{1}{-8}| = |\frac{1}{8}|$ iii) $\left|2^x\right| = \left|(-2)^x\right|$ सभी प्राकृत संख्याओं x के लिए, iv) $-|-10| < |-10|$ है।

E10) यदि $x > 0$ है, तो $|x| = x$ है जिसके कारण $y = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$ है।

यदि $x < 0$ है, तो $|x| = -x$ है जिसके कारण $y = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$ है।
अतः, उत्तर (क) सही है।

E11) i) $|x| = \max\{x, -x\}$ है। अतः $x = 0 \Rightarrow x = 0$

$|x| = 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = 0 \Rightarrow x = 0$

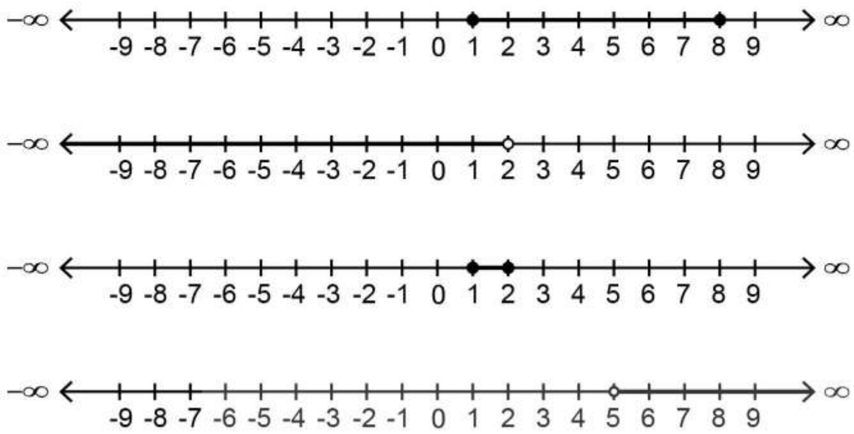
ii) यदि $x > 0$ है, तो $|x| = x$ और $|1/x| = 1/x = 1/|x|$

यदि $x < 0$ है, तो $|x| = -x$ और $|1/x| = -1/x = 1/|x|$

iii) $|x - y| = |x + (-y)| \le |x| + |-y| = |x| + |y|$

E12) i) असत्य, ii) सत्य, iii) सत्य iv) असत्य

E13) i) $1 \le x \le 8$, ii) $-\infty < x < 2$, iii) $1 \le x \le 2$, iv) $5 < x < \infty$



चित्र 28

E14) i) प्राँत $= \mathbb{R}$

परिसर $=]-\infty, 3]$

ii) प्राँत $= \mathbb{R} - \{0\}$

परिसर $= \mathbb{R}$

iii) प्राँत $= \mathbb{R}$

परिसर $= \mathbb{R}$

E15) $t^2 \geq 16, -4 \geq t \geq 4$

$f(t) = 3 \Rightarrow \sqrt{t^2 - 16} = 3 \Rightarrow t^2 - 16 = 9 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5$ या -5 है।

E16) g का प्राँत $= \mathbb{R} - \{0, -1\}$

$g(x) = 0 \Rightarrow x = 2, -2$ है।

E17) i) $f(-7) = \frac{|-7|}{-7} = -1,\ f(3) = \frac{|3|}{3} = 1$ है।

ii) $\mathbb{R} - \{0\}$ के लिए फलन f परिभाषित है।

iii) f का परिसर $\{1, -1\}$ है।

iv) $f(2+8) = \frac{|2+8|}{2+8} = 1$ है।

$f(2) + f(8) = \frac{|2|}{2} + \frac{|8|}{8} = 1 + 1 = 2$ है।

इस प्रकार, $f(2+8) \neq f(2) + f(8)$ है।

v) $f(-1+6) = \frac{|-1+6|}{-1+6} = 1$ है।

$$f(-1)+f(6)=\frac{|-1|}{1}+\frac{|6|}{6}=1+1=2 \text{ है।}$$

इस प्रकार, $f(-1+6) \neq f(-1)+f(6)$ है।

E18) $f(a^2)=3a^2+2$

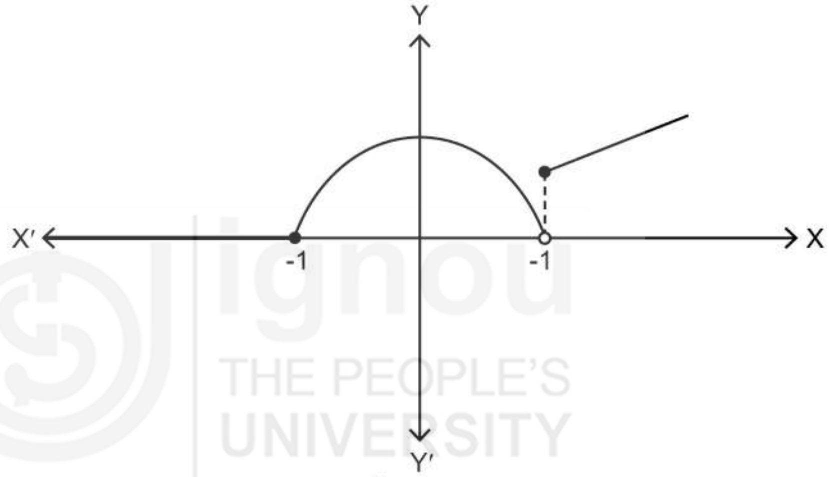
$(f(a))^2=(3a^2+2)^2=9a^4+12a^2+4$

इस प्रकार, $f(a^2) \neq (f(a))^2$ है।

E19) मान लीजिए कि यात्रियों की संख्या p है तथा $T(p)$ एकत्रित की गई संपूर्ण राशि को व्यक्त करता है। तब,

$$T(p)=\begin{cases} 900, & \text{यदि } p=30 \\ 900+(p-30).25, & \text{यदि } 50 \geq p > 30 \end{cases}$$

E20)



चित्र 29

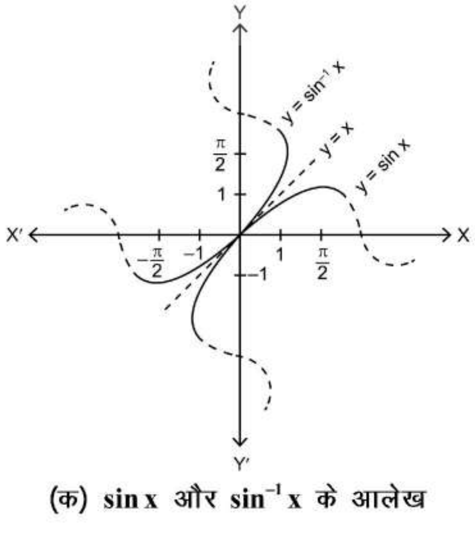
E21) i) $x \to |x-1|$

ii) $x \to -|x|$

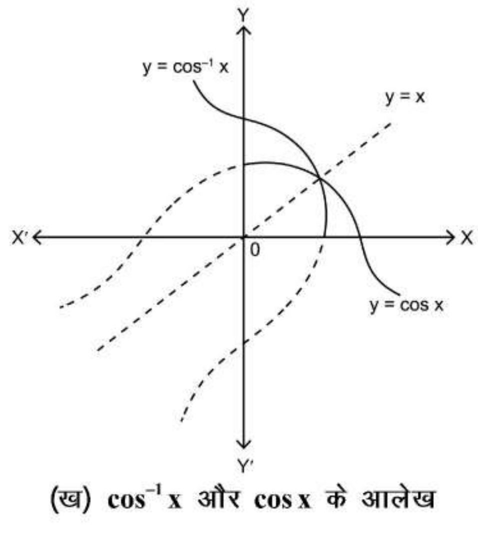
iii) $x \to |x+1|$

iv) $x \to |x|+1$

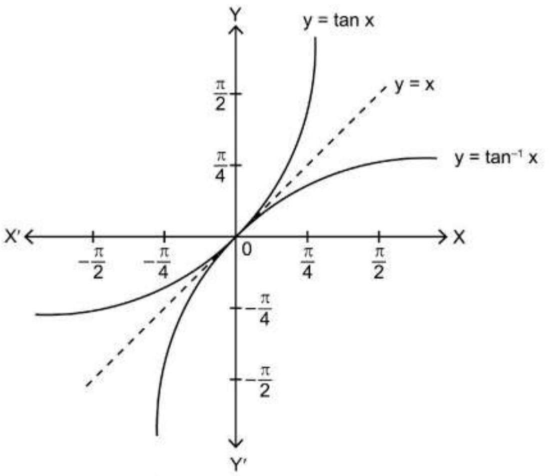
E22)



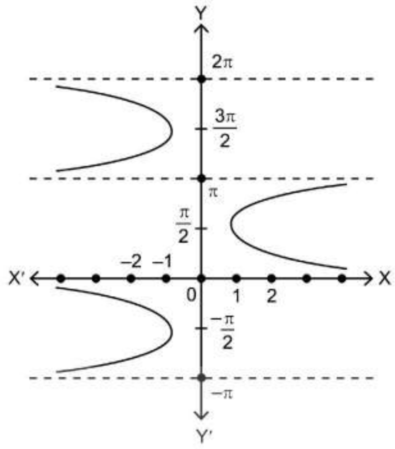
(क) $\sin x$ और $\sin^{-1} x$ के आलेख



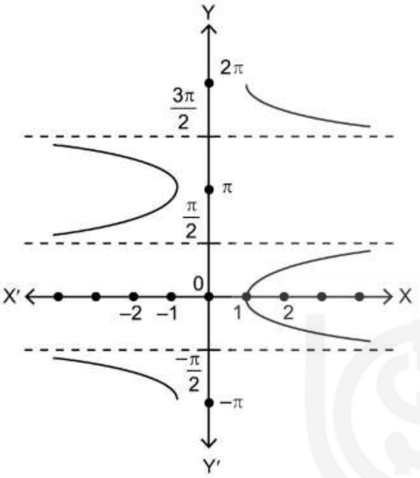
(ख) $\cos^{-1} x$ और $\cos x$ के आलेख



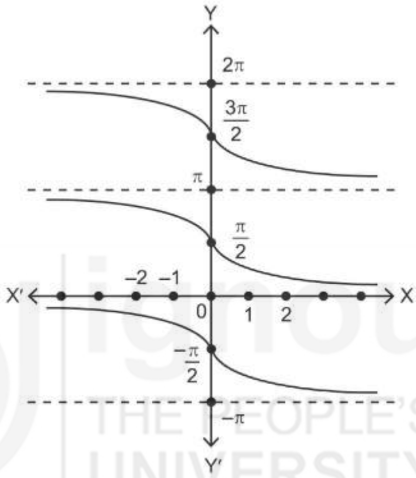
(ग) $\tan^{-1}x$ और $\tan x$ के आलेख



(घ) $\text{cosec}^{-1}x$ के आलेख



(ड.) $\sec^{-1}x$ के आलेख



(च) $\cot^{-1}x$ के आलेख

चित्र 30

E23) i) $f(x)=|x| \Rightarrow f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$ है। अतः f सम है।

ii) $g(x)=1/x^2 \Rightarrow g(-x)=1/(-x)^2=g(x)$ है। अतः g सम है।

E24) i) $f(x)=x \Rightarrow f(-x)=-x=-f(x)$ है। अतः, f विषम है।

ii) $g(x)=1/x \Rightarrow g(-x)=-1/x=-g(x)$ है। अतः, g विषम है।

E25) i), iii) और, v) सम हैं।

iv) विषम है।

ii) न तो सम है और न ही विषम है।

E26) i) न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान

ii) वर्धमान

iii) निरंतर ह्रासमान

E27) i) चित्र 25 (क) में फलन का आवतर्क 2 है। अन्य आवर्तक 4, 6, 8, ... हैं।

ii) चित्र 25 (ख) में फलन का आवर्तकशा है। अन्य आवर्तक $4\pi, 6\pi, \ldots$ हैं।

E28) i) आवर्तक 2π के साथ आवर्ती,

क्योंकि $\cos(x+2\pi) = \cos x$ सभी π के लिए।

ii) आवर्ती नहीं

iii) आवर्तक π के साथ आवर्ती

iv) आवर्तक $\pi/3$ के साथ आवर्ती

v) आवर्तक π के साथ आवर्ती

vi) आवर्तक 2π के साथ आवर्ती

E29) i) और ii) आवर्ती हैं। iii) आवर्ती नहीं है।

E30) नहीं। उदाहरणार्थ, $x-[x]$ और $|\sin x|$ आवर्ती हैं, परंतु इनका योग आवर्ती नहीं है।

इकाई 7

सीमा

संरचना **पृष्ठ संख्या**

7.1 प्रस्तावना

अब हम कलन का अध्ययन एक मौलिक महत्व की संकल्पना के साथ प्रारंभ कर रहे हैं, जिसे 'सीमा' कहते हैं। जैसे-जैसे आप बाद की इकाइयों को पढ़ेंगे, तब आप यह अनुभव करेंगे कि कलन के बीज तीसरी शताब्दी B. C. में ही बो दिए गए थे। परंतु यह केवल उन्नीसवीं शताब्दी में ही संभव हुआ जब वायरस्ट्रॉस द्वारा सीमा (limit) की एक सुहड़ परिभाषा दी गई। उससे पहले, न्यूटन और कौशी के सीमा के बारे में स्पष्ट विचार थे, परंतु इनमें से किसी ने भी औपचारिक और परिशुद्ध परिभाषा नहीं दी। वे लगभग सहजज्ञान पर (बिना वास्तव में परिभाषा दिए) या ज्यामिति पर ही आश्रित रहे।

सीमा के जुड़ने ने कलन के अध्ययन को क्राँतिकारी बना दिया। यूनानी गणितज्ञों द्वारा प्रयोग की जाने वाली जटिल उपपत्तियों के स्थान पर स्पष्ट और सरल उपपत्तियाँ प्रयोग की जाने लगीं।

आप सीमा के एक सहजज्ञानात्मक विचार से पहले से अवगत होंगे, जिसकी हम भाग 7.2 में चर्चा करेंगे। भाग 7.3 में, हम आपको इस संकल्पना की एक परिशुद्ध परिभाषा देंगे। अनंत पर सीमा की चर्चा भाग 7.4 में की गई है। हम सीमाओं पर आधारित

प्रमेयों की चर्चा द्वारा सीमा के अध्ययन को भाग 7.5 में आगे बढ़ाएँगे। भाग 7.6 में हम चरघातांकी और लघुगणकीय फलनों का परिचय देंगे। भाग 7.7 में, हम अतिपरवलयिक फलनों तथा उनके प्रतिलोम फलनों की चर्चा करेंगे।

इस पाठ्यक्रम में जो फलन आपके सम्मुख आएँगे वे वास्तविक मान वाले फलन होंगे, जैसे कि इकाई 6 में थे।

अब हम इस इकाई के उद्देश्यों को लिख रहे हैं। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया इन उद्देश्यों की सूची को पुनः पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने यह उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो पाएँगे :

- फलनों की सीमाएँ ज्ञात करना, जब भी उनका अस्तित्व हो;
- $\varepsilon-\delta$ का प्रयोग करते हुए औपचारिक रूप से सीमा को परिभाषित करना;
- सीमाओं पर योग, व्यवकलन, इत्यादि जैसी संक्रियाएँ करना;
- चरघातांकी और लघुगणकीय फलनों को परिभाषित करना;
- अतिपरवलयिक फलनों तथा उनके प्रतिलोम फलनों को परिभाषित करना।

7.2 सीमा (एक सहजज्ञानात्मक उपागम विधि)

सीमा की संकल्पना एक आधारभूत निर्माण खंड है जिस पर कैलकुलस की अन्य संकल्पनाएँ आधारित हैं। इस भाग में, हम सीमाओं के बारे में अनौपचारिक रूप से अध्ययन इस उद्देश्य से करेंगे कि इससे संबंधित मौलिक विचारों के लिए एक 'सहजज्ञानात्मक अनुभव' विकसित हो जाए।

आपने दैनिक जीवन की विभिन्न स्थितियों में सीमाओं के बारे में अवश्य ही सुना होगा, जैसे कि

- एक वाहन अपनी चाल 40 km/ घंटा से घटा कर 0 पर 0 के निकट तथा और निकट लाते हुए लाल बत्ती पर रूक जाती है।
- गिरते समय कोई वस्तु अंतिम वेग पर पहुँचती है।

ऊपर दिए हुए उदाहरणों में, आप पाते हैं कि यहाँ कुछ लक्ष्य निर्धारित है। कभी-कभी हम किसी वस्तु पर सीधे तौर पर कार्य नहीं कर सकते, परंतु हम देख सकते हैं कि वह क्या हो जाएगी, जैसे-जैसे हम उसके निकट तथा और निकट होते जाएँगे।

मान लीजिए कि हमारे पास एक वास्तविक फलन है तथा हम यह जानना चाहते हैं कि यह फलन एक दिए हुए मान $x = a$ के निकट मानों पर किस प्रकार व्यवहार करता है।

हम $x = a$ के निकट तथा और निकट x के मानों को चुनते हैं और हम इन मानों पर फलन के मान निकालते हैं।

यहाँ एक उदाहरण है जो सीमा की संकल्पना के लिए संख्यात्मक और आलेखीय उपागमों को स्पष्ट करता है।

आइए $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1,$ द्वारा परिभाषित फलन f के 1 के निकट x के मानों पर व्यवहार की 0 जाँच करें।

हम देखते हैं कि यह फलन $f(x), x = 1$ पर परिभाषित नहीं है, क्योंकि $x - 1$ हर में है। x के उन मानों को लेकर जो 1 के निकट हैं, परंतु 1 के बराबर नहीं हैं, हम $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1,$ क्योंकि $x - 1 \neq 0$ है, इसलिए $x - 1$ से विभाजन संभव है। सारणी 1 बाईं ओर से 1 के निकट x के मानों के लिए $(x < 1)$, परंतु 1 के बराबर नहीं, $f(x)$ के मानों को दे रही है।

सारणी 1

x	−1	0	0.5	0.8	0.9	0.94	0.99	0.999	0.9999	0.99999
f(x)	0	1	1.5	1.8	1.9	1.94	1.99	1.999	1.9999	1.99999

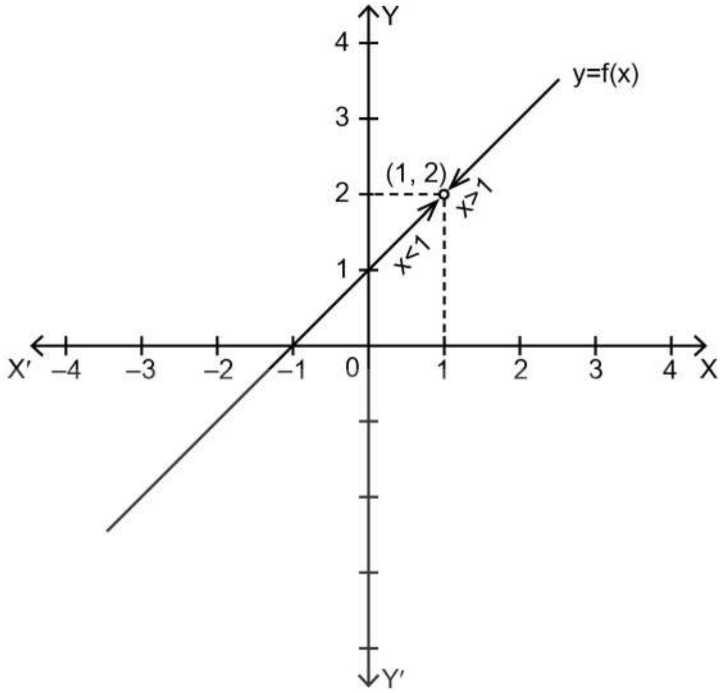
जब हम सारणी 1 की निचली पंक्ति की जाँच करते हैं, तो हम देखते हैं कि $f(x)$ के मान $x = 0.9$ पर 1.9, $x = 0.99$ पर 1.99, $x = 0.999$ पर 1.999, इत्यादि हैं। अतः, जैसे–जैसे x, 1 के निकट होता जाता है, वैसे-वैसे $f(x)$, 2 के निकट आता जाता है। वास्तव में, ऐसा प्रतीत होता है कि हम x के मान को 1 के पर्याप्त रूप से निकट लाकर, हम $f(x)$ के मान को जितना चाहें उतना 2 के निकट ला सकते हैं।

सारणी 2 दाईं ओर से 1 के निकट मानों के लिए $(x > 1)$ परंतु 1 के बराबर नहीं, $f(x)$ के मानों को दे रही है।

सारणी 2

x	1.5	1.2	1.1	1.05	1.01	1.001	1.0001	1.000001
f(x)	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01	2.001	2.0001	2.000001

पुनः, सारणी 2 से, हम देखते हैं कि जब x, 1 के पर्याप्त रूप से निकट हो जाता है, तब $f(x)$, 2 के निकट होता जाता है। यह विचार चित्र 1 में दिए $y = f(x)$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f के आलेख को देखते और अधिक सुदृढ़ हो जाता है।



चित्र 1 : $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, $x=1$ के निकट का आलेख

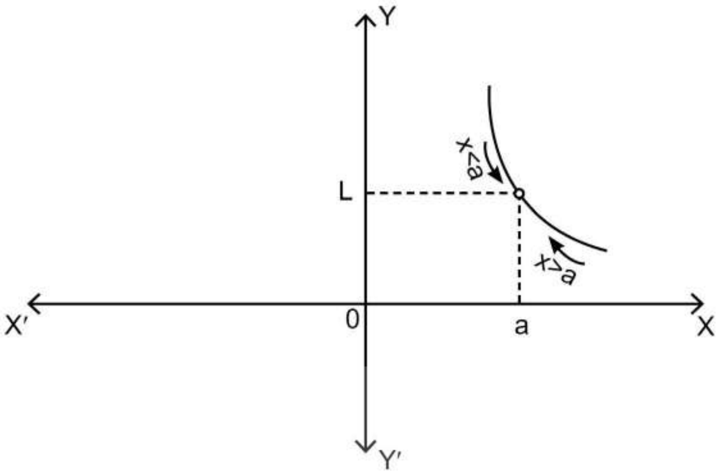
चित्र 1 यह दर्शाती है कि जैसे-जैसे x, 1 के निकट होता जाता है (1 के दोनों ओर से), वैसे-वैसे $f(x)$, 2 के निकट आता जाता है।

इस उदाहरण में, दिए हुए मान $x = 1$ पर फलन जो मान ग्रहण करता है इस पर निर्भर नहीं करता कि x किस प्रकार 1 की ओर अग्रसर होता है। ध्यान दीजिए कि आवश्यक रूप से x के 1 की ओर अग्रसर होने के दो तरीके हैं, या तो बाईं ओर से या दाईं ओर से, अर्थात् 1 के निकट x के सभी मान 1 से छोटे या 1 से बड़े हो सकते हैं। अतः, यह स्पष्ट है कि दोनों स्थितियों में (बाईं ओर से और दाईं ओर से) जैसे-जैसे x, 1 के निकट होता जाता है, वैसे-वैसे $f(x)$, 2 के निकट आता जाता है।

प्रतीक $\rightarrow$ ''प्रवृत्त होता है'' व्यक्त करता है।

हम इसे यह कह कर व्यक्त करते हैं कि जैसे-जैसे x, 1 की ओर प्रवृत्त करता है या x, 1 की ओर अग्रसर होता है, $f(x) = x + 1$, 2 की ओर प्रवृत्त करता है या $f(x) = x + 1$, 2 की ओर अग्रसर होता है। हम इस कथन को संकेतन $f(x) \rightarrow 2$ जब $x \rightarrow 1$ से संक्षिप्त रूप में व्यक्त करते हैं। इसको व्यक्त करने की एक अन्य विधि है कि $x = 1$ पर $f(x)$ की सीमा 2 है। हम इसे $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ लिखते हैं।

व्यापक रूप में, यदि किसी फलन f की एक दिए हुए बिंदु a पर सीमा L है, तो हम इस सीमा को $\lim_{x\to a} f(x) = L$ लिखते हैं तथा पढ़ते हैं ''$f(x)$ की सीमा, जब x, a की ओर अग्रसर होता है, L के बराबर है''। $x = a$ पर फलन f की सीमा L है, क्योंकि जब भी x संख्या a के निकट आती जाती है, $f(x)$ संख्या L के निकट आता जाता है। एक वैकल्पिक संकेतन $f(x) \rightarrow L$ जब $x \rightarrow a$ है, जिसे व्यापक रूप में पढ़ा जाता है ''$f(x)$, L की ओर अग्रसर होता है जब x, a की ओर अग्रसर होता है।'' जैसा कि आप देख रहे हैं कि हमारी रूचि a के निकट, $x = a$, (अर्थात् x, a के निकट है) फलन के व्यवहार में है। इसका अर्थ है कि x के a की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x)$ की सीमा ज्ञात करने में, हम कभी भी $x = a$ विचार नहीं करते हैं। वास्तव में, $x = a$ पर $f(x)$ का परिभाषित होना भी आवश्यक नहीं है।



चित्र 2: f(x) जब x, a के निकट मान ग्रहण करता है

चित्र 2 दर्शाती है कि $f(a) \neq L$ है, परंतु $\lim_{x \to a} f(x) = L$ है। आइए इसे समझने के लिए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

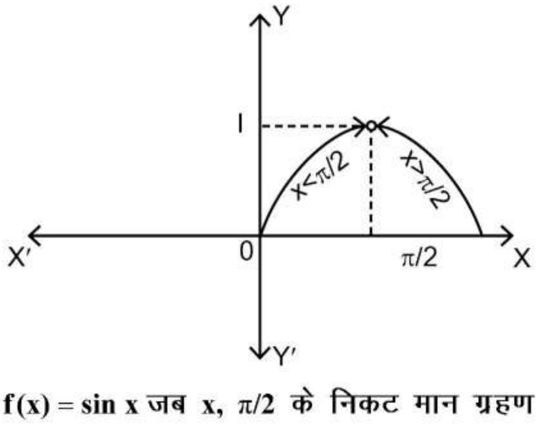
उदाहरण 1 : $f(x) = \sin x$ द्वारा परिभाषित फलन f की सीमा की खोज कीजिए, जब x, $\pi/2$ के निकट आता जाता है। कोण x रेडियनों में मापा गया है।

हल : यहाँ, हम $\pi/2$ के निकट f(x) के सन्निकट मानों को सारणीबद्ध करते हैं। सारणी 3, $\pi/2$ की ओर अग्रसर होने वाले x के मानों के लिए, f(x) के मान प्रदान करती है। सारणी 3 के मानों से, हम देखते हैं कि $\lim_{x \to \pi/2} \sin x = 1$ है।

सारणी 3 : f(x) = sin x

$x < \pi/2$	$f(x) = \sin x$	$x < \pi/2$	$f(x) = \sin x$
2.0	0.909297	1.0	0.841471
1.8	0.973848	1.2	0.932039
1.6	0.999574	1.5	0.997495
1.59	0.99816	1.55	0.999784
1.58	0.999958	1.57	0.999999

चित्र 3 यह स्पष्ट करती है कि प्रत्येक ओर (पक्ष) से, अर्थात् बाईं ओर दाईं ओर से, $\lim_{x \to \pi/2} \sin x = 1$ है।



चित्र 3: f(x) = sin x जब x, π/2 के निकट मान ग्रहण करता है

उदाहरण 2 : $\lim_{x\to 1} f(x)$ का अनुमान लगाइए, यदि $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित है।

हल : सर्वप्रथम, हम x के 1 के निकट $f(x)$ के मानों की बाईं ओर दाईं ओर से सारणी बनाते हैं। सारणी 4, $f(x)$ के उन मानों को दे रही है, जब x, 1 के निकट तथा और निकट मान ग्रहण करता रहता है। हम देखते हैं कि जब x के मान 1 के ओर अग्रसर होते हैं, $f(x)$ प्रवृत्त होता है 2 की ओर।

सारणी 4 : $f(x) = x^2 + 1$

$(x > 1)$	1.2	1.1	1.05	1.01	1.005	1.001
$f(x)$	2.44	2.42	2.103	2.02	2.01	2.002
$(x < 1)$	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999	0.995
$f(x)$	1.64	1.81	1.903	1.9801	1.9989	1.990

हम पाते हैं कि जैसे-जैसे 1 के निकट x आता जाता है, वैसे-वैसे 2 के निकट $f(x)$ आता जाता है। वैकल्पिक रूप से, हम इसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं कि जब x, 1 की ओर अग्रसर होता है, तब $f(x)$, 2 की ओर अग्रसर होता है। अर्थात् $x = 1$ पर $f(x)$ की सीमा 2 है। हम इसे $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 1) = 2$ लिखते हैं।

***

अब, प्रश्न उठता है, क्या किसी फलन की सीमा उपयोगी है? यह वास्तव में उपयोगी है। अनेक बार हमें ऐसे फलन प्राप्त होते हैं, जो कुछ मानों पर अपरिभाषित होते हैं। इसका अर्थ है कि 'x' के कुछ निर्दिष्ट मानों के लिए, फलन कुछ 0/0 या अनंत जैसी संख्या के बराबर है। हम यह नहीं जानते कि इन अनंत व्यंजकों का क्या अर्थ है। हम इन व्यंजकों के बारे में इकाई 12 में अध्ययन करेंगे। परंतु सीमाओं का उपयोग करते हुए, हम जान सकते हैं कि x के उस मान की ओर अग्रसर होने पर फलन कहाँ अग्रसर हो रहा है। हमें यह चिंता करने की कोई आवश्यकता नहीं है कि उस बिंदु पर फलन परिभाषित है या नहीं।

उदाहरण 3 : फलन $\frac{\sin x}{x}$ पर विचार कीजिए तथा $x \to 0$ होने पर उसकी सीमा की खोज कीजिए।

हल : यह फलन $x = 0$ पर परिभाषित नहीं है, परंतु इसका सीमा ज्ञात करने में कोई प्रभाव नहीं है। सारणी 5 और सारणी 6 क्रमशः बाईं ओर तथा दाईं ओर से 0 की ओर अग्रसर होने वाले x-मानों के प्रतिदर्शी को दर्शाती हैं। दोनों स्थितियों में $\frac{\sin x}{x}$ के मानों को चार दशमलव स्थानों तक परिकलित किया गया है।

सारणी 5 : $\frac{\sin x}{x}$ के मान जब $x \to 0$ बाईं ओर से

x (रेडियन में)	−1.0	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2	−0.01
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	0.8415	0.8967	0.9411	0.9736	0.9934	0.9999

$\longrightarrow$

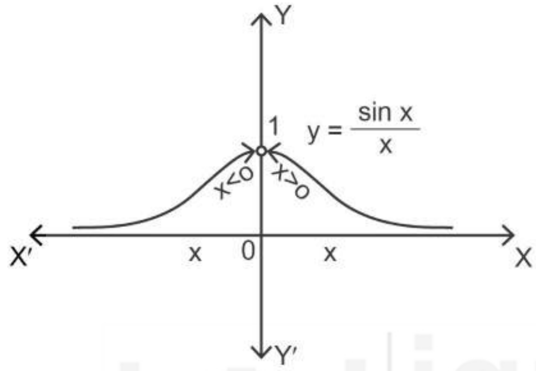
बाईं ओर से

सारणी 6 : $\frac{\sin x}{x}$ के मान जब $x \to 0$ दाईं ओर से

x (रेडियन में)	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	0.9999	0.9934	0.9736	0.9411	0.8967	0.8967

दाईं ओर से

इसका आलेख चित्र 4 में दर्शाया गया है। इसका (0, 1) पर एक लुप्त बिंदु है।



चित्र 4: $f(x) \to 1$ जब $x, x \to 0$ बाईं ओर से और दाईं ओर से

सारणी 5, सारणी 6 और चित्र 4 से, हम देखते हैं कि जब 0 की ओर x अग्रसर होता है, तब फलन 0.9999 प्रकट होता है और इसलिए हम अनुमान लगाते हैं कि $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ है।

* * *

क्या इन उदाहरणों ने 'सीमा' के अर्थ तक पहुँचने में आपकी सहायता की? क्या आप निम्नलिखित परिभाषा से सहमत होंगे?

सीमा (एक अनौपचारिक दृष्टिकोण) : कोई फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ तथा $x \in \mathbb{R}$ दिया रहने पर, यदि x के मानों को पर्याप्त रूप से a के निकट लेने पर (परंतु a के बराबर नहीं), f(x) को $L \in \mathbb{R}$ के निकट हम जितना चाहते हैं, ले जाएँ, तो हम लिखते हैं कि $\lim_{x\to a} f(x) = L$ है।

इसे जब x, a की ओर अग्रसर होता है, तो f(x) की सीमा L है ''पढ़ा जाता है। यहाँ सीमा सामान्यतः **दोनों पक्षों वाली सीमा (two sided limit)** कहलाती है, क्योंकि इसमें f(x) का मान L के निकट तथा और निकट वाँछनीय होता है, जब x के मानों को $x = a$ के दोनों ओर (पक्षों) (बाएँ और दाएँ) से लिया जाता है।

परंतु, कुछ फलन x के मानों के दोनों ओर विभिन्न मान दर्शाते हैं।

अब निम्नलिखित प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए।

E1) x के दिए हुए मान पर निम्नलिखित सीमाओं पर टिप्पणी दीजिए:

i) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ जब $x \to 3$ है।

ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ जब $x \to 2$ है।

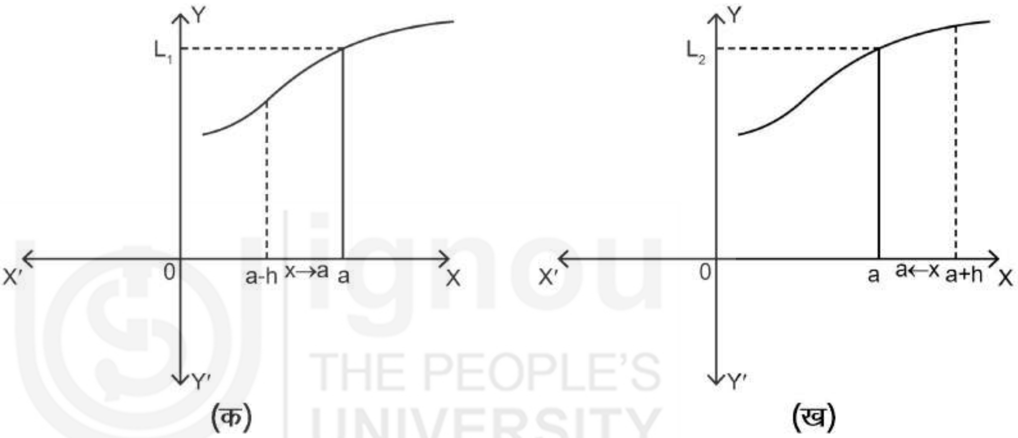
iii) $f(x) = 4x - 1$ जब $x \to 0$ है।

ऊपर '–' बाईं ओर से सीमा दर्शाता है तथा ऊपर '+' से सीमा दर्शाता है तथा ऊपर '+' दाईं ओर से सीमा दर्शाता है।

यदि फलन f के मान एक सीमा L_1 की ओर अग्रसर होते हैं, जब x बाईं ओर से a की ओर अग्रसर होता है, तो हम कहते हैं कि f(x) की बाईं पक्ष सीमा (LHL) L_1 है, जब $x \to a$ है। हम इसे $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ या $\lim\limits_{h \to 0} f(a-h) = L_1, h > 0$ लिख कर व्यक्त करते हैं।।

इस प्रकार, यदि f(x) एक सीमा L_2 की ओर अग्रसर होता है, x दाईं ओर से 'a' की ओर अग्रसर होता है, तो हम कहते हैं कि f(x) की दाईं पक्ष सीमा (RHL) L_2 है, जब $x \to a$ है। हम इसे $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ या $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = L_2, h > 0$ लिख कर व्यक्त करते हैं।

एक पक्षीय सीमाएँ L_1 और L_2 चित्र 5 में स्पष्ट की गई हैं।

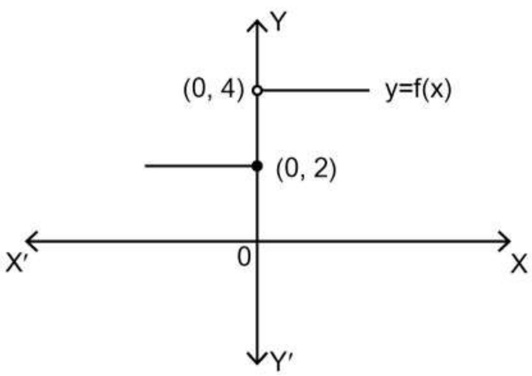


चित्र 5: (क) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ (ख) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

आइए नीचे दिए उदाहरण में यह स्पष्ट करें कि एक फलन की बाईं पक्ष सीमा और दाईं पक्ष सीमा बराबर नहीं है।

उदाहरण 4 : $f(x) = \begin{cases} 2, & x \le 0 \\ 4, & x > 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन पर विचार कीजिए तथा $x = 0$ पर उसकी सीमा पर टिप्पणी कीजिए।

हल : इस फलन का आलेख चित्र 6 में दर्शाया गया है। यह स्पष्ट है कि 0 पर f की बाईं पक्ष सीमा $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$ है। इसी प्रकार, 0 पर f की दाईं पक्ष सीमा $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$ है।



चित्र 6

इस स्थिति में दाईं पक्ष सीमा और बाईं पक्ष सीमा भिन्न-भिन्न हैं तथा इसीलिए हम कहते हैं कि $f(x)$ की सीमा जब x शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, का अस्तित्व नहीं है (यद्यपि यह फलन 0 पर परिभाषित है।)

* * *

इस चर्चा में, आपने ध्यान दिया होगा कि ऐसी स्थितियाँ हैं जहाँ $LHL = RHL$ है तथा जहाँ $LHL \neq RHL$ है। $RHL \neq RHL$ वाली स्थिति में, हम कहते हैं कि f की सीमा जब x, a की ओर अग्रसर होता है, का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $x = a$ होने पर $f(x)$ के मान एक अकेली संख्या L के निकट तथा और निकट नहीं होते। व्यापक रूप में, किसी फलन की दोनों पक्षीय सीमा के अस्तित्व के लिए, निम्नलिखित प्रतिबंध अवश्य संतुष्ट होना चाहिए।

एक–पक्षीय और दो–पक्षीय सीमाओं में सबंध : किसी फलन f की दो-पक्षीय सीमा का a पर अस्तित्व होता है, यदि और केवल यदि $x = a$ पर दो एक-पक्षीय सीमाओं का अस्तित्व हो तथा इन दोनों के मान बराबर हों, अर्थात् $\lim_{x \to a} f(x) = L$, यदि और केवल यदि $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$ हो।

टिप्पणी 1 : यदि एक-पक्षीय सीमाओं में से एक या दोनों का अस्तित्व नहीं हो, तो दो–पक्षीय सीमा का अस्तित्व नहीं होता। कभी-कभी हमारी रूचि केवल एक पक्ष से फलन की सीमा प्राप्त करने की होती है।

आइए अब कुछ उदाहरणों की चर्चा करें।

उदाहरण 5 : $f(x) = x + 10$ द्वारा परिभाषित एक फलन f पर विचार कीजिए। फलन f की $x = 2$ पर सीमा ज्ञात कीजिए।

हल : आइए फलन f के मान 2 के बहुत अधिक निकट x पर अभिकलित करें। 2 के निकट और उसके बाईं ओर कुछ बिंदु 1.9, 1.95, 1.99, 1.995, .. इत्यादि हैं। इन बिंदुओं पर फलन के मानों को नीचे सारणी 7 में दर्शाया गया है।

इसी प्रकार, 2 के निकट और उसके दाईं ओर वास्तविक संख्याएँ 2.001, 2.01, 2.1, इत्यादि हैं। इन बिंदुओं पर फलन के मानों को सारणी 7 में दिया गया है।

सारणी 7

x	1.9	1.95	1.99	1.995	2.001	2.01	2.1
f(x)	11.9	11.95	11.99	11.995	12.001	12.01	12.1

सारणी 7 से, हम व्युप्पन्न करते हैं कि $x = 2$ पर $f(x)$ का मान 11.995 से बड़ा तथा 12.001 से छोटा होना चाहिए। यह कल्पना करना उचित ही है कि $x = 2$ पर $f(x)$ की सीमा 2 के बाईं ओर से 12 है।

अर्थात्, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 12$ है।

इसी प्रकार, जब दाईं ओर से 2 की ओर x अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का मान 12 होगा। अर्थात् $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 12$ है।

अतः, यह संभव है कि $f(x)$ की बाईं पक्ष सीमा और दाईं पक्ष सीमा दोनों ही 12 के बराबर हों। इस प्रकार, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 12$ है।

इसलिए, $x = 2$ पर फलन f की सीमा 12 के बराबर है। साथ ही, हम यह भी देखते हैं कि $x = 2$ पर फलन f का मान भी 12 के बराबर है।

* * *

उदाहरण 6 : $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। $x = 1$ पर, फलन f की सीमा ज्ञात कीजिए।

हल : पिछले उदाहरण की ही तरह कार्य करते हुए, हम 1 के निकट x के मानों पर $f(x)$ के मानों की सारणी बनाते हैं। ये मान सारणी 8 में दिए हैं।

सारणी 8

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
f(x)	0.729	0.970	0.997	1.003	1.030	1.331

सारणी 8 से, हम व्युत्पन्न करते हैं कि $x = 1$ पर $f(x)$ की सीमा 0.997 बड़ी और 1.003 से छोटी होनी चाहिए। यह कल्पना करना उचित ही होगी कि 1 के बाईं ओर $f(x)$ की सीमा 1 है, अर्थात् $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ है। इसी प्रकार, जब x दाईं ओर से 1 की ओर अग्रसर होता है, तब $f(x)$ मान 1 ग्रहण कर रहा होगा। अर्थात् $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ है।

अतः, यह संभव है कि $f(x)$ की बाईं पक्ष सीमा और $f(x)$ की दाईं पक्ष सीमा दोनों ही 1 के बराबर हों। इस प्रकार, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$ है।

इसलिए, $x = 1$ पर फलन f की सीमा 1 के बराबर है। हम पुनः यहाँ देखते हैं कि $x = 1$ पर फलन f का मान भी 1 बराबर है।

* * *

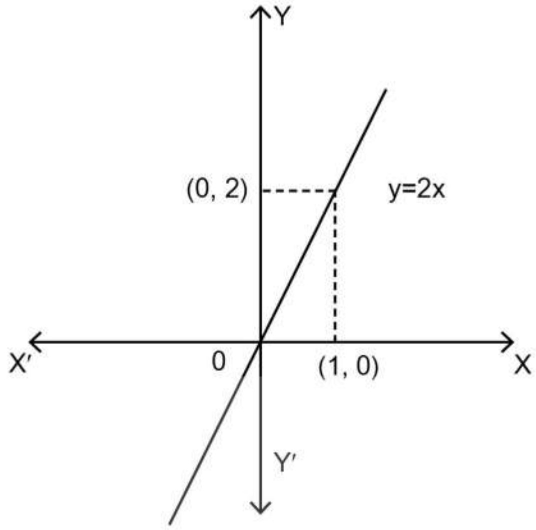
उदाहरण 7 : फलन $f(x) = 2x$ पर विचार कीजिए। आइए $x = 1$ पर इस फलन की सीमा ज्ञात करने का प्रयास करें।

हल : सारणी 9 अब स्वयं स्पष्टधारी है।

सारणी 9

x	0.9	0.95	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.8	1.90	1.98	1.998	2.002	2.02	2.2

हम देखते हैं कि जब x बाईं या दाईं ओर से 1 की ओर अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का मान 2 की अग्रसर होता हुआ प्रतीत होता है। हमें $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2$ प्राप्त होता है।



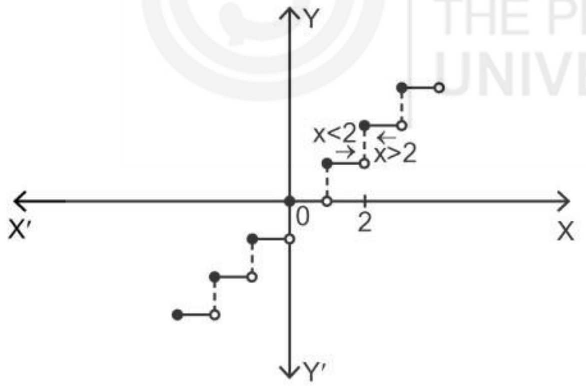
चित्र 7

चित्र 7 में दर्शाए आलेख से, यह तथ्य और अधिक सुदृढ़ होता है। यहाँ पुनः हम देखते हैं कि $x = 2$ पर फलन का मान $x = 2$ पर की सीमा के संपाती (concide) है।

* * *

उदाहरण 8 : $\lim_{x \to 2} [x]$ के अस्तित्व की जाँच कीजिए, जहाँ $[x]$ अधिकतम पूर्णांक फलन है। [आप अधिकतम पूर्णांक फलन के लिए इकाई 6 का संदर्भ ले सकते हैं।]

हल : $[x]$ का मान वह सबसे बड़ा पूर्णांक है, जो x से छोटा या उसके बराबर है। आइए अब इसका आलेख खींचें।



चित्र 8: [x] का आलेख

यदि हम चित्र 8 में दर्शाए फलन $f(x) = [x]$ के आलेख पर विचार करें, तो हम देखते हैं कि यदि x बाईं ओर से 2 की ओर अग्रसर हो, तो $f(x)$, 1 की ओर प्रवृत्त होता प्रतीत होता है। साथ ही, यदि x दाईं ओर से 2 की ओर अग्रसर हो, तब $f(x)$, 2 की ओर प्रवृत्त होता प्रतीत होता है। इसका अर्थ है कि x के दाईं ओर और बाईं ओर से 2 की ओर अग्रसर होने पर $f(x)$ की सीमाएँ बराबर नहीं हैं। इस प्रकार LHL $\neq$ RHL है।

इसलिए, $\lim_{x \to 2} [x]$ का कोई अस्तित्व नहीं है।

* * *

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E2) निम्नलिखित सीमाएँ ज्ञात कीजिए :

i) $f(x)=3$ द्वारा परिभाषित अचर फलन f पर विचार कीजिए। $x=2$ पर इसकी सीमा ज्ञात कीजिए।

ii) $f(x)=x^2+x$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए।

$\lim_{x\to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए।

iii) $f(x)=x+\cos x$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए।

$\lim_{x\to 0} f(x)$ ज्ञात कीजिए।

E3) $\lim_{x\to 2}(x^2-x+1)$ ज्ञात कीजिए।

E4) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2}$ का मान निकालिए।

E5) $\lim_{x\to 0} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$ है।

E6) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित सीमाओं का अस्तित्व है या नहीं।

i) $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$

ii) $\lim_{x\to n}[x]$, जहां $n\in\mathbb{N}$ है।

E7) $\lim_{x\to 1/3}\frac{9x^2-1}{3x-1}$ ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व है तो।

अभी तक हमने सीमाओं के बारे में अनौपचारिक रूप से चर्चा की है। अगले भाग में, हम सीमा की औपचारिक परिभाषा की चर्चा करेंगे तथा उससे संबंधित अनुप्रयोग करेंगे।

7.3 सीमा (एक औपचारिक उपागम)

भाग 7.2 और भाग 7.3 के अध्ययन के बाद, आपने अपने में एक समझ विकसित कर ली होगी कि एक सीमा क्या होती है। यह सीमा का सहजज्ञानात्मक रूप से अनुमान लगाना सदैव सुविधाजनक नहीं होता। इसलिए हमें सीमा की परिशुद्ध परिभाषा उपयोग करने की आवश्यकता होती है। आइए $f(x)=\begin{cases} 3x-1; & x\neq 1 \\ 4; & x=1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार करें। सहजज्ञानात्मक रूप से, हम कहते हैं कि $\lim_{x\to 1} f(x)=2$, है, क्योंकि x जब 1 के निकट होता है, परंतु 1 के बराबर नहीं, $f(x)$ तब 2 के निकट होता है। क्या आप x की 1 से निकटता ज्ञात कर सकते हैं, ताकि $f(x)$ और 2 के बीच का अंतर एक बहुत ही छोटी राशि, मान लीजिए 0.01, से भी छोटा हो? गणितीय रूप में, हम इसे $|f(x)-2|<0.01$, यदि $|x-1|<\delta$ (मान लीजिए) है, लिख सकते हैं, जहाँ δ एक बहुत ही छोटी संख्या है। यहाँ, $|f(x)-2|=|(3x-1)-2|=|3x-3|=|3(x-1)|=3|x-1|<0.01$ है। अर्थात् यदि

$|f(x)-2|<0.01$ है, $0<|x-1|<\frac{0.01}{3}$ या $0<|x-1|<0.0033$ है।

हमें अपने प्रश्न का उत्तर मिल गया है कि वह छोटी राशि δ, 0.0033 है। इसका अर्थ है कि यदि x संख्या 1 से 0.0033 के अंदर तक की दूरी पर है, तो f(x) संख्या 2 से 0.01 के अंदर तक की दूरी पर होगा। इसी प्रकार, यदि हम 0.01 को 0.0001 कर दें, तो हम प्राप्त करते हैं:

$|f(x)-2|<0.001$ यदि $0<|x-1|<0.00033$ है।

हम 0.01, 0.001 या कोई भी अन्य घनात्मक छोटी संख्या ले सकते हैं। उदाहरण के लिए, इसे $\in$ लीजिए, जो एक स्वेच्छिक घनात्मक संख्या है, तो उसी प्रकार से आप जाँच कर सकते हैं कि $|f(x)-2|<\varepsilon$ यदि $0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$ है। इसलिए $\frac{\varepsilon}{3}$ एक वास्तविक संख्या है ताकि $0<|x-1|<\varepsilon/3 \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$ है।

इससे हम निम्नलिखित परिभाषा तक पहुंचते हैं।

ε(एपसीलोन) और δ (डेल्टा) यूनानी अक्षर हैं।

परिभाषा : मान लीजिए कि कोई फलन f संख्या a के निकट के सभी बिंदुओं (संभवतः a के अतिरिक्त) पर परिभाषित है। मान लीजिए कि L एक वास्तविक संख्या है। हम कहते हैं कि f सीमा L की ओर अग्रसर होता है, जब x संख्या a की ओर अग्रसर होता है, यदि प्रत्येक वास्तविक संख्या $\varepsilon>0$ के लिए, हम एक वास्तविक संख्या $\delta>0$ ज्ञात कर सकें, जो ε पर इस प्रकार आश्रित हो कि

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ हो।

$|x-a|<\delta$ का अर्थ है कि $-\delta<(x-a)<\delta$ अर्थात् $a-\delta<x<a+\delta$ अर्थात् $x\in\,]a-\delta, a+\delta[$ है। और $0<|x-a|$ का अर्थ है कि $x\neq a$, जो कि $0<|x-a|<\delta$ है, अर्थात् x के मान a को छोडकर $a-\delta$ से $a+\delta$ के बीच होते हैं।

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ सीमा L दर्शाती है। इसे हम $f(x)\to L$ जब $(x)\to a$ है, इस प्रकार से भी लिख सकते हैं।

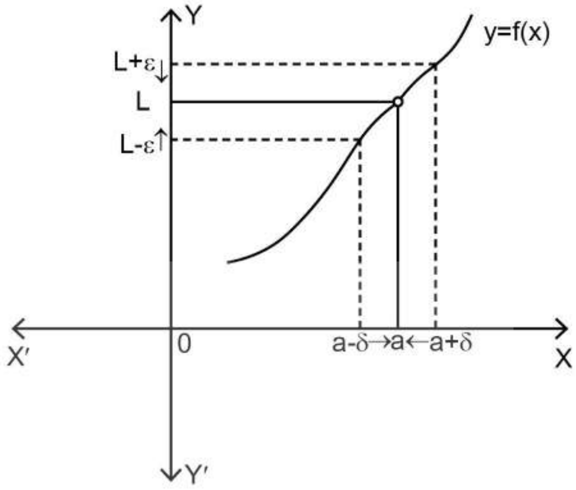
ध्यान दीजिए कि उपरोक्त परिभाषा में, हम कोई भी वास्तविक संख्या $\varepsilon>0$ लेते हैं और फिर कोई $\delta>0$ चुनते हैं ताकि $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$ हो, जब भी $|x-a|<\delta$ हो, अर्थात् $a-\delta<x<a+\delta$ हो।

ε - δ परिभाषा हमें L का मान नहीं देती है। यह केवल हमें यह जाँच करने में सहायता करती है कि एक दी हुई संख्या, f(x) की सीमा है या नहीं।

इकाई 6 में, हमने यह भी बताया था कि $|x-a|$ को x और a के बीच की दूरी भी समझा जा सकता है। इसको दृष्टिगत रखते हुए, एक फलन की सीमा का निम्नलिखित रूप में भी निर्वचन किया जा सकता है:

$\varepsilon>0$ दिया रहने पर, हम $\delta>0$ का चुनाव कर सकते हैं ताकि यदि हम ऐसा x चुनें कि उसकी a से पूरी s से कम हो, तो उसके प्रतिबिंब की L से दूरी ε से कम होनी चाहिए। चित्र 9 में दिए हुए चित्र से आपको इस परिभाषा को समझने में सहायता मिल सकती है। यहाँ, हम पहले एक संख्या $\varepsilon>0$ चुनते हैं तथा दो क्षैतिज रेखाओं $y=L-\varepsilon$ और $y=L+\varepsilon$ पर विचार करते हैं। अब, हम y-अक्ष पर संख्या L के (चारों ओर) इर्दगिर्द 2ε चौड़ी एक पट्टी लेते हैं तथा x-अक्ष पर, इन रेखाओं और f(x) के प्रतिच्छेद बिंदु के

संगत, संख्या a के इर्दगिर्द एक पट्टी ज्ञात करते हैं, ताकि इस पट्टी के अंदर के सभी x-मानों ($x = a$ को छोड़ते हुए) के लिए संगत y-मान पट्टी के अंदर रहें।



चित्र 9: सीमा की $\varepsilon-\delta$ परिभाषा

हम इसे निम्नलिखित दो चरणों में कर सकते हैं:

1. पहले हम L से एक दी हुई निकटता $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ को चुनते हैं।

2. तब, हमें a के पर्याप्त निकट $]a-\delta, a+\delta[$ प्राप्त होता है ताकि सभी संगत y-मान इसके अंदर स्थित रहते हैं। यदि ε के प्रत्येक मान के लिए एक $\delta > 0$ ज्ञात किया जा सके, तो हम कह सकते हैं कि L सही सीमा है।

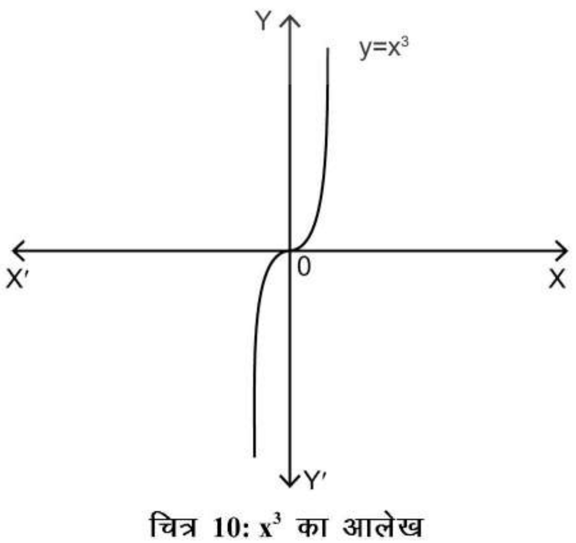
यदि यह प्रक्रिया असफल हो जाती है, तो सीमा L गलत रूप से अभिकलित हुई, अर्थात् सीमा का अस्तित्व नहीं है।

याद रखिए, संख्या ε पहले दी जाती है तथा संख्या $-\delta$ को ε पर निर्भर करते हुए निर्मित किया जाता है।

अब आइए निम्नलिखित उदाहरणों को लें।

उदाहरण 8 : $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए। सीमा की $\varepsilon-\delta$ परिभाषा का उपयोग करते हुए, हम किस प्रकार $\lim_{x\to 0} f(x)$ ज्ञात कर सकते हैं?

हल :



चित्र 10: x^3 का आलेख

चित्र 10 में, f के आलेख को देखिए। आप देखेंगे कि जब x छोटा है, तब x^3 भी छोटा है। जैसे–जैसे 0 के निकट x आता जाता है, x^3 भी 0 ने निकट आता जाता है। इसलिए, यह आशा करना उचित ही होगा कि $\lim f(x) = x$ जब $x \to 0$ है।

आइए इसे सिद्ध करें कि यही सत्य है।

कोई भी वास्तविक संख्या $\varepsilon > 0$ लीजिए। तब,

$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x^3 - 0\right| < \epsilon \Leftrightarrow |x^3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon^{1/3}$ है।

अतः, यदि हम $\delta = \varepsilon^{1/3}$ चुनें, तो हम प्राप्त करते हैं कि $|f(x) - 0| < \varepsilon$, जब भी $0 < |x - 0| < \delta$ है। इससे हमें $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ प्राप्त होता है।

* * *

व्यापक नियम : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ सिद्ध करने के लिए, एक व्यापक उपयोगी नियम है कि $|f(x) - L|$ लिख लो तथा फिर इसे $|x - a|$ के पदों में व्यक्त कीजिए तथा ε और δ को जहाँ तक संभव हो सके संबंधित कीजिए।

आइए अब निम्नलिखित उदाहरणों में देखें कि सीमा परिकलित करने में इस नियम का किस प्रकार प्रयोग किया जा सकता है।

उदाहरण 9 : आइए $\varepsilon - \delta$ परिभाषा का उपयोग करते हुए, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ परिकलित कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है। इस प्रकार, $x = 1$ पर फलन $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ परिभाषित नहीं है। परंतु जैसा कि हमने पहले बताया था, जब हम 1 की ओर x के अग्रसर होने पर सीमा का परिकलन करते हैं, तो हम $x = 1$ पर फलन का मान नहीं लेते हैं। अब, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ प्राप्त करने के लिए, हम सर्वप्रथम देखते हैं कि $x^2 - 1 = (x - 1)\ (x + 1)$ है, ताकि $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, x \neq 1$ के लिए है। अतः

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1)$ है।

जैसे-जैसे 1 की ओर x अग्रसर होता है, हम सहजज्ञानात्मक रूप से देख सकते हैं कि यह सीमा 2 की ओर अग्रसर होती है, जैसा कि भाग 7.2 में लिए गए उदाहरण में दर्शाया गया था। यह सिद्ध करने के लिए कि यह सीमा 2 है, सर्वप्रथम हम $|f(x) - L| = |x + 1 - 2| = |x - 1|$ लिखते हैं, जो स्वयं $|x - a|$ के रूप में है, क्योंकि इस स्थिति में $a = 1$ है।

आइए कोई अन्य संख्या $\varepsilon > 0$ लें। अब, $|(x + 1) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon$ है।

इस प्रकार, यदि हम $\delta = \varepsilon$ चुनें, तो सीमा की अपनी परिभाषा में हम देखते हैं कि $|x - 1| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| = |x - 1| < \varepsilon$ है। इससे प्रदर्शित होता है कि $\lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$ है। अतः, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ है।

* * *

उदाहरण 10 : $\varepsilon - \delta$ परिभाषा का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$ है।

हल : हम सिद्ध करेंगे कि $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ताकि $|x^2+1-5| < \varepsilon$ है, जब भी $|x-2| < \delta$ है।

यहाँ, $f(x) - L = (x^2+1) - 5 = x^2 - 4$ है तथा $x - a = x - 2$ है।

अब हम $|x^2-4|$ को $|x-2|$ के पदों में लिखते हैं:

$|x^2-4| = |x+2||x-2|$

इस प्रकार, $|x-2|$ के साथ हमें एक अन्य गुणनखंड $|x+2|$ प्राप्त होता है। $|x+2|$ की सीमा सुनिश्चित करने के लिए, आइए δ पर प्रतिबंध लगाएँ। याद रखिए कि हमें δ का चुनाव करना है। अतः, मान लीजिए कि हम एक $\delta \le 1$ चुनते हैं। इसका क्या अर्थ है?

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < 1 \Rightarrow 2-1 < x < 2+1$$

$$\Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x+2 < 5$$ (इकाई 6 को याद कीजिए)

इस प्रकार, हमें $|x^2-4| < 5|x-2|$ प्राप्त होता है। परंतु हमारा लक्ष्य $|x^2-4| < \varepsilon$ सिद्ध करना है। इसके लिए, हम $5|x-2| < \varepsilon$ बनाने का प्रयास करेंगे। अब, यह कब सत्य होगा? यह तब सत्य होगा जब $|x-2| < \varepsilon/5$ होगा। अतः, यह $\varepsilon/5$ ही δ का वह मान है, जिसकी हम खोज कर रहे थे। परंतु हमने पहले ही $\delta \le 1$ चुन लिया है। इसका अर्थ है कि $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर, जो δ हमें चुनना है उसे $\delta \le 1$ और साथ ही $\delta \le \varepsilon/5$ को संतुष्ट करना चाहिए। दूसरे शब्दों में, $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$ से हमारा उद्देश्य पूरा हो जाना चाहिए। आइए इसका सत्यापन करें:

$|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < 1$ और $|x-2| < \varepsilon/5 \Rightarrow |x^2-4| = |x+2|.|x-2| < 5.\varepsilon/5 = \varepsilon$ है।

टिप्पणी 2 : यदि $\mathbb{R}$ पर f एक अचर फलन है, अर्थात् यदि $f(x) = k \forall x \in \mathbb{R}$ है, जहाँ K कोई निश्चित वास्तविक संख्या है, तो $\lim_{x\to a} f(x) = k$ होती है।

अब कृपया निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास करें।

E8) सीमा की $\in - \delta$ परिभाषा का उपयोग करते हुए, दर्शाइए कि

i) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ है।

ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$ है।

E9) दर्शाइए कि $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right); & x \ne 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f 0 की ओर अग्रसर नहीं होता है, जब $x \to 0$ है।

E10) जाँच कीजिए कि $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ सही है या नहीं।

अब तक, इस भाग में, आपने सीमा की औपचारिक परिभाषा का अध्ययन किया है। आइए अब देखें कि क्या इस जैसी कुछ परिभाषाएँ एक-पक्षीय सीमाओं पर भी लागू हो सकती हैं या नहीं।

परिभाषा : मान लीजिए कि अंतराल $]p, q[$ में सभी x के लिए परिभाषित एक फलन f है। दाईं **ओर से x के a की ओर अग्रसर होने पर, f का एक सीमा L की ओर अग्रसर होना** तब कहा जाता है, यदि कोई $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर एक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व हो ताकि $a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ हो।

प्रतीकों में, हम इस सीमा को $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ द्वारा व्यक्त करते हैं। इसी प्रकार, बाईं ओर से x के b की ओर अग्रसर होने पर, $f:(a, b) \to \mathbb{R}$ का एक सीमा L की ओर अग्रसर होना तब कहा जाता है, यदि कोई $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर, $\exists \delta > 0$ ताकि $b - \delta < x < b \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ हो।

इस सीमा को $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ L द्वारा व्यक्त करते हैं।

ध्यान दीजिए कि इन सीमाओं को अभिकलित करने में, p के केवल एक ही ओर स्थित x के मानों के लिए $f(x)$ के मानों को लिया गया है।

आइए इस परिभाषा का फलन $f(x) = [x]$ पर अनुप्रयोग करें। हम जानते हैं कि $x \in [1, 2[$ के लिए, $[x] = 1$ है। अर्थात् $[x]$ अंतराल $[1, 2[$ पर एक अचर फलन है। अतः, $\lim\limits_{x \to 2^-} [x] = 1$ है। इसी प्रकार के तर्कण द्वारा, हम ज्ञात करते हैं कि सभी $x \in [2, 3[$, के लिए, $[x] = 2$ है। यहाँ पुनः $[x]$ एक अचर फलन $[2, 3]$ पर है तथा इसीलिए $\lim\limits_{x \to 2^+} [x] = 2$ है।

आइए कुछ और उदाहरणों को देख कर एक-पक्षीय सीमाओं की परिभाषा की अपनी समझ में सुधार करें।

उदाहरण 11 : मान लीजिए कि स्थापन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

फलन f है। हम दर्शाएँगे कि $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ है।

हल : जब $x < 0$ है, तब $|x| = -x$ तथा इसलिए $f(x) = (-x)/x = -1$ है। यह दर्शाने के लिए कि $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ का अस्तित्व है तथा यह -1 के बराबर है, हमें किसी $\varepsilon >$ से प्रारंभ करना पड़ेगा तथा फिर एक $\delta > 0$ ऐसा ज्ञात करना पड़ेगा। ताकि यदि $-\delta < x < 0$ है, तो $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ है।

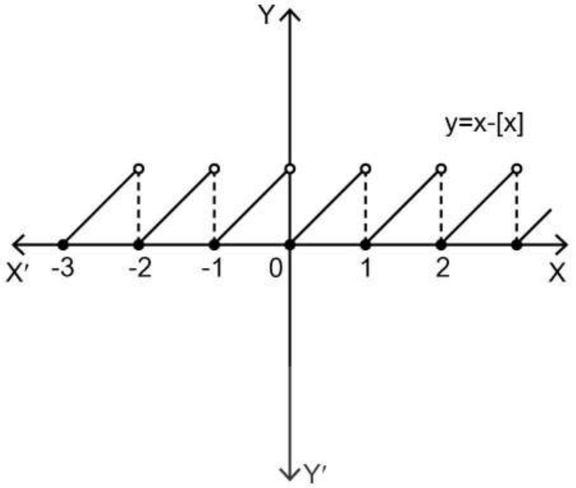
क्योंकि सभी x के लिए, $f(x) = -1$ है, इसलिए $|f(x) - (-1)| = 0$ है तथा इसीलिए कोई भी संख्या $\delta > 0$ लेने पर काम बन जाएगा।

अतः, हमारे द्वारा कोई भी $\delta > 0$ चुनने पर, यदि $-\delta < x < 0$ है, तो $|f(x) - (-1)| = 0 < \varepsilon$ है। अतः, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ है।

* * *

उदाहरण 12 : सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए, स्थापन $f(x) = x - [x]$ द्वारा $\mathbb{R}$ पर परिभाषित कोई फलन f है। आइए जाँच करें कि $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ का अस्तित्व है या नहीं।

हलः इस फलन को $f(x) = x$ के रूप में लिखा जा सकता है, यदि $0 \leq x < 1$ है। $f(x) = x - 1$, यदि $1 \leq x < 2$ है तथा व्यापक रूप में $f(x) = x - n$, यदि $n \leq x < n+1$ है। चित्र 11 देखिए।



चित्र 11 : x – [x] का आलेख

क्योंकि 1 से छोटे परंतु 1 के निकट x के मानों के लिए, $f(x) = x$ है, इसलिए आशा करना उचित ही है कि $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ है। आइए कोई भी $\varepsilon > 0$ लेकर तथा $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$ चुनकर इसे सिद्ध करें।

हम ज्ञात करते हैं कि $1-\delta < x < 1 \Rightarrow f(x) = x$ है तथा $|f(x)-1| = |x-1| < \delta \le \varepsilon$ है।

अतः, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ है।

ठीक ऊपर की भाँति आगे बढ़ने पर, हम देखते हैं कि $f(x) = x-1$ है, यदि $1 \le x < 2$ है। इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ है।

* * *

अब निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E11) सिद्ध कीजिए :

i) $\lim_{x\to 3^-} (x-[x]) = 1$

ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

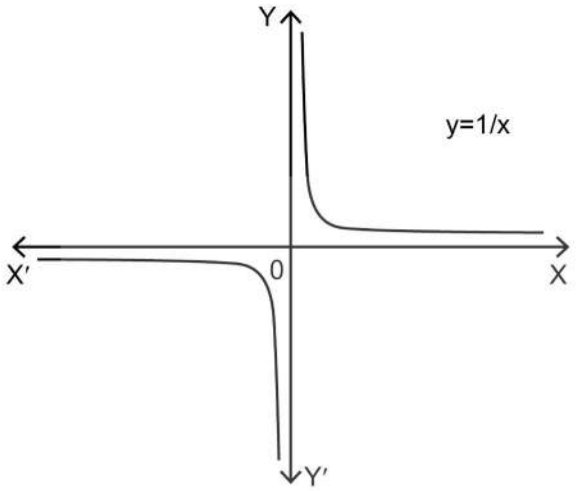
iii) $\lim_{x\to 0^-} \frac{(x^2+2)|x|}{x} = -2$

अभी तक, हम किसी भी वास्तविक मान फलन की x के एक परिमित मान पर सीमा चर्चा करते रहे हैं। आइए अब अगले भाग में किसी फलन के ∞ या $-\infty$ पर व्यवहार की चर्चा करें।

7.4 अनंत पर सीमा

चित्र 12 में दिए फलन $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ के आलेख पर दृष्टि डालिए। चित्र 12 से, हम

देखते हैं कि जैसे-जैसे x बड़ा होता जाता है, f(x) शून्य के निकट तथा और निकट आता जाता है। यह स्थिति उसी स्थिति जैसी है जिसमें जैसे-जैसे x किसी संख्या a के निकट तथा और निकट आता जाता है, वैसे-वैसे g(x) एक मान L के निकट तथा और निकट आता जाता है। अर्थात् $\lim_{x\to a} g(x) = L$ है।



चित्र 12 : $\frac{1}{x}$ का आलेख

अंतर केवल यह है कि f(x) की स्थिति में, x किसी परिमित मान की अग्रसर नहीं हो रहा है, अपितु यह केवल बड़ा तथा और बड़ा होता जा रहा है। हम इसे यह कह कर व्यक्त करते हैं कि $f(x) \to 0$ जब $x \to \infty$ है। अर्थात् $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ है।

ध्यान दीजिए कि x एक वास्तविक संख्या नहीं है। हम $x \to \infty$ केवल यह दर्शाने के लिए लिखते हैं कि x बड़ा तथा और बड़ा होता जाता है।

अब हम इस चर्चा को निम्नलिखित परिभाषा के रूप में औपचारिक बनाते हैं।

परिभाषा : कोई फलन f, x के ∞ की ओर प्रवृत्त होने पर सीमा L की ओर प्रवृत्त कहा जाता है, यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए, ऐसे K का चुनाव संभव हो ताकि $|f(x) - L| < \varepsilon$ हो, जब भी $x > K$ हो। इस स्थिति में, जैसे-जैसे x बड़ा होता जाता है वैसे-वैसे f(x), L के निकट तथा और निकट आता जाता है। अब इस स्थिति के लिए, हम एक अन्य उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 13 : मान लीजिए कि f को सभी $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ के लिए स्थापन $f(x) = 1/x^2$ परिभाषित किया गया है। x के अनंत की ओर अग्रसर होने पर f(x) की चर्चा कीजिए।

हल : यहाँ शून्य को छोड़ कर, x के सभी वास्तविक मानों के लिए f परिभाषित है। आइए $f(x) = 1/x^2$ में x के बड़े तथा और बड़े मान प्रतिस्थापित करें तथा देखें कि क्या होता है (देखिए सारणी 10)।

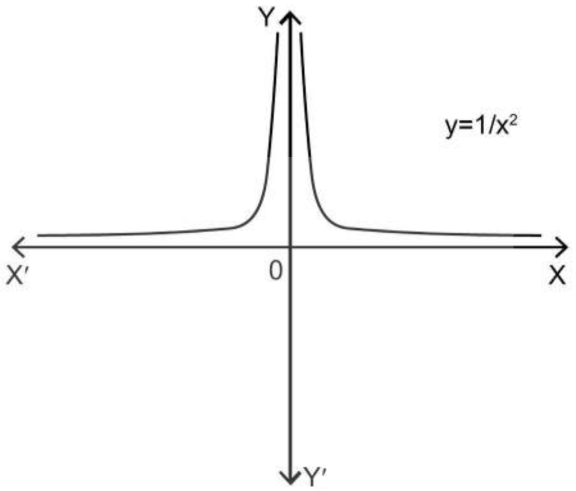
सारणी 10

x	100	1000	100000
$f(x) = 1/x^2$	0.0001	0.000001	0.0000000001

हम देखते हैं कि जब x बड़ा तथा और बड़ा होता जाता है, तब f(x) शून्य के निकट तथा और निकट आता जाता है। अब, आइए कोई भी $\varepsilon > 0$ चुनें। यदि $x > 1/\sqrt{\varepsilon}$ है, तो

$1/x^2 < \varepsilon$ है। अतः, $K = 1/\sqrt{\varepsilon}$ चुनने पर, हम ज्ञात करते हैं कि $x > K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ है। इस प्रकार, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ है।

चित्र 13 हमें एक आलेखीय विचार देता है कि किस प्रकार यह फलन $x \to \infty$ होने पर व्यवहार करता है।



चित्र 13 : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ at $x \to \infty$

* * *

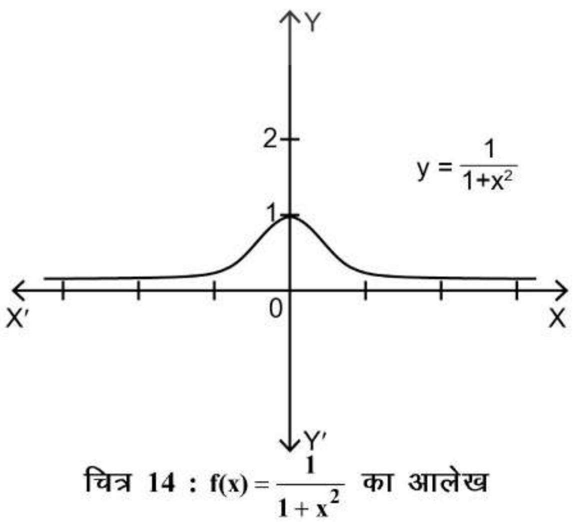
कभी-कभी हमें फलन $f(x)$ के व्यवहार के अध्ययन की उस समय आवश्यकता होती है, जब x छोटे तथा और छोटे ऋणात्मक मान ग्रहण करता है। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा तक पहुँचते हैं।

परिभाषा : कोई फलन f, x के $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होने पर, सीमा L की ओर प्रवृत्त होता है, यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए ऐसे k का चुनाव संभव हो ताकि। $|f(x) - L| < \varepsilon$ हो, जब भी $x < -K$ हो।

निम्नलिखित उदाहरण इस विचार को समझने में आपकी सहायता करेगा।

उदाहरण 14 : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए। $f(x)$ की चर्चा कीजिए, जब $x \to -\infty$ है।

हल : f का आलेख चित्र 14 में दर्शाया गया है।



चित्र 14 : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ का आलेख

जैस-जैसे x छोटे तथा और छोटे ऋणात्मक मान ग्रहण करता है, तो f(x) को क्या होता है। इस कुछ अनुमान लेने के लिए, एक सारणी (सारणी 11) बनाएँ।

सारणी 11

x	-10	-100	-1000
$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$1/101$	$1/10001$	$1/1000001$

हम देखते हैं कि जैस-जैसे x छोटे तथा और छोटे ऋणात्मक मान ग्रहण करता है, f(x) शून्य के निकट तथा और निकट आता जाता है। वास्तव में, $1/(1+x^2)<\varepsilon$ है, जब भी $1+x^2>1/\varepsilon$ है। अर्थात् जब भी $x^2>(1/\varepsilon)-1$ है, अर्थात् जब भी या तो $x<-\left|\frac{1}{\varepsilon}-1\right|^{1/2}$ है या $x>\left|\frac{1}{\varepsilon}-1\right|^{1/2}$ है। इस प्रकार, हम ज्ञात करते हैं कि यदि हम $K=\left|\frac{1}{\varepsilon}-1\right|^{1/2}$ लें, तो $x<-K \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$ है। इसके परिणाम स्वरूप, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ है।

उपरोक्त उदाहरण में, हम यह भी ज्ञात करते हैं कि $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ है। आइए देखें कि इसका किस प्रकार ज्यामितीय रूप से निर्वचन किया जा सकता है।

उपरोक्त उदाहरण में, हमारे पास फलन $f(x)=1/(1+x^2)$ है तथा $x\to\infty$ या $x\to-\infty$ पर $(x)\to 0$ है। चित्र 14 से, आप देख सकते हैं कि जब $x\to\infty$ या $x\to-\infty$ है, तब वक्र $y=f(x)$ उस रेखा $y=0$ के निकट तथा और निकट आती जाती है, जो x-अक्ष है। इसी प्रकार, यदि हम कहते हैं कि $\lim_{x\to\infty} g(x)=L$ है, तो इसका अर्थ है कि जब $x\to\infty$ है, जब वक्र $y=g(x)$ सरल रेखा $y=L$ के निकट तथा और निकट आती जाती है।

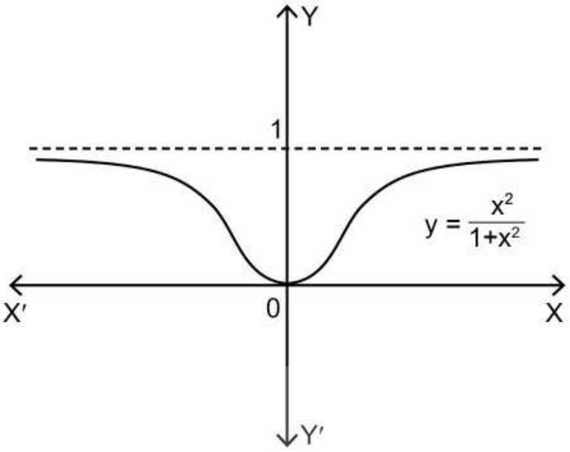
* * *

उदाहरण 15 : दर्शाइए कि $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)}=1$ है।

हल : अब, $\left|\frac{x^2}{1+x^2}-1\right|=\left|\frac{1}{1+x^2}\right|=\frac{1}{1+x^2}$ है। पिछले उदाहरण में, हमने दर्शाया है कि $x>K$ के लिए, $|1/(1+x^2)|<\varepsilon$ है, जहाँ $K=|1/\varepsilon-1|^{1/2}$ है। इस प्रकार, $\varepsilon>0$ दिया होने पर, हम $K=|1/\varepsilon-1|^{1/2}$ चुनते हैं, ताकि $x>K\Rightarrow\left|\frac{x^2}{1+x^2}-1\right|<\varepsilon$ है।

इसका अर्थ है कि $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$ है।

हम इसे ज्यामितीय रूप से चित्र 15 में दर्शा रहे हैं।



चित्र 15 : $\frac{x^2}{1+x^2}$ का आलेख

* * *

आप इन प्रश्नों को करने का प्रयास कर सकते हैं।

E12) दर्शाइए कि

i) $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ है।

ii) $\lim_{x\to\infty} 1/x^2 = 0$ है।

E13) i) यदि किसी $\varepsilon > 0$ के लिए तथा प्रत्येक K के लिए, $\exists x > K$ s.t. $|f(x) - L| > \varepsilon$ है, तो आप क्या निष्कर्ष निकालेंगे?

ii) यदि $\lim_{x\to p} f(x) \neq L$ है, तो इसे आप $\varepsilon - \delta$ रूप में किस प्रकार व्यक्त करेंगे?

हम इस भाग का निम्नलिखित महत्वपूर्ण टिप्पणी के साथ समापन करते हैं।

टिप्पणी 3 : उस स्थिति में जब हमें यह दर्शाना है कि कोई फलन f किसी सीमा की ओर प्रवृत्त नहीं होता है, हमें सीमा की परिभाषा को निषेद करना होता है। आइए देखें कि इसका क्या अर्थ है। मान लीजिए कि हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ है। तब, हमें कोई $\varepsilon > 0$ ज्ञात करना चाहिए ताकि प्रत्येक $\delta > 0$ के लिए, कोई $x \in]a - \delta, a + \delta[$ है, जिसके लिए $|f(x) - L| > \varepsilon$ है।

हम अपने अगले उदाहरण के माध्यम से, f(x) की सीमा, जब $x \to \infty$ है कि परिभाषा के निषेदन को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 16 : दर्शाइए कि $\lim_{x\to\infty} 1/x \neq 1$ है।

हल : हमें कोई $\varepsilon > 0$ ऐसा ज्ञात करना होगा ताकि किसी भी K के लिए (कितना भी बड़ा हो सकता है), हम सदैव $x > K$ ऐसा ज्ञात कर सकें ताकि $|1/x - 1| > \varepsilon$ हो। $\varepsilon = 1/4$ लीजिए। अब, किसी $K > 0$ के लिए, यदि हम $x = \max\{2, K+1\}$ लें, तो हम ज्ञात करते हैं कि $x > K$ है तथा $|1/x - 1| > 1/4$ है। यह स्पष्टतः दर्शाता है कि $\lim_{x\to\infty} 1/x \neq 1$ है।

* * *

अगले भाग में हम सीमाओं के बारे में प्रमेयों की चर्चा करेंगे।

7.5 सीमाओं पर प्रमेय

इससे पहले कि हम आगे बढ़ें, आइए एक प्रश्न करें, क्या कोई फलन $f(x)$ दो भिन्न-भिन्न सीमाओं की ओर प्रवृत्त हो सकता है, जब a की ओर x प्रवृत्त होता है? अथवा क्या a पर दो फलनों की दोनों सीमाओं का योग उन दोनों फलनों के योग की सीमा के बराबर है? इस प्रश्नों के उत्तर आगे आने वाली प्रमेयों में दिए जाएँगे।

प्रमेय 1 (सीमा की अद्धितीयता) : यदि $\lim_{x\to a} f(x) = L$ है तथा $\lim_{x\to a} f(x) = M$ है, तो $L = M$ होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $L \neq M$ है। तब, $|L-M| > 0$ है।

$\varepsilon = \frac{|L-M|}{2}$ लीजिए, जिससे $\in > 0$ है।

क्योंकि $\lim_{x\to a} f(x) = L$ है, इसलिए $\exists \delta_1 > 0$ ताकि $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ है। इसी प्रकार, क्योंकि $\lim_{x\to a} f(x) = M$ है, इसलिए $\exists \delta_2 > 0$ ताकि $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-M| < \varepsilon$ है। यदि हम $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ चुनें, तो $\delta \le \delta_1$ और $\delta \le \delta_2$ है, इसलिए $|x-a| < \delta$ का अर्थ होगा कि $|x-a| < \delta_1$ है तथा $|x-a| < \delta_2$ है। इस स्थिति में, हमें $|f(x)-L| < \varepsilon$ और $|f(x)-M| < \varepsilon$ दोनों ही प्राप्त होंगे।

इसलिए, $|L-M| = |L-f(x)+f(x)-M| \le |f(x)-L| + |f(x)-M| < \varepsilon + \varepsilon$

($|a+b| \le |a| + |b|$ के प्रयोग से)

$= 2\varepsilon = |L-M|$

अर्थात्, हम प्राप्त करते हैं कि $|L-M| < |L-M|$ है, जो एक अंतर्विरोध है। अतः, हमारी परिकल्पना गलत है। अतः, $L = M$ है। ■

आइए अगली प्रमेय में, बिना उपपत्ति दिए, सीमाओं के कुछ आधारभूत (मौलिक) गुणों के कथन लिखें।

प्रमेय 2 : मान लीजिए कि f और g दो फलन इस प्रकार हैं कि $\lim_{x\to a} f(x)$ और $\lim_{x\to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है। तब,

i) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ (योग नियम)

ii) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ (अंतर नियम)

iii) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$ (गुणनफल नियम)

iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, जबकि $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ (व्युत्क्रम नियम)

v) $\lim_{x \to a} k = k$ (अचर फलन नियम)

vi) $\lim_{x \to a} x = a$ (तत्समक फलन नियम)

vii) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ जहाँ n एक घनात्मक पूर्णांक है। (घात नियम)

विशेष रूप में, यदि $f(x) = x$ है, तो $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ है, जहाँ n एक घनात्मक पूर्णांक है।

viii) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ है, जहाँ n एक घनात्मक पूर्णांक है तथा यदि n सम है, तो हम मान लेते हैं कि $\lim_{x \to a} f(x) > 0$ है।

प्रमेय 2 में दिए गए गुण एक-पक्षीय सीमाओं के लिए भी लागू होते हैं। ऊपर दिए गए गुणों का उपयोग करते हुए, हम निम्नलिखित उदाहरणों में सीमाएँ परिकलित करेंगे।

उदाहरण 17 : बहुपद फलन f की $x = a$ पर सीमा ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $\lim_{x \to a} x = a$ है। अतः, $\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} (x.x) = \lim_{x \to a} x . \lim_{x \to a} x = a.a = a^2$ है, इत्यादि। इसी प्रकार, हम $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ प्राप्त करते हैं।

अब, मान लीजिए कि कोई बहुपद फलन $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ द्वारा दिया गया है। $a_0, a_1 x, a_2 x^2, ..., a_n x^n$ में से प्रत्येक को एक फलन मानते हुए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n]$$

$$= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1 x + \lim_{x \to a} a_2 x^2 + ... + \lim_{x \to a} a_n x^n \quad \text{[प्रमेय 2(i) के प्रयोग से]}$$

$$= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + ... + a_n \lim_{x \to a} x^n \quad \text{[प्रमेय 2(iii) और (iv) के प्रयोग से]}$$

$$= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + ... + a_n a^n$$

$$= f(a)$$

[सुनिश्चित कीजिए कि उपरोक्त में आप प्रत्येक चरण के औचित्य को समझते हैं।]

* * *

उदाहरण 18 : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ द्वारा परिभाषित परिमेय फलन की सीमा ज्ञात कीजिए, जहाँ f(x) और f(x) ऐसे बहुपद हैं कि $g(x) \neq 0$ है।

हल : यदि $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ है।

परंतु, यदि $g(a) = 0$ है, तो दो स्थितियाँ हैं–(i) जब $f(a) \neq 0$ और (ii) जब $f(a) = 0$ है। पहली स्थिति में सीमा का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि शून्येतर संख्या को शून्य से भाग देने पर एक वास्तविक संख्या प्राप्त नहीं होती है। दूसरी स्थिति में, हम $f(x) = (x-a)^m f_1(x)$ लिख सकते हैं, जहाँ f(x) में $(x-a)$ की अधिकतम घात m है।

इसी प्रकार, $g(x)=(x-a)^n g_1(x)$ है, क्योंकि $g(a)=0$ है। अब यदि $m>n$ है, तो हम प्राप्त करते हैं कि

$$\lim_{x\to a} h(x)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}(x-a)^m f_1(x)}{\lim_{x\to a}(x-a)^n g_1(x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to a}(x-a)^{(m-1)} f_1(x)}{\lim_{x\to a} g_1(x)}=\frac{0.f_1(a)}{g_1(a)}=0 \text{ है।}$$

यदि $m<n$ है, तो सीमा परिभाषित नहीं है।

***

सीमाओं का मान निकालते समय, अपने मस्तिष्क में निम्नलिखित व्यापक नियम को रखने की आवश्यकता है:

मान लीजिए, दिया हुआ है कि $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व है तथा हम, इसका मान निकालना चाहते हैं। पहले हम $f(a)$ और $g(a)$ के मानों की जाँच करते हैं। यदि दोनों शून्य हैं, तो हम देखते हैं कि क्या हम ऐसा गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं, जो इन पदों को शून्य बना रहा है, अर्थात् हम देखते हैं कि क्या हम $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ लिख सकते हैं ताकि $f_1(a)=0$ हो तथा $f_2(a)\neq 0$ हो। इसी प्रकार, हम $g(x)=g_1(x)g_2(x)$ लिखते हैं, जहाँ $g_1(a)=0$ तथा $g_2(a)\neq 0$ हो, $f(x)$ और $g(x)$ में से उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट दीजिए (यदि संभव है तो) तथा लिखिए

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}, \text{ जहाँ } q(x)\neq 0 \text{ है।}$$

$$\text{तब, } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(a)}{q(a)} \text{ है।}$$

उदाहरण 19 : निम्नलिखित सीमाओं को ज्ञात कीजिए:

(i) $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+4x}{2x+1}$ (ii) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2}$

हल : वाँछित सीमा परिमेय फलन की है। अतः, हम सर्वप्रथम दिए हुए बिंदुओं पर इन फलनों के मान निकालते हैं। यदि यह $\frac{0}{0}$ रूप का है, तो हम फलन की सीमा को $\frac{0}{0}$ का रूप देने वाले गुणनखंडों को काट कर पुनः लिखते हैं।

i) हमें प्राप्त है : $\frac{\lim_{x\to 2}(3x^2+4x)}{\lim_{x\to 2}(2x+1)}=\frac{\lim_{x\to 2}3x^2+\lim_{x\to 2}4x}{\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}1}$

$$=\frac{\lim_{x\to 2}3\lim_{x\to 2}x\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}4.\lim_{x\to 2}x}{\lim_{x\to 2}2\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}1}$$

$$=\frac{3\times 2\times 2+4\times 2}{2\times 2+1}=\frac{20}{5}=4 \text{ है।}$$

ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{x(x-1)}=\frac{2}{1(1-1)}=\frac{2}{0},$$ जो परिभाषित नहीं है।

* * *

उदाहरण 20 : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x+5}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम प्रत्यक्ष रूप से प्रमेय 3 का अनुप्रयोग नहीं कर सकते, क्योंकि $x\to\infty$ होने पर अंश और हर की सीमाएँ ज्ञात नहीं की जा सकती हैं। इसके स्थान पर, हम भागफल के अंश और हर को $\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ के लिए, से गुणा करके दुबारा लिखते हैं। तब, $\frac{3x+1}{2x+5}=\frac{3+(1/x)}{2+(5/x)}$, $x\neq 0$ के लिए है। जब हम $\lim\limits_{x\to\infty}1/x=0$ का उपयोग करते हैं, जो आपने E12(i) में सिद्ध की थी तथा प्राप्त करते हैं कि

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3+1/x)}{(2+5/x)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+1/x)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+5/x)}=\frac{3+0}{2+0}=\frac{3}{2}$$ है।

* * *

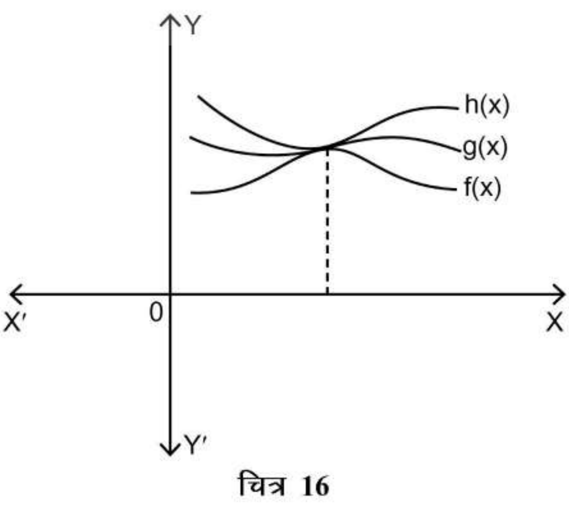
अब हम एक महत्वपूर्ण प्रमेय की चर्चा करेंगे।

प्रमेय 3 (सेंडविच प्रमेय या दबाने वाली प्रमेय) : मान लीजिए कि a को अंतर्विष्ट करने वाले, संभवतः a पर छोड़ कर एक अंतराल I पर परिभाषित फलन f, g और h हैं। मान लीजिए कि

i) $f(x)\le g(x)\le h(x)\ \forall x\in I\setminus\{a\}$ है।

तथा ii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L=\lim\limits_{x\to a}h(x)$ है।

तब, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ का अस्तित्व है और यह L के बराबर है। इसे चित्र 16 में स्पष्ट किया गया है।



चित्र 16

उपपत्ति : सीमा की परिभाषा से, दिए हुए $\varepsilon > 0$ के लिए, $\exists \delta_1 > 0$ तथा $\delta_2 > 0$ इस प्रकार है कि $0 < |x-a| < \delta_1$ के लिए $|f(x) - L| < \varepsilon$ है तथा $0 < |x-a| < \delta_2$ के लिए $|h(x) - L| < \varepsilon$ है।

मान लीजिए कि $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ है। तब,

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ और $|h(x) - L| < \varepsilon$ है।

$\Rightarrow L - \varepsilon \le f(x) \le L + \varepsilon$ और $L - \varepsilon \le h(x) \le L + \varepsilon$ है।

हमें $f(x) \le g(x) \le h(x)\ \forall x \in I \setminus \{a\}$ भी प्राप्त है।

इस प्रकार हम $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le L + \varepsilon$ प्राप्त करते हैं।

दूसरे शब्दों में, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$ है।

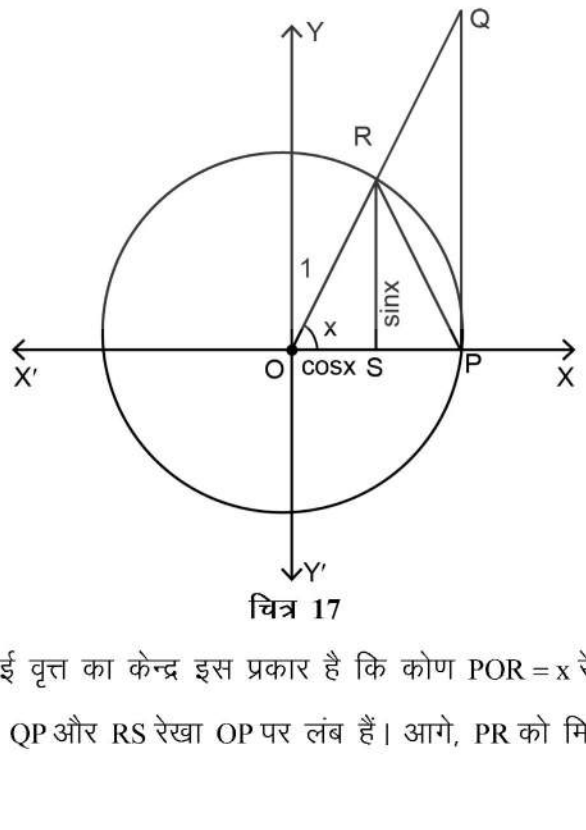
अतः, $\lim_{x \to a} g(x) = L$ है। ■

टिप्पणी 4: इसे सेंडविच प्रमेय (Sandwich Theorem) कहते हैं, क्योंकि g फलनों f और h के बीच सेंडविच हो रहा है।

आइए आगे आने वाले उदाहरणों में देखें कि किस प्रकार त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएँ ज्ञात करने में, इस प्रमेय का उपयोग किया जा सकता है।

उदाहरण 21: सिद्ध कीजिए कि $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ के लिए है।

हल : हम जानते हैं कि $\sin(-x) = -\sin x$ और $\cos(-x) = \cos x$ है। इसलिए इस असमिका को $0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए सिद्ध करना पर्याप्त है।



चित्र 17

चित्र 17 में, O इकाई वृत्त का केन्द्र इस प्रकार है कि कोण $POR = x$ रेडियन है तथा $0 < x < \frac{\pi}{2}$ है। रेखा QP और RS रेखा OP पर लंब हैं। आगे, PR को मिलाइए। तब,

ΔOPR का क्षेत्रफल $<$ त्रिज्यखंड OPR का क्षेत्रफल $< \Delta OPQ$ का क्षेत्रफल है।

अर्थात् $\frac{1}{2}OP.RS < \frac{x}{2\pi}.\pi.(OP)^2 < \frac{1}{2}OP.PQ$ है।

अर्थात् $RS < x.\,OP < PQ$ है। .... (1)

ΔORS से, $\sin x = \frac{RS}{OR} = \frac{RS}{OP}$ है तथा इसीलिए $RS = OP \sin x$ है। साथ ही, ΔOQP से, $\tan x = \frac{PQ}{OP}$ है तथा इसीलिए $PQ = OP.\tan x$ है।

असमिका (1) में RS और PQ के मान रखने पर हमें प्राप्त होता है।

इस प्रकार, $OP \sin x < OP.x < OP.\tan x$ है।

क्योंकि लंबाई OP घनात्मक है, इसलिए हमें प्राप्त है :

$\sin x < x < \tan x$ है। .... (2)

क्योंकि $0 < x < \frac{\pi}{2}$ है, इसलिए $\sin x$ घनात्मक है तथा इसीलिए असमिका (2) में $\sin x$ से भाग देने पर, हम $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ प्राप्त करते हैं। इन सबके व्युत्क्रमों के लेने पर, हमें $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ प्राप्त होता है। अतः, सिद्ध हो गया।

* * *

उदाहरण 22 : निम्नलिखित दोनों महत्वपूर्ण सीमाओं को ज्ञात कीजिए :

i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

हल : उदाहरण 21 की असमिका हमें बताती है कि फलन $\frac{\sin x}{x}$ फलन $\cos x$ तथा मान 1 वाले अचर फलन की बीच सेंडविच हो जाता है। साथ ही, क्योंकि $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ है, इसलिए हम देखते हैं कि (i) की उपपत्ति सेंडविच प्रमेय से पूर्ण हो जाती है।

(ii) इसको सिद्ध करने के लिए, हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिका $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ की याद करते हैं। तब,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)s$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0 \text{ है।}$$

ध्यान दीजिए कि हमने अस्पष्ट रूप से इस तथ्य का उपयोग किया है कि $x \to 0$ समतुल्य है $\frac{x}{2} \to 0$ के। इसकी पुष्टि $y = \frac{x}{2}$ रख कर की जा सकती है।

* * *

उदाहरण 23 : मान निकालिए :

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

हल : i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{3x} . \frac{3x}{\sin x}\right]$

$= 3.\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) \div \left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]$

$= 3.\lim\limits_{3x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\right] \div \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$

$= 3.1.1 = 3 (\text{as } x \to 0, 3x \to 0)$ है।

ii) हमें प्राप्त है: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$ हैं।

* * *

निम्नलिखित प्रश्नों में आप इसी प्रकार सीमाएँ परिकलित कर सकते हैं।

E14) प्रमेय 2 के v) और vi) को सिद्ध कीजिए।

E15) दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3}{x} = 3$ है।

E16) $\lim\limits_{x\to 1}\left[2x + 5\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\right]$ परिकलित कीजिए।

आइए निम्नलिखित प्रमेय में देखें कि एक-पक्षीय सीमा और सीमा के संकल्पनाएँ किस प्रकार परस्पर जुड़ी हैं।

प्रमेय 4 : निम्नलिखित कथन समतुल्य हैं :

i) $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ का अस्तित्व है।

ii) $\lim\limits_{x\to p+} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to p-} f(x)$ के अस्तित्व हैं तथा ये बराबर हैं।

उपपत्ति : यह दर्शाने के लिए कि i) और ii) समतुल्य हैं, हमें यह दर्शाना होगा कि i) $\Rightarrow$ ii) तथा ii) $\Rightarrow$ i) है। सर्वप्रथम हम सिद्ध करते हैं कि i) $\Rightarrow$ ii) है। इसके लिए, हम कल्पना करते हैं कि $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ है।

तब, $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर $\exists \delta > 0$ ताकि $0 < |x-p| < \delta$ के लिए $|f(x)-L| < \varepsilon$ है।

अब, $0 < |x-p| < \delta \Rightarrow p < x < p+\delta$ और $p-\delta < x < p$ है। इस प्रकार, हमें $p < x < p+\delta$ के लिए और $p-\delta < x < p$ के लिए $|f(x)-L| < \varepsilon$ प्राप्त होता है। इसका अर्थ है कि $\lim_{x \to p^-} f(x) = L = \lim_{x \to p^+} f(x)$ है।

अब हम इसका विलोम, अर्थात् ii) $\Rightarrow$ i) सिद्ध करते हैं। इसके लिए, हम कल्पना करते हैं कि $\lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x) = L$ है। तब, $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर, $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ है ताकि

$p-\delta_1 < x < p$ के लिए $|f(x)-L| < \varepsilon$ है तथा

$p < x < p+\delta_2$ के लिए $|f(x)-L| < \varepsilon$ है।

मान लीजिए कि $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ है। तब, $p-\delta < x < p$ तथा $p < x < p+\delta$ दोनों के लिए, हमें $|f(x)-L| < \varepsilon$ प्राप्त होता है। इसका अर्थ है कि जब भी $0 < |x-p| < \delta$ है, तब $|f(x)-L| < \varepsilon$ है।

अतः, $\lim_{x \to p} f(x) = L$ है।

इस प्रकार, हमने दर्शाया है कि i) $\Rightarrow$ ii) और ii) $\Rightarrow$ i) है, जिसके सिद्ध हो जाता है कि दोनों कथन समतुल्य हैं। ■

प्रमेय 4 से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि यदि $\lim_{x \to p} f(x)$ का अस्तित्व है, तो $\lim_{x \to p+} f(x)$ और $\lim_{x \to p-} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है तथा साथ ही $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p+} f(x) = \lim_{x \to p-} f(x)$ है।

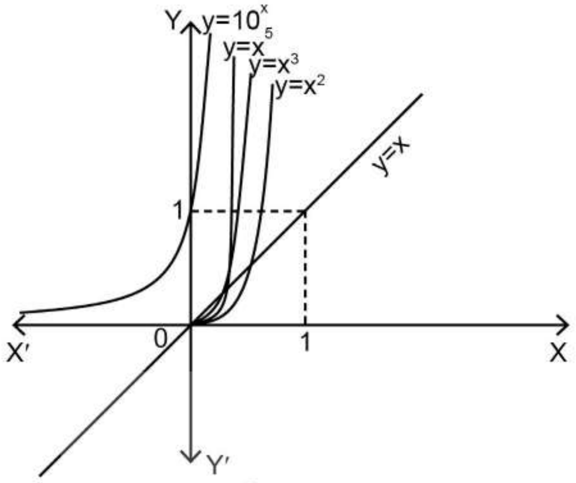
टिप्पणी 5 : यदि आप फलन $f(x) = x-[x]$ पर प्रमेय 4 का अनुप्रयोग करते हैं, तो आप देखेंगे कि $\lim_{x \to p}\{x-[x]\}$ का अस्तित्व नहीं है,

क्योंकि $\lim_{x \to p}\{x-[x]\} \neq \lim_{x \to p-}\{x-[x]\}$ है।

इकाई 6 में, हमने आपका परिचय बहुपद फलनों, परिमेय फलनों तथा त्रिकोणमितीय से करवाया था। अगले भाग में, हम कैलकुलस में विशेष रूप से प्रयोग होने वाले प्रारंभिक फलनों की अपनी सूची को, चरघातांकी फलनों और उनके प्रतिलोम, अर्थात् लघुगणकीय फलनों की सीमाओं का उपयोग करके, पूर्ण करेंगे।

7.6 चरघातांकी और लघुगणकीय फलन

अभी तक हमने विभिन्न प्रकार के फलनों, जैसे मापांक फलन, अधिकतम पूर्णांक फलन, बहुपद फलन, परिमेय फलन और त्रिकोणमितीय फलन, के कुछ पहलुओं का अध्ययन किया है। इस भाग में, हम एक नए प्रकार के फलनों पर चर्चा करेंगे, जो चरघातांकी फलन और लघुगणकीय फलन कहलाते हैं।



चित्र 18

चित्र 18, $y=f_1(x)=x, y=f_2(x)=x^2, y=f_3(x)=x^3$ तथा $y=f_4(x)=x^4$ के आलेखों को दर्शाती है। ध्यान दीजिए कि ये वक्र x की घात में वृद्धि होने पर तीव्र (अधिक खड़ी) होती जाती हैं। वक्र जितनी अधिक तीव्र होगी, वृद्धि की दर उतनी ही अधिक होगी। इसका क्या अर्थ है? इसका अर्थ है कि $x(>1)$ के मान में एक निश्चित वृद्धि होने पर $y=f_n(x)$ के मान में अधिक वृद्धि होती जाती है, जैसे-जैसे $n=1,2,3,4$ के लिए n में वृद्धि होती जाती है। यह समझने योग्य है कि ऐसा कथन n के सभी घनात्मक मानों के लिए सत्य है, जहाँ $f_n(x)=x^n$ है। आवश्यक रूप से, इसका अर्थ है कि $y=f_n(x)$ का आलेख n में वृद्धि होने पर y-अक्ष की ओर अधिक झुकता जाता है। उदाहरणार्थ, $f_5(x)=x^5$ और $f_{10}(x)=x^{10}$ को लीजिए। यदि x में 1 से 4 तक वृद्धि होती है, तो f_5 में वृद्धि 1 से 4^5 तक होती है, जबकि f_{10} में वृद्धि 1 से 4^{10} तक होती है। इस प्रकार, x में समान वृद्धि के लिए, f_{10} में वृद्धि f_5 की तुलना में अधिक तीव्र गति से होती है।

उपरोक्त चर्चा से, यह स्पष्ट है कि बहुपद फलनों में वृद्धि बहुपद फलन की घात पर आश्रित है – घात जितनी बड़ी होगी, वृद्धि उतनी ही अधिक होगी। क्या कोई ऐसा फलन है, जो जिसमें किसी भी बहुपद फलन की तुलना में अधिक गति से वृद्धि होती है? इसका उत्तर 'हाँ' है तथा ऐसे फलन का एक उदाहरण $y=f(x)=10^x$ है।

हमारा दावा है कि यह फलन f किसी घनात्मक पूर्णांक n के लिए $f_n(x)=x^n$ से अधिक गति से बढ़ता है। उदाहरणार्थ, हम सिद्ध कर सकते हैं कि 10^x में वृद्धि $f_{100}(x)=x^{100}$ की वृद्धि की तुलना में अधिक गति वाली है। x के बड़े मानों जैसे $x=10^3$ के लिए, ध्यान दीजिए कि $f_{100}(x)=(10^3)^{100}=10^{300}$ है जबकि $f(10^3)=10^{10^3}=10^{1000}$ है। स्पष्ट है कि $f(x), f_{100}(x)$ से बहुत अधिक बड़ा है। यह सिद्ध करना कठिन नहीं है कि सभी $x>10^3$ के लिए, $f(x)>f_{100}(x)$ परंतु यहाँ हम इसकी उपपत्ति नहीं दे रहे हैं। इसी प्रकार, x के बड़े मानों को चुनने पर, इसका सत्यापन किया जा सकता है कि किसी घनात्मक पूर्णांक n के लिए, $f_n(x)$ की तुलना में $f(x)$ में अधिक तीव्रता से वृद्धि होती है। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा तक पहुँचते हैं।

परिभाषा : घनात्मक आधार a के साथ चरघातांकी फलन (exponential function) f, $y=f(x)=a^x$ द्वारा परिभाषित फलन है। आइए इसे स्पष्ट करें।

यदि x एक घनात्मक पूर्णांक है, तो $a^x=\underbrace{a.a....a}_{\text{n times}}$ है।

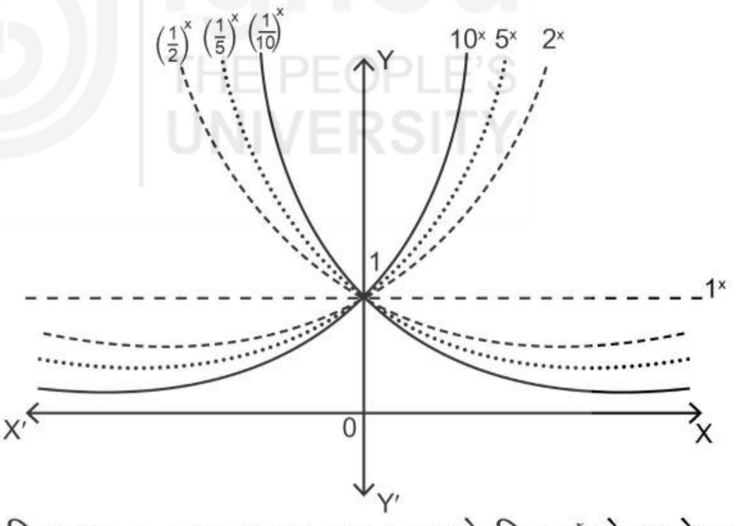
यदि $x=0$ है, तो $a^o=1$ है।

यदि x एक ऋणात्मक पूर्णांक है, तो $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ है।

यदि x एक परिमेय संख्या है, अर्थात् $x = \frac{p}{q}$ है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है, तो $a^x = a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p = (\sqrt[q]{a})^p$ है। अब, प्रश्न उठता है कि हम a^x को किस प्रकार परिभाषित करेंगे, यदि x एक अपरिमेय संख्या है? उदाहरणार्थ, $2^\pi, 5^{\sqrt{3}}, 10^{\sqrt{2}}$ इत्यादि। इसका उत्तर देने के लिए, चित्र 18 में दिए $y = 10^x$ के आलेख को देखिए, जहाँ x एक परिमेय संख्या है। यदि हम $y = 10^x$ के प्रांत का परिमेय संख्याओं से परिमेय और अपरिमेय संख्याओं दोनों में प्रसार करें, तो आलेख में x के अपरिमेय मानों के संगत छिद्र (छेद) होंगे। इन छिद्रों को हम किस प्रकार भरेंगे? इसके लिए, $10^{1.4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1.5}$ पर विचार कीजिए। [क्योंकि $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ है।] हम $\sqrt{2}$ के और सन्निकट मान लेते हैं। तब, बाईं ओर से हम 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41423, ... प्राप्त करते हैं तथा दाईं ओर से हम 1.5, 1.42, 1.418, 1.4143, ... प्राप्त करते हैं। इस सन्निकटन प्रक्रिया का उपयोग करते हुए, हम $10^{\sqrt{2}} \approx 10^{1.4142}$ लिख सकते हैं।

हम किसी भी अपरिमेय संख्या x के लिए, परिभाषित कर सकते हैं कि $a^x = \lim_{r \to x} a^r$ है, जहाँ r एक परिमेय संख्या है। उदाहरणार्थ, 2^π संख्याओं $2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, 2^{3.1415}, ...$ के अनुक्रम की सीमा है।

अब, आइए x के विभिन्न घनात्मक मानों के लिए a^x का आलेख खींचें। चित्र 19 में ये आलेख दर्शाए गए हैं।



चित्र 19 : $a = 1, 2, 5, 10, 1/2, 1/5, 1/10$ के लिए a^x के आलेख

चित्र 19 तीन प्रकार के चरघातांकी फलनों $y = a^x$ को दर्शाती है।
ये हैं :

i) जब $0 < a < 1$, चरघातांकी फलन ह्रासमान है (घटता है)।

ii) जब $a = 1$, चरघातांकी फलन अचर है।

iii) जब $a > 1$, चरघातांकी फलन वर्धमान है (बढ़ता है)।

आप यह देख सकते हैं कि $(1/a)^x$ का आलेख y-अक्ष के सापेक्ष a^x के आलेख का परावर्तन ही है। इसका कारण यह है कि $(1/a)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$ है। आप यह भी देख सकते

हैं कि ये सभी आलेख एक ही बिंदु $(0, 1)$ से होकर जाते हैं, क्योंकि $a \neq 0$ के लिए $a^0 = 1$ हैं। हम चरघातांकी फलनों के कुछ गुणों को दे रहे हैं।

i) चरघातांकी फलन का प्राँत $\mathbb{R}$ है।

ii) चरघातांकी फलन का परिसर $]0, \infty[$ है।

iii) सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $a^x > 0$ है।

iv) बिंदु $(0, 1)$ सदैव चरघातांकी फलन के आलेख पर स्थित है, क्योंकि प्रत्येक $a > 1$ के लिए $a^0 = 1$ है।

v) चरघातांकी फलन वर्धमान है, अर्थात् जैस-जैसे हम बाईं से दाईं ओर को चलते हैं, $a > 1$ के लिए आलेख ऊपर की ओर चढ़ता है। यह फलन $0 < a < 1$ के लिए ह्रासमान है। क्योंकि चरघातांकी फलन एकदिष्ट है, इसलिए यह एकैकी और आच्छादक है।

vi) $a^0 = 1,\ a^{-m} = \frac{1}{a^m},\ a^{1/m} = \sqrt[m]{a},\ a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$, जहाँ m और n वास्तविक संख्याएँ हैं।

vii) $a \neq 1$ है, तो $a^m = a^n$ है, iff $m = n$ है।

viii) $a^m a^n = a^{m+n}$

ix) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

x) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

xi) यदि $m > n$ और $a > 1$ है, तो $a^m > a^n$ होता है। साथ ही, यदि $m > n$ और $0 < a < 1$ है, तो $a^m < a^n$ होता है।

चरघातांकी फलन जिसका आधार 10 है, **सामान्य (common) चरघातांकी फलन** कहलाता है।

आइए इसके बारे में अधिक समझने के लिए, निम्नलिखित उदाहरण पर चर्चा करें।

उदाहरण 24 : निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए :

i) $3^{x^2+3} = 81$ ii) $2^{x+1}\, 3^x = 432$ iii) $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{4^x}{2}$

हल : i) 81 को 3 पर घात 4 के रूप में लिखने पर, ताकि घातों की एक ही आधार पर तुलना की जा सके, हमें प्राप्त होता है :

$3^{x^2+3} = 3^4$

$x^2 + 3 = 4$

या $x^2 = 1$ अतः $x = \pm 1$ है।

ii) $2^{x+1}\, 3^x = 432$

$\Rightarrow 2^x \,.\, 2 \,.\, 3^x = 432$

$\Rightarrow 2^x . 3^x = 216$

$\Rightarrow 6^x = 216$

$\Rightarrow 6^x = 6^3$

या $x = 3$ है।

iii) $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{4^x}{2}$

$\Rightarrow (2)^{x/2} = \frac{2^{2x}}{2}$

$\Rightarrow (2)^{x/2} = 2^{2x-1}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = 2x - 1$

या $x = 2/3$ है।

* * *

हम चित्र 19 में दिए आलेखों से निम्नलिखित सीमाओं को पढ़ सकते हैं :

i) $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ जब $a > 1$ है।

ii) $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ जब $a > 1$ है।

iii) $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ जब $0 < a < 1$ है।

iv) $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ जब $0 < a < 1$ है।

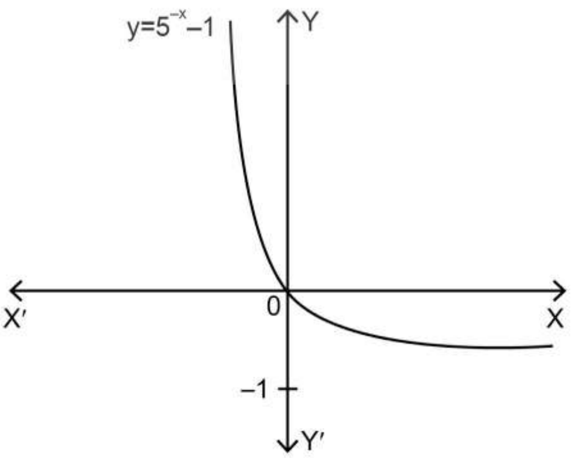
आप अनंत पर सीमा की परिभाषा का उपयोग करते हुए, इन सीमाओं को ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 25 : $\lim_{x\to\infty}(5^{-x} - 1)$ ज्ञात कीजिए। साथ ही, $5^{-x} - 1$ का आलेख भी खींचिए।

हल : मान लीजिए कि $y = 5^{-x} - 1$ है।

$\lim_{x\to\infty}(5^{-x} - 1) = \lim_{x\to\infty}(5^{-x}) - \lim_{x\to\infty}(1) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1 = 0 - 1 = -1$ है।

चित्र 20 में $5^{-x} - 1$ का आलेख दर्शाया गया है।



चित्र 20 : $5^{-x} - 1$ का आलेख

***

कलन में, सबसे अधिक सुविधाजनक चुने वाले आधारों में से एक संख्या e है, जिसे $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। तदानुसार, जब $a = e$ है, तब $a^x = e^x$ है। आइए e का मान सहजज्ञानात्मक रूप से ज्ञात करें। सारणी 12 संख्या 0 के निकट x के मानों के संगत $(1+x)^{1/x}$ के मानों को दर्शाती है।

सारणी 12

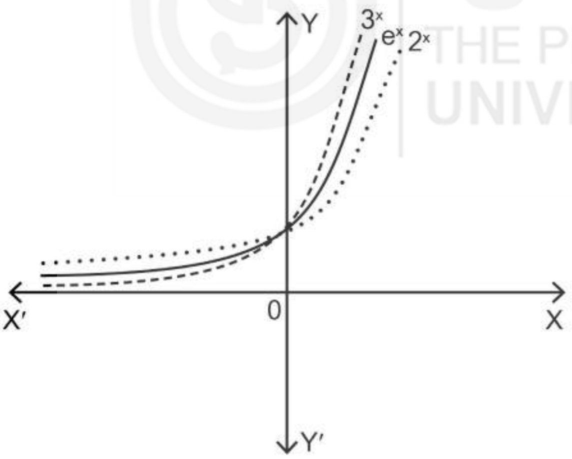
x	1	0.1	0.01	0.0001	0.000001	0.0000001
$(1+x)^{1/x}$	2	2.5937	2.7048	2.7181	2.71828	2.71828

अतः, $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} \approx 2.71828$ है।

आप देख सकते हैं कि e के दशमलव स्थान (अंक) अनावर्ती हैं, क्योंकि e एक अपरिमेय संख्या है। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा पर पहुँचते हैं :

परिभाषा : $f(x) = e^x$ के रूप में परिभाषित फलन f प्राँत $\mathbb{R}$ तथा परिसर $]0, \infty[$ के साथ **प्राकृतिक चरघातांकी फलन (natural exponential function)** कहलाता है। इस प्रकार, सभी x के लिए, $e^x > 0$ होता है।

चित्र 21 में e^x के आलेख को दर्शाया गया है। आप देख सकते हैं कि e^x का आलेख 2^x और 3^x के आलेखों के बीच में स्थित है, क्योंकि e का मान 2 और 3 के बीच स्थित है।



चित्र 21 : e^x का आलेख

चित्र 21 में दिए e^x के आलेख से, यह स्पष्ट है कि

i) यह आलेख (0, 1) से होकर जाता है।

ii) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ है।

iii) $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ है।

प्राकृतिक चरघातांकी फलन को सामान्यतः कैलकुलस और उसके अनुप्रयोगों में उपयोग किया जाता है। आइए निम्नलिखित उदाहरण में चरघातांकी फलन की सीमा ज्ञात करें।

उदाहरण 26 : $\lim_{x \to 2^+} e^{3/(2-x)}$ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $t = \frac{3}{2-x}$ है।

क्योंकि $x \to 2^+ \Rightarrow 2 - x \to 0^- \Rightarrow \frac{3}{2-x} \to -\infty$ है, इसलिए

$\lim_{x \to 2^+} e^{\frac{3}{(2-x)}} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$ है।

* * *

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E17) $3^{x^2-x} = 9$ को हल कीजिए।

E18) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ ज्ञात कीजिए।

E19) $f(x) = x^2$ और $g(x) = 2^x$ के आलेखों की तुलना कीजिए।

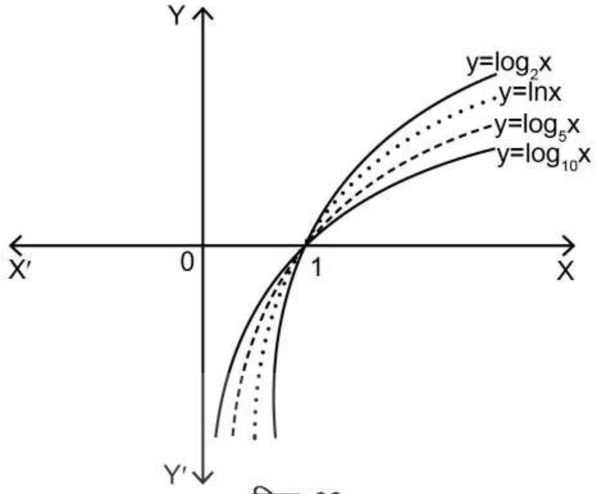
यह जानना रोचक होगा कि चरघातांकी फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व है या नहीं तथा उसका एक अच्छा निर्वचन है। यदि $a > 0$ और $a \neq 1$ है, तो चरघातांकी फलन $f(x) = a^x$ या तो वर्धमान है या ह्रासमान है तथा इसी कारण यह एकैकी आच्छादक है। इसी कारण इसका एक प्रतिलोम फलन है जिसे आधार a के साथ लघुगणकीय फलन कहते हैं तथा $\log_a x$ से व्यक्त करते हैं। इससे निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है।

इस संख्या को निरूपित करने के लिए, स्विटजरलैण्ड के महान गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर के सम्मान में अक्षर e को चुना गया, जिन्होंने इसके विशिष्ट गुणों की खोज की तथा ऐसे अनुप्रयोग खोजे जिनमें e महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है।

परिभाषा : मान लीजिए कि $a > 0$ और $a \neq 1$ है। तथा $\log_a x$ एक लघुगणकीय फलन कहलाता है। इसे आधार a पर x का लघुगणक पढ़ा जाता है।

इस प्रकार, $\log_a x = y$, यदि $a^y = x$ है। अर्थात $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ है।

इस प्रकार, यदि $x > 0$ है, तो $\log_a x$ वह घातांक है जो आधार a पर लगाया जाना चाहिए ताकि x प्राप्त हो जाए। उदाहरणार्थ, $\log_{10} 100 = 2$ है, क्योंकि $10^2 = 100$ है। आइए इसका कुछ आभास प्राप्त करने के लिए, आइए कुछ स्पष्ट उदाहरणों के साथ कार्य करें। हम जानते हैं कि $3^2 = 9$ है। लघुगणक के पदों में, हम इसे पुनः $\log_3 9 = 2$ लिखते हैं। इसी प्रकार, $10^3 = 1000$ यह कहने के समतुल्य है कि $\log_{10} 1000 = 3$ है। साथ ही, $256 = 2^8 = 4^4$ यह कहने के समतुल्य है कि $\log_2 256 = 8$ है या $\log_4 256 = 4$ है अथवा यदि हम कोई आधार $a > 1$ निश्चित कर दें, तो हम लघुगणक को घनात्मक वास्तविक संख्याओं से सभी वास्तविक संख्याओं तक के एक फलन के रूप में देख सकते हैं। यह फलन **लघुगणकीय फलन (logarithmic function)** कहलाता है तथा $f(x) = \log_a x$ से परिभाषित $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ है, यदि $a^y = x$ हो। जैसा कि पहले बताया गया है, यदि आधार $a = 10$ है, तो हम इसे सामान्य लघुगणकीय फलन कहते हैं तथा यदि $a = e$ हो, तो हम इसे प्राकृतिक लघुगणकीय फलन कहते हैं। प्रायः प्राकृतिक लघुगणकीय फलन को ln द्वारा व्यक्त किया जाता है। चित्र 22 आधार 2, e और 10 पर लघुगणकीय फलनों के आलेख दर्शाती है।



चित्र 22

किसी भी आधार $a>1$ के लिए, लघुगणकीय फलन के गुण नीचे दिए जा रहे हैं :

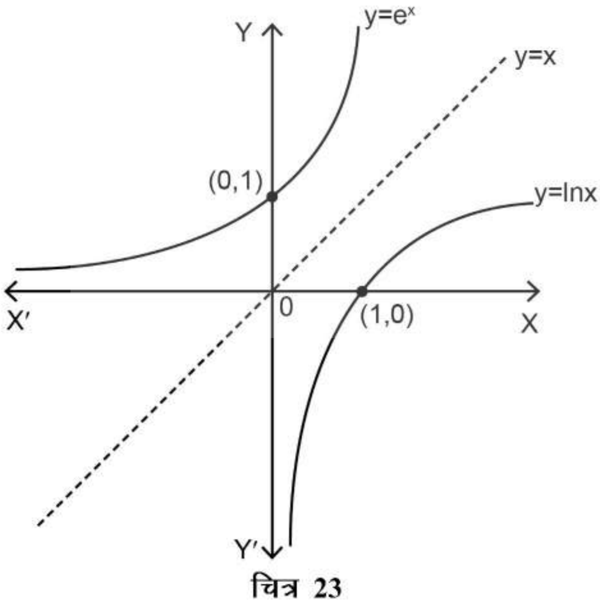
i) log फलन का प्राँत $]0,\infty[$ है, क्योंकि घनेतर (non-positive) संख्याओं के लघुगणक की कोई अर्थपूर्ण परिभाषा नहीं हो सकती है।

ii) लघुगणकीय फलन का परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

iii) लघुगणकीय फलन $\log_a x$ का आलेख रेखा $y = x$ के सापेक्ष $y = a^x$ के आलेख का परावर्तन है। बिंदु $(1, 0)$ सदैव एक लघुगणकीय फलन के आलेख पर स्थित होता है।

iv) लघुगणकीय फलन सदैव वर्धमान होता है, अर्थात् जैस-जैसे हम बाईं से दाईं ओर को चलते हैं, आलेख ऊपर उठता जाता है।

v) शून्य के बहुत निकट किसी x के लिए, $\log x$ के मान को किसी दी हुई वास्तविक संख्या से छोटा नहीं बनाया जा सकता। दूसरे शब्दों में, चौथे चतुर्थांश में, आलेख y-अक्ष की ओर अग्रसर होता है, (परंतु उससे कभी मिलता नहीं है)।



चित्र 23

vi) चित्र 23 फलनों $y = e^x$ और $y = \ln x$ के आलेखों को दर्शाती है। यह देखना रोचक है कि ये दोनों वक्र रेखा $y = x$ में परावर्तित होकर एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब हैं।

vii) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ या $\log_a x.\log_b a = \log_b x$ है। [आधार परिवर्तन का गुण]

viii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ है।

ix) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ है।

x) $\log_a(x^r) = r\log_a x$ है, जहाँ r एक वास्तविक संख्या है।

xi) $\ln(e^x) = x$ है, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए।

xii) $e^{\ln x} = x$ है, सभी $x > 0$ के लिए।

xiii) $\ln e = 1$ होता है।

आइए इन पर आधारित कुछ उदाहरणों को हल करने का प्रयास करें।

उदाहरण 27 : समीकरण $\log_5(2x+1) - 2\log_5(x-3) = 1$ को हल कीजिए।

हल : दिया है $\log_5(2x+1) - \log_5(x-3)^2 = 1$

$$\Rightarrow \log_5 \frac{(2x+1)}{(x-3)^2} = 1$$

$$\Rightarrow 5^1 = \frac{2x+1}{(x-3)^2}$$

$$\Rightarrow 5(x^2 - 6x + 9) = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 32x + 44 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, \frac{22}{5}$$

ध्यान दीजिए कि $x = 2$ के लिए $x - 3 < 0$ है। इस प्रकार, दी हुई लघुगणकीय समीकरण का केवल एक हल $x = \frac{22}{5}$ है।

* * *

उदाहरण 28 : क्या यह सत्य है कि सभी वास्तविक x के लिए $x = e^{\log x}$ होता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, देखिए कि log फलन का प्राँत सभी घनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। इसलिए, उपरोक्त समीकरण धनेतर वास्तविक संख्याओं के लिए सत्य नहीं है। अब, मान लीजिए कि $y = e^{\log x}$ है। यदि $y > 0$ है, तो हम लघुगणक ले सकते हैं, जिससे हमें $\log y = \log(e^{\log x}) = \log x.\log e = \log x$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, $y = x$ है। अतः, $x = e^{\log x}$ केवल x के घनात्मक मानों के लिए सत्य है।

* * *

उदाहरण 29 : यदि $\ln x = 8$ है, तो x ज्ञात कीजिए।

हल : $\ln x = 8$ का अर्थ है कि $e^8 = x$ है।

अतः, $x = e^8$ है।

* * *

उदाहरण 30 : $e^{2x+3} = 1$ को हल कीजिए।

हल : $e^{2x+3} = 1$ है।

दोनो पक्षों का प्राकृतिक लघुगणक लेने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\ln e^{2x+3} = \ln 1$

$2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ है।

* * *

अब इन प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E20) समीकरण $\ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ को हल कीजिए।

E21) $\lim\limits_{x \to 0} \log_{10}(\tan^2 x)$ को ज्ञात कीजिए।

अगले भाग में, हम अतिपरवलयिक फलनों तथा उनके प्रतिलोमों के बारे में चर्चा करेंगे।

7.7 अतिपरवलयिक फलन तथा उनके प्रतिलोम फलन

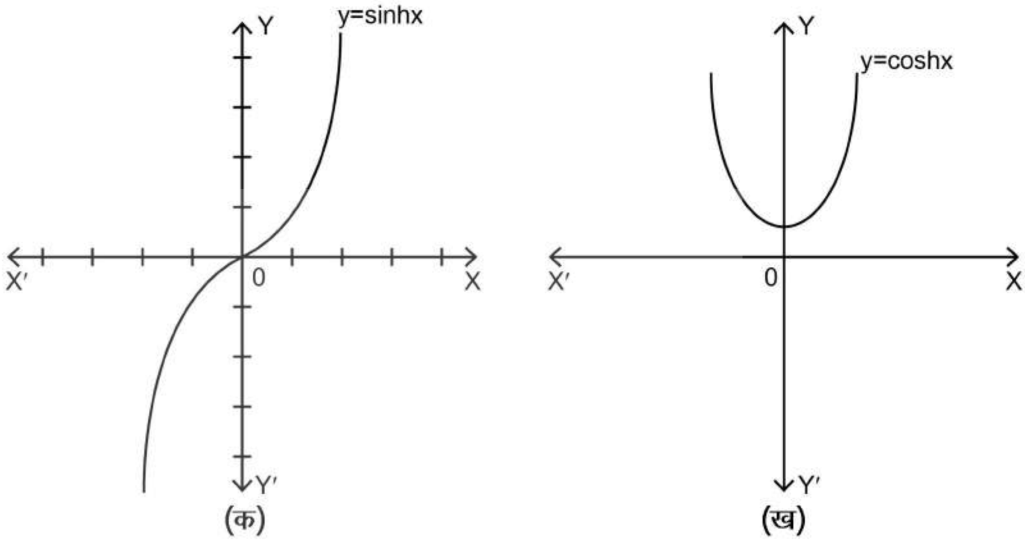
अन्य विषयों में, गणित का अनुप्रयोग करते समय, हमें बहुत बार e^x और e^{-x} के कुछ संयोजन प्राप्त होते हैं। इनकी महत्वता के कारण, इन संयोजनों को अतिपरवलयिक (hyperbolic) साइन, अतिपरवलयिक कोसाइन, इत्यादि जैसे विशिष्ट नाम दिए गए हैं। इन नामों से सुझाव मिलता है कि इनकी त्रिकोणमितीय फलनों से कुछ समरूपता है। आइए इनकी परिशुद्ध परिभाषाओं को देखें तथा अतिपरवलयिक और त्रिकोणमितीय फलनों के बीच में समानता और असमानता के बिंदुओं को समझने का प्रयास करें।

परिभाषा : अतिपरवलयिक साइन फलन को सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। इस फलन का परिसर $\mathbb{R}$ है।

आप देखेंगे कि $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$ है।

परिभाषा : अतिपरलयिक कोसाइन फलन को सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। इस फलन का परिसर $[1, \infty]$ है। आप देखेंगे कि

$\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \cosh x$ है। यह स्पष्ट है कि अतिपरलयिक साइन एक विषय फलन है, जबकि अतिपरलयिक कोसाइन एक फलन है। चित्र 24 (क) और (ख) इन दोनों फलनों के आलेख दर्शाती हैं।



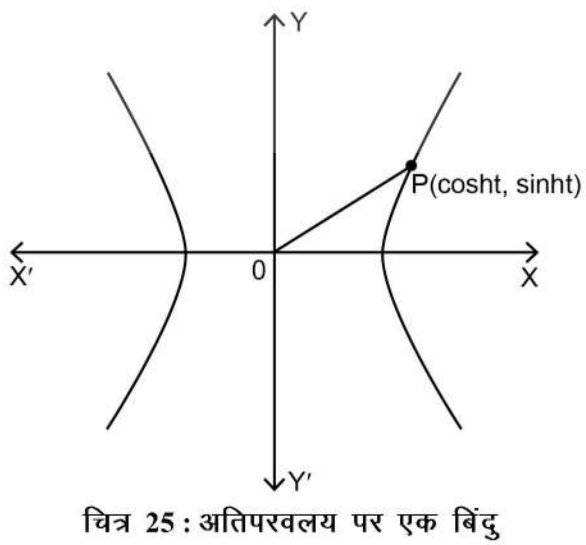
चित्र 24 : (क) sinh x (ख) cosh x का आलेख

उदाहरण 31 : सिद्ध कीजिए कि $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ है।

हल : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \left(\dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}\right) - \left(\dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}\right) = 1$ है।

यह सर्वसमिका नाम अतिपरवलयिक फलनों के कारण का संदर्भ देती है। हम एक इकाई वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर किसी बिंदु $(\cos t, \sin t)$ को निरूपित करते हैं। इसी प्रकार, यदि t कोई वास्तविक संख्या है, तो बिंदु $P(\cosh t, \sinh t)$ अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 1$ की दाईं शाखा पर स्थित होता है, क्योंकि $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ है तथा $\cosh t \geq 1$ है। चित्र 25 इस बिंदु P को दर्शाती है।



चित्र 25 : अतिपरवलय पर एक बिंदु

हम अन्य चार अतिपरवलयिक फलनों को भी नीचे दिए अनुसार परिभाषित करते हैं :

$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ है।

आइए प्रतिलोम अतिपरवलयिक साइन फलन की चर्चा करें। चित्र 24 (क) से, आप देख सकते हैं कि अतिपरलयिक साइन एक निरंतर वर्धमान फलन है। इसका अर्थ है कि इस फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व है, तथा

$y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = e^y - e^{-y}$

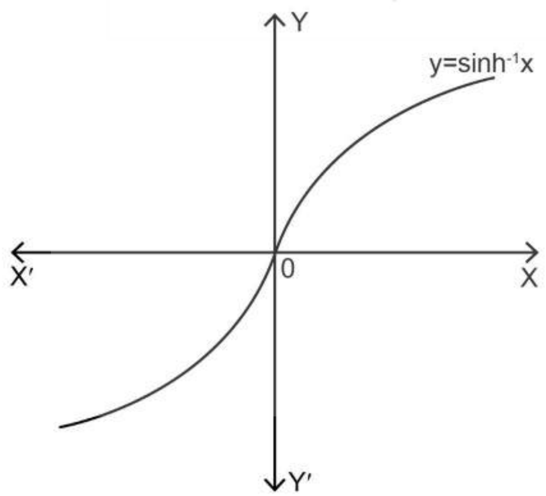
$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ है

$\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^y = x + \left(\sqrt{1+x^2}\right)$ [यहाँ, हमने द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने वाले सूत्र का प्रयोग कर लिया है। ध्यान दीजिए कि यदि $e^y = x - \sqrt{1+x^2}$ है, तो $e^y < 0$ होता है, जो असंभव है। इसलिए हम इस मूल को छोड़ देते हैं।]

$\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ है।

इस प्रकार $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), x \in]-\infty, \infty[$ है। चित्र 26 में $\sin h^{-1}x$ का आलेख दिया गया है।



चित्र 26 : $\sin h^{-1} x$ का आलेख

अतिपरवलयिक कोसाइन फलन की स्थिति में, हम चित्र 24 (ख) से देखते हैं कि इसके प्रतिलोम का अस्तित्व होगा, यदि हम इसके प्राँत को $[0, \infty[$ तक सीमित कर दें। इस प्रतिलोम फलन का प्राँत $[1, \infty[$ होगा तथा परिसर $[0, \infty[$ होगा।

अब, $y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

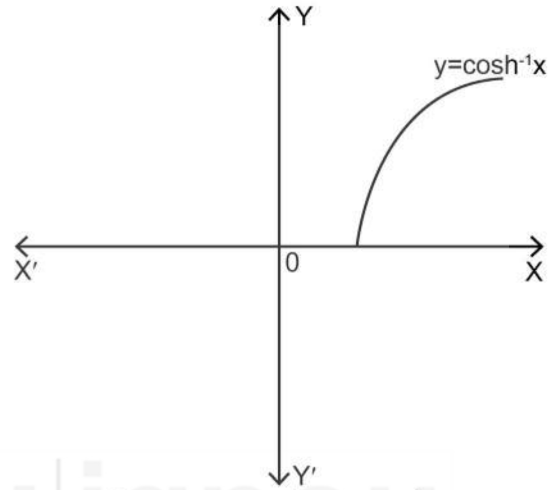
$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ है। [पुनः, हम मूल $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ को छोड़ देते हैं, क्योंकि तब $e^y < 1$ है, जो असंभव है, क्योंकि $y > 0$ है।]

$\Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ है।

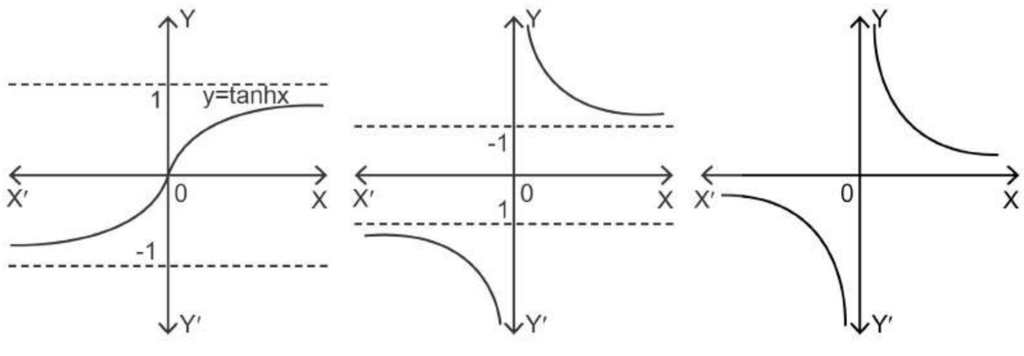
इस प्रकार, $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$ है।

चित्र 27 $\cosh^{-1} x$ के आलेख को दर्शाती है।



चित्र 27 : $\cosh^{-1}x$ का आलेख

ध्यान दीजिए कि $x = 1$ पर $\cosh^{-1} x$ के अवकलज का अस्तित्व नहीं है। चित्र 28 (क), (ख) और (ग) क्रमशः $\tanh x, \coth x$ और $\operatorname{cosech} x$ के आलेखों को दर्शाती हैं। आप देख सकते हैं कि इन फलनों में से प्रत्येक एकैकी तथा निरंतर एकदिष्ट हैं। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, हम प्रतिलोम की बात कर सकते हैं।



चित्र 28: (क) tanh x, (ख) coth x, (ग) cosech x के आलेख

$\sinh^{-1} x$ और $\cosh^{-1} x$ तर्क करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$$

$$y = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x = \coth y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), |x| > 1$$

$$y = \text{cosech}^{-1}x \Leftrightarrow x = \text{cosech}\, y \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{1}\right), x \neq 0$$

क्योंकि $\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x}$ है, इसलिए हमें $\text{sech}\, x$ के प्राँत को उसके प्रतिलोम की बात करने से पहले, $[0, \infty[$ तक सीमित करना पड़ेगा, जैसा हमने $\cosh x$ की स्थिति में किया था। $\text{sech}^{-1} x$ सभी $x \in]0,1]$ के लिए परिभाषित है तथा हम लिख सकते हैं कि

$$\text{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right). 0 < x \leq 1 \text{ है।}$$

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E22) सत्यापन कीजिए :

i) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

ii) $1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$

E23) $\coth x$ और $\text{cosech}\, x$ को जोड़ने वाली एक सर्वसमिका व्युत्पन्न कीजिए।

आइए, अब इस इकाई का सारांश देकर, इसे समाप्त कर रहे हैं।

7.8 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं के बारे में पढ़ा है :

1. सीमा का अनौपचारिक दृष्टिकोण – यदि $f(x)$ के मानों को हम x के मानों को a के पर्याप्त रूप से निकट लाकर (परंतु a के बराबर नहीं) L के जितना निकट हो सके ला सकें, तो $\lim_{x \to a} f(x) = L$ होती है।

2. एक पक्षीय सीमाएँ।

3. किसी फलन f की उसके प्राँत के किसी बिंदु p पर सीमा L होती है, यदि $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर, $\exists\, \delta > 0$ ताकि $|f(x) - L| < \varepsilon$ हो, जब भी $|x - p| < \delta$ हो।

4. $\lim_{x \to p} f(x)$ का अस्तित्व होता है, यदि और केवल यदि $\lim_{x \to p^+} f(x)$ और $\lim_{x \to p^-} f(x)$ दोनों का अस्तित्व हो तथा दोनों बराबर हों।

5. सीमा की अद्धितीयता, अर्थात् यदि $\lim_{x \to a} f(x) = L$ तथा $\lim_{x \to a} f(x) = M$ है, तो $L = M$ होता है।

6. सीमाओं का बीजगणित :

   मान लीजिए कि f और g ऐसे दो फलन हैं कि $\lim_{x \to a} f(x)$ और $\lim_{x \to a} g(x)$ के अस्तित्व हैं। तब,

i) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (योग नियम)

ii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]^{a} = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (अंतर नियम)

iii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]$ (गुणनफल नियम)

iv) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ जबकि $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ हो। (व्युत्क्रम नियम)

v) $\lim\limits_{x\to a} k = k$ (अचर फलन नियम)

vi) $\lim\limits_{x\to a} x = a$ (तत्समक फलन नियम)

vii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ जहाँ n एक घनात्मक पूर्णांक है। (घात नियम)
विशेष रूप में, यदि $f(x) = x$ है, तो $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ है, जहाँ n एक घनात्मक पूर्णांक है।

viii) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ है, जहाँ n एक घनात्मक पूर्णांक है तथा यदि n सम है, तो हम मान लेते हैं कि $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ है।

7. **सेंडविच प्रमेय या स्क्वीज (दबाने वाली) प्रमेय :**

मान लीजिए कि a को अंतर्विष्ट करने वाले अंतराल I पर (संभवतः a को छोड़ते हुए) परिभाषित फलन f, g और h हैं। यह भी मान लीजिए कि

i) $f(x) \le g(x) \le h(x)\ \forall x \in I \setminus \{a\}$ और

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ है।

तब, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ का अस्तित्व है तथा यह L के बराबर है।

8. $f(x) = a^x, a > 1$ द्वारा परिभाषित चरघातांकी फलन f तथा $f(x) = e^x$ द्वारा परिभाषित प्राकृतिक चरघातांकी फलन f।

9. $f(x) = \log_a x, a > 1$ द्वारा परिभाषित लघुगणकीय फलन f तथा $f(x) = \ln x$ द्वारा परिभाषित प्राकृतिक लघुगणकीय फलन f।

10. अतिपरवलयिक फलन है :

i) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

ii) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

iii) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

iv) $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

v) $\text{sech}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

vi) $\text{cosech}\, x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

11. प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलन हैं :

i) $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), x \in]-\infty, \infty[$ है।

ii) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$ है।

iii) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$ है।

iv) $\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), |x| > 1$ है।

v) $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{1}\right), x \neq 0$ है।

vi) $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1$ है।

7.9 हल / उत्तर

E1) i) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

$= \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}$

$= (x+3)$ [क्योंकि $x \neq 3$ है, इसलिए o $x - 3 \neq 0$] है।

सारणी 13

$x < 3$	2.5	2.9	2.95	2.99	$x > 3$	3.01	3.05	3.1	3.5
$f(x)$	5.5	5.9	5.95	5.99	$f(x)$	6.01	6.05	6.1	6.5

$x \longleftarrow\!\!\longrightarrow \qquad \longleftarrow x$

उपरोक्त सारणी में, यह स्पष्ट है कि जैसे-जैसे 3 के निकट x आता जाता है, वैसे-वैसे $f(x)$ का मान 6 के निकट आता जाता है।

परंतु, इस स्थिति में, $x = 3$ पर $f(x)$ परिभाषित नहीं है। इस विचार को यह कह कर व्यक्त किया जा सकता है कि x के 3 की ओर अग्रसर होने पर $f(x)$ की सीमा का मान 6 है।

ii) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+2}$ [क्योंकि $x - 2 \neq 0$] है]

अब, हम 2 के निकट x के मानों को, परंतु 2 के बराबर नहीं रखते हैं।

सारणी 14

$x > 2$	3.0	2.5	2.1	2.01	2.001	$x < 2$	1.999	1.99	1.9	1.5	1.0
$f(x)$	0.60	0.56	0.51	0.50	0.500	$f(x)$	0.500	0.501	0.52	0.55	0.33

$x \longleftarrow\!\!\longrightarrow \qquad \longleftarrow x$

उपरोक्त सारणी में, हम देखते हैं कि 2 के निकट x के आने पर f(x) का मान 0.5 के निकट आता जाता है।

iii) सीमा ज्ञात करने के लिए, हम 0 के बाईं ओर तथा दाईं ओर से भी x के मान निर्दिष्ट करते हैं।

सारणी 15

$x < 0$	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.001
$f(x) = 4x - 1$	-3	-1.4	-1.04	-1.004	-1.004

सारणी 16

$x < 0$	0.5	0.1	0.01	0.001	0.001
$f(x) = 4x - 1$	1	-0.6	-0.96	-0.996	-0.9996

उपरोक्त सारणियों से यह स्पष्ट है कि जब 0 की ओर x अग्रसर होता है, तब $4x - 1$ की सीमा -1 है।

अर्थात् $\lim_{x \to 0} (4x - 1) = -1$ है।

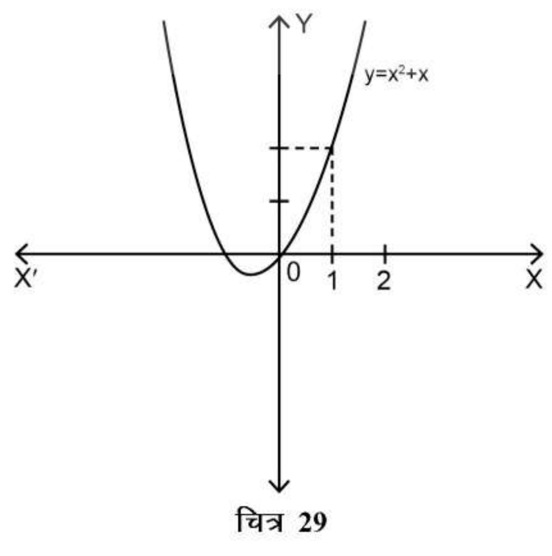
E2) i) अचर फलन होने के कारण (इस स्थिति में, 3) प्रत्येक स्थान एक ही मान 3 ग्रहण करता है, अर्थात् 2 के निकट बिंदुओं पर इसके मान 3 हैं। अतः, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 3$ है। $f(x) = 3$ का आलेख किसी भी विधि से (0, 3) से होकर जाने वाली x-अक्ष के समांतर एक रेखा है तथा इसे चित्र 29 में दर्शाया गया है। इससे भी यह स्पष्ट है कि वाँछित सीमा 3 है। यह सरलता से देखा जा सकता है कि किसी भी वास्तविक संख्या a के लिए, $\lim_{x \to a} f(x) = 3$ होती है।

ii) हम $x = 1$ के निकट f(x) के मानों की एक सारणी 17 में रखते हैं।

सारणी 17

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
f(x)	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

इससे यह व्युत्पन्न करना उचित है कि $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2$ है।



चित्र 29

चित्र 29 में दर्शाए $f(x) = x^2 + x$ के आलेख से, यह स्पष्ट है कि जब 1 की ओर x अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का मान 2 की ओर अग्रसर होता है। अतः, हम पुनः देखते हैं कि $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$ है।

iii) यहाँ, हम 0 के निकट x के मानों के संगत $f(x)$ के सन्निकट मानों को सारणी 18 में लिखते हैं।

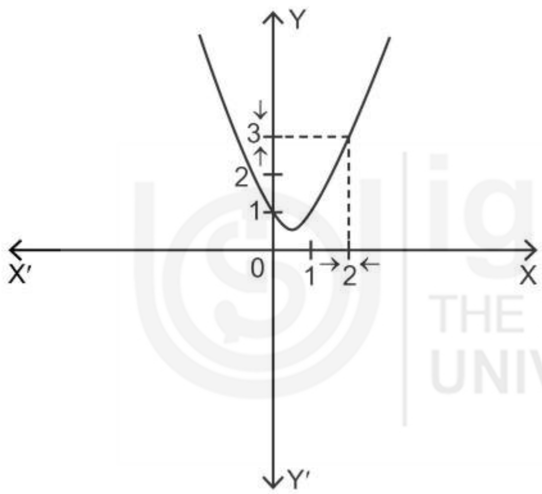
सारणी 18

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

इस सारणी से, हम व्युत्पन्न कर सकते हैं कि

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1 \text{ है।}$$

E3)



चित्र 30 : $x^2 - x + 1$ का आलेख

सारणी 19

x	1.0	1.5	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999
f(x)	1.000	1.750	2.710	2.853	2.970	2.985	2.997

⟶ बाईं पक्षीय सीमाएँ

सारणी 20

x	3.0	2.5	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001
f(x)	7.000	4.750	3.310	3.153	3.030	3.115	3.003

⟶ दाईं पक्षीय सीमाएँ

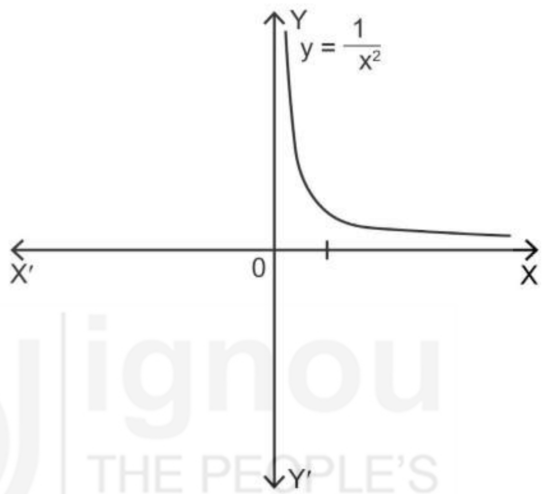
इससे स्पष्ट है कि $\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3$ है।

E4) **सारणी** 21 ($x \to 0^-$)

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	0
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	1	4	100	10000	1×10^6	परिभाषित नहीं

सारणी 22 ($x \to 0^+$)

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001	0
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	1	4	100	10000	1×10^6	परिभाषित नहीं



चित्र 31 : $\frac{1}{x^2}$ का आलेख

आलेख से यह स्पष्ट है कि जब $x \to 0$ है, तब $y = f(x)$ बिना परिबंध के ऊपर की ओर चढ़ता है। अतः, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ का कोई अस्तित्व नहीं है।

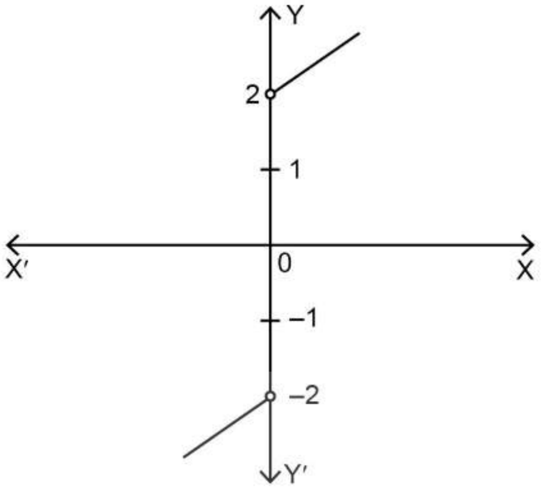
E5) सामान्य प्रक्रिया अपनाते हुए, हम 0 के निकट x के मानों के संगत $f(x)$ के मानों की सारणी बनाते हैं। ध्यान दीजिए कि x के ऋणात्मक मानों के लिए, हमें $x-2$ का मान निकालने की आवश्यता है तथा घनात्मक मानों के लिए, हमें $x+2$ का मान निकालने की आवश्यता है।

सारणी 23

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001	2.001	2.01	2.1

सारणी 23 की प्रथम तीन प्रविष्टयों से, हम व्युत्पन्न करते हैं कि फलन का मान -2 तक घटता है तथा इसी लिए $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -2$ है। इसी सारणी की अंतिम तीन प्रविष्टियों से, हम व्युत्पन्न करते हैं कि फलन का मान 2 से बढ़ता जाता है तथा इसी लिए $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$ है।

क्योंकि 0 पर बाईं पक्ष और दाईं पक्ष सीमाएँ संपाती नहीं हैं, इसलिए हम कहते हैं कि 0 पर फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं है।



चित्र 32

इस फलन का आलेख चित्र 32 में दिया है। यहाँ, हम टिप्पणी करते हैं कि $x = 0$ पर फलन का मान तक परिभाषित नहीं है।

E6) $\text{LHL} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0^+} f(1-h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|1-h-1|}{1-h-1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0-h|}{0-h} = -1 \text{ है।}$$

$\text{RHL} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0^+} f(1+h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|1+h-1|}{1+h-1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = 1 \text{ है।}$$

अतः, $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ का अस्तित्व नहीं है।

E7) इसे आप शायद स्वयं करना चाहेंगे।

E8) i) सिद्ध करने के लिए, यदि $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ताकि $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \in$ जब भी $0 < |x-2| < \delta$ है।

मान लीजिए कि $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ है।

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1-2\varepsilon}{2} < \frac{1}{x} < \frac{1+2\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+2\varepsilon} < x < \frac{2}{1-2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+2\varepsilon} - 2 < x - 2 < \frac{2}{1-2\varepsilon} - 2$$

$$\Rightarrow \frac{-4\varepsilon}{1+2\varepsilon} < x - 2 < \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}$$

अब, मान लीजिए कि $\delta = \min\left\{\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right\} = \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$

इस प्रकार, $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ जब कि $|x-2| < \delta = \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ है।

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

ii) $\frac{x^3-1}{x-1} - 3 = \frac{x^3 = 3x+2}{x-1} = (x-1)\,(x+2)$ है, यदि $x \neq 1$ है।

$\varepsilon > 0$ दिया रहने पर, यदि हम $\delta = \min\{(2/7)\,\varepsilon, 1/2\}$

चुनें, तो $|x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{3}{2} \Rightarrow x+2 < \frac{7}{2}$ तथा

$\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| = |(x-1)(x+2)| < (7/2)|x-1| < (7/2).2/7.\varepsilon = \varepsilon$ है।

इस प्रकार, $|x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < \varepsilon$ है।

अतः, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$ है।

E9) $|f(x) - L| = \left|\sin\frac{1}{x} - 0\right|$ (यदि $x \neq 0$ है।)

$= \left|\sin\frac{1}{x}\right|$ ... (3)

अब, स्पष्टतः $0 < |x-0| < \delta$ या $0 < |x| < \delta$ है। ... (4)

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ लीजिए। यदि δ कोई घनात्मक संख्या है, तो एक घनात्मक पूर्णांक ऐसा ज्ञात करना संभव है कि

$\delta > \frac{2}{(4x+1)\pi}$ या $\frac{1}{\delta} < \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ है।

अब, (3) और (4) से, हम प्राप्त करते हैं कि $|f(x) - L| = \left|\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 > \varepsilon$ है।

अतः, $x \to 0$ होने पर $f(x)$, 0 की ओर प्रवृत्त नहीं करता है।

E10) $|f(x) - L| = \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| < \in$

$\Rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x}\right| < \in$

$\Rightarrow |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| < \in$

$\Rightarrow 0 < |x| < \in$ है। [$\because \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ है, $x = 0$ को छोड़ते हुए। $x = 0$ पर यह परिभाषित नहीं है, परंतु हमें इसकी आवश्यकता नही है।]

$\Rightarrow 0 < |x| < \delta$ है।

जहाँ $\delta = \in$

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to 2} x\sin\frac{1}{x} = 0$ है।

E11) i) क्योंकि $x-[x] = x-2$ है, इसलिए $2 \le x < 3$ है।

$\lim\limits_{x\to 3^-} x-[x] = \lim\limits_{x\to 3^-} x-2 = 1$ है।

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} |x|/x = \lim\limits_{x\to 0^+} x/x = 1$, $x>0$ के लिए, $|x| = x$ है।

iii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(x^2+2)|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x^2+2)(-x)}{x}$ क्योंकि $x<0$ के लिए $|x| = -x$ है।

$= \lim\limits_{x\to 0^-} -(x^2+2) = -2$ है।

E12) i) $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर, यदि हम $K = 1/\varepsilon$ चुनें, तो

$x > K \Rightarrow |1/x - 0| = |1/x| < 1/K = \varepsilon$ है।

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = 0$ है।

ii) $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर, यदि हम $K = 1/\sqrt{\varepsilon}$ चुनें, तो

$x > K \Rightarrow |1/x^2 - 0| = |1/x^2| < 1/K^2 = \varepsilon$ है।

अतः, $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x^2 = 0$ है।

E13) i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \ne L$ है।

ii) $\exists\, \varepsilon > 0$, s.t. $\forall\, \delta > 0 x$ s.t. $|x-p| < \delta$ है तथा $|f(x)-L| > \varepsilon$ है।

E14) प्रमेय 2 v) यहाँ $|f(x)-L| = |k-k| = 0 < \varepsilon$ है, δ का मान चाहें कुछ भी हो।

प्रमेय 2 vi) $|f(x)-L| = |x-p| < \varepsilon$, जब भी $|x-p| < \delta$ है, यदि हम $\delta = \varepsilon$ चुनें।

E15) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 3}{\lim\limits_{x\to 1} x} = \frac{3}{1} = 3$ है।

E16) $\lim\limits_{x\to 1} \left\{ 2x + 5\left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) \right\} = 2\lim\limits_{x\to 1} x + \frac{5\lim\limits_{x\to 1} x^2}{1+\lim\limits_{x\to 1} x^2}$

$$= 2 + \frac{5\times 1}{1+1} = 2 + 5/2 = 9/2 \text{ है।}$$

E17) $3^{x^2-x} = 3^2$

$x^2 - x = 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2, -1$ है।

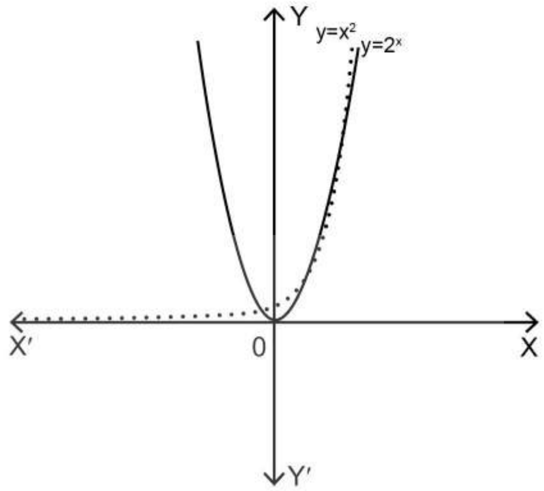
E18) हम अंश और हर को e^{2x} से भाग देते हैं।

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}}$

$$= \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}} = \frac{1}{1+0} = 1 \text{ है।}$$

हमने इस तथ्य का प्रयोग किया है कि $t = -2t \to -\infty$ जब $x \to \infty$ है और इसी कारण $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{t} = 0$ है।

E19)



चित्र 33

आंकृति 33 पर दर्शाती है कि किस प्रकार चरघातांकी फलन $y = 2^x$ की घात फलन $y = x^2$ से तुलना की जा सकती है। ये आलेख तीन बार प्रतिच्छेद करते हैं, परंतु अंत में चरघातांकी वक्र $y = 2^x$ में परवलय $y = x^2$ की तुलना में अधिक तीव्र गति से वृद्धि होती है।

E20)
$$\ln\frac{x^2}{1-x^2} = \ln x.\frac{2x}{1+x}$$
$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1+x}$$
$$x^2(1+x) = 2x^2(1-x^2)$$
$$x^2(1+x)(1-2+2x) = 0$$
$$x = 0, -1, \tfrac{1}{2} \text{ है।}$$

x का मान 0 और -1 नहीं हो सकता, क्योंकि इनके लिए ln परिभाषित नहीं है। इस प्रकार, दी हुई समीकरण का एक मात्र हल $x = \frac{1}{2}$ है।

E21) जब $x \to 0$ तब $\tan^2 x \to \tan^2 0 = 0$ है। अब,

$$\lim_{x\to0}\log_{10}(\tan^2 x) = \lim_{t\to0^+}\log_{10} t[t = \tan^2 x] = -\infty \text{ है।}$$

E22) i)
$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \tanh x$$

ii)
$$1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \text{ है।}$$
$$= \frac{1}{\cosh^2 x} = \sec h^2 x$$

E23)
$$\coth^2 x - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{e^{2x} + e^{-2x} - 2} - 1 = \frac{4}{e^{2x} + e^{-2x} - 2} = \text{cosech}^2 x \text{ है।}$$

इकाई 8

सांतत्य

संरचना **पृष्ठ संख्या**

8.1 प्रस्तावना

इस इकाई में, हम 'सांतत्य' का अध्ययन करने में सीमाओं की संकल्पना का उपयोग करेंगे। शब्दों 'संतत' (या सतत) का अर्थ है बिना टूटा हुआ', अर्थात् बिना किसी रिक्तता, विच्छिनता या छेद वाला। यदि हम वास्तविक मान फलनों के आलेखों में संतत का प्रयोग करें, तो हमारा अर्थ है कि आलेख बिना रिक्तता और विच्छिनता वाले हैं। भाग 8.2 में, हम सांतत्य (संततता) (continuity) के बारे में पढ़ेंगे तथा भाग 8.5 में संतत फलनों के कुछ मौलिक गुणों को विकसित करेंगे। भाग 8.3 में, हम असंततता (discontinuity) के प्रकारों की चर्चा करेंगे। भाग 8.5 में, हम संतत फलनों के लिए मध्यमान प्रमेय (intermediate value theorem) का कथन उसके अनुप्रयोगों के साथ देने के लिए सांतत्य का उपयोग करेंगे।

अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची दे रहे हैं। इस इकाई को पढ़ने के बाद, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने यह उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो जाएँगे :

- एक दिए हुए बिंदु पर किसी फलन के सांतत्य को परिभाषित करना;
- इसकी जाँच करना कि दिए हुए प्राँत में फलन संतत है या नहीं;

- असंततता के प्रकारों की पहचान करना;
- सांतत्य के विभिन्न गुणों का अनुप्रयोग करना;
- मध्य मान प्रमेय का कथन देना तथा उसका अनुप्रयोग करना।

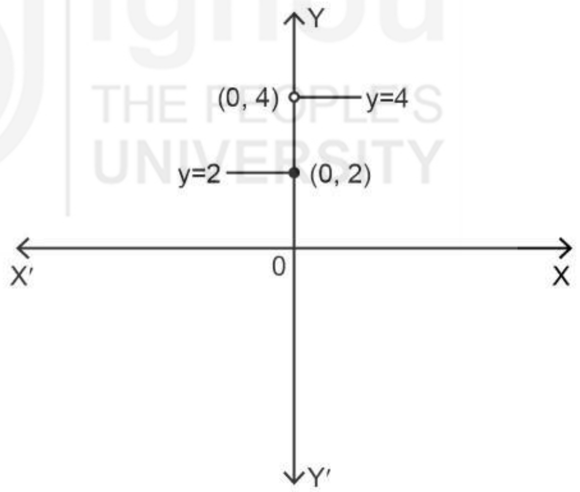
आइए सांतत्य से प्रारंभ करें।

8.2 सांतत्य

संतत फलन कलन में एक बहुत महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं। जैसे जैसे आप आगे बढ़ेंगे, आप यह देखने में समर्थ हो जाएँगे कि इस कोर्स में हम जिन अनेक प्रमेयों के कथन देंगे वे केवल संतत फलनों के लिए सत्य हैं। आप यह भी देखेंगे कि सांतत्य फलनों की अवकलनीयता के एक आवश्यक प्रतिबंध है।

हम इस भाग का प्रारंभ सांतत्य का एक आभास कराने के लिए दो अनौपचारिक उदाहरणों से करते हैं।

$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ यदि } x \le 0 \text{ है} \\ 4, \text{ यदि } x > 0 \text{ है} \end{cases}$ से परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए।



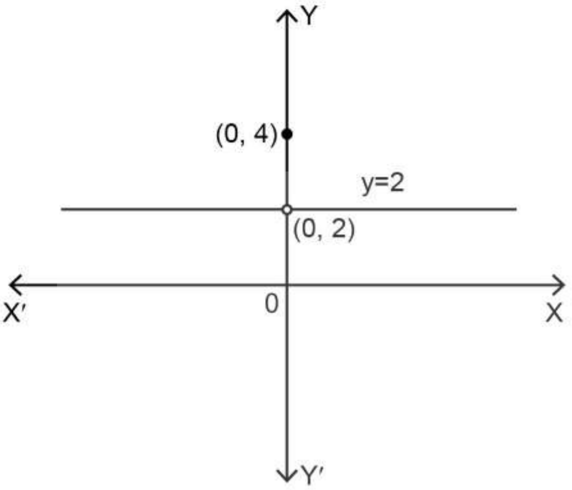
चित्र 1 : f का आलेख

आप देख सकते हैं कि यह फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या पर परिभाषित है। चित्र 1 इस फलन के आलेख को दर्शाती है। आलेख से, यह स्पष्ट है कि x-अक्ष पर स्थित आस-पास के बिंदु, $x = 0$ को छोड़ कर, एक दूसरे के निकट रहते हैं, 0 के बाईं ओर तथा निकट के बिंदुओं पर, अर्थात् $-0.1, -0.01, -0.001$ पर फलन का मान 2 है। 0 के दाईं ओर तथा निकट के बिंदुओं पर, अर्थात् बिंदुओं 0.1, 0.01, 0.001 पर, फलन का मान 4 है। बाईं और दाईं पक्ष सीमाओं की संकल्पना का प्रयोग करते हुए, हम कहते हैं कि 0 पर f की बाईं पक्ष सीमा 2 है तथा 0 पर f की दाईं पक्ष सीमा 4 है। यह स्पष्ट है कि बाईं और दाईं पक्ष सीमाएँ परस्पर संपाती नहीं हैं। हम यह भी देखते हैं कि $x = 0$ पर फलन का मान बाईं पक्ष सीमा के संपाती है।

आप देखेंगे कि जब हम इस आलेख को खींचने का प्रयास करेंगे, तो इसे एक ही बार में, अर्थात् कागज के तल से बिना पेन उठाए, नहीं खींच सकेंगे। वास्तव में, जब हम

दाईं ओर से 0 और बाईं ओर से 0 पर आते हैं, तो हमें पेन को उठाने की आवश्यकता पड़ती है। यह $x = 0$ पर फलन के संतत नहीं होने का एक उदाहरण है।

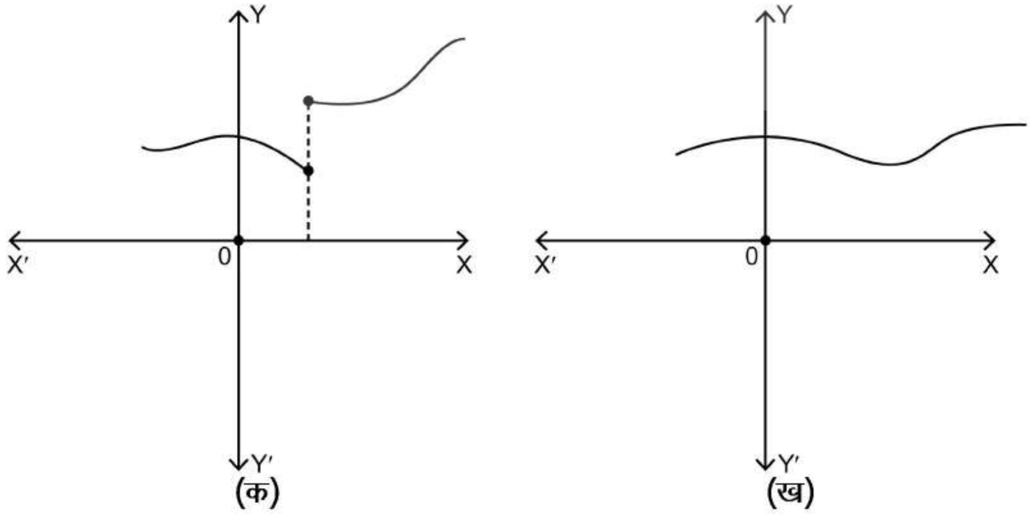
अब, $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ यदि } x \neq 0 \text{ है} \\ 4, \text{ यदि } x = 0 \text{ है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन पर विचार कीजिए।



चित्र 2 : f का आलेख

स्पष्टतः, यह फलन प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है। $x = 0$ पर इस फलन की बाईं पक्ष सीमा और दाईं पक्ष सीमा 2 के बराबर हैं। परंतु $x = 0$ पर फलन का मान 4 के बराबर है, जो बाईं और दाईं पक्ष सीमाओं के उभयनिष्ठ मान के बराबर नहीं है। हम पुनः देखते हैं कि हम इस फलन का आलेख बिना पेन उठाए नहीं खींच सकते हैं। यह $x = 0$ पर एक फलन में संतत नहीं होने का एक अन्य उदाहरण है। यहाँ, हम कह सकते हैं कि एक निश्चित बिंदु पर कोई फलन संतत होता है, यदि हम उस बिंदु के इर्दगिर्द फलन का आलेख एक ही बार में, अर्थात् कागज के तल से बिना पेन को उठाए हुए खींच सकें।

उपरोक्त उदाहरणों से, हम कह सकते हैं कि एक संतत प्रक्रिया वह होता है जो सरलता से बिना किसी रुकावट या विघ्न के जारी रहे। किसी फलन के सांतत्य (या संततता) का निर्वचन भी इसी विधि से किया जा सकता है। चित्र 3 को देखिए। चित्र 3 (क) में, फलन f के आलेख में बिंदु $x = a$ पर एक आकस्मिक कटाव है, जबकि चित्र 3 (ख) में फलन g का आलेख बिना विघ्न के सरलता से जारी रहता है। हम कहते हैं कि फलन g संतत है, जबकि f संतत नहीं है।



चित्र 3: (क) f का आलेख (ख) g का अलेख

इकाई 7 में, हम देख चुके हैं कि a की ओर x के प्रवृत्त होने पर किसी फलन की सीमा केवल उस संख्या a के निकट के मानों पर उस फलन के मानों को परिकलित करके ज्ञात की जा सकती है। यदि a पर किसी फलन का मान x के a की ओर प्रवृत्त होने पर उस फलन की सीमा के बराबर हो, तो वह फलन a पर संतत कहलाता है। इसे निम्नलिखित परिभाषा के रूप में लिखा जा सकता है।

परिभाषा : मान लीजिए कि वास्तविक संख्याओं के एक उपसमुच्चय पर f एक वास्तविक फलन है तथा मान लीजिए कि f के प्राँत में a कोई बिंदु है। तब, a पर f संतत होता है, यदि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ हो।

इस परिभाषा में, अस्पष्ट रूप से निम्नलिखित तीन निकष (criteria) सम्मिलित हैं :

i) f(x) द्वारा परिभाषित फलन f, $x = a$ पर परिभाषित हो।

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व हो।

iii) $x = a$ पर फलन की सीमा का मान a पर फलन के मान के बराबर हो, अर्थात् $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ हो।

इस प्रकार, सीमा की भाँति नहीं, सांतत्य के लिए यह आवश्यक है कि उस विशिष्ट बिंदु पर फलन परिभाषित हो। यदि a पर f संतत नहीं है, तो हम कहते हैं कि a पर f **असंतत** है (a पर f की असंतता है या a पर f संतत नहीं है।) तथा a फलन f की **असंतता का एक बिंदु** कहलाता है।

उदाहरण 1 : निर्दिष्ट बिंदुओं पर निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिए :

i) $f(x) = 2x + 3$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = 1$ पर।

ii) $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 3, & \text{यदि } x < -2 \\ x - 1, & \text{यदि } x \geq -2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x = -2$ पर।

iii) $h(x) = x^2 - 5$ द्वारा परिभाषित फलन $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = 3$ पर।

हल : i) आइए उन सभी प्रतिबंधों की जाँच करें जो सांतत्य की परिभाषा में दिए हैं।

(क) $f(x) = 2x + 3$ द्वारा परिभाषित फलन f, $x = 1$ परिभाषित है।

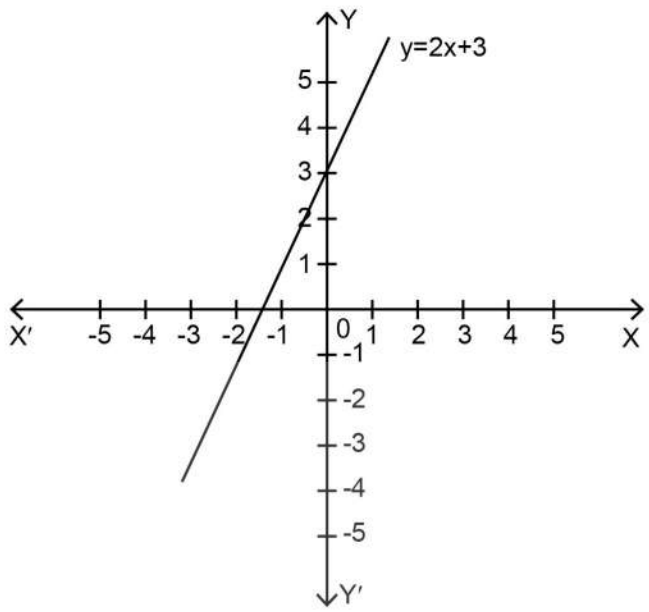
(ख) $x = 1$ पर, फलन की सीमा है :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$ है। अतः $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ का अस्तित्व है।

(ग) $x = 1$ पर फलन का मान 5 है। इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5 = f(1)$ है।

अतः, $x = 1$ पर फलन f संतत है। f का आलेख चित्र 4 में दर्शाया गया है।

चित्र 4 से यह स्पष्ट है कि फलन f, $x = 1$ पर संतत है।

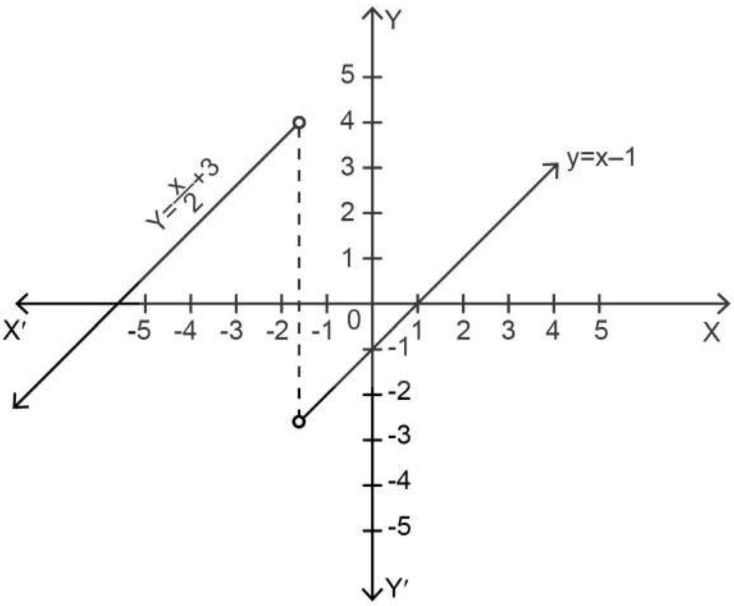


चित्र 4: f का आलेख

ii) सर्वप्रथम ध्यान दीजिए कि फलन g दिए हुए बिंदु $x = -2$ पर परिभाषित है तथा $g(-2) = -3$ है।

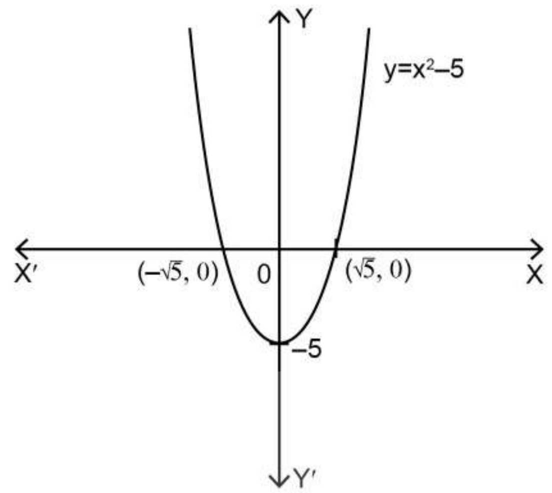
तब, $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -3$ है तथा $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = 2$ है।

क्योंकि $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^-} g(x)$ है, इसलिए $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ का कोई अस्तित्व नहीं है। इस प्रकार, $x = -2$ पर g संतत नहीं है। g के आलेख को चित्र में देखा जा सकता है। यह दर्शाता है कि $x = -2$ पर एक उद्दाल है, जो दर्शाती है कि $x = -2$ पर g संतत नहीं है या $x = -2$ पर g की एक असंततता है।



चित्र 5 : g का आलेख

iii) स्पष्टतः, $x = 3$ पर फलन h परिभाषित है तथा $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$ का अस्तित्व है। साथ ही, $\lim\limits_{x \to 3} h(x) = 4 = h(3)$ है। इसलिए $x = 3$ पर h संतत है। इस फलन का आलेख चित्र 6 में दर्शाया गया है।



चित्र 6: h का आलेख

* * *

उदाहरण 2 : जाँच कीजिए कि नीचे दिए फलन निर्दिष्ट बिंदुओं पर संतत हैं या नहीं।

i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x=3$ पर।

ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & , x\neq 3\\ 1 & , x=3\end{cases}$ द्वारा परिभाषित $\mathbb{R}$ पर फलत f, $x=3$ पर।

हल : i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन $x=3$ पर परिभाषित नहीं है।

इसलिए, $x=3$ पर f संतत नहीं है।

ii) स्पष्टतः, $x=3$ पर फलन f परिभाषित है तथा $f(3)=1$ है। अब,

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}(x+1)=4 \text{ है।}$$

क्योंकि $x=3$ पर $f(x)$ की सीमा $f(3)$ के साथ संपाती नहीं है, इसलिए $x=3$ पर फलन f संतत नहीं है।

* * *

टिप्पणी 1 : आप देख सकते हैं कि उदाहरण 2 के (i) और (ii) दोनों में फलन नहीं है, परंतु इनके कारण भिन्न–भिन्न हैं।

उदाहरण 3 : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य की $x=0$ पर चर्चा कीजिए।

हल : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ द्वारा दिए जाने फलन के सांतत्य की जाँच करने के लिए, हम 0 के निकट बाईं पक्ष सीमा और दाईं पक्ष सीमा ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। हम इन मानों को सारणी 1 के रूप में लिखते हैं।

सारणी 1

x	f(x)	x	f(x)
0.5	2	–0.5	–2
0.3	3.33	–0.3	–3.33
0.1	10	–0.1	–10
0.01	100	–0.01	–100
0.001	1000	–0.001	–1000
0.00001	100000	–0.00001	–100000

सारणी 1 से, हम देखते हैं कि जैसे-जैसे हम दाईं ओर से x के निकट आते जाते हैं, f(x) के मान तीव्रता से बढ़ते जाते हैं। अतः, 0 के निकट एक घनात्मक वास्तविक संख्या चुनने से f(x) को एक दी गयी वास्तविक संख्या से बड़ा बनाया जा सकता है।

हम इसे $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ लिख सकते हैं (इसे 0 पर f की दाईं पक्ष सीमा घन (प्लस) अतंत है पढ़ा जाता है)। आपको याद होगा कि $+\infty$ एक वास्तविक संख्या नहीं है। इस प्रकार, 0 पर f की दाईं पक्ष सीमा का अस्तित्व नहीं है।

इसी प्रकार, सारणी 1 से यह स्पष्ट है कि $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ है। हम कहते हैं कि 0 पर f की बाईं पक्ष सीमा का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $-\infty$ एक वास्तविक संख्या **नहीं** है। क्योंकि 0 पर f की सीमा का अस्तित्व नहीं है, इसलिए 0 पर f संतत नहीं है।

* * *

उदाहरण 4 : कोई दुकानदार एक वस्तु को किलोग्रामों (kg) में बेचता है तथा 10 kg तक (जिसमें 10 kg भी सम्मिलित है) की राशियों के लिए ₹ 15 प्रति kg की दर से मूल्य लेता है। 10 kg के ऊपर, वह दुकानदार ₹ 12 प्रति kg की दर से मूल्य लेता है तथा उस पर ₹ c का एक सरचार्ज लेता है। यदि kg की संख्या को x से निरूपित किया जाता है, तो मूल्य फलन (p) निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$p(x) = \begin{cases} 15x & ; \text{if } x \le 10 \\ 12x + c & ; \text{if } x > 10 \end{cases}$$

i) c ज्ञात कीजिए ताकि $x = 10$ पर p संतत हो।

ii) स्पष्ट कीजिए कि $x = 10$ पर सांतत्य होने की प्राथमिकता क्यों है?

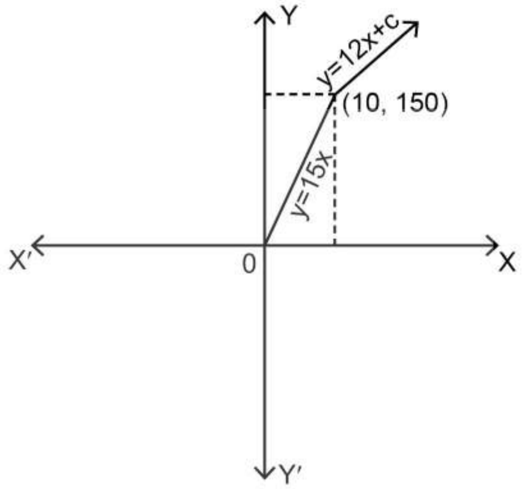
हल : i) यदि $x = 10$ पर p संतत है, तो इस पर उसकी सीमा का अस्तित्व होना चाहिए तथा इस सीमा को p (10) के बराबर भी होना चाहिए। अतः, हमें प्राप्त होना चाहिए:

$$\lim_{x\to 10^-} p(x) = \lim_{x\to 10^+} p(x) = p(10)$$

अब, $\lim\limits_{x \to 10^-} p(x) = \lim\limits_{h \to 0} p(10-h) = \lim\limits_{h \to 0} 15(10-h) = 150 = p(10)$

और $\lim\limits_{x \to 10^+} p(x) = \lim\limits_{h \to 0} p(10+h) = \lim\limits_{h \to 0} 12(10+h) + c = 120 + c = p(10) = 150$

इसे सरल करने पर, $c = 30$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, यदि $c = 30$ हो, तो $x = 10$ पर मूल्य फलन p संतत होगा। p का आलेख चित्र 7 में दिया है।



चित्र 7: p (x) का आलेख

ii) चित्र 8 का आलेख यह दर्शाता है कि एक बार 10 kg से भार ऊपर हो जाने पर ग्राहक को वस्तु प्रति kg की दर से सस्ती पड़ेगी। साथ ही, दुकानदार को भी मिलने वाले राजस्व में भी कोई कमी नहीं आएगी। यह एक न्यायसंगत समझौता है और इसीलिए सांतत्य को प्राथमिकता दी गई है।

* * *

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E1) $f(x) = |x|$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f के $x = 0$ पर सांतत्य की चर्चा कीजिए।

E2) किसी भी ऐसे फलन का एक उदाहरण दीजिए जो 5 पर संतत नहीं है।

E3) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन दी हुई संख्याओं पर संतत है या नहीं। साथ ही, आलेखीय रूप से इनका सत्यापन भी कीजिए।

i) $f(x) = \begin{cases} x \ ; x < 0 \\ x^2; x \geq 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x = 0$ पर।

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}; x \neq 2 \\ 1 \quad ; x = 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x = 2$ पर।

iii) $f(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{1 + x^3}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x = 1$ पर।

अब आप जानते हैं कि किसी बिंदु पर एक फलन के सांतत्य की किस प्रकार जाँच की

जाती है। अब, हम इस परिभाषा की एक स्वाभाविक विस्तार के रूप में किसी अंतराल में एक फलन के सांतत्य की चर्चा करेंगे।

परिभाषा : किसी अंतराल पर परिभाषित एक वास्तविक फलन f उस अंतराल में **संतत** कहा जाता है, यदि वह उस अंतराल के प्रत्येक बिंदु पर संतत हो।

इस परिभाषा को कुछ विस्तार से बताने की आवश्यकता है। मान लीजिए कि f किसी संवृत अंतराल [a, b] पर परिभाषित कोई फलन है। तब, इस फलन f के संतत होने के लिए, यह आवश्यक है कि [a, b] के प्रत्येक बिंदु जिनमें अंत बिंदु a और b भी सम्मिलित हैं, पर यह संतत हो। सभी अंत बिंदुओं पर सांतत्य का अर्थ है। एक पक्षीय सांतत्य जिसे निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

a पर f के सांतत्य का अर्थ है कि $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ है तथा f को a परं दाईं ओर से संतत कहा जाता है। इसी प्रकार, b पर f के सांतत्य का अर्थ है कि $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ है तथा f को b पर बाईं ओर संतत कहा जाता है। आप देख सकते हैं कि $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ और $\lim\limits_{x \to b^+} f(x)$ का यहाँ काई अर्थ नहीं है। इससे हम कह सकते हैं कि यदि कोई फलन f केवल एक ही बिंदु पर परिभाषित हो, तो वह वहाँ संतत होगा। अर्थात् यदि किसी फलन f का प्राँत एक एकल (singleton) है, तो f एक संतत फलन होता है।

आप देख सकते हैं कि फलन f अंतराल के केवल एक ही अंत बिंदु पर परिभाषित हो, अर्थात् अर्धविवृत या अर्धसंवृत पर, तो वह बाईं ओर से या दाईं ओर से संतत होता है, जो इस बात पर निर्भर करता है कि किस अंत बिंदु पर f परिभाषित है। आइए कुछ और उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 5 : क्या वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में $f(x) = x$ द्वारा परिभाषित तत्समक फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या पर संतत है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : मान लीजिए कि a कोई स्वेच्छिक वास्तविक संख्या है। स्पष्टतः, फलन f प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है तथा प्रत्येक वास्तविक संख्या a के लिए $f(a) = a$ है।

साथ ही, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a$ है।

अतः, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a = f(a)$ है तथा फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या पर संतत है। अतः f, $\mathbb{R}$ पर संतत है।

* * *

उदाहरण 6 : जाँच कीजिए कि $f(x) = c$ द्वारा परिभाषित अचर फलन संतत है।

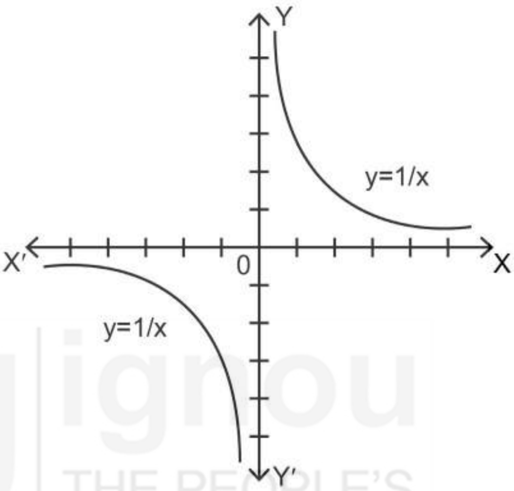
हल : स्पष्टतः, $f(x) = c$ द्वारा परिभाषित फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या पर परिभाषित है। मान लीजिए कि a कोई स्वेच्छिक वास्तविक संख्या है। तब, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} c = c$ है। क्योंकि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c = f(a)$ प्रत्येक वास्तविक संख्या a के लिए है, इसलिए फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या पर संतत है।

* * *

उदाहरण 7 : $f(x)=\frac{1}{x}, x \neq 0$ द्वारा परिभाषित $\mathbb{R}$ पर फलन f के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल : $f(x)=\frac{1}{x}, x \neq 0$ द्वारा परिभाषित दिया हुआ फलन f शून्य के अतिरिक्त प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। मान लीजिए कि a कोई शून्येतर वास्तविक संख्या है। तब, $\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$ है। क्योंकि $a \neq 0$ है, इसलिए $f(a)=\frac{1}{a}=\lim_{x \to a} f(x)$ है।

अतः, f प्रत्येक शून्येतर संख्या पर संतत है। इस प्रकार, f एक संतत फलन है। चित्र 8 इसे स्पष्ट करती है।



चित्र 8 : $\frac{1}{x}$ का आलेख

* * *

उदाहरण 8 : सभी $x \in \mathbb{R}$ तथा किसी भी $n \in \mathbb{Z}^+$ के लिए, $f(x)=x^n$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल : स्पष्टतः, $\mathbb{R}$ पर फलन f परिभाषित है तथा मान लीजिए कि 0 कोई वास्तविक संख्या है। तब, $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ है, किसी भी $a \in \mathbb{R}$ के लिए साथ ही, $f(a)=a^n$ है।

क्योंकि $\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a}(x^n)=a^n=f(a)$ है, इसलिए $\mathbb{R}$ में प्रत्येक संख्या पर f संतत है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि $\mathbb{R}$ पर f संतत है।

* * *

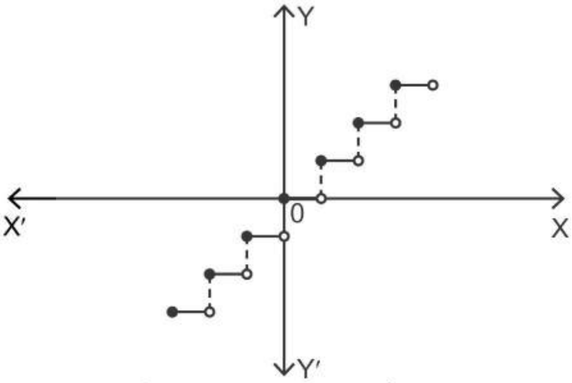
उदाहरण 9 : $f(x)=[x]$ द्वारा परिभाषित अधिकतम पूर्णांक फलन $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ जहाँ [x], x से छोटे या उसके बराबर के अधिकतम पूर्णांक को व्यक्त करता है, संतत नहीं है। इसका सत्यापन कीजिए।

हल : स्पष्टत : f सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। आइए दो स्थितियों को देखें :

i) जब a एक पूर्णांक है, तब $\lim_{x \to a^+} f(x)=\lim_{x \to a^+}[x]=a$ है तथा
$\lim_{x \to a^-} f(x)=\lim_{x \to a^-}[x]=a-1$ है।

क्योंकि बाईं पक्ष सीमा और दाईं पक्ष सीमा संपाती नहीं है, इसलिए f किसी भी पूर्णांक पर संतत नहीं है।

ii) जब a एक वास्तविक संख्या है, परंतु एक पूर्णांक नहीं है। स्पष्टतः, f परिभाषित है तथा $f(a) = [a]$ है। साथ ही, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} [x] = [a]$ है। क्योंकि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = [a] = f(a)$ है, अतः f उन सभी वास्तविक संख्याओं पर संतत है, जो पूर्णांक नहीं हैं। चित्र 9 यह प्रदर्शित करती है कि f प्रत्येक पूर्णांकीय बिंदु पर संतत नहीं है।



चित्र 9 : [x] का आलेख

* * *

उदाहरण 10 : $f(x) = |x|$ द्वारा $\mathbb{R}$ पर परिभाषित फलन f के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल : फलन f को पुनः $f(x) = x$ यदि $x \geq 0$ है तथा $f(x) = -x$ यदि $x < 0$ है के रूप में लिखा जा सकता है।

हम तीन स्थितियों पर विचार करते हैं :

i) जब $a > 0$ है। स्पष्टतः, f परिभाषित है तथा $f(a) = |a| = a$ है।

साथ ही, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a$ है।

क्योंकि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a = f(a)$ है, इसलिए प्रत्येक वास्तविक संख्या a के लिए, f संतत है।

ii) जब $a = 0$ है। स्पष्टतः, f परिभाषित है तथा $f(0) = 0$ है।

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} |0| = 0$ है,

क्योंकि $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ है, इसलिए $x = 0$ पर f संतत है।

iii) जब $a < 0$ है। स्पष्टतः, f प्रत्येक a के लिए परिभाषित है तथा $f(a) = -a$ है। अब,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(-x) = -a$ है।

क्योंकि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -a = f(-x) = f(a)$ है, इसलिए f प्रत्येक $x = a$ पर संतत है

अतः, (i), (ii) और (iii) से, यह स्पष्ट है कि $\mathbb{R}$ पर f संतत है।

* * *

उदाहरण 11 : अंतराल $[-1, 1]$ में $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य पर टिप्पणी कीजिए।

हल : मान लीजिए कि a कोई स्वेच्छिक वास्तविक संख्या है तथा $a \in]-1,1[$ है।

स्पष्टतः, $]-1,1[$ पर f परिभाषित है तथा $f(a) = 1-\sqrt{1-a^2}$ है। तब, हमें प्राप्त है :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(1-\sqrt{1-x^2})$$

$$= 1 - \lim_{x\to a}\sqrt{1-x^2}$$

$$= 1 - \sqrt{\lim_{x\to a}(1-x^2)} \quad \text{[प्रमेय 2 (viii), ईकाइ 7 के प्रयोग से]}$$

$$= 1-\sqrt{1-a^2}$$

क्योंकि $\lim_{x\to a} f(x) = 1-\sqrt{1-a^2} = f(a)$ है, इसलिए अंतराल $]-1,1[$ में प्रत्येक a पर f संतत है।

अब, आइए अंतराल के अंत बिंदुओं पर सांतत्य की जाँच करें। इसके लिए, हम –1 पर दाईं पक्ष सीमा तथा +1 पर बाईं पक्ष सीमा ज्ञात करते हैं, जो इस प्रकार हैं :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(1-\sqrt{1-x^2})$$

$$= \lim_{h\to 0}(1-\sqrt{1-(-1+h)^2})$$

$$= \lim_{h\to 0}(1-\sqrt{1-1}) = 1 = f(-1) \text{ है।}$$

अतः f अंतराल के एक अंत बिंदू, अर्थात् –1 पर दाया संतत है।

अब, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-\sqrt{1-x^2})$

$= \lim_{h\to 0}(1-\sqrt{1-(1-h)^2}) = 1 = f(1)$ है।

इसलिए, f अंतराल के दूसरे अतं बिंदू, अर्थात 1 पर बायाँ संतत है। उपरोक्त चर्चा से हम कह सकते हैं कि $]-1,1[$ पर f संतत है तथा दाईं और से –1 और बाईं ओर से 1 पर भी संतत है। अतः, f अंतराल $[-1,1]$ में संतत है।

* * *

उदाहरण 12 : $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{यदि } x<0 \\ -x+1, & \text{यदि } x>0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य की जांच कीजिए।

हल : स्पष्टतः फलन f शून्य के अतिरिक्त सभी वास्तविक संख्याओं पर परिभाषित है।

i) जब $a<0$ है, तो फलन परिभाषित है तथा $f(a) = a+1$ है।

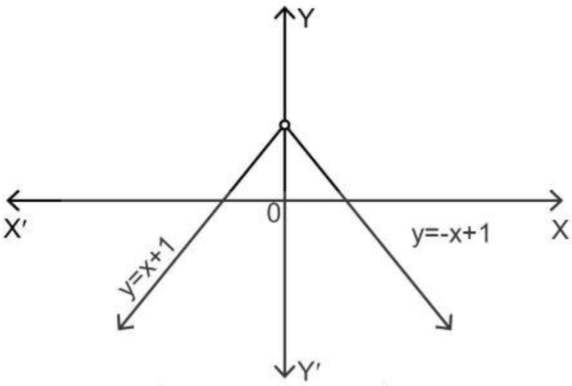
क्योंकि $\lim_{x\to a} f(x) = a+1 = f(a)$ है, इसलिए प्रत्येक ऋणात्मक वास्तविक संख्या के लिए f संतत है।

ii) जब $a>0$ है, तो फलन परिभाषित है तथा $f(a) = -a+1$ है। तब $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(-x+1) = -a+1$ है।

क्योंकि $\lim_{x\to a} f(x) = -a+1 = f(a)$ है, इसलिए प्रत्येक धनात्मक वास्तविक संख्या के लिए f संतत है।

i) और (ii) से, यह स्पष्ट है कि f के प्राँत में फलन f सभी बिंदूओं पर संतत है। अतः, f संतत है।

चित्र 10 इस फलन f का आलेख दर्शाती है। आप ध्यान दे सकते हैं कि हमें f का आलेख खींचते समय पेन को उठाने की आवश्यकता पड़ती है, परंतु फिर भी फलन संतत है। इसका कारण है कि हमें ऐसा केवल उन बिंदूओं के लिए करना पडता है, जो इस फलन f के प्राँत में नहीं हैं।



चित्र 10: f का आलेख

* * *

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए :

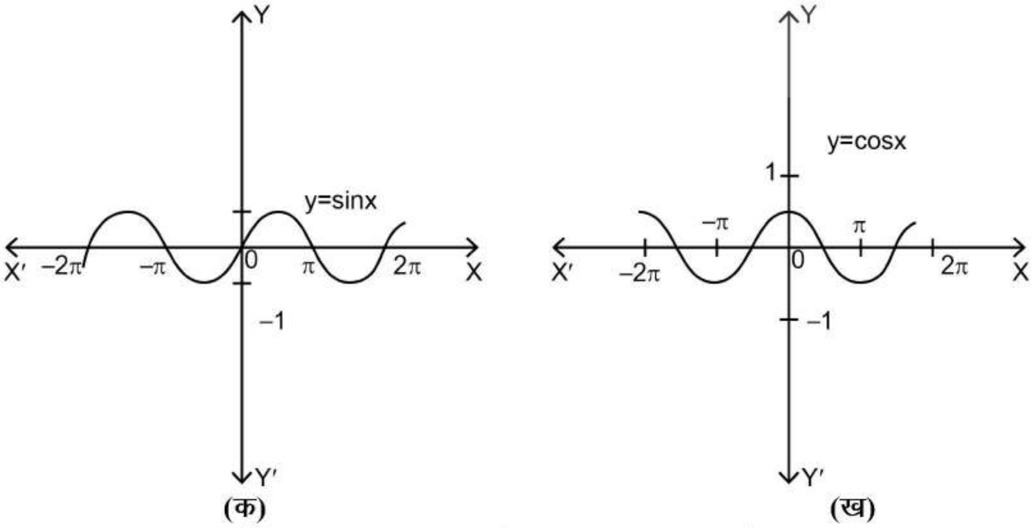
E4) सिद्ध कीजिए कि $p(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n$ द्वारा परिभाषित बहुपद फलन $p, \mathbb{R}$ पर संतत है, जहाँ $a_o, a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R}$ है।

E5) दर्शाइए कि $f(x) = 1/(x^2 - 9)$ द्वारा दिया जाने वाला फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x = 3$ और $x = -3$ के अतिरिक्त $\mathbb{R}$ के सभी बिंदुओं पर संतत है।

E6) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ if } x \geq 0 \\ x^2, \text{if } x < 0 \end{cases}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

अभी तक, हम परिमेय फलनों के सांतत्य को देख रहे थे। अब, आइए अन्य फलनों के सांतत्य की जाँच करें।

आप इकाई 6 में दिए $\sin x$ और $\cos x$ के आलेखों का स्मरण कर सकते हैं। ये संतत वक्र हैं, जैसा कि इन्हें पुनः क्रमशः चित्र 11 (क) और चित्र 11 (ख) में दिया गया है।

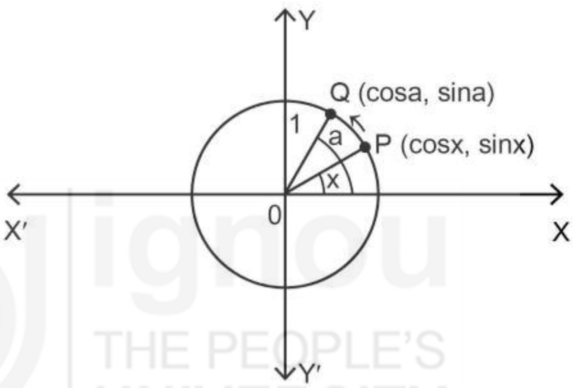


चित्र 11 : (क) sinx और (ख) cosx का आलेख

यह सिद्ध करने के लिए कि ये फलन प्रत्येक स्थान पर संतत हैं, हमें यह दर्शाना चाहिए कि प्रत्येक वास्तविक संख्या a के लिए, निम्नलिखित प्रतिबंध लागू हैः

$\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$ और $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$ है।

हम इन परिणामों को बिंदू $P(\cos x, \sin x)$ के व्यवहार पर विचार करते हुए कर रहे हैं, जब वह केन्द्र 0 वाले एक इकाई वृत्त के अनुदिश चलता है, जहाँ x वह कोण है, जो x-अक्ष के साथ OP बनाती है तथा इसे रेडियनों में मापा गया है। मान लीजिए कि $Q(\cos a, \sin a)$ इकाई वृत्त पर संगत बिंदू है, जहाँ a एक निश्चित कोण है, जिसे रेडियनों में मापा गया है। जैसे-जैसे कोण x कोण a की ओर प्रवृत्त होता है, अर्थात $x \to a$ है, वैसे–वैसे बिंदू P वृत्त के अनुदिश Q की ओर चलता है तथा इससे अर्थ निकलता है कि P के निर्देशांक Q के संगत निर्देशांकों की ओर अग्रसर होते हैं। हम इन्हें $\cos x \to \cos a$ और $\sin x \to \sin a$ के रुप में पुनः लिख सकते हैं, जैसा कि चित्र 12 में दर्शाया गया है।



चित्र 12: इकाई वृत्त पर P और Q

यहाँ, हम कह सकते हैं कि $\mathbb{R}$ में प्रत्येक a पर दोनों फलन साइन और कोसाइन परिभाषित हैं। साथ ही, $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a =$ साइन फलन का a पर मान तथा

$\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a =$ को साइन फलन का a पर मान है।

इस प्रकार, $\mathbb{R}$ में $\sin x$ और $\cos x$ संतत है।

उदाहरण 13 : i) $x = 0$ पर $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ तथा (ii) $x = 0$ पर $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

हल :

(i) जब $x \to 0^+$ है, तब $\frac{1}{x} \to +\infty$ है। हम देख सकते हैं कि जब $x \to 0^+$ है, तब एक कोण के साइन के रुप में $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ में अनिश्चित रुप से वृद्धि होती रहती है। जैसे–जैसे इस कोण में वृद्धि होती रहती है, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन बिना किसी सीमा की ओर अग्रसर हुए –1 और 1 के बीच में दोलन करता रहता है। इसी प्रकार, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ की सीमा का बाईं ओर से कोई अस्तित्व नही है, क्योंकि

जब $x \to 0^-$ है, तब $\frac{1}{x} \to -\infty$ है तथा पुनः फलन –1 और 1 के बीच में दोलन करता है।

इस प्रकार, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $x=0$ पर संतत नहीं है।

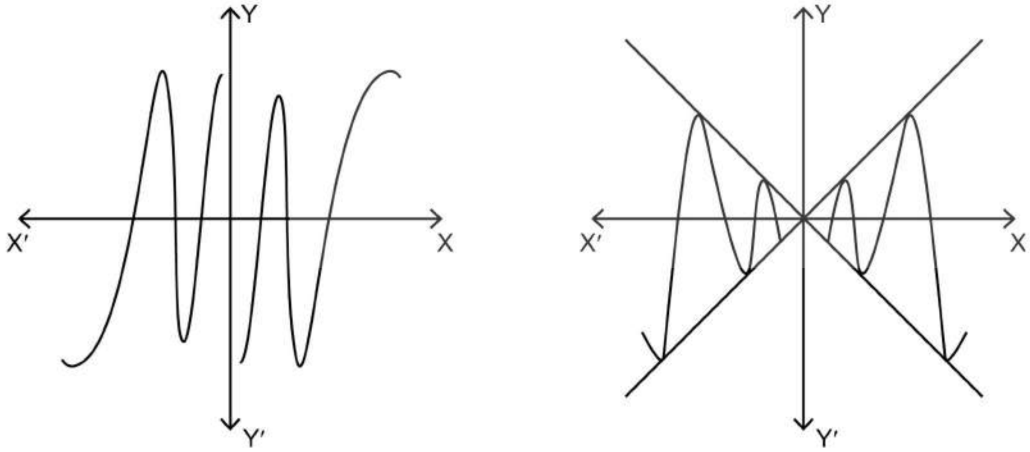
इन परिणामों को चित्र 13 (क) में दिए आलेख द्वारा सुदृढ़ता मिलती है। आप देख सकते हैं कि जैसे-जैसे 0 की ओर x अग्रसर होता है, वैसे-वैसे दोलन अधिक और अधिक तीव्र होते जाते हैं, क्योंकि 0 की ओर x के अग्रसर होने पर $\frac{1}{x}$ में वृद्धि (या कमी) अधिक तथा और अधिक तीव्र होती जाती है।

ii) जब $x > 0$ हैं, तब हम जानते हैं कि $-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$ है तथा $-x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$ है। इसी प्रकार, जब $x < 0$ है, तब $x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le -x$ है।

इस प्रकार, $x \ne 0$ के लिए, $|-x| \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|$ है

क्योकि $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ और $\lim\limits_{x\to 0} -|x| = 0$ है, इसलिए स्क्वीज प्रमेय से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ है।

चित्र 13 (ख) इसके समर्थन में आलेख दे रही है। यह स्पष्ट है कि $f(0)=0$ है, क्योंकि $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ बिन्दूओं –1 और 1 के बीच दोलन करता रहता है तथा $x=0$ पर $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ होगा। इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ है तथा दिया हुआ फलन $x=0$ पर संतत है।



(क) (ख)

चित्र 13 : (क) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (ख) $x \to x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ का आलेख

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E7) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0 & , \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य की $x = 0$ पर जाँच कीजिए।

E8) निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिए:

i) चरधातांकी फलन

ii) प्राकृतिक चरघातांकी फलन

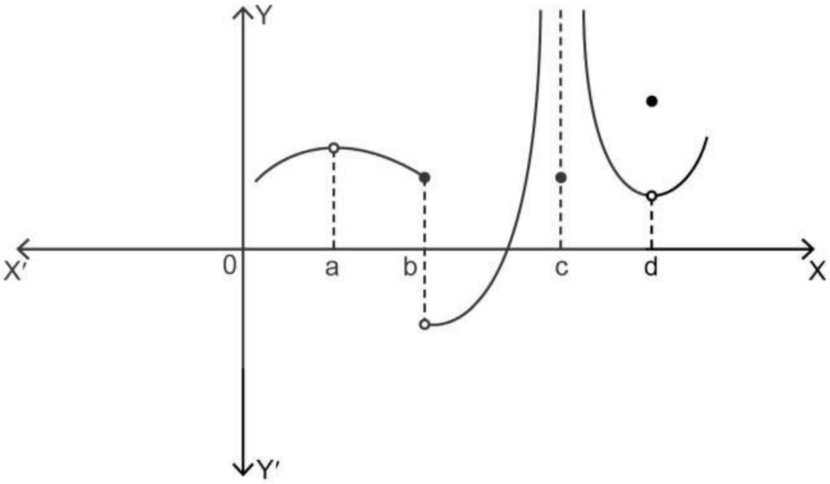
iii) लघुगणकीय फलन

iv) प्राकृतिक लघुगणकीय फलन

सांतत्य की परिभाषा पर वापस आने पर, जहाँ हमने किसी संख्या a पर एक फलन के सांतत्य होने के लिए तीन निकष या प्रतिबंध दिए थे, यदि इनमें से एक या अधिक प्रतिबंध का उल्लंधन होता है, तो फलन को असंतत (discontionuons) कहा जाता है। अगले भाग में, आप देखेंगे कि इन प्रतिबंधों में किसी भी एक के असफल होने पर विभिन्न प्रकार की असंततता प्रकट हो जाती है।

8.3 असंततता के प्रकार

आइए चित्र 14 में दिए फलन f के आलेख को देखें। इससे हमें किसी फलन के बारे में एक सहजज्ञानात्मक और ज्यामितीय अनुभव (आभास) होता है कि यह फलन कहाँ संतत है तथा कहाँ असंतत है।



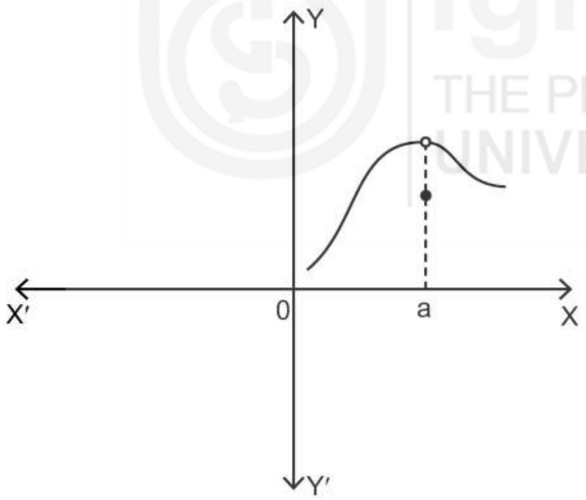
चित्र 14: f का आलेख

यहाँ, हम देखते हैं कि फलन f में चार संख्याओं a, b, c और d पर या तो एक छिद्र (छेद) के कारण या एक उछाल के कारण या दोलन के कारण विच्छिनताएँ (या भंग) हैं। परंतु ये सभी विच्छिनताएँ भिन्न–भिन्न प्रकार की हैं। ऐसा लगता है कि जैसे $x = a$ पर असंततता है। इसका कारण है कि फलन f(a) परिभाषित नहीं है और इस प्रकार सांतत्य का पहला प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता है। इस आलेख में $x = b$ पर भी विच्छिनता है, परंतु यहाँ असंततता का कारण भिन्न है। यहाँ, $\lim_{x \to b} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है (क्योंकि

बाईं और दाईं सीमाएँ भिन्न-भिन्न हैं)। अतः, b पर f असंतत है, क्योंकि सांतत्य का दूसरा प्रतिबंघ संतुष्ट नहीं हों रहा है।

आइए अब $x = c$ पर असंततता को देखें। पुनः $\lim_{x\to c} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि बाईं और दाईं सीमाएँ भिन्न–भिन्न हैं। $x = d$ पर, फलन d पर परिभाषित है तथा $\lim_{x\to d} f(x) \neq f(d)$ है, जिससे सांतत्य का तीसरा प्रतिबंघ संतुष्ट नहीं होता है। इसी कारण $x = d$ पर फलन f अंसतत है। आप देख रहे हैं कि विभिन्न बिंदुओं a, b, c और d पर फलन f असंतत है परंतु असंततता के कारण भिन्न–भिन्न हैं। इससे हम निम्नलिखित प्रकार की असंततताओं पर पहुँचते हैं:

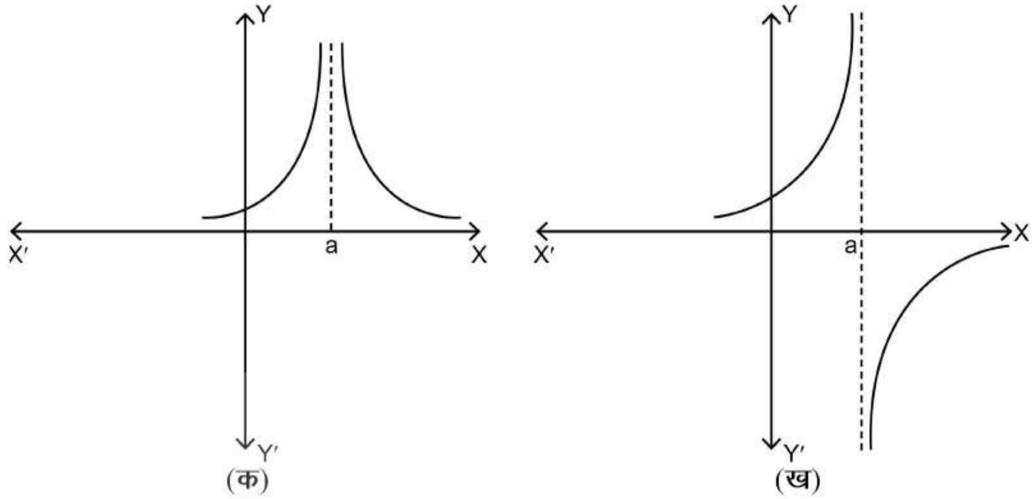
1. हटाने योग्य (बिंदू) असंततता: यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व है परंतु या तो a पर $f(a)$ परिभाषित नहीं होने के कारण या $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ होने के कारण f संतत नही है, तो इसे **हटाने योग्य असंततता** (removable discontinuity) या **बिंदू असंततता** कहते हैं। इसके लिए हटाने योग्य असंततता शब्दावली उचित ही है, क्योंकि $x = a$ पर किसी फलन की हटाने योग्य असंततता को, फलन के पुनः परिभाषित करके या असंततता के बिंदू पर यदि फलन परिभाषित नहीं है, तो उसे परिभाषित करके, अर्थात् $x = a$ पर $f(x)$ को $\lim_{x\to a} f(x)$ लेकर, हटाया जा सकता है। चित्र 15 हटाने योग्य असंततता को दर्शाती है।



चित्र 15: हटाने योग्य असंततता

2. उद्दाल असंततता: उद्दाल असंततता (Jump Discontinuity) में, किसी फलन की बाईं पक्ष सीमा और दाईं पक्ष सीमा, अर्थात् $\lim_{x\to a^-} f(x)$ और $\lim_{x\to a^+} f(x)$ बराबर नहीं, होते हैं। इस बात पर निर्भर करते हुए कि a कौन सी दिशा से आ रहा है, फलन भिन्न–भिन्न मानों की ओर अग्रसर होता है। उदाहरणार्थ, अधिकतम पूर्णांक फलन में, प्रत्येक पूर्णांक पर इस फलन में उद्दाल असंततता है। इसका कारण यह है कि प्रत्येक पूर्णांक पर बाईं पक्ष सीमा सदैव दाईं पक्ष सीमा से 1 कम होती है।

3. अनंत असंततता: इस प्रकार की अंसतता में, $x = a$ पर फलन या तो बाईं ओर से या बाईं और दाईं दोनों ओर से अनंत रुप (या अपरिमित रुप) से बड़ा हो जाता है। चित्र 16 (क) और (ख) **अनंत असंततता** (infinite discontinuity) दर्शाती हैं।



चित्र 16: अनंत असंततता

अब आइए इन्हें नीचे दिए हुए उदाहरणों के द्वारा समझें।

उदाहरण 14 : $f(x)=\begin{cases} x^3+2, & \text{यदि } x<2 \\ 5, & \text{यदि } x=2 \\ x^2+6, & \text{यदि } x>2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ पर विचार करें। $\mathbb{R}$ पर इसके सांतत्य की जाँच कीजिए तथा यदि कोई है तो असंततता के प्रकार पर टिप्पणी कीजिए।

हल : जब $x<2$ है, तब फलन f एक बहुपद फलन है। इसलिए f संतत है। जब $x>2$ है, तब f एक बहुपद फलन है तथा इसीलिए संतत है। अब आइए इसके सांतत्य की $x=2$ पर जाँच करें। स्पष्टतः $x=2$ पर फलन f परिभाषित है तथा $f(2)=5$ है। तब,

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^3+2)=10$ है।

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+6)=10$ है।

इसलिए, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=10$ है।

क्योंकि $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=10\neq f(2)$ है, इसलिए $x=2$ पर फलन f संतत नहीं है तथा असंततता हटाने योग्य असंततता है।

इसे हटाने योग्य असंततता को, दिए हुए फलन f को

$f(x)=\begin{cases} x^3+2, & \text{यदि } x<2 \\ 10, & \text{यदि } x=2 \\ x^2+6, & \text{यदि } x>2 \end{cases}$ के रुप में पुनः परिभाषित करके, हटाया जा सकता है।

* * *

उदाहरण 15 : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए $x=1$ पर असंततता के प्रकार की जाँच कीजिए।

हल : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ द्वारा दिया जाने वाला फलन f, 1 के अतिरिक्त प्रत्येक वास्तविक संख्या पर संतत है। यह इस कारण है कि फलन f एक परिमेय फलन है तथा इसका हर $x=1$ के अतिरिक्त शुन्येतर है। अब, $x=1$ पर, हमें प्राप्त है:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

इस प्रकार, $x = 1$ पर फलन f असंतत है तथा इसमें $x = 1$ पर अंनत असंततता है।

* * *

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कर सकते हैं।

E9) K का वह मान ज्ञात कीजिए, जिससे $x = 1$ पर $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{यदि } x < 1 \\ kx - 4, & \text{यदि } x \geq 1 \end{cases}$ द्वारा फलन f संतत हो जाए।

E10) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 0 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य की जाँच कीजिए। साथ ही, असंततता के प्रकार पर टिप्पणी भी कीजिए।

E11) $x = 0$ पर निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिएः

i) $f(f(x))$ द्वारा परिभाषित फलन f, जहाँ $f(x) = \frac{1}{x}$ है।

ii) $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन g।

iii) $h(x) = \frac{x}{|x|}$ द्वारा परिभाषित फलन h।

साथ ही, यदि संतत नहीं हैं, तो असंततता के प्रकार की पहचान भी कीजिए।

E12) फलन $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ के सांतत्य की जाँच कीजिए तथा यदि कोई है तो असंततता के प्रकार पर टिप्पणी कीजिए।

अब हम जानते हैं कि किस प्रकार यह जाँच की जाए कि एक फलन संतत है या नहीं तथा यदि फलन संतत नहीं है, तो हम असंततता के प्रकार की पहचान कर सकते हैं। आइए अब और आगे बढ़ें तथा अगले भाग में फलनों के कुछ संयोजनों के सांतत्य क बारे में बात करें।

8.4 संतत फलनों का बीजगणित

इकाई 7 में, हमने सीमाओं की बीजगणित के बारे में कुछ अध्ययन किया था। अब हम संतत फलनों के बीजगणित के बारे में कुछ अध्ययन करेंगे। मान लिजिए कि f और g एक उभयनिष्ठ प्राँत $D \subseteq \mathbb{R}$ पर परिभाषित फलन है तथा संतत है तथा मान लीजिए कि k एक वास्तविक संख्या है। इकाई 2 में, हमने फलनों $f + g, fg, f/g$ (जबकि D में प्रत्येक स्थान पर $g(x) \neq 0$ है), kf और $|f|$ को परिभाषित किया था। निम्नलिखित प्रमेय इन फलनों के सांतत्य के बारे में कुछ बताती है।

प्रमेय 1 : मान लीजिए कि f और g एक उभयनिष्ठ प्राँत पर परिभाषित फलन हैं तथा संतत हैं तथा मान लीजिए कि k कोई भी वास्तविक संख्या है। सभी फलन $f+g, kf, |f|$ और fg प्राँत D पर संतत हैं। यदि D में प्रत्येक स्थान पर $g(x)\neq 0$ हो, तो D पर f/g भी संतत होगा।

हम इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे।

प्रमेय 2 में, हम दो संतत फलनों के संयोजन के सांतत्य के बारे में बात करेंगे। यहाँ भी हम प्रमेय का कथन बिना उपपत्ति के देंगे।

प्रमेय 2 : मान लीजिए कि $f: D_1 \to D_2$ और $g: D_2 \to D_3$ अपने प्राँतों में संतत फलन हैं। तब, $D_1, (D_1, D_2, D_3 \subseteq \mathbb{R})$ पर gof संतत होता है।

उदाहरण 16 : सिद्ध कीजिए कि $f(x)=(x^2+1)^3$ से परिभाषित फलन $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x=0$ पर संतत है।

हल : हम $g(x)=x^3$ द्वारा परिभाषित फलन $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ तथा $h(x)=x^2+1$ द्वारा परिभाषित फलन $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ पर विचार करते हैं।

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $f(x)=goh(x)$ है।

फलन g और h संतत है, क्योंकि वे बहुपद फलन हैं। आगे, प्रमेय 2 द्वारा, $goh=f, \mathbb{R}$ पर संतत है।

* * *

आइए अब देखें कि क्या इस प्रमेय का विलोम भी सत्य हैं। उदाहरणार्थ, यदि f और g किसी अंतराल [a, b] पर परिभाषित हैं तथा [a, b] पर $f+g$ संतत है, तो क्या इसका अर्थ यह है कि f और g भी [a, b] पर संतत होंगे? **नहीं**। अंतराल [0 , 1] पर,

$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1/2\\ 1, & 1/2<x\le 1\end{cases}$ और $g(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1/2\\ 0, & 1/2<x\le 1\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलनों f और g पर विचार कीजिए। $x=1/2$ पर न तो f और न ही g संतत है (क्यों ?) परंतु $(f+g)(x)=1 \forall x\in[0,1]$ है। अतः, [0, 1] पर $f+g$ संतत है।

अब, यदि $|f|$ किसी बिंदु a पर संतत है, तो क्या a पर f को संतत होना चाहिए ?

पुनः, इसका उत्तर नहीं है। उदाहरण के लिए,

$f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0 \text{ के लिए}\\ 1, & x>0 \text{ के लिए}\end{cases}$ द्वारा दिए फलन $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ को लीजिए।

तब, $\mathbb{R}$ में $|f(x)|=1$ है तथा इसीलिए $|f|$ संतत है।

परंतु $x=0$ पर f संतत नहीं है। (क्यों?)

उदाहरण 17 : सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमेय फलन संतत होता है।

हल : $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}, q(x)\neq 0$ द्वारा परिमेय फलन f दिया जाता है, जहाँ p और v

बहुपद फलन हैं। f का प्राँत वास्तविक संख्याएँ, केवल उस बिंदु को छोड़ कर जहाँ v शून्य है। क्योंकि बहुपद फलन संतत होते हैं, इसलिए प्रमेय 1 से f भी संतत है।

* * *

उदाहरण 18 : वह अंतराल ज्ञात कीजिए, जिसमें $f(x)=\frac{\cos x + x}{x^2-1}$ द्वारा परिभाषित फलन संतत है।

हल : हम जानते हैं कि x और $\cos x$ सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए संतत हैं। दिए हुए फलन का हर $f(x)=x^2-1$ द्वारा परिभाषित एक फलन f है, जो एक बहुपद है। इसलिए, यह प्रत्येक स्थान पर संतत है।

अब, प्रमेय 1 के प्रयोग से $f/g, g(x)\neq 0$ में फलन f उन स्थानों को छोड़ कर जहाँ हर 0 है, अर्थात् $x^2-1=0$ है, संतत है। अतः, $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ में f संतत है।

* * *

उदाहरण 19 : सिद्ध कीजिए कि $f(x)=\tan x$ द्वारा परिभाषित फलन f एक संतत फलन है।

हल : फलन $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ है। यह सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है, ताकि $\cos x \neq 0$ अर्थात $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ है। हम पहले सिद्ध कर चुके हैं कि साइन और कोसाइन फलन दोनों ही संतत हैं। इसलिए, दो संतत फलनों का भागफल होने के कारण $\tan x$ भी, जहाँ भी वह परिभाषित है, संतत है।

* * *

उदाहरण 20 : $f(x)=\sin(x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य की जाँच कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि यह फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है।

इस फलन f को दो फलनों g और h का एक संयोजन goh समझा जा सकता है, जहाँ $g(x)=\sin x$ और $h(x)=x^2$ है। क्योंकि g और h दोनों संतत फलन हैं, इसलिए प्रमेय 2 से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि f एक संतत फलन है।

* * *

निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E13) सांतत्य के बीजगणित का उपयोग करते हुए, साइन फलन के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

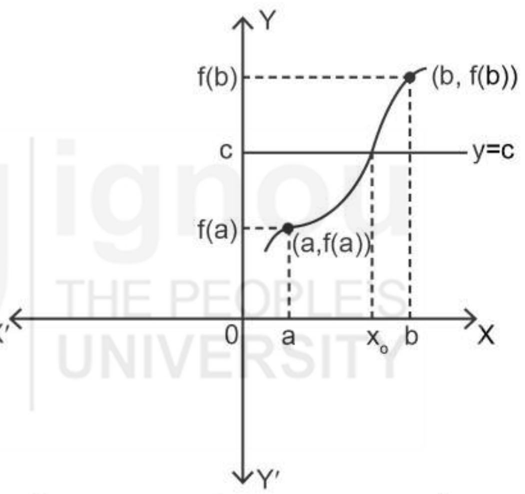
E14) $f(x)=\cos(x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य पर टिप्पणी कीजिए।

E15) $f(x)=|1-x+|x||$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ x कोई वास्तविक संख्या है।

अब, हम फलनों से संबंधित एक महत्वपूर्ण प्रमेय का कथन देंगे। एक बार फिर, हम यहाँ इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे। परंतु इसके कथन को समझने का प्रयास करेंगे, क्योंकि हम इसका उपयोग आगे आने वाली इकाइयों में करेंगे।

8.5 संतत फलनों के लिए मध्य मान प्रमेय

$f(x)$ द्वारा परिभाषित एक फलन पर विचार कीजिए, जो संवृत अंतराल $[a,b]$ पर संतत है, जैसा कि चित्र 17 में दिया है। हम कोई भी क्षैतिज रेखा, मान लीजिए $y=c$, इस प्रकार खीचते हैं कि f(a) और f(b) रेखा $y=c$ दोनों विपरीत ओर पर रहते हैं। तब यह रेखा $f(x)$ के आलेख को $[a,b]$ में न्यूनतम एक बार अवश्य ही प्रतिच्छेद करेगी। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि यदि $[a,b]$ पर f संतत है, तो इस फलन f को f(a) और f(b) के बीच में प्रत्येक मान c को कम से कम एक बार अवश्य लेना चाहिए, जब a से b तक x मानों को लेता है।



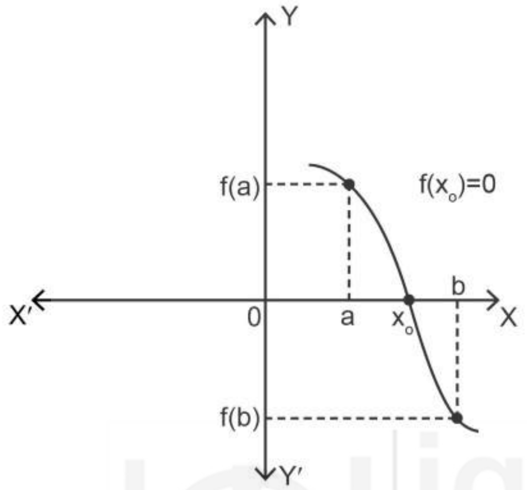
चित्र 17: एक संतत फलन का आलेख

उदाहरण के लिए, $f(x)=2x^2+x-6$ द्वारा परिभाषित बहुपद फलन f पर विचार कीजिए। इसका $x=1$ पर मान -3 है तथा $x=2$ पर मान 4 है। इस समीकरण $2x^2+x-6=k$ से यह निष्कर्ष निकलता है कि k के प्रत्येक मान के लिए, इसका अंतराल $[1,2]$ में न्यूनतम एक हल अवश्य ही है। इस विचार से हम निम्नलिखित प्रमेय पर पहुँचते हैं:

प्रमेय 3 (मध्यमान प्रमेय) : यदि एक संवृत अंतराल $[a,b]$ में f एक संतत फलन है तथा c एक वास्तविक संख्या है जो f(a) और f(b) के बीच स्थित है, और दोनों सम्मिलित हैं,(अर्थात् $f(a)\le c\le f(b)$ या $f(b)\le c\le f(a)$)) तो अंतराल $[a,b]$ में कम से कम एक संख्या x_o का अस्तित्व होता है, ताकि $f(x_o)=c$ हो।

इस प्रमेय का ज्यामितीय रुप से निवर्चन से किया जा सकता, जैसा कि चित्र 17 में दर्शाया गया है। हम जानते हैं कि एक संतत फलन का आलेख सरल या निर्विघ्न होता है। इसमें कोई भंग या उद्दाल नही होते। यह प्रमेय कहती है कि यदि $(a,f(a))$ और $(b,f(b))$ एक रेखा $y=c$ के विपरीत ओर स्थित हैं, तो आलेख, रेखा $y=c$ को अवश्य ही काटेगा।

आप यहाँ यह ध्यान दें कि यह प्रमेय केवल संख्या x_0 के अस्तित्व की गारंटी देती है। यह हमें यह नही बताती कि इस बिंदु को कैसे ज्ञात किया जाए। एक अत्य बात यह है कि इस x_0 का अद्वितीय होना आवश्यक नहीं है। इस प्रमेय का यह दर्शाने में प्रयोग किया जा सकता है कि दिए हुए अंतराल में इस दी हुई समीकरण का एक मूल है। इसके लिए, हम फलन के मानों के चिह्नों में परिवर्तन की जाँच करते हैं तथा कहते हैं कि फलन का मान शून्य भी होना चाहिए। चित्र 18 यह स्पष्ट करती है कि क्योंकि $f(a)$ और $f(b)$ विपरीत चिह्नों के हैं, इसलिए $f(a)$ और $f(b)$ के बीच में 0 है। इस प्रकार, मध्य मान प्रमेय से $[a,b]$ में न्यूनतम एक संख्या x_0 ऐसी है कि $f(x_0)=0$ है।



चित्र 18: $x_0 \in [a,b]$ दर्शा रहा है

आइए निम्नलिखित उदाहरणों में इस प्रमेय का अनुप्रयोग करें।

उदाहरण 21 : समीकरण $x^5-2x^4-x-3=0$ के 2 और 3 के बीच मूलों पर टिप्पणी कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=x^5-2x^4-x-3$ है। तब, $f(2)=-5$ और $f(3)=75$ है, जो यह दर्शाता है कि एक मूल x_0 अंतराल $[2,3]$ में स्थित है। इस मूल का सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए, हम अंतराल $[2,3]$ को पाँच बराबर भागों में विभाजित करते हैं तथा प्रत्येक उपविभाजन वाले बिंदु पर f का मान निकालते हैं। ये मान सारणी 2 में दिए हैं।

सारणी 2

x	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
f(x)	–5	–0.51	7.6	21.81	43.37	76

सारणी 2 में, $f(2.2)$ और $f(2.4)$ के विपरीत चिह्न हैं। इसलिए, मध्यमान प्रमेय से हमें ज्ञात होता है कि मूल अंतराल $[2.2, 2.4]$ में स्थित होगा। इस अंतराल की लंबाई अभी भी बड़ी है। इसलिए, हम अंतराल $[2.2, 2.4]$ को विभाजित करने की प्रक्रिया जारी रखते हुए, इसे 10 उपविभाजनों में विभाजित करके दी हुई समीकरण का एक सन्निकट मूल ज्ञात कर सकते हैं।

* * *

उदाहरण 22 : यदि $f(x) = x^3 - x^2 + x$ है, तो दर्शाइए कि एक $x_0 \in \mathbb{R}$ है ताकि $f(x_0) = 10$ है।

हल : हम एक ऐसा बिंदु x_0 ज्ञात करना चाहते हैं ताकि x_0 पर फलन का मान 10 हो। मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करने के लिए, हम $f(x)$ के ऐसे दो मान ज्ञात कर सकते हैं कि एक मान 10 से छोटा हो तथा दूसरा मान 10 से बड़ा हो। आइए 0 से प्रारंभ करें और अन्य पूर्णांकों के लिए इसे जारी रखें। $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 6, f(3) = 21$ है। अतः, स्पष्ट है कि $f(2) < 10 < f(3)$ है। क्योंकि फलन f एक बहुपद है, इसलिए यह प्रत्येक स्थान पर संतत है। अतः, $x_0 \in \mathbb{R}$ ऐसा अवश्य होना चाहिए कि $f(x_0) = 10$ हो।

आप, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E16) दर्शाइए कि एक घनात्मक संख्या C ऐसी है कि $c^2 = 2$ है।

E17) वह अंतराल ज्ञात कीजिए, जिसमें समीकरण $x^2 = \sqrt{x+1}$ का न्यूनतम घनात्मक मूल स्थित है।

E18) मान लीजिए कि $[0,1]$ पर f एक संतत फलन है। दर्शाइए कि यदि सभी $x \in [0,1]$ के लिए $-1 \le f(x) \le 1$ है, तो एक $c \in [0,1]$ है ताकि $[f(c)]^2 = c$ है।

E19) यह दर्शाने के लिए कि निर्दिष्ट अंतराल में दीए हुएं समीकरण का एक मूल है, मंध्यमान प्रमेय का उपयोग कीजिए :

i) $\cos x = x, \ [0,1]$

ii) $x^4 + x - 3 = 0, [1,2]$

iii) $x = (1-x)^3, \ [0,1]$

यहाँ हम इस इकाई का सारांश देते हुए, इसे समाप्त करते हैं।

8.6 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. एक फलन f एक बिंदु $x = a$ पर संतत होता है, यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ हो।
2. प्रांत D पर परिभाषित फलन f उस पर संतत कहा जाता है, यदि वह D के प्रत्येक बिंदु पर संतत हो।
3. तीन प्रकार की निम्नलिखित असंततताएँ

   i) हटाने योग असंततता

   ii) उद्दाल असंततता

   iii) अनंत असंततता
4. यदि D पर f और g संतत हों, तो D में फलन $f + g, fg, |f|, kf$ (जहाँ $k \in \mathbb{R}$ है) और f/g (जहाँ $g(x) \neq 0$ भी संतत होते हैं।

5. **मध्यमान प्रमेय** : यदि $[a, b]$ पर f संतत है तथा $f(a) < c < f(b)$ (या $f(a) > c > f(b)$) है, तो $\exists x_0 \in]a, b[$ ताकि $f(x_0) = c$ हो।

8.7 हल / उत्तर

E1) परिभाषा से, $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ यदि } x < 0 \\ x, \text{ यदि } x \geq 0 \end{cases}$ स्पष्ट है कि यह फलन 0 पर परिभाषित है तथा $f(0) = 0$ है। 0 पर f की बाईं पक्ष सीमा $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$ है। 0 पर दाईं पक्ष सीमा $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$ है।

इस प्रकार, $x = 0$ पर बाई पक्ष सीमा, दाई पक्ष सीमा तथा फलन का मान संपाती हैं। अतः, $x = 0$ पर f संतत है।

E2) उदाहरण के लिए, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 5}$ है।

यहाँ, $x = 5$ पर $f(x)$ असंतत है, क्योंकि यह $x = 5$ पर परिभाषित नहीं है।

E3) i) f के संतत होने के लिए, आइए सांतत्य के प्रत्येक प्रतिबंध की जाँच करें

(क) $x = 0$ पर $f(x)$ परिभाषित है।

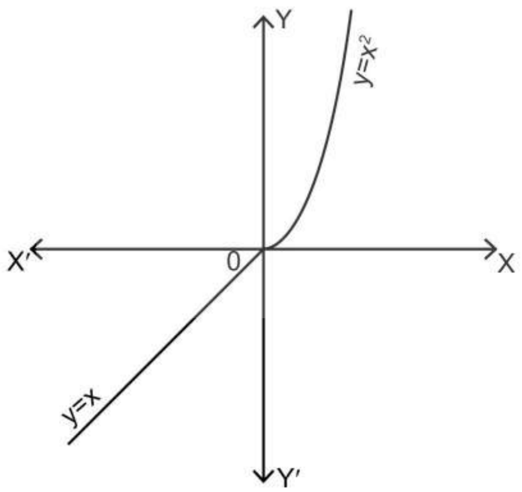
(ख) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 - h) = \lim_{h \to 0} (0 - h) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 + h) = \lim_{h \to 0} (0 + h)^2 = 0$

हम देखते है कि $\lim_{x \to 0} f(x)$ का अस्तित्व है, जब $x \to 0$ है।

(ग) साथ ही, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ है।

अतः, $x = 0$ पर f संतत है। आप इसके आलेख का चित्रयिकरण चित्र 19 में देख सकते हैं।

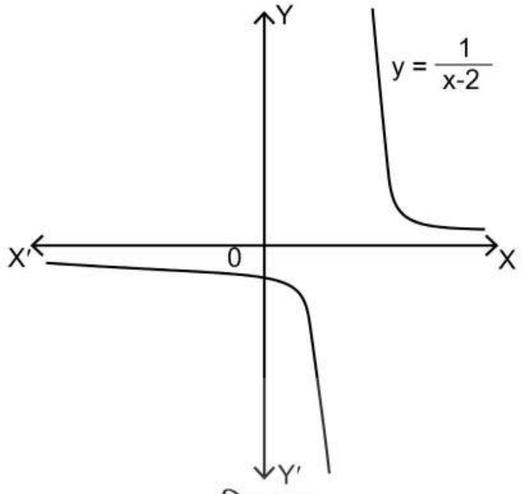


चित्र 19

ii) (क) $x = 2$ पर $f(x)$ परिभाषित है।

(ख) $\lim_{x \to 2} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

अतः, $x = 2$ पर f संतत नहीं है। चित्र 20 संगत आलेख को दर्शाती है। यह स्पष्ट है कि $\lim_{x \to 2} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।



चित्र 20

iii), iv) आप इन्हें स्वयं करना चाहेंगे।

E4) मान लीजिए कि फलन f, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए $a \in \mathbb{R}$ है। स्पष्टः, f प्रत्येक वास्तविक संख्या a के लिए परिभाषित है तथा $f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_3a^3 ... + a_na^n$ है।

तब $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}[a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n]$

$= a_0 + a_1a + ... + a_na^n$

$= f(a)$, है।

इस प्रकार, बहुपद फलन संतत है।

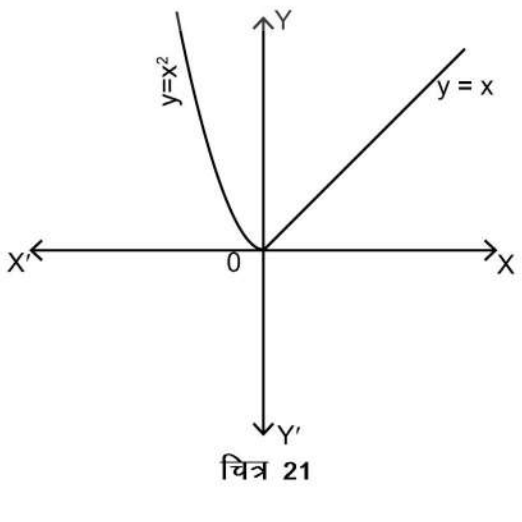
E5) 3 और −3 के अतिरिक्त, फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। मान लीजिए कि $a \in \mathbb{R} - \{3, 3\}$ है। तब, f(a) परिभाषित है तथा दिया हुआ फलन

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ है।

अब $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x^2 - 9}$

$= \frac{1}{a^2 - 9} = f(a)$ है।

E6) स्पष्टतः, फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या पर परिभाषित है। इसका आलेख चित्र 21 में दिया है।



चित्र 21

i) जब $a < 0$ है, तो फलन परिभाषित है तथा $f(a) = a^2$ है।

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}(a^2) = a^2$ है।

ii) जब $a > 0$ है, तो हमें $f(x) = x$ प्राप्त है तथा यह सरलता से देखा जा सकता है कि यह संतत है।

iii) जब $a = 0$ है, तो 0 पर फलन का मान $f(0) = 0$ है।

0 पर f की बाई पक्ष सीमा =

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$ है।

0 पर f की दाईं पक्ष सीमा =

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ है तथा इसीलिए 0 पर f संतत है। इसका अर्थ है कि अपने प्राँत में f प्रत्येक बिंदु पर संतत है तथा इसीलिए f एक संतत फलन है।

E7) स्क्वीज प्रमेय का प्रयोग करते हुए स्वयं कीजिए।

E8) i) $f(x) = a^x, a > 0, x \in \mathbb{R}$ है।

मान लीजिए कि k कोई भी स्वेच्छिक वास्तविक संख्या है। f(x) का सभी k के लिए अस्तित्व तथा $f(k) = k^x$ है।

$\lim\limits_{x\to k} f(x) = \lim\limits_{x\to k} a^x = a^k$ है।

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$ है। अतः चरघातांकी फलन संतत है। आप इसका सत्यापन चरघातांकी फलन के आलेख से भी कर सकते हैं। क्योंकि $a^x, a > 0$ के आलेख में कोई विच्छिन्नता (भंग) नहीं, है, इसलिए यह एक संतत फलन है।

ii) आप इसे स्वंय करने का प्रयास कर सकते हैं।

iii) $\log_a x, a > 0$ के आलेख से, यह स्पष्ट है कि इसमें कोई भंग नहीं है। अब, मान लीजिए कि k एक स्वेच्छिक वास्तविक संख्या है तथा $f(x) = \log_a x, a > 0$ है। यहाँ f(k) का अस्तित्व है तथा $f(k) = \log_a k, a > 0$ है। अब, $\lim\limits_{x\to k} f(x) = \lim\limits_{x\to k} \log_a x = \log_a k$ है।

अतः, $\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$ है। तथा लघुगणकीय फलन एक संतत फलन है।

iv) इसे आप स्वयं हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E9) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 - 2) = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(kx - 4) = k - 4$

क्योंकि f(x) संतत है, इसलिए $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ है, जिससे $k - 4 = -1 \Rightarrow k = 3$ प्राप्त होता है।

E10) यह फलन संतत नहीं है, क्योंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या के निकट, यहाँ अनंत परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ हैं तथा इस फलन की बाईं और दाईं पक्ष सीमाओं के अस्तित्व नहीं हैं। इसमें उद्दाल असंततता है।

E11) i) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h} = -\infty$$

ये इन सीमाओं का अस्तित्व नहीं है। इसलिए, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 0$ पर असंतत है। यह अनंत असंततता है। अब संयोजित फलन के लिए,

$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ जो $x = 0$ पर संतत है।

ii) $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

जब $x \to 0$ है, तब $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ की सीमा एक अद्वितीय मान नहीं करती है, क्योंकि $x \to 0$ होने पर, $\frac{1}{x} \to \infty$ है तथा फलन $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ का मान अंतराल $[-1,1]$ में बदलता रहेगा। अतः, $\lim_{x\to 0} g(x)$ का अस्तित्व नही, है तथा $x = 0$ पर फलन संतत नहीं है। इस प्रकार, इसमें $x = 0$ पर उद्दाल असंततता है।

अतः, $x = 0$ पर $g(x)$ असंतत है।

iii) $h(x) = \frac{x}{|x|}$ है।

$$h(x) = \begin{cases} 1\,; & \text{यदि } x > 0 \\ -1\,; & \text{यदि } x < 0. \end{cases}$$

$x = 0$ पर $h(x)$ परिभाषित नहीं है। अतः, यह $x = 0$ पर असंतत है। यह एक हटाने योग्य असंततता है।

E12) इस फलन का प्राँत $[-4,4]$ है। इसलिए, हमें f के सांतत्य की जाँच को विवृत अंतराल $]-4,4[$ पर तथा दोनों अंत बिंदुओं पर देखने की आवश्यकता है।

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-a^2} = f(a)$ है, जो यह सिद्ध करता है कि अंतराल $]-4,4[$ में प्रत्येक बिंदु पर f संतत है।

अब, अंत बिंदुओं पर,

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \sqrt{16-x^2} = 0 = f(4)$$

$\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{16 - x^2} = 0 = f(-4)$

इस प्रकार, अंतराल $[-4,4]$ में f संतत है।

E13) इसे देखने के लिए, हम निम्नलिखित तथ्य का उपयोग करते हैं :

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

हमने इसे सिद्ध नहीं किया है, परंतु 0 के निकट $\sin x$ के आलेख से यह सहजज्ञानात्मक रुप से स्पष्ट है। अब, देखिए कि $f(x) = \sin x$ प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। मान लीजिए C कोई वास्तविक संख्या है। $x = c + h$ रखिए। यदि $x \to c$ तो हम जानते हैं कि $h \to 0$ है। अतः, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sin x$

$= \lim_{h \to 0} \sin(c + h)$

$= \lim_{h \to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h]$

$= \lim_{h \to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h \to 0} [\cos c \sin h]$

$= \sin c + 0 = \sin c = f(c)$ है।

इस प्रकार, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ है तथा इसीलिए f एक संतत फलन है।

E14) i) मान लीजिए कि $g(x) = x^2$ और $h(x) = \cos x$ है।

अब $f = hog$ को परिभाषित कीजिए। हम जानते हैं कि $\mathbb{R}$ में $g(x)$ और $h(x)$ संतत हैं। प्रमेय 2 के उपयोग से, हम कहते हैं कि $\mathbb{R}$ में F संतत है।

ii) $h(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$ है, यदि $x \neq \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}$ है।

अतः, प्रमेय 1 के उपयोग से, $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ में $\tan x$ संतत है।

E15) $g(x) = 1 - x + |x|$ द्वारा g को तथा $h(x) = |x|$ द्वारा h को सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए परिभाषित कीजिए। तब,

$(h o g)(x) = h(g(x))$

$= h(1 - x + |x|)$

$= |1 - x + |x|| = f(x)$ है।

यह स्पष्ट है कि यह एक संतत फलन है। इसलिए, एक बहुपद फलन और मापांक फलन का योग होने के कारण g संतत है। परंतु तब f दो संतत फलनों का संयोजन होने के कारण संतत है।

E16) मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ है। तब, f एक संतत फलन है तथा $f(0) = 0 < 2 < 4 = f(2)$ है। मध्यमान प्रमेय से, एक $c \in [0,2]$ है ताकि $c^2 = f(c) = 2$ है।

E17) मान लीजिए कि $f(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$ है। तब, सभी $x > -1$ के लिए, f संतत है। $f(1) = 1 - \sqrt{2}$ और $f(2) = 4 - \sqrt{3}$ है। अतः, $f(1) < 0 < f(2)$ है तथा मध्यमान प्रमेय से एक $x \in [1,2]$ है ताकि $f(x) = 0$ है। परंतु तब, $x^2 - \sqrt{x+1} = 0$ है।

E18) यदि $[0, 1]$ पर $f(x)$ संतत है, तो $[f(x)]^2$ भी संतत है।

$g(x) = [f(x)]^2 - x$ को स्थापित कीजिए।

अब, $g(0) = [f(0)]^2 - 0 = [f(0)]^2 \geq 0$ है तथा $g(1) = [f(1)]^2 - 1 \leq 0$ है।

मध्यमान प्रमेय से, एक $c \in [0,1]$ है ताकि $g(c) = 0$ है।

तब, $[f(c)]^2 - c = 0$ या $[f(c)]^2 = c$ है।

E19) i) मान लीजिए कि $f(x) = \cos x - x$ है।

हम जानते हैं कि $[0,1]$ में $f(x)$ संतत है।

$f(0) = 1$ है

तथा $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$ है

मध्यमान प्रमेय के प्रयोग से, हम कह सकते हैं कि 0 और 1 के बीच में एक संख्या x_0 का अस्तित्व है ताकि $f(x_0) = 0$ है।

ii) और iii) आप स्वयं इन्हें करना चाहेंगे।

विविध उदाहरण और प्रश्न

नीचे दिए हुए उदाहरण और प्रश्न, इस ब्लॉक में आपके द्वारा अध्ययन की संकल्पनाओं और प्रक्रियाओं पर आधारित हैं । इनके करने से आपको संबंधित संकल्पनाओं की एक बेहतर समझ प्राप्त हो जाएगी तथा साथ ही ऐसे प्रश्नों को हल करने का अभ्यास भी हो जाएगा।

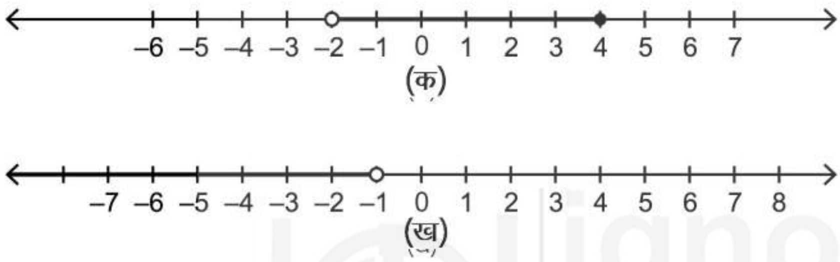
उदाहरण 1: निम्नलिखित में से प्रत्येक समुच्चय के लिए अंतराल संकेतन लिखिए:

i) $\{x \mid -4 < x < 5\}$ ii) $\{x \mid x \geq -2\}$

हल: i) $\{x \mid -4 < x < 5\} =]-4, 5[$ ii) $\{x \mid x \geq -2\} = [-2, \infty[$

* * *

उदाहरण 2: चित्र 1 के प्रत्येक आलेख के लिए अंतराल संकेतन लिखित ।



चित्र 1

हल: i) $]-2, 4]$

ii) $]-\infty, -1[$

* * *

उदाहरण 3: $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्राँत ज्ञात कीजिए ।

हल: क्या कोई ऐसी संख्या x है, जिसके लिए हम $|x|$ परिकलित नहीं कर पाएँ

इसका उत्तर 'नहीं' है । इस प्रकार, f का प्राँत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

* * *

उदाहरण 4: मान लीजिए कि ₹ 500 किसी बैंक में t वर्षों के लिए 6% वार्षिक ब्याज की दर से निवेश किए जाते हैं, जब की ब्याज प्रति तिमाही संयोजित किया जाता है। t वर्षों बाद खाते में मिश्रधन $A(t) = 500\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{4t} = 500(1.015)^{4t}$ द्वारा दिया जाता है। यह मिश्रधन A वर्षों की सख्या t का एक फलन है, जिसके लिए धनराशि निवेश की गई है। इसका प्राँत निर्धारित कीजिए।

हल: हम सूत्र में t के स्थान पर किसी भी वास्तविक संख्या को प्रतिस्थापित कर सकते हैं, परंतू वर्षों की ऋणात्मक संख्या अर्थपूण नहीं है। अनूप्रयोग का संदर्भ ऋणात्मक संख्याओं को बाहर कर देता है। इस प्रकार, वाँछित प्राँत सभी ऋणेतर संख्याओं का समुच्चय $[0, \infty[$ है।

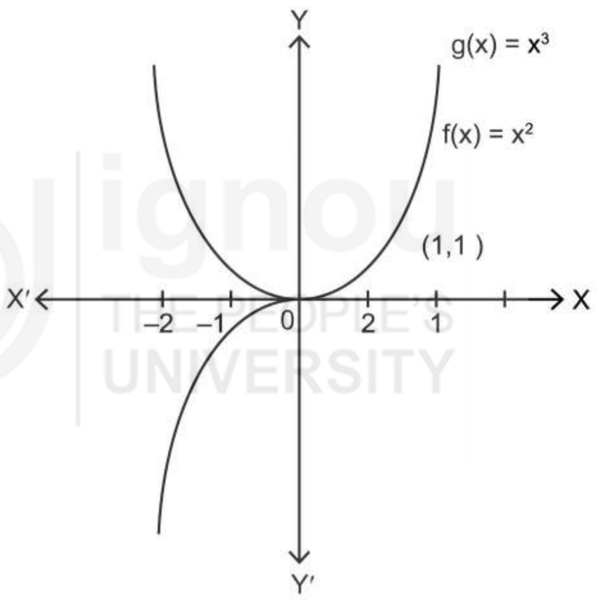
* * *

उदाहरण 5: $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलनों के आलेखों को अक्षों के एक ही समुच्चय पर आलेख खींचिए।

हल: सर्वप्रथम हम मानों की सारणी बनाते है; बिंदुओं को आलेखित करते हैं तथा फिर आलेख खींचते हैं।

सारणी 1

x	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
x^2	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
x^3	−8	−1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8



चित्र 2: f और g के आलेख

* * *

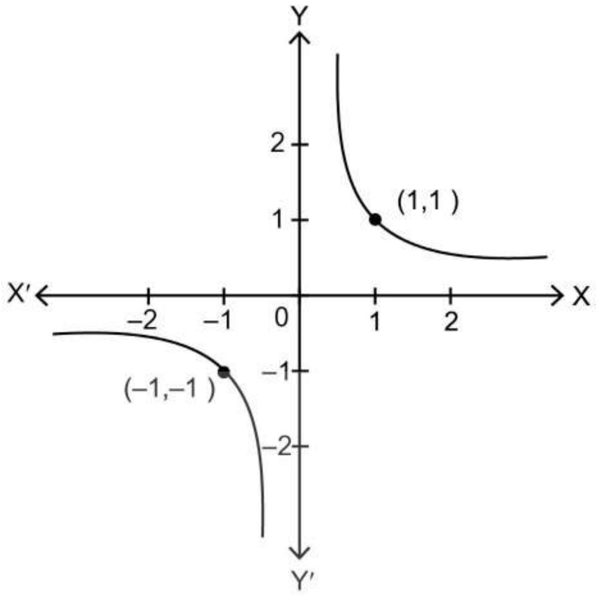
उदहारण 6: $f(x) = 1/x$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख खीचिए।

हल: हम मानों की सारणी बनाते हैं; बिंदुओं को आलेखित करते हैं और फिर आलेख खींचते हैं।

* * *

सारणी 2

x	−3	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
f(x)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−1	−2	−4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



चित्र 3: f का आलेख

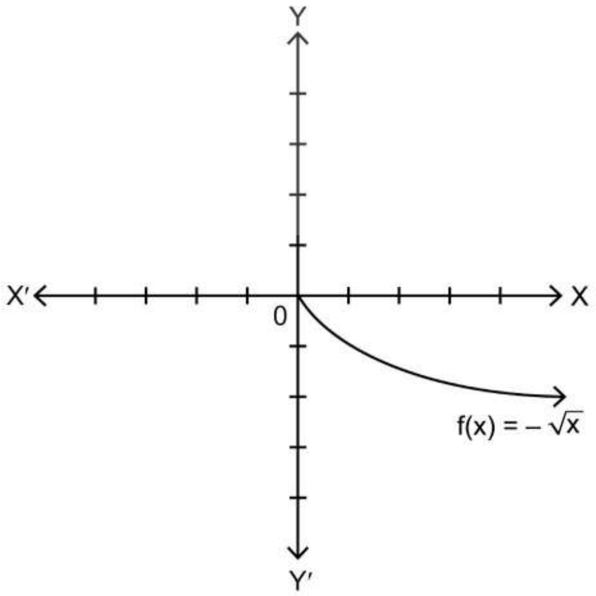
* * *

उदहारण 7: $f(x) = -\sqrt{x}$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख खींचिए।

हलः इस फलन का प्राँत सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, अर्थात अंतराल $[0, \infty[$ है। आलेख खींचने के लिए, हम वर्गमूलों के सन्निकट मानों को ज्ञात करते हैं। हम इन मानों की सारणी बनाते हैं, बिंदुओं को आलेखित करते हैं और फिर आलेख खींचते हैं।

सारणी 3

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{f(x) = -\sqrt{x}}$	0	–1	–1.4	–1.7	–2	–2.2



चित्र 4: f का आलेख

* * *

उदाहरण 8: 'अल्ट्रा–फाइन कॉफी मेकर्स' के लिए नीचे दिए माँग और आपूर्ति फलनों के लिए संतुलन बिंदू ज्ञात कीजिए। यहाँ q उत्पादन किए गए कॉफी मेकर्स की संख्या (सौ में) निरूपित करता है तथा x (रूपयों में) मूल्य निरूपित करता है।

माँग: $q = 50 - \frac{1}{4}x$

आपूर्ति: $q = x - 25$

हल: संतुलन बिंदू ज्ञात करने के लिए, माँग की गई राशि का आपूर्ति की राशि से सुमेलन होना चाहिए। अतः, हमें प्राप्त होता है;

$50 - \frac{1}{4}x = x - 25 \Rightarrow 60 = x$ है।

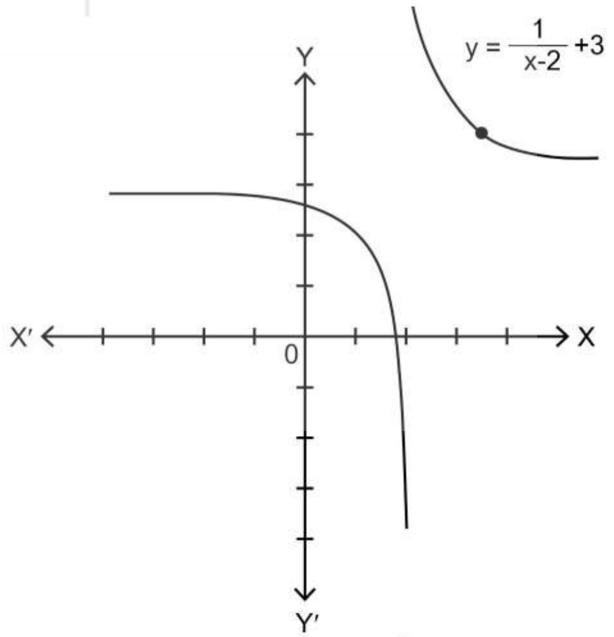
इस प्रकार, $x = 60$ पर q ज्ञात करने के लिए, इन दोनों में से किसी भी फलन में x का मान प्रतिस्थापित करते हैं। हम आपूर्ति फलन को चुन कर, $q = x - 25 = 60 - 25 = 35$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, संतुलन राशि 3500 इकाई है तथा संतुलन बिंदु $(60,3500)$ है।

* * *

उदाहरण 9: $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f पर विचार कीजिए। इस फलन का आलेख खींचिए तथा निम्नलिखित सीमाओं को ज्ञात कीजिए, यदि इनका अस्तित्व हो तो । साथ ही, इन सीमाओं को सहजज्ञानात्मक रूप से भी ज्ञात कीजिए।

i) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

हल: $f(x)$ का आलेख चित्र 5 में दर्शाया गया है। आप ध्यान दे सकते हैं कि यह वैसा ही आलेख है, जो चित्र 3 में $f(x) = \frac{1}{x}$ का आलेख था, तरंतु इसे दाईं ओर 2 इकाई और उपर की ओर 3 इकाई स्थानांतरित कर दिया गया है।



चित्र 5: f का आलेख

i) जब बाईं ओर से x संख्या 3 की ओर अग्रसर होता है, तब 4 की ओर $f(x)$ अग्रसर होता है। अतः, बाईं ओर से सीमा 4 है। जब x दाईं ओर से 3 की ओर अग्रसर होता है, तब $f(x)$ भी 4 की ओर अग्रसर होता है। क्योंकि बाईं ओर से सीमा और दाईं ओर से सीमा 4 ही है, इसलिए $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$ है।

सारणी 4

$x \to 3^-$ $(x<3)$	$f(x)$	$x \to 3^+$ $(x>3)$	$f(x)$
2.1	13	3.5	3.667
2.5	5	3.2	3.8333
2.9	4.1111	3.1	3.9090
2.99	4.0101	3.01	3.9901

चित्र 5 यह भी सुदृढ़ करती है कि 3 के बाईं ओर से और दाईं ओर से भी $f(x)$ की सीमा 4 की ओर अग्रसर करती है।

ii) जब x बाईं ओर से 2 की ओर अग्रसर होता है, तब $f(x)$ बिना किसी परिबंध के अधिक तथा और अधिक ऋणात्मक होता जाता है। ये संख्याएँ किसी वास्तविक संख्या की ओर अग्रसर नहीं होती, यद्यपि यह कहा जा सकता है कि बाईं ओर से सीमा ऋणात्मक अनंत, $-\infty$ है। अर्थात् $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ है।

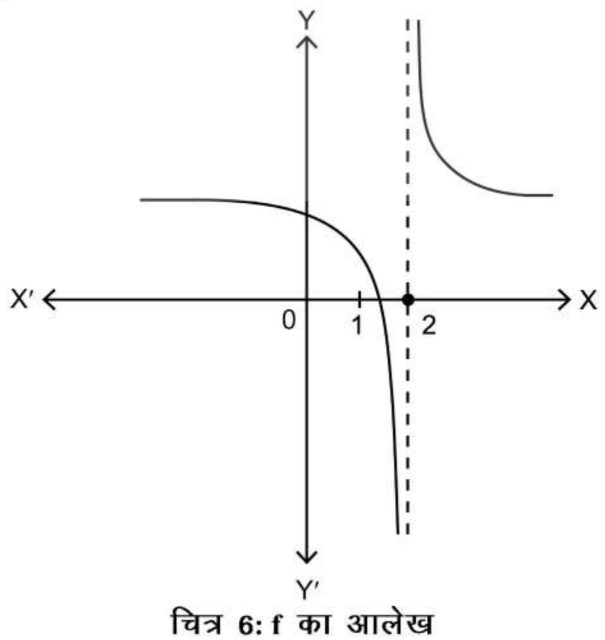
जब x दाईं ओर से 2 की ओर अग्रसर होता है, तो $f(x)$ बिना किसी परिबंध के बड़ा तथा और अधिक बड़ा होता जाता है। ये संख्याएँ भी किसी वास्तविक संख्या की ओर अग्रसर नहीं होती; यद्यपि यह कहा जा सकता है कि दाईं ओर सीमा अनंत ∞ है। अर्थात् $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ है।

क्योंकि बाईं पक्ष सीमा और दाई पक्ष सीमा मे अंतर है, इसलिए $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है। सारणी 5 यह दर्शाता है कि $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

सारणी 5

$x \to 2^-$ $(x<2)$	$f(x)$	$x \to 2^+$ $(x>2)$	$f(x)$
1.5	1	2.5	5
1.9	−7	2.1	13
1.99	−97	2.01	103
1.999	−997	2.001	1003

चित्र 6 भी यह सुदृढ करती है कि $x = 2$ पर f की सीमा का अस्तित्व नहीं है।



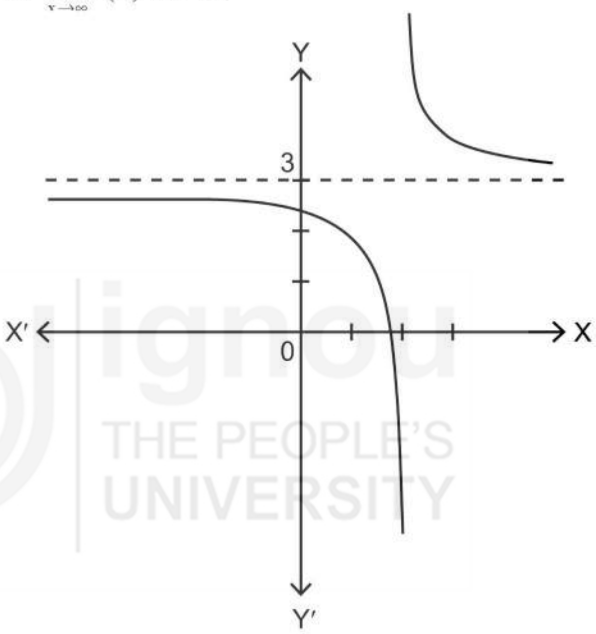
चित्र 6: f का आलेख

iii) जैसे-जैसे x बड़ा तथा और बड़ा होता जाता है, वैसे-वैसे $f(x)$ संख्या 3 के निकट तथा और निकट होता जाता है। इसलिए, हम $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$ प्राप्त करते हैं।

सारणी 6

$x\to\infty$	$f(x)$
5	3.3333
10	3.125
100	3.0102
1000	3.0010

चित्र 7 दर्शाती है कि $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$ है।



चित्र 7

* * *

उदाहरण 10: निम्नलिखित सीमाओं को ज्ञात कीजिए, तथा आपके द्वारा प्रत्येक चरण पर उपयोग किया गया सीमा गुण लिखिए।

(i) $\lim_{x\to 1}(2x^3+3x^2-6)$

(ii) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x^2+5x-1}{3x-2}\right)$

(iii) $\lim_{x\to -2}\sqrt{1+3x^2}$

हल: i) $\lim_{x\to 1}(2x^3-3x^2-6)=\lim_{x\to 1}(2x^3)+\lim_{x\to 1}(-3x^2)+\lim_{x\to 1}(-6)$ $[\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$
$=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)]$

$=2\lim_{x\to 1}(x^3)-3\lim_{x\to 1}(x^2)-\lim_{x\to 1}(6)$ $[\lim_{x\to a}Cf(x)=C\lim_{x\to a}f(x)]$

$=2-3-6$

$=-7$

ii) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2+5x-1}{3x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to4}(2x^2+5x-1)}{\lim\limits_{x\to4}(3x-2)}$ (भागफल की सीमा के अनुप्रयोग से)

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to4}(x^2)+5\lim\limits_{x\to4}(x)+\lim\limits_{x\to4}(-1)}{3\lim\limits_{x\to4}(x)+\lim\limits_{x\to4}(-2)}$$

$$=\frac{2\times16+5\times4-1}{3\times4-2}=\frac{51}{10}$$

iii) $\lim\limits_{x\to-2}\sqrt{1+3x^2}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-2}(1+3x^2)}$ $[\because \lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to a}f(x)}]$

$$=\sqrt{\lim\limits_{x\to-2}1+3\lim\limits_{x\to-2}(x^2)}$$

$$=\sqrt{1+3(4)}$$

$$=\sqrt{13}$$

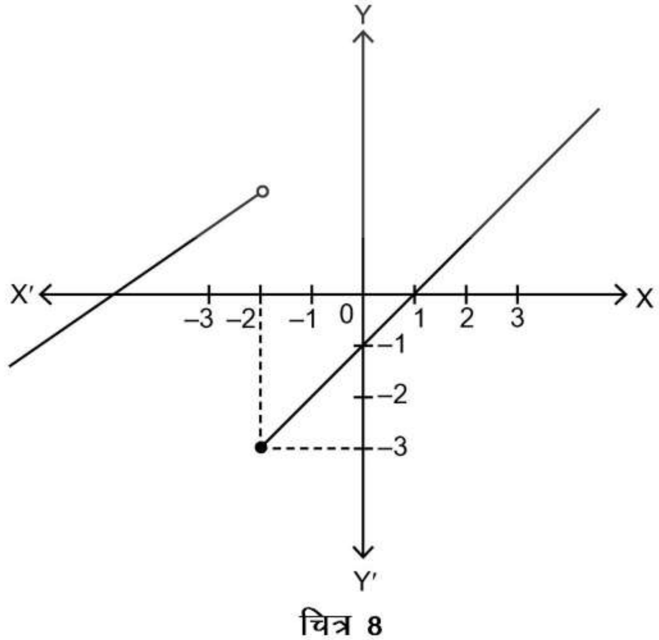
* * *

उदाहरण 11: क्या $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+3, & x<-2 \text{ के लिए}\\ x-1, & x\geq-2 \text{ के लिए}\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन

g, $x=-2$ पर संतत है? क्यों या क्यों नहीं?

हल: यह ज्ञात करने के लिए कि -2 पर g संतत है या नहीं, हमें यह निर्धारित करना चाहिए कि $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=g(-2)$ है या नहीं। इस प्रकार, हम पहले यह देखते हैं कि $g(-2)=-2-1=-3$ है। $\lim\limits_{x\to-2}g(x)$ ज्ञात करने के लिए, हम बाईं और दाईं ओर की सीमाएँ $\lim\limits_{x\to-2^-}g(x)=\frac{1}{2}(-2)+3=-1+3=2$ तथा $\lim\limits_{x\to-2^+}g(x)=-2-1=-3$ ज्ञात करते हैं।

क्योंकि $\lim\limits_{x\to-2^-}g(x)\neq\lim\limits_{x\to-2^+}g(x)$ है, इसलिए हम देखते हैं कि $\lim\limits_{x\to-2}g(x)$ का अस्तित्व नहीं है। इस प्रकार, -2 पर g संतत नहीं है। यह अन्य सभी x मानों पर संतत है। चित्र 8 भी इसे सुदढ़ करती है।

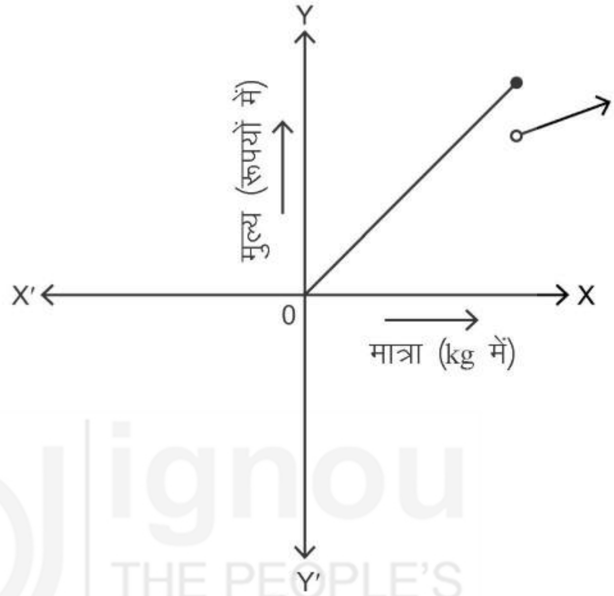


चित्र 8

* * *

उदाहरण 12: कोई दुकानदार वस्तुओं को बड़ी मात्रा में बेचता है। 500 kg तक की राशियों, 500 kg भी सम्मिलित है, पर वह दुकानदार ₹2.50 प्रति kg की दर से मूल्य लेता है। 500 kg से ऊपर की राशियों पर वह ₹2 प्रति kg की दर से मूल्य लेता है। इस मूल्य फलन को $p(x)=\begin{cases}2.50x, & 0<x\le 500 \text{ के लिए}\\ 2x, & x>500 \text{ के लिए}\end{cases}$ द्वारा परिभाषित एक टुकड़े अनुसार फलन के रुप में व्यक्त किया जाता है, जहाँ p रुपयों में मूल्य है तथा x राशि की मात्रा kg में है। क्या $x=500$ पर मूल्य फलन $p(x)$ संतत है? क्यों या क्यों नही?

हलः $p(x)$ का आलेख नीचे दिया है :



चित्र 9

जब x बाईं और से 500 की ओर अग्रसर होता है, तो हमें $\lim_{x\to 500^-} p(x)=1250$ प्राप्त होता है तथा जब x दाईं ओर से 500 की ओर अग्रसर होता है, तो हमें $\lim_{x\to 500^+} p(x)=1000$ है। क्योंकि बाईं पक्ष और दाईं पक्ष की सीमाएँ बराबर नही हैं, इसलिए $\lim_{x\to 500} p(x)$ का अस्तित्व नहीं है। इस प्रकार $x=500$ पर, फलन $p(x)$ संतत नहीं है। चित्र 9 एक मूल्य भंग (विच्छिनता) दर्शाती है। $x=500$ पर फलन का भाव $p(500)=1250$ है, परंतु इस तथ्य की इसमें कोई भूमिका नहीं है कि फलन की सीमा का अस्तित्व है या नहीं।

***

उदाहरण 13: एक जलाशय समय $t=0$ मिनट पर खाली है। इसमें 30 मिनट के लिए 3 गैलन प्रति मिनट की दर से जल भरा जाता है। 30 मिनट पर, जलाशय को आगे नहीं भरा जाता है तथा इसका एक वाल्व खोल दिया जाता है, जिससे उसमें से जल 4 गैलन प्रति मिनट की दर से बाहर निकलने लगता है। t मिनट बाद, इसके जल का आयतन v फलन

$v(t)=\begin{cases}3t, & 0\le t\le 30 \text{ के लिए}\\ k-4t, & t>30 \text{ के लिए}\end{cases}$ द्वारा किया जाता है।

k निर्धारित कीजिए ताकि आयतन फलन $v, t=30$ पर संतत हो। स्पष्ट कीजिए कि यह क्यों सत्य होगा।

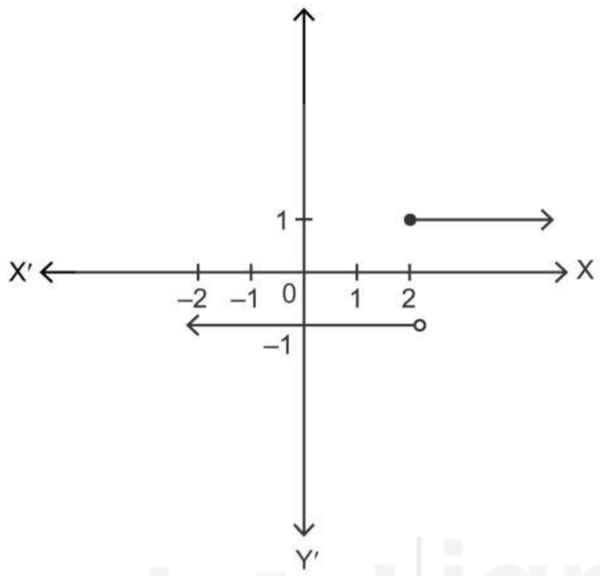
हलः $x=30$ पर $v(t)$ परिभाषित है तथा $v(30)=90$ गैलन है। अब, $\lim_{t\to 30^-} v(t)=90$ तथा $\lim_{t\to 30^+} v(t)=k-120$ है।

क्योंकि $t = 30$ पर $v(t)$ संतत है, इसलिए $\lim_{t\to30} v(t) = 30 \Rightarrow k - 120 = 90 \Rightarrow k = 210$ है।

जल की मात्रा (गैलनों में) समय (t) के फलन के रुप में संतत है।

* * *

उदाहरण 14: फलन $C(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \text{ के लिए} \\ 1, & x \geq 2 \text{ के लिए} \end{cases}$ पर विचार कीजिए



चित्र 10

i) $\lim_{x\to2^+} C(x)$ ज्ञात कीजिए।

ii) $\lim_{x\to2^-} C(x)$ ज्ञात कीजिए।

iii) $\lim_{x\to2} C(x)$ ज्ञात कीजिए।

iv) $C(2)$ ज्ञात कीजिए।

v) क्या $x = 2$ पर, C संतत है? क्यों या क्यों नहीं?

vi) क्या $x = 1.95$ पर C संतत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

हल: i) $\lim_{x\to2^+} C(x) = 1$ है।

ii) $\lim_{x\to2^-} C(x) = -1$ है।

iii) $\lim_{x\to2} C(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

iv) $C(2) = 1$ है।

v) क्योंकि $\lim_{x\to2} C(x)$ का अस्तित्व नहीं है, इसलिए $x = 2$ पर C संतत नहीं है।

vi) क्योंकि जब 2 से x छोटा है, तब C एक अचर फलन है, इसलिए $x = 1.95$ पर C संतत है।

उदाहरण 15: $\varepsilon - \delta$ परिभाषा का उपयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\lim_{x\to2}(4x - 3) = 5$ है।

हल: यहाँ $f(x) = 4x - 3$ और $L = 5$ है।

$$|f(x) - L| = |4x - 3 - 5|$$
$$= |4x - 8|$$

$= 4|x-2|$, जब भी $|x-2| < \delta$, एक दिए हुए $\varepsilon > 0$ के लिए $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, चुनिए। तब, $|f(x) - L| = 4|x-2| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$ है।

* * *

उदाहरण 16: यदि $y = |x| + |x-1|$ है, तो दर्शाइए कि

$$y = \begin{cases} 1-2x, & \text{यदि } x \le 0 \\ 1, & \text{यदि } 0 < x < 1 \\ 2x-1, & \text{यदि } x \ge 1 \end{cases}$$

हल: i) जब $x \le 0 \Rightarrow |x| = -x$ और $x - 1 \le 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$ है।

इसलिए $y = (-x) + (-x(x-1) = -x - x + 1 = 1 - 2x$ है।

ii) जब $0 < x < 1 \Rightarrow |x| = x$ तथा $x - 1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$ है।

इसलिए $y = x + (-x(x-1)) = x - x + 1 = 1$ है।

iii) जब $x \ge 1 \Rightarrow |x| = x$ तथा $x - 1 \ge 0 \Rightarrow |x-1| = x - 1$ है।

इसलिए $y = x + (x-1) = 2x - 1$ है।

अतः, $y = \begin{cases} 1-2x, & \text{यदि } x \le 0 \\ 1, & \text{यदि } 0 < x < 1 \\ 2x-1, & \text{यदि } x \ge 1 \end{cases}$

* * *

उदाहरण17: $\lim_{x\to 0}(x \sin x)$ ज्ञात कीजिए।

हल: i) जब $x > 0$ है, तब $0 < x < \pi/2 \Rightarrow \sin x > 0, 0 < x < \pi/2$ के लिए।

इस लिए हम प्राप्त करते हैं $\sin x < x \Rightarrow x \sin x < x^2$ है।

मान लीजिए कि x के उन मानों के लिए धनात्मक हैं तथा $\sqrt{\varepsilon}$ से छोटे हैं, $\varepsilon > 0$ है। इसमें हमें $x^2 < \varepsilon$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, जब $0 < x < \sqrt{\varepsilon}$ है, तब $0 < x \sin x < \varepsilon$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\lim_{x\to 0^+} x \sin x = 0$ है।

ii) जब $x < 0$ है, तब $-\pi/2 < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$ है।

x के दो मानों के लिए, जो परिणाम में बराबर हैं परंतु चिह्नों में विपरीत हैं, फलन के मान बराबर हैं। अतः, जैसा कि i) में था, हम देखते हैं कि अंतराल $]-\sqrt{\varepsilon}, 0[$ में x के किसी भी मान के लिए $x \sin x$ और 0 के अंतर का संख्यात्मक मान ε से कम है।

इस प्रकार, $\lim_{x\to 0^-} x \sin x = 0$ है।

i) और ii) में प्राप्त किए गए निष्कर्षों को मिलाने पर, हम देखते हैं कि किसी भी घनात्मक ε के लिए, 0 के इर्दगिर्द एक ऐसे अंतराल $]-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}[$ का अस्तित्व है कि इस अंतराल के किसी भी सदस्य x के लिए, $x \sin x$ और 0 के अंतर का संख्यात्मक मान् $< \varepsilon$ है, अर्थात् $|x \sin x - 0| < \varepsilon$ है। इस प्रकार $\lim_{x\to 0} x \sin x = 0$ है।

उदाहरण 18: $f(x)=\begin{cases}(1+3x)^{1/x}, & \text{यदि } x\neq 0\\ e^3, & \text{यदि } x=0\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य की जाँच $x=0$ पर कीजिए।

हल: $x=0$ पर $f(x)$ परिभाषित है तथा $f(0)=e^3$ है। अब,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{1/3x}\right]^3$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{1/3x}\right]^3$$

$$=e^3 \quad [\because x\to 0 \Rightarrow 3x\Rightarrow 0]$$

अतः, $x=0$ पर f संतत है।

* * *

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कर सकते हैं:

E1) $y=4-|x-3|$ का आलेख खींचिए।

E2) निर्धारित कीजिए कि f सम है, विषम है या न तो सम है और न ही विषम है। अपने उत्तर का सत्यापन निम्नलिखित फलनों के लिए f के आलेख की सहायता से कीजिए:

i) $f(x)=x|x|$

ii) $f(x)=x^2+2x+1$

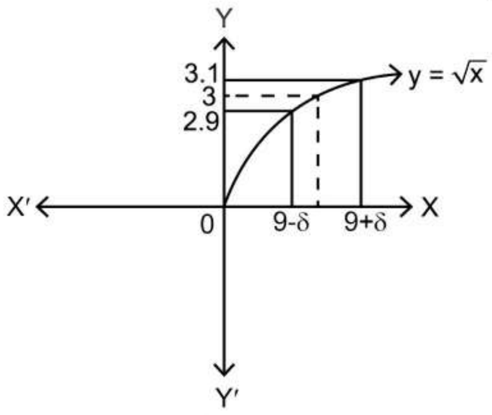
E3) आयतन $2m^3$ वाले एक आयताकार पेटी का आधार एक वर्ग है। इस पेटी के पृष्ठीय क्षेत्रफल को आधार की भुजा के एक फलन के रूप में व्यक्त कीजिए

E4) सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ है।

E5) $f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x^2-x-2}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f की सीमा के मान का यदि उसका अस्तित्व है तो, $x=2.5, 2.2, 2.1, 2.01, 2.005, 2.001, 2.0001, 1.5, 1.8,$

$1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$ पर फलन के मान परिकलित करके, का अनुमान लगाइए।

E6) $f(x)=\sqrt{x}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f के आलेख का उपयोग एक ऐसी संख्या δ ज्ञात करने के लिए कीजिए ताकि यदि $|x-9|<\delta$ है, तो $|\sqrt{x}-3|<0.1$ है।



चित्र 11

E7) मान लीजिए कि $f(x)=\frac{x^2+x-6}{|x-2|}$ द्वारा परिभाषित एक फलन f है। ज्ञात कीजिए:

i) $x=2$ पर f के LHL और RHL ।

ii) क्या $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ का अस्तित्व है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

iii) f का आलेख खींचिए।

E8) क्या $f(x)=\begin{cases} x, \text{ यदि } x\le 1 \text{ है} \\ 5, \text{ यदि } x>1 \text{ है}\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f, $x=0$ पर, $x=1$ पर, $x=2$ पर संतत है? कारण दीजिए।

E9) जाँच कीजिए कि $f(x)=x^2-\sin x+5$ से परिभाषित फलन f, $x=\pi$ पर संतत है।

E10) k के किस मान के लिए, $f(x)=\begin{cases} k(x^2-1), & \text{यदि } x\le 0 \text{ है} \\ 4x+1, & \text{यदि } x>0 \text{ है}\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f, $x=0$ संतत है। $x=1$ सांतत्य के बारे में क्या कहा जा सकता है?

E 11) मान लिजिए कि f और g दो संतत फलन इस प्रकार हैं कि $g(2)=6$ और $\lim\limits_{x\to 2}[3f(x)+f(x)g(x)]=36$ है। f(2) ज्ञात कीजिए।

E12) पृथ्वी द्वारा एक इकाई द्रव्यमान पर इस ग्रह के केन्द्र से r की दूरी पर लगाया गया गुरूत्वाकर्षण बल

$$F(r)=\begin{cases} \frac{GMr}{R^3}, \text{ यदि } r<R \\ \frac{GM}{r^2}, \text{ यदि } r\ge R\end{cases}$$ है। जहाँ m पृथ्वी का द्रव्यमान है, R त्रिज्या है

तथा g गुरूत्वाकर्षण स्थिरांक है, जाँच कीजिए कि $r=R$ पर F एक संतत फलन है या नहीं।

E13) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित मे से कौन से फलन संतत या असंतत हैं। कारण दीजिए।

i) समय के फलन के रूप में एक विशेष स्थान का तापमान।

ii) तय की गई दूरी के फलन के रूप में एक टैक्सी के लिए दिया गया किराया।

iii) समय के एक फलन के रूप में किसी कमरे की बिजली के लिए परिपथ में विद्युत धारा।

E14) $\lim\limits_{x\to\infty}(2^{-x}-1)$ ज्ञात कीजिए।

E15) नीचे दिए फलनों के प्राँत ज्ञात कीजिए:

i) $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ ii) $f(x)=\sin(e^{-x})$

iii) $f(x)=\frac{1+x}{e^{\cos x}}$ iv) $f(x)=e^{\sqrt{5x-3-2x^2}}$

E16) $\lim\limits_{x\to 0}\log_{10}(\tan^2 x)$ ज्ञात कीजिए।

E17) जाँच कीजिए कि $f(x)=\cos(\log(x+\sqrt{x^2+1}))$ द्वारा दिया जाने वाला फलन f सम है या नहीं।

E18) असमिका $|x-1|+|x+1|<4$ को हल कीजिए।

E19) निम्नलिखित फलनों के आवर्तक ज्ञात कीजिए:

i) $f(x) = 5\sin(7x-3)$

ii) $f(x) = \sin x^2$

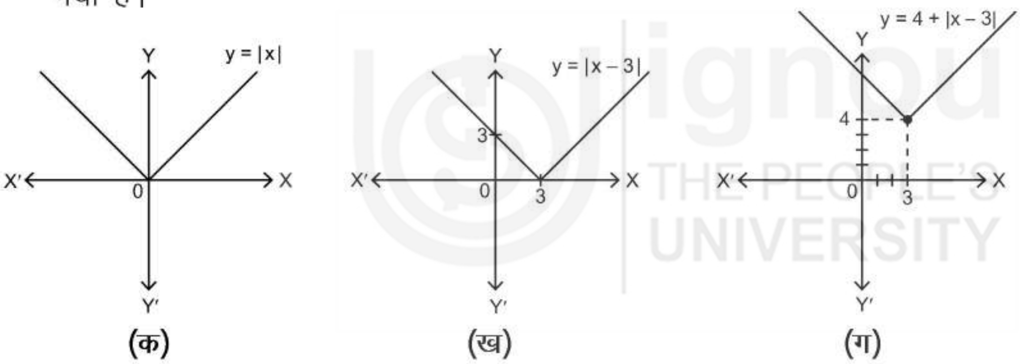
iii) $f(x) = \sqrt{\tan x}$

iv) $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$

E20) जाँच कीजिए कि $f(x) = |\sin x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ संतत है या नहीं।

हल / उत्तर

E1) आलेख दो स्थानांतरणों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है, अर्थात पहले $y = |x|$ के आलेख को $|x-3|$ का आलेख प्राप्त करने के लिए 3 इकाई दाईं ओर को स्थानांतरित करें तथा फिर इस आलेख को $y = |x-3| + 4$ का आलेख प्राप्त करने के लिए 4 इकाई ऊपर की ओर स्थानांतरित करें, जैसा कि चित्र 12 में दर्शाया गया है।



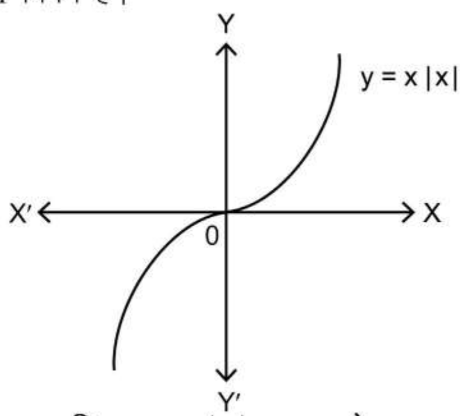
चित्र 12: (क) $y = |x|$, (ख) $y = |x-3|$, (ग) $y = |x-3| + 4$

E2) i) दिया है: $f(x) = x|x|$ तथा $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$ है।

क्योंकि $f(x) = -f(-x)$ है, इसलिए f एक विषम फलन है। हम इस फलन f को

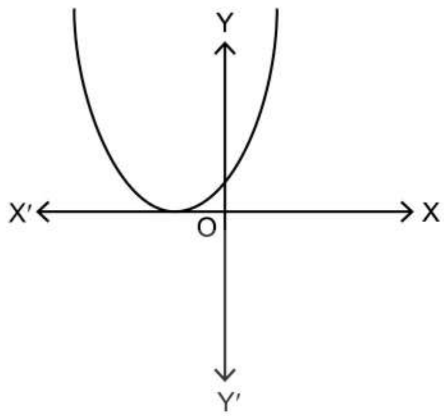
$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \ge 0 \\ -x^2, x < 0 \end{cases}$$ के रुप में पुनः लिख सकते हैं।

चित्र 13, $f(x) = x|x|$ द्वारा परिभाषित फलन f के आलेख को दर्शाती है जिससे पता चलता है कि f विषम है।



चित्र 13: $x|x|$ का आलेख

ii) $f(-x) = x^2 - 2x + 1$ है। यह फलन f न तो सम है और न ही विषम है। f का आलेख चित्र 14 में, दिया है, जिससे यह सत्यापन हो जाता है कि f न तो सम है और न ही विषम है।



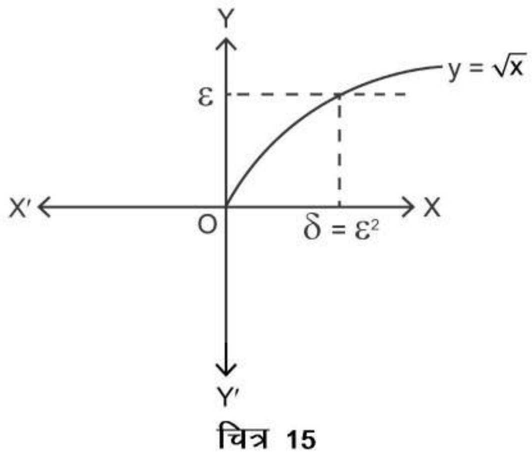
चित्र 14: $x^2 + 2x + 1$ का आलेख

E3) मान लीजिए कि आधार के वर्ग की भुजा a है तथा ऊँचाई h है। तब आयतन $V = a^2h$ है। क्योंकि यह आयतन $= 2m^3$ है, इसलिए $a^2h = 2$ है, जो हमें $h = 2/a^2$ प्रदान करता है। इस प्रकार, पृष्ठीय क्षेत्रफल $S = 2a^2 + 4ah = 2a^2 + 4a.\frac{2}{a^2} = 2a^2 + \frac{8}{a}$ है।

अतः पेटी का पृष्ठीय क्षेत्रफल $2a^2 + \frac{8}{a}$ है, जहाँ a पेटी के वर्ग आधार की भुजा है।

E4) मान लीजिए कि ε एक दी हुई घनात्मक संख्या है तथा हम एक δ ज्ञात करना चाहते हैं ताकि यदि $0 < x < \delta$ हो, तो $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ है। अर्थात् $\sqrt{x} < \varepsilon$ है। परंतु $\sqrt{x} < \varepsilon$ या $x < \varepsilon^2$ है।

अतः, $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ है। चित्र 15 इस सीमा को दर्शाती है।



चित्र 15

E5) **सारणी 7**

x	2.5	2.2	2.1	2.01	2.005	2.001	2.0001
f(x)	0.714	0.688	0.677	0.668	0.667	0.667	0.667
x	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999
f(x)	0.6	0.643	0.655	0.661	0.666	0.666	0.667

अतः, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0.667$ है।

E6) दिया है: $\left|\sqrt{x}-3\right|<0.1$

$$-0.1<\sqrt{x}-3<0.1$$
$$2.9<\sqrt{x}<3.1$$
$$(2.9)^2<x<(3.1)^2$$
$$8.41<x<9.61$$
$$-0.59<x-9<0.59<0.61$$
$$\left|x-9\right|<0.59$$

अतः, $\delta=0.59$ है या इसे छोटी कोई घनात्मक संख्या है।

E7) i) $\text{LHL}=\lim\limits_{x\to 2^-} f(2)=\lim\limits_{h\to 0} f(2-h)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2-h)^2+(2-h)-6}{\left|2-h-2\right|}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+h^2-4h+2-h-6}{\left|-h\right|}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0} h-5=-5 \text{ है।}$$

$\text{RHL}=\lim\limits_{x\to 2^+} f(2)=\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+(2+h)-6}{\left|2+h-2\right|}$$

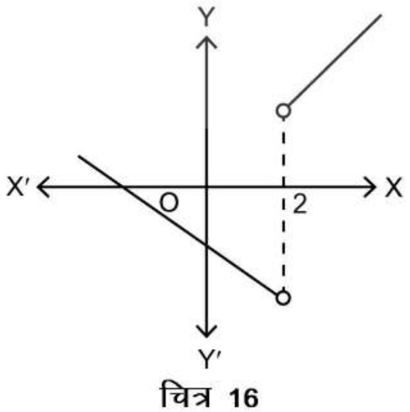
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+h^2+4h+2+h-6}{\left|h\right|}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+5h}{h}=5 \text{ है।}$$

ii) क्योंकि $\text{LHL}\neq\text{RHL}$ है, इसलिए $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

iii) हम फलन f को $f(x)=\begin{cases} x+3\ ; & \text{यदि } x>2 \\ -(x+3); & \text{यदि } x<2 \end{cases}$ के रुप में पुनः लिख सकते हैं।

चित्र 16 इस फलन f के आलेख को दर्शाती है।



चित्र 16

E8) $x=0$ पर फलन f परिभाषित है तथा $f(0)=0$ है। $\text{LHL}=0$ है, $\text{RHL}=0$ है।

अतः, $x=0$ पर फलन संतत है।

$x=1$ पर फलन f परिभाषित है तथा $f(1)=1$ है। $LHL=1$ है, $RHL=5$ है।

अतः, $x=1$ पर फलन संतत नहीं है।

$x=2$ पर फलन f परिभाषित है तथा $f(2)=5$ है। $LHL=5$ है, $RHL=5$ है।

अतः, $x=2$ पर फलन संतत नहीं है।

E9) $x=\pi$ पर फलन f परिभाषित है तथा $f(\pi)=\pi^2-0+5=\pi^2+5$ है। साथ ही, $\lim_{x\to\pi} f(x)=\pi^2+5=f(\pi)$ है। अतः, $x=\pi$ पर f संतत है।

E10) $x=0$ पर, $f(0)=-k$ है। $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-k$ है, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ है। क्योंकि $x=0$ पर f संतत है। इसलिए $k=-1$ है।

$x=1$ पर, $f(1)=5$ है। $\lim_{x\to 1^-} f(x)=5$ है। तथा $\lim_{x\to 1^+} f(x)=5$ है। अतः, $x=1$ पर फलन संतत है।

E11) $\lim_{x\to 2}[3f(x)+f(x)g(x)]=36$

$\lim_{x\to 2} 3f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)g(x)=36$

$3f(2)+f(2)g(2)=36$ है [क्योंकि f(x) और g(x) संतत हैं, इसलिए $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ और $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$ है।]

$\Rightarrow 2f(2)+f(2).6=36$

$\Rightarrow f(2)=4$ है।

E12) $f(R)=\dfrac{GM}{R^2}$

$\lim_{r\to R^-} f(r)=\lim_{r\to R^-}\dfrac{GMr}{R^3}=\dfrac{GM}{R^2}$ है।

$\lim_{r\to R^+} f(r)=\lim_{r\to R^+}\dfrac{GM}{r^2}=\dfrac{GM}{R^2}$ है।

क्योंकि $\lim_{x\to R} f(r)=\dfrac{GM}{R^2}=f(R)$ है, अतः $r=R$ पर f संतत है।

E13) i) संतत

ii) संतत

iii) असंतत

E14) $\lim_{x\to\infty}(2^{-x}-1)=\lim_{x\to\infty}(2^{-x})-\lim_{x\to\infty}(1)$

$=\lim_{t\to-\infty}(2^t)-1=0-1=-1$ है।

E15) i) प्राँत $=]-\infty,0]$ है।

ii) प्राँत $=\mathbb{R}$ है।

iii) प्राँत $=\mathbb{R}$ है।

iv) प्राँत $=\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$ है।

E16) $\lim_{x\to 0}\log_{10}(\tan^2 x)=\log_{10}\lim_{x\to 0}(\tan^2 x)$

$=\log_{10}(0)$

$=-\infty$ है।

E17) $f(-x) = \cos\{\log\{(-x) + \sqrt{(-x)^2 + 1}\}$

$= \cos[\log\{-x\sqrt{x^2+1}\}]$

$= \cos[-\log\{x + \sqrt{x^2+1}\}]$ (परिमेयीकरण के बाद)

$= \cos[\log(x + \sqrt{x^2+1})] = f(x)$ है।

क्योंकि $f(-x) = f(x)$ है, इसलिए f सम है।

E18) i) जब $x < -1$, तब $-(x-1)-(x+1) < 4$ है।

$\Rightarrow -2x < 4 \Rightarrow x > -2$ है।

अतः, $-2 < x < -1$ है।

ii) जब $-1 \le x < 1$ है, तब हमें प्राप्त हैः

$(x-1)+(x+1) < 4$

$\Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$ है।

अतः, $1 \le x < 2$ है।

अतः सर्वसमिका सत्य है, जब $x \in]-2, 2[$ है।

E19) i) क्योंकि $\sin x$ आवर्तक 2π है, इसलिए $5\sin(7x-3)$ का आवर्तक $\frac{2\pi}{2}$ होगा।

ii) मान लिजिए कि $f(x)$ का आवर्तक T है। तब, $f(x+T) = f(x)$ हैः

$\Rightarrow \sin(x+T)^2 = \sin x^2$

$\Rightarrow (x+T)^2 = 2n\pi \pm x^2$

$\Rightarrow (x+T)^2 = n\pi + (-1)^n\sqrt{x^2}$ (i)

समीकरण (1) को संतुष्ट करने वाला T का केवल एक ऋणेतर मान, जो x से स्वतंत्र है, 0 है। अतः, $f(x) = \sin x^2$ एक आवर्ती फलन नहीं है।

iii) मान लीजिए कि $\sqrt{\tan x}$ का आवर्तक T है। तब $\sqrt{\tan(T+x)} = \sqrt{\tan x}$ है।

$\Rightarrow \tan(T+x) = \tan x \Rightarrow T + x = n\pi + x, n \in \mathbb{Z}$ है।

अतः, T का न्यूनतम घनात्मक मान π है।

इसलिए, $\sqrt{\tan x}$ का आवर्तक π है।

iv) फलन $|\sin x| + |\cos x|$ का आवर्तक $\frac{\pi}{2}$ है।

E20) $|\sin x|$ प्रत्येंक बिंदु पर प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए परिभाषित है।

मान लीजिए कि $a \in \mathbb{R}$ है। अतः, $f(a) = |\sin a|$ है।

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |\sin x| = \left|\lim_{x\to a} \sin x\right|$

$= |\sin a|$ है।

अतः, यह प्रत्येक स्थान पर संतत है।

शब्दावली

Absolute Value	निरपेक्ष मान
Additive Inverse	यौगिक प्रतिलोम
Associative	सहचारी
Bounded	परिबद्ध
Calculus	कलन
Closed Interval	संवृत अन्तराल
Closed left ray	संवृत बाईं अर्ध रेखा
Closed right ray	संवृत दाहिनी अर्ध रेखा
Co-domain	सहप्रांत
Commutative	क्रमविनिमेय
Composite	संयुक्त
Constant	अचर
Continuity	सांतत्य
Continuous	संतत
Conversely	विलोमतः
Correspondence	संगति
Decreasing	ह्रासमान
denominator	हर
Distributivity	वितरणशीलता
Domain	प्रांत
Dummy	मूक
Element	अवयव
End Points	सिरे के बिंदु
Even	सम
Exponential Function	चरघातांकी फलन
Field	क्षेत्र
Finite Value	परिमित मान
Function	फलन
Graph	आलेख
Greatest Integer Function	अधिकतम पूर्णांक फलन
Greatest Lower Bound	महत्तम निम्न परिबंध
Hyperbolic Function	अतिपरवलयिक फलन
Identity	तत्समक
Increasing	वर्धमान

Independent	स्वतन्त्र
Inequality	असमिका
Infimum	निम्नक
Interval	अंतराल
Inverse	प्रतिलोम
Law of Trichotomy	त्रिविकल्पता नियम
Least Upper Bound	न्यूनतम उपरि परिबंध
Limit	सीमा
Linear Algebra	रैखिक बीजगणित
Lower Bound	निम्न परिबंध
Modules	मापांक
Monotone	एकदिष्ट
Natural Exponential Function	प्राकृत चरघातांकी फलन
Natural Logarithmic Function	पाकृत लघुगणक फलन
Natural Numbers	प्राकृत संख्या
Negative	ऋणात्मक
Non-negative	ऋणात्मकेतर/ऋणेतर
Non-Positive	धनात्मकेतर
Numerator	अंश
Odd	विषम
One-One	एकैकी
Onto	आछादी, आच्छादक
Open Interval	विवृत अन्तराल
Open left ray	विवृत बाईं अर्ध रेखा
Open right ray	विवृत दाहिनी अर्ध रेखा
Order	क्रम
Ordinate	कोटि
Origin	मूल बिन्दु
Parabola	परवलय
Period	आवर्तक
Periodic	आवर्ती
Periodicity	आवर्तिता
Polynomial Function	बहुपदीय फलन
Positive	धनात्मक
Prime	अभाज्य

Property	गुणधर्म
Quotient	भागफल
Range	गोचर/परिसर
Rational	परिमेय
Rational Function	परिमेय फलन
Real Line	संख्या रेखा
Real Number System	वास्तविक संख्या पद्धति
Reciprocal	व्युत्क्रम
Scalar	अदिश
Semi Closed	अर्ध संवृत
Set	समुच्चय
Subset	उपसमुच्चय
Supremum	उच्चक
Symbol	प्रतीक
Symmetric	सममित
System of Coordinates	निर्देशांक पद्धति
Transitive	संक्रामक
Triangle Inequality	त्रिभुज असमिका
Trigonometrical Function	त्रिकोणमितीय फलन
Unit	एकक/इकाई
Upper Bound	उपरि परिबंध
Variable	चर