इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय
मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-131
कलन

खंड

3

अवकलन

खंड प्रस्तावना	3
संकेत और प्रतीक	4
इकाई 9	
अवकलन की प्रस्तावना	5
इकाई 10	
कुछ और अवकलज	59
इकाई 11	
उच्चतर कोटि के अवकलज	95
विविध उदाहरण और प्रश्न	136
परिशिष्ट 1	
वक्रों का प्राचलिक निरूपण	155
परिशिष्ट 2	
आंशिक भिन्न	159
शब्दावली	163

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति*

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पूणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन. आई. एस. ई. आर., भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई. आई. एस. ई. आर., मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई. आई. टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य, विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ. दीपिका
प्रो. परवीन सिंक्लेयर
प्रो. पूर्णिमा मित्तल
श्री पवन कुमार
प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. सु. वेंकटरामन

* पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. अंबर हबीब (संपादक)
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर, उ.प्र.

डॉ. दीपिका
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयकर्त्ता: प्रो. परवीन सिंक्लेयर तथा डॉ. दीपिका

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन सी ई आर टी, नई दिल्ली

डॉ. दीपिका
विज्ञान विद्यापीठ, इं.गां.रा.मु.वि

आभार: इस खण्ड के कुछ भाग पिछले पाठ्यक्रम कलन (MTE-01) पर आधारित है।

सामग्री निर्माण

श्री राजीव गिरधर
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

श्री हेमन्त कुमार परिदा
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

नवम्बर, 2019

ISBN 978-93-89200-43-0

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in *से प्राप्त की जा सकती है।*

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. महेन्द्र सिंह नाथावत, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेज़र टाईपसेटिंग : डिज़ाईन क्रिएशन, E-mail: dzine.creations2@gmail.com

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली–110002

खंड 3 अवकलन

कलन पाठ्यक्रम के लिए, आप जिन पाँच खंडों का अध्ययन करेंगे उनमें से यह तीसरा खंड है। हम इस खंड का आरंभ खंड 2 में चर्चा किये गए फलनों के अवकलज की परिभाषा के साथ करेंगे।

इकाई 9 में हम अवकलज की परिभाषा का प्रयोग करके कुछ मुख्य फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे। हम अवकलजों के बीजगणित की चर्चा भी करेंगे। इस इकाई में हम यह भी जानेंगे कि सांतत्य अवकलज के लिए आवश्यक है।

इकाई 10 में हम अपनी इस चर्चा को बढ़ाते हुए लघुगणकीय, चरघातांकीय और अतिपरवलीय फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे। हम कुछ अवकलज तकनीकों जैसे कि लघुगणकीय अवकलन विधि आदि की चर्चा भी करेंगे।

इकाई 11 में, हम उच्चतर कोटि के अवकलज ज्ञात करेंगे। इनका प्रयोग हम फलनों का बहुपद सन्निकटन प्राप्त करने के लिए करेंगे।

इकाइयां 9 से 11 में, हमने अनेक उदाहरणों को सम्मिलित किया है। कृपया इनका अध्ययन सावधानीपूर्वक करिए। ये चर्चा की गई संकल्पनाओं को बेहतर रूप से समझने में आपकी सहायता करेंगे तथा प्रश्नों को हल करने में आपको एक मार्गदर्शक का कार्य भी करेंगे।

इस खंड के अंत में आप इसमें अध्ययन की गई संकल्पनाओं से संबंधित **विविध प्रश्नों का एक समुच्चय** देखेंगे। कृपया इन्हें अवश्य पढ़ें तथा स्वयं प्रत्येक प्रश्न को करने का प्रयास करें। इससे आपको संबंधित संकल्पनाओं के साथ जूझने में, तथा उन्हें अच्छे से समझने में, सहायता मिलेगी। अब, इस इकाई में प्रयुक्त कुछ चिह्नों के बारे में एक शब्द! प्रत्येक इकाई में आप प्रमेयों, उदाहरणों और सवालों को पाएंगे। किसी प्रमेय की उपपत्ति के अंत को चिह्न ■ से दर्शाया गया है। एक उदाहरण के अंत को *** से दर्शाया गया है। आगे, हर इकाई में जिन समीकरणों को संदर्भित करने की जरूरत है, उन्हें क्रमानुसार संख्याएँ दी गई हैं। यही बात इकाई में दी गई प्रश्नों और चित्रों के लिए भी की गई है। E1, E2, इत्यादि प्रश्न व्यक्त करते हैं, तथा चित्र 1, चित्र 2, इत्यादि चित्रों को व्यक्त करते हैं।

संकेत और प्रतीक (खंड 3 में प्रयोग होने वाले)

w. r. t	के सापेक्ष
$\frac{dy}{dx}, y^{(1)}, y', D(y)$	x के सापेक्ष y का प्रथम अवकलज
$\frac{d}{dx}(f(x)), f'(x)$	x के सापेक्ष f(x) का प्रथम अवकलज
$\frac{d^2y}{dx^2}, y^{(2)}, f''(x)$	x के सापेक्ष y या f(x) का द्वितीय अवकलज
$\frac{d^ny}{dx^n}, y^{(n)}, f^{(n)}(x)$	x के सापेक्ष y या f(x) का nवाँ अवकलज
$\approx$	लगभग बराबर है

साथ ही, खंड 1 और खंड 2 के संकेतों और प्रतीकों की सूची भी देखिए।

इकाई 9

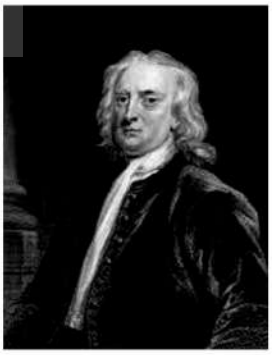
अवकलन की प्रस्तावना

इकाई की रूपरेखा — पृष्ठ संख्या

9.1	प्रस्तावना	5
	उद्देश्य	6
9.2	अवकलज	7
9.3	सांतत्य और अवकलनीयता	17
9.4	कुछ सरल अवकलन	20
	किसी अचर फलन का अवकलज	20
	घातांकीय फलन (x^n) का अवकलज	22
9.5	अवकलजों का बीजगणित	25
9.6	श्रृंखला नियम	34
9.7	त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज	37
9.8	प्रतिलोम फलनों के अवकलज	42
9.9	सारांश	48
9.10	हल / उत्तर	50

9.1 प्रस्तावना

पिछले खंड में, हमने 'सीमा' (limit) और 'सांतत्य' (continuity) की संकल्पनाओं का परिचय दिया था। हमने सीमाओं के बीजगणित तथा संतत फलनों पर संक्रियाओं के बारे में भी बात करी थी। यह इकाई इन्हीं संकल्पनाओं पर आधारित ही विकसित होगी तथा आपको कलन के आपके अध्ययन में एक कदम और आगे ले जाएगी।



चित्र 1: न्यूटन (1642-1727)

अवकलन की इस इकाई में, हम अवकलज की संकल्पना का परिचय देंगे, जो कलन का एक मूल साधन है। लेबनिज किसी दिए हुए बिंदु पर एक दी हुई वक्र की स्पर्श रेखा ज्ञात करने की समस्या द्वारा प्रत्यक्ष रूप से प्रेरित हुए, जो एक ऐसी समस्या थी जिसका वैज्ञानिक अनुप्रयोगों के लिए अत्याधिक महत्व था। उन्होंने अवकलज की एक दिए हुए बिंदु पर किसी वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता के रूप में पहचान की। इससे

पहले, दूसरी ओर, न्यूटन इस संकल्पना पर कुछ भौतिक समस्याओं, जैसे कि एक विशिष्ट क्षण पर किसी कण का वेग या त्वरण निर्धारित करने, पर विचार करने पर पहुँचे थे। उन्होंने अवकलज की भौतिक राशियों के परिवर्तन की दर के रूप में पहचान की। अब हम आपको दर्शाएँगे कि किस प्रकार ये दोनों धारणाएँ एक अनुपात की सीमा के रूप अवकलज की संकल्पना पर विकसित की जाती हैं। यह समझने के लिए कि एक अवकलज क्या होता है, आपको भाग 9.2 का पूर्ण रूप से अध्ययन करना होगा। भाग 9.3 में, आप देखेंगे कि हो सकता है कि सभी संतत फलन अवकलनीय न हों।

चित्र 2: लेबनिज (1646-1716)

भाग 9.4 में, हम अवकलज की परिभाषा का प्रयोग करते हुए, कुछ मानक फलनों का अवकलन करेंगे। अवकलजों के बीजगणित का अनेक ऐसे फलनों के अवकलजों को लिखने में प्रभावशाली तरीके से प्रयोग किया जा सकता है, जो इन फलनों के बीजीय संयोजन हैं। हम इसकी चर्चा भाग 9.5 में करेंगे। भाग 9.6 में, हम अवकलन के श्रृंखला नियम की चर्चा भी करेंगे, जो अवकलजों को ज्ञात करने की प्रक्रिया में अविश्वसनीय सरलीकरण प्रदान करता है। भाग 9.7 में, हम त्रिकाणमितीय फलनों के अवकलजों की चर्चा करेंगे। भाग 9.8 में, हम प्रतिलोम फलन प्रमेय के अध्ययन की ओर बढेंगे तथा इसका अनुप्रयोग कुछ मानक फलनों के प्रतिलोमों के अवकलज ज्ञात करने में करेंगे।

और अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात्, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

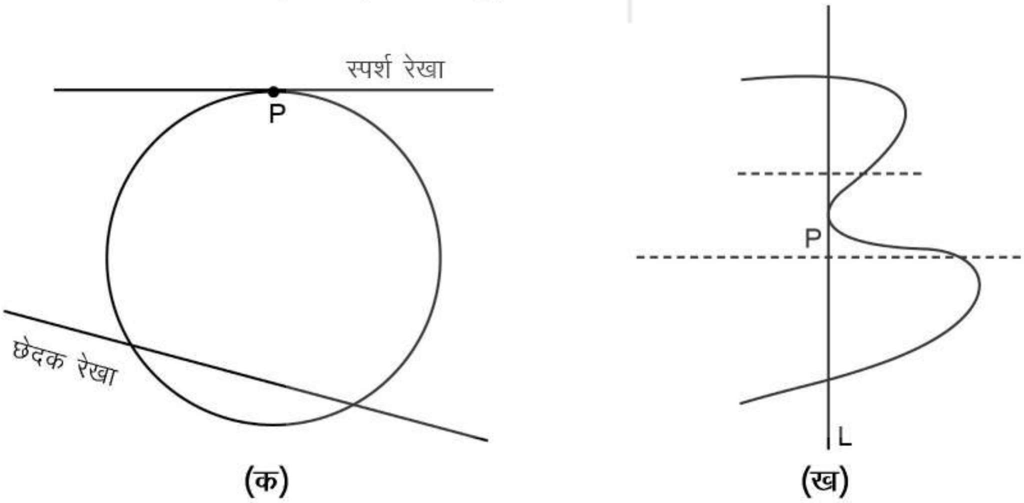
- एक दिए हुए बिंदु पर किसी वक्र की प्रवणता ज्ञात कर पाएँगे;
- एक दी हुई राशि की एक अन्य राशि के सापेक्ष परिवर्तन की दर निर्धारित कर पाएँगे;
- प्रथम सिद्धांत से कुछ सरल फलनों के अवकलज प्राप्त कर पाएँगे;
- उन फलनों के योग, अंतर, गुणनफल और भागफल के अवकलज ज्ञात कर पाएँगे, जिनके अवकलज आप पहले से जानते हैं;
- दो या अधिक फलनों के संयोजनों के अवकलजों को ज्ञात करने के लिए, अवकलन के श्रृंखला नियम को नियमित कर उसका अनुप्रयोग कर पाएँगे;
- किसी फलन के सांतत्य और अवकलजता के बीच संबंध ज्ञात कर पाएँगे;
- त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात कर पाएँगे;
- प्रतिलोम फलन प्रमेय का कथन देकर उसका अनुप्रयोग कर पाएँगे;
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात कर पाएँगे।

9.2 अवकलज

दैनिक जीवन की ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं, जहाँ यह जानना आवश्यक होता है कि किसी एक प्राचल की एक अन्य प्राचल के सापेक्ष परिवर्तन की दर क्या है। उदाहरणार्थ, किसी बाँध में बाढ़ आने की भविष्यवाणी के लिए समय के अनेक क्षणों पर जल की गहराई जानने की आवश्यकता पड़ती है, परिशुद्ध वेग अभिकलित करने के लिए विभिन्न समयों पर तय की गई दूरियों में परिवर्तन की आवश्यकता पड़ती है, इत्यादि। इस भाग में, हम एक वक्र की स्पर्श रेखा का उपयोग करते हुए, एक चर की एक अन्य चर के सापेक्ष परिवर्तन की दर ज्ञात करेंगे।

आइए एक दिए हुए बिंदु पर किसी दिए गए वक्र पर स्पर्श रेखा ज्ञात करने की समस्या पर विचार करें। एक वक्र की स्पर्श रेखा द्वारा हमारा क्या तात्पर्य है? यूक्लिड (300 ई. पू.) ने एक वक्र की स्पर्श रेखा को एक ऐसी रेखा के रूप में सोचा जो उस वक्र को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करती है। शब्द स्पर्शी (स्पर्श रेखा) लैटिन भाषा के शब्द 'टैन्जेंटम्' (tangentem) से निगमित हुआ है, जिसका अर्थ 'स्पर्श करना' है। एक वक्र को एक स्पर्श रेखा केवल एक ही बिंदु पर उसी प्रकार स्पर्श करती है जैसी कि चित्र 4 (क) में स्पर्श रेखा वृत्त को स्पर्श करती है। ऐसी रेखा जो वक्र को एक से अधिक बार काटती है उसकी **छेदक रेखा (secant line)** कहलाती है, जैसा चित्र 4 (क) मे दर्शाया गया है। चित्र 4 (ख) में, रेखा L बिंदु P को अंतर्विष्ट करने वाले छोटे अंतराल में वक्र को केवल एक ही बार स्पर्श करती है। बिंदु P, **स्पर्श बिंदु** कहलाता है। हमारा स्पर्श बिंदु से दूर रेखा के व्यवहार से कोई संबंध नहीं है। हम देखते हैं कि L वक्र के अन्य स्थानों से होकर भी जाती है, परंतु फिर भी यह बिंदु P पर वक्र की स्पर्श रेखा ही समझी जाती है।

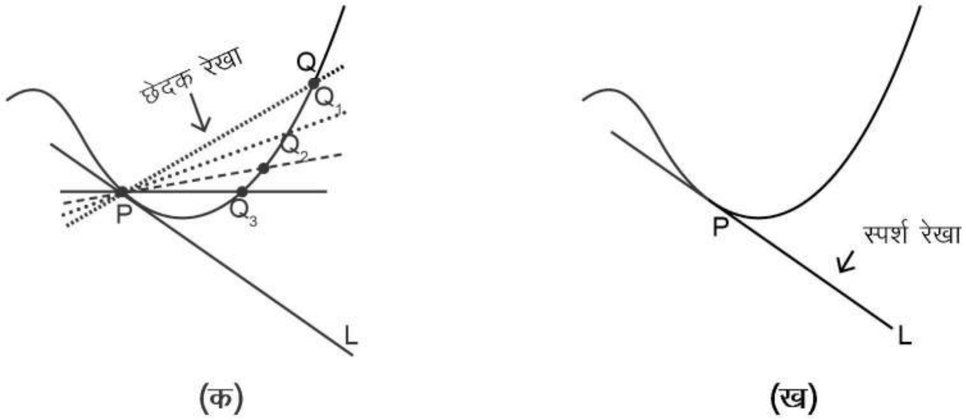
चित्र 3: यूक्लिड



चित्र 4: कुछ वक्र तथा उन पर स्पर्श रेखाएँ

अब हम P पर एक वक्र की स्पर्श रेखा को एक ऐसी रेखा के रूप में परिभाषित करते हैं, जो P के निकट वक्र का सबसे अच्छा सन्निकटन है। ऐसा करने के लिए, हम सीमा की धारणा का उपयोग करते हैं, जिसका अध्ययन आप इकाई 7 में कर चुके हैं। मान लीजिए कि चित्र 5 (क) में, वक्र पर स्थित P कोई बिंदु है। इस वक्र की बिंदु P पर स्पर्श रेखा प्राप्त करने के लिए, एक छेदक रेखा PQ पर विचार कीजिए। जैसे-जैसे बिंदु Q बिंदुओं Q_1, Q_2, इत्यादि से होकर बिंदु P की ओर अग्रसर होता है, छेदक रेखाएँ PQ_1, PQ_2 इत्यादि रेखा L की ओर अग्रसर होती जाती हैं, जैसा कि चित्र 5 (क) में दर्शाया

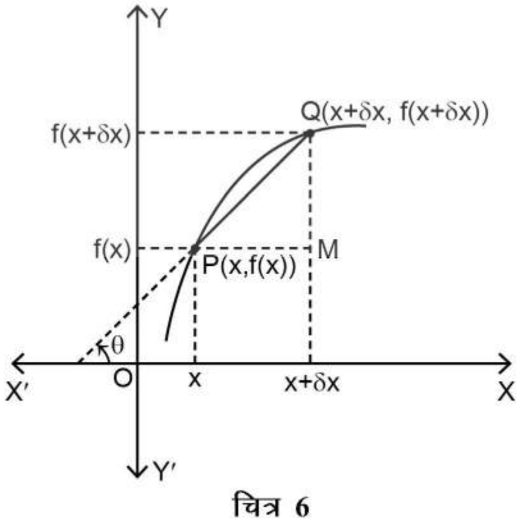
गया है। प्रत्येक छेदक रेखा की प्रवणता है। छेदक रेखाओं की प्रवणताएँ m_1, m_2, इत्यादि रेखा L की प्रवणता की ओर अग्रसर होती हैं। अब, हम रेखा L को स्पर्श रेखा के रूप में परिभाषित करते हैं, जो एक ऐसी रेखा है जिस पर बिंदु P स्थित है तथा जिसकी प्रवणता m है, जहाँ m छेदक रेखाओं की प्रवणताओं की सीमा है, जब बिंदु Q बिंदु P की ओर अग्रसर होता जाता है, जैसा कि चित्र 5 (ख) में दर्शाया गया है। प्रवणता **m** बिंदु की क्षणिक परिवर्तन-दर (instantaneous rate of charge) है।



चित्र 5: P पर स्पर्श रेखा

आप छेदक रेखाओं के अनुक्रम को एक सजीवनता (animation) के रूप में सोच सकते हैं, जबकि बिंदु Q स्थिर बिंदु P के निकटतर आता जाता है और परिणामी छेदक रेखाएँ स्पर्श रेखा पर 'अवस्थित' हो जाती हैं।

हम पहले कह चुके हैं कि बिंदु P पर स्पर्श रेखा छेदक रेखा PQ की सीमांत स्थिति है। निर्देशांक अक्षों OX और OY की पद्धति के संदर्भ में (चित्र 6), हम यह भी कह सकते हैं कि P पर स्पर्श रेखा P से होकर जाने वाली ऐसी रेखा है, जिसकी प्रवणता P और Q से होकर जाने वाली छेदक रेखा की प्रवणता का सीमांत मान है, जब वक्र के अनुदिश Q बिंदु P की ओर अग्रसर होता जाता है। जब, स्पर्श रेखा निर्धारित करने की समस्या स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करने की समस्या हो जाती है।



चित्र 6

सावधानी : δx एक अपृथक राशि है। यह $\delta \times x$ नहीं है।

मान लीजिए कि चित्र 6 में वक्र $y = f(x)$ द्वारा दिया गया है। मान लीजिए कि वक्र पर $(x, f(x))$ कोई बिंदु P है तथा मान लीजिए कि वक्र पर ही P के निकट $Q\,(x+\delta x, f(x+\delta x))$ एक अन्य बिंदु है। किसी चर राशि के आगे लगे δ का अर्थ उस राशि में एक छोटा (या सूक्ष्म) परिवर्तन है। इस प्रकार, δx का अर्थ है चर x में एक

छोटा परिवर्तन)। Q के निर्देशांक $(x+\delta x, f(x+\delta x))$ यह दर्शाते हैं कि Q वक्र f के अनुदिश P के बहुत अधिक निकट है। यदि PQ द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण θ है, तो

छेदक रेखा PQ की प्रवणता $= \tan\theta = QM / PM = \dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ है।

तब, Q के P की ओर प्रवृत्त होने पर (और इसीलिए $\delta x \to 0$), PQ की प्रवणता का सीमांत मान P पर स्पर्श रेखा की प्रवणता देता है। इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं: $(x, f(x))$ पर

स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ ... (1)

यही सीमा, x के सापेक्ष $f(x)$ की क्षणिक परिवर्तन–दर भी है। इसमें इंगित होता है कि स्पर्श रेखा का तभी अस्तित्व होगा, जबकि $\delta x \to 0$ होने पर $\dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ की सीमा का अस्तित्व होगा।

टिप्पणी 1: चित्र 6 में, हमने δx को घनात्मक लिया था। परंतु हमारी चर्चा δx के ऋणात्मक मानों के लिए भी मान्य है।

हम आगे आने वाले उदाहरण में, एक फलन के आलेख की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 1 : $f(x) = 3x - x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए। 2 पर f की क्षणिक परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $f(x) = 3x - x^2$ है। जब x=2, तब $f(2) = 2$ है।

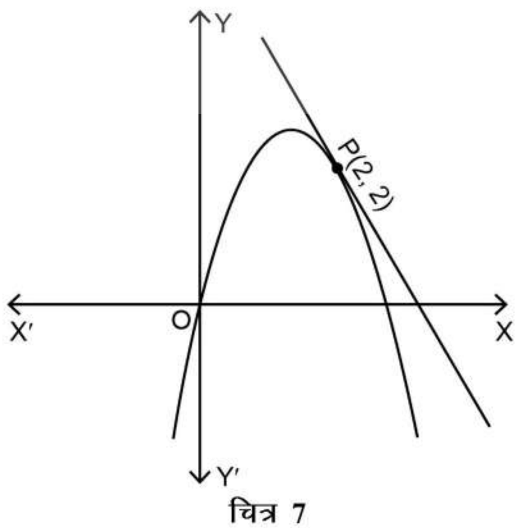
इसी प्रकार, $\dfrac{f(2+\delta x)-f(2)}{\delta x} = \dfrac{\left[3(2+\delta x)-(2+\delta x)^2\right]-2}{\delta x}$

$$= \frac{-\delta x^2 - \delta x}{\delta x} = -\delta x - 1$$

इसीलिए, $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{f(2+\delta x)-f(2)}{\delta x} = -1$ है।

अतः, हम कह सकते हैं कि

- बिंदु (2, 2) पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता -1 है, जैसा कि चित्र 7 में दर्शाया गया है।
- $x = 2$ पर क्षणिक परिवर्तन–दर -1 है।



चित्र 7

***

उदाहरण 2 : $f(x)=\frac{1}{x}$ के लिए, $x=2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

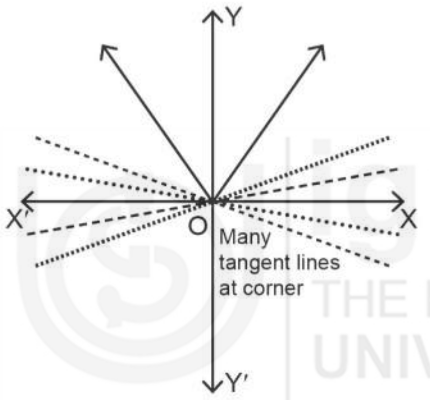
हल : हमें प्राप्त है: $\frac{f(2+\delta x)-f(2)}{\delta x}=\frac{[1/2+\delta x]-[1/2]}{\delta x}=\frac{-1}{2(2+\delta x)}$

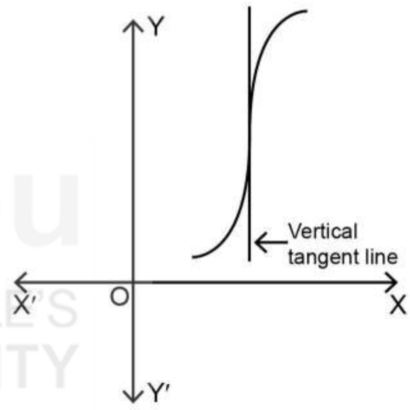
हम ज्ञात करना चाहते हैं: $\lim_{\delta x \to 0}\frac{f(2+\delta x)-f(2)}{\delta x}=\lim_{\delta x \to 0}\frac{-1}{2(2+\delta x)}=-\frac{1}{4}$

यही $x=2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

***

कुछ बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ प्राप्त करना सदैव संभव नहीं हो सकता है। वास्तव में कुछ वक्र ऐसे हैं जिनके किसी भी बिंदु पर स्पर्श रेखा प्राप्त नहीं होती है। उदाहरणार्थ, $x = 0$ पर $f(x)=|x|$ का एक कोना (सरल या मृद नहीं) होता है तथा ऐसा लगेगा कि इस वक्र की $(0, 0)$ पर अनेक स्पर्श रेखाएँ हैं और इस प्रकार चित्र 8 (क) में दर्शाए अनुसार अनेक प्रवणताएँ हैं। साथ ही, चित्र 8 (ख) में किसी भी बिंदु पर दर्शाई ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा की प्रवणता की सीमा भी अपरिभाषित है।





चित्र 8

निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E1) दिए हुए बिंदुओं पर निम्नलिखित वक्रों की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएं ज्ञात कीजिए।

i) $y=1/x, (2, 1/2)$ पर।

ii) $y=x^3, (1, 1)$ पर।

E2) क्या विभिन्नि बिंदुओं पर स्पर्श रेखा की प्रवणता वही रहती है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

आइए अब एक अन्य समस्या, अर्थात् न्यूटन के दृष्टिकोण से परिवर्तन की दर पर विचार करें। आइए एक उदाहरण से प्रारंभ करें। विचार कीजिए कि एक कार 3 घंटे में 150 km की दूरी तय करती है। उसकी औसत परिवर्तन-दर (चाल) 150 km/3h है। मान लीजिए कि यह कार एक मुक्त रास्ते पर जा रही है तथा ड्राइवर इसकी चाल में वृद्धि करना प्रारंभ कर देता है। स्पीडोमीटर (speedometer) पर दृष्टि डालने पर, यह देखा जाता है कि उस क्षण पर क्षणिक परिवर्तन-दर 50 km/h है।

अब, मान लीजिए कि कोई फलन f, $f(x)$ द्वारा परिभाषित है तथा x के मान में एक छोटे परिवर्तन अर्थात् δx पर विचार कीजिए। x में परिवर्तन $(x+\delta x)-x$ है तथा x में इस परिवर्तन के कारण f में परिवर्तन $f(x+\delta x)-f(x)$ है। जब x में परिवर्तन x से $x+\delta x$ होता है, तब x के सापेक्ष f की औसत परिवर्तन-दर f में हुए परिवर्तन का x में हुए परिवर्तन का अनुपात होती है। इस प्रकार, हम प्राप्त करते है :

x में हुए परिवर्तन δx के कारण f में हुई औसत परिवर्तन-दर $\dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{(x+\delta x)-x}$ है, जहाँ $\delta x \neq 0$ है।

x के सापेक्ष f की औसत परिवर्तन-दर **अंतर-भगफल** भी कहलाती है। परंतु इससे क्षणिक परिवर्तन-दर प्राप्त नहीं होती है। इसे हम कैसे परिकलित करते हैं?

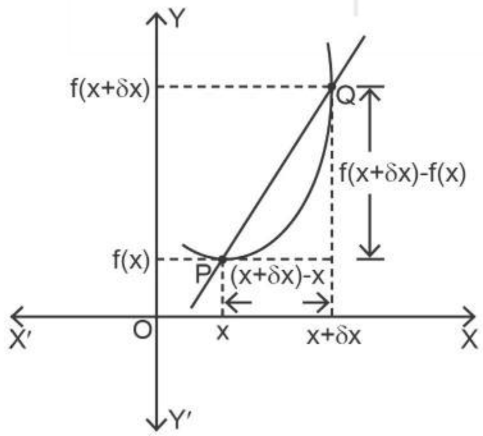
यदि δx बहुत छोटा हो, तो $x+\delta x$, x के बहुत अधिक निकट होगा और इसलिए औसत परिवर्तन-दर x पर क्षणिक परिवर्तन-दर होगी

$$x = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

इस प्रकार, x के सापेक्ष f की क्षणिक परिवर्तन दर

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \qquad ...(2)$$

यदि हम चित्र 9 में फलन के आलेख पर दृष्टि डालें, तो हम देखते हैं कि औसत परिवर्तन-दर P से Q तक की छेदक रेखा की प्रवणता है। इस प्रकार, छेदक रेखा की प्रवणता की व्याख्या x से $x+\delta x$ तक f की औसत परिवर्तन-दर के रूप में की जाती है। साथ ही, क्षणिक परिवर्तन-दर स्पर्श रेखा की प्रवणता होती है।



चित्र 9

हम निम्नलिखित उदाहरणों में औसत परिवर्तन-दर ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 3 : $f(x)=x+2\ \forall x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f की $x=0$ पर औसत परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, हम अंतराल $[0, \delta x]$ अर्थात् $\delta x > 0$ में औसत परिवर्तन-दर परिकलित करेंगे।

$[0, \delta x]$ में, f की औसत परिवर्तन-दर है :

$$\frac{f(0+\delta x)-f(0)}{(0+\delta x)-0}=\frac{f(\delta x)-f(0)}{\delta x}=\frac{\delta x+2-2}{\delta x}=\frac{\delta x}{\delta x}=1$$

अतः, $x=0$ पर f की परिवर्तन-दर, जो $\delta x \to 0$ होने पर इस औसत दर का सीमांत मान है, $=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(0+\delta x)-f(0)}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0} 1=1$

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $\delta x<0$ का प्रयोग करते हुए ऐसे ही तर्क द्वारा $x=0$ पर f की परिवर्तन–दर 1 प्राप्त हो जाती है।

***

उदाहरण 4 : मान लीजिए कि एक कण एक सरल रेखा के अनुदिश चल रहा है तथा समय t (सैकण्डों में) तय की गई दूरी s (मीटरों में) समीकरण $s=\frac{1}{2}t^2$ द्वारा दी जाती है। 2 सैकण्ड बाद, उस कण का वेग ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $s=\frac{1}{2}t^2$ है। t सैकण्ड बाद वेग $v(t)$ निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$\begin{aligned}v(t)&=\lim_{\delta t\to 0}\frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t}\ \text{m/s}\\&=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}(t+\delta t)^2-\frac{1}{2}t^2}{\delta t}\ \text{m/s}\\&=\lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{\delta t}{2}+t\right)\ \text{m/s}\\&=t\ \text{m/s}\end{aligned}$$

$\therefore$ 2 सैकण्ड बाद वेग $v(2)=2\text{m/s}$ है।

***

टिप्पणी 2 : (i) यदि ts - समतल में $s=f(t)$ के अनुसार चलने वाले एक कण का पथ दर्शाया जाता है तथा यदि इस पथ पर $t=t_1$ और $t=t_2$ के संगत बिंदु P और Q हैं, तो समय (t_2-t_1) में उस कण का औसत वेग PQ की प्रवणता द्वारा दिया जाता है तथा समय t_1 पर वेग P पर स्पर्श रेखा की प्रवणता द्वारा दिया जाता है।

(ii) दूरी सदैव लंबाई की इकाइयों (मीटर, सेंटीमीटर) में मापी जाती है और इसीलिए वेग V का वास्तविक अर्थ दूरी की V इकाइयाँ प्रति समय की इकाई होता है। स्पर्श रेखा की प्रवणता एक विमाहीन संख्या है, जबकि वेग की विमा लंबाई / समय है।

अब आप कुछ प्रश्न करने का प्रयास कर सकते हैं।

E3) वक्र $s=\left(\frac{1}{2}\right)t^2$ पर उसके ts- समतल में विचार कीजिए। t=2 पर इस वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए। साथ ही, अपने परिणाम की उदाहरण 4 में प्राप्त किए गए वेग से तुलना कीजिए।

E4) किसी कण को हवा में ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाता है। इसके द्वारा समय t में तय की गई दूरी $s(t)=ut-(1/2)\,gt^2$ द्वारा दी जाती है, जहाँ u प्रारंभिक वेग

है तथा g गुरुत्वाकर्षण के कारण त्वरण को व्यक्त करता है। किसी समय t पर उस कण का वेग ज्ञात कीजिए।

E5) किसी वृत्त का क्षेत्रफल उसकी त्रिज्या का एक फलन होता है। उसकी त्रिज्या के सापेक्ष वृत्त के क्षेत्रफल की परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए, जबकि त्रिज्या 2 cm है।

E6) $f(x) = 2x^2 + 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f की अंतराल $[1, 1+h]$ में औसत परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए तथा इससे $x = 1$ पर f की परिवर्तन-दर का मान ज्ञात कीजिए।

हम देख चुके हैं कि एक स्पर्श रेखा की प्रवणता तथा क्षणिक परिवर्तन-दर में एक उमयनिष्ठ संकल्पना निहित है। तब, क्या यह बेहतर नहीं होगा कि इस संकल्पना को एक पृथक नाम दिया जाए तथा इसका अध्ययन इसके विविध अनुप्रयोगों से पृथक करते हुए स्वतंत्र रूप से किया जाए? इसका नाम ''अवकलज'' (derivative) है तथा अब हम इसे परिभाषित करते हैं।

परिभाषा : मान लीजिए कि f एक वास्तविक-मान फलन है जिसका प्रॉंत $\mathbb{R}$ का एक उपसमुच्चय D है तथा $x \in D$ है। तब, $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ यदि इस **सीमा का अस्तित्व है तो, x पर f का अवकलज** कहलाती है। इसे प्रायः $f'(x)$ या Df से व्यक्त किया जाता है। कभी–कभी हम $f(x)$ को y से व्यक्त करते हैं। तब, हम $f'(x)$ को $\frac{dy}{dx}$ या $\frac{df}{dx}$ से व्यक्त करते हैं।

संकेतन $\frac{dy}{dx}$ लेबनिज़ द्वारा दिया गया तथा $f'(x)$ लग्रांज द्वारा दिया गया है। $f'(x)$ को "f डेश x" पढ़ा जाता है।

अब, यदि हम $f(x+\delta x) = y + \delta y$ लिखें, तो f का अवकलज $f = \lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ होगा जहाँ δy, x में परिवर्तन हुए δx के कारण y में हुए परिवर्तन को व्यक्त करता है।

ध्यान दीजिए कि f' भी एक फलन है तथा किसी बिंदु x_0 पर $f'(x)$ के मान को $f'(x_0)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार, $\mathbf{f'(x_0) = \lim\limits_{´x \to 0} \frac{f(x_0 + ´x) - f(x_0)}{\delta x}}$, यदि इस सीमा का अस्तित्व है।

यहाँ $f'(x_0)$, x के सापेक्ष x_0 पर $f(x)$ में हुए परिवर्तन का परिमाणीकरण करता है। हम $x = x_0 + \delta x$ लिखते हैं। तब, $\delta x = x - x_0$ है तथा $\delta x \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$ है। अतः, अवकलज की परिभाषा का कथन देने की एक समतुल्य विधि $\mathbf{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ है।

यदि $y = f(x)$ है, तो हम $f'(x_0)$, अर्थात् $(x = x_0)$ पर फलन f के अवकलज के लिए, संकेतनों $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ या $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ का भी प्रयोग करते हैं।

सावधानी : (i) व्यंजक $\frac{dy}{dx}$ में 'dy' और 'dx' पृथक राशियाँ नहीं हैं। अर्थात्, dx के बिना dy निरर्थक है। वास्तव में, यह $\frac{d}{dx}(y)$ है, जिसका अर्थ x के सापेक्ष y का अवकलज होता है।

(ii) आप y/x प्राप्त करने के लिए dy/dx में 'd' को निरस्त नहीं कर सकते हैं। यह संकेतन केवल इस तथ्य का सुझाव देता है कि अवकलज को एक अनुपात के रूप में प्राप्त किया गया है। आइए एक अन्य परिभाषा का कथन देते हैं।

परिभाषा : मान लीजिए कि $f: D \to \mathbb{R}$ एक फलन है। x पर फलन f अवकलजीय (या अवकलनीय) है, यदि $f'(x)$ का अस्तित्व हो। जब f अपने प्राँत D के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय हो, तब f को एक **अवकलनीय फलन** कहा जाता है। अवकलज प्राप्त करने की प्रक्रिया **अवकलन (differentiation)** कहलाती है। अनुपात $\dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ की सीमा के वास्तविक परिकलन द्वारा एक फलन का अवकलज प्राप्त करने की प्रक्रिया प्रथम सिद्धांत से अवकलन या अवकलन **एब इनिशिया (ab initio)** कहलाता है।

'Ab initio' एक लैटिन भाषा का पद है, जो 'प्रारंभ से' के लिए प्रयोग किया जाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों में और अधिक अवकलज ज्ञात करें।

उदाहरण 5 : $f(x) = 2x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ का $x = 1$ पर अवकलज ज्ञात करें।

हल : हमें प्राप्त है: $f'(1) = \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{f(1+\delta x)-f(1)}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{2(1+\delta x)-2}{\delta x} = 2$

अतः, $x = 1$ पर f का अवकलज 2 है।

***

उदाहरण 6 : $f(x) = x^2 + x - 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ के लिए, $f'(0)$ और $f'(-1)$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त है:

$$f'(0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(0+\delta x)-f(0)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{[(\delta x)^2 + \delta x - 5]-[-5]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} (1+\delta x) = 1$$

तथा

$$f'(-1) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(-1+\delta x)-f(-1)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{[(-1+\delta x)^2 + (-1+\delta x) - 5]-[(-1)^2 + (-1) - 5]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} (\delta x - 1) = -1$$

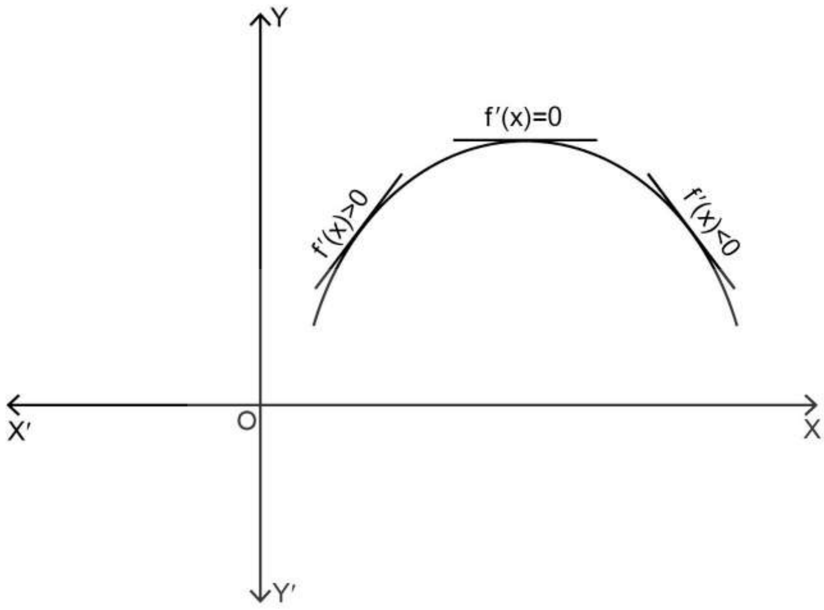
***

अब, निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E7) $f(x) = x^2 - 8x + 9$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ का बिंदु c पर अवकलज ज्ञात कीजिए।

फलन f', जो x पर $f'(x)$ को D के प्रत्येक बिंदु x से मिलाता (जोड़ता) है, f का **व्युत्पित (derived) फलन** कहलाता है, क्योंकि यह f से सीमांत संक्रिया द्वारा व्युत्पित किया गया है। इस प्रकार, f', D' से $\mathbb{R}$ तक एक फलन है, जहाँ $D' = \{x \in D : f'(x)$ का अस्तित्व है$\}$ है। f' का प्राँत f के प्राँत से छोटा हो सकता है। हम फलन f' के बारे में बात कर रहे हैं। अब, फलन f के आलेख और उसके अवकलज f' के बीच संबंध को देखना महत्वपूर्ण है। f' की परिभाषा से, यह स्पष्ट है कि बिंदु x पर जब $f'(x) > 0$ है, तब स्पर्श रेखा ऊपर की ओर झुकनी चाहिए तथा आलेख ऊपर उठता जाता है, क्योंकि स्पर्श रेखा की प्रवणता धनात्मक है। इसी प्रकार, जब $f'(x) < 0$ है, तब स्पर्श रेखा की प्रवणता ऋणात्मक है, स्पर्श रेखा नीचे की ओर झुकती है तथा आलेख नीचे गिरता

जाता है। परंतु जब $f'(x) = 0$ है, तब x पर स्पर्श रेखा क्षैतिज है और इसलिए आलेख चौरस हो जाता है। चित्र 10 इस बात को स्पष्ट करती है।



चित्र 10: f′ का चिह्न

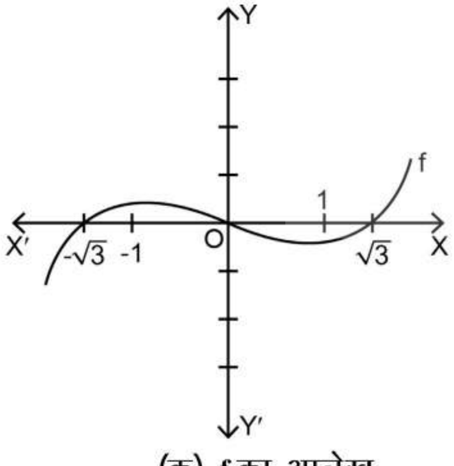
हम निम्नलिखित उदाहरणों में, f और f′ के आलेखों को देखेंगे।

उदाहरण 7 : यदि $f(x) = x^3 - 3x$ है, तो $f'(x)$ के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए। साथ ही, f और f′ के आलेखों की तुलना भी कीजिए।

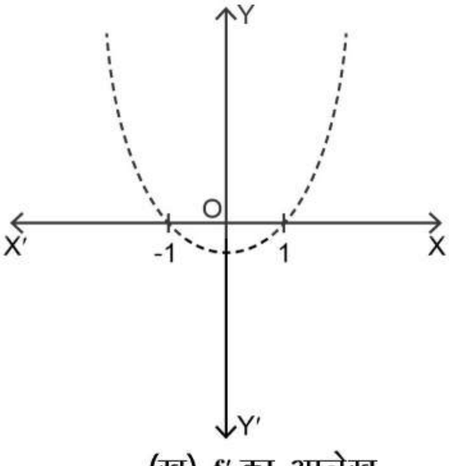
हल : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - 3(x+h)] - [x^3 - 3x]}{h}$$
$$= 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

चित्र 11 (क) फलन f के आलेख को दर्शाती है।



(क) f का आलेख



(ख) f′ का आलेख

चित्र 11

ध्यान दीजिए कि f का आलेख $x < -1$ और $x > 1$ के लिए ऊपर उठ रहा है तथा $-1 < x < 1$ के लिए नीचे गिर रहा है तथा $x = -1$ और 1 पर स्पर्श रेखाएँ क्षैतिज हैं। इस

प्रकार, f′ का आलेख x- अक्ष के ऊपर है, अर्थात् $x<-1$ और $x>1$ के लिए $f'(x)>0$ है, यह $-1<x<1$ के लिए x- अक्ष के नीचे है, अर्थात् $f'(x)<0$ है तथा $x=1$ और $x=-1$ पर यह x-अक्ष को काटता है। इन विशेषताओं का एक संभव आलेख चित्र 11 (ख) में दर्शाया गया है।

***

उदाहरण 8 : जाँच कीजिए कि $f(x)=|x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ अवकलनीय है या नहीं। यदि f′ का अस्तित्व है, तो f और f′ के आलेखों की तुलना कीजिए।

हल : i) यदि $x>0$ है, तो $|x|=x$ है तथा हम पर्याप्त छोटे δx का चुनाव कर सकते हैं ताकि $x+\delta x>0$ हों और इसीलिए $|x+\delta x|=x+\delta x$ होगा। अतः, $x>0$ के लिए, हमें प्राप्त है:

$$f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{|x+\delta x|-|x|}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{(x+\delta x)-x}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta x}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}1=1 \text{ है।}$$

तथा इसलिए किसी $x>0$ के लिए f अवकलनीय है।

ii) इसी प्रकार, $x<0$ के लिए, हमें $|x|=-x$ प्राप्त है तथा पर्याप्त छोटे δx का चुनाव किया जा सकता है ताकि $x+\delta x<0$ हो और इसलिए $|x+\delta x|=-(x+\delta x)$ है। अतः, $x<0$ के लिए, अवकलज है:

$$f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{|x+\delta x|-|x|}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{-(x+\delta x)-(-x)}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{-\delta x}{\delta x}=-1 \text{ है।}$$

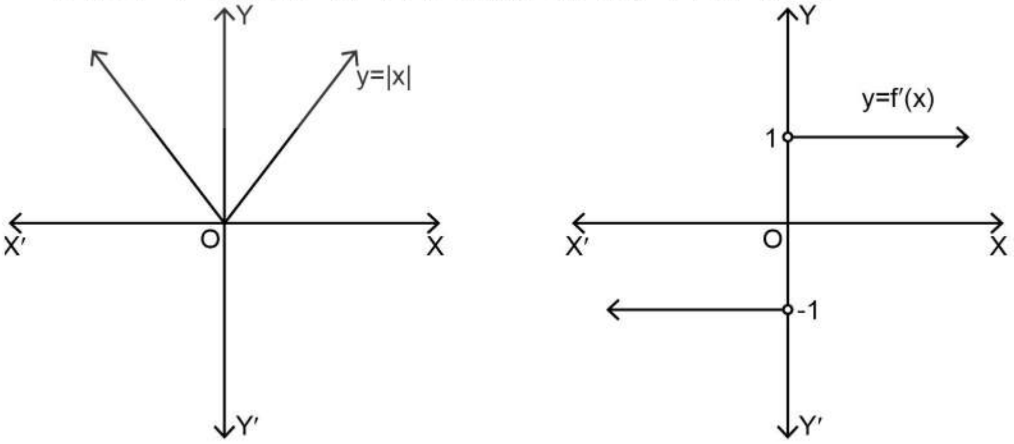
और इसलिए किसी $x<0$ के लिए f अवकलनीय है।

iii) जब $x=0$ है, तब हमें $f'(0)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(0+\delta x)-f(0)}{\delta x}$ ज्ञात करना है, यदि उसका अस्तित्व है।

यहाँ, $\lim_{\delta x\to 0^+}f'(0)=1$ है तथा $\lim_{\delta x\to 0^-}f'(0)=-1$ है। क्योंकि ये सीमाएँ भिन्न-भिन्न हैं, इसलिए f′(0) का अस्तित्व नहीं है। इस प्रकार, x के अतिरिक्त सभी x पर f अवकलनीय है। उपरोक्त से, फलन f′ निम्नलिखित रूप में परिभाषित है:

$$f'=\begin{cases}1, \text{ यदि } x>0\\ -1, \text{ यदि } x<0\end{cases}$$

f और f′ के आलेख क्रमशः चित्रों 12 (क) और (ख) में दिए गए हैं।



(क) f का आलेख **(ख) f′ का आलेख**

चित्र 12 : f और f′ के आलेख

***

अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E8) $f(x)=3x^2+2x+1$ द्वारा दिए जाने वाले f के लिए $f'(x)$ ज्ञात करने के लिए, अवकलज की परिभाषा का प्रयोग कीजिए। साथ ही, f' का संभव आलेख भी खींचिए।

E9) निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए dy/dx ज्ञात कीजिए, जहाँ भी इसका अस्तित्व है :

i) $y=x^3$

ii) $y=|x+1|$

iii) $y=\sqrt{2x+1},\ x\geq -\frac{1}{2}$

E10) दर्शाइए कि निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक $x=2$ पर अवकलजीय है। प्रत्येक स्थिति में $f'(2)$ ज्ञात कीजिए।

i) $f(x)=x$ द्वारा दिए जाने वाला $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ii) $f(x)=ax+b$ द्वारा दिए जाने वाला $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ जहाँ a और b स्थिर वास्तविक संख्याएँ हैं।

अभी तक, हमनें अवकलजों की चर्चा की है। अब, निम्नलिखित भाग में, हम सांतत्य (continuity) और अवकलनीयता के बीच एक महत्वपूर्ण संबंध स्थापित करेंगे।

9.3 सांतत्य और अवकलनीयता

आइए एक उदाहरण $f(x)=|x|$ से प्रारंभ करें। इकाई 8 में, हम सिद्ध कर चुके हैं कि फलन $y=|x|, \forall x\in\mathbb{R}$ के लिए संतत है तथा उदाहरण 8 में हमने देखा कि यह फलन $x=0$ के अतिरिक्त प्रत्येक बिंदु पर अवकलजीय है। इसका अर्थ है कि फलन $y=|x|$, $x=0$ पर संतत है परंतु इस बिंदु पर अवकलजीय नहीं है। इससे यह दर्शित होता है कि एक फलन किसी बिंदु पर अवकलजीय नहीं होते हुए भी संतत हो सकता है। परंतु, अब हम सिद्ध करेंगे कि यदि कोई फलन किसी बिंदु पर अवकलजीय है, तो उसे उस बिंदु संतत अवश्य होना चाहिए, अर्थात् अवकलजीयता $\Rightarrow$ सांतत्य है। दूसरे शब्दों में, हम निम्नलिखित प्रमेय के सत्य होने की प्रत्याशा करते हैं:

प्रमेय 1 : मान लीजिए कि किसी अंतराल I पर कोई फलन f परिभाषित है। यदि f एक बिंदु $x_0\in I$ पर अवकलजीय है, तो यह x_0 पर संतत होगा।

उपपत्ति : यह सिद्ध करने के लिए कि x_0 पर f संतत है, हमें यह दर्शाना होगा कि $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ है। हम ऐसा यह दर्शा कर करते हैं कि अंतर $f(x)-f(x_0)$, 0 की ओर अग्रसर होता है। यदि $x\neq x_0$ है, परंतु $x\to x_0$ है, तो हम $f(x)-f(x_0)$ को $(x-x_0)$ से भाग और गुणा करते हैं तथा हम लिख सकते हैं कि

$f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}(x-x_0)$ है।

क्योंकि x_0 पर f अवकलजीय है, इसलिए $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ का अस्तित्व है और यह $f'(x_0)$ के बराबर है।

इस प्रकार, जब $x \to x_0$ है, तब सीमा लेने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x \to x_0}\left\{\frac{[f(x)-f(x_0)]}{(x-x_0)}.(x-x_0)\right\}$$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \lim_{x \to x_0}(x-x_0)$$

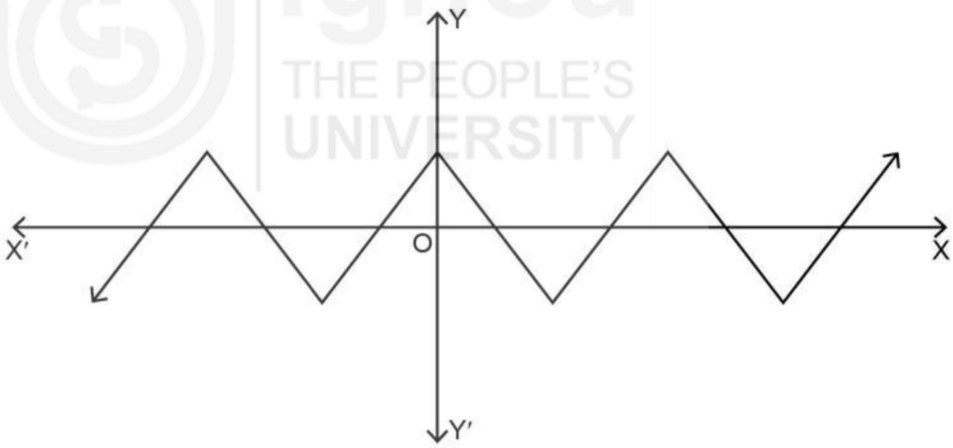
$$= f'(x_0) \times 0 = 0$$

अतः, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = 0$ है।

अर्थात् $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$ है।

इसके फलस्वरूप, x_0 पर f संतत है। ■

आप इस पर ध्यान दे सकते हैं कि प्रमेय 1 का विलोम सत्य नहीं है। ऐसे फलन हैं जो संतत हैं परंतु अवकलनीय नहीं हैं। उदाहरणार्थ, 0 पर फलन $y = |x|$ संतत है परंतु केवल बिंदु $x = 0$ पर अवकलजीय नहीं है। परंतु कुछ संतत फलन ऐसे हैं, जो अपरिमित रूप से अनेक बिंदुओं पर अवकलजीय नहीं हैं। उदाहरण के लिए चित्र 13 को देखिए।



चित्र 13

चित्र 13 एक संतत फलन के आलेख को दर्शाती है, जो अपरिमित रूप से अनेक बिंदुओं पर अवकलनीय नहीं है। क्या आप उन अपरिमित रूप से अनेक बिंदुओं को अंकित कर सकते हैं, जिन पर यह फलन अवकलजीय नहीं है? आप $y = |x|$ के आलेख से अपना संकेत ले सकते हैं।

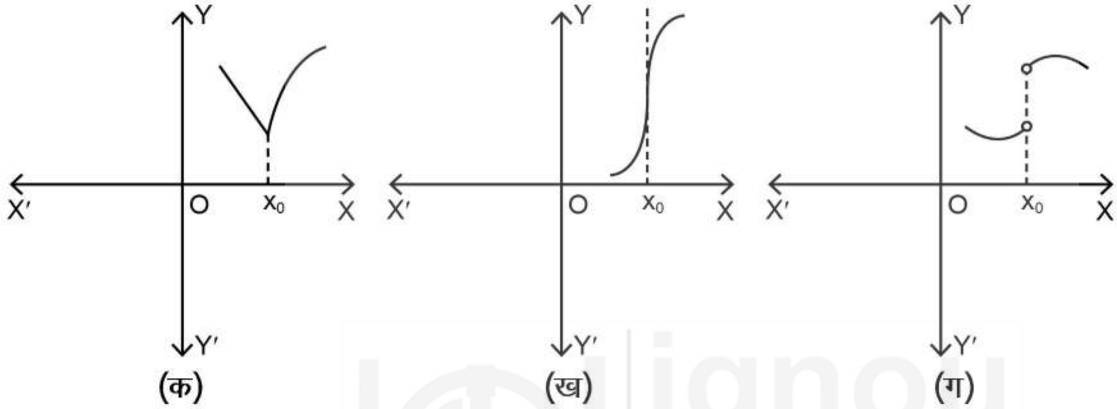
ध्यान दीजिए कि कोई फलन केवल तभी अवकलनीय होता है, जब अवकलजों की परिभाषा में सीमा का अस्तित्व हो। उन बिंदुओं पर जहाँ कोई फलन f अवकलनीय नहीं होता है, हम कहते हैं कि f के अवकलज की सीमा का उन बिंदुओं पर अस्तित्व नहीं हैं। f के प्रॉंत में किसी बिंदु x_0 पर उसके अवकलज का अस्तित्व नहीं होने के तीन सामान्य कारण नीचे दिए जा रहे हैं।

i) यदि किसी फलन f के आलेख में एक कोना होता है, तो f के आलेख की उस बिंदु पर कोई स्पर्श रेखा नहीं होती तथा वहाँ f अवकलनीय नहीं होता है।

चित्र 14 (क) एक फलन के आलेख में एक कोना दर्शाती है।

ii) यदि वक्र की $x = x_0$ पर एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा होती है, अर्थात् x_0 पर f संतत है तथा $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ या $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$ है। इसका अर्थ है कि स्पर्श रेखा, $x \to x_0$ होने पर, खड़ी (लम्बवत्) और खड़ी होती जाती है। चित्र 14 (ख) इसे दर्शा रही है।

iii) किसी फलन के अवकलजीय नहीं होने का एक अन्य कारण प्रमेय 1 देती है। यह कहती है कि यदि f, x_0 पर संतत नहीं है। तो x_0 पर f अवकलजीय नहीं होता है। इसलिए, किसी भी असंतता पर, f अवकलनीय नहीं होगा। चित्र 14 (ग) इसकी पुष्टि करती है।



चित्र 14 : x_0 पर अवकलनीय नहीं फलनों के आलेख
((क) एक कोना, (ख) एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा, (ग) एक असंततता)

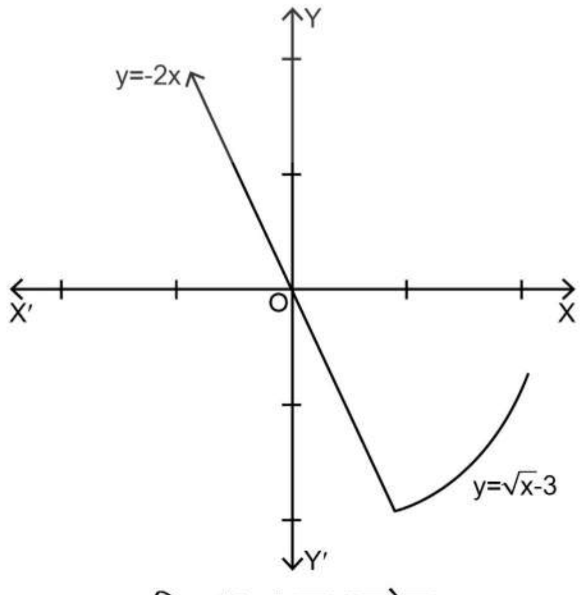
अब, हम एक फलन का अन्य उदाहरण देते हैं, जो संतत है परंतु अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण 9 : मान लीजिए कि $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{यदि } x < 1 \\ \sqrt{x} - 3, & \text{यदि } x \geq 1 \end{cases}$ है।

i) f का आलेख खींचिए।

ii) दर्शाइए कि $x = 1$ पर f संतत है परंतु अवकलनीय नहीं है।

हल : i) f का आलेख चित्र 15 में दर्शाया गया है।



चित्र 15 : f का आलेख

ii) 1 पर फलन f परिभाषित है तथा $f(1) = -2$ है। तब, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$ तथा $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$ है। इसलिए, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ है तथा फलन f, $x = 1$ पर संतत है। क्योंकि फलन f के आलेख में $x = 1$ पर एक कोना है, इसलिए इस आलेख की $x = 1$ पर कोई स्पर्श रेखा नहीं हो सकती है। इस प्रकार $x = 1$ पर f अवकलनीय नहीं है। अतः, $x = 1$ पर f संतत है परंतु अवकलनीय नहीं है।

***

ऐसे भी फलन होते हैं जो **प्रत्येक स्थान पर संतत** होते हैं परंतु कहीं भी **अवकलनीय नहीं होते।** यह खोज उन्नीसवीं शताब्दि के गणितज्ञों के लिए एक आश्चर्य के रूप में आई जो तब तक यह विश्वास करते थे कि यदि कोई फलन ऐसा है जो किसी बिंदु पर अवकलजीय नहीं है, तो वह प्रत्येक बिंदु पर संतत नहीं हो सकता। ऐसा पहला फलन 1872 में गणितज्ञ वायर्स्ट्रास (Weierstrass) द्वारा दिया गया (यद्यपि उन्होंने इसकी खोज का श्रेय रीमान (Riemann) का दिया)। उन्होंने दर्शाया कि $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ द्वारा दिया जाने वाला फलन f, जहाँ a एक विषम पूर्णांक है तथा 0 और 1 के बीच में b एक घनात्मक अचर ऐसा है कि $ab > 1 + 3\pi/2$ है, एक ऐसा फलन है, जो प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु कहीं भी अवकलजीय नहीं है। इस पाठ्यक्रम में, हम इस कथन को सिद्ध नहीं करेंगे।

अब इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E11) क्या $f(x) = \dfrac{(2x+3)^{50}}{9x+2}$ द्वारा दिए जाने वाला फलन $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $x = 0.1$ पर संतत है?

E12) एक ऐसे फलन का एक उदाहरण दीजिए, जो $]-\infty, \infty[$ पर संतत है परंतु $x = 5$ पर अवकलनीय नहीं है।

अगले भाग में, आप अचर फलन और घातांकीय फलन के लिए कुछ आधारभूत अवकलन नियमों का अध्ययन करेंगे।

9.4 कुछ सरल अवकलन

जैसा कि हम बाद में देखेंगे कि यह सदैव आवश्यक नहीं है कि एक अवकलज को प्रथम सिद्धांत से ही ज्ञात किया जाए। हम कुछ नियम विकसित करेंगे जिनका प्रयोग कुछ फलनों के अवकलजों को लिखने में किया जा सकता है। ऐसे कुछ नियम नीचे दिए अनुसार प्राप्त किए जाते हैं।

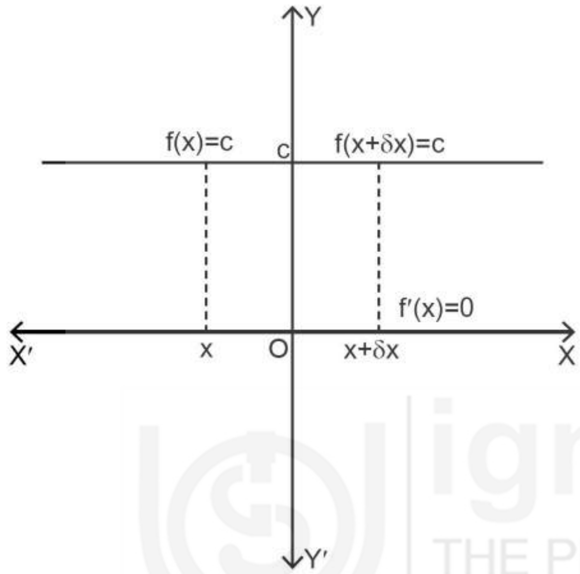
9.4.1 किसी अचर फलन का अवकलज

मान लीजिए कि $f(x) = c$ के रूप में $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए एक अचर फलन f है, जहाँ c एक वास्तविक संख्या है। आइए देखें कि क्या f' का अस्तित्व है।

$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \dfrac{c - c}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} 0 = 0$ है।

अतः, एक अचर फलन अवकलनीय होता है तथा उसके प्राँत में प्रत्येक बिंदु पर उसका अवकलज शून्य होता है।

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(c)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ है। आप इकाई 2 से, अचर फलन और उसके ज्यामितीय निरूपण का स्मरण कर सकते हैं। चित्र 16 में, यदि हम किन्हीं दो बिंदुओं P और Q को मिलाएँ, तो रेखा PQ रेखा $y=c$ है तथा यह x-अक्ष के समांतर है। अतः, PQ द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण शून्य है। इसका अर्थ है कि PQ की प्रवणता $\tan\theta=0$ है। क्योंकि जब $Q\to P$ है, तब $f'(x)$ इस प्रवणता की सीमा है, इसलिए हम $f'(x)=0$ प्राप्त करते हैं। यह f के प्राँत के किसी भी x के लिए सत्य है।



चित्र 16 : f और f′ के आलेख

हम निम्नलिखित उदाहरण में, कुछ अचर फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 10 : x के सापेक्ष निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x)=\pi\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

(ii) $f(x)=10\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

साथ ही, प्रत्येक स्थिति में, f′ के प्राँत और परिसर परिभाषित कीजिए तथा प्रत्येक स्थिति में f′ के आलेख खींचिए।

हल : i) $\frac{d}{dx}(f(x))=\frac{d}{dx}(\pi)=0$ (क्योंकि x एक अचर है) f′ का प्राँत $\mathbb{R}$ है तथा f′ का परिसर 0 है।

ii) $\frac{d}{dx}(f(x))=\frac{d}{dx}(10)=0$ है।

f′ का प्राँत $\mathbb{R}$ है तथा f′ का परिसर 0 है।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E13) निम्नलिखित के x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए:

i) $y=\sqrt{2}$

ii) $y=e$

अब, अगले उपभाग में, हम घातांकीय फलन का अवकलन करेंगे।

9.4.2 घातांकीय फलन (x^n) का अवकलज

द्विपद प्रमेय: $(a+b)^n={}^nC_0\,a^n+{}^nC_1\,a^{n-1}b+{}^nC_2\,a^{n-2}\,b^2+\ldots+{}^nC_n\,b^n.$ जहाँ n एक ऋणेतर पूर्णांक है, और a, b स्वेच्छी है।

यदि n एक घनात्मक पूर्णांक है, तो आइए x^n का अवकलज ज्ञात करें। अवकलजों की परिभाषा के अनुसार, $\frac{d}{dx}(x^n)=\lim\limits_{\delta x\to 0}\frac{(x+\delta x)^n-x^n}{\delta x}$ है।

δx के स्थान पर, चर x में एक छोटे परिवर्तन के लिए, हम अक्षर h का भी प्रयोग कर सकते हैं। वास्तव में, हम किसी भी संकेतन का प्रयोग करने के लिए स्वतंत्र हैं, परंतु δx या h सामान्यतः अधिकतर प्रयोग किए जाते हैं। तब, हम δx को h से बदल कर x^n के अवकलज को पुनः लिखते हैं।

$$\frac{d}{dx}(x^n)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+{}^nC_1hx^{n-1}+{}^nC_2h^2x^{n-2}+\cdots+h^n)-x^n}{h}\ \text{(द्विपद प्रमेय के प्रयोग से)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1}+{}^nC_2\,hx^{n-2}+\cdots+h^{n-1}\right\}$$

$$=nx^{n-1}\ [\text{क्योंकि}\ \lim_{h\to 0}\left({}^nC_2\,h\,x^{n-2}+\ldots+h^{n-1}\right)=0]$$

अतः, $\frac{d}{dx}(x^n)=D(x^n)=nx^{n-1}$ है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों में x^n का अवकलज ज्ञात करें।

उदाहरण 11 : x के सापेक्ष x^6 और x^{11} के अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{d}{dx}\underbrace{(x^6)}_{x^n}=\underbrace{6}_{n}\underbrace{x^{6-1}}_{x^{n-1}}=6x^5$

$$\frac{d}{dx}\underbrace{(x^{11})}_{x^n}=\underbrace{11}_{n}\ \underbrace{x^{11-1}}_{x^{n-1}}=11x^{10}$$

***

हम बाद में दिखाएँगे कि सभी $x>0$ के लिए $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ होता है, जहाँ n कोई वास्तविक संख्या है।

यदि $n=0$ है, तो सभी x के लिए $x^n=1$ होगा तथा इसीलिए सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए $D(x^n)=0$ होता है। इसका अर्थ है कि यह परिणाम $n=0$ के लिए तुच्छ रूप से सत्य है। अब हम इस परिणाम को $n=1/2$ लिए सिद्ध करने की स्थिति में हैं। अर्थात् $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)x^{-1/2}$ तथा इसे हम निम्नलिखित उदाहरण में कर रहे हैं।

$\sqrt{x}, x<0$ के लिए परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 12 : दर्शाइए कि $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$ द्वारा परिभाषित फलन f अवकलनीय है।

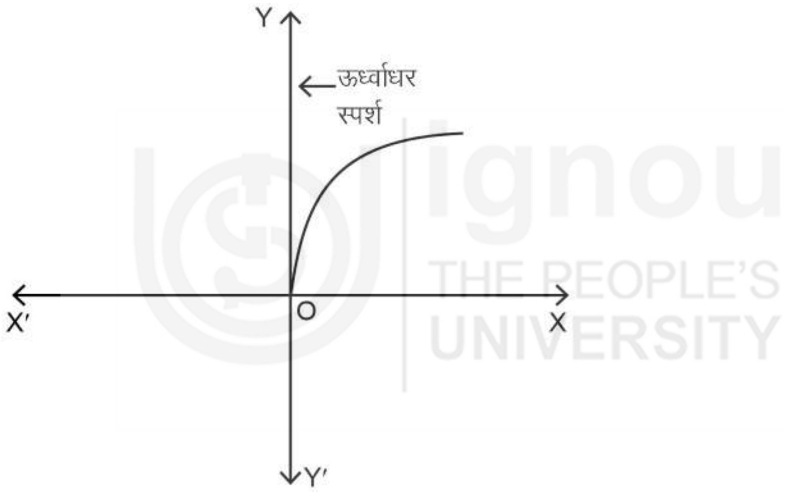
हल : हमें प्राप्त हैं: $\frac{d}{dx}(f(x))=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$ [अंश और हर को $\sqrt{x}, x < 0$ से गुणा करने पर]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}, x > 0 \text{ हैं}$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$ है। आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि $f(x) = \sqrt{x}$ सभी $x \geq 0$ के लिए परिभाषित है, जबकि अवकलज $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ सभी $x > 0$ के लिए परिभाषित है। यह दर्शाता है कि एक फलन f का उसके संपूर्ण प्राँत में अवकलनीय आवश्यक नहीं है। $x = 0$ पर क्या होता है? $x = 0$ पर फलन f की एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा है तथा ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा की प्रवणता अपरिभाषित है।



चित्र 17 : $f(x) = \sqrt{x}$ का आलेख

अब, निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E14) निम्नलिखित के x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए :

i) $y = x^8$

ii) $y = x^{1000}$

iii) $y = 10$

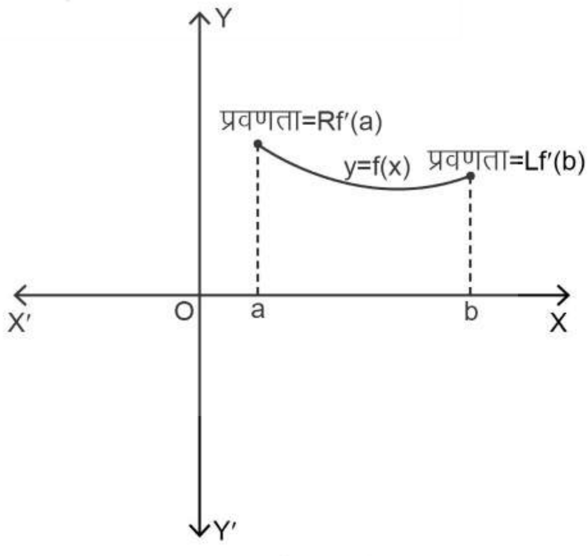
कोई फलन किसी अंतराल [a, b] में अवकलनीय कहा जाता है, यदि वह [a, b] के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय होता है। सांतत्य की स्थिति की तरह ही, अंत बिंदुओं a और b पर हम दाईं पक्ष सीमा और बाईं पक्ष सीमा लेते हैं, जो कि क्रमशः b और a पर दायाँ पक्ष अवकलज और बायाँ पक्ष अवकलज के अतिरिक्त और कुछ नहीं है। इसी प्रकार, कोई फलन अंतराल]a, b[में अवकलनीय कहा जाता है, यदि वह]a, b[के प्रत्येक बिंदु पर

अवकलनीय होता है। अर्थात्, $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ एक द्विपक्षीय सीमा है तथा एक पक्षीय सीमा केवल एक अंत बिंदु पर ही अर्थपूर्ण होती है। इस स्थिति से निपटने के लिए, हम अवकलजों को बाएँ और दाएँ से परिभाषित करते हैं। इन्हें क्रमशः f'_- और f'_+ द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा ये निम्नलिखित परिभाषा में परिभाषित हैं।

परिभाषा : (i) $f'_+(a)=Rf'(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, यदि इसका अस्तित्व है, $x=a$ पर $f(x)$ का **दायाँ पक्ष अवकलज** कहलाता है तथा इसे $Rf'(a)$ या $f'_+(a)$ के रूप में लिखा जाता है। उन बिंदुओं पर जहाँ $Rf'(a)$ का अस्तित्व है, हम कहते हैं कि फलन f दाएँ से अवकलनीय है।

ii) $f'_-(a)=Lf'(a)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, यदि इसका अस्तित्व है, $x=a$ पर $f(x)$ का **बायाँ पक्ष अवकलज** कहलाता है तथा इसे $Lf'(a)$ या $f'_-(a)$ लिखा जाता है। उन बिंदुओं पर, जहाँ $Lf'(a)$ का अस्तित्व है, हम कहते हैं कि फलन f बाएँ से अवकलनीय है। यदि हम कहते हैं कि किसी बिंदु पर फलन f के अवकलज का अस्तित्व है, तो इसका अर्थ है कि उस बिंदु पर उस फलन के बाएँ पक्ष अवकलज और दाएँ पक्ष अवकलज उस बिंदु पर फलन के मान के बराबर होने चाहिए। अर्थात्, यदि $f'(a)$ का अस्तित्व है, तो $Rf'(a)=Lf'(a)=f'(a)$ होना चाहिए।

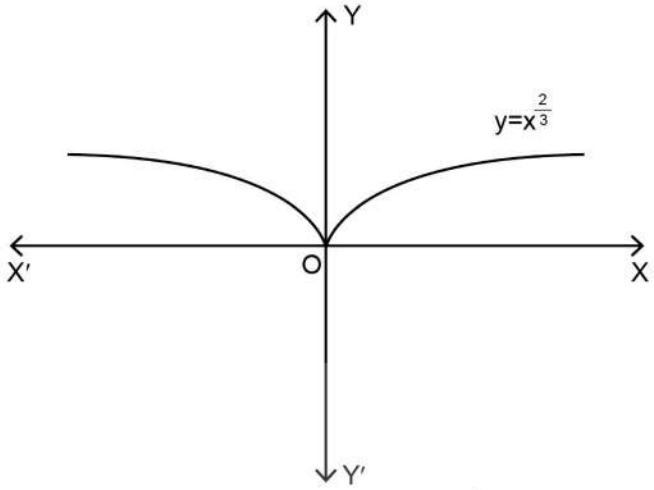
ज्यामितीय रूप से, $Rf'(a)$ दाईं ओर से a की ओर अग्रसर होती हुई छेदक रेखाओं की प्रवणताओं की सीमा है तथा $Lf'(a)$ बाईं ओर से a की ओर अग्रसर होती हुई छेदक रेखाओं की प्रवणताओं की सीमा है। चित्र 18, $Rf'(a)$ और $Lf'(a)$ के ज्यामितीय निरूपणों को दर्शाती है।



चित्र 18 : दाएँ और बाएँ अवकलज

उदाहरण 13 : $f(x)=x^{2/3}$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख खींचिए। साथ ही, जाँच कीजिए कि $x=0$ पर f अवकलनीय है या नहीं।

हल : चित्र 19 फलन f का आलेख दर्शाती है।



चित्र 19 : $f(x) = x^{2/3}$ का आलेख

आइए इसके बाएँ और दाएँ पक्ष अवकलज ज्ञात करें।

$$Rf'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(h)^{2/3} - 0^{2/3}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^{1/3}} = +\infty$$

$$Lf'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^{2/3} - 0^{2/3}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h^{1/3}} = -\infty$$

इस प्रकार, $x = 0$ पर f अवकलनीय नहीं है। चित्र 19 यह दर्शाती है कि $f(x) = x^{2/3}$ के आलेख में $x = 0$ पर एक कोना है तथा एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा भी है। इसलिए, $x = 0$ पर फलन f अवकलनीय नहीं है।

***

अब, आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E15) जाँच कीजिए कि $f(x) = x^{1/3}$ द्वारा दिया जाने वाला फलन f, $x = 0$ पर अवकलनीय है या नहीं।

अभी तक, हमने कुछ फलनों के अवकलज प्रथम सिद्धांत से अवकलन द्वारा प्राप्त किए हैं। जब पुराने फलनों को जोड़ने, घटाने और एक अचर द्वारा गुणा करने पर नए फलन प्राप्त होते हैं, तब उनके अवकलज पुराने अवकलजों के पदों में परिकलित किए जा सकते हैं। हम इन नए फलनों के अवकलज अगले भाग में ज्ञात करेंगे।

9.5 अवकलजों का बीजगणित

$f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{x^4 - 1}$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। यदि हम इस फलन का प्रथम सिद्धांत से अवकलज ज्ञात करने का प्रयास करें, तो हमें लंबे जटिल परिकलन करने पड़ेंगे। परंतु इस फलन पर निकट से एक, दृष्टि डालने पर पता चलता है कि यह अनेक फलनों से मिल कर बना है। ये फलन हैं: अचर फलन जैसे 2, 3 और -1 तथा घातांकीय फलन जैसे x^3, x^2 और x^4 । इन फलनों के अवकलजों को हम पहले से ही जानते हैं। क्या हम इस ज्ञान का $f(x)$ का अवकलज ज्ञात करने में प्रयोग कर सकते हैं?

इस भाग में, हम इससे संबंधित कुछ प्रमेयों के कथन देंगे तथा उन्हें सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 2 (अचर गुणज नियम) : यदि f एक अवकलनीय फलन है तथा $c \in \mathbb{R}$ है, तो cf अवकलनीय होता है और $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$ है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन है और मान लीजिए कि $c \in \mathbb{R}$ है। तब, फलन $y = cf$ पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि f अवकलजीय है। इसलिए, $f'(x)$ का अस्तित्व है। अब, x के सापेक्ष y का अवकलज है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[cf(x)]}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(cf)(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= c\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \text{ [क्योंकि c अचर है।]}$$

$$= c f'(x) = c\frac{d}{dx}[f(x)].$$

इस प्रकार, cf अवकलनीय है तथा $(cf)' = cf'$ है। ■

उदाहरण 14 : $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

i) $y = -x^2$

ii) $y = \frac{3}{4}x^{10}$

iii) $y = \frac{1}{2x^2}$

हल : i) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(-x^2)}_{c.f(x)} = \underbrace{(-1)}_{c}\frac{d}{dx}\underbrace{(x^2)}_{f(x)} = -2x$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\frac{3}{4}x^{10}\right)}_{c.f(x)} = \underbrace{\frac{3}{4}}_{c}.\frac{d}{dx}\underbrace{(x^{10})}_{f(x)} = \frac{3}{4}.10x^9 = \frac{15}{2}x^9$

iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\frac{1}{2}x^{-2}\right)}_{c.f(x)} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{c}\frac{d}{dx}\underbrace{(x^{-2})}_{f(x)} = \frac{1}{2}.(-2)x^{-2-1} = -x^{-3}$

$\frac{1}{2x^2}$ जैसे व्यंजक को $(2x)^{-2}$ लिखने की एक सामान्य गलती की जाती है, जो सही नहीं है। घातांक 2 केवल x के लिए है तथा 2 गुणांक $\frac{1}{2}$ का भाग है।

***

उदाहरण 15 : किसी गोलाकार टयूमर के आयतन V को $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ द्वारा सन्निकट किया जा सकता है, जहाँ r उस टयूमर की cm में त्रिज्या है।

i) त्रिज्या के सापेक्ष आयतन की परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए।

ii) $r = 1.5\text{cm}$ पर आयतन की परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए।

हल : i) $\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

ii) $V'(1.5) = 4\pi(1.5)^2 \approx 28\,\text{cm}^2$

इस प्रकार, जब त्रिज्या 1.5 cm है, तब आयतन त्रिज्या में प्रत्येक 1 cm के परिवर्तन के लिए, 28 cm^3 की दर से परिवर्तित हो रहा है।

***

अब निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E16) प्रमेय 2 का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए :

i) $y = (5/3)x^3$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

ii) $y = 8\sqrt{x}$, सभी $x > 0$ के लिए

iii) $y = \sqrt{2}|x|$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

E17) $y = 7|x|$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

आइए अब दो या अधिक फलनों के योग के अवकलज की चर्चा करें।

प्रमेय 3 (योग नियम) : दो अवकलनीय फलनों f और g का योग एक अवकलनीय फलन होता है तथा $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$ होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक f और g दो अवकलनीय फलन हैं। आइए इसकी जाँच करें कि इन फलनों f और g का योग f + g अवकलनीय है या नहीं। अब,

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$

$$= f'(x)+g'(x)$$

इस प्रकार, हमने इस प्रमेय को सिद्ध कर लिया है। ■

उपरोक्त परिणाम को कितने भी फलनों के योग के लिए सरलता से विस्तृत किया जा सकता है, अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f_1+f_2+\cdots+f_n) = \frac{df_1}{dx}+\frac{df_2}{dx}+\cdots+\frac{df_n}{dx}$$ जहाँ

$f_1, \ldots, f_n$ अवकलनीय फलन हैं।

टिप्पणी 3 : प्रमेय 2 और प्रमेय 3 से, यह निष्कर्ष निकलता है कि यदि f और g अवकलनीय फलन हैं, तो $f-g$ भी एक अवकलनीय फलन होता है
(क्योंकि $-g = (-1)g$ और $f-g = f+(-g)$) है तथा $(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)$ है।

आइए देखें कि प्रमेय 2 किस प्रकार निम्नलिखित उदाहरण में उपयोगी है।

उदाहरण 16: निम्नलिखित के x के सापेक्ष अवकलन कीजिए :

i) $x^6 + 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 10$

ii) $12x - \sqrt{x} + \frac{5}{x}$

हल : i) $\frac{d}{dx}(x^6 + 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 10)$

$$= \frac{d}{dx}(x^6) + \frac{d}{dx}(6x^5) + \frac{d}{dx}(-4x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}10 \qquad \text{[प्रमेय 3 के प्रयोग से]}$$

$$= 6x^5 + 6\frac{d}{dx}(x^5) + (-4)\frac{d}{dx}(x^3) + 2\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(10) \qquad \text{[प्रमेय 2 के प्रयोग से]}$$

$$= 6x^5 + 6(5x^4) - 4(3x^2) + 2(2x) + 0$$

$$= 6x^5 + 30x^4 - 12x^2 + 4x$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(x^6 + 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 10) = 6x^5 + 30x^4 - 12x^2 + 4x$ है।

ii) $\frac{d}{dx}\left(12x - \sqrt{x} + \frac{5}{x}\right) = 12.\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(x^{1/2}) + 5\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= 12.1 - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 5(-1)x^{-1-1}$$

$$= 12 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}\left(12x - \sqrt{x} + \frac{5}{x}\right) = 12 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$ है।

***

अब, आप इन प्रश्नों को हल करने की स्थिति में हैं।

E18) निम्नलिखित को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए :

i) $5x^3 - 2x + 6$

ii) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ जहाँ $a_1 \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ के लिए है।

E19) वक्र $y = x^4 - 8x^2 + 4$ पर वे बिंदु ज्ञात कीजिए, जहाँ स्पर्श रेखा क्षैतिज है।

अब, दो फलनों के गुणनफल का अवकलज निम्नलिखित प्रमेय में है।

प्रमेय 4 (गुणनफल नियम) : दो अवकलनीय फलनों का गुणनफल पुनः एक अवकलनीय फलन होता है तथा किसी बिंदु x पर इसका अवकलज सूत्र $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ द्वारा दिया जाता है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ पर f और g दो अवकलनीय फलन हैं। हम ज्ञात करना चाहते हैं कि क्या गुणनफल fg भी अवकलनीय है।

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + \{g(x+h) - g(x)\}f(x)}{h}$$ [हमने $f(x)g(x+h)$ को जोड़ा और घटाया है।]

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) \right\} + \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \to 0} g(x+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \lim_{h \to 0} f(x)$$

$$= \frac{df(x)}{dx} g(x) + \frac{dg(x)}{dx} f(x)$$

$$= f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

अतः, $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ है। ■

हम इस परिणाम को तीन अवकलनीय फलनों के गुणनफल के लिए लागू कर सकते हैं। इससे हमें $(fgh)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$ प्राप्त होता है।

आप देखते हैं कि आपको एक समय पर केवल एक फलन को ही अवकलित करना पड़ता है। इस परिणाम को किसी भी परिमित संख्या वाले अवकलनीय फलनों के गुणनफल के लिए भी लागू किया जा सकता है। इस प्रकार, यदि $f_1, f_2 \ldots, f_n$ अवकलनीय फलन हैं, तो

$(f_1 f_2 \ldots f_n)'(x) = f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) f_3(x) \ldots f_n(x) + \cdots + f_1(x) f_2(x) \ldots f_n'(x)$ होता है।

सावधानी : गुणनफल नियम में, $(fg)' \neq f'g'$ है जो कि अवकलन के योग के नियम में होता है। यह उससे भिन्न है।

प्रमेय 4 परिकलनों के सरलीकरण में बहुत उपयोगी है, जैसा कि आप अगले उदाहरण में देख सकते हैं।

उदाहरण 17 : निम्नलिखित को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए :

i) $x^2(x+4)$

ii) $(x^2 + 2x - 9)(3x^3 - \sqrt{x})$

हल : i) हम $f(x) = x^2$ और $g(x) = x + 4$ लेते हैं। हम इनमें से प्रत्येक को अवकलित करके $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ तथा

$g'(x) = \frac{d}{dx}(x+4) = \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(4)}{dx} = 1 + 0 = 1$ प्राप्त करते हैं।

गुणनफल नियम से, दिए हुए फलन का अवकलज है :

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^2(x+4)) = 2x(x+4) + 1 \times x^2$$

$$= 2x^2 + 8x + x^2$$

$$= 3x^2 + 8x$$ है।

$$\text{ii)}\ \frac{d}{dx}[(x^2+2x-7)(3x^3-\sqrt{x})] = (x^2+2x-7).\frac{d}{dx}(3x^3-\sqrt{x})$$

$$+(3x^3-\sqrt{x}).\frac{d}{dx}(x^2+2x-7)$$

$$=(x^2+2x-7).\left(9x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+(3x^3-\sqrt{x}).(2x+2)$$

टिप्पणी 4 : आप बिना प्रमेय 4 का प्रयोग किए $x^2(x+4)$ को निम्नलिखित प्रकार से भी अवकलित कर सकते थे :

$$x^2(x+4) = x^3+4x^2$$

अतः, $\frac{d}{dx}\{x^2(x+4)\} = \frac{d}{dx}(x^3+4x^2)$

$$=\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(4x^2) \quad \text{[प्रमेय 3 द्वारा]}$$

$$=3x^2+4(2x)=3x^2+8x$$

इससे यह प्रदर्शित होता है कि एक ही फलन को विभिन्न विधियों का प्रयोग करके अवकलित किया जा सकता है। आप किसी भी विधि का, जो आपको सुविधाजनक लगे प्रयोग कर सकते हैं। यह प्रेक्षण आपको अपने परिणाम की सत्यता की जाँच करने में सहायता कर सकता है। (हम यह कल्पना कर रहे हैं कि आप दो विभिन्न विधियों का प्रयोग करते समय एक भी गलती नहीं करेंगे।)

***

उदाहरण 18 : $f(t)=\sqrt{t}(2+3t), t>0$ द्वारा परिभाषित फलन f को t के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : $\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{t}(2+3t)\right]$

$$=\frac{d}{dt}(2\sqrt{t}+3t^{3/2})$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{t}}+\frac{3\sqrt{t}}{3/2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{t}}+2\sqrt{t}$$

***

आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E20) प्रमेय 4 का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित फलनों को अवकलित कीजिए। साथ ही, इन फलनों को प्रमेय 4 का प्रयोग किए बिना भी अवकलित कीजिए तथा दोनों परिणामों की तुलना भी कीजिए।

i) $x\sqrt{x}$

ii) $(x^5+2x^3+5)^2$

iii) $(x+1)(x+2)(x+3)$

E21) यदि $f(x)=x\,g(x)$ है तथा यह ज्ञात है कि $g(3)=2$ और $g'(3)=5$ है, तो $f'(3)$ ज्ञात कीजिए।

हम अगली प्रमेय में, दो फलनों के भागफल के अवकलज की चर्चा करेंगे।

प्रमेय 5 (भागफल नियम) : दो अवकलनीय फलनों f और g का भागफल f/g ताकि अपने प्रांत के किसी भी x के लिए $g(x)\neq 0$ हो, पुनः एक अवकलनीय फलन होता है तथा किसी बिंदु x पर उसका अवकलज $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ द्वारा दिया जाता है।

इसे निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}\right)=\frac{(\text{हर})(\text{अंश का अवकलज})-(\text{अंश})(\text{हर का अवकलज})}{(\text{हर})^2}$$

उपपत्ति : मान लीजिए कि $\phi=f/g$ है, जहाँ $\mathbb{R}$ पर f और g अवकलनीय फलन हैं तथा $g(x)\neq 0$ है। तब,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{d\phi(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(f/g)(x+h)-(f/g)(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h.g(x)g(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x)\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}-f(x)\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\right]}{g(x+h)\,g(x)}$$ [अंश में $f(x)g(x)$ जोड़ने और घटाने पर]

$$=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\left[\left\{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}-f(x)\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\right]}{\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)\,g(x)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\left[g(x)\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\right]-\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x)\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\right]}{\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)\lim\limits_{h\to 0}g(x)}$$

$$=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

इस प्रकार $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, यदि $g(x)\neq 0$ है। ■

अब हम प्रमेय 5 की एक महत्वपूर्ण उपप्रमेय प्राप्त करेंगे।

उपप्रमेय 1 : यदि g कोई ऐसा फलन है कि उसके प्राँत के किसी भी x के लिए, $g(x)\neq 0$ है। तो $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$ होता है।

उपपत्तिः प्रमेय 5 में, हम f को अचर फलन 1 लेते हैं। तब, सभी x के लिए, $f'(x)=0$ है। इसलिए,

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)\times 0-1\times g'(x)}{\{g(x)\}^2}\left(\text{क्योंकि}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}\text{ जहाँ } f(x)=1\right)$$

$$= \frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2} \text{ है।}$$ ■

जैसा कि हमने कहा था कि किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए, x^n का अवकलज ज्ञात किया जा सकता है। अगले उदाहरण में, हम भागफल नियम का प्रयोग करते हुए किसी ऋणात्मक पूर्णांक x के लिए, x^n का अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 19 : दर्शाइए कि $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ है, जहाँ x एक ऋणात्मक पूर्णांक है तथा $x \neq 0$ है।

हल : $f(x) = x^{-m}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए, जहाँ $m \in \mathbb{N}$ है। तब, $f(x) = 1/x^m \forall x \in \mathbb{R}$ है। इस प्रकार $f = 1/g$ है, जहाँ सभी $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ के लिए $g(x) = x^m$ है। g एक अवकलनीय फलन है तथा $g(x) \neq 0$ है, यदि $x \neq 0$ है। अतः, $x = 0$ के अतिरिक्त, हम पाते हैं कि

$$f'(x) = \frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad [\text{उपप्रमेय 1 से}]$$

$$= \frac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2} [\text{क्योंकि } g'(x) = mx^{m-1} \text{ है}]$$

$$= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}$$

$-m$ को n से व्यक्त करने पर, हम $f(x) = x^n$ और $f'(x) = nx^{n-1}$ प्राप्त करते हैं।

***

अगले उदाहरण में, हम एक परिमेय फलन का अवकलज ज्ञात करने के लिए, भागफल नियम का अनुप्रयोग करेंगे।

उदाहरण 20 : $f(x) = (x^3 + 2)/(x^2 + 2x)$ द्वारा दिए जाने वाले फलन को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : हम f को भागफल g/h के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ $g(x) = (x^3 + 2)$ और $h(x) = x^2 + 2x$ है। यहाँ $h(x) = 0$ है, जब $x = 0, -2$ है। इस प्रकार, यह फलन $x = 0, -2$ के अतिरिक्त, अवकलनीय है।

अब, $g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2) = 3x^2 + 0 = 3x^2$ है।

साथ ही, $h'(x) = 2x + 2$ है।

अतः, $$f'(x) = \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{\{h(x)\}^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 2x)(3x^2) - (x^3 + 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 6x^3 - 2x^4 - 2x^3 - 4x - 4}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 4x^3 - 4x - 4}{(x^2 + 2x)^2} \text{ यदि } x \neq 0, -2 \text{ है।}$$

***

सावधानी : आप जब भी एक भागफल देखें, तब प्रत्येक बार आपको भागफल नियम का प्रयोग नहीं करना चाहिए। कभी–कभी एक भागफल को ऐसे रूप पुनः लिखना सरल होता है, जिससे अवकलन करने में सरलता होती है। उदाहरणार्थ, $f(x)=\frac{2x^3+3x}{\sqrt{x}}$ को पुनः $f(x)=2x^{5/2}+3x^{1/2}$ के रूप में लिखा जा सकता है तथा $f(x)$ के इस रूप को अवकलित करना अधिक सरल है।

उदाहरण 21 : किसी छोटे शहर की, हजारों में, जनसंख्या को $P(t)=\frac{500t}{2t^2+9}$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ t वर्षों में समय है।

i) वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

ii) 12 वर्ष बाद जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

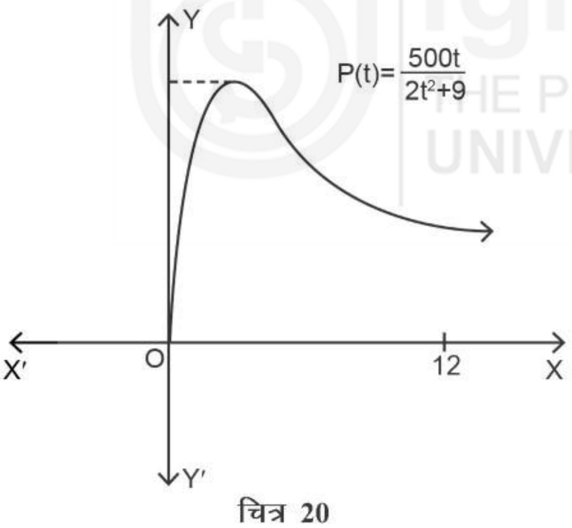
iii) $t=12$ वर्ष पर वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

हल : i) वृद्धि दर $P'(t)=\frac{4500-1000t^2}{(2t^2+9)^2}$ है।

ii) $P(12)=\frac{6000}{288+9}=\frac{6000}{297}\approx 22$

iii) $P'(12)=\frac{4500-144000}{(297)^2}=-\frac{139500}{88209}\approx -1.6$

जनसंख्या फलन चित्र 20 में दिया है।



चित्र 20

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E22) निम्नलिखित को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए :

i) $\frac{2x+1}{x+5}$, यदि $x\neq 5$ है।

ii) $\frac{1}{a+bx+cx^2+dx^3}$, जहाँ a, b, c और d स्थिर वास्तविक संख्याएँ है। यदि $a+bx+cx^2+dx^3\neq 0$ है।

iii) $\frac{2x^3+3x^2}{x^4-1}$ यदि $x^4-1\neq 0$ है।

E23) यह कल्पना करते हुए कि किसी x के लिए $f(x) \neq 0$ है, प्रथम सिद्धांत से $1/f(x)$ का अवकलज प्राप्त कीजिए।

E24) $f(x) = \dfrac{2+5x+7x^{-1}}{x^5}$ को तीन विभिन्न विधियों द्वारा अवकलित कीजिए।

कभी–कभी, हमें ऐसे फलनों को अवकलित करने के लिए कहा जाता है, जिनमें प्रत्यक्ष रूप से अवकलन के किसी भी नियम का अनुप्रयोग नहीं किया जा सकता है। उदाहरण, के लिए यदि $f(x) = \sqrt{x+1}$ है, तो हम प्रत्यक्ष रूप से किसी भी नियम का प्रयोग करके अवकलज ज्ञात नहीं कर सकते हैं। परंतु यदि आप $f(x)$ को ध्यान से देखें, तो आप पाएँगे कि यह एक संयोजित फलन है [संयोजित फलनों के लिए, इकाई 2 का स्मरण कीजिए]। अर्थात्, $g(t) = \sqrt{t}$ और $t = h(x) = x+1$ है। हम इसे $f = g \circ h$ भी लिख सकते हैं। यदि फलन g और h अवकलनीय हैं तथा हम उनके अवकलज ज्ञात कर सकते हैं, तो श्रृंखला नियम का प्रयोग करते हुए हम f का अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। अतः, अवकलन का श्रृंखला नियम संयोजित फलनों के अवकलनों के लिए एक नियम है। यह एक अद्भुत नियम है, जो जटिल फलनों को सरल और सुंदर प्रकार से अवकलित करने में हमारी सहायता करता है। निम्नलिखित भाग में, हम श्रृंखला नियम की चर्चा करेंगे।

9.6 श्रृंखला नियम

हम निम्नलिखित प्रमेय में इस नियम को स्थापित करेंगे।

प्रमेय 6 (श्रृंखला नियम) : मान लीजिए कि $y = g(u)$ और $u = f(x)$ है। यदि dy/du और du/dx दोनों का अस्तित्व है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ का अस्तित्व है तथा इसे $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$ द्वारा दिया जाता है।

उपपत्ति : सर्वप्रथम, हम देखते हैं कि $y = g(u) = g(f(x)) = gof(x)$ है, जिससे y संयोजित फलन $g \circ f$ हो जाता है। हमें दिया है कि y, u का एक फलन मानते हुए, अवकलनीय है। हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि y, x का एक फलन मानते हुए, भी अवकलनीय है। ऐसा करने के लिए, हमें यह दर्शाना चाहिए कि $\lim\limits_{\delta x \to 0} \delta y / \delta x$ का अस्तित्व है, जहाँ δy चर x में हुए परिवर्तन δx के संगत चर y में हुआ परिवर्तन है।

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0} \delta u = \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\delta x\right) = \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta u}{\delta x} \times \lim_{\delta x \to 0} \delta x\right.$$

$$= \frac{du}{dx} \times 0 = 0. \text{ इसका अर्थ है कि } \delta u \to 0 \text{ जबकि } \delta x \to 0.]$$

$$= \lim_{\delta u \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

इसलिए $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ है।

अतः, dy/dx का अस्तित्व है और यह $\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ के बराबर है, अर्थात् यह u के सापेक्ष y के अवकलज तथा x के सापेक्ष u के अवकलज के गुणनफल के बराबर है। आप इस नियम को सुविधाजनक रूप से याद रख सकते हैं तथा इसे निम्नलिखित रूप में प्रयोग कर सकते हैं:

यदि $h(x)=g(f(x))$ दो अवकलनीय फलनों g और f का संयोजन है, तो h अवकलनीय है तथा $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ है।

इस नियम को स्पष्ट करने के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण को हल करने का प्रयास करें।

उदाहरण 21: $y=(2x+1)^3$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $u=2x+1$ है। तब, $y=(2x+1)^3=u^3$ है। अब, u का y एक अवकलनीय फलन है तथा x का u एक अवकलनीय फलन है। $\frac{dy}{du}=3u^2$ है और $\frac{du}{dx}=2$ है। अतः, हम श्रृंखला नियम का प्रयोग करते हुए, प्राप्त कर सकते हैं कि $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=3u^2.2=6u^2=6(2x+1)^2$ है।

***

आप यह सोच रहे होंगे कि वास्तव में यहाँ श्रृंखला नियम का प्रयोग करने की कोई आवश्यकता नहीं थी। हम केवल $(2x+1)^3$ का प्रसार करके अवकलज लिख सकते थे। परंतु स्थिति सदैव इतनी सरल नहीं होती जितनी इस उदाहरण में है। आप श्रृंखला नियम की शक्ति की सराहना अगले उदाहरण में इसका प्रयोग करने के बाद करेंगे।

उदाहरण 22: $(x^3+2x^2-1)^{100}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल: मान लीजिए कि $y=(x^3+2x^2-1)^{100}$ है तथा मान लीजिए कि

$u=(x^3+2x^2-1)$ है। तब, $y=u^{100}$ है। क्योंकि $\frac{dy}{du}$ और $\frac{du}{dx}$ दोनों का अस्तित्व है, तथा $\frac{dy}{du}=100u^{99}$ है और $\frac{du}{dx}=3x^2+4x$ है, इसलिए श्रृंखला नियम द्वारा,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$=100u^{99}.(3x^2+4x)$$
$$=100(x^3+3x^2-1)^{99}(3x^2+4x) \text{ है।}$$

***

हमारा अगला उदाहरण यह स्पष्ट करता है कि इस नियम को तीन फलनों के संयोजन के लिए भी लागू कर सकते हैं।

उदाहरण 23 : $\{(5x+2)^{10}+3\}^4$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : हम $y=\{(5x+2)^{10}+3\}^4$, $u=(5x+2)^{10}+3$ तथा $v=5x+2$ लिखते हैं। तब, $y=u^4$ तथा $u=v^{10}+3$ है। अर्थात् u का एक फलन y है, v का एक फलन u है तथा x का एक फलन v है। श्रृंखला नियम को लागू करने पर, हम $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$ प्राप्त करते हैं

इससे प्राप्त होता है:

$$\frac{dy}{dx} = (4u^3)(10v^9).(5) = 200\,u^3v^9$$

$$= 200[(5x+2)^{10}+3]^3\,(5x+2)^9$$

***

यह उदाहरण यह स्पष्ट करता है कि ऐसी भी स्थितियाँ आ सकती हैं जिनमें हम फलन के फलन के फलन.... इत्यादि के लिए श्रृंखला नियम का प्रयोग भी कर सकते हैं। शायद यही श्रृंखला नियम नाम को सार्थक करता है। इस प्रकार, यदि $g_1, g_2, \ldots, g_n$ और h ऐसे फलन हैं कि $h = (g_1 o g_2 o \ldots o g_n)(x)$ है, तो $h'(x) = g_1'(g_2 o \ldots o g_n)(x) g_2'(g_3 o \ldots o g_n)(x) \ldots g_{n-1}'(g_n)(x).g_n'(x)$ होता है।

उदाहरण 24 : एक गोलाकार गुब्बारा हवा से भरा हुआ है। किसी समय t पर, गुब्बारे का **आयतन** $V(t)$ है तथा उसकी त्रिज्या $r(t)$ है।

i) अवकलज $\frac{dV}{dr}$ और $\frac{dV}{dt}$ क्या निरूपित करते हैं?

ii) $\frac{dV}{dt}$ को $\frac{dr}{dt}$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : i) $\frac{dV}{dr}$ त्रिज्या के सापेक्ष आयतन की परिवर्तन-दर है तथा $\frac{dV}{dt}$ समय के सापेक्ष आयतन की परिवर्तन-दर है।

ii) हम जानते हैं कि त्रिज्या r वाले गोले का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ होता है। V को t के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} \text{ (श्रृंखला नियम का प्रयोग करने पर)}$$

$$= \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \text{ है।}$$

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E25) श्रृंखला नियम का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए dy/dx ज्ञात कीजिए :

i) $\frac{5}{1+5x+7x^2}$

ii) $\frac{(2x+3)^2}{1+(2x+3)^3}$

iii) $\{(9x+5)^3+(9x+5)^{-3}\}^7$

E26) $f'(x)$ ज्ञात कीजिए, यदि $f(x) = \sqrt{1+x}$ है।

E27) कोई कण एक सरल रेखा के अनुदिश विस्थापन $s(t)$ और वेग $v(t)$ के साथ गति करता है। अवकलजों $\frac{dv}{dt}$ और $\frac{dv}{ds}$ के अर्थों के बीच अंतर को स्पष्ट कीजिए। साथ ही, $\frac{dv}{dt}$ को $\frac{dv}{ds}$ के पदों में व्यक्त भी कीजिए।

आइए अगले भाग में, त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करें।

9.7 त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज

इस भाग में, हम छः त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज परिकलित करेंगे। ये हैं: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x$ और $\operatorname{cosec} x$ । आप यह पहले से जानते हैं कि ये छः फलन परस्पर संबंधित हैं। उदाहरणार्थ, हमें प्राप्त है: (i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, (ii) $\tan x = \sin x / \cos x$, तथा अनेक और सर्वसमिकाएँ, जो इन फलनों के बीच संबंधों को व्यक्त करती हैं। जैसा कि आप जल्दी ही देखेंगे कि इन सर्वसमिकाओं के कारण सभी त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करने का हमारा कार्य काफी सरल हो जाता है।

अब, हम प्रथम सिद्धांत से $\sin x$ का अवकलज ज्ञात करेंगे। यदि $y = f(x) = \sin x$ है, तो परिभाषा से

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)\cos(x+h/2)}{h} \qquad \left[\because \sin A - \sin B = 2\sin\frac{(A-B)}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}\lim_{h\to 0}\cos(x+h/2)$$

$$= 1\times\cos x = \cos x$$ [इकाई 7 के उदाहरण 25 से स्मरण कीजिए, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ है]

इस प्रकार, हम $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ प्राप्त करते हैं।

अब, आइए $y = f(x) = \cos x$ द्वारा दिए जाने वाले कोसाइन (cosine) फलन पर विचार करें तथा उसका अवकलज ज्ञात करें। इस स्थिति में,

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(h/2)\sin(x+h/2)}{h} \qquad \left[\because \cos A - \cos B = 2\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}\lim_{h\to 0}\sin(x+h/2)$$

$$= -1\cdot\sin x = -\sin x$$

इस प्रकार, हम $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ प्राप्त करते हैं।

वास्तव में, पहले $\frac{d}{dx}(\sin x)$ परिकलित करने के बाद हम सूत्र $\cos x = \sin(x+\pi/2)$ का प्रयोग करते हुए, $\cos x$ का अवकलज प्राप्त कर सकते थे। यह हमें देता है :

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\sin(x+\pi/2)$$

$$= \frac{d}{dt}(\sin t)\times\frac{dt}{dx},$$ जहाँ $t = x + \pi/2$ है। [श्रृंखला नियम के प्रयोग से]

$$= \cos t\times 1 = \cos t = \cos\left(x+\pi/2\right) = -\sin x$$

आइए कुछ उदाहरणों को हल करें।

उदाहरण 25 : निम्नलिखित के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए :

i) $y = \sin^2 x$

ii) $y = \cos^2 x$

iii) $y = 5\sin^7 x \sin 3x$

iv) $y = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

हल : i) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{d}{dt}(\sin t) \times \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = 2x$ है।

$$= \cos t \times \frac{d}{dx}(2x) = 2\cos 2x$$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^2 x)$

$= \frac{d(t^2)}{dt} \times \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = \cos x$ है।

$$= 2t \times \frac{d}{dx}(\cos x) = -2\cos x \sin x$$

iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5\sin^7 x \sin 3x)$

$$= 5\left[\frac{d}{dx}(\sin^7 x) \times \sin 3x + \sin^7 x \times \frac{d}{dx}(\sin 3x)\right]$$

$= 5\left[\frac{dt^7}{dt} \times \frac{dt}{dx} \times \sin 3x + \sin^7 x \times \frac{d}{du}(\sin u) \times \frac{du}{dx}\right]$, [जहाँ $t = \sin x$ और $u = 3x$ है]

$$= 5[7\sin^6 x \times \cos x \times \sin 3x + \sin^7 x \times \cos 3x \times 3]$$

$$= 35\sin^6 x \cos x \sin 3x + 15\sin^7 x \cos 3x$$

iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = \frac{1}{x^2}$ है।

$$= \cos t \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-2\cos(1/x^2)}{x^3}$$

***

इससे पहले कि हम ऐसे ही सूत्र द्वारा अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करें, अब यह समय है कि कुछ प्रश्न कर लिए जाए।

E28) निम्नलिखित के लिए, dy/dx ज्ञात कीजिए।

i) $y = x^3 \cos 9x$ ii) $y = \cos(\sin x)$

iii) $y = \sin(x^2 + 1)$ iv) $y = \sin\sqrt{1 + \cos x}$

आइए अब अन्य चार त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करें।

i) मान लीजिए कि $f(x) = \tan x$ है, जहाँ $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ है। हम जानते हैं कि $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ होता है।

तब, $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$ और $\cos x \neq 0$ है।

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$ [अवकलजों का भागफल नियम]

$$= \frac{\cos x.\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

अतः, $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ है।

ii) अब मान लीजिए कि $y = f(x) = \cot x$ है। क्योंकि $\cot x = 1/\tan x$ है) इसलिए हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \frac{\tan x.\frac{d}{dx}(1) - 1.\frac{d}{dx}(\tan x)}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\tan x.0 - 1.\sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\text{cosec}^2 x$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$ है।

iii) अब मान लीजिए कि $y = f(x) = \sec x$ है। क्योंकि हम जानते हैं कि $\sec x = 1/\cos x$ होता है, इसलिए (ii) की तरह ही आगे बढ़ने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\cos x.\frac{d}{dx}(1) - 1.\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x.0 - 1.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ है।

iv) अब, मान लीजिए कि $y = f(x) = \text{cosec}\, x$ है। क्योंकि $\text{cosec}\, x = 1/\sin x$ होता है, इसलिए हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d(\text{cosec}\, x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x.\frac{d}{dx}(1) - 1.\frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin x.0 - 1.\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\text{cosec}\, x \cot x$$

इस प्रकार, $\frac{d(\text{cosec}\, x)}{dx} = -\text{cosec}\, x \cot x$ है।

जब आप त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलजों को याद करते हैं, तो आप ध्यान दे सकते हैं कि को–फलनों के अवकलजों के साथ ऋण चिह्न लगता है, अर्थात् कोसाइन, कोसीकेंट और कोटेंजेंट के साथ ऋण चिह्न लगता है। आइए इन परिणामों का सारांश सारणी 1 में लिखें।

सारणी 1

फलन	उनके अवकलज
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\text{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\text{cosec } x$	$-\text{cosec } x \cot x$

टिप्पणी 5 : यहाँ पुनः हम ध्यान दिलाते हैं कि कोण रेडियनों में मापा गया है। इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(\sin x^\circ) = \frac{d}{dx}\left(\sin\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi x}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi x}{180}\cos x^\circ$ है।

अब, हम देखेंगे कि हम कुछ अधिक जटिल फलनों के अवकलजों को ज्ञात करने में किस प्रकार इन परिणामों का प्रयोग कर सकते हैं। श्रृंखला नियम तथा अवकलजों का बीजगणित, जिनसे आप अब तक भली भाँति अवगत हो चुके होंगे, पुनः आपके सहायक होंगे।

उदाहरण 26 : निम्नलिखित को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए:

i) $\sec^3 x$ ii) $\sec x \tan x + \cot x$ iii) $\sqrt{x^3 + \text{cosec } x}$

हल : i) मान लीजिए कि $y = \sec^3 x$ है। यदि हम $u = \sec x$ लिखें, तो हम $y = u^3$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$= 3u^2 \sec x \tan x$$
$$= 3\sec^3 x \tan x$$

ii) यदि $y = \sec x \tan x + \cot x$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) + \frac{d}{dx}(\cot x)$$
$$= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) - \text{cosec}^2 x$$
$$= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x) - \text{cosec}^2 x$$

iii) $\dfrac{d\sqrt{x^3 + \text{cosec } x}}{dx} = \dfrac{d\sqrt{u}}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$, जहाँ $u = x^3 + \text{cosec } x$ है।

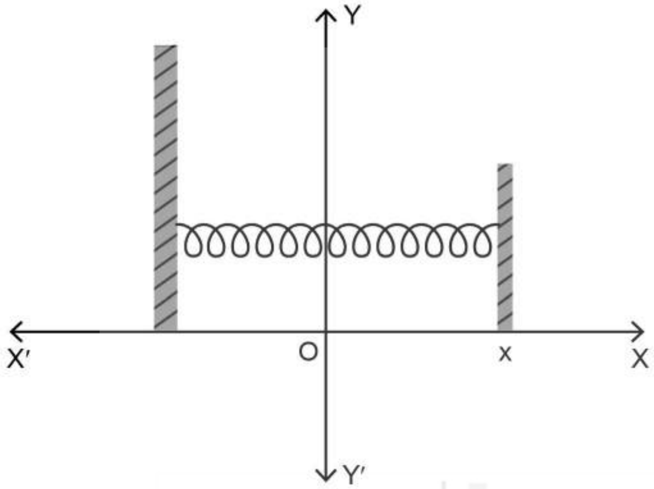
$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{d(x^3 + \text{cosec } x)}{dx}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^3 + \text{cosec } x}}\cdot(3x^2 - \text{cosec } x \cot x)$$
$$= \frac{3x^2 - \text{cosec } x \cot x}{2\sqrt{x^3 + \text{cosec } x}}$$

***

उदाहरण 27 : कोई पिंड एक स्प्रिंग पर क्षैतिजतः एक चौरस पृष्ठ पर चित्र 21 में दर्शाए गए तरीके से दोलन करता है। उसकी गति की समीकरण $x(t) = 8\sin t$ है, जहाँ t सैकण्डों में है तथा x सेंटीमीटरों में है।

i) इसका वेग समय t पर ज्ञात कीजिए।

ii) समय $t = 2\pi/3$ पर उस पिंड की स्थिति तथा वेग ज्ञात कीजिए। उस समय वह किस दिशा में गति कर रहा है?



चित्र 21

हल : i) $x(t) = 8\sin t$ दिया है।

समय t पर वेग $t = \dfrac{dx(t)}{dt}$

$= \dfrac{d(8\sin t)}{dt} = 8\cos t$ है।

ii) समय $2\pi/3$ पर स्थिति $= x\left(2\pi/3\right)$

$= 8\sin\left(2\pi/3\right)$

$= 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ है।

समय $2\pi/3$ पर वेग $= 8\cos\left(2\pi/3\right) = 8\left(-1/2\right) = -4\,\text{cm/s}$ है।

क्योंकि $x'(t) < 0$ है, इसलिए वह बाईं दिशा में गति कर रहा है।

***

टिप्पणी 6 : फलन $\sin x, \cos x, \sec x$ और $\operatorname{cosec} x$ आवर्ती फलन हैं, जिनका आवर्त 2π है। इनके अवकलज भी आवर्त 2π के आवर्ती फलन हैं। $\tan x$ और $\cot x$ आवर्त π के आवर्ती फलन हैं। इनके अवकलज भी आवर्त π के आवर्ती हैं।

अभी तक हम विमाहीन चरों पर विचार कर रहे थे। वास्तव में, व्यवहार में, हमें ऐसे चरों पर विचार करना हो सकता है, जिनकी विमाएँ द्रव्यमान, लंबाई, समय, इत्यादि हों तथा हमें उनके अवकलजों की व्याख्या करने में सावधान रहना पड़ेगा। इस प्रकार, हमें दिया हो सकता है कि एक कण द्वारा समय t में तय की गई दूरी x, $x = a\cos bt$ द्वारा दी जाती है। यहाँ, क्योंकि bt विमाहीन है (एक कोण होने के कारण), इसलिए b की विमा

अवश्य ही $\frac{1}{T}$ की विमा के बराबर होनी चाहिए। इसी प्रकार, $x/a = \cos bt$ को विमाहीन होना चाहिए। इसका अर्थ है कि a की वही विमा होनी चाहिए जो x की है। अर्थात् a की विमा L है।

अब, $\frac{dx}{dt} = -ab\sin bt$ की विमा $=$ ab की विमा $= L \times 1/T = L/T$, जो अप्रत्याशित नहीं है, क्योंकि $\frac{dx}{dt}$ उस कर्ण के वेग अतिरिक्त कुछ नहीं है।

देखिए कि क्या आप अब इन प्रश्नों को कर सकते हैं।

E29) निम्नलिखित के x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $\operatorname{cosec} 2x$ ii) $\cot x + \sqrt{\operatorname{cosec} x}$

iii) $5\cot 9x$ iv) $(1 + x^5 \cot x)^{-8}$

E30) द्रव्यमान m वाली एक वस्तु को एक क्षैतिज समतल पर उस वस्तु से जुड़ी रस्सी के अनुदिश लगे एक बल द्वारा खींचा जाता है। यदि वह रस्सी उस समतल के साथ θ कोण बनाती है, तो उस बल का परिणाम $F = \frac{\mu mg}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$ है, जहाँ μ एक अचर है, जो घर्षण का गुणांक कहलाता है।

i) θ के सापेक्ष F की परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए।

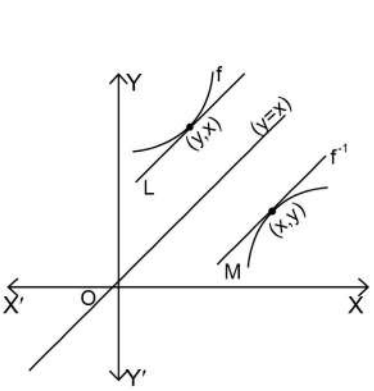
ii) परिवर्तन-दर θ के बराबर कब है?

E31) श्रृंखला नियम का उपयोग करते हुए, दर्शाइए कि यदि θ डिग्री में मापा गया है, तो $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \frac{\pi}{180^o}\cos\theta$ है।

अब, निम्नलिखित भाग में, हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे।

9.8 प्रतिलोम फलनों के अवकलज

इकाई 6 का स्मरण कीजिए, जिसमें हमने चर्चा की थी कि एक फलन और उसके प्रतिलोम के आलेख बहुत निकटतर रूप में परस्पर संबंधित होते हैं। यदि हमें किसी फलन का आलेख दिया हो, तो उसके प्रतिलोम का आलेख प्राप्त करने के लिए, हमें रेखा $y = x$ में केवल उसके परावर्तन को लेना होता है। इस भाग में, हम एक फलन और उसके प्रतिलोम के अवकलजों के बीच संबंध स्थापित करेंगे।



चित्र 22

$f(x) = 5x + 3$ द्वारा परिभाषित एक फलन f पर विचार कीजिए। आप इसकी जाँच कर सकते हैं यह फलन एकैकी और आच्छादक है तथा इसीलिए इसके प्रतिलोम का अस्तित्व है और यह $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$ है। f और f^{-1} दोनों ही रैखिक फलन हैं। आप यह ध्यान दे सकते हैं कि f के आलेख की प्रवणता 5 है तथा f^{-1} के आलेख की प्रवणता $1/5$ है। इसका कारण यह है कि जब हम $y = x$ में परावर्तित करते हैं, तब हम प्रवणता का व्युत्क्रम लेते हैं। यह ज्यामितीय प्रेक्षण प्रतिलोम फलनों के लिए अवकलन सूत्र प्रदान करता है। चित्र 22 से, हमें प्राप्त है :

$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = M$ की प्रवणता

$$= \frac{1}{L \text{ की प्रवणता}}$$

$$= \frac{1}{f'(y)}$$

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

इस प्रकार, हम इन प्रतिलोम फलनों के अवकलजों के बीच कुछ संबंध ज्ञात करने में समर्थ हो पाए हैं। आइए अपने परिणामों को अधिक परिशुद्धता से व्यक्त करें।

प्रमेय 7 (प्रतिलोम फलन प्रमेय): मान लीजिए कि किसी अंतराल I पर f अवकलनीय है तथा **निरंतर एकदिष्ट (strictly monotonic)** है। यदि I में किसी x पर $f'(x) \neq 0$ है, तो $y = f(x)$ पर अवकलनीय होता है तथा

$$(f^{-1})'(y) = 1/f'(x) \text{ या } \frac{d}{dy}[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \text{ है।}$$

इस प्रकार, प्रतिलोम फलन नियम देता है:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ या } \frac{d}{dy}(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ या } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \text{ क्योंकि } [f^{-1}(y) = x \text{ है।}]$$

प्रतिलोम फलन का अवकलज दिए हुए फलन के अवकलज का व्युत्क्रम होता है।

जल्दी ही आप देखेंगे कि यह नियम तब बहुत उपयोगी है जब हम किसी फलन का अवकलज ज्ञात करना चाहते हैं, जबकि उसके प्रतिलोम का अवकलज पहले से ज्ञात हो। यह तभी स्पष्ट हो जाएगा जब हम कुछ मानक फलनों के प्रतिलोमों के अवकलजों पर विचार करेंगे। परंतु आइए पहले इस नियम का उपयोग $f(x) = x^r$ का अवकलज ज्ञात करने में करें, जहाँ r एक परिमेय संख्या है।

उदाहरण 28 : यदि $y = f(x) = x^r$ है, जहाँ r एक परिमेय संख्या है जिसके लिए x^r और x^{r-1} दोनों ही परिणाम हैं, तो दर्शाइए कि $\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$ होता है।

हल : आइए पहले उस स्थिति पर विचार करें, जब $r = 1/q$ है, जहाँ q कोई शून्येतर पूर्णांक है। इस स्थिति में, $y = f(x) = x^{1/q}$ है। इसके प्रतिलोम फलन g को $x = g(y) = y^q$ द्वारा दिया जाएगा। इसका अर्थ है कि $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}g(y) = g'(y) = qy^{q-1}$ है।

इस प्रकार, प्रतिलोम फलन प्रमेय द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{qy^{q-1}}$$

$$= \frac{1}{q(x^{1/q})^{q-1}} \quad [\text{क्योंकि } y = x^{1/2} \text{ है।}]$$

$$= \frac{1}{qx^{(q-1)/q}} = \frac{1}{q}x^{-(q-1)/q}$$

$$= \frac{1}{q}x^{(1/q)-1} = rx^{r-1}$$

x^r सदैव ही परिभाषित नहीं होता। उदाहरणार्थ, यदि $x = -1$ और $r = 1/2$ है, तो $x^r = \sqrt{-1}$, $\mathbb{R}$ में परिभाषित नहीं है।

अभी तक, हमने देखा है कि यह प्रमेय सत्य है, जब x का रूप $1/q$ है, जहाँ q कोई शून्येतर पूर्णांक है। अब, इसे सिद्ध करने के बाद, आइए व्यापक स्थिति पर विचार करें,

जब $r = p/q, p, q \in \mathbb{Z}$ है (निस्संदेह, q शून्येतर है)। यहाँ $y = f(x) = x^r = x^{p/q}$ है।

इसलिए, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{p/q}) = \frac{d}{dx}(x^{1/q})^p$

अब, $\frac{d}{dx}(x^{1/q})^p = p(x^{1/q})^{p-1}\frac{d}{dx}(x^{1/q})$ [श्रृंखला नियम के प्रयोग से]

$$= p(x^{1/q})^{p-1}(1/q)x^{(1/q)-1}$$
$$= (p/q)x^{(p/q)-1}$$

इस प्रकार, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^r) = (p/q)x^{(p/q)-1} = rx^{r-1}$

***

उदाहरण 29 : $y = (x^{5/6} + \sqrt{x})^{1/11}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : हम $u = x^{5/6} + \sqrt{x}$ लिखते हैं। इससे हमें $y = u^{1/11}$ प्राप्त होता है। श्रृंखला नियम द्वारा, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^{1/11}).\frac{d}{dx}(x^{5/6}+x^{1/2}) = \left(\frac{1}{11}u^{\frac{1}{11}-1}\right).\left(\frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-1}+\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{11}(x^{5/6}+\sqrt{x})^{(1/11)-1}\left(\frac{5}{6}x^{(5/6)-1}+\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)$$

इस प्रकार, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{66}(x^{5/6}+\sqrt{x})^{-10/11}(5x^{-1/6}+3x^{-1/2})$ है।

***

अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E32) निम्नलिखित को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए :

i) $5(x^3 + x^{1/3})$ ii) $\left(\sqrt[5]{x} - \sqrt[9]{x}\right)x^2$

हम देख चुके हैं कि किस प्रकार, प्रतिलोम फलन प्रमेय x^n का अवकलज ज्ञात करने में हमारी सहायता करती है, जहाँ n एक परिमेय संख्या है। अब हम उस प्रमेय का प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करने में प्रयोग करेंगे।

इकाई 6 में, हम देख चुके हैं कि कभी-कभी जब एक दिया हुआ फलन एकैकी नहीं हो, तब भी हम उसके प्रतिलोम की बात कर सकते हैं, यदि हम उसके प्रांत को उपयुक्त रूप से सीमित कर लें। अब, $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक $\sin x$ न तो एकैकी और न ही आच्छादक फलन है। परंतु यदि हम उसके प्रांत को $[-\pi/2, \pi/2]$ तक सीमित कर लें तथा सह-प्रांत को $[-1, 1]$ तक सीमित कर लें, तो यह एक एकैकी और आच्छादक फलन हो जाता है और इसीलिए इसके प्रतिलोम का अस्तित्व सुनिश्चित हो जाता है। इसी प्रकार, हम शेष त्रिकोणमितीय फलनों के प्रतिलोमों की बात कर सकते हैं, यदि हम उनके प्रांतों और सह-प्रांतों पर उपयुक्त प्रतिबंध लगा दें।

अब, हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अस्तित्व से सुनिश्चित हो गए हैं। आइए आगे बढ़ें तथा उनके अवकलज ज्ञात करें।

आइए प्राँत $[-\pi/2, \pi/2]$ में फलन $y = f(x) = \sin x$ पर विचार करें। इसका प्रतिलोम $g(y) = \sin^{-1}(y) = x$ द्वारा दिया जाता है। हम स्पष्टतः देख सकते हैं कि $[-\pi/2, \pi/2]$ पर $\sin x$ निरंतर वर्धमान है। (इकाई 7 को देखिए)।

हम यह भी जानते हैं कि अवकलज $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ का सभी $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ के लिए अस्तित्व है और यह अवकलज इस अंतराल में शून्यतर है।

इसका अर्थ है कि $\sin x$ प्रतिलोम फलन प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। इसलिए, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $]-1, 1[$ पर $\sin^{-1} y$ अवकलनीय है तथा

$$\frac{d}{dy}(\sin^{-1}(y)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$ है। [क्योंकि $\cos x = y$, इसलिए $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, 0 < x < \pi$ के लिए]

इस प्रकार, हमें परिणाम प्राप्त होता है कि $\frac{d}{dt}(\sin^{-1} t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ है।

याद रखिए, $\sin^{-1} x$ बिल्कुल भी $(\sin x)^{-1}$ या $\sin x^{-1}$ जैसा नहीं है, क्योंकि $(\sin x)^{-1} = 1/\sin x$ और $\sin x^{-1} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ हैं।

अब, हम प्रतिलोम कोसाइन फलन का अवकलज ज्ञात करने के लिए, ठीक इन्हीं चरणों का अनुसरण करेंगे।

आइए फलन $y = f(x) = \cos x$ से प्रारंभ करें तथा इसके प्राँत को $[0, \pi]$ तक और इसके सह–प्राँत को $[-1, 1]$ तक सीमित रखें। इसके प्रतिलोम फलन $g(y) = \cos^{-1} y$ का अस्तित्व है तथा $\cos x$ और $\cos^{-1} x$ के आलेख संतत हैं। (इकाई 7 को देखिए)

जैसा कि पहली स्थिति में किया था, हम अब जाँच कर सकते हैं कि प्रतिलोम फलन प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट हो रहे हैं तथा निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह $]-1, 1[$ में अवकलनीय है। साथ ही

$$\frac{d}{dy}(g(y)) = \frac{d}{dy}(\cos^{-1} y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$ [क्योंकि $\cos x = y, \sin x = \sqrt{1-y^2}, 0 < x < \pi$ के लिए]

इससे हमें परिणाम प्राप्त होता है कि $\frac{d}{dt}(\cos^{-1} t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ है।

उदाहरण 30 : $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

i) $y = \cos^{-1}(3x)$

ii) $y = \sin^{-1}(\sqrt{x^3}$

हल : i) $\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos^{-1}(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, जहाँ $u = 3x$ है।

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \times 3 = \frac{-1}{\sqrt{1-9x^2}} \times 3 = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(\sin^{-1}(t)) \cdot \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = \sqrt{x^3}$ है।

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^{3/2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \cdot \frac{3}{2}(x)^{1/2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^3}}$$

***

निम्नलिखित प्रश्नों में अवकलज प्राप्त करने के लिए, आप इन दोनों परिणामों का प्रयोग कर सकते हैं।

E33) निम्नलिखित को x के सापेक्ष परिकलित कीजिए :

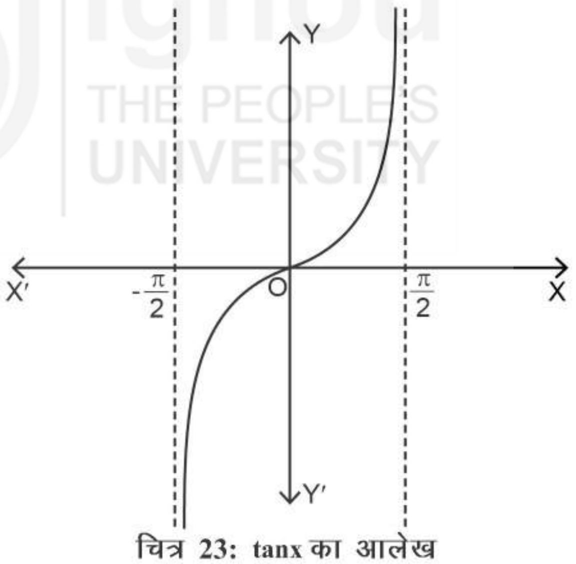
i) $\sin^{-1}(5x)$ ii) $\cos^{-1}\sqrt{x}$

iii) $\sin x \cos^{-1}(x^3+2)$

$\sin^{-1}x$ और $\cos^{-1}x$ के अवकलज ज्ञात करने के बाद, अब हम $\tan^{-1}x$ और $\cot^{-1}x$ के अवकलज ज्ञात करेंगे।

$\tan^{-1}x$ और $\cot^{-1}x$ अवकलज

चित्र 23 में दिए $\tan x$ के आलेख पर विचार कीजिए। आइए इंगित करें कि $\tan x$ के प्राँत को किस अंतराल तक सीमित रखें ताकि उसके प्रतिलोम के अस्तित्व की गारंटी हो जाए।



चित्र 23: tanx का आलेख

चित्र 23 यह दर्शाती है कि $\tan x$ को $]-\pi/2, \pi/2[$ तक सीमित रखने पर, यह x का एक एकैकी फलन है। इस प्रकार, $]-\pi/2, \pi/2[$ तक सीमित करने पर, इसके प्रतिलोम का अस्तित्व है। $\tan^{-1}x$ का प्राँत $]-\infty, \infty[$ है।

यदि $y = f(x) = \tan x$ है, तो $\frac{d}{dy}(\tan^{-1}y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$ $[\because \sec^2 x = 1 + \tan^2 x]$

अतः, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ है।

आप प्रतिलोम फलन प्रमेय के प्रतिबंधों की जाँच कर सकते हैं तथा वह अंतराल ज्ञात कर सकते हैं, जिसमें $\cot x$ के प्रतिलोम का अस्तित्व है।

$y = f(x) = \cot x$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{-1}{\operatorname{cosec}^2x}=\frac{-1}{1+y^2}$$

अब, हम शेष दोनों प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे।

$\sec^{-1}x$ और $\operatorname{cosec}^{-1}x$ के अवकलज

अब, आइए शेष दोनों त्रिकोणमितीय फलनों के प्रतिलोम ज्ञात करें। यदि $y=\sec^{-1}x$ है, तो $\sec y = x$ या $1/\cos y = x$ है, जिसका अर्थ $1/x=\cos y$ है। इससे हमें $y=\cos^{-1}(1/x)$ प्राप्त होता है, जहाँ $|x|\geq 1$ है। हम देख चुके हैं कि अंतराल $[-1, 1]$ में, $\cos^{-1}t$ परिभाषित है।

इस प्रकार, $y=\sec^{-1}x=\cos^{-1}(1/x), |x|\geq 1$ है।

इससे हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\cos^{-1}(1/x))$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-1/x^2}}\frac{d}{dx}(1/x) \quad \text{[श्रृखला नियम के प्रयोग से]}$$

$$=\frac{-|x|}{\sqrt{x^2-1}}(-1/x^2)$$

$$=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$$

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$$

ध्यान दीजिए कि यद्यपि $|x|\geq 1$ के लिए $\sec^{-1}x$ परिभाषित है, फिर भी $\sec^{-1}x$ के अवकलज का $x=1$ पर अस्तित्व नहीं है।

इसी प्रकार के चरणों का अनुसरण करते हुए, हम $\operatorname{cosec}^{-1}x$ का अवकलज ज्ञात कर सकते हैं।

$y=\operatorname{cosec}^{-1}x \Rightarrow \operatorname{cosec} y = x \Rightarrow \sin y = 1/x \Rightarrow y=\sin^{-1}(1/x)$ जहाँ $|x|\geq 1$ है।

इस प्रकार, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}(1/x))$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}(-1/x^2)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}(-1/x^2)$$

$$=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$$

इस प्रकार, $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x)=\dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$ है।

आइए इनका अनुप्रयोग निम्नलिखित उदाहरण में करें।

उदाहरण 31 : $y=\sec^{-1}2\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec^{-1} 2\sqrt{x})$

$= \frac{d}{dt}(\sec^{-1} t) \times \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = 2\sqrt{x}$ है। [श्रृंखला नियम के प्रयोग से]

$= \frac{1}{|t|\sqrt{t^2-1}} \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{4x-1}} \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{4x-1}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}}$

***

अब आप प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलजों से संबंधित परिणामों का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर पाएँगे।

E34) निम्नलिखित को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए :

i) $\cot^{-1}(x/2)$

ii) $\frac{\cot^{-1}(x+1)}{\tan^{-1}(x+1)}$

iii) $\cos^{-1}(5x+4)$

iv) $\sec^{-1}\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right)$, θ एक अचर है।

v) $\operatorname{cosec}^{-1}(x+1) + \sec^{-1}(x-1)$

इस इकाई में जो हमने अध्ययन किया है उसका सारांश देते हुए, हम इसे यहीं समाप्त कर रहे हैं।

9.9 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर चर्चा की है :

1. किसी फलन $y = f(x)$ के लिए, $f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ (यदि इसका अस्तित्व है) x पर f का **अवकलज** कहलाता है तथा इसे $f'(x)$ से व्यक्त किया जाता है। फलन f' व्युत्पित फलन है। अवकलज $f'(x)$ वक्र $y = f'(x)$ की बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है। अवकलज स्वतंत्र चर के सापेक्ष फलन की औसत परिवर्तन-दर भी प्रदान करता है।

2. प्रथम सिद्धांत से अवकलज परिकलित करने में तीन चरण हैं :
   - अंतर भागफल $\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ लिखिए।
   - अंतर भागफल को सरल कीजिए।
   - सीमा ज्ञात कीजिए, जब δx, 0 की ओर अग्रसर करता है।

3. प्रत्येक अवकलजीय फलन संतत होता है। इसका विलोम सत्य नहीं है, अर्थात् ऐसे फलनों का भी अस्तित्व है, जो संतत हैं परंतु अवकलनीय नहीं हैं।

4. एक अचर फलन का अवकलज 0 होता है, अर्थात् $\frac{d}{dx}(c)=0$ है, जहाँ $c\in\mathbb{R}$ है।

5. $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$, जहाँ n कोई भी पूर्णांक है (और $x\neq 0$, यदि $n<0$)।

6. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, जहाँ $x>0$ है।

7. फलन $y=|x|$, $x=0$ के अतिरिक्त, प्रत्येक बिंदु पर अवकलजीय है।

8. निम्नलिखित के अवकलज :

 i) $\frac{d}{dx}[c.f(x)]=c.\frac{d}{dx}f(x)$

 ii) $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$

 iii) $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$

 iv) $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)]=f(x).\frac{d}{dx}g(x)+g(x).\frac{d}{dx}f(x)$

 v) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$, जबकि $g(x)\neq 0$ है।

 vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$, जबकि $f(x)\neq 0$ है।

9. **श्रृंखला नियमः** यदि $y=f(x)$ और $u=g(x)$ है, तो $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

10. त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलजः

फलन	अवकलज
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\text{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\text{cosec}\, x$	$-\text{cosec}\, x \cot x$

11. प्रतिलोम फलन प्रमेय के कथन में दिया नियम है कि $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x))=\frac{1}{f'(y)}$ है, जहाँ f अवकलनीय है तथा निरंतर एकदिष्ट है और $f'(y)\neq 0$ है।

12. $\frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}$, जहाँ r एक परिमेय संख्या है और x शून्येतर है।

13. प्रतिलोम फलन प्रमेय का उपयोग करते हुए, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज निम्नलिखित हैं :

फलन	अवकलज
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1<x<1$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1<x<1$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}, \lvert x\rvert>1$
$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}, \lvert x\rvert>1$

9.10 हल/उत्तर

E1) i) मान लीजिए कि $y = f(x) = \frac{1}{x}$ है। तब, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ पर

$$\text{प्रवणता} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(2+\delta x) - f(2)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2+\delta x} - \frac{1}{2}}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{-1}{2+\delta x} = -\frac{1}{2}$$

ii) मान लीजिए कि $y = f(x) = x^3$ तब, (1, 1) पर प्रवणता $= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(1+\delta x) - f(1)}{\delta x}$

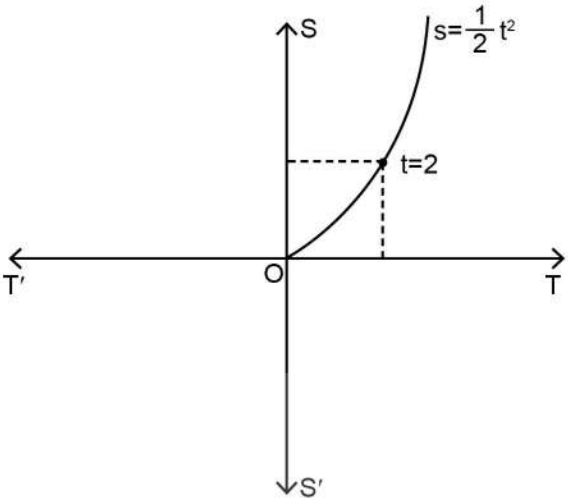
$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(1+\delta x)^3 - 1}{\delta x} = 3$$

E2) नहीं, पुष्टिकरण कीजिए।

E3) बिंदु $P(2, s(2))$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता परिकलित करने के लिए, P के निकट, हम वक्र पर एक बिंदु $R\left(2+\delta t, \frac{1}{2}(2+\delta t)^2\right)$ चुनते हैं। तब, वाँछित परिवर्तन-दर

$$\lim_{\delta t \to 0} (\text{PR की प्रवणता}) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}(2+\delta t)^2 - 2}{(2+\delta t) - 2} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta t(4+\delta t)}{2\delta t} = 2 \text{ है।}$$

चित्र 24, $s = \frac{1}{2}t^2$ द्वारा निरूपित वक्र दर्शाती है, जिसमें समय x-अक्ष के अनुदिश लिया गया है तथा दूरी y-अक्ष के अनुदिश ली गयी है।



चित्र 24

अतः, $t=2$ पर वेग वही है जो $P(2,s(2))$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

E4) $$v=\lim_{\delta t\to 0}\frac{s(t+st)-s(t)}{\delta t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{u(t-\delta t)-\frac{1}{2}g(t+\delta t)^2-ut+\frac{1}{2}gt^2}{\delta t}$$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta t(u-gt-\frac{1}{2}g\delta t)}{\delta t}=u-gt$$

E5) $A(r)=\pi r^2$

त्रिज्या के सापेक्ष, वृत्त के क्षेत्रफल की परिवर्तन-दर, जब त्रिज्या

2 cm है $=\lim_{\delta r\to 0}\frac{\pi(2+\delta r)^2-\pi.2^2}{\delta r}=4cm^2$

E6) $[1,1+h]$ में f की औसत परिवर्तन-दर $=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\frac{2(1+h)^2+1-(2\times 1^2+1)}{h}=4+2h$$

$x=1$ पर, f की परिवर्तन–दर $=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ [जहाँ h घनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है]

$$=\lim_{h\to 0}(4+2h)=4$$

E7) $$f'(c)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(c+\delta x)-f(c)}{\delta x}$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{(c+\delta x)^2-8(c+\delta x)+9-c^2+8c-9}{\delta x}$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{2c\delta x+\delta x^2-8\delta x}{\delta x}$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}(2c+\delta x-8)$$

$=2c-8$ है।

E8) $$f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

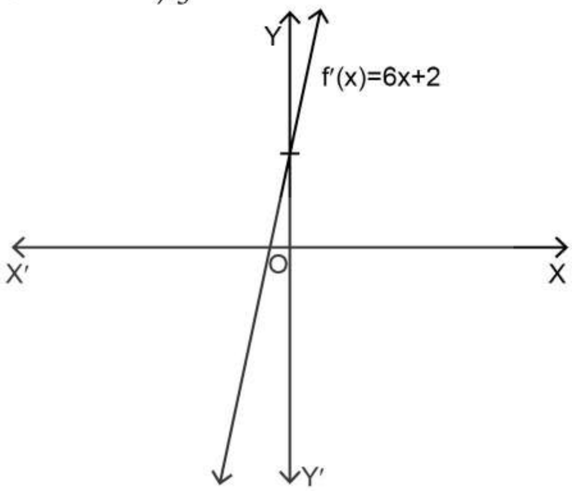
$$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{[3(x+\delta x)^2+.2(x+\delta x)+1]-(3x^2+2x+1)}{\delta x}$$

$$=6x+2$$

$f'(x) > 0$, जब $x > -\frac{1}{3}$

$f'(x) < 0$, जब $x < -\frac{1}{3}$

$f'(x) = 0$, जब $x = -\frac{1}{3}$



चित्र 25: f′ का आलेख

E9) i) $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

ii) यदि $x > -1, x+1 > 0$,तो $h > 0$ चुनिए, ताकि $h < |x+1|$ हो।

तब, $x + h + 1 > 0$ और $\lim_{h \to 0} \frac{|x+h+1| - |x+1|}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h+1) - (x+1)}{h} = 1$$

यदि $x < -1$, तो $\lim_{h \to 0} \frac{|x+h+1| - |x+1|}{h} = -1$

इस प्रकार, dy/dx का अस्तित्व है, जब $x > -1$ या $x < -1$ है। इसका अस्तित्व नहीं है, जब $x = -1$ है, क्योंकि $Rf'(-1) = 1$ और $Lf'(-1) = -1$ है।

iii) $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \times \frac{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

E10) i) $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2+h-2}{h} = 1$

ii) $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{a(2+h) + b - (a \times 2 + b)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$

E11) $f'(x) = \frac{50(2x+3)^{49} 2(9x+2) - 9(2x+3)^{50}}{(9x+2)^2}$ का $x = 0.1$ पर अस्तित्व है। अतः, फलन $x = 0.1$ पर संतत है।

E12) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{f(x)-f(x+h)}{f(x)f(x+h)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x)-f(x+h)}{h}}{f(x)\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)}$$

$$= \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

E13) i) 0 ii) 0

E14) i) $\frac{d}{dx}(x^8) = 8x^{8-1} = 8x^7$

ii) $\frac{d}{dx}(x^{1000}) = 1000\,x^{1000-1} = 1000\,x^{999}$

iii) $\frac{d}{dx}(10) = 0$

E15) i) $L\,f'(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{(0+h)^{1/3} - 0^{1/3}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{2/3}} = -\infty$

$R\,f'(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{(0+h)^{1/3} - 0^{1/3}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$

इसलिए, $x = 0$ पर f अवकलनीय नहीं है।

E16) i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^3\right) = \frac{5}{3}\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{5}{3}\times 3x^2 = 5x^2$

ii) $\frac{d}{dx}\left(8\sqrt{x}\right) = 8\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

iii) $\frac{d}{dx}\sqrt{2}\,|x| = \begin{cases} \sqrt{2}\ ; & \text{जब } x > 0 \\ -\sqrt{2}\ ; & \text{जब } x < 0 \\ \text{अस्तित्व नही;} & \text{जब } x = 0 \end{cases}$

E17) हम उन सभी बिंदुओं पर, प्रमेय 2 में प्राप्त अदिश गुणज नियम का अनुप्रयोग करते हैं, जहाँ $|x|$ अवकलनीय है तथा प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}(7\,|x|) = 7\frac{d}{dx}(|x|)$$

परंतु उदाहरण 9 के दृष्टिकोण के अनुसार, जब $x = 0$ है, तब $\frac{d}{dx}(|x|)$ का अस्तित्व नहीं है।

जब $x > 0$ है, तब $\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{dx}{dx} = 1$

तथा जब $x < 0$ है, तब $\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d(-x)}{dx} = -1$ है।

अतः, $\frac{d}{dx}(7|x|) = 7\frac{d}{dx}(|x|) = \begin{cases} 7; & \text{जब } x > 0 \\ -7; & \text{जब } x < 0 \\ \text{अस्तित्व नही; } & \text{जब } x = 0 \end{cases}$

E18) i) $15x^2 - 2$

ii) $a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$

E19) क्षैतिज स्पर्श रेखा तब प्रकट होती है, जब अवकलज 0 है। इस प्रकार,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 8\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$
$$= 4x^3 - 16x$$

क्योंकि $\frac{dy}{dx} = 0$ है, इसलिए $4x^3 - 16x = 0$ है, अर्थात् $x = 0, 2, -2$ है। अतः, दिए हुए वक्र की स्पर्श रेखाएँ क्षैतिज होती हैं, जबकि $x = 0, 2$ और -2 है। संगत बिंदु (0, 4) और (2, –12) और (–2, –12) हैं।

E20) i) प्रमेय 4 के प्रयोग से, $\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}(x).\sqrt{x} + x.\frac{d}{dx}\sqrt{x}$

$$= 1.\sqrt{x} + x.\frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

प्रमेय 4 का प्रयोग किए बिना, $\frac{d}{dx}(x\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x)^{3/2} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

ii) $\frac{d}{dx}\{(x^5 + 2x^3 + 5)(x^5 + 2x^3 + 5)\}$

$$= (x^5 + 2x^3 + 5)(5x^4 + 6x^2) + (5x^4 + 6x^2)(x^5 + 2x^3 + 5)$$
$$= 2(x^5 + 2x^3 + 5)(5x^4 + 6x^2)$$

iii) $dy/dx = (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2)$

E21) $f'(x) = \frac{d}{dx}[xg(x)] = \frac{d(x)}{dx}g(x) + x\frac{d\,g(x)}{dx}$

$$= (1)g(x) + x\,g'(x)$$

$x = 3$ रखिए

$$f'(3) = g(3) + 3g'(3)$$
$$= 2 + 3(5) = 17$$

E22) i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{x+5}\right) = \frac{2(x+5)-(2x+1)}{(x+5)^2} = \frac{9}{(x+5)^2}$ जहाँ $x \neq 5$ है।

ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a+bx+cx^2+dx^3}\right) = \frac{-(b+2cx+3dx^2)}{(a+bx+cx^2+dx^3)^2}$

iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3+3x^2}{x^4-1}\right)$

$$= \frac{(x^4-1)(6x^2+6x)-(2x^3+3x^2)(4x^3)}{(x^4-1)^2}, \text{ जहाँ } x^4-1 \neq 0 \text{ है।}$$

$$= \frac{6x(x+1)(x^4-1) - 4x^5(2x+3)}{(x^4-1)^2}$$

E23) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(1).f(x) - (1).\frac{d}{dx}f(x)}{[f(x)]^2}$

$$= \frac{0 - f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$= -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}, f(x) \neq 0$$

E24) i) तीन पदों के योग के रुप में, हम $f(x) = 2x^{-5} + 5x^{-4} + 7x^{-6}$ प्राप्त करते है।

$f'(x) = -10x^{-6} - 20x^{-5} - 42x^{-7}$

ii) भागफल नियम का अनुप्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$f'(x) = \frac{x^5(5-7x^{-2}) - 5x^4(2+5x+7x^{-1})}{x^{10}}$$

$$= x^{-10}(-20x^5 - 42x^3 - 10x^4)$$

$$= -20x^{-5} - 42x^{-7} - 10x^{-6}$$

iii) दो फलनों के गुणनफल के रुप में, $f(x) = x^{-5}(2+5x+7x^{-1})$

$$f(x) = x^{-5}(5-7x^{-2}) - 5x^{-6}(2+5x+7x^{-1})$$

$$= -20x^{-5} - 42x^{-7} - 10x^{-6}$$

E25) i) $u = 1+5x+7x^2,\ y = 5/u$

$dy/dx = (-5/u^2)\ (5+14x) = \frac{-25-70x}{(1+5x+7x^2)}$

ii) $u = 2x+3,\ y = u^2/(1+u^3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2u(1+u^3) - 3u^4}{(1+u^3)^2} \times 2$$

$$= \frac{4(2x+3)\,[1+(2x+3)^3] - 6(2x+3)^4}{[1+(2x+3)^3]^2}$$

iii) $u = 9x+5,\ v = u^3 + u^{-3},\ y = v^7$

$dy/dx = 7v^6(3u^2 - 3u^{-4}) \times 9$

$$= 63[(9x+5)^3 + (9x+5)^{-3}]^6[3(9x+5)^2 - 3(9x+5)^{-4}]$$

E26) मान लीजिए कि $f(x) = goh(x)$, जहाँ $g(t) = \sqrt{t}$ और $h(x) = x+1$ है।

$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ और $h'(x) = 1$ है।

$f'(x) = g'(h(x)).\ h'(x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, यदि $x > -1$ है।

E27) $\frac{dv}{dt}$, समय के सापेक्ष वेग में परिवर्तन-दर निरुपित करता है तथा $\frac{dv}{ds}$, विस्थापन के सापेक्ष वेग में परिवर्तन-दर निरुपित करता है। साथ ही, $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

E28) i) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \cos 9x)$

$$= \frac{d}{dx}(x^3) \times \cos 9x + x^3 \times \frac{d}{dx}(\cos 9x)$$

$$= 3x^2 \times \cos 9x + x^3(-9 \sin 9x)$$

$$= 3x^2 \cos 9x - 9x^3 \sin 9x$$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos(\sin x))$

$= \frac{d}{dt}(\cos t) \times \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = \sin x$ है।

$$= -\sin t \times \frac{d}{dx}(\sin x) = -\sin(\sin x).\cos x$$

iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin(x^2+1))$

$= \frac{d}{dt}(\sin t).\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = x^2 + 1$ है।

$$= \cos t.\frac{d(x^2+1)}{dx}$$

$$= \cos(x^2+1).(2x)$$

$$= 2x \cos(x^2+1)$$

iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = \sqrt{1+\cos x}$ है।

$= \cos t.\frac{d\sqrt{u}}{du}.\frac{du}{dx}$, जहाँ $u = 1 + \cos x$ है।

$$= -\frac{\sin x \cos\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+\cos x}}$$

E29) i) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} 2x) = \frac{d}{d(2x)}(\operatorname{cosec} 2x) \times \frac{d}{dx}(2x)$

$$= -2 \operatorname{cosec} 2x \cot 2x$$

ii) $\frac{d}{dx}(\cot x + \sqrt{\operatorname{cosec} x}) = \frac{d}{dx}(\cot x) + \frac{d}{dx}(\sqrt{\operatorname{cosec} x})$

$= -\operatorname{cosec}^2 x + \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) \times \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = \operatorname{cosec} x$ है।

$$= -\operatorname{cosec}^2 x + \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x + \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{cosec} x}} \times -\operatorname{cosec} x.\cot x$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x - \frac{\operatorname{cosec} x \cot x}{2\sqrt{\operatorname{cosec} x}}$$

iii) $\frac{d}{dx}[5(\cot 9x)] = 5\frac{d}{dx}(\cot 9x)$

$$= 5(-\operatorname{cosec}^2 9x) \times \frac{d}{dx}(9x)$$

$$= -5 \operatorname{cosec}^2 9 \times 9$$

$$= -45 \operatorname{cosec}^2 x$$

iv) $\frac{d}{dx}\left[(1+x^5\cot x)^{-8}\right]=\frac{du^{-8}}{du}.\frac{du}{dx}$, जहाँ $u=1+x^5\cot x$ है।

$$=-8u^{-9}.\frac{d(1+x^5\cot x)}{dx}$$

$$=-8(1+x^5\cot x)^{-9}.\{x^5(-\text{cosec}^2 x)+5x^4(\cot x)\}$$

$$=(1+x^5\cot x)^{-9}.(8x^5\text{cosec}^2 x-40x^4\cot x)$$

E30) i) θ के सापेक्ष F की परिवर्तन-दर $\frac{dF}{d\theta}=\frac{-\mu mg(\mu\cos\theta-\sin\theta)}{(\mu\sin\theta+\cos\theta)^2}$

ii) $\frac{dF}{d\theta}=0\Rightarrow\mu\cos\theta-\sin\theta=0\Rightarrow\tan\theta=\mu\Rightarrow\theta=\tan^{-1}(\mu)$

E31) $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)=\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta.\frac{\pi}{180^o}\right)$, जहाँ θ डिग्री में है।

$$=\frac{\pi}{180}\cos\theta$$

E32) i) $\frac{d}{dx}5(x^3+x^{\frac{1}{3}})=5\frac{d}{dx}(x^3+x^{\frac{1}{3}})$

$$=5\left[\frac{d}{dx}x^3+\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}})\right]$$

$$=5\left[3x^2+\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right]$$

$$=15x^2+\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

ii) $\frac{d}{dx}[\sqrt[5]{x}-\sqrt[9]{x}]x^2=\frac{d}{dx}[x^{1/5}-x^{1/9}]x^2=\frac{d}{dx}[x^{11/5}-x^{19/9}]$

$$=\frac{11}{5}x^{\frac{11}{5}-1}-\frac{19}{9}x^{\frac{19}{9}-1}$$

$$=\frac{11}{5}x^{6/5}-\frac{19}{9}x^{10/9}$$

E33) i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(5x))=\frac{d}{dt}(\sin^{-1}t)\times\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t=5x$ है।

$$=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\times\frac{d}{dx}(5x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\times 5$$

$$=\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}\sqrt{x})=\frac{d}{dt}(\cos^{-1}t)\times\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t=\sqrt{x}$ है।

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\times\frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-x}}\times\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

iii) $\frac{d}{dx}(\sin x \cos^{-1}(x^3+2))$

$$= \sin x . \frac{d}{dx}(\cos^{-1}(x^3+2)) + \frac{d}{dx}(\sin x).\cos^{-1}(x^3+2)$$

$$= \sin x . \frac{d}{dt}\cos^{-1}(t) \times \frac{dt}{dx} + \cos x . \cos^{-1}(x^3+2),$$ जहाँ $t = x^3+2$ है।

$$= \sin x . \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \times 3x^2 + \cos x . \cos^{-1}(x^3+2)$$

$$= -\frac{3x^2 \sin x}{\sqrt{1-(x^3+2)^2}} + \cos x \cos^{-1}(x^3+2)$$

E34) i) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}(x/2)) = \frac{d}{dt}\cot^{-1} t \times \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = x/2$ है।

$$= \frac{-1}{1+t^2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{2(1+x^2/4)}$$

ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot^{-1}(x+1)}{\tan^{-1}(x+1)}\right)$

$$= \frac{\tan^{-1}(x+1)\frac{d}{dx}(\cot^{-1}(x+1)) - \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x+1)).\cot^{-1}(x+1)}{\{\tan^{-1}(x+1)\}^2}$$

$$= \frac{-\tan^{-1}(x+1)\left(\frac{1}{1+(x+1)^2}\right) - \cot^{-1}(x+1)\left(\frac{1}{1+(x+1)^2}\right)}{(\tan^{-1}(x+1))^2}$$

iii) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}(5x+4) = \frac{d}{dt}(\cos^{-1} t) \times \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = 5x+4$ है।

$$= \frac{-5}{\sqrt{1-(5x+4)^2}}$$

iv) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right) = \frac{d}{dt}\sec^{-1} t \times \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = \frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}$ है।

$$= \frac{1}{\left|\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right|\sqrt{\frac{x^2\sin^2\theta}{(1-x\cos\theta)}}}\left[\frac{\sin\theta(1-x\cos\theta)+x\sin\theta\cos\theta}{(1-x\cos\theta)^2}\right]$$ [$\frac{dt}{dx}$ ज्ञात करने के लिए, भागफल नियम के अनुप्रयोग करें]

v) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}(x+1) + \sec^{-1}(x-1)) = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}(x+1)) + \frac{d}{dx}(\sec^{-1}(x-1))$

$$= \frac{-1}{|x+1|\sqrt{(x+1)^2-1}} + \frac{1}{|x-1|\sqrt{(x-1)^2-1}}$$

इकाई 10

कुछ और अवकलज

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

10.1	प्रस्तावना	59
	उद्देश्य	60
10.2	लघुगणकीय फलनों के अवकलज	60
10.3	चरघातांकीय फलनों के अवकलज	65
10.4	अतिपरवलीय फलन	70
10.5	लघुगणकीय अवकलन की विधियाँ	74
10.6	अस्पष्ट अवकलन	77
10.7	अन्य अवकलन तकनीकें	81
10.8	सारांश	84
10.9	हल / उत्तर	86

10.1 प्रस्तावना

इकाई 7 में, हमने चरघातांकीय फलनों की चर्चा की थी, जिनका परिशुद्ध और आनुप्रायोगिक विज्ञान में एक महत्वपूर्ण स्थान है। वृद्धि और क्षय के नियम बहुत बार इन्हीं फलनों के पदों में व्यक्त किए जाते हैं। भाग 10.2 में, हम लघुगणकीय फलनों के अवकलजों का अध्ययन करेंगे। इकाई 9 में दी गई प्रतिलोम फलन प्रमेय तब इनके प्रतिलोमों, अर्थात् चरघातांकीय फलनों के अवकलन में हमारी सहायता करेंगे, जो हम भाग 10.3 में कर रहे हैं। विशिष्ट रूप से, आप पाएँगे कि प्राकृतिक चरघातांकीय फलन का अवकलज वह स्वयं ही होता है। आगे, भाग 10.4 में, हम अतिपरवलीय फलनों और उनके प्रतिलोम फलनों को अवकलित करेंगे। भाग 10.5 में, हम लघुगणकीय अवकलन की विधि का अध्ययन करेंगे। हम भाग 10.6 में, अवकलन की अपनी प्रक्रिया को अस्पष्ट फलनों को अवकलित करने के लिए विस्तृत करेंगे तथा अंत में, भाग 10.7 में, हम अवकलन की अन्य विधियों का अध्ययन करेंगे। इस इकाई के साथ, हम अधिकतर प्रयोग किए जाने वाले कुछ मानक फलनों के अवकलजों की अपनी खोज

के लक्ष्य तक पहुँच जाएँगे। और अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- चरघातांकीय और लघुगणकीय फलनों के अवकलज ज्ञात कर पाएँगे;
- लघुगणकीय अवकलन की विधि का प्रयोग कर पाएँगे;
- अतिपरवलीय और प्रतिलोम अतिपरवलीय फलनों को अवकलित कर पाएँगे;
- अस्पष्ट फलनों को अवकलित कर पाएँगे;
- उन फलनों के अवकलज अभिकलित कर पाएँगे, जो एक प्राचल की सहायता से परिभाषित किए जाते हैं।

10.2 लघुगणकीय फलनों के अवकलज

इस भाग में, हम किसी लघुगणकीय फलन का अवकलज ज्ञात करेंगे। इसके लिए, आप सर्वप्रथम एक लघुगणकीय फलन की परिभाषा का स्मरण करें, जिसकी चर्चा इकाई 7 में की गई थी। लघुगणकीय फलन का अवकलज ज्ञात करने के लिए, हम अवकलज की परिभाषा तथा इस तथ्य का प्रयोग करेंगे कि लघुगणकीय फलन एक संतत फलन होता है। हम सीमा $\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{1/n}=e$ का भी प्रयोग करेंगे।

मान लीजिए कि $f(x)=\log_a x$ है। जहाँ $x>0$ है।तब,

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}\ \text{[क्योंकि } \log_a m-\log_a n=\log_a\frac{m}{n} \text{ है]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\ \text{[x से गुणा और भाग कीजिए]}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\ \text{[क्योंकि } m\log_a n=\log_a n^m \text{ है]}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}\right]$$ [क्योंकि $\log_a m$ संतत है]

$$= \frac{1}{x}\log_a e$$ [क्योंकि $\lim_{n\to 0}(1+n)^{1/n} = e$ और $n = h/x$, इस प्रकार हैं कि जब $h \to 0$, तब $n \to 0$]

अतः, $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e, x > 0$

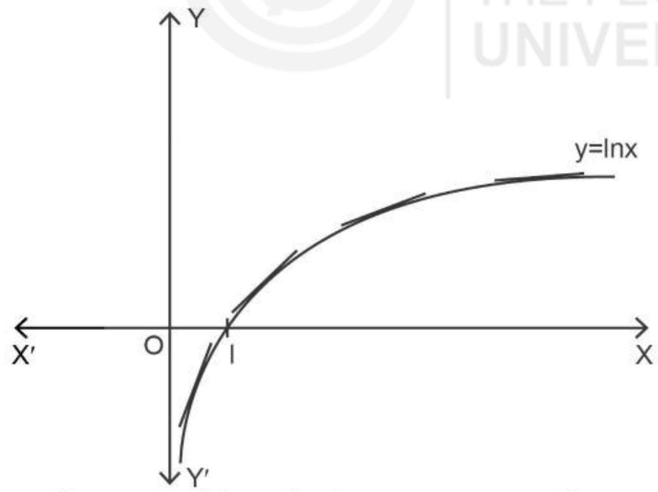
हम $\log_a e$ को प्राकृतिक लघुगणकीय फलन के पदों में भी लिख सकते हैं, जिससे प्राप्त होता है :

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln a}$$ [आधार बदलने पर]

$$= \frac{1}{x\ln a}, x > 0$$ [क्योंकि $\ln e = 1$ है]

विशेष रूप से, यदि $a = e$ है, तो हमें प्राकृतिक लघुगणकीय फलन का अवकलज प्राप्त हो जाता है, जो $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, x > 0$ है।

इस प्रकार, सभी संभव आधारों में, आधार $a = e$, $\log_a x$ के अवकलज का सरलतम रूप प्रदान करता है। इसी कारण, कैलकुलस में प्राकृतिक लघुगणकीय फलन को अन्य लघुगणकों के ऊपर प्राथमिकता दी जाती है। चित्र 1, $y = \ln x, x > 0$ और उसके अवकलज के आलेखों को दर्शाती है,



चित्र 1: स्पर्श रेखाओं के साथ lnx का आलेख

बिंदुओं $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 3$ और 5 पर स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ $1/x = 3, 2, 1, \frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ हैं, जो चित्र 1 के भी संगत हैं। आलेख से, ऐसा प्रतीत नहीं होता कि यहाँ कोई क्षैतिज स्पर्श रेखाएँ हैं। इसकी पुष्टि इस तथ्य से भी हो जाती है कि x के किसी भी वास्तविक मान के लिए, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ शून्य (0) के बराबर नहीं है।

हम लघुगणकीय फलनों के अवकलजों को ज्ञात करने के कुछ उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 1: $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : क्योंकि $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ है, और इसीलिए सभी x के लिए धनात्मक है,

इसलिए $\ln(x^2-2x+2)$ सुपरिभाषित है।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\ln(x^2-2x+2))$$

$$=\frac{d}{dt}(\ln t).\frac{dt}{dx},\text{ जहाँ } t=x^2-2x+2 \text{ है।}$$

$$=\frac{1}{t}\frac{d}{dx}(x^2-2x+2)$$

$$=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

***

उदाहरण 2: $\ln|x|$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : $x=0$ के अतिरिक्त $\ln|x|$ सभी x के लिए परिभाषित है।

इसलिए, हम $x>0$ और $x<0$ वाली दोनों स्थितियों पर पृथक रूप से विचार करेंगे।

i) जब $x>0$ है, तब $y=\ln|x|=\ln x$ है।

यहाँ, $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\ln x)$

$=\frac{1}{x}$, यदि $x>0$ है।

ii) जब $x<0$ है, तब $y=\ln|x|=\ln(-x)$ है।

यहाँ, $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[\ln(-x)]=\frac{d}{dx}\ln(t).\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t=-x$ है।

$=\frac{1}{t}.(-1)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$ है।

अतः, $\frac{d}{dx}(\ln|x|)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{ जब } x>0\\ \frac{1}{x}, \text{ जब } x<0\end{cases}$ है।

इस प्रकार, सभी $x\neq 0$ के लिए, $\frac{d}{dx}(\ln|x|)=\frac{1}{x}$ है

***

उदाहरण 3: $y=\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|, |x|\neq 1$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : यदि हम $y=\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|, |x|\neq 1$ को अवकलित करना चाहते हैं, तो हम दो स्थितियों पर विचार करेंगे: i) $|x|>1$ और ii) $|x|<1$

i) यदि $|x|>1$ है, तो हम प्राप्त करते हैं: $\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|=\frac{1+x^2}{-(1-x^2)}$ [क्योंकि $|x|>1$ से $1-x^2$ ऋणात्मक है]

$$=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

इसलिए, इस स्थिति में, $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\right)$

$=\frac{d}{dt}(\ln t).\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ है।

$$= \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं: $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{1-x^4}$

ii) जब $|x|<1$ है, तब $\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|$ है और इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{4x}{1-x^4}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि सभी x के लिए, ताकि $|x| \neq 1$ है, $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{1-x^4}$ है।

***

उदाहरण 4: $y = \log_7(\tan^3 x)$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log_7(\tan^3 x))$

$$= \frac{d}{dt}(\log_7 t).\frac{dt}{dx}, \text{ जहाँ } t = \tan^3 x \text{ है।}$$

$$= \frac{1}{t}\log_7 e.\frac{d}{dx}(\tan^3 x)$$

$$= \log_7 e\frac{1}{\tan^3 x}.3\tan^2 x.\frac{d}{dx}(\tan x), \text{ (श्रृंखला नियम से)}$$

$$= \log_7 e\frac{1}{\tan^3 x}\,3\tan^2 x\sec^2 x$$

$$= 3\log_7 e\frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

***

उदाहरण 5: $f(x) = \sqrt{\ln x}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए, जब $x \geq 1$ है।

हल : $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\ln x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right).\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = \ln x$ है।

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}.\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

***

उदाहरण 6: कोई कण वक्र $y = x\ln x$ के अनुदिश गति कर रहा है। x के वे सभी मान ज्ञात कीजिए, जिन पर समय के सापेक्ष y की परिवर्तन-दर x की परिवर्तन-दर की तीन गुनी है।

हल : $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}$

$$= \left(x.\frac{1}{x} + 1.\ln x\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= (1 + \ln x)\frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

$\dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{dx}{dt}$ दिया हुआ है। (2)

(1) और (2) की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$(1 + \ln x) = 3$ (कल्पना करते हुए कि $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ है)

$\Rightarrow \ln x = 2$

$\Rightarrow x = e^2$

***

उदाहरण 7: एक हवाईजहाज किसी हवाई अड्डे से, जो समुद्र स्तर पर है, उड़ान प्रारंभ करता है तथा समय t (मिनटों में इसकी ऊँचाई (मीटरों में) $h = 500\ln(t+1)$ द्वारा दी जाती है। समय $t = 3$ मिनट पर, चढ़ाई-दर ज्ञात कीजिए। h और h′ के आलेखों की तुलना भी कीजिए।

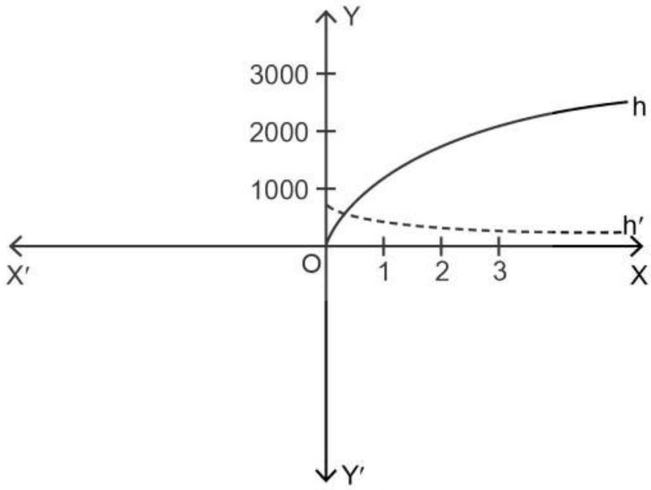
हल: $h = 500\ln(t+1)$ दिया है। चढ़ाई-दर ज्ञात करने के लिए, हमें प्रथम अवकलज ज्ञात करने की आवश्यकता है।

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(500\ln(t+1))$$

$$= \frac{500}{1+t}$$

$t = 3$ पर, हम $\dfrac{dh}{dt} = 125\,m$ /मिनट प्राप्त करते हैं।

अतः, वाँछित चढ़ाई-दर 125m/मिनट है। चित्र 2, h के आलेख (मोटी रेखा) और h' के आलेख (बिंदुकित रेखा) को दर्शाती है।



चित्र 2: h और h′ के आलेख

आलेख यह दर्शाता है कि कम ऊँचाइयों पर चढ़ाई-दर अच्छी है, परंतु जैसे-जैसे आप ऊँचे जाते हैं, यह दर कम होती जाती है।

***

उदाहरण 8: $y=(x^2-x)\ln(6x)$ के आलेख की $x=2$ पर स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: किसी बिंदु पर फलन के आलेख की स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात करने के लिए, हमें उस बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता की आवश्यकता है। हमें $x=2$ प्राप्त है, जो $y=2\ln(12)$ देता है। इस प्रकार, वह बिंदु $(2, 2\ln(12))$ है।

$$\text{प्रवणता } = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(2,2\ln(12)) \text{ पर}}$$

$$= \left[(2x-1)\ln(6x)+(x^2-x).\frac{1}{6x}.6\right]_{(2,2\ln(12)) \text{ पर}}$$

$$= 3\ln(12)+1$$

इस प्रकार, स्पर्श रेखा की समीकरण है:

$y-2\ln(12)=[3\ln(12)+1](x-2)$ [रेखा की समीकरण के लिए, इकाई 3 का स्मरण कीजिए]

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) निम्नलिखित के x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए:

i) $\log_2 2x$ ii) $7\log_{11}(5x^2+2)$

iii) $x^2\ln x$ iv) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x|<1$

v) $\ln(\sin^4 x)$ vi) $\log_{10}(2+\sin x)$

E2) मान लीजिए कि एक दी हुई ध्वनि के लिए ध्वनि दाब (sound pressure) $P=10\log\frac{w}{w_o}$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ w ध्वनि शक्ति है और w_o एक अचर है, जो निम्नतम शक्ति (दाब) के लिए प्रयोग किया जाता है। समय t के सापेक्ष ध्वनि दाब की परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए, यदि $w=7.2, w_o=10^{-12}$ watt / m^2 और किसी समय t पर $\frac{dw}{dt}=0.5$ है।

अगले भाग में, हम चरघातांकीय फलन तथा प्राकृतिक चरघातांकीय फलन के अवकलज ज्ञात करने के लिए, प्रतिलोम फलन प्रमेय का उपयोग करेंगे।

10.3 चरघातांकीय फलनों के अवकलज

आप चरघातांकीय फलनों तथा लघुगणकीय फलनों की परिभाषाओं का स्मरण कर सकते हैं। ये फलन एक दूसरे के प्रतिलोम हैं। चरघातांकीय फलन a^n का अवकलज ज्ञात करने के लिए, जहाँ $a>0$ है, हम प्रतिलोम फलन प्रमेय का प्रयोग करेंगे। $y=a^x$ पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि लघुगणकीय फलन अवकलनीय होता है तथा

उसका अवकलज शून्येतर है। हम जानते हैं कि $\log_a x$ का प्रतिलोम अवकलनीय है, अर्थात् a^x अवकलनीय है तथा प्रतिलोम फलन प्रमेय का प्रयोग करने पर, इसका अवकलज है:

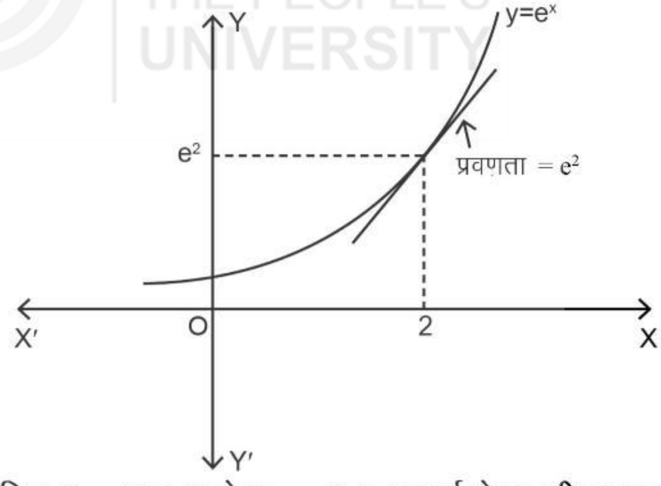
$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\log_a y)}$$ [क्योंकि $y = a^x$ है, इसलिए $x = \log_a a$ है।]

$$= \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = y \ln a = a^x \ln a$$

अतः, $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ है।

विशेष रूप में, यदि $a = e$ हो, तो $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \ln e = e^x$ है।

आप देख सकते हैं कि प्राकृतिक चरघातांकीय फलन स्वयं अपना ही अवकलज है। यह सरलतम अवकलन सूत्र है तथा कलन में अधिकांशतः प्रयोग किया जाता है। प्राकृतिक चरघातांकीय फलन $x = 0$ पर इसका मान 1 देता है, अर्थात् $f(x) = e^x, f'(x) = e^x$ और $f'(0) = e^0 = 1$ है। हम कह सकते हैं कि जहाँ इस फलन का आलेख y-अक्ष को काटता है, वहाँ स्पर्श रेखा की प्रवणता 1 है। साथ ही, किसी भी बिंदु x पर, वक्र $y = e^x$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु के y-निर्देशांक के बराबर होती है। आइए एक उदाहरण लें, जब $x = 2$ है। इस बिंदु पर, y का मान $e^2 \approx 7.39$ है। क्योंकि e^x का अवकलज e^x ही है, इसलिए $x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता भी $e^2 \approx 7.39$ होगी। हम चित्र 3 में, यह देखते हैं कि यह सत्य है।



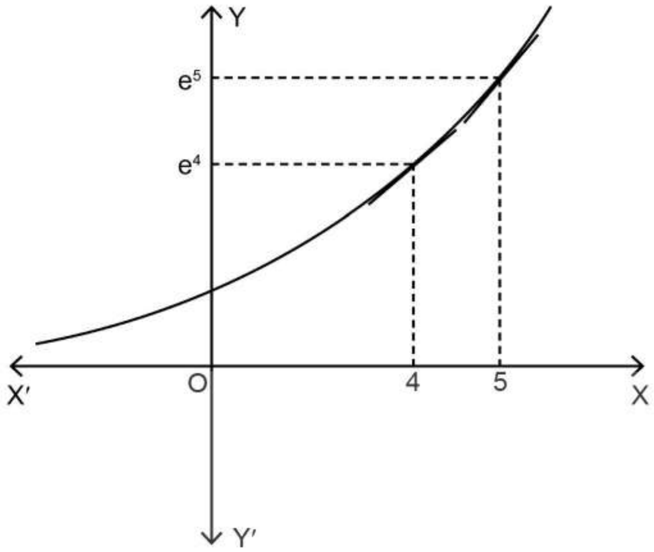
चित्र 3 : e^x का आलेख, $x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

अब आइए देखें कि क्या यह x के कुछ अन्य मानों के लिए भी सत्य है। उदाहरणार्थ, x^4 पर $e^4 \approx 54.6$ है तथा $x = 5$ पर $e^5 \approx 148.4$ है। हम फलन $y = e^x$ की $x = 4$ और $x = 5$ पर स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ ज्ञात करके इसका सत्यापन भी कर सकते हैं।

$x = 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \lim_{\delta x \to 0} \frac{e^{4+\delta x} - e^4}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{e^4(e^{\delta x} - 1)}{\delta x} = e^4 \approx 54.6$

इसी प्रकार, $x = 5$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \lim_{\delta x \to 0} \frac{e^5(e^{\delta x} - 1)}{\delta x} = e^5 \approx 148.4$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि अवकलज का मान तथा स्पर्श रेखा की प्रवणता समान हैं। चित्र 4 इन मानों को दर्शाती है।



चित्र 4 : e^x का आलेख तथा $x = 4$ और $x = 5$ पर स्पर्श रेखाएँ

टिप्पणी 1: चरघातांकीय फलन a^x (चर घातांक और अचर आधार) तथा घातांकीय फलन x^a (चर आधार और अचर घातांक) के अवकलन के बीच भेद जानना महत्वपूर्ण है।

उदाहरणार्थ,

$$\frac{d}{dx}(x^{10}) = 10x^9 \text{ है तथा}$$

$$\frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \ln 10 \text{ है।}$$

अब, आप निम्नलिखित उदाहरणों में, चरघातांकीय फलनों के अवकलज ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 9 : निम्नलिखित के x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $e^{(x^2+2x)}$ ii) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ iii) $a^{\sin^{-1} x}$

हल: i) मान लीजिए कि $y = e^{(x^2+2x)}$ है। तब श्रृंखला नियम से,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} \text{ जहाँ } t = x^2 + 2x \text{ है।}$$

$$= e^{(x^2+2x)}(2x+2)$$

अतः, $\dfrac{d}{dx}[e^{(x^2+2x)}] = 2(x+1)e^{(x^2+2x)}$ है।

ii) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) = \frac{(e^x - e^{-x})\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x})\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$ [अवकलज के भागफल के नियम से]

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \quad [\because \frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x} \text{ है}]$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

iii) $a^{\sin^{-1}x}$ को अवकलित करने के लिए, हम पुनः श्रृंखला नियम का अनुप्रयोग करते हैं।

$$\frac{d}{dx}(a^{\sin^{-1}x}) = \frac{d}{dt}(a^t).\frac{dt}{dx} \text{ जहाँ } t = \sin^{-1}x \text{ है।}$$

$$= a^{\sin^{-1}x} \ln a \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} a^{\sin^{-1}x} \ln a$$

***

उदाहरण 10 : y' ज्ञात कीजिए, यदि $y = e^{-2x}\sin 3x$ है।

हलः $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{-2x}\sin 3x)$

$$= e^{-2x}.\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \frac{d}{dx}(e^{-2x}).\sin 3x \text{ [अवकलजों के गुणनफल नियम के प्रयोग से]}$$

$$= e^{-2x}.\cos 3x.3 + e^{-2x}(-2).\sin 3x \quad \text{[श्रृंखला नियम के प्रयोग से]}$$

$$= e^{-2x}[3\cos 3x - 2\sin 3x]$$

***

उदाहरण 11 : समय t पर किसी विशेष पौधे की लम्बाई में वृद्धि $L(t) = \frac{1}{1+a\,e^{-kt}}$ है, जहाँ t चर है तथा a और k अचर हैं।

समय के सापेक्ष वृद्धि-दर ज्ञात कीजिए।

हलः वृद्धि-दर $= L'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+a\,e^{-kt}}\right)$

$$= -\frac{1}{(1+a\,e^{-kt})^2}.\left(a\,e^{-kt}(-k)\right)$$

$$= \frac{ak\,e^{-kt}}{\left(1+a\,e^{-kt}\right)^2}$$

***

उदाहरण 12 : धारिता C, प्रतिरोध R तथा वोल्टेज के एक स्त्रोत वाले एक धारित्र (Capacitor) को अंतर्विष्ट करने वाले एक परिपथ (Circuit) में धारित्र का आवेश (charge) q, है, जो समीकरण $q = CE(1-e^{-t/RC})$ कूलॉम (Coulomb) द्वारा दिया जाता है। दर्शाइए कि आवेश q समीकरण $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E$ को संतुष्ट करता है।

हलः $q = CE(1-e^{-t/RC})$ दिया है।

इसलिए, $\frac{dq}{dt} = \frac{CE}{RC}(e^{-t/RC})$

$$= \frac{E}{R}e^{-t/RC}$$

अब, $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = Ee^{-t/RC} + E(1-e^{-t/RC})$

$$= E(e^{-t/RC} + 1 - e^{-t/RC})$$

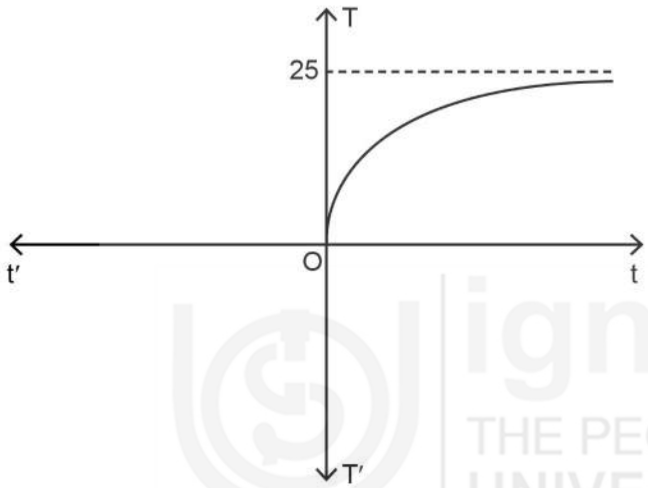
$$= E \text{ है।}$$

***

उदाहरण 13 : तापमान $4^\circ C$ वाले एक शिकंजी के गिलास को एक कमरे में रख दिया जाता है, जिसका तापमान एक अचर $25^\circ C$ है। भौतिकी के एक सिद्धांत, जो न्यूटन का शीतलन-नियम कहलाता है, का प्रयोग करते हुए, यह दर्शाया जा सकता है कि यदि शिकंजी का तापमान 1 घंटे में $15^\circ C$ तक पहुँचता है, तो शिकंजी के तापमान T को व्यतीत समय t के एक फलन के रूप में समीकरण $T = 25 - 21e^{-0.5t}$ द्वारा निदर्शित किया जाता है, जहाँ T, $^\circ C$ में है तथा t घंटों में है। इस समीकरण के आलेख को चित्र 5 में दर्शाया गया है, जो हमारे दैनिक अनुभव की पुष्टि करता है कि शिकंजी का तापमान धीरे-धीरे कमरे के तापमान की ओर अग्रसर होता रहता है।

i) समय के साथ तापमान-वृद्धि की दर का क्या होता है?

ii) ऊपर (i) में दिए अपने निष्कर्ष की पुष्टि के लिए एक अवकलज का उपयोग कीजिए।



चित्र 5

हल : i) समय के सापेक्ष तापमान की परिवर्तन-दर वक्र $T = 25 - 21e^{-0.5t}$ की प्रवणता है। जैसे-जैसे t में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे वक्र उठता जाता है ताकि उसकी प्रवणता घट कर 0 हो जाती है। इस प्रकार, तापमान में वृद्धि एक घटती दर पर होती है।

ii) समय के सापेक्ष तापमान की परिवर्तन-दर $\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(25 - 21e^{-0.5t})$ $= -21(-0.5)e^{-0.5t} = 10.5e^{-0.5t}$ है। जैसे-जैसे t में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे अवकलज घटता जाता है, जो ऊपर भाग i) के निष्कर्ष की पुष्टि करता है।

***

यद्यपि हम यहाँ इसे सिद्ध नहीं कर रहे हैं, फिर भी चरघातांकीय फलन $f(x) = ce^{kx}$ ही केवल ऐसा फलन है, जिसका अवकलज स्वयं उस फलन का एक अचर गुना होता है। अर्थात् $\frac{dy}{dx} = ky$ या $f'(x) = k \cdot f(x)$ है, जहाँ किसी अचर c के लिए $y = ce^{kx}$ या $f(x) = ce^{kx}$ है।

उदाहरणार्थ, यदि $\frac{dy}{dx} = 5y$ है, तो $y = ce^{5x}$ है, जहाँ c एक स्वेच्छिक अचर है। हम इसकी जाँच कर सकते हैं कि जब हम $y = ce^{5x}$ लेते हैं, तब $y' = c.5.e^{5x} = 5.y$ है। हम कह सकते हैं कि $2x + 5 = 11$ का हल 3 है तथा समीकरण $\frac{dy}{dx} = ky$ का हल फलन $y(x) = ce^{kx}$ है। आइए अगले उदाहरण में इसके अनुप्रयोग को देखें।

उदाहरण 14: किसी विशिष्ट प्रजाति की जनसंख्या 2010 के प्रारंभ में लगभग 8.04 हजार थी। आकलन से, यह ज्ञात है कि इस जनसंख्या में घातांकीय रूप से प्रतिवर्ष 0.02 या 2% की दर से वृद्धि हो रही है। इस प्रकार, $\frac{dP}{dt} = 0.02P$ है, जहाँ P वृद्धि है तथा t वर्षों में समय है।

i) t के एक फलन के रूप में P ज्ञात कीजिए।

ii) 2050 के प्रारंभ में जनसंख्या क्या हो जाएगी?

iii) समय की कितनी अवधि बाद, जनसंख्या 2010 की जनसंख्या की दुगुनी हो जाएगी?

हल : i) $P(t) = ce^{kt} = 8.04e^{0.02t}$ है।

ii) $P(40) = 8.04e^{0.02(40)} = 8.04e^{0.8} \approx 17.89 \approx 18$ हजार

iii) मान लीजिए वह अवधि, जिसमें जनसंख्या दुगुनी हो जाएगी, t है। तब, $e^{0.02t} = 2$

दोनों पक्षों का ln लेने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$0.02t = \ln 2$ और $t = \frac{\ln 2}{0.02} \approx 33$ वर्ष

इस प्रकार, 2010 वाली जनसंख्या 2043 में दुगुनी हो जाएगी।

***

देखिए कि क्या आप निम्नलिखित प्रश्नों को अब हल कर सकते हैं।

E3) निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए:

i) $5e^{(x^2-2)T}$, जहाँ T एक अचर है। ii) $e^{(x+1)/x}$

iii) $(x+2)e^{\sqrt{x}}$ iv) $e^{-m\tan^{-1}x}$, जहाँ m एक अचर है।

v) 2^{2x} vi) $7^{\cos x}$

E4) $x = 0$ पर की तुलना में, $x = 1/2$ पर $f(x) = 2^x$ में कितनी तेजी से वृद्धि हो रही है,

E5) वह फलन ज्ञात कीजिए, जो $\frac{d}{dt}[f(t)] = -3f(t)$ को संतुष्ट करता है।

अगले भाग में, हम अतिपरवलीय फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे।

10.4 अतिपरवलीय फलन

अब, आइए अतिपरवलीय (hyperbolic) फलनों के अवकलज ज्ञात करें, जिनका अध्ययन आप इकाई 7 में कर चुके हैं। याद कीजिए कि अतिपरवलीय फलन प्राकृतिक चरघातांकीय फलन के पदों में परिभाषित किए जाते हैं, जिसका अवकलज आप पहले से जानते हैं। इसलिए इनके अवकलजों को परिकलित करना बहुत सरल है। उदाहरणार्थ, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ है।

इसका अर्थ है कि $\frac{d}{dx}(\sinh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^x-e^{-x})=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$

इसी प्रकार, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ देता है कि $\frac{d}{dx}(\cosh x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$

$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ की स्थिति में, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}(\tanh x)=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$=1-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=1-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2$$
$$=1-\tanh^2 x=\operatorname{sech}^2 x$$

आप cothx, sechx और cosech x के अवकलजों को ज्ञात करने के लिए, इसी विधि को अपना सकते हैं। आप इनके अवकलज ज्ञात करना पसंद कर सकते हैं।

सारणी 1 में, हमने इन सभी परिणामों को एकत्रित किया है।

सारणी 1 : अतिपरवलीय फलनों के अवकलज

फलन	अवकलज
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\coth x$	$-\operatorname{cosech}^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{cosech} x$	$-\operatorname{cosech} x \coth x$

कुछ उदाहरणों को हल करने का प्रयास कीजिए।

उदाहरण 15 : dy/dx ज्ञात कीजिए, जब $y=\tanh(1-x^2)$ है।

हलः $\frac{dy}{dx}=\operatorname{sech}^2(1-x^2).\frac{d}{dx}(1-x^2)$

$=-2x\operatorname{sech}^2(1-x^2)$

***

उदाहरण 16 : $\cosh\sqrt{x}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हलः $\frac{d}{dx}(\cosh\sqrt{x})=\sinh\sqrt{x}.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{\sinh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

***

उदाहरण 17 : रज्जु वक्र (केटेनरी) $y=10\cosh\left(\frac{x}{10}\right)$ की $x=5$ पर स्पर्श रेखा की प्रवण ाता ज्ञात कीजिए।

हलः $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(10\cosh\left(\frac{x}{10}\right)\right)$

$$= 10.\sinh\left(\frac{x}{10}\right) \times \frac{1}{10}$$

$$= \sinh\left(\frac{x}{10}\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=5 \text{ पर}} = \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore$ वाँछित प्रवणता $= \dfrac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{2}$ है।

***

देखिए कि क्या आप इन प्रश्नों को स्वयं कर सकते हैं।

E6) $f'(x)$ ज्ञात कीजिए, जब $f(x) =$

i) $\tan h \dfrac{4x+1}{5}$ ii) $\sin h\, e^{2x}$

iii) $\cot h\,(1/x)$ iv) $\sec h\,(\ln x)$

v) $e^x \cos h\, x$

E7) वक्र $y = \cos h\, x$ के किस बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 1 है?

अब, हम प्रतिलोम अतिपरवलीय फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे। प्रतिलोम अतिपरवलीय फलनों के लिए, इकाई 7 का स्मरण कीजिए।

आइए प्रतिलोम अतिपरलीय साइन फलन से प्रारंभ करें।

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

इस प्रकार, $\dfrac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ है।

आगे $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \dfrac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1 \text{ है।}$$

ध्यान दीजिए कि $\cosh^{-1} x$ के अवकलज का $x = 1$ पर अस्तित्व नहीं है। अब, हम इन प्रतिलोम अतिपरवलीय फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। हम ठीक उसी प्रकार कार्य करते हैं, जैसा कि प्रतिलोम अतिपरवलीय साइन और कोसाइन फलनों के लिए किया था तथा इनके अवकलज सारणी 2 में दिए गए हैं।

सारणी 2: प्रतिलोम अतिपरवलीय फलनों के अवकलज

फलन	अवकलज
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x>1$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \|x\|<1$
$\coth^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \|x\|>1$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0<x<1$
$\operatorname{cosech}^{-1} x$	$\frac{-1}{\|x\|\sqrt{1+x^2}}, x \neq 0$

आइए अब कुछ प्रश्नों को हल करने के लिए इन परिणामों का प्रयोग करें।

उदाहरण 18: निम्नलिखित के x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $f(x) = \sinh^{-1}(\tan x)$ ii) $g(x) = \tanh^{-1}(\cos e^x)$

हल : i) आइए $f(x) = \sinh^{-1}(\tan x)$ से प्रारंभ करें।

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x+1}} \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{|\sec x|}\sec^2 x = |\sec x|$$

ii) अब, यदि $g(x) = \tanh^{-1}(\cos e^x)$ है, तो इसका अर्थ है कि

$$g'(x) = \frac{1}{1-\cos^2 e^x} \frac{d}{dx}(\cos e^x)$$

$$= \frac{1}{\sin^2 e^x}(-\sin e^x).e^x$$

$$= \frac{-e^x}{\sin e^x} = -e^x \operatorname{cosec} e^x$$

***

अब, हम आपके लिए, अवकलित करने के लिए, कुछ फलन दे रहे हैं।

E8) निम्नलिखित फलनों को उनके संगत प्राँतों में अवकलित कीजिए :

i) $\operatorname{cosech}^{-1}\left(5\sqrt{x}\right)$ ii) $[\operatorname{sech}^{-1}(\cos^2 x)]^{1/3}$

iii) $\coth^{-1}(e^{(x^2+5x-6)})$ iv) $\tanh^{-1}(\coth x) + \coth^{-1}(2x)$

v) $\sinh^{-1}\sqrt{x} + \cosh^{-1}(2x^2)$

अगले भाग में, हम अवकलजों को ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे।

10.5 लघुगणकीय अवकलन की विधियाँ

इस भाग में, हम अवकलजों को ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे। हम यह भी देखेंगे कि कुछ फलनों के अवकलन की समस्या इन विधियों के प्रयोग से अति सरल हो जाती है। कुछ परिणाम, जिनका हमने पिछले भागों में अध्ययन किया है, हमारे लिए यहाँ उपयोगी होंगे। इकाई 9 में, हम देख चुके हैं कि $\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$ है, जबकि r एक परिमेय संख्या है। अब, हम इस परिणाम को उस स्थिति के लिए विस्तृत करने में सक्षम हैं, जबकि r कोई वास्तविक संख्या है। अतः, यदि $y = x^r$ है, जहाँ $x > 0$ और $r \in \mathbb{R}$ है, तो हम इसे $y = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}$ लिख सकते हैं, क्योंकि प्राकृतिक चरघातांकीय और लघुगणकीय फलन एक दूसरे के प्रतिलोम होते हैं।

यदि $x < 0$ है तो हो सकता है कि x^r वास्तविक संख्या नहीं हो। उदाहरण के तौर पर $-3^{1/2} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$ है।

इस प्रकार, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{r \ln x}) = e^{r \ln x} \frac{d}{dx}(r \ln x)$

$$= re^{r \ln x} \frac{1}{x} = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1} \text{ है।}$$

इससे सिद्ध होता है कि

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1},\ x > 0 \text{ के लिए, } r \in \mathbb{R} \text{ है।}$$

हमें विश्वास है कि आप इस प्रश्न को हल कर पाएँगे।

E9) अवकलित कीजिए:

i) $x^{\sqrt{2}}$ ii) x^e

कभी-कभी, हम पाते हैं कि अवकलजों को ज्ञात करने की विधि सरल हो जाती है, यदि हम अवकलन करने वाले लघुगणक ले लेते हैं। यहाँ हम इस बात को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे। परंतु किसी राशि का लघुगणक लेने से पहले हमें यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि यह राशि ऋणेतर हो। इस कठिनाई को दूर करने के लिए, आइए सर्वप्रथम $\ln(|x|)$ का अवकलज, मापांक फलन की परिभाषा से नहीं करते हुए, जैसा कि हमने उदाहरण 2 में किया था, अन्य विधि से ज्ञात करें।

आप इकाई 6 से स्मरण कर सकते हैं कि $|x| = \sqrt{x^2}$ है।

अतः, $\ln(|x|) = \ln\sqrt{x^2}$ तथा

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

इस प्रकार, हम $\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{1}{x}$ प्राप्त करते हैं।

श्रृंखला नियम का उपयोग करते हुए, अब हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि x का u कोई फलन है, तो $\frac{d}{dx}\ln(|u|) = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$ है। यहाँ हम कह सकते हैं कि जब भी

हम गुणनफल, भागफल या घातांकों से संबद्ध फलनों के अवकलज परिकलित करते हैं, तब लघुगणकीय अवकलन की विधि का उपयोग कर सकते हैं। इसके लिए, हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं:

i) $y = f(x)$ के दोनों पक्षों का प्राकृतिक लघुगणक लीजिए।

ii) लघुगणकों के विभिन्न गुणों को प्रयोग करते हुए, समीकरणों को सरल कीजिए।

iii) x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

iv) y प्राप्त करने के लिए, परिणाम को हल कीजिए।

आइए देखें कि किस प्रकार यह परिणाम, कुछ फलनों के अवकलन के सरलीकरण करने में, हमारी सहायता करता है।

उदाहरण 19: $\dfrac{(x+1)^4 (x^2-3)^{1/2}}{(x-2)^{3/4}(x^3+x+3)^{-1/5}}$ को x के सापेक्ष अवकलिज कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $y = \dfrac{(x+1)^4 (x^2-3)^{1/2}}{(x-2)^{3/4}(x^3+x+3)^{-1/5}}$ है। y में, $(x^3+x+3)^{-1/5}$ के अतिरिक्त, सभी पद घनात्मक हैं। इसलिए, लघुगणक लेने से पहले, हम y का मापांक लेते हैं।

इस प्रकार, $|y| = \dfrac{|x+1|^4 |x^2-3|^{1/2}}{|x-2|^{3/4} |x^3+x+3|^{-1/5}}$ है।

तब, दोनों पक्षों के लघुगणक लेने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\ln|y| = \ln(|x+1|^4 |x^2-3|^{1/2}) - \ln(|x-2|^{3/4} |x^3+x+3|^{-1/5}) \quad [\because \ln(a/b) = \ln a - \ln b \text{ है}]$$

$$= \ln(|x+1|^4) + \ln(|x^2-3|^{1/2}) - \ln(|x-2|^{3/4}) - \ln(|x^3+x+3|^{-1/5}) \quad [\because \ln(ab) = \ln a + \ln b]$$

$$= 4\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-3| - \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln|x^3+x+3| \quad [\because \ln(a^b) = b\ln a]$$

संपूर्ण रूप से अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x+1} + \frac{1}{2(x^2-3)}(2x) - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{3x^2+1}{5(x^3+x+3)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{4}{x+1} + \frac{x}{x^2-3} - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{3x^2+1}{5(x^3+x+3)}\right]$$

$$= \frac{(x+1)^4 (x^2-3)^{\frac{1}{2}}}{(x-2)^{\frac{3}{4}} (x^3+x+3)^{-\frac{1}{5}}}\left[\frac{4}{x+1} + \frac{x}{x^2-3} - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{3x^2+1}{5(x^3+x+3)}\right]$$

***

उदाहरण 20: $x^{\sin x}, x > 0$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : आइए $y = x^{\sin x}$ लिखें। क्योंकि $x > 0$ है, इसलिए $y > 0$ है और इसलिए हम दोनों पक्षों का आधार e पर लघुगणक ले सकते हैं तथा लिख सकते हैं:

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x . \ln x$$

संपूर्ण रूप से अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{1}{x} + \cos x \ln x$$

$$= \frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x$$

अतः, $\dfrac{dy}{dx} = y\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)$

या, $\dfrac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)$

***

उदाहरण 21: $x^{\cos x} + (\cos x)^x$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x) = x^{\cos x}$ और $g(x) = \cos x^x$ है। यह सुनिश्चित करने के लिए, $f(x)$ और $g(x)$ सुपरिभाषित हैं, आइए इनके प्राँतों का $[0, \pi/2]$ तक सीमित करें।

$y = x^{\cos x} + (\cos x)^x = f(x) + g(x) > 0,\ x \in [0, \pi/2]$ के लिए

आइए $f(x)$ और $g(x)$ दोनों को लघुगणक लेकर अवकलित करें।

हमें प्राप्त होता है: $f(x) = x^{\cos x}$

अतः, $\ln f(x) = \cos x \ln x$

इस प्रकार, $\dfrac{1}{f(x)} f'(x) = -\sin x \ln x + \cos x \dfrac{1}{x}$

अर्थात्, $f'(x) = f(x)\left(-\sin x \ln x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$

$$= x^{\cos x}\left(\frac{-x \sin x \ln x + \cos x}{x}\right)$$

$$= x^{\cos x - 1}(\cos x - x \sin x \ln x)$$

इसी प्रकार, $g(x) = (\cos x)^x$ है और इसलिए $\ln g(x) = x \ln \cos x$ है।

तब, $\dfrac{1}{g(x)} g'(x) = \ln \cos x + \dfrac{x}{\cos x}(-\sin x)$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = (\cos x)^x \left(\frac{\cos x \ln \cos x - x \sin x}{\cos x}\right)$$

$$= (\cos x)^{x-1}(\cos x \ln \cos x - x \sin x)$$

अतः, $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$

$$= x^{\cos x - 1}(\cos x - x \sin x \ln x) + (\cos x)^{x-1}(\cos x \ln \cos x - x \sin x)$$

***

यदि आपने उपरोक्त उदाहरणों को समझ लिया है, तो आपको इस विधि से इन प्रश्नों को हल करने में कोई कठिनाई नहीं होनी चाहिए।

E10) निम्नलिखित को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए :

i) $(x^2 - 1)(x^2 + 2)^6 (x^3 - 1)^5$ ii) $\dfrac{1}{(x-1)^5 (x-2)^6 (x-3)^7}$

iii) $(\sin x)^x + (\cos x)^{\tan x}$ iv) $(x^x)^x + x^{(x^x)}$

v) $(\sin x)^{\ln x} + x^x$

ऐसा सदैव नहीं होता कि y को स्पष्ट से x के पदों में (जैसा कि $y = f(x)$) में है), उसका अवकलज ज्ञात करने के लिए, व्यक्त किया जाए। अब हम देखेंगे कि किस प्रकार, x और y में एक संबंध द्वारा अस्पष्ट रूप से परिभाषित फलन (जैसे कि $f(x, y) = 0$)) को अवकलित किया जाता है। ये हम अगले भाग में कर रहे हैं।

10.6 अस्पष्ट अवकलन

अभी तक हमने देखा कि अधिकांश फलन $y = f(x)$ के रूप लिखे हुए थे, अर्थात् आश्रित चर को स्वतंत्र चर के पदों में व्यक्त किया गया था। ऐसे फलनों में y को x का स्पष्ट फलन कहा जाता है। कभी–कभी $y^4 + x^2y^2 - x^4y = 21$ जैसी समीकरण से जटिल या लगभग असंभव होता है कि y को x के पदों में व्यक्त कर लिया जाए। ऐसी स्थिति में, हमें चरों x और y के बीच एक अस्पष्ट संबंध प्राप्त होता है। तब, हम y का x के सापेक्ष अवकलज एक प्रक्रिया का उपयोग करते हुए प्राप्त कर सकते हैं, जो अस्पष्ट अवकलन (implicit diffirentiation) कहलाती है। न केवल अस्पष्ट फलन की स्थिति में, अपितु अस्पष्ट अवकलन कभी-कभी बिना y के लिए हल किए, हमें dy/dx ज्ञात करने में समर्थ बनाता है।

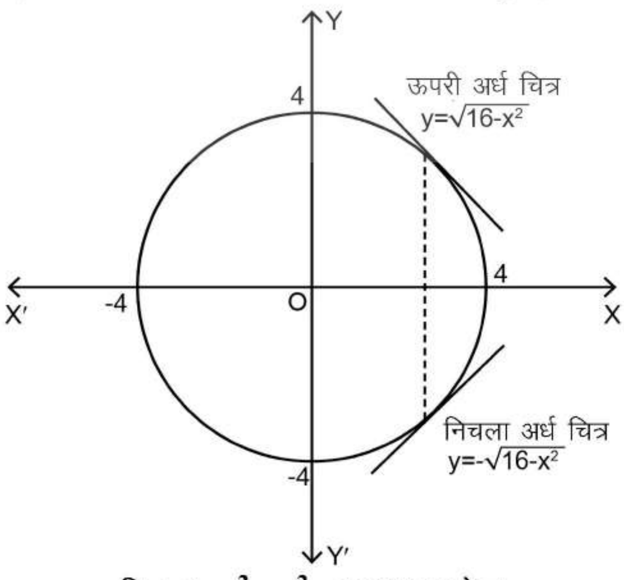
उदाहरणार्थ, समीकरण $y^3 = x$ पर विचार कीजिए। यह समीकरण y के लिए x के पदों में हल की जा सकती है, परंतु हम dy/dx ज्ञात करने के लिए, अस्पष्ट अवकलन का उपयोग कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए, हम श्रृंखला नियम का उपयोग करते हैं।

$$\frac{d}{dx}y^3 = \frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3}(x^{1/3})^{-2} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$ है।

अब, एक अन्य समीकरण $x^2 + y^2 = 16$ पर विचार कीजिए। समीकरण को हल करने पर, हम $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$ प्राप्त करते हैं, जहाँ $y = \sqrt{16 - x^2}$ वृत्त के ऊपरी आधे को निरूपित करती है तथा $y = -\sqrt{16 - x^2}$ निचले आधे को निरूपित करती है। इस प्रकार, ऊपरी आधे पर x का y एक फलन है तथा निचले आधे पर x का y एक भिन्न फलन है।



चित्र 6 : $x^2 + y^2 = 16$ का आलेख

परंतु आइए हम इस वृत्त पर एक संपूर्ण वृत्त के रूप में विचार करें। यह समीकरण एक ऐसी वक्र निरूपित करती है, जिसकी प्रत्येक बिंदु पर एक स्पर्श रेखा होती है। इस स्पर्श रेखा की प्रवणता वृत्त की समीकरण को x सापेक्ष अवकलित करने पर ज्ञात की जा सकती है। अर्थात्, $\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(16)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0$$

यदि हम यह सोचें कि x का y एक फलन है, तथा श्रृंखला नियम का अनुप्रयोग करें, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

यहाँ, आप देखते हैं कि अवकलज केवल एक x के स्थान पर x और y दोनों पर आश्रित है। इसका कारण यह है कि प्रत्येक x-मान के लिए ($x=\pm 4$ के अतिरिक्त), दो y-मान हैं तथा इस वक्र की प्रत्येक बिंदु पर भिन्न-भिन्न प्रवणताएँ हैं।

यदि x और y दोनों घनात्मक हैं, तो हम पहले चतुर्थांश में हैं तथा प्रवणता ऋणात्मक है। इसी प्रकार, प्रवणता ऋणात्मक है, जब x और y दोनों ऋणात्मक हैं। x घनात्मक और y ऋणात्मक या x ऋणात्मक और y घनात्मक के लिए, प्रवणता घनात्मक है। साथ ही (4,0) और (–4,0) पर प्रवणता के हर में शून्य है, जिसका अर्थ है कि इन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ ऊर्ध्वाधर हैं।

व्यापक रूप में, अस्पष्ट अवकलन की प्रक्रिया हमें तब एक अवकलज तक पहुँचा देती है, जब अवकलज के हर में शून्य न हो।

उदाहरण 22: समीकरण $y^3-xy=-6$ के लिए, $x=7, y=2$ के निकट x-मानों 6.8, 6.9, 7.0, 7.1 और 7.2 पर y के मान ज्ञात कीजिए।

हल : x के दिए हुए मानों के लिए, y के मान ज्ञात करने के लिए, हम x के पदों में y के लिए हल करना चाह सकते हैं, परंतु हम गुणनखंडन द्वारा y को अलग नहीं कर सकते। त्रिघात समीकरणों को हल करने का एक सूत्र है, जो द्विघात सूत्र जैसा ही है, परंतु वह यहाँ उपयोगी होने के लिए काफी जटिल है। इसके स्थान पर, पहले ध्यान दीजिए कि $x=7$ और $y=2$ समीकरण को संतुष्ट करता है। अब हम $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करने के लिए, अस्पष्ट अवकलन का उपयोग करते हैं।

अर्थात्, $\frac{d}{dx}(y^3-xy)=\frac{d}{dx}(-6)$

$$\Rightarrow 3y^2.\frac{dy}{dx}-\left(1.y+x.\frac{dy}{dx}\right)=0$$

सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3y^2-x}$

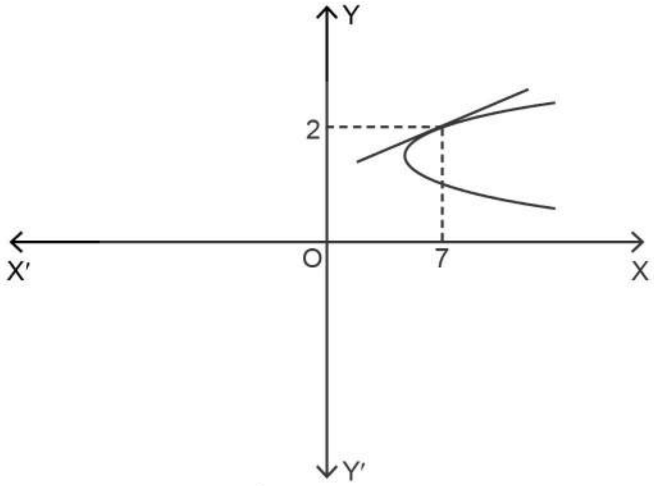
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(7,2)\text{ पर}}=\frac{2}{12-7}=\frac{2}{5}$$

इस प्रकार, (7,2) पर स्पर्श रेखा की समीकरण है :

$$y-2=\frac{2}{5}(x-7)$$

$$\Rightarrow y=0.4x-0.8$$

चित्र 7 इस वक्र के आलेख को दर्शाती है, जिसमें हम देखते हैं कि बिंदु (7, 2) के पास स्पर्श रेखा वक्र के बहुत निकट है। इसलिए, हम x के दिए हुए मानों पर y के सन्निकट मान परिकलित करने के लिए स्पर्श रेखा की समीकरण का उपयोग करते हैं।



चित्र 7 : $y^3 - xy = -6$ का आलेख

x के सन्निकट मान सारणी 3 में दिए गए हैं।

सारणी 3

x	6.8	6.9	7.0	7.1	7.2
y	1.92	1.96	2.00	2.04	2.08

***

देखिए कि क्या आप अब इन प्रश्नों को हल कर पाएँगे।

E11) वे सभी बिंदु ज्ञात कीजिए, जहाँ $y^3 - xy = -6$ की स्पर्श रेखा या तो क्षैतिज है या ऊर्ध्वाधर है।

E12) निम्नलिखित वक्रों की, दिए हुए बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए :

i) $\ln(xy) = 2x, (1, e^2)$ पर

ii) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, (a, 0)$ पर

आइए निम्नलिखित उदाहरणों में दी हुई कुछ और समीकरणों में, अस्पष्ट अवकलन का अनुप्रयोग करें।

उदाहरण 23: $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि x और y समीकरण

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा संबंधित हैं।

हल : समीकरण को संपूर्ण रूप से x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$a\frac{d}{dx}(x^2) + 2h\frac{d}{dx}(xy) + b\frac{d}{dx}(y^2) + 2g\frac{dx}{dx} + 2f\frac{dy}{dx} + \frac{dc}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2ax + 2h.1.y + 2hx.\frac{dy}{dx} + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

या, $\frac{dy}{dx}(2hx + 2by + 2f) = -2ax - 2hy - 2g$

या, $\frac{dy}{dx} = \frac{-(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}$

***

उदाहरण 24: $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि $5y^2 + \sin y = x^2$ है।

हल : $\frac{d}{dx}\left[5y^2 + \sin y\right] = \frac{d}{dx}[x^2]$

$$\Rightarrow 5\frac{d}{dx}[y^2] + \frac{d}{dx}[\sin y] = 2x$$

$$\Rightarrow 5\,.\,2y.\frac{dy}{dx} + \cos y.\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y}$$

***

उदाहरण 25: $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि $x^3 + y^3 = 4xy$ है। बिंदु $(2, 2)$ पर $x^3 + y^3 = 4xy$ की स्पर्श रेखा ज्ञात कीजिए। साथ ही, प्रथम चतुर्थांश में वह बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा क्षैतिज है।

हल : $x^3 + y^3 = 4xy$ के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 4y + 4x\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$$

$(2, 2)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left(\frac{dy}{dx}\right).\ (2, 2)$ पर

$$= \frac{4(2) - 3(2)^2}{3(2)^2 - 4(2)} = -1$$

$(2, 2)$ पर प्रवणता–1 वाली स्पर्श रेखा की समीकरण $(y - 2) = (-1)(x - 2)$ अर्थात् $x + y - 4 = 0$ है। अब स्पर्श रेखा क्षैतिज है जब स्पर्श रेखा की प्रवणता 0 है। अतः, $\frac{dy}{dx} = 0$ से $4y - 3x^2 = 0$ प्राप्त होता है (प्रतिबंध है कि $3y^2 - 4x \neq 0$) हो)। $4y - 3x^2$ को हल करने पर, हम $y = \frac{3x^2}{4}$ प्राप्त करते हैं।

y के इस मान को वक्र की दी हुई समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x^3 + \left(\frac{3x^2}{4}\right)^3 = 4x\left(\frac{3x^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{27x^6}{64} = 3x^3$$

$$\Rightarrow x^6 - \frac{128x^3}{27} = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ या $\dfrac{2^{7/3}}{3}$ है।

क्योंकि $x = 0$ प्रथम चतुर्थांश में नहीं है, इसलिए $x = \dfrac{2^{7/3}}{3}$ है तथा संगत $y = 2^{8/3}$ है।

अतः, $\left(\dfrac{2^{7/3}}{3}, 2^{8/3}\right)$ प्रथम चतुर्थांश में वह बिंदु है, जहाँ वक्र की स्पर्श रेखा क्षैतिज है।

***

उदाहरण 26: मांग समीकरण $x = \sqrt{100 - y^3}$ के लिए, जहाँ y मूल्य है (हजार रूपयों में) तथा x बिक्री है, dy/dx ज्ञात करने के लिए अस्पष्ट रूप से अवकलित कीजिए।

हल : $\dfrac{d}{dx} x = \dfrac{d}{dx}\sqrt{100 - y^3}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}(100 - y^3)^{-1/2}.(-3y^2).\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{-3y^2}{2\sqrt{100 - y^3}}.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{100 - y^3}}{-3y^2}$$

***

देखिए कि क्या आप निम्नलिखित अस्पष्ट फलनों के लिए $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कर सकते हैं।

E13) $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि x और y निम्नलिखित प्रकार संबंधित हैं :

i) $x^2 + y^2 = 1$

ii) $y^2 = 4ax$

iii) $x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1 = 0$

iv) $\cos x \cos y - y^2 \sin^{-1} x + 2x^2 \tan x = 0$

v) $4x^2 - 2y^2 = 1$

vi) $xy^2 = 3 - y$

E14) $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि वक्र की समीकरण $y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$ है। वे बिंदु ज्ञात कीजिए, जहाँ इस वक्र की क्षैतिज स्पर्श रेखाएँ हैं।

E15) दो कार एक ही बिंदु तथा एक ही समय पर चलना प्रारंभ करती हैं। एक दक्षिण की ओर 40 km/h की चाल से तथा दूसरी पश्चिम की ओर 30 km/h की चाल से चलती है। 1 घंटे के अंत में, उनके बीच की दूरी कितनी तेजी से बढ़ रही है?

अगले भाग में, आप अवकलन की अन्य विभिन्न तकनीकों का अध्ययन करेंगे।

10.7 अन्य अवकलन तकनीकें

अभी तक हम ऐसे फलनों के साथ कार्य करते रहे हैं, जो $y = f(x)$ के रूप में व्यक्त थे। हम x को स्वतंत्र चर और y को आश्रित चर कहते हैं। परंतु कभी-कभी दो चरों x और y में संबंध एक अन्य चर, मान लीजिए, t के पदों में भी व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात्, हमें समीकरणों $x = \varphi(t)$ और $y = \psi(t)$ का एक युग्म भी प्राप्त हो सकता है,

जहाँ फलनों φ और ψ का एक उमयनिष्ठ प्राँत हो। उदाहरणार्थ, कभी-कभी एक वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की समीकरण को समीकरणों $x=a\cos t$ और $y=a\sin t, 0\le t\le 2\pi$ के एक युग्म के द्वारा भी व्यक्त कर सकते हैं। ऐसी स्थितियों में, सहायक चर t एक प्राचल (parameter) कहलाता है तथा समीकरण $x=\varphi(t)$ और $y=\psi(t)$ **प्राचलिक समीकरण** कहलाती हैं। ऐसा निरूपण प्राचलिक निरूपण कहलाता है। आप वक्रों के प्राचलिक निरूपण के लिए परिशिष्ट 1 का संदर्भ ले सकते हैं। मान लीजिए कि $x=f(t)$ और $y=g(t)$ है। मान लीजिए कि हम इन प्राचलिक समीकरणों में से प्राचल का विलोपन कर पाते हैं तथा प्राचलिक समीकरणों को $y=F(x)$ के रूप में लिख पाते हैं। ऐसा करने से $g(t)=F(f(t))$ प्राप्त होता है। अब, t के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dt}[g(t)]=\frac{d}{dt}[F(f(t))]$$

$$\Rightarrow g'(t)=F'(f(t)).f'(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}=F'(x).\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow F'(x)=\frac{dy/dt}{dx/dt}, \text{ जब कि } \frac{dx}{dt}\ne \text{ हो।}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt} \text{ है।}$$

अब, मान लीजिए कि कोई फलन एक प्राचल के रूप में परिभाषित है। उसका अवकलज प्राप्त करने के लिए, हमें केवल x और y में संबंधों को प्राचल के सापेक्ष अवकलित करने की आवश्यकता है। निम्नलिखित उदाहरण इस विधि को स्पष्ट करता है।

उदाहरण 27: $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि $x=a\cos\theta$ और $y=b\sin\theta$ है, जहाँ θ एक प्राचल है।

हल : हम दी हुई समीकरणों को x के सापेक्ष अवकलित करते हैं तथा प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{d\theta}=b\cos\theta \text{ और } \frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$$

अब, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\cot\theta$

***

अब इस विधि का उपयोग करने का प्रयास कीजिए।

E16) $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

i) $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$

ii) $x=at^2,\ y=2at$

iii) $x=a\cos^3\theta,\ y=b\sin^3\theta$

iv) $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$

E17) $x=t^5-4t^3, y=t^2$ द्वारा दी गई प्राचल वक्र की (0,4) पर स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

कभी-कभी, अवकलजों को ज्ञात करने की प्रक्रिया बहुत कुछ सीमा तक कुछ उपयुक्त रूपांतरणों द्वारा सरलीकृत हो जाती है। हम कुछ उदाहरण लेंगे, जो इस तथ्य को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 28: रूपांतरण द्वारा $y = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : जैसा कि आप जानते हैं, हम इस फलन को $\cos^{-1}x$ के अवकलज के सूत्र तथा श्रृंखला नियम का प्रयोग करते हुए अवकलित कर सकते हैं। परंतु मान लीजिए कि हम $x = \cos\theta$ रखते हैं। तब, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = \cos^{-1}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$= \cos^{-1}(\cos 3\theta) \qquad [\because \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta]$$

$$= 3\theta$$

$$= 3\cos^{-1}x$$

अब, यह एक बहुत ही सरल व्यंजक है, जिसे सरलता से निम्नलिखित रूप में अवकलित किया जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$

***

उदाहरण 29: रूपांतरण द्वारा, $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : रूपांतरण $x = \tan\theta$ का प्रयोग कीजिए। इससे हमें प्राप्त होता है:

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{1-(1-2\sin^2\theta/2)}{2\sin\theta/2.\cos\theta/2}\right] \qquad \left[\begin{array}{l}\because \sin\theta = 2\sin\theta/2\cos\theta/2 \\ \cos\theta = 1 - 2\sin^2\theta/2\end{array}\right]$$

$$= \tan^{-1}(\tan\theta/2)$$

$$= \theta/2 = \frac{\tan^{-1}x}{2}$$

अब, हम लिख सकते हैं कि $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$ है।

***

आइए एक अन्य समस्या को हल करते हैं।

उदाहरण 30: $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ को $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल : इसके लिए, मान लीजिए कि $y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ है तथा $z = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ है। हमारा लक्ष्य dy/dz ज्ञात करना है।

हम रूपांतरण $x = \tan\theta$ का प्रयोग करेंगे। इससे हमें प्राप्त होता है :

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta,$$ तथा

$$z = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan 0}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$

अब, यदि हम y और z को 0 के सापेक्ष अवकलित करें, तो हम $dy/d\theta = 2$ तथा $dz/d\theta = 2$ प्राप्त करते हैं।

अतः, $\frac{dy}{dz} = \frac{dy/d\theta}{dz/d\theta} = 1$ है।

***

इस प्रकार, आपने देखा कि रूपांतरणों का उपयोग करते हुए, विभिन्न प्रकार की जटिल समस्याओं को सरलता से हल किया जा सकता है। यहाँ सफलता पूर्वक हल प्राप्त करने की कुंजी एक उपयुक्त रूपांतरण का चुनाव होती है। हम नीचे कुछ प्रश्न दे रहे हैं, जो आपको एक सही रूपांतरण चुनने में आवश्यक अभ्यास प्रदान करेंगे।

E18) उपयुक्त रूपांतरणों द्वारा, निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए:

i) $\sin^{-1}(3x-4x^3)$ ii) $\cos^{-1}(1-2x^2)$

iii) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ iv) $\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

v) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

आइए अब इस इकाई में अध्ययन किए गए बिंदुओं का सारांश दें।

10.8 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. चरघातांकीय और लघुगणकीय फलनों तथा अतिपरवलीय फलनों और उनके प्रतिलोमों के अवकलजों को प्राप्त किया। हम इन्हें निम्नलिखित सारणी में दे रहे हैं :

फलन	अवकलज
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

$\tanh x$	$\text{sech}^2 x$
$\coth x$	$-\text{cosech}^2 x$
$\text{sech}\, x$	$-\text{sech}\, x \tanh x$
$\text{cosech}\, x$	$-\text{cosech}\, x \coth x$

2. प्रतिलोम अतिपरवलीय फलनों के अवकलज

फलन	अवकलज
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x>1$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \|x\|<1$
$\coth^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \|x\|>1$
$\text{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0<x<1$
$\text{cosech}^{-1} x$	$\frac{-1}{\|x\|\sqrt{1+x^2}}, x \neq 0$

3. परिणाम $\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$ को सभी $r \in \mathbb{R}$ और $x > 0$ के लिए लागू किया।

4. **लघुगणकीय अवकलन :**

- मापांक लीजिए, यदि किसी x के लिए ऋणात्मक मान लेता है।
- दोनों पक्षों का लघुगणक लीजिए।
- श्रृंखला नियम का प्रयोग करते हुए, $\frac{d}{dx}[\ln(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)}$ के रूप में अवकलित कीजिए।

5. **अस्पष्ट अवकलन :**

- समीकरण के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष या उस चर के सापेक्ष, जिसके सापेक्ष आपको अवकलन करना है, अवकलित कीजिए,
- आवश्यक अवकलन के नियमों का अनुप्रयोग कीजिए।
- समीकरण के एक पक्ष में $\frac{dy}{dx}$ के साथ के सभी पदों को एक गुणखंड या गुणक के रूप में संयोजित कीजिए।

- $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

6. **प्राचलिक समीकरणों का अवकलनः**

   यदि $x = f(t)$ और $y = g(t)$ है, तो $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ है।

7. अवकलज ज्ञात करने के लिए, विभिन्न रूपांतरणों का उपयोग भी किया जा सकता है।

10.9 हल / उत्तर

E1) i) $\frac{d}{dx}(\log_2 2x) = \log_2 e.\frac{1}{2x}.\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{x}\log_2 e$

ii) $\frac{d}{dx}(7\log_{11}(5x^2+2)) = 7\frac{d}{dx}(\log_{11}(5x^2+2))$

$$= 7\log_{11} e.\frac{1}{5x^2+2}\frac{d}{dx}(5x^2+2)$$

$$= \frac{70x}{5x^2+2}\log_{11} e$$

iii) $\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = x^2\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x.\frac{d}{dx}(x^2)$

$$= x + 2x\ln x$$

iv) For $|x| < 1$, $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \frac{1-x}{1+x}.\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$= \frac{1-x}{1+x}.\frac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-x^2)}, |x| < 1 \text{ है।}$$

v) $\frac{d}{dx}(\ln(\sin^4 x)) = \frac{1}{\sin^4 x}.\frac{d}{dx}(\sin^4 x)$

$$= \frac{1}{\sin^4 x}.4\sin^3 x.\frac{d}{dx}\sin x$$

$$= \frac{4\cos x}{\sin x} = 4\cot x$$

vi) $\frac{d}{dx}(\log_{10}(2+\sin x)) = \frac{d}{dx}(\log_{10} t).\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = 2+\sin x$ है।

$$= \frac{1}{t}\log_{10} e.\frac{d}{dx}(2+\sin x)$$

$$= \frac{\log_{10} e.\cos x}{(2+\sin x)}$$

E2) $w_o = 10^{-12}\, w/m^2$ दिया है।

$$P = 10\log\frac{w}{10^{-12}}$$

$$= 10[\log w - 12\log 10]$$

अब, एक लघुगणक के अवकलज के लिए, सूत्र का प्रयोग करते हुए, तथा क्योंकि $\log_{10}$ एक अचर है, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dP}{dt} = 10\left[\frac{1}{w}\log_{10} e.\frac{dw}{dt} - 0\right]$$

$$= 10\left[\frac{1}{w}\log_{10} e.\frac{dw}{dt}\right]$$

अब, हम किसी t के लिए, अपने w और $\frac{dw}{dt}$ के मानों को प्रतिस्थापित करते हैं। तब, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dP}{dt} = 10\left[\frac{1}{7.2}\log_{10} e.(0.5)\right]$$

$$= 0.302 \, dB/s$$

$\frac{dP}{dt}$ की इकाई dB/s है, क्योंकि ध्वनि दाब P, dB में है तथा यह समय के अनुसार बदल रहा है।

E3) i) $\frac{d}{dx}(5e^{(x^2-2)T}) = 5\frac{d}{dx}(e^{(x^2-2)T})$

$$= 5\frac{d}{dt}e^{t}.\frac{dt}{dx}, \text{ जहाँ } t = (x^2-2)T \text{ है।}$$

$$= 5e^{(x^2-2)T}.(2x)T$$

$$= 10x\,Te^{(x^2-2)T}$$

ii) $\frac{d}{dx}e^{(x+1)/x} = e^{(x+1)/x}.\frac{d}{dx}\left(\frac{(x+1)}{x}\right)$

$$= e^{(x+1)/x}.\frac{x\frac{d}{dx}(x+1) - (x+1)\frac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$= e^{(x+1)/x}.\frac{x.1-(x+1).1}{x^2} = -\frac{e^{(x+1)/x}}{x^2}$$

iii) $\frac{d}{dx}((x+2)e^{\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(x+2) + (x+2)\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}}$

$$= e^{\sqrt{x}}.1 + (x+2).\, e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= e^{\sqrt{x}} + (x+2).\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

iv) $\frac{d}{dx}(e^{-m\tan^{-1}x}) = \frac{d}{dt}(e^{-t}).\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = m\tan^{-1}x$ है।

$$= -e^{t}.\frac{d}{dx}(m\tan^{-1}x)$$

$$= -e^{-m\tan^{-1}x}.\frac{m}{1+x^2}$$

$$= \frac{-m e^{-m \tan^{-1} x}}{1+x^2}$$

v) $\frac{d}{dx}(2^{2x}) = \frac{d}{dt}(2^t).\frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = 2x$ है।

$= 2^t \ln 2 . 2$

$= 2^{2x+1} \ln 2$

vi) $\frac{d}{dx}(7^{\cos x}) = 7^{\cos x}.\ln 7.\frac{d}{dx}(\cos x)$

$= 7^{\cos x}.\ln 7.(-\sin x)$

$= -\sin x \ln 7.7^{\cos x}$

E4) $f'(x) = 2^x \ln 2$

$f'(0) = \ln 2$

$f'(1/2) = 2^{1/2} \ln 2 = \sqrt{2} \ln 2$

अतः, $x = 0$ पर की तुलना में, $x = 1/2$ पर f में $\sqrt{2}$ गुनी वृद्धि होती है।

E5) $f(t) = c e^{-3t}$

E6) i) $f'(x) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{4x+1}{5}\right).\frac{d}{dx}\left(\frac{4x+1}{5}\right) = \frac{4}{5}\operatorname{sech}^2\left(\frac{4x+1}{5}\right)$

ii) $f'(x) = \cosh e^{2x}.\frac{d}{dx}e^{2x} = \cosh e^{2x}.e^{2x}.\frac{d}{dx}(2x) = 2e^{2x}\cosh e^{2x}$

iii) $f'(x) = -\operatorname{cosech}^2(1/x).\frac{d}{dx}(1/x) = \frac{1}{x^2}\operatorname{cosech}^2\left(\frac{1}{x}\right)$

iv) $f'(x) = -\operatorname{sech}.(\ln x)\tanh(\ln x).\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{-\operatorname{sech}(\ln x)\tanh(\ln x)}{x}$

v) $f'(x) = e^x.\sinh x + e^x.\cosh x = e^x(\sinh x + \cosh x)$

E7) $y = \cosh x$

$\frac{dy}{dx} = \sinh x = 1$

$\sinh x = 1$

$\Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

$\Rightarrow e^x - e^{-x} = 2$

$\Rightarrow e^x - e^{-x} - 2 = 0$

$\Rightarrow e^{2x} - 1 - 2e^x = 0$

$\Rightarrow e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\therefore e^x = 1 + \sqrt{2}$ है, क्योंकि यह ऋणात्मक नही हो सकता।

$$\Rightarrow x = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sqrt{2}$$

अतः, बिंदु $(\ln(1+\sqrt{2}), \sqrt{2})$ है।

E8) i) $\dfrac{-1}{5\sqrt{x}\sqrt{1+25x}}\left(\dfrac{5}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{1+25x}}$

ii) $\dfrac{d}{dx}[\sec h^{-1}(\cos^2 x)]^{1/3}$

$$= \frac{1}{3}[\sec h^{-1}(\cos^2 x)]^{-2/3}\left(\frac{-1}{\cos^2 x\sqrt{1-\cos^4 x}}\right)2\cos x(-\sin x)$$

$$= \frac{2\sin x[\sec h^{-1}(\cos^2 x)]^{-2/3}}{\cos x\sqrt{1-\cos^4 x}}$$

iii) $\dfrac{1}{1-e^{2(x^2+5x-6)}}e^{(x^2+5x-6)}(2x+5)$

iv) $\dfrac{-\text{cosech}^2 x}{1-\coth^2 x} + \dfrac{2}{(1-4x^2)}$

v) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^4-1}}$

E9) i) $\sqrt{2}x^{(\sqrt{2}-1)}$

ii) ex^{e-1}

E10) i) दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\ln|y| = \ln|x^2-1| + 6\ln|x^2+2| + 5\ln|x^3-1|$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{12x}{x^2+2} + \frac{15x^2}{x^3-1}$$

इस प्रकार, $\dfrac{dy}{dx} = (x^2-1)(x^2+2)^6(x^3-1)^5\left[\dfrac{2x}{x^2-1} + \dfrac{12x}{x^2+2} + \dfrac{15x^2}{x^3-1}\right]$

ii) $\ln|y| = -5\ln|x-1| - 6\ln|x-2| - 7\log|x-3|$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^5(x-2)^6(x-3)^7}\left(\frac{5}{x-1} + \frac{6}{x-2} + \frac{7}{x-3}\right)$$

iii) मान लिजिए कि, $f(x) = (\sin x)^x$ और $g(x) = (\cos x)^{\tan x}$ है।

तब, $f'(x) = \sin x^x(\ln\sin x + x\cot x)$ है तथा

$$g'(x) = \cos x^{\tan x}(\sec^2 x\ln\cos x - \tan^2 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

iv) मान लीजिए कि $f(x) = (x^x)^x$ और $g(x) = x^{(x^x)}, x > 0$ है।

यदि $y = x^x$ है, तो $\ln y = x \ln x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^x(1+\ln x)$$

$$\ln f(x) = x \ln x^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} f'(x) = \ln x^x + x(1+\ln x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^x)^x[\ln x^x + x(1+\ln x)]$$

$$\ln g(x) = x^x \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g(x)} g'(x) = \frac{x^x}{x} + \ln x . x^x(1+\ln x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = x^{(x^x)}[x^{x-1} + x^x \ln x(1+\ln x)]$$

उत्तर $= f'(x) + g'(x)$

$$= (x^x)^x[\ln x^x + x(1+\ln x)] + x^{(x^x)}[x^{x-1} + x^x \ln x(1+\ln x)]$$

v) $\frac{d}{dx}(\sin x)^{\ln x} = (\sin x)^{\ln x}\left(\ln x \cot x + \frac{\ln \sin x}{x}\right)$

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1+\ln x)$$

उत्तर $= (\sin x)^{\ln x}\left(\ln x \cot x + \frac{\ln \sin x}{x}\right) + x^x(1+\sin x)$

E11) $\frac{d}{dx}[y^3 - xy] = \frac{d}{dx}[-6]$

$$\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} - \left[1.y + x.\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{3y^2 - x}$$

क्षैतिज स्पर्श रेखा के लिए, $\frac{dy}{dx}$ के अंश को 0 होना चाहिए, अर्थात् $y = 0$ है। जब हम वक्र की दी हुई समीकरण में $y = 0$ प्रतिस्थापित करते हैं, तब हम $0 = -6$ प्राप्त करते हैं, जो असंभव है। इसलिए, वक्र पर ऐसा कोई भी बिंदु नहीं है, जहाँ स्पर्श रेखा क्षैतिज है।

ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा के लिए, $\frac{dy}{dx}$ के हर को 0 होना चाहिए, अर्थात् $3y^2 - x = 0$ है, जो $x = 3y^2$ देता है। इसे वक्र की समीकरण में प्रतिस्थापित करने तथा फिर हल करने पर, हम $y = \sqrt[3]{3}$ और $x = \frac{9}{\sqrt[3]{3}}$ प्राप्त करते हैं।

E12) i) $\frac{d}{dx}[\ln(xy)] = \frac{d}{dx}(2x) \frac{1}{xy}[x.\frac{dy}{dx} + 1.y] = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y}{x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,e^2) \text{ पर}} = e^2$$

इस प्रकार, स्पर्श रेखा की समीकरण $y - e^2 = e^2(x-1)$ है।

ii) $\frac{d}{dx}[x^{2/3} + y^{2/3}] = \frac{d}{dx}(a^{2/3}) \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,0)\text{ पर}} = \infty$$

क्योंकि $(a,0)$ पर प्रवणता परिभाषित नहीं है, इसलिए इस वक्र की $(a,0)$ पर एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा है। इस स्पर्श रेखा की समीकरण $x = a$ है।

E13) i) $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

ii) $2y\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

iii) $3x^3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2y^3 + 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2 + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

$$\Rightarrow (3x^3y^2 + 2x^2y + x)\frac{dy}{dx} = -(3x^2y^3 + 2xy^2 + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(3x^2y^3 + 2xy^2 + y)}{(3x^3y^2 + 2x^2y + x)}$$

iv) $-\cos x \sin y\frac{dy}{dx} - \sin x \cos y - 2y\frac{dy}{dx}\sin^{-1}x - \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}} + 4x\tan x$
$+2x^2\sec^2 x = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x\cos y + \frac{y^2}{\sqrt{(1-x^2)}} - 4x\tan x - 2x^2\sec^2 x}{-(\cos x \sin y + 2y\sin^{-1}x)}$$

v) $\frac{d}{dx}(4x^2 - 2y^2) = \frac{d}{dx}(1)$

$$\Rightarrow 8x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4y} = \frac{2x}{y}$$

vi) $\frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}(3-y)$

$$1.y^2 + x.2y\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2xy+1}$$

E14) i) $\frac{d}{dx}(y(y^2-1)(y-2)) = \frac{d}{dx}(x(x-1)(x-2))$

$$\frac{dy}{dx}(y^2-1)(y-2) + 2y^2(y-2)\frac{dy}{dx} + y(y^2-1)\frac{dy}{dx}$$

$$= (x-1)(x-2) + x(x-1) + x(x-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x-1) + x(x-2) + (x-1)(x-2)}{(y^2-1)(y-2) + 2y^2(y-2) + y(y^2-1)}$$ है।

क्षैतिज स्पर्श रेखा के लिए, $\frac{dy}{dx} = 0$

E15) मान लीजिए कि कारें O से चलना प्रारंभ करती हैं तथा समय t के बाद वे क्रमशः A और B पर पहुँचती हैं, जैसा कि चित्र 8 में दर्शाया गया है।

मान लीजिए कि $OA = x$ km और $OB = y$ km है।

$AB = d^2 = x^2 + y^2$

साथ ही, 1 घंटे बाद, $d^2 = 30^2 + 40^2$ है।

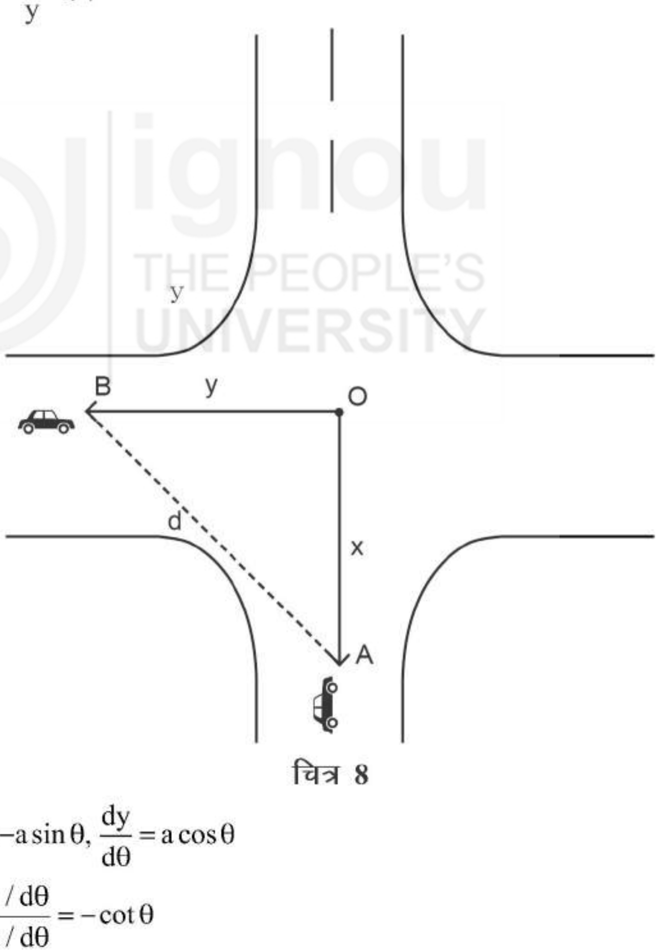
$\Rightarrow d = 50 \text{km}$

अतः, $(50)^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(2500) = \frac{d}{dx}[x^2 + y^2]$

$\Rightarrow 0 = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ है।



चित्र 8

E16) i) $\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = -\cot\theta$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$

iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{-dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3b\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\frac{b}{a}\tan\theta$

iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)}$

E17) $\frac{dx}{dt} = 5t^4 - 12t^2, \frac{dy}{dt} = 2t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= \frac{2t}{5t^4 - 12t^2}$$

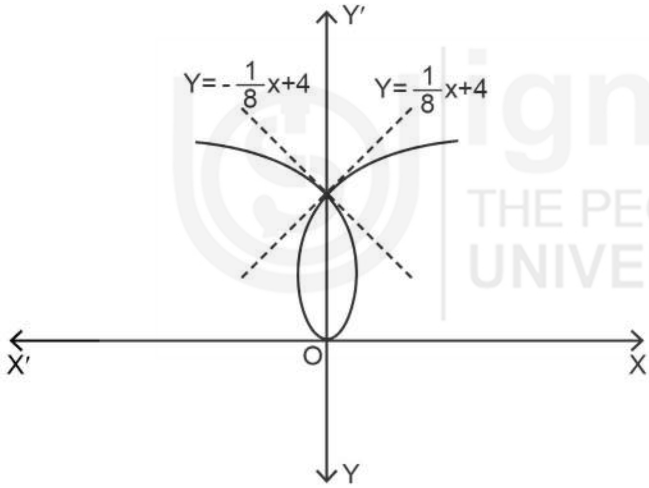
क्योंकि $x = 0$ और $y = 4$ है, इसलिए $0 = t^5 - 4t^3 = t^3(t^2 - 4) \Rightarrow 4 = t^2$ इस प्रकार, $t = \pm 2$ है।

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2 \text{ पर}} = \frac{1}{8}$ है।

$\therefore$ स्पर्श रेखा $y - 4 = \frac{1}{8}x$ है।

साथ ही, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-2 \text{ पर}} = -\frac{1}{8}$ है।

$\therefore$ स्पर्श रेखा $y - 4 = -\frac{1}{8}x$ है। चित्र 9 में दिया गया आलेख स्पर्श रेखाओं को दर्शाता है।



चित्र 9

E18) i) $x = \sin\theta$ रखिए।

$$\sin^{-1}(3x - 4x^3) = \sin^{-1}(\sin 3\theta) = 3\theta$$

$$= 3\sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}(3x - 4x^3)) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \text{ है।}$$

ii) $x = \sin\theta$ रखिए।

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}(1 - 2x^2)) = \frac{d}{dx}(\cos^{-1} 2\theta)$$

$$= \frac{d}{dx}(2\theta)$$

$$= \frac{d}{dx}(2\sin^{-1} x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

iii) $x = \tan\theta$ रखिए। $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

iv) $x = \tan\theta$ रखिए।

$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)\right) = \frac{3}{1+x^2}$ है।

v) $x = \tan\theta$ रखिए।

$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right) = \frac{2}{1+x^2}$ है।

इकाई 11

उच्चतर कोटि के अवकलज

इकाई की रूपरेखा — पृष्ठ संख्या

11.1	प्रस्तावना	95
	उद्देश्य	96
11.2	द्वितीय कोटि के अवकलज	96
11.3	उच्चतर कोटि के अवकलज	102
11.4	लेबनिज़ प्रमेय	109
11.5	बहुपद सन्निकटन	113
	रैखिक सन्निकटन	113
	द्विघात सन्निकटन	115
	टेलर सन्निकटन	118
11.6	सारांश	127
11.7	हल/उत्तर	127

11.1 प्रस्तावना

हम पहले ही देख चुके हैं कि कुछ भौतिक संकल्पनाओं (जैसे एक गतिमान कण का वेग) तथा साथ ही ज्यामितीय धारणाओं (जैसे एक वक्र स्पर्श रेखा की प्रवणता) द्वारा अवकलन की संकल्पना को प्रेरित किया गया। द्वितीय और उच्चतर कोटि के अवकलज भी इसी प्रकार कुछ भौतिक विचारों (जैसे त्वरण) और कुछ ज्यामितीय धारणाओं (जैसे एक वक्र की वक्रता) द्वारा प्रेरित हैं।

इकाई 9 और इकाई 10 में, हमने फलनों के अवकलन के बारे में अध्ययन किया है। आप जानते हैं कि किसी फलन f का अवकलज f' भी पुनः एक फलन होता है तथा यह f का **व्युत्पित फलन** कहलाता है। इस फलन f' का स्वयं एक अवकलज हो सकता है, जो पुनः एक नया फलन होगा। इस इकाई में, हम ऐसे ही फलनों पर विचार करेंगे। हम भाग 11.2 में, द्वितीय और तृतीय कोटि के अवकलजों को ज्ञात करेंगे तथा भाग 11.3 में उच्चतर कोटि के अवकलजों को ज्ञात करने के लिए, अवकलन की प्रक्रिया को जारी रखेंगे। लेबनिज़ प्रमेय, जो भाग 11.4 में दी गई है, हमें दो फलनों के

गुणनफल के उच्चतर अवकलज ज्ञात करने के लिए एक सूत्र प्रदान करती है। बाद में, भाग 11.5 में, हम यह विचार करेंगे कि किस प्रकार एक बहुपद का किसी बिंदु पर एक फलन का सन्निकट मान ज्ञात करने में उपयोग किया जाता है।

अब, हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- अवकलनीय फलन f के द्वितीय और तृतीय कोटि के अवकलज ज्ञात कर पाएँगे;
- एक दिए हुए फलन f, nवाँ उच्चतर अवकलज ज्ञात कर पाएँगे;
- दो फलनों के गुणनफल के nवें अवकलज को ज्ञात करने के लिए, लेबनिज़ प्रमेय का प्रयोग कर पाएँगे; एवं
- बहुपद सन्निकटन का प्रयोग करते हुए, एक दिए हुए बिंदु पर किसी फलन का सन्निकट मान ज्ञात कर पाएँगे।

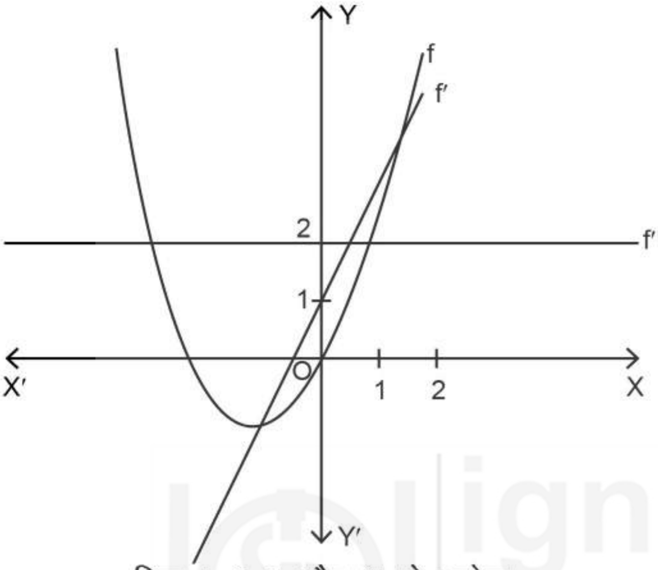
11.2 द्वितीय कोटि के अवकलज

मान लीजिए f एक फलन दिया हुआ है, जो अवकलनीय है। जब हम f को अवकलित करते हैं, तो हमें f' प्राप्त होता है। हम जानते हैं कि f' एक नया फलन है, जो f से व्युत्पित हुआ है। अतः, f' का स्वयं कोई अवकलज हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। यदि f' अवकलनीय है, तो f' का अवकलित करने पर, हम पुनः एक नया फलन प्राप्त करते हैं।

उदाहरणार्थ, $f(x) = x^5$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि $f'(x) = 5x^4$ है। अब, यह f' पुनः एक बहुपद फलन है और इसीलिए इसे भी अवकलित किया जा सकता है। हम f' के अवकलज को f की स्पर्श रेखा की प्रवणता की परिवर्तन-दर के रूप में सोच सकते हैं। इसको स्वतंत्र चर के सापेक्ष f' की परिवर्तन-दर के रूप में भी समझा जा सकता है। स्पर्श रेखा की प्रवणता की परिवर्तन-दर वक्रता विकसित करती है, जिसका अध्ययन हम इकाई 14 में करेंगे। f' के अवकलज पर वापस आने पर, हम f' के अवकलज के लिए संकेतन f'' का प्रयोग करते हैं, अर्थात् $(f')' = f''$ है। इस प्रकार, $f''(x) = 20x^3$ है। $f''(x)$ बिंदु x पर फलन f का **द्वितीय अवकलज (second derivative)** कहलाता है। मान लीजिए कि $y = f(x)$ है। तब, हम x के सापेक्ष y के द्वितीय अवकलज को $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ (जिसे d स्क्वेयर y बाई dx स्क्वेयर पढ़ा जाता है) या $f^{(2)}$ या D^2y या y'' या f'' के रूप में लिखा जाता है। अब, आइए निम्नलिखित उदाहरणों में द्वितीय अवकलज ज्ञात करें।

उदाहरण 1: f'' ज्ञात कीजिए, यदि $f(x)=x^2+2x$ है। साथ ही, f, f' और f'' के आलेख भी खींचिए। इन आलेखों के बीच में आप क्या संबंध देखते हैं, यदि कोई है?

हल : $f(x)=x^2+2x$ दिया है। $f(x)$ को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम $f'(x)=2x+2$ प्राप्त करते हैं। पुनः, $f'(x)$ को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम $f''(x)=2$ प्राप्त करते हैं। आप ध्यान दे सकते हैं कि f एक बहुपद फलन है, जो अवकलनीय है। पुनः f' एक बहुपद फलन है, जो अवकलनीय है। चित्र 1; f, f' और f'' के आलेखों को दर्शाती है।



चित्र 1: f, f' और f'' के आरेख

सभी तीनों फलनों f, f' और f'' के आलेखों पर दृष्टि डालिए। हम देखते हैं कि f एक परवलय को निरूपित करता है और f' एक सरल रेखा को निरूपित करता है। आगे, f'' एक रेखा है जो एक स्थिर मान को दर्शाती है। यह रेखा x-अक्ष के समांतर है। हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $f''(x)$ बिंदु $(x, f(x))$ पर वक्र $y=f'(x)$ की प्रवणता है। आप ध्यान दे सकते हैं कि f'' घनात्मक है। अतः f''x-अक्ष के ऊपर स्थिर है।

***

उदाहरण 2: यदि $y=2\sin x+3\cos x+5$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $y''+y=5$ है।

हल : अब, $y = 2\sin x + 3\cos x + 5$ है।

y को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$y'=2\cos x-3\sin x$$

इसे पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$y''=-2\sin x-3\cos x$$

अब, $y''+y=-2\sin x-3\cos x+2\sin x+3\cos x+5=5$

प्रस्तावना में, हमने बताया था कि हो सकता है कि f' अवकलनीय नहीं हो। अगला उदाहरण ऐसा फलन f दे रहा है जिसके लिए f' का अस्तित्व है, परंतु f'' का अस्तित्व नहीं है।

***

उदाहरण 3: $\mathbb{R}$ में सभी x के लिए, फलन $f(x) = x|x|$ पर विचार कीजिए। f का द्वितीय अवकलज ज्ञात कीजिए। साथ ही, फलनों f' और f'' के प्राँत और परिसर भी ज्ञात कीजिए।

हल : फलन $f(x)$ को पुनः $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$$\left[\because |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}\right]$$

0 के अतिरिक्त अन्य बिंदुओं पर, हम प्राप्त करते हैं: $f'(x) = 2x$, यदि $x > 0$ तथा $f'(x) = -2x$, यदि $x < 0$ है।

$x = 0$ पर, f का दायाँ अवकलज निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$Rf'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} h = 0$$

साथ ही, $x = 0$ पर f का बायाँ अवकलज निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$Lf'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0$$

अतः, $f'(0) = 0$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{R}$ में सभी x के लिए, $f'(x) = 2|x|$ है। f' का प्राँत $\mathbb{R}$ है तथा f' का परिसर $[0, \infty[$ है।

हम पहले से जानते हैं कि निरपेक्ष मान फलन $|x|$, $x = 0$ पर अवकलित नहीं किया जा सकता (देखिए इकाई 9)। अतः, $x = 0$ पर f' अवकलनीय नहीं है। अतः, $f'' = 0$ का अस्तित्व नहीं है।

***

अगले उदाहरण में, हम उस स्थिति में द्वितीय कोटि अवकलज ज्ञात करेंगे, जब दोनों चर एक तीसरे चर पर आश्रित होंगे।

उदाहरण 4: यदि $x = a(\cos t + t\sin t)$ और $y = a(\sin t - t\cos t)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल : x और y को t के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{dt} = a(-\sin t + t\cos t + \sin t) = a\,t\cos t$$

तथा $\dfrac{dy}{dt} = a(\cos t + t\sin t - \cos t) = a\,t\sin t$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$, जबकि $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ है।

$$= \tan t$$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right).\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dt}(\tan t).\dfrac{dt}{dx}$ [श्रृंखला नियम के प्रयोग से]

$$= \sec^2 t.\frac{1}{a\,t\cos t} = \frac{1}{a\,t\cos^3 t}$$

***

अगले उदाहरण में, हम एक अस्पष्ट फलन का द्वितीय कोटि अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 5: यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} = 0$$

या $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy}{hx + by}$ ... (1)

x के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(hx + by)\left(a + h\frac{dy}{dx}\right) - (ax + hy)\left(h + b\frac{dy}{dx}\right)}{(hx + by)^2}$$

(1) से $\frac{dy}{dx}$ का मान प्रतिस्थापित करने तथा हल करने पर, हम $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(h^2 - ab)}{(hx + by)^3}$ प्राप्त करते हैं।

***

आपको याद होगा कि प्रथम अवकलज परिवर्तन-दर होता है। इसलिए, द्वितीय अवकलज उसी चर के सापेक्ष परिवर्तन-दर की परिवर्तन-दर होती है। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु की समय के सापेक्ष परिवर्तन-दर वेग होती है। वेग स्वयं समय एक फलन है। जब कोई जेट उड़ान भरता है या एक वाहन अचानक रुकता है, तब यात्रियों द्वारा वेग में परिवर्तन सरलता से अनुभव किया जाता है। वह दर जिस पर वेग में परिवर्तन होता है, त्वरण कहलाती है। माना दो कार विश्राम से चलना प्रारंभ करती हैं। कार A, 10 सैकण्ड में 60 km/h की चाल तक पहुँचती है तथा कार B, 8 सैकण्ड में 60 km/h की चाल तक पहुँचती है। तब, A की तुलना में कार B का त्वरण अधिक है। हम प्रायः त्वरण के लिए अक्षर 'a' का प्रयोग करते हैं। मान लीजिए कि $s(t), v(t)$ और $a(t)$ किसी वस्तु के क्रमशः स्थिति फलन, वेग और त्वरण हैं। तब,

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) \text{ तथा } a(t) = \frac{d}{dt}(v(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}s(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}(s(t)) \text{ है।}$$

आइए निम्नलिखित उदाहरणों में त्वरण ज्ञात करें।

उदाहरण 6: किसी कण की गति की समीकरण $s(t) = t^3 - 3t$ है, जहाँ s मीटरों में है तथा t सैकण्डों में है। ज्ञात कीजिए:

i) t के फलनों के रूप में वेग और त्वरण

ii) 2 सैकण्डों के बाद त्वरण, तथा

iii) त्वरण जब वेग 0 है।

हल : i) हमें प्राप्त है: $s(t) = t^3 - 3t$

$$\therefore v(t) = \frac{d}{dt}(s(t)) = \frac{d}{dt}(t^3 - 3t) = 3t^2 - 3$$

तथा $a(t) = \frac{d}{dt}(v(t)) = \frac{d}{dt}(3t^2 - 3) = 6t$ है।

ii) 2 सैकण्डों बाद त्वरण $= a(2) = 12\,m/s^2$ है।

iii) जब वेग 0 है, तब हमें प्राप्त है: $v(t) = 0$, जिससे $3t^2 - 3 = 0$ या $t = \pm 1$ प्राप्त होता है। क्योंकि समय ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए $t = 1$ सैकण्ड है। अब, 1 सैकण्ड बाद त्वरण $a(1) = 6\,m/s^2$ है।

***

उदाहरण 7: बाजार में एक नया उत्पाद लाया जाता है तथा वह बहुत प्रसिद्ध हो जाता है। इसकी बेची गई मात्रा N समय t के एक फलन के रूप में दी जाती है, जहाँ t सप्ताहों में है। यह फलन है :

$$N(t) = \frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}, t > 0$$

$N''(t)$ ज्ञात कीजिए तथा फिर इसे $N''(52)$ और $N''(208)$ परिकलित करने में प्रयोग कीजिए तथा दी हुई स्थितियों में इसकी व्याख्या कीजिए।

हल: $N'(t)$ और $N''(t)$ ज्ञात करने के लिए, हम भागफल नियम का प्रयोग करते हैं। तब,

$$N'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= \frac{(2t+1)^2 \frac{d}{dt}(250000\,t^2) - 250000\,t^2 . \frac{d}{dt}\left[(2t+1)^2\right]}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{500000\,t}{(2t+1)^3} \text{ (सरल करने पर)}$$

$$N''(t) = \frac{d}{dt}[N'(t)]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{500000\,t}{(2t+1)^3}\right]$$

$$= \frac{-2000000\,t + 500000}{(2t+1)^4} \text{ (सरल करने पर)}$$

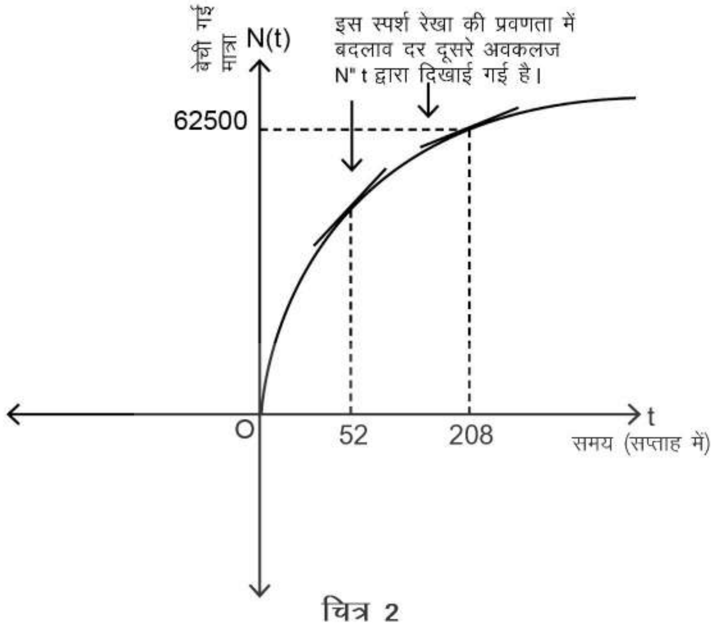
$t = 52$ पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$N''(52) = \frac{-2000000(52) + 500000}{[2(52)+1]^4} \approx -0.852$$

इस प्रकार, 52 सप्ताहों (1 वर्ष) बाद, बिक्री दर की दर -0.852 इकाई प्रति सप्ताह प्रति सप्ताह से घट रही है।

$$N''(208) = \frac{-2000000(208) + 500000}{[2(208)+1]^4} \approx -0.014$$

इस प्रकार, 208 सप्ताहों (4 वर्ष) बाद बिक्री-दर घट कर लगभग शून्य हो गई है तथा, इस उत्पाद पर हानि हो रही है। चित्र 2 इसे दर्शा रही है।



चित्र 2

आगे बढ़ने से, कुछ प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E1) निम्नलिखित के x के सापेक्ष द्वितीय अवकलज ज्ञात कीजिए:

i) $f(x) = x^3 - 4$

ii) $y = e^{2x}$

E2) यदि $y = e^{ax} \sin bx$ है, तो दर्शाइए कि $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$ है।

E3) निम्नलिखित में से प्रत्येक में पूर्णांक K का मान ज्ञात कीजिए :

i) $f(x) = \sin kx$ और $f^{(2)}(\pi/6) = 2\sqrt{3}$ है।

ii) $f(x) = x^k + kx^2 + 1$ और $f^{(2)}(1) = 12$ है।

E4) किसी कण का स्थिति फलन $s(t) = t^3 - 4.5t^2 - 7t, t \geq 0$ द्वारा दिया जाता है।

i) यह कण कब $5 m/s$ के वेग पर पहुँचेगा?

ii) कब त्वरण 0 होगा? t के इस मान की क्या सार्थतकता (महत्वता) है?

E5) फलन $p(t) = \dfrac{2000t}{4t + 75}$ किसी क्षेत्र में t मास बाद जनसंख्या p को निदर्शित करता है।

i) $p'(10), p'(50)$ और $p'(100)$ ज्ञात कीजिए।

ii) $p''(10), p''(50)$ और $p''(100)$ ज्ञात कीजिए।

iii) भाग (i) और भाग (ii) में दिए गए अपने उत्तरों की व्याख्या कीजिए। लंबी अवधि में इस जनसंख्या को क्या हो रहा है?

जैसा कि हमने देखा कि प्रथम अवकलज पुनः एक फलन है तथा इसे अवकलित किया

जा सकता है। इसी प्रकार, $y=f(x)$ का द्वितीय अवकलज एक फलन है, जिसे आगे अवकलित किया जा सकता है। अगले भाग में, हम उच्चतर कोटि के अवकलज ज्ञात करेंगे।

11.3 उच्चतर कोटि अवकलज

$f(x)=x^4$ द्वारा परिभाषित एक फलन f पर विचार कीजिए। हमें $f'(x)=4x^3$ और $f''(x)=12x^2$ प्राप्त करता है। f'' को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम $f'''(x)=24$ प्राप्त करते हैं, जहाँ f''', f'' का अवकलन या f का तृतीय अवकलज ज्ञात करता है। $f'''(x)$ के लिए, अन्य संकेतन $\frac{d^3y}{dx^3}$ या $f^{(3)}$ या D^3y हैं। f''' को अवकलित करने पर, हम f का चतुर्थ अवकलज $f^{(4)}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}=0$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, एक दिए हुए फलन f को बार-बार अवकलित करने पर (यदि संभव है), हम f के द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ, अवकलज प्राप्त करते हैं। ये f के उच्चतर कोटि अवकलज कहलाते हैं।

यदि n एक घनात्मक पूर्णांक है, तो x के एक फलन का nवाँ अवकलज $f^{(n)}$ या $\frac{d^nf}{dx^n}$ (जिसे डी एन एफ बाई डी एक्स एन पढ़ा जाता है) या y_n या D^ny द्वारा व्यक्त किया जाता है, जहाँ $y=f(x)$ है।

ध्यान दीजिए कि संकेतन $f^{(n)}$ में इसे f^n अर्थात् f के ऊपर घातांक n, से अलग बताने के लिए, कोष्ठक आवश्यक है। अवकलित करने की बार-बार, उत्तरोतर, यह प्रक्रिया **उत्तरोतर अवकलन (successive differentiation)** कहलाती है।

हम यह पहले ही देख चुके हैं कि ऐसे भी फलन f होते हैं, जो अवकलनीय नहीं होते। दूसरे शब्दों में, f का अस्तित्व सदैव होना आवश्यक नहीं है। इसी प्रकार, यदि f' का अस्तित्व है, तो यह संभव है कि f'' का अस्तित्व न हो। व्यापक रूप में, प्रत्येक घनात्मक पूर्णांक x के लिए, ऐसे फलन f होते हैं ताकि $f^{(n)}$ का अस्तित्व है, परंतु $f^{(n+1)}$ का अस्तित्व नहीं है। परंतु, इस भाग में, जिन अधिकांश फलनों पर विचार करेंगे उनके उच्चतर अवकलज होंगे।

दो बार अवकलित किया जा सकने वाला फलन एक ऐसा फलन f होता है ताकि f'' का अस्तित्व है। मान लीजिए कि n एक घनात्मक पूर्णांक है। एक ऐसा फलन f ताकि $f^{(n)}$ का अस्तित्व है एक n बार अवकलनीय फलन कहलाता है। यदि प्रत्येक घनात्मक पूर्णांक n के लिए $f^{(n)}$ का अस्तित्व हो, तो f अपरिमित रूप से अनेक बार (या अनंत बार) अवकलनीय फलन कहलाता है।

अब, हम उच्चतर अवकलजों से संबंधित समस्याओं के कुछ सरल उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 8: यदि $f(x)=ax^3+bx+c$ द्वारा दिए जाने वाले किसी फलन, जब, $a,b,c\in\mathbb{R}$ है, के तृतीय अवकलज का $x=1$ पर मान 6 है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $f(x)=ax^3+bx+c$ है।

इसे अवकलित करने पर, हम $f'(x) = 3ax^2 + b$ प्राप्त करते हैं। इसे पुनः अवकलित करने पर, हम $f''(x) = 6ax$ प्राप्त करते हैं। इसे एक बार फिर अवकलित करने पर, हम $f^{(3)}(x) = 6a$ प्राप्त करते हैं।

$x = 1$ पर, इसका मान लेने पर, $f^{(3)}(1) = 6$

इस प्रकार $6a = 6$ है। अतः, $a = 1$ है।

***

उदाहरण 9: यदि $f(x) = 2x^2 - x^3$ है, तो $f'(x), f''(x), f'''(x)$ और $f''''(x)$ ज्ञात कीजिए। f, f', f'' और f''' के आलेखों की तुलना कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या ये आलेख इन अवकलजों के ज्यामितीय निरूपणों के संगत हैं।

हल : फलन f है: $f(x) = 2x^2 - x^3 = x^2(2 - x)$

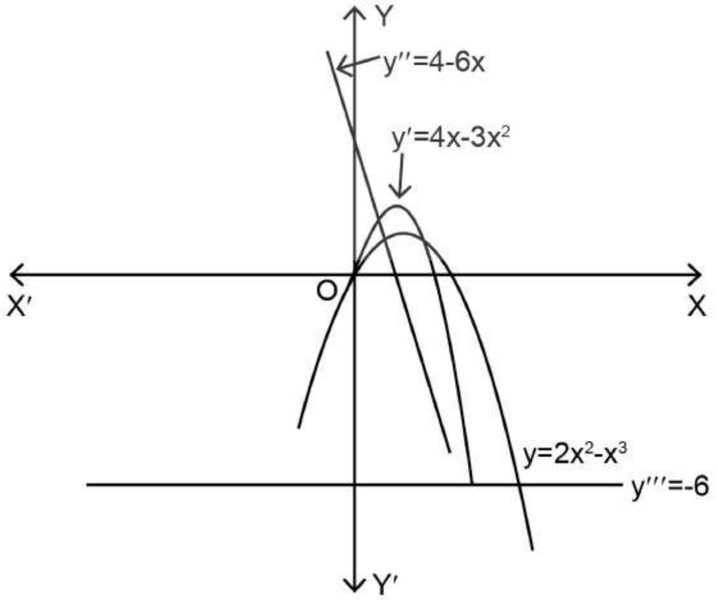
प्रथम अवकलज: $f'(x) = 4x - 3x^2 = x(4 - 3x)$

द्वितीय अवकलज: $f''(x) = 4 - 6x$

तृतीय अवकलज: $f'''(x) = -6$

चतुर्थ अवकलज: $f''''(x) = 0$

f, f', f'' और f''' के आलेख चित्र 3 में दिए गए हैं। हम $f''(x)$ की बिंदु $(x, f'(x))$ पर वक्र $y = f'(x)$ की प्रवणता के रूप में व्याख्या कर सकते हैं। दूसरे शब्दों में, यह प्रारंभिक वक्र $y = f(x)$ की प्रवणता की परिवर्तन-दर है। आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि f'' ऋणात्मक है, जब f' की ऋणात्मक प्रवणता है तथा घनात्मक है जब f' की घनात्मक प्रवणता है। इसी प्रकार, f''' बिंदु $(x, f''(x))$ पर वक्र $y = f''(x)$ की प्रवणता है। इस प्रकार, चित्र 3 में दिए आलेख हमारे परिकलनों की एक जाँच के रूप में कार्य करते हैं।



चित्र 3

अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E6) निम्नलिखित फलनों के लिए, $f^{(3)}(\pi \setminus 4)$ ज्ञात कीजिए:

i) $f(x) = \sec x$ ii) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$

E7) $\frac{d^{99}}{dx^{99}}(\sin x)$ ज्ञात कीजिए।

अब, हम कुछ फलनों के nवें अवकलजों को प्राप्त करने के लिए कुछ नियम ज्ञात करेंगे। जब कोई फलन f एक सूत्र द्वारा दिया जाता है, तब प्रायः उसके nवें अवकलज को भी f और n का प्रयोग करते हुए एक सूत्र द्वारा व्यक्त करना संभव हो जाता है। प्रायः, कोई व्यक्ति $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ और $f^{(3)}$ ज्ञात करने के बाद, उनमें उजागर होते हुए पैटर्न को देखकर, $f^{(n)}$ के बारे में अनुमान लगा सकता है। वस्तुतः, ऐसे सूत्रों को गणित आगमन के सिद्ध ांत (या नियम) को प्रयोग करके सिद्ध भी किया जा सकता है। परंतु इस भाग में, हम ऐसे किसी भी सूत्र को सिद्ध नहीं करेंगे। हम विभिन्न फलनों के nवें अवकलजों के लिए सूत्र उनके प्रथम कुछ अवकलजों के प्रेक्षण द्वारा निगमित करेंगे। इनका अध्ययन सावध ानीपूर्वक कीजिए, क्योंकि हम इनका उपयोग बाद में आने वाले भागों में करेंगे। नीचे हम कुछ मानक फलनों के nवीं कोटि के अवकलजों के लिए सूत्र प्राप्त करेंगे।

I. e^{ax} का x के सापेक्ष nवाँ अवकलज

मान लीजिए कि $y = e^{ax}$ है। y को x के सापेक्ष उत्तरोतर अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^{(1)} = a e^{ax}$$
$$y^{(2)} = a^2 e^{ax}$$
$$y^{(3)} = a^3 e^{ax},$$
$$-------$$
$$-------$$
$$y^{(n)} = a^n e^{ax}$$

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं : $\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}) = a^n e^{ax}$

विशिष्ट रूप में, यदि $a = 1$ है, तो $\frac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x$ है।

II. बहुपद फलन $(ax + b)^m$ का x के सापेक्ष nवाँ अवकलज

मान लीजिए कि $y = (ax + b)^m$ है। y को x के सापेक्ष उत्तरोतर अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^{(1)} = m.a(ax + b)^{m-1}$$
$$y^{(2)} = m(m-1)a^2(ax + b)^{m-2}$$
$$y^{(3)} = m(m-1)(m-2)a^3(ax + b)^{m-3}$$
$$-------------------$$
$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2).......\{m-(n-1)\}a^n(ax + b)^{m-n}$$
$$-------------------$$

यहाँ, हम देखते हैं कि nवाँ अवकलज इस पर निर्भर करता है कि $m > n$ है, $m < n$ है या $m = n$ है।

आइए इन स्थितियों पर एक-एक करके विचार करें।

i) मान लीजिए कि $m = n$ (एक घनात्मक पूर्णांक) है।

तब, $y^{(n)} = n(n-1)(n-2).....1.a^n (ax+b)^{n-n} = n!a^n$

अर्थात्, $\dfrac{d^n}{dx^n}(ax+b)^n = n!a^n$ है।

यहाँ, आप देख सकते हैं कि जब $m = n$ है, तब nवाँ अवकलज अचर है।

ii) मान लीजिए कि m एक घनात्मक पूर्णांक है तथा $m > n$ है।

तब, $y^{(n)} = m(m-1).....\{m-(n-1)\}a^n (ax+b)^{m-n}$

$= \dfrac{m!}{(m-n)!}.a^n (ax+b)^{m-n}$ [$(m-n)!$ से गुणा और भाग करने पर]

अर्थात्, $\dfrac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}a^n (ax+b)^{m-n}$ है।

iii) मान लीजिए कि m एक घनात्मक पूर्णांक है तथा $m < n$ है।

स्थिति i) से $\dfrac{d^m}{dx^m}(ax+b)^m = m!\,a^m$ है।

क्योंकि $n > m$ है, इसलिए इसे और आगे अवकलन करने पर दायाँ पक्ष शून्य होगा। यह इसलिए है, क्योंकि mवाँ अवकलज अचर है। इसलिए, $(m+1)$वाँ अवकलज शून्य है।

इस प्रकार, $\dfrac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = 0$ है, यदि $n > m$ है।

विशिष्ट रूप में, यदि $a = 1$ और $b = 0$ है, तो x^m का nवाँ अवकलज है :

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^m) = \begin{cases} n! & \text{, यदि } m = n \\ \dfrac{m!x^{m-n}}{(m-n)!} & \text{, यदि } m > n \\ 0 & \text{, यदि } m < n \end{cases}$$

III. $\dfrac{1}{ax+b}$ का nवाँ अवकलज, x के सापेक्ष, जब $ax+b \neq 0$ है।

मान लीजिए कि $y = \dfrac{1}{ax+b}$ है। तब, y को x के सापेक्ष उत्तरोतर अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^{(1)} = \frac{-a}{(ax+b)^2}$$

$$y^{(2)} = \frac{(-a)(-2a)}{(ax+b)^3} = \frac{(-1)^2.2a^2}{(ax+b)^3}$$

$$y^{(3)} = \frac{(-a)(-2a)(-3a)}{(ax+b)^4} = \frac{(-1)^3 3!\,a^3}{(ax+b)^4}$$

तथा $y^{(n)} = \dfrac{(-a)(-2a)(-3a).......(-na)}{(ax+b)^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-1)^n\, n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

विशिष्ट रूप में, जब $a = 1$ और $b = 0$ है, तब $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, x \neq 0$ है।

IV. $\ln(ax+b$ का x के सापेक्ष nवाँ अवकलज

मान लीजिए कि $y = \ln(ax+b)$ है। तब, हम प्राप्त करते हैं कि $y^{(1)} = \frac{a}{ax+b}$ है।

पुनः, अवकलित करने पर, $y^{(2)} = -\frac{a^2}{(ax+b)^2}$ है।

पुनः, अवकलित करने पर, $y^{(3)} = \frac{2a^3}{(ax+b)^3}$ है।

क्या अब आप $y^{(n)}$ का अनुमान लगा सकते हैं? यदि आपने अनुमान सही लगाया है, तो इन निष्कर्षों पर अवश्य ही पहुँच गए होंगे :

i) $y^{(n)}$ का हर $(ax+b)^n$ है।

ii) इसका चिह्न घनात्मक या ऋणात्मक इसके अनुसार होता है कि n विषम है या सम है।

iii) इसके अंश में, $a^n(n-1)!$ है। यह नहीं सोचिए कि यह केवल $(n-1)$ है। इसके साथ क्रमगुणित (factorial) का प्रतीक भी लगा हुआ है। इससे संतुष्ट होने के लिए, $y^{(4)}$ को परिकलित करके देखिए। अतः, हमारा अनुमान $y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}\left(\ln(ax+b)\right) = \frac{(-1)^{n-1}\times(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$ है। विशिष्ट रूप में, यदि $a=1$ और $b=0$ है, तो $\frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ है।

V. a^{mx} का x के सापेक्ष nवाँ अवकलज

मान लीजिए कि $y = a^{mx}$ है। दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :
$\ln y = mx\ln a$ [क्योंकि $\ln m^n = n\ln m$] है।]

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = m\ln a$$

या $y^{(1)} = y.m\ln a$

$$y^{(2)} = (m\ln a).y_{(1)} = (m\ln a)^2 y$$

$$y^{(3)} = (m\ln a)^3 y$$

$$y^{(n)} = (m\ln a)^n y$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}(a^{mx}) = (m\ln a)^n a^{mx} \text{ है।}$$

$$m=1 \quad \frac{d^n}{dx^n}(a^x) = (\ln a)^n a^{mx}$$

आइए इन परिणामों का निम्नलिखित उदाहरणों में उपयोग करें :

उदाहरण 10: $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}$ का nवाँ अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः मान लीजिए कि $y = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$ है। इस परिमेय फलन का nवाँ अवकलज ज्ञात

करना कठिन है। इसलिए, हम पहले इसे ऐसे परिमेय फलनों के योग के रूप में तोड़ कर लिखेंगे कि इनके हर रैखिक बहुपद के रूप में व्यक्त हों। इसके लिए, हम इस खंड के अंत में दिए परिशिष्ट 2 में आंशिक भिन्नों के करने की विधि दे रहे हैं।

आंशिक भिन्नों द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} \qquad \text{... (2)}$$

तब, $x+3 = A(x+2) + B(x-1)$

$x = 1$ लेने पर, $A = 4/3$ है तथा $x = -2$ लेने पर $B = -1/3$ है।

A और B के इन मानों को समीकरण (2) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = \frac{4}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

अब, x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}\right] = \frac{4}{3}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{x-1}\right] - \frac{1}{3}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{x+2}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{3}\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{3}\left[\frac{4}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E8) यदि $y = (1+x)^r$ है, जहाँ r एक वास्तविक संख्या है, तो $y^{(n)}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ n एक प्राकृत संख्या $(n < r)$ है।

E9) निम्नलिखित फलनों के nवें अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $f(x) = (ax+b)^3$ iv) $f(x) = e^{kx}$

ii) $f(x) = (ax+b)^m$ v) $\frac{x}{(x-1)(2x-3)}$

iii) $f(x) = e^x$ vi) $\frac{1}{x^2+a^2}$

***

E10) सिद्ध कीजिए कि बहुपद फलन $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ का nवाँ अवकलज एक अचर है।

आइए अगले उदाहरण में, एक त्रिकोणमितीय फलन का अवकलज ज्ञात करें।

उदाहरण 11: यदि $f(x) = \cos 2x$ है, तो $f^{(n)}(0)$ के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम $f^{(n)}(x)$ ज्ञात करते हैं, जब $n = 1, 2, 3, 4$ हैं।

हमें प्राप्त है: $f(x) = \cos 2x$

उत्तरोतर अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$f^{(1)}(x) = -2\sin 2x$$

$$f^{(2)}(x) = -4\cos 2x$$

$$f^{(3)}(x) = 8\sin 2x$$

$$f^{(4)}(x) = 16\cos 2x$$

हम देखते हैं कि $f^{(n)}(x)$ के सूत्र में, हमें प्राप्त होना चाहिए :

i) एक चिह्न (घनात्मक या ऋणात्मक)

ii) एक गुणांक (2 की कोई घात) तथा

iii) एक त्रिकोणमितीय फलन ($\sin 2x$ या $\cos 2x$)

हम देखते हैं कि पहले दो पदों के चिह्न ऋणात्मक हैं, अगले दो पदों के चिह्न घनात्मक हैं, उससे अगले दो पद ऋणात्मक, इत्यादि।

हम यह भी देखते हैं कि sin और cos बारी-बारी एक-एक छोड़ कर आते हैं।

याद कीजिए कि

$\cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta$

$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

$\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$

अतः, हमारा अनुमान है:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -2^n \sin 2x; \text{ यदि } n,\ 4k+1 \text{ के रूप का है} \\ -2^n \cos 2x; \text{ यदि } n,\ 4k+2 \text{ के रूप का है} \\ 2^n \sin 2x; \text{ यदि } n,\ 4k+3 \text{ के रूप का है} \\ 2^n \cos 2x; \text{ यदि } n,\ 4k \text{ के रूप का है} \end{cases}$$

हम इसे संक्षिप्त रूप में इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cos(2x + n\pi/2)$$

आप $n = 4k+1, 4k+2, 4k+3$ और $4k$ को बाद वाले $f^{(n)}(x)$ में रख कर, सरलता से जाँच कर सकते हैं कि $f^{(n)}(x)$ के दोनों परिणाम समतुल्य हैं।

अब, $f^{(n)}(x)$ में $x = 0$ प्रतिस्थापित कीजिए। हम प्राप्त करते हैं :

$$f^{(n)}(0) = 2^n \cos n\pi/2$$

यही वाँछित उत्तर है।

***

हम निम्नलिखित प्रमेय में दो फलनों के योग के nवें अवकलज के बारे में एक व्यापक परिणाम भी लिख सकते हैं।

प्रमेय 1: यदि $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक दो फलन f और g हैं तथा यदि दोनों n-बार अवकलनीय हैं, तो

i) $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

ii) $(cf)^{(n)} = c.f^{(n)}$, जहाँ c एक अचर है।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E11) यदि $f(x) = \sin x$ है, तो $f^{(n)}(x)$ ज्ञात कीजिए।

E12) यदि $y = \sin(ax+b)$ है, तो $y^{(n)}$ ज्ञात कीजिए।

E13) यदि $y = \cos x$ है और यदि n कोई घनात्मक पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए कि $[y^{(n)}]^2 + [y^{(n+1)}]^2 = 1$

अगले भाग में, हम लेबनिज़ प्रमेय का कथन देंगे जो दो फलनों के गुणनफल के nवें अवकलज का वर्णन करती है।

11.4 लेबनिज़ प्रमेय

इकाई 9 में, हमने दो फलनों के योग, अदिश गुणज, गुणनफल और भागफल के अवकलजों से संबंधित कुछ नियम बताए थे। ये थे:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

$$(fg)' = fg' + gf'$$

$$(f/g)' = \frac{gf' - fg'}{g^2} \text{ (प्राँत में कहीं भी } g(x) \neq 0 \text{ है)}$$

प्रमेय 1 में, हम देख चुके हैं कि प्रथम दो नियमों को nवें अवकलजों के लिए विस्तृत किया जा सकता है, यदि f और g दोनों n बार अवकलनीय फलन हों। इस भाग में, हम अवकलन के गुणनफल नियम को विस्तृत करने जा रहे हैं। हम दो फलनों के गुणनफल के n वें अवकलज के लिए एक सूत्र देंगे।

मान लीजिए कि x के u और v फलन हैं। तब, दोनों फलनों u और v के लिए गुणनफल नियम को $(uv)' = u'v + uv'$ के रूप में लिखा जा सकता है (जहाँ u' और v' क्रमश u और v के x के सापेक्ष प्रथम अवकलज हैं)। अब, हम $(uv)^{(2)}$, $(uv)^{(3)}$, इत्यादि के लिए ऐसे ही सूत्र की ओर दृष्टि डालते हैं। दो फलनों के गुणनफल के nवें अवकलज के सूत्र को व्युत्पित (या निगमित) करने के लिए, हमें $C(n,r)$ की आवश्यकता होगी। आप संकेतन $C(n, r)$ के अर्थ का स्मरण कर सकते हैं, जहाँ n और $r \in \mathbb{Z}^+$ हैं तथा $r \leq n$ है। यह $C(n, r)$ वस्तुओं में r वस्तुएँ चुनने की विधियों की संख्या के लिए प्रयोग किया जाता है। कभी-कभी इसे ${}^nC_r$ या $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।

साथ ही, निम्नलिखित सूत्रों का भी स्मरण कीजिए :

i) $C(n, r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

ii) $C(n, 0) = C(n, n) = 1$

iii) $C(n, r) = C(n, n-r)$

iv) $C(n, r) + C(n, r+1) = C(n+1, r+1)$

ये संचय–विज्ञान संबंधित (combinatorial) सर्वसमिकाएँ हैं तथा $r \leq n$ के साथ सभी घनात्मक पूर्णांकों r और n के लिए सत्य हैं। अब, हम लेबनिज़ प्रमेय का कथन देते हैं,

जो दो फलनों के गुणनफल के nवें अवकलज को ज्ञात करने के लिए है।

प्रमेय 2 (लेबनिज़ प्रमेय): मान लीजिए कि n एक घनात्मक पूर्णांक है। यदि u और v दोनों n बार अवकलनीय फलन हैं, तो

$(uv)^{(n)} = C(n, 0)u^{(n)}v + C(n, 1)u^{(n-1)}v^{(1)} + C(n,2)u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + C(n, n)uv^{(n)}$ है, जहाँ $u^{(n)}$ और $v^{(n)}$ क्रमश u और v के nवें अवकलज हैं।

$(uv)^n$ के सूच में आए पैटर्न की तुलना $(x+y)^n$ के प्रसार से की जा सकती है।

i) गुणांक द्विपद गुणांक (binomial coefficients) हैं तथा ये उसी क्रम में प्रकट हो रहे हैं जैसे $(x+y)^n$ के प्रसार में हैं।

ii) एक बार में u के अवकलज की कोटि एक कम होती जाती है तथा v के अवकलज की कोटि एक बार में एक बढ़ती जाती है।

iii) पदों की संख्या $n+1$ है।

टिप्पणी 1 : हम इस प्रमेय की उपपत्ति को छोड़ रहे हैं तथा केवल यह इंगित कर रहे हैं कि किस प्रकार, इसको n के लिए गणितीय आगमन से सिद्ध किया जा सकता है। सर्वप्रथम, जब $x = 1$ है, तब उपरोक्त सूत्र वही है जो पहले से ज्ञात गुणनफल सूत्र है और इसलिए यह सत्य है। यह कल्पना करते हुए कि यह $n = m$ के लिए सत्य है, हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि यह $n = m+1$ के लिए भी सत्य है। इसके लिए हमें $(uv)^{(m)}$ के प्रसार के प्रत्येक पद के लिए गुणनफल नियम का अनुप्रयोग करना पड़ेगा तथा ऊपर वर्णित संचय विज्ञान संबंधित सर्वसमिकाओं का उपयोग करना पड़ेगा।

इस सूत्र के एक सरल और प्रत्यक्ष अनुप्रयोग से प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 12: यदि $f(x) = x\sin x$ है, तो लेबनिज़ प्रमेय का उपयोग करते हुए f का चतुर्थ अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : हम पहले यह देखते हैं कि $n = 4$ के लिए, लेबनिज़ प्रमेय कहती है कि

$$(uv)^{(4)} = C(4, 0)u^{(4)}v + C(4, 1)u^{(3)}v^{(1)} + C(4,2)u^{(2)}v^{(2)} + C(4,3)u^{(1)}v^{(3)} + C(4, 4)uv^{(4)}$$
$$= u^{(4)}v + 4u^{(3)}v^{(1)} + 6u^{(2)}v^{(2)} + 4u^{(1)}v^{(3)} + uv^{(4)}$$

यहाँ, हम $u = x$ और $v = \sin x$ लेते हैं। इससे $f = uv$ है।

हमें प्राप्त है: $u = x$ $\qquad v = \sin x$

$u^{(1)} = 1 \qquad v^{(1)} = \cos x$

$u^{(2)} = 0 = u^{(3)} = u^{(4)} \qquad v^{(2)} = -\sin x$

$v^{(3)} = -\cos x$

$v^{(4)} = \sin x$

इन मानों को उपरोक्त सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$f^{(4)} = (uv)^{(4)} = 0 + 0 + 0 + 4(1)(-\cos x) + x.\sin x$$
$$= x\sin x - 4\cos x$$

क्या होता है, यदि हम इसी समस्या को बिना लेबनिज़ प्रमेय का उपयोग किए, प्रत्यक्ष रूप से हल करते हैं? हमें $f(x)=x\sin x$ प्राप्त है। इसे एक बार अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$f^{(1)}(x)=x\cos x+\sin x$ (गुणनफल नियम द्वारा)

पुनः, एक बार अवकलित करने पर, हम $f^{(2)}(x)=x(-\sin x)+1.\cos x+\cos x$ अर्थात् $f^{(2)}(x)=2\cos x-x\sin x$ प्राप्त करते हैं।

एक बार पुनः अवकलित करने पर, हम $f^{(3)}(x)=-2\sin x-(x\cos x+\sin x)$, अर्थात् $f^{(3)}(x)=-3\sin x-x\cos x$ प्राप्त करते हैं।

एक बार पुनः अवकलित करने पर, हम $f^{(4)}(x)=-3\cos x-[x(-\sin x)+\cos x]$ अर्थात् $f^{(4)}(x)=x\sin x-4\cos x$ प्राप्त करते हैं।

आप देख सकते हैं कि हमें वही उत्तर प्राप्त हुआ है। इस प्रत्यक्ष विधि में, हमें गुणनफल सूत्र का, प्रत्येक अवकलन के लिए एक बार की दर से, चार बार अनुप्रयोग करना पड़ा।

***

यह स्पष्ट है कि जब हम n के बड़े मानों के लिए nवाँ अवकलज ज्ञात करना चाहते हैं, तब लेबनिज़ प्रमेय उत्तर लिखने के लिए एक सरल विधि प्रदान करती है, जिसमें गुणनफल सूत्र के बार-बार उपयोग करने की कठिनाई से बच जाते हैं। आइए इस प्रमेय का कुछ और उदाहरणों में अनुप्रयोग करें।

उदाहरण 14: यदि $y=(\sin^{-1}x)^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक घनात्मक पूर्णांक n के लिए, $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$ होता है।

हल : $y=(\sin^{-1}x)^2$ के दोनों प्रक्षों को अवकलित करने पर, हम $y^{(1)}=\dfrac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ प्राप्त करते हैं।

वर्ग करने तथा वज़्र–गुणन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$(1-x^2)(y^{(1)})^2=4(\sin^{-1}x)^2=4y$

पुनः एक बार अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$\dfrac{d}{dx}[(1-x^2)(y^{(1)})^2]=\dfrac{d}{dx}(4y)$ [क्योंकि $y=(\sin^{-1}x)^2$ है]

$$\Rightarrow\left[\frac{d}{dx}(1-x^2)\right](y^{(1)})^2+(1-x^2)\frac{d}{dx}(y^{(1)})^2=4\frac{d}{dx}(y)$$

$$\Rightarrow(-2x)(y^{(1)})^2+(1-x^2).2y^{(1)}y^{(2)}=4y^{(1)}$$

$$\Rightarrow 2(1-x^2)y^{(1)}y^{(2)}-2x(y^{(1)})^2-4y^{(1)}=0$$

उपरोक्त को $2\,y^{(1)}$ से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(1-x^2)y^{(2)}-xy^{(1)}-2=0$$

उपरोक्त प्रथम दो पदों में से प्रत्येक के लिए लेबनिज़ प्रमेय का प्रयोग करते हुए, n बार अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$D^n\left[\underbrace{(1-x^2)}_{v}\underbrace{y^{(2)}}_{u}\right]-D^n\left[\underbrace{x}_{v}\ \underbrace{y^{(1)}}_{u}\right]-D^n[2]=0$$

$$\Rightarrow [(1-x^2)D^n y^{(2)} + C(n,1)D(1-x^2)D^{n-1}y^{(2)} + C(n,2)D^2(1-x^2)D^{n-2}y^{(2)}]$$

$$-[x.D^n y^{(1)} + C(n,1)D(x)D^{n-1}y^{(1)}] - D^n(2) = 0$$

[$\because D^n(1-x^2)=0$ है, यदि $n>2$ है तथा $D^n x = 0$ है, यदि $n>1$ है]

उपरोक्त को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - C(n,1)2xy^{(n+1)} - C(n,2)2y^{(n)} - \{xy^{(n+1)} + C(n,1)y^{(n)}\} = 0$$

अर्थात्, $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0$ है।

***

निम्नलिखित प्रश्न, लेबनिज़ प्रमेय का अनुप्रयोग करने में आप को अभ्यास कराएँगे।

E14) जब $n = 5$ है, अर्थात् $(uv)^{(5)}$ है, तब लेबनिज़ प्रमेय का कथन दीजिए।

E15) सिद्ध कीजिए कि जब $n = 1$ है, तब लेबनिज़ प्रमेय अवकलन का गुणनफल नियम ही रह जाती है।

E16) लेबनिज़ प्रमेय का प्रयोग करते हुए, $\sin^2 x$ का तृतीय अवकलज ज्ञात कीजिए। इसे प्रत्यक्ष विधि से भी ज्ञात कीजिए तथा सत्यापन कीजिए कि आपने वही उत्तर प्राप्त किया है।

E17) यदि $f(x) = xe^x$ है, तो लेबनिज प्रमेय का प्रयोग करते हुए, f का छठवाँ अवकलज ज्ञात कीजिए।

E18) $x^3 \ln x$ का nवाँ अवकलज ज्ञात कीजिए।

E19) यदि $y = e^{ax}x^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $y^{(n)} = e^{ax}[a^n x^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}]$ है।

E20) i) $(uv)^{(m)}$ के लिए, लेबनिज़ प्रमेय लिखिए।

ii) उपरोक्त को पद के बाद पद द्वारा अवकलित करके प्राप्त कीजिए:

$$(uv)^{(m+1)} = C(m,0)u^{(m+1)}v + C(m,1)\,(u^{(m)}v^{(1)} + u^{(m+1)}v^{(2)}) + \cdots + C(m,m)uv^{(m+1)}$$

iii) निगमित कीजिए कि

$$(uv)^{(m+1)} = C(m,0)u^{(m+1)}v + [C(m,0)+C(m,1)]u^{(m)}v^{(1)} + [C(m,1) + C(m,2)]u^{(m-1)}v^{(2)} + \cdots + [C(m,m-1)+C(m,m)]u^{(1)}v^{(m)} + C(m,m)uv^{(m+1)}$$

iv) भाग (iii) से $(uv)^{(m+1)}$ के लिए लेबनिज़ सूत्र निगमित कीजिए।

अभी तक, हमने उच्चतर कोटि अवकलजों की चर्चा की है। अगले भाग में, हम उच्चतर कोटि अवकलजों की संकल्पना का सन्निकट मानों को ज्ञात करने में अनुप्रयोग करेंगे।

11.5 बहुपद सन्निकटन

इकाई 9 का स्मरण कीजिए, आपने यह देखा था कि एक छेदक रेखा को किसी बिंदु x_0 पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करने के लिए सन्निकटित किया जा सकता है। इस भाग में, हम दी हुई वक्रों को बहुपद फलनों की वक्रों के साथ सन्निकटित करेंगे। हम बहुपद फलनों का प्रयोग क्यों करते हैं? यह इसलिए है कि ये केवल x की घातों के साथ सरलीकृत रूप में बनाए जाते हैं। घात 0 और 1 वाले बहुपदों के आलेख सरल रेखाएँ होती हैं, जबकि 2 या अधिक घात वाले बहुपदों के आलेख वक्र होती हैं। मान लीजिए कि एक ऐसा बहुपद ज्ञात करते हैं, जो एक विशिष्ट बिंदु से होकर जाता है, तब एक वक्र के लिए तीन संभावनाएँ हो सकती हैं, जो ये हैं:

i) x-अक्ष के समांतर एक सरल रेखा, अर्थात् बहुपद घात 0 वाला है।

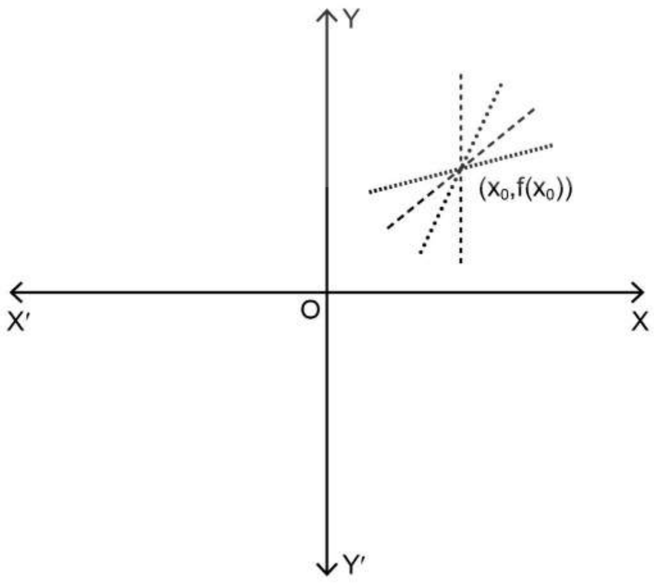
ii) एक तिरछी रेखा, अर्थात् घात 1 वाला एक बहुपद।

iii) एक वक्र, अर्थात् 2 या अधिक घात वाला एक बहुपद।

यदि किसी बहुपद की घात 0 है, तो हमारे पास कोई विकल्प नहीं है, अर्थात् एक दिए हुए बिंदु से होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा सदैव अद्वितीय होती है। परंतु यदि हम 1, 2 या अधिक वाले बहुपद ज्ञात करते हैं, तो हम अचरों को समायोजित करके विभिन्न वक्र ज्ञात कर सकते हैं। इसलिए, हम इस भाग में, रैखिक बहुपद (घात 1 वाला बहुपद), द्विघात बहुपद (घात 2 वाला बहुपद) तथा टेलर (Taylor) बहुपद (घात n वाला बहुपद) के सन्निकटनों की चर्चा करेंगे।

11.5.1 रैखिक सन्निकटन

मान लीजिए कि हम एक रैखिक बहुपद ज्ञात करना चाहते हैं, जो किसी विशेष बिंदु पर एक वक्र को सन्निकटित करे। इसके लिए, एक बिंदु $(x_0, f(x_0))$ पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि इस बिंदु से होकर जाने वाली अनेक सरल रेखाएँ हैं, जैसा कि चित्र 4 में दर्शाया गया है।



चित्र 4

हम प्रवणता को समायोजित कर सकते हैं, जिससे हम रेखा को जिस प्रकार चाहें घुमा (या झुका) सकते हैं। यही **रैखिक सन्निकटन (linear approximation)** है। सबसे अच्छा (उत्तम) सन्निकटन वह है, जब $(x_0, f(x_0))$ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता वही हो, जो $(x_0, f(x_0))$ पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

यहाँ, हम दिए हुए फलन f की एक विशेष बिंदु $(x_0, f(x_0))$ पर प्रवणता पर विचार कर रहे हैं तथा f के आलेख को सन्निकटित करने का प्रयास कर रहे हैं। यह **रैखिक सन्निकटन** कहलाता है। इसके लिए, मान लीजिए कि x_0 पर कोई फलन f अवकलनीय है तथा x_0 पर f की स्पर्श रेखा की प्रवणता $f'(x_0)$ है। तब, $(x_0, f(x_0))$ पर स्पर्श रेखा की समीकरण $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ है।

क्योंकि यह स्पर्श रेखा x_0 के निकट x के मानों के लिए f के आलेख को निकटतम रूप से सन्निकट करती है, इसलिए हम **x_0 पर f के रैखिक सन्निकटन** को $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ के रूप में लिख सकते हैं, जबकि x_0 के निकट x हो। यदि $x - x_0 = \delta x$ है, तो $f(x + \delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\delta x$ होगा। आइए निम्नलिखित उदाहरणों में रैखिक सन्निकटन ज्ञात करें।

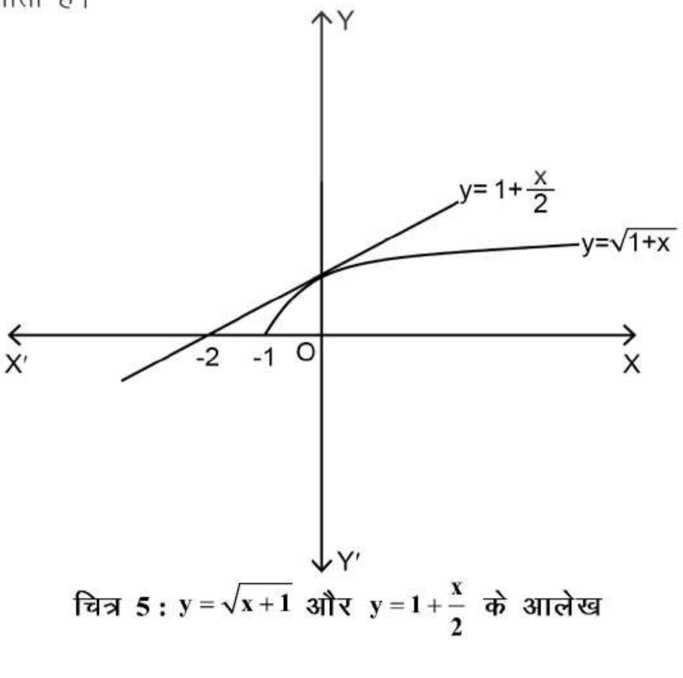
उदाहरण 12: $f(x) = \sqrt{x+1}$ का $x_0 = 0$ पर रैखिक सन्निकटन ज्ञात कीजिए। इससे $\sqrt{1.1}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x) = \sqrt{x+1}$ दिया है। x के सापेक्ष f(x) को अवकलित करने पर, हम $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ प्राप्त करते हैं। यहाँ, $x_0 = 0$ है। इसलिए, $f(x_0) = f(0) = \sqrt{1} = 1$ है तथा $f'(x_0) = f'(x_0) = \dfrac{1}{2}$ है।

f का x_0 पर रैखिक सन्निकटन $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ है। $x_0, f(x_0)$ और $f'(x_0)$ के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\sqrt{x+1} \approx 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}$$

हम कह सकते हैं कि जब 0 के निकट x होता है, तब $\sqrt{x+1}$ लगभग $1 + \dfrac{x}{2}$ है। चित्र 5, f के आलेख तथा $x = 0$ पर $\sqrt{x+1}$ के स्थानीय (local) रैखिक सन्निकटन के आलेख को दर्शाती है।



चित्र 5 : $y = \sqrt{x+1}$ और $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ के आलेख

$\sqrt{1.1}$ का सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए, हम $x = 0.1$ रखते हैं। इस प्रकार, $\sqrt{1.1}$ का सन्निकट मान $1+\frac{0.1}{2}=1.05$ है।

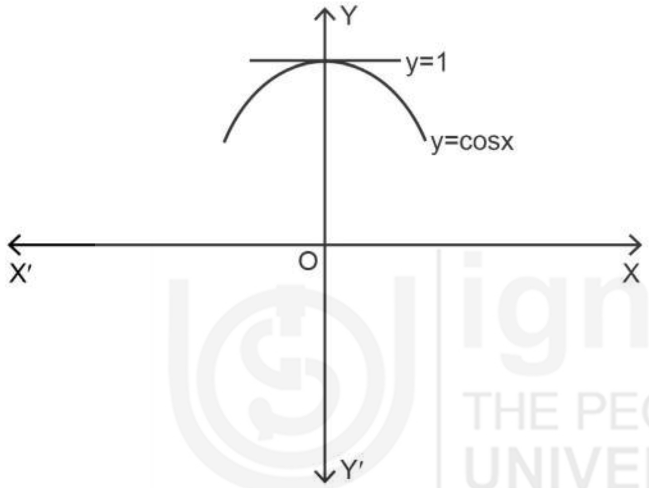
***

उदाहरण 13: दर्शाइए की $\cos x \approx 1$ है, यदि x, 0 के निकट है।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=\cos x$ है तथा $x_0 = 0$ है। तब, $f'(x)=-\sin x$ है तथा x_0 पर $f(x)$ और $f'(x)$, $f(x_0)=f(0)=1$ और $f'(x_0)=f'(0)=0$ हैं। अब, $\cos x$ के रैखिक सन्निकटन को $\cos x \approx \cos 0 + (-\sin 0)(x-0)$, अर्थात् $\cos x \approx 1+0$ द्वारा दिया जाता है।

इस प्रकार, $\cos x \approx 1$ है।

चित्र 6, $x = 0$ के निकट $f(x)=\cos x$ के आलेख को दर्शाती है।



चित्र 6 : $x = 0$ के निकट $\cos x$ का आलेख

***

अब निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E21) $x_0 = 0$ पर $\sin x$ के स्थानीय रैखिक सन्निकटन को ज्ञात कीजिए। इससे $\sin 1^\circ$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

11.5.2 द्विघात सन्निकटन

स्थानीय रैखिक सन्निकटन में, हमने स्पर्श बिंदु पर स्पर्श रेखा का प्रयोग किया है। अब, हम सन्निकटन में सुधार हेतु अपनी चर्चा को 1 से अधिक घात के बहुपदों का प्रयोग करते हुए आगे विस्तृत करेंगे। क्योंकि घात दो के बहुपद द्विघात बहुपद कहलाते हैं, इसलिए सन्निकटन के लिए प्रयोग की जाने घात दो की समीकरण **द्विघात सन्निकटन** कहलाती है। आइए 0 पर f के द्विघात सन्निकटन से प्रारंभ करें। मान लीजिए कि इस सन्निकटन का द्विघात बहुपद रूप $p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2$ है, जहाँ a_0, a_1 और a_2 को इस प्रकार लेना है, ताकि x_0 पर $p(x)$ और उसके प्रथम दोनों अवकलजों के मान क्रमशः x_0 पर f और उसके प्रथम अवकलजों के मानों के बराबर हों। अर्थात्, $p(x_0)=f(x_0), p'(x_0)=f'(x_0)$ और $p''(x_0)=f''(x_0)$ हैं।

मान लीजिए कि $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ है।

$$\therefore p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0)$$

और $p''(x) = 2a_2$ है।

इसलिए, $p(x_0) = a_0 = f(x_0)$,

$$p'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$

और $p''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0) \Rightarrow a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2}$ है।

a_0, a_1 और a_2 के इन मानों को f के द्विघात सन्निकटन में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

क्योंकि हमने $p(x)$ को $f(x)$ के द्विघात सन्निकटन के रूप में लिया है, इसलिए $f(x) \approx p(x)$ है, जो देता है :

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2}(x - x_0)^2$$

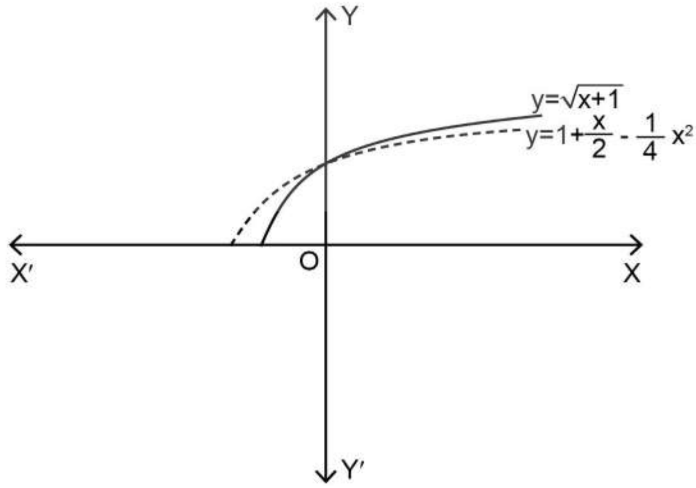
विशिष्ट रूप में, यदि x_0 को 0 के रूप में प्रतिस्थापित करें, तो हम

$p(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2$ प्राप्त करते हैं तथा फलन f का सन्निकटन

$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2$ है।

आइए देखें कि किस प्रकार यह द्विघात सन्निकटन रैखिक सन्निकटन पर सुधार करता है। उदाहरण 12 में, हमने $x_0 = 0$ पर $\sqrt{x+1}$ को, रैखिक बहुपद का प्रयोग करते हुए, सन्निकटित किया था। अब, हम इसी फलन के लिए, द्विघात सन्निकटन का प्रयोग करेंगे तथा परिणामों की तुलना करेंगे।

इसके लिए, $\sqrt{x+1} \approx f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2$ या $\sqrt{x+1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}x^2$ है।



चित्र 7 : f और p के आलेख

चित्र 7, $x = 0$ पर $\sqrt{x+1}$ का द्विघात सन्निकटन दर्शाती है। यह इसकी भी पुष्टि करती है कि द्विघात सन्निकटन रैखिक सन्निकटन से बेहतर है।

अतः, $\sqrt{1.1} \approx 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{0.01}{4} = 1.0475$ है।

इसलिए, $\sqrt{1.1} \approx 1.0475$ है।

यदि आप रैखिक सन्निकटन और द्विघात सन्निकटन से $\sqrt{1.1}$ के लिए प्राप्त परिणामों की तुलना करें, तो आप पाएँगे कि द्विघात सन्निकटन सुधरा हुआ मान देता है। निम्नलिखित उदाहरण में, आइए फलन को 0 के अतिरिक्त x_0 के निकट सन्निकटित करें।

उदाहरण 14: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ का $x = 2$ पर द्विघात सन्निकटन ज्ञात कीजिए।

हल : द्विघात सन्निकटन है :

$$f(x) \approx f(2) + f'(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 \qquad ...(3)$$

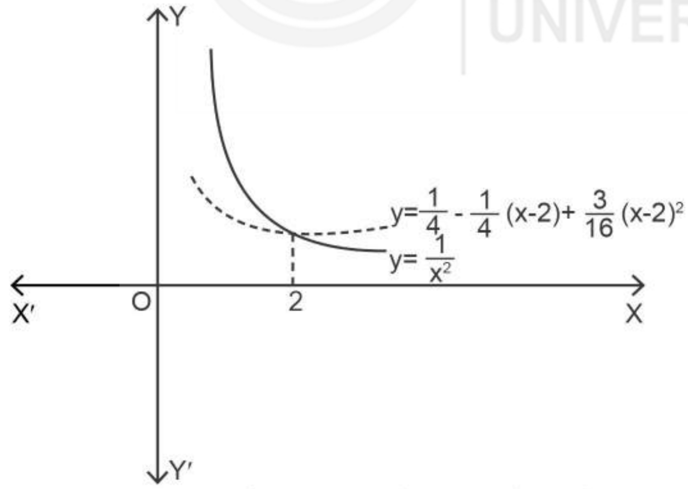
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ दिया है। इसलिए $f(2) = \frac{1}{4}$ है।

इसे x के सापेक्ष अवकलित करने पर तथा $x = 2$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ और $f'(2) = -\frac{1}{4}$ हैं तथा $f''(x) = \frac{6}{x^4}$ और $f''(2) = \frac{3}{8}$ है।

समीकरण (3) में, $f(2), f'(2)$ और $f''(2)$ के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम
$f(x) = \frac{1}{x^2} \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{3}{16}(x-2)^2$ प्राप्त करते हैं।

चित्र 8 इसे आलेखीय रूप से दर्शाती है। चित्र 8 में बिंदुकित वक्र $x = 2$ पर f के द्विघात सन्निकटन का आलेख है।



चित्र 8 : $x = 2$ के निकट f और p(x) के आलेख

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E22) $f(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ द्वारा परिभाषित फलन f का $x = 0$ पर द्विघात सन्निकटन ज्ञात कीजिए

E23) $f(x) = \sqrt{x}$ द्वारा परिभाषित फलन f का $x = 9$ पर द्विघात सन्निकटन ज्ञात कीजिए। साथ ही, $\sqrt{9.1}$ का मान भी ज्ञात कीजिए।

अब अगले उपभाग में, हम द्विघात सन्निकटन को n-घात बहुपद सन्निकटन के लिए व्यापीकृत करेंगे।

11.5.3 टेलर सन्निकटन

अभी तक, हमने बिंदु $x = x_0$ पर फलन f के लिए सन्निकटन के रूप में, घात 0, घात 1 और घात 2 के बहुपदों की रचना की थी, जिनका सारांश सारणी 1 में नीचे दिया जा रहा है :

सारणी 1

घात	बहुपद
0	$f(x_0)$
1	$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
2	$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$

अभी तक के सन्निकटनों के लिए किए गए इन सूत्रीकरणों में आप एक पैटर्न देख सकते हैं। इसी प्रकार, हम घात–तीन के सन्निकटन ज्ञात कर सकते हैं, जो **त्रिघात सन्निकटन (cubic approximation)** कहलाते हैं। इसके बाद के बहुपद सन्निकटन **टेलर सन्निकटन** कहलाते हैं। इस उपभाग में, हम टेलर और मेकलोरिन (Maclaurin) बहुपदों पर चर्चा करेंगे।

यदि हम घात n के बहुपद का प्रयोग करते हुए, सन्निकटन को इस प्रतिबंध के साथ जारी रखें कि किसी बिंदु पर बहुपद और उसके प्रथम तीन अवकलजों के मान उसी बिंदु पर f और उसके प्रथम तीन अवकलजों के मानों के समान हों, तो हमें सुधरे हुए सन्निकटन प्राप्त होते हैं। यदि यह प्रक्रिया परिशुद्धता में सुधार लाती है, तो हम उच्चतर घातों के बहुपदों तक क्यों नहीं जाएँ? यह हमें घात x के बहुपद पर विचार करने की ओर ले जाता है। मान लीजिए कि $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ है, ताकि $p(0) = f(0), p'(0) = f'(0), p''(0) = f''(0), ..., p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$ है।

चित्र 9: स्कोटिश गणितज्ञ कोलिन मेकलोरिन (1698–1746)

p(x) को उत्तरोतर n बार अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + n\,a_n x^{n-1}$$

$$p''(x) = 2a_2 + 3a_3x + ... + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

.

.

.

$$p^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)....2.1.a_n$$

इनमें $x = 0$ प्रतिस्थापित करने पर, गुणांक हैं :

$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{f''(0)}{2},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{3.2} = \frac{f'''(0)}{3!}$ तथा इसी प्रकार, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ है।

यदि हम गुणांकों a_i के इन मानों को, जहाँ $i = 0,.1,...n$ हैं, बहुपद सन्निकटन में प्रतिस्थापित करें, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$f(x) \approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

उपरोक्त को f के लिए, **xवाँ मेकलोरिन का बहुपद कहते हैं।**

यह चर्चा हमें निम्नलिखित परिभाषा तब पहुँचा देती है।

परिभाषाः मान लीजिए कि f एक ऐसा फलन है जिसके n बार अवकलजों का 0 पर अस्तित्व है। तब, $p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ f के लिए मेकलोरिन का nवाँ बहुपद कहलाता है, जब कि प्रतिबंध यह है कि इस बहुपद और उसके प्रथम n अवकलजों के $x=0$ पर मान f और उसके उसके प्रथम n अवकलजों के $x=0$ पर मानों के समान हों।

इसके अनुसार, $p_1(x)$ और $p_2(x)$ क्रमश $x=0$ पर f के रैखिक और द्विघात मेकलोरिन बहुपद हैं।

इससे, हम $x=0$ पर $f(x)$ के बहुपद सन्निकटन प्राप्त करते हैं, जो रैखिक या द्विघात सन्निकटन के अधिक परिशुद्ध होते हैं।

अतः, $f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ है।

ध्यान दीजिए कि हम मेकलोरिन बहुपद की परिभाषा में $p_n(x)$ का प्रयोग कर रहे हैं। यह केवल घात n के बहुपद को निरूपित करने के लिए है। अब, हम निम्नलिखित उदाहरणों में कुछ फलनों का प्रसार करेंगे।

उदाहरण 15: $\sin x$ के लिए nवाँ मेकलोरिन बहुपद ज्ञात कीजिए। इससे, $\sin x$ के लिए रैखिक, द्विघात और त्रिघात बहुपद निगमित कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=\sin x$ है। इस प्रकार, $f(0)=0$ है। $f(x)$ को अवकलित करने और $x=0$ रखने पर, हमें प्राप्त होने वाले परिणाम हैं :

$$f'(x)=\cos x,\ f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x,\ f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos x,\ f'''(0)=-1$$

$$f''''(x)=\sin x,\ f''''(0)=0$$

.   .   .

.   .   .

.   .   .

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \text{if}\ n=2k \text{ है।}$$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & ,\text{ यदि } n=2k\\ (-1)^k & ,\text{ यदि } n=2k+1,\ \text{जहाँ } k=0,1,2,3,... \text{ है।}\end{cases}$$

nवाँ मेकलोरिन बहुपद है :

$$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$p_n(x) = 0 + 1.x + \frac{0}{2!}.x^2 + \frac{(-1)}{3!}.x^3 + \frac{0}{4!}.x^4 + ... + \frac{(1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, जहाँ $k = 0,1,2,....$ है।

या $p_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - .... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ है।

या $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, जहाँ $k = 0,1,2...$ है।

***

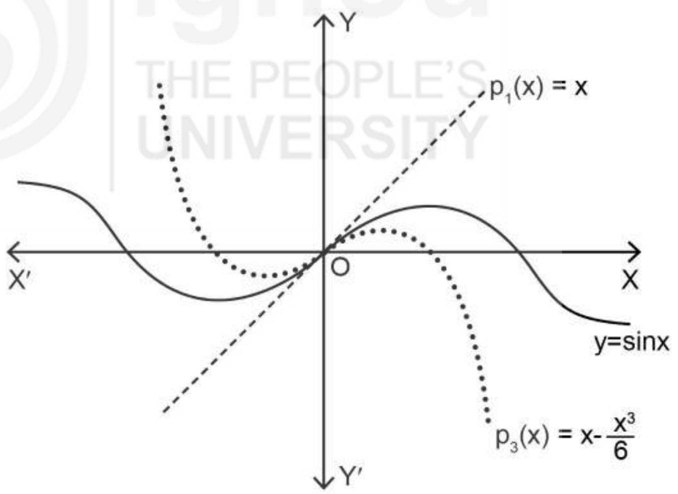
आप यह प्रेक्षित कर सकते हैं कि $\sin x$ के लिए मेकलोरिन बहुपद में x की केवल विषम घाते हैं, क्योंकि यदि आप $x = 0$, पर अवकलजों के पैटर्न को देखें, तो आप पाएँगे कि यह $1, 0, -1, 0, ...$ है। अर्थात् $x = 0$ पर, बारी-बारी से एक-एक के अंतर से आने वाला प्रत्येक अवकलज 0 है। अतः, मेकलोरिन बहुपद में x की सम घातों के सभी गुणांक शून्य हैं। यदि हम घात एक, दो और तीन के बहुपद निगमित करें, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$p_1(x) = 0 + 1.x = x$$

$$p_2(x) = 0 + 1.x + \frac{0}{2!}.x^2 = x$$

$$p_3(x) = 0 + 1.x + \frac{0}{2!}.x^2 + \frac{(-1)}{3!}.x^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

चित्र 10, $f(x), p_1(x)$ और $p_3(x)$ के आलेखों को दर्शाती है।



चित्र 10 : sinx,p_1 और $p_3(x)$ के आलेख

***

उदाहरण 16: e^x के लिए मेकलोरेन बहुपद ज्ञात कीजिए। साथ ही, p_0, p_1, p_2, p_3 के आलेख भी खींचिए। इससे, $e^{0.1}$ का दशमलव के 3 स्थानों तक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x) = e^x$ है। तब, $f(0) = e^0$ है।

$f(x)$ को x के सापेक्ष उत्तरोतर अवकलित करने तथा परिणामों में $x = 0$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$f'(x) = e^x, f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x, f''(0) = 1$$

$f'''(x) = e^x, f'''(0) = 1$

$f''''(x) = e^x, f''''(0) = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$

अतः $p_n(x) = 1 + 1.x + \frac{1}{2!}.x^2 + \frac{1}{3!}.x^3 + ... + \frac{1}{n!}.x^n$

या $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$

इनमें $x = 0.1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$e^{0.1} \approx 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!}$ [अन्य पद दशमलव के तीन स्थानों तक के मान कोई योगदान नहीं देंगे, इसलिए इन्हें छोड़ दिया गया है।]

$= 1 + 0.1 + 0.005 + 0.0002$

$= 1.1052$

इस प्रकार, $e^{0.1} \approx 1.105$

अब, p_0, p_1, p_2 और p_3 ज्ञात करने पर,

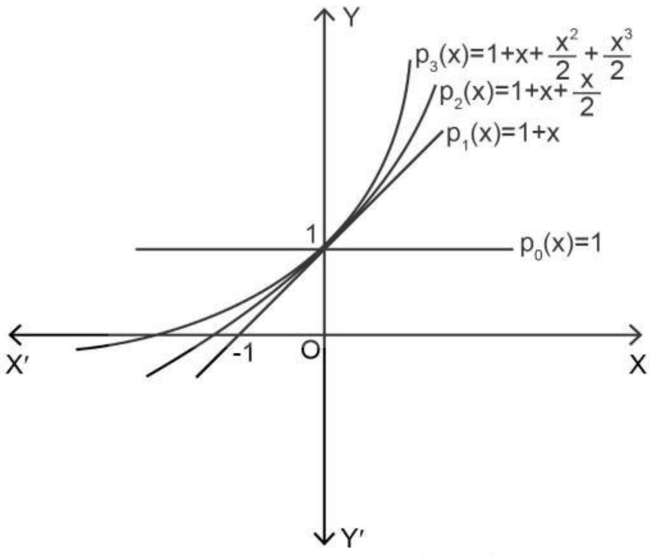
$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = 1 + x$

$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

और $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ है।

इन बहुपदों के आलेख चित्र 11 में दिए हैं।



चित्र 11 : p_0, p_1, p_2, p_3 के आलेख

***

उदाहरण 17: शून्य के इर्दगिर्द $(1+x)^r$ के लिए मेकलोरिन बहुपद लिखिए, जहाँ r एक स्थिर वास्तविक संख्या है।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=(1+x)^r$ है। तब, $f(0)=1$ है।

$$f'(x)=r(1+x)^{r-1};\ f'(0)=r$$

$$f^{(2)}(x)=r(r-1)(1+x)^{r-2};\ f^{(2)}(0)=r(r-1)$$

$$f^{(n)}(x)=r(r-1)\ldots(r-n+1)\ (1+x)^{r-n},\ f^{(n)}(10)=r(r-1)\ldots(r-n+1)$$

अतः, शून्य के इर्दगिर्द मेकलोरिन बहुपद हैः

$$(1+x)^r \approx 1+\frac{r}{1!}x+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

***

उदाहरण 18: फलन $\sin x$ के लिए मेकलोरिन बहुपद लिखिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=\sin x$ है। तब, 0 पर $\sin x$ के उत्तरोतर अवकलज निम्नलिखित द्वारा देय हैं :

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{यदि } n \text{ सम है}\\ 1, & \text{यदि } n, 4 \text{ द्वारा विभाज्य है}\\ -1, & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$$

हम देखते हैं कि जब n के मान 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... होते हैं, तब $f^{(n)}(0)$ के मान 0, 1, 0, –1, 0, 1, 0, –1,.... होते हैं।

इसलिए, $\sin x$ के लिए, मेकलोरिन बहुपद हैंः

$$\sin x = 0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{(-1)}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\cdots+$$

$$=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

***

उदाहरण 19: शून्य के इर्दगिर्द $\cos 2x$ के लिए मेकलोरिन बहुपद लिखिए।

हल : आइए $f(x)=\cos 2x$ लिखें। हम 0 पर f का nवाँ अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। ये नीचे दिए जा रहे हैंः

$$f^{(n)}(x)=2^n\cos\frac{n\pi}{2} \text{ तथा } f^n(0)=\begin{cases}2^n(-1)^{n/2} & n \text{ सम है}\\ 0 & n \text{ विषम है}\end{cases}$$

अतः, शून्य के इर्दगिर्द मेकलोरिन बहुपद है :

$$\cos 2x=\begin{cases}1+\frac{0.x}{1!}-\frac{2^2x^2}{2!}-\frac{0.x^3}{3!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\frac{0.x^5}{5!}+\cdots+\frac{2^n(-1)^{n/2}}{n!}, & \text{यदि } n \text{ सम है।}\\ 0+\frac{0.x}{1!}-\frac{2^2x^2}{2!}-\frac{0.x^3}{3!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\frac{0.x^5}{5!}+\cdots+\frac{2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!}, & \text{यदि } n \text{ विषम है।}\end{cases}$$

***

उदाहरण 20: निम्नलिखित को लिखिए :

i) $\tan x$ के लिए, मेकलोरिन बहुपद के प्रथम चार पद।

ii) उपरोक्त बहुपद के प्रथम तीन शून्येतर पद।

हल : **i)** मान लीजिए कि $f(x)=\tan x$ है। तब, $f(0)=0$ है।

$$f'(x)=\sec^2 x,\ f'(0)=1$$

$$f''(x)=2\sec^2 x\tan x,\ f''(0)=0$$

$$f^{(3)}(x)=2\sec^4 x+4\sec^2 x\tan^2 x$$

$$=2\sec^2 x(\sec^2 x+2\tan^2 x)$$

$$f^{(3)}(0)=2(1+0)=2$$

अतः, $\tan x$ के लिए, मेकलोरिन बहुपद के प्रथम चार पद निम्नलिखित हैं :

$$0,\ \frac{1}{1!}x,\ \frac{0}{2!}x^2,\ \frac{2}{3!}x^3$$

ii) यहाँ $\tan x$ के लिए, मेकलोरिन बहुपद $x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ है।

अब, हम अगला शून्येतर पद चाहते हैं।

हमें प्राप्त है: $f^{(4)}(x)=16\sec^4 x\tan x+8\sec^2 x\tan^3 x$ और $f^{(4)}(0)=0$ है

आगे, $f^{(5)}(x)=16\sec^6 x+64\sec^4 x\tan^2 x+24\sec^4 x\tan^2 x+16\sec^2 x\tan^4 x$

इसका अर्थ है कि $f^{(5)}(0)=16$ है।

इसलिए, वाँछित प्रथम तीन शून्येतर पद $\frac{1}{1!}x,\ \frac{2}{3!}x^3$ और $\frac{16}{5!}x^5$ है।

अर्थात् $x,\ \frac{x^3}{3}$ और $\frac{2x^5}{15}$ हैं।

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$$

***

उदाहरण 21: यदि $\sin kx$ के लिए, मेकलोरिन बहुपद में x^3 का गुणांक $-6k$ दिया है, तो k के सभी संभव मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $f(x)=\sin kx$ है, इसलिए $f'(x)=k\cos kx$ है।

$f^{(2)}(x)=-k^2\sin kx$ है तथा $f^{(3)}(x)=-k^3\cos kx$ है।

$\sin kx$ के लिए, मेकलोरिन बहुपद निम्नलिखित है :

$$\sin kx=\frac{kx}{1!}-\frac{k^3x^3}{3!}+\cdots$$

इस प्रसार में x^3 का गुणांक $-(k^3/6)$ है।

इसलिए, $-(k^3/6)=-6k$ है। इससे प्राप्त समीकरण है :

$$k(k^2-36)=0$$

इसके मूल $k=0, 6$ और -6 हैं।

इस प्रकार, k के सभी संभव मान $0, 6$ और -6 हैं ताकि $\sin kx$ के लिए मेकलोरिन बहुपद में x^3 का गुणांक $-6k$ है।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E24) निम्नलिखित के लिए, मेकलोरिन बहुपद p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 और p_n ज्ञात कीजिए :

i) $\cos x$ iii) $\ln(1+x)$

ii) $\frac{1}{1-x}$ iv) $x e^x$

E25) $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$ के लिए, घात तीन का मेकलोरिन बहुपद ज्ञात कीजिए।

E26) निम्नलिखित के लिए, मेकलोरिन बहुपद लिखिए :

i) $\frac{1}{(1+x)^2}$

ii) $(x-2)^2 + 1$

iii) $1/(1-2x)$

E27) निम्नलिखित के मेकलोरिन बहुपद में प्रथम तीन शून्येतर पद लिखिए :

i) $\sin 3x$

ii) $\ln(1-x)$

अभी तक, हम $x = 0$ की समीपता में किसी फलन के सन्निकटन पर अपना ध्यान केन्द्रित कर रहे थे। अब, हम एक स्वेच्छ मान x_0 की समीपता में f के सन्निकटन की अधिक व्यापक स्थिति पर विचार करेंगे। पुनः, हम उसी धारणा का उपयोग करेंगे, जिसका हमने मेकलोरिन बहुपद के लिए उपयोग किया था, अर्थात् यह कि बहुपद और उसके उत्तरोतर x_0 पर अवकलजों के मान (यदि अस्तित्व है) वही हैं जो x_0 पर f और उसके उत्तरोतर अवकलजों के हैं।

अब, $(x - x_0)$ की आरोही घातों में nवीं घात के बहुपद पर विचार कीजिए।
हमें $p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$ प्राप्त है।

पुनः गुण $p_n(x_0) = f(x_0), p_n'(x_0) = f'(x_0), p_n''(x_0) = f''(x_0) \ldots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ को सत्य मानते हुए, हम प्राप्त करते हैं:

$$p_n(x_0) = f(x_0) = a_0$$

$$p_n'(x_0) = f'(x_0) = a_1$$

$$p_n''(x_0) = f''(x_0) = 2!a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$p_n'''(x_0) = f'''(x_0) = 3!a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

.

.

.

$$p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

इन मानों को $p_n(x)$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$
$$+ .... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

यह बहुपद $x = x_0$ के समीप f का nवाँ टेलर बहुपद कहलाता है। इसकी परिभाषा निम्नलिखित है :

परिभाषाः मान लीजिए कि x_0 पर फलन f, n बार अवकलनीय है। तब, x_0 पर f का nवाँ टेलर बहुपद है:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

संकलन संकेतन (सिगमा संकेतन) में, इसे इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

चित्र 12: ब्रूक टेलर (1685–1731)

आप देख सकते हैं कि $x_0 = 0$ के समीप nवाँ मेकलोरिन बहुपद nवें टेलर बहुपद की एक विशिष्ट स्थिति है। क्योंकि टेलर बहुपद f(x) के सन्निकटन के लिए उपयोग होता है, इसलिए $p_n(x) \approx f(x)$ है।

***

आइए निम्नलिखित उदाहरणों में टेलर बहुपद ज्ञात करें।

उदाहरण 22: $x = 5$ के समीप $\ln x$ के लिए, प्रथम पाँच टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x) = \ln x$ है। तब, $f(5) = \ln 5$ है। f को उत्तरोतर अवकलित करने तथा $x = 5$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$f'(x) = \frac{1}{x}, f'(5) = \frac{1}{5}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(5) = -\frac{1}{25}$$

$$f'''(x) = \frac{1.2}{x^3}, f''(5) = \frac{2!}{125}$$

$$f''''(x) = -\frac{1.2.3}{x^4}, f''''(5) = -\frac{3!}{625}$$

टेलर बहुपद हैं :

$$p_0(x) = f(5) = \ln 5$$

$$p_1(x) = f(5) + f'(5)(x - 5) = \ln 5 + \frac{1}{5}(x - 5)$$

$$p_2(x) = f(5) + f'(5)(x - 5) + \frac{f''(5)}{2!}(x - 5)^2 = \ln 5 + \frac{1}{5}(x - 5) - \frac{1}{50}(x - 5)^2$$

$$p_3(x) = \ln 5 + \frac{1}{5}(x - 5) - \frac{1}{50}(x - 5)^2 + \frac{1}{375}(x - 5)^3$$

$$p_4(x) = \ln 5 + \frac{1}{5}(x - 5) - \frac{1}{50}(x - 5)^2 + \frac{1}{375}(x - 5)^3 - \frac{1}{2500}(x - 5)^4$$

***

उदाहरण 23: $x = 1$ के समीप $1/x$ के लिए nवाँ टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। साथ ही, इसे संकलन संकेतन में भी लिखिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x) = 1/x$ है। तब $f(1) = 1$ है। f को उत्तरोतर अवकलित करने और $x = 1$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2!}{x^3}, f''(1) = 2!$$

$$f'''(x) = -\frac{3!}{x^4}, f'''(1) = -3!$$

$$f'''(x) = -\frac{3!}{x^4}, f'''(1) = -3!$$

$$f''''(x) = \frac{4!}{x^5}, f''''(1) = 4!$$

. . .

. . .

. . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

इस प्रकार, टेलर बहुपद है :

$$p_n(x) = 1 + (-1)(x-1) + \frac{2!}{2!}(x-1)^2 + \frac{-3!}{3!}(x-1)^3 + \frac{4!}{4!}(x-1)^4 + \ldots + \frac{(1)^n n!}{n!}(x-1)^n$$

अतः, $p_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots + (1)^n (x-1)^n$

संकलन संकेतन में,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x-1)^i$$

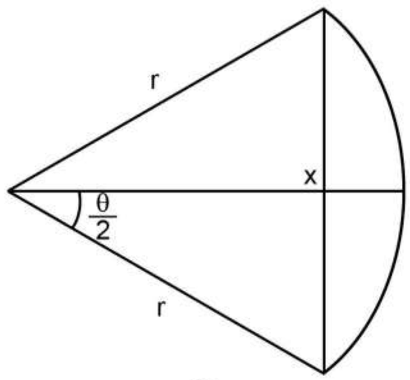
***

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E28) फलन $y = a + \tan^{-1} bx$ पर विचार कीजिए, जहाँ a और b स्थित वास्तविक संख्याएँ हैं। हमें दिया है कि इसका शून्य के समीप टेलर बहुपद $2 + 3x - 9x^3 + \cdots$ है। a और b के मान ज्ञात कीजिए।

E29) फलन $\sin^{-1} x$ के लिए शून्य के समीप टेलर बहुपद में x^3 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

E30) i) चित्र, 13 त्रिज्या π का एक त्रिज्यखंड दर्शाती है तथा इसका केन्द्रीय कोण θ छोटा (या कम) है। $\theta = 0$ पर, $\cos\theta$ के स्थानीय द्विघात सन्निकटन का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $x \approx \frac{\theta^2}{8}$ है।



चित्र 13

ii) यह कल्पना करते हुए कि पृथ्वी त्रिज्या 3000 km का एक गोला है, विषवत्-रेखा (वृत्त) के अनुदिश 100 km लंबा चाप अपनी संगत जीवा से जितना भिन्न होगा उसकी महत्तम मात्रा का सन्निकटन करने के लिए, उपरोक्त भाग (i) में प्राप्त परिणाम का उपयोग कीजिए।

आइए अब इस इकाई का सारांश दें

11.6 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. उच्चतर कोटि अवकलजों को प्रविष्ट किया है।

2. दो फलनों के गुणनफल के nवें अवकलज के लिए एक सूत्र (लेबनिज प्रमेय) का निगमन किया है, जो निम्नलिखित है:
$(uv)^{(n)} = C(n, 0)u^{(n)}v + C(n, 1)u^{(n-1)}v^{(1)} + C(n, 2)u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + C(n, n)uv^{(n)}$

3. किसी बिंदु x_0 के समीप फलन f का रैखिक सन्निकटन
$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ है।

4. किसी बिंदु x_0 के समीप फलन f का द्विघात सन्निकटन
$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ है।

5. सूत्र $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ का प्रयोग करते हुए मेकलोरिन बहुपद को लिखा है।

6. किसी बिंदु x_0 के समीप एक फलन के टेलर बहुपद को
$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(x)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ के रूप में लिखा है।

11.7 हल/उत्तर

E1) i) $f'(x) = 3x^2$ ii) $y' = 2e^{2x}$

$$f''(x) = 6x \qquad y'' = 4.e^{2x}$$

E2) $y = e^{ax} \sin bx$

$y_1 = e^{ax}(\cos bx.b) + \sin bx(e^{ax}a)$

$= be^{ax}\cos bx + ay$

या $y_1 - ay = be^{ax}\cos bx$

दोनों पक्षो को पुनः अवकलित करने पर,

$y_2 - ay_1 = be^{ax}(-\sin bx.b) + b\cos bx(e^{ax}.a)$

$= -b^2 y + a(y_1 - ay)$

या $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$

$k \neq 0$, क्योंकि
$k = 0 \Rightarrow 0 = 2\sqrt{3}$
जो असंभव है।

E3) i) $f(x) = \sin kx \Rightarrow f^{(2)}(x) = -k^2 \sin kx$

$\Rightarrow f^{(2)}(\pi/6) = -k^2 \sin k\pi/6$

अब, $-k^2 \sin k\pi/6 = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sin k\pi/6 = -2\sqrt{3}/k^2$

क्योकिं $-1 < \sin k\pi/6 < 0, -\pi < k\pi/6 < 0$

$\Rightarrow k = -1$ या 2

इसमें से, $k = -2$ ही वह मान है, जो $\sin k\pi/6 = -2\sqrt{3}/k^2$ को संतुष्ट करता है।

ii) $f(x) = x^k + kx^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1} + 2kx$

$f''(1) = k(k-1) + 2k = 12 \Rightarrow k = 3$ या -4

E4) $s(t) = t^3 - 4.5t^2 - 7t$ दिया है।

i) वेग $v(t) = 3t^2 - 9t - 7$

$v(t) = 5 \Rightarrow 3t^2 - 9t - 7 = 5$

$\Rightarrow 3t^2 - 9t - 12 = 0$

$\Rightarrow 3t^2 - 12t + 3t - 12 = 0$

$\Rightarrow 3t(t-4) + 3(t-4) = 0$

$\Rightarrow (t-4)(3t+3) = 0$

$\Rightarrow t = 4$, क्योंकि t ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

ii) त्वरण $a(t) = 6t - 9$

$a(t) = 0$, जब $6t - 9 = 0$ या $t = 1.5$ सैकण्ड है।

त्वरण 0 का अर्थ है कि वेग की परिवर्तन-दर 0 है, जिसका अर्थ आगे यह है कि वेग अचर है।

E5) $p'(t) = \dfrac{2000(4t+75) - 2000t(4)}{(4t+75)^2}$

$p'(10) = \dfrac{150000}{(4t+75)^2} = 11.34$

$p'(50) = 6.12$

$p'(100) = 0.665$

ii) $p''(t) = \dfrac{-300000}{(4t+75)^3}$

$p''(10) = -0.197$

$p''(50) = -0.0144$

$p''(100) = -0.003$

iii) $p'(t)$ वर्षों में जनसंख्या में परिवर्तन-दर निरूपित करता है। यह परिवर्तन-दर क्रमशः 10 वर्षों, 50 वर्षों और 100 वर्षों में 11.34, 6.12 और 0.665 है। इसी प्रकार, जनसंख्या में परिवर्तन-दर की परिवर्तन-दर $p''(t)$ द्वारा निरूपित होती है। इसमें भी कमी हो रही है।

E6) i) $f'(x) = \sec x \tan x$

$f^{(2)}(x) = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$

$f^{(3)}(x) = \sec x \tan^3 x + 2\sec^3 x \tan x + 3\sec^3 x \tan x$

$f^{(3)}(\pi/4) = \sqrt{2}.1 + 2.\ 2\sqrt{2}.1 + 3.\ 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$

ii) $f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin 2x$

$f''(x) = -4\sin 2x - 4\cos 2x$

$f^{(3)}(x) = -8\cos 2x + 8\sin 2x$

$f^{(3)}(\pi/4) = 8$

E7) मान लीजिए कि $y = \sin x$ है।

$y_1 = \cos x$

$y_2 = -\sin x$

$y_3 = -\cos x$

$y_4 = \sin x$

चतुर्थ अवकलज $\sin x$ है। इसलिए, इसके बाद चार कोटि का प्रत्येक गुणज $\sin x$ होगा।

इस प्रकार, $\dfrac{d^{96}}{dx^{96}}(\sin x) = \sin x$

$\dfrac{d^{97}}{dx^{97}}(\sin x) = \cos x$

$\dfrac{d^{98}}{dx^{98}}(\sin x) = -\sin x$

$\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\sin x) = -\cos x$

E8) $y_n = r(r-1)\ldots(r-n+1)\,(1+x)^{r-n},\ n < r$

E9) i) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{3!a^n}{(3-n)!}(ax+b)^{3-n}; \text{ यदि } n \le 3 \\ 0, \text{ if } n > 3 \end{cases}$

ii) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!a^n}{(m-n)!}(ax+b)^{m-n} \text{ यदि } n \le m \\ 0, \text{ if } n > m \end{cases}$

iii) $f^{(n)}(x) = e^x$

iv) $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$

v) $\dfrac{x}{(x-1)(2x+3)} = \dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{(2x+3)}$ (आंशिक भिन्नों के प्रयोग से)

E10) $f'(x) = a_1 + 2a_2x + .. + n\,a_n x^{n-1}$

$f''(x) = 2a_2 + ... + n(n-1)a_n x^{n-2}$

$\vdots$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = n(n-1).......1.a_n x^{n-n}$

$= n!a_n$

E11) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,$

$f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$, इत्यादि। अतः, हमारा अनुमान है कि

$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x \text{ यदि } n = 4k+1 \\ -\sin x \text{ यदि } n = 4k+2 \\ -\cos x \text{ यदि } n = 4k+3 \\ \sin x \text{ यदि } n = 4k \end{cases}$

या $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

E12) $y = \sin(ax+b)$

$y_1 = a\cos(ax+b)$

$y_2 = -a^2\sin(ax+b)$

$y_3 = -a^3\cos(ax+b)$

$y_4 = a^4\sin(ax+b)$

इस प्रकार,

$y^{(n)}(x) = \begin{cases} a^n\cos(ax+b), \text{यदि } n = 4k+1 \\ -a^n\sin(ax+b), \text{यदि } n = 4k+2 \\ -a^n\cos(ax+b), \text{ यदि } n = 4k+3 \\ a^n\sin(ax+b), \text{ यदि } n = 4k \end{cases}$

इस प्रकार, $y^{(n)}(x) = a^n\cos\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

E13) $y = \cos x \Rightarrow y_1 = -\sin x,\ y_2 = -\cos x,\ y_3 = \sin x,\ y_4 = \cos x$ इत्यादि

$y_n = \cos(x + n\pi/2)$

$\Rightarrow y_{n+1} = -\sin(x + n\pi/2)$

$\Rightarrow y_n^2 + y_{n+1}^2 = \cos^2(n\pi/2) + \sin^2(n\pi/2) = 1$

E14) $(uv)^{(5)} = u^{(5)}v + 5u^{(4)}v^{(1)} + 10u^{(3)}v^{(2)} + 10u^{(2)}v^{(3)} + 5u^{(1)}v^{(4)} + v^{(5)}$

E15) $(uv)^{(1)} = u^{(1)}v + uv^{(1)}$, जो अवकलन का गुणनफल नियम है।

E16) $\dfrac{d^3(\sin^2 x)}{dx^3} = \dfrac{d^3}{dx^3}(\sin x.\sin x) = -\cos x \sin x - 3\sin x \cos x$
$-3\sin x \cos x - \cos x \sin x = -8\sin x \cos x$ अब, प्रत्यक्ष रुप से, अवकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x) = 2\sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^3}{dx^3}(\sin^2 x) = -8\sin x \cos x$$

दोनों परिणाम समान हैं।

E17) $u = x,\ v = e^x$

$$(uv)^{(6)} = vu^{(6)} + 6v^{(1)}u^{(5)} + 15v^{(2)}u^{(4)} + 20v^{(3)}u^{(3)} + 15v^{(4)}u^{(1)} + 6v^{(5)}u^{(1)} + v^{(6)}u$$

$$= 0+0+0+0+0+6.e^x.1 + e^x.x = (x+6)e^x$$

E18) $D^n(x^3 \ln x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^3}{x^n}[(n-1)! - 3C(n,1)\,(n-2)! + 6C(n,2)(n-3)!$
$-6C(n,3)\,(n-4)!]$

E19) $y^{(n)} = D^n[e^{ax}x^2]$ [जहाँ $u = x^2$ और $v = e^{ax}$ है।

$$= x^2.D^n(e^{ax}) + C(n,1)D(x^2).D^{n-1}(e^{ax}) + C(n,2)D^2(x^2)D^{n-2}(e^{ax})$$

[$\because D^3(x^2)$ और उससे आगे सभी अवकलज शून्य है]

$$= a^n x^2 e^{ax} + n.2x.a^{n-1}e^{ax} + \frac{n(n-1)}{2!}.2.(a)^{n-2}e^{ax}$$

$$= a^{(n-2)}e^{ax}[a^2x^2 + 2nax + n(n-1)a^2]$$

E20) i) $(uv)_m = C(m,0)\,u_m v + C(m,1)\,u_{m-1}v_1 + C(m,2)\,u_{m-2}v_2 + \ldots + C(m,m)\,u\,v_m$

ii) पुनः, अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$(uv)_{m+1} = C(m,0)\,u_{m+1}v + C(m,0)\,u_m v_1 + C(m,1)\,u_m v_1 + C(m,1)\,u_{m-1}v_2 + \ldots + C(m,m)\,u_1 v_m + C(m,m)\,u\,v_{m+1}$$

iii) $(uv)_{m+1} = [C(m+1,0)\,u_{m+1}v + C(m+1,1)\,u_m v_1 + C(m+1,2)\,u_{m-1}v_2 + \ldots + C(m+1,m+1)u\,v_{m+1}]$

E21) मान लीजिए कि $f(x) = \sin x$ है। तब, $f'(x) = \cos x$ है।

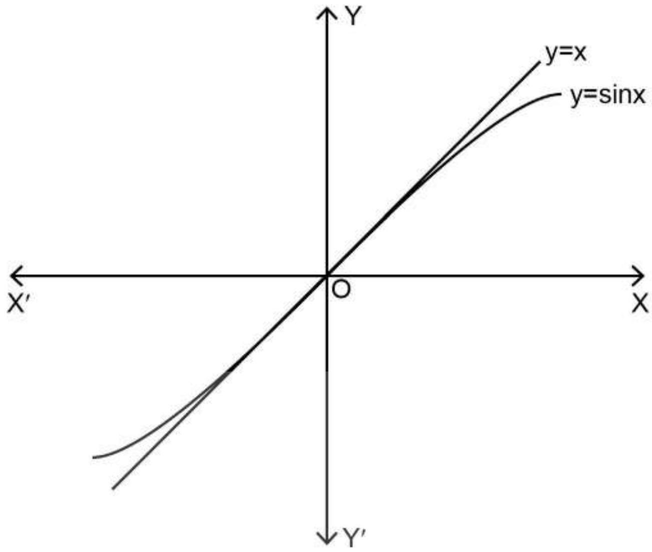
$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$ और $f'(x_0) = 1$

$\sin x \approx f(0) + f'(0)(x-0)$

$\sin x \approx 0 + 1(x)$

$\sin x \approx 0$

चित्र 14 इसके आलेख को दर्शाती है।



चित्र 14: 0 के समीप $\sin x$ का आलेख

$$\sin 1^\circ = \sin\left(1^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}\right) \text{ (रेडियन में)}$$
$$= \sin\frac{\pi}{180} = \sin(0.01744) \approx 0.01744$$

अतः, $\sin 1^\circ \approx 0.01744$ है।

E22) $f(x) = \sin(2x) + \cos x$ और $f(0) = 1$ है।

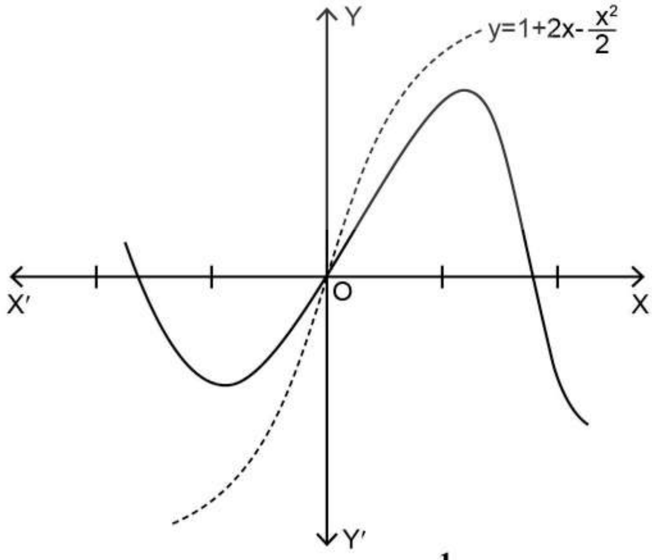
$f'(x) = 2\cos(2x) - \sin x$ और $f'(0) = 2$ है।

$f''(x) = -4\sin(2x) - \cos x$ और $f''(0) = -1$ है।

इस प्रकार, $f(x)$ का द्विघात सन्निकटन

$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$ है, जो

$\sin 2x + \cos(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2$ प्रदान करता है। चित्र 15 इसे आलेखीय रुप से दर्शाती है।



चित्र 15: $\sin(2x)+\cos x$ और $1+2x-\frac{1}{2}x^2$ के आलेख

E23) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(9) = 3$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(9) = \frac{1}{6}$

$f''(x) = \frac{-1}{4x^{3/2}}$, $f''(9) = \frac{-1}{108}$

$$p_2(x) = f(9) + \frac{f'(9)}{1!}(x-9) + \frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2$$

$$= 3 + \frac{1}{6}(x-9) + \frac{(-1/108)}{2!}(x-9)^2$$

$$= 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2$$

अब $\sqrt{9.1} \approx 3 + \frac{1}{6}(0.1) - \frac{1}{216}(0.1)^2 = 3.015$ है।

E24) i) $f(x) = \cos x, f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x, f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x, f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x, f'''(0) = 0$

$f''''(x) = \cos x$, $f''''(0) = 1$

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = 1 + 0.x = 1$

$p_2(x) = 1 + 0.x + \frac{(-1)}{2!}.x^2 = 1 - \frac{x^2}{2!}$

$p_3(x) = 1 + 0.x + \frac{(-1)}{2!}.x^2 + \frac{0}{3!}.x^3 = 1 - \frac{x^2}{2!}$

$p_4(x) = 1 + 0.x + \frac{(-1)}{2!}.x^2 + \frac{0}{3!}.x^3 + \frac{1}{4!}.x^4 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

तथा $p_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, जहाँ $k = 0,1,2,...$ है।

ii) $f(x) = \ln(1+x)$, $f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3}$, $f'''(0) = 2!$

$f''''(x) = \cos x$, $f''''(0) = 1$

$f^{iv}(x) = \frac{-1.2.3}{(1+x)^4}$, $f^{iv}(x) = -3!$

अब, $p_0(x) = 0$

$p_1(x) = 0 + 1.x = x$

$$p_2(x) = 0 + 1.x + \frac{(-1)}{2!}.x^2 = x - \frac{x^2}{2}$$

$$p_3(x) = 0 + 1.x + \frac{(-1)}{2!}.x^2 + \frac{2!}{3!}.x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$p_4(x) = 0 + 1.x + \frac{(-1)}{2!}.x^2 + \frac{2!}{3!}.x^2 + \frac{2!}{3!}.x^3 + \frac{(-1)3!}{4!}.x^4$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

तथा, $p_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, जहाँ $n = 1, 2, ...$ है।

iii) $f(x) = \frac{1}{1.x}$ है।

$p_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$, $n = 0, 1, 2, ...$ है।

साथ ही, $p_0(x) = 1$

$p_1(x) = 1 + x$

$p_2(x) = 1 + x + x^2$

$p_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

$p_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ है।

iv) $f(x) = x e^x, f(0) = 0$

$f'(x) = e^x + x e^x, f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x + e^x + x e^x, f''(0) = 2$

$f'''(x) = e^x + e^x + e^x + x e^x, f'''(0) = 3$

.

.

.

$f^{(n)}(x) = n.$

$p_0(x) = 0$

$p_1(x) = 0 + 1.x = x$

$p_2(x) = x + x^2$

$p_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!}$

$p_4(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!}$

.

.

.

$p_n(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + ... + \frac{x^n}{(n-1)!}$, जहाँ $n = 0, 1, 2...$ है।

E25) $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3, f(0) = 1$

$f'(x) = 2 - 2x + 3x^2, f'(0) = 2$

$f''(x) = -2 + 6x, f''(0) = -2$

$f'''(x) = 6, f'''(0) = 6$

अन्य सभी उच्चतर कोटि अवकलज शून्य होंगे।

$p_3(x) = 1 + 2.x + \frac{-2}{2!}.x^2 + \frac{6}{3!}.x^3$

$= 1 + 2x - x^2 + x^3$

E26) i) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$

ii) $5 - 4x + x^2 + 0.x^3 + 0.x^4 + \cdots$

iii) $1 + 2x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + \cdots$

E27) i) $3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!}$

ii) $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

E28) हम मानते हैं कि $\tan^{-1} bx$ सदैव $-\pi/2$ और $\pi/2$ के बीच मान ग्रहण करता है।
तब, $a = 2, b = 3$ है।

E29) $1/6$

विविध उदाहरण और प्रश्न

नीचे दिए हुए उदाहरण और अभ्यास प्रश्न, इस खंड में आपके द्वारा अध्ययन की गई संकल्पनाओं और प्रक्रियाओं पर आधारित हैं। इनको करने से आपको संबंधित संकल्पनाओं की बेहतर समझ प्राप्त होगी तथा साथ ही ऐसे प्रश्नों को हल करने का अच्छा अभ्यास भी हो जाएगा।

उदाहरण 1: दर्शाइए कि यदि $f(x)=x^2$ है, तो $x=1$ पर फलन f अवकलजीय है।

हल: अब, $f(x)=x^2 \Rightarrow f(1)=1^2=1$ है।

$x=1$ पर f का अवकलज ज्ञात करने के लिए, हम $x=1$ पर अवकलज की परिभाषा का प्रयोग करते हैं तथा प्राप्त करते हैं :

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} 2+h, \text{(क्योंकि } h\neq 0 \text{ है)}$$

$$=2$$

अतः, $x=1$ पर f अवकलजीय है तथा इसका अवकलज $f'(1)$, 2 है।

***

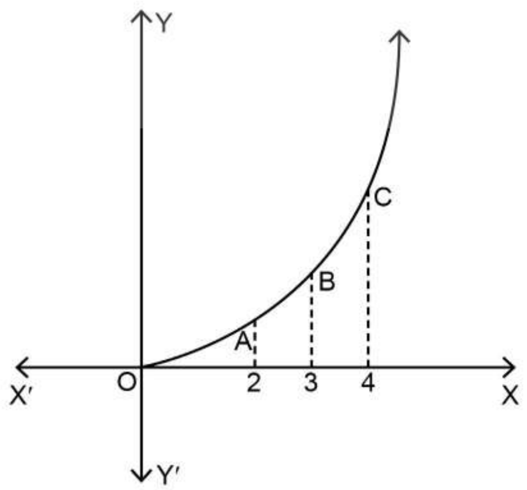
उदाहरण 2: $y=f(x)=x^2$ के लिए, औसत परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए, जब

i) x में 2 से 4 तक परिवर्तन होता है।

ii) x में 2 से 3 तक परिवर्तन होता है।

iii) x में 3 से 4 तक परिवर्तन होता है।

हल: चित्र 1 में दिया आलेख दो छेदक रेखाओं AB और AC को दर्शा रहा है। हम इन छेदक रेखाओं की प्रवणताएँ अभिकलित कर रहे हैं।



चित्र 1

i) जब $x_1 = 2$ है, तब $y_1 = f(2) = 4$ है तथा जब $x_2 = 4$ है, तब $y_2 = f(4) = 16$ है।
औसत परिवर्तन-दर $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{16-4}{4-2} = \frac{12}{2} = 6$ है।

ii) जब $x_1 = 2$ है, तब $y_1 = f(2) = 4$ है तथा जब $x_2 = 3$ है, तब $y_2 = f(3) = 9$ है।
औसत परिवर्तन–दर $= \frac{9-4}{3-2} = 5$ है।

iii) जब $x_1 = 3$ है, तब $y_1 = f(3) = 9$ है तथा जब $x_2 = 4$ है, तब $y_2 = f(4) = 16$ है।
औसत परिवर्तन-दर $= \frac{16-9}{4-3} = 7$ है।

***

उदाहरण 3: यदि $f(x) = 3x^2$ है, तो निम्नलिखित के लिए अंतर भागफल ज्ञात कीजिए :

i) $x = 1$ और $\delta x = 0.1$

ii) $x = 1$ और $\delta x = 0.01$

हल: i) हम सूत्र में $x = 1$ और $\delta x = 0.1$ प्रतिस्थापित करते हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{f(1+0.1) - f(1)}{0.1} = \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1}$$

अब, $f(1.1) = 3(1.1)^2 = 3.63$ और $f(1) = 3$ है। अतः, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{f(1.1) - f(1)}{0.1} = \frac{3.63 - 3}{0.1} = \frac{0.63}{0.1} = 6.3$$

ii) हम सूत्र में $x = 1$ और $\delta x = 0.01$ प्रतिस्थापित करते हैं तथा प्राप्त करते हैं :

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{f(1+0.01) - f(1)}{0.01} = \frac{f(1.01) - f(1)}{0.01}$$

अब, $f(1.01) = (1.01)^2 = 31.0603$ और $f(1) = 3$ है। अतः, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{f(1.01) - f(1)}{0.01} = \frac{3.0603 - 3}{0.01} = \frac{0.0603}{0.01} = 6.03$$

जैसे-जैसे 0 के निकटतर δx होता जाता है, आप औसत परिवर्तन-दर की प्रवृत्ति पर ध्यान दे सकते हैं।

***

उदाहरण 4: यदि $f(x) = x^3$ है, तो प्रथम सिद्धांत का प्रयोग करते हुए, f का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: फलन f का प्राँत वास्तविक संख्याओं का संपूर्ण समुच्चय $\mathbb{R}$ है। मान लीजिए कि $x \in \mathbb{R}$ है। जब $\delta x \neq 0$ है, जब हम प्राप्त करते हैं :

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^3 - x^3}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} (\delta x^2 + 3\delta x x + 3x^2) = 3x^2$$

इस प्रकार, $f'(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ है।

***

उदाहरण 5: यदि $f(x) = \sqrt{x}$ है, तो प्रथम सिद्धांत का प्रयोग करते हुए, f का अवकलज ज्ञात कीजए।

हल: फलन f का प्राँत सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, अर्थात् अंतराल

$[0, \infty[$ है।

मान लीजिए कि $x > 0$ है। जब $\delta x \neq 0$ है, तब हमें प्राप्त है :

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\delta x)} - \sqrt{x}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{\sqrt{(x+\delta x)} - \sqrt{x}}{\delta x}\right]\left[\frac{\sqrt{(x+\delta x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(x+\delta x)} + \sqrt{x}}\right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+\delta x)} + \sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

अतः, $\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; x > 0$ है।

इस प्रकार, $x > 0$ के लिए, $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ है।

हम नए तरीके से, 0 पर अवकलज के अस्तित्व की जाँच करते हैं। हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{f(0+\delta x) - f(0)}{\delta x} = \frac{\sqrt{\delta x}}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{\delta x}} \to \infty$$ जब घनात्मक मानों द्वारा $\delta x \to 0$ है।

इस प्रकार, $x = 0$ पर f के अवकलज का अस्तित्व नहीं है। हम जानते हैं कि h के ऋणात्मक मानों के लिए $\sqrt{h}$ परिभाषित नहीं है। इस प्रकार $f'(x) = 1/2\sqrt{x}, \forall x \in]0, \infty[$ है।

***

उदाहरण 6: दर्शाइए कि $(1, 1)$ पर अतिपरवलय $y = 1/x$ की स्पर्श रेखा x–अक्ष से $3\pi/4$ का कोण बनाती है।

हल: अतिपरवलय $y = 1/x$ से $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ प्राप्त होता है।

अब, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1) \text{ पर}} = -1$ है,

किसी रेखा की प्रवणता सदैव उसके द्वारा x-अक्ष से बनाए गए कोण का टेनजेंट (tangent) होती है। अतः, $\tan\theta = -1$ है, जहाँ θ अतिपरलय की $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा द्वारा x–अक्ष से बनाया गया कोण है। इस प्रकार, $\theta = 3\pi/4$ है।

***

उदाहरण 7: निम्नलिखित के लिए, अवकल dy तथा वृद्धि δy ज्ञात कीजिए, जब $y = x^3$ है :

i) x और δx के स्वेच्छिक मान   ii) $x = 10$ और $\delta x = 0.1$ पर

हल : i) हमें प्राप्त है: $y + \delta y = (x + \delta x)^3$

$$= x^3 + 3x^2\,\delta x + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3$$

$$\therefore \delta y = 3x^2\delta x + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3$$

$$= 3x^2\delta x + [3x\,\delta x + (\delta x)^2]\delta x$$

साथ ही, हमें प्राप्त है: $dy = 3x^2\,dx$

ii) $x = 10$ और $\delta = 0.1$ के लिए, हम प्राप्त करते हैं :

$$3x^2 dx = 300(0.1) = 30 = dy$$

$$\delta y = 30 + [30\times 0.1 + (0.1)^2](0.1)$$

$$= 30 + \cdot 301 = 30\cdot 301$$

इस प्रकार, δy के स्थान पर dy लेने पर, हमें 0.301 की त्रुटि प्राप्त होती है।

***

उदाहरण 8: कोई कण एक सरल रेखा में गति कर रहा है तथा t सैकण्ड इसकी स्थिति s (मीटर में) है। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में, इसके वेग और त्वरण (i) 3 सैकण्ड के अंत में, (ii) प्रारंभ में ज्ञात कीजिए :

i) $s(t) = t^2 + 2t + 3$

ii) $s(t) = 1/(t+1)$

iii) $s(t) = \sqrt{(t+1)}$

हल: i) हमें प्राप्त है: $s(t) = t^2 + 2t + 3$

समय t पर वेग $\frac{ds}{dt} = 2t + 2$ है।

3 सैकण्ड के अंत में वेग $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=3 \text{ पर}} = [2t+2]_{t=3 \text{ पर}} = 8m/s$

प्रारंभिक वेग $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=3 \text{ पर}} = [2t+2]_{t=0 \text{ पर}} = 2m/s$

समय $t = 3$ पर त्वरण $\left[\frac{d^2s}{dt^2}\right]_{t=3 \text{ पर}} = [2]_{t=3 \text{ पर}} = 2m/s^2$

$\therefore$ 3s के अंत में त्वरण $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=3 \text{ पर}} = 2m/s^2$ है।

प्रारंभिक त्वरण $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=0 \text{ पर}} = 2m/s^2$ है।

ii) मान लीजिए कि $s(t) = \frac{1}{t+1}$

प्रथम अवकलज $\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{(t+1)^2}$

3s के अंत में वेग $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=3 \text{ पर}} = -\frac{1}{16}m/s$ है।

प्रारंभिक वेग $= \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0 \text{ पर}} = -1m/s$ है।

द्वितीय अवकलज $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{2}{(t+1)^3}$

3s के अंत में त्वरण $= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=3 \text{ पर}} = \frac{1}{32}m/s^2$

प्रारंभिक त्वरण $= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=0 \text{ पर}} = 2\,m/s^2$

iii) मान लीजिए कि $s(t) = \sqrt{t+1}$ है।

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$

$t = 3$ पर वेग $= \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=3 \text{ पर}} = \frac{1}{4} m/s$

प्रारंभिक वेग $= \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0 \text{ पर}} = \frac{1}{2} m/s$

t पर त्वरण $= \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{4(t+1)^{3/2}}$

$t = 3$ पर त्वरण $= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=3 \text{ पर}} = -\frac{1}{32} m/s^2$

प्रारंभिक त्वरण $= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=0 \text{ पर}} = -\frac{1}{4} m/s^2$

***

उदाहरण 9: निम्नलिखित मानों वाले फलनों के अवकलज दीजिए :

i) $(x^2 - 2x)\,(3x^2 + 4)$

ii) $(x^2 - 1)^2$

iii) $(x^3 + 3)(x^2 - 4)$

हल: i) मान लीजिए कि $f(x) = (x^2 - 2x)(3x^2 + 4)$ है।

$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x).(3x^2 + 4) + (x^2 - 2x).\frac{d}{dx}(3x^2 + 4)$

$= (2x - 2)(3x^4 + 4) + (x^2 - 2x)(6x)$

ii) मान लीजिए कि $f(x) = (x^2 - 1)^2$ है।

$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^2$

$= \frac{d(t^2)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$, जहाँ $t = x^2 - 1$ है।

$= 2(x^2 - 1).(2x)$

iii) मान लीजिए कि $f(x) = (x^3 + 3)(x^2 - 4)$ है।

$\therefore f'(x) = 3x^2(x^2 - 4) + (x^3 + 3)(2x)$ है।

***

उदाहरण 10: निम्नलिखित व्यंजकों द्वारा परिभाषित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $\sqrt{(1 + x^2)}$

ii) $\sqrt{[(1 + x)/(1 - x)]}$

हल: हम $u = 1 + x^2$ और $y = \sqrt{u}$ लिखते हैं, जिससे $y = \sqrt{(1 + x^2)}$ है।

हमें प्राप्त है: $\frac{du}{dx} = 2x, \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}$

अतः, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} 2x = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ है।

ii) हमें प्राप्त है: $y = \sqrt{[(1+x)/(1-x)]}$

मान लीजिए कि $u = \frac{1+x}{1-x}$ है और $y = u^{1/2}$ है। जिससे $y = \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ है।

हमें प्राप्त है: $\frac{du}{dx} = \frac{(1-x)\frac{d(1+x)}{dx} - (1+x)\frac{d(1-x)}{dx}}{(1-x)^2}$

$$= \frac{(1-x)1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}$$

अतः, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2} \frac{2}{(1-x)^2}$

$$= \frac{1}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}$$

***

उदाहरण 11: निम्नलिखित मानों द्वारा परिभाषित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $\sin 2x$

ii) $\cos^3 x$

iii) $\sqrt{(\sin\sqrt{x})}$

हल: i) मान लीजिए कि $y = \sin 2x$ है। हम $u = 2x$ लिखते हैं, जिससे $y = \sin u$ है।

अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u.2 = 2\cos 2x$ है।

या संक्षेप में, $\frac{d(\sin 2x)}{dx} = \frac{d(\sin 2x)}{d(2x)} \cdot \frac{d(2x)}{dx} = \cos 2x.2 = 2\cos 2x$ है।

ii) मान लीजिए कि $y = \cos^3 x = (\cos x)^3$ है। हम $u = \cos x$ लिखते हैं, जिससे $y = u^3$ है।

अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2(-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x$ है।

iii) मान लीजिए कि $y = \sqrt{(\sin\sqrt{x})}$ है। हम $u = \sqrt{x}$ औैर $v = \sin u$ लिखते हैं, जिससे $y = \sqrt{v}$ है।

अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \cos u . \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{(\sin\sqrt{x})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ है।

***

उदाहरण 12: निर्दिष्ट बिंदुओं पर, निम्नलिखित वक्रों की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

i) $y = \sin^{-1} x$, (0,0) पर

ii) $y = \cos^{-1} x$, (1,0) पर

हलः i) प्रथम अवकलज $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)\text{ पर}} = 1$$

अतः, स्पर्श रेखा की समीकरण $y - 0 = 1\,(x-0)$, अर्थात् $y = x$ है।

ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(1,0)\text{ पर}} = \infty$$

अतः, स्पर्श रेखा की समीकरण $x = 1$ है।

***

उदाहरण 13: निम्नलिखित व्यंजकों द्वारा परिभाषित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $\ln(\sec x + \tan x)$

ii) $\sqrt{(a^{\sqrt{x}})}$

हलः i) मान लीजिए कि $u = \sec x + \tan x$ है।

$$\therefore \frac{d}{dx}[\ln(\sec x + \tan x) = \frac{d}{du}(\ln u).\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u}\cdot\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{(\sec x + \tan x)}\cdot(\sec x \tan x + \sec^2 x)$$

$$= \sec x$$

ii) मान लीजिए कि $a^{\sqrt{x}} = u$ है तथा $\sqrt{x} = v$ है।

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\sqrt{(a^{\sqrt{x}})}\right] = \frac{d\sqrt{u}}{du}\cdot\frac{d}{dv}(a^v)\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot u^{-1/2}\, a^v \ln a \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u^{-1/2}\, a^v \ln a \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{a^{\sqrt{x}} \ln a}{4\sqrt{x}.\sqrt{a^{\sqrt{x}}}}$$

***

उदाहरण 14: $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जब

i) $x = a(\cos t + t \sin t)$
$y = a(\sin t - t \cos t)$

ii) $x = 3\cos t - 2\cos^3 t$
$y = 3\sin t - 2\sin^3 t$

हल: i) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, जबकि $\frac{dx}{dt} \neq 0$ हो।

$$= \frac{a(\cos t + t\sin t - \cos t)}{a(-\sin t + \sin t + t\cos t)}$$

$$= \tan t$$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, जबकि $\frac{dx}{dt} \neq 0$ हो।

$$= \frac{3\cos t - 6\sin^2 t.\cos t}{-3\sin t + 6\cos^2 t\sin t}$$

***

उदाहरण 15: $y = [x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}]$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल: मान लीजिए कि $u = x^{\tan x}$ और $v = (\sin x)^{\cos x}$ है।

क्योंकि $y = u + v$ है, इसलिए $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ है।

लघुगणक लेने और फिर अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{du}{dx} = x^{\tan x}\left(\sec^2 x \log x + \frac{\tan x}{x}\right) \quad \ldots (1)$$

$$\frac{dv}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) \quad \ldots (2)$$

***

उदाहरण 16: $y = \frac{x^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{\frac{2}{3}}}{(2-3x)^{\frac{3}{4}}(3-4x)^{\frac{4}{5}}}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल: y के भागफल में, सभी गुणनखंड घनात्मक हैं। अतः, लघुगणक लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$\ln y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{2}{3}\ln(1-2x) - \frac{3}{4}\ln(2-3x) - \frac{4}{5}\ln(3-4x)$ अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{-2}{1-2x} - \frac{3}{4}\cdot\frac{-3}{2-3x} - \frac{4}{5}\cdot\frac{-4}{3-4x}$$

$$= \frac{1}{2x} - \frac{4}{(3(1-2x)} + \frac{9}{4(2-3x)} + \frac{16}{5(3-4x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{2x} - \frac{4}{3(1-2x)} + \frac{9}{4(2-3x)} + \frac{16}{5(3-4x)}\right] \text{है।}$$

***

उदाहरण 17: यदि $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, जब $x \neq 0$ और $f(0) = 0$ है, तो दर्शाइए कि x के प्रत्येक मान के लिए f अवकलजीय है, परंतु इसका अवकलज $x = 0$ के लिए संतत नहीं है।

***

हलः $x \neq 0$ के लिए, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ है।

$x = 0$ के लिए, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\frac{1}{x} \Rightarrow f'(0) = 0 \text{ है।}$$

इस प्रकार, उपरोक्त फलन का x के प्रत्येक मान के लिए, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ द्वारा दिए जाने वाला अवकलज है, जब $x \neq 0$ है, और $f(0) = 0$ है।

अब हम दर्शाते हैं कि $x = 0$ के लिए f' संतत नहीं है।

हम लिखते हैं: $\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$

यहाँ, $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$ है।

$\lim_{x\to 0} f'(x)$, अर्थात् $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ के अस्तित्व होने की स्थिति में, इससे निष्कर्ष निकलेगा कि $\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$ का भी अस्तित्व है।

परंतु यह स्थिति है ही नहीं। अतः, $\lim_{x\to 0} f'(x)$ का अस्तित्व नहीं है, जिससे $x = 0$ के लिए f' संतत नहीं है।

***

उदाहरण 18: निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित फलन के सांतत्य और अवकलजता की जाँच कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \in]-\infty, 0 \\ 1 + \sin x, \text{ if } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, \text{if } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right[\end{cases}$$

हलः शायद $x = 0$ और $x = \pi/2$ के अतिरिक्त, x के प्रत्येक मान के लिए फलन f अवकलजीय है।

i) सर्वप्रथम, हम $x = 0$ पर f के सांतत्य की जाँच करते हैं।

अब, $f(0) = 1 + \sin 0 = 1$ है।

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ और $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ है।

इस प्रकार, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ है।

अतः, $x = 0$ के लिए f संतत है।

अब, आइए $x = 0$ पर वाम (बायाँ) पक्ष अवकलज और दक्षिण (दायाँ) पक्ष अवकलज ज्ञात करें।

$$\text{LHD} = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-1}{x} = 0 \text{ है।}$$

पुनः, $x > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1+\sin x - 1}{x-0} = \dfrac{\sin x}{x}$

$\therefore \text{RHD} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ है।

इस प्रकार, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ है।

अतः, $x = 0$ पर फलन अवकलजीय नहीं है।

ii) हम $x = \pi/2$ पर सांतत्य की जाँच करते हैं। हमें प्राप्त है :

$f(\pi/2) = 2 + \left(\dfrac{1}{2}\pi - \dfrac{1}{2}\pi\right)^2 = 2,$

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (1+\sin x) = 1+1 = 2$

तथा $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left[2 + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2\right] = 2$ है।

$\therefore \lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = 2 = f(\pi/2)$ है।

अतः, $x = \pi/2$ पर f संतत है।

$$\text{LHD} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{x - \frac{1}{2}\pi} = \frac{(1+\sin x)-2}{x - \frac{1}{2}\pi} = \frac{1-\sin x}{\frac{1}{2}\pi - x}$$

$\dfrac{1}{2}\pi - x = t$ रखने पर, हम देखते हैं कि

$$\frac{1-\sin x}{\frac{1}{2}\pi - x} = \frac{1 - \sin\left(\frac{1}{2}\pi - t\right)}{t}$$

$$= \frac{1-\cos t}{t} = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}t}{t} = \sin\frac{1}{2}t \, \frac{\sin\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t}$$

इस प्रकार, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{1-\sin x}{\frac{1}{2}\pi - x} = 0$ है।

$$\text{RHD} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{x - \frac{1}{2}\pi} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{2 + \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2 - 2}{x - \frac{1}{2}\pi} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

इस प्रकार, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{x - \frac{1}{2}\pi} = 0$ है।

अतः, $f'\left(\dfrac{1}{2}\pi\right)$ का अस्तित्व है और यह 0 के बराबर है।

* * *

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E1) निम्नलिखित के लिए, प्रथम सिद्धांत का प्रयोग करते हुए, x के दिए हुए मानों पर f के अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4,\ x = 5/2$ पर

ii) $f(x) = 1/x,\ x = 5$ पर

iii) $f(x) = \sqrt{x},\ x = 1$ पर

iv) $f(x) = 1/\sqrt{x},\ x = 1$ पर

E2) यदि f(x) निम्नलिखित है, तो अवकलजित फलन f' ज्ञात कीजिए :

i) $1/(x^2 + 3)$ ii) $1/\sqrt{x}$

iii) x^3 iv) $ax^2 + bx + c$

E3) दर्शाइए कि $f(x) = |x| + |x-1|$ द्वारा परिभाषित फलन f, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए संतत है, परंतु $x = 0$ और $x = 1$ पर अवकलजीय नहीं है।

E4) ऐसे फलन की रचना कीजिए, जो अंतराल [1, 5] में संतत है, परंतु बिंदुओं 2, 3 और 4 पर अवकलजीय नहीं है।

E5) $f(x) = x^3$ के लिए, $f'(x)$ ज्ञात कीजिए। तब, $f'(-1)$ और $f'(1.5)$ ज्ञात कीजिए तथा परिणामों की व्याख्या कीजिए।

E6) किसी शहर की जनसंख्या प्रारंभिक माप 100,000 से बढ़ कर P हो जाती है, जबकि $P(t) = 100,000 + 2000t^2$ द्वारा P दिया जाता है, जहाँ t वर्षों में है।

i) वृद्धि दर dP/dt ज्ञात कीजिए।

ii) 10 वर्षों बाद जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

iii) $t = 10$ पर वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

iv) भाग (iii) में दिए गए अपने उत्तर के अर्थ को स्पष्ट कीजिए।

E7) एक भरते हुए घाव का वर्ग सेंटीमीटरों में, वृत्तीय क्षेत्रफल A, $A(r) = 3.14r^2$ द्वारा सन्निकटित किया जाता है, r सेंटीमीटरों में घाव की त्रिज्या है।

i) त्रिज्या के सापेक्ष क्षेत्रफल की परिवर्तन-दर ज्ञात कीजिए।

ii) भाग (i) में दिए अपने उत्तर के अर्थ को स्पष्ट कीजिए।

E8) एक कण एक सरल रेखा के अनुदिश इस प्रकार गति करता है कि उसकी किसी समय t पर स्थिति t का एक द्विघात फलन है। सिद्ध कीजिए कि उसका त्वरण अचर रहता है।

E9) यदि $s(t) = t^3 - 2t^2 + 3t - 4$ किसी कण की स्थिति दर्शाता है, तो 0, 1 और 2 सैकण्डों के अंत में उस कण के वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए।

E10) निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए :

i) $y = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}$

ii) $y=\dfrac{(x+4)^2}{(x-3)}$

iii) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$

E11) निम्नलिखित व्यंजकों द्वारा परिभाषित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

i) $\sqrt{(ax^2+2bx+c)}$

ii) $\dfrac{\sqrt{(x^2+1)}-\sqrt{(x^2-1)}}{\sqrt{(x^2+1)}+\sqrt{(x^2-1)}}$

iii) $\dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{(1+x^2)}}$

E12) मान लीजिए कि किसी उत्पाद के लिए माँग फलन $D(p)=\dfrac{80,000}{p}$ द्वारा दिया जाता है तथा p समय t का एक फलन है, जो $p=1.6t+9$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ t दिनों में है।

i) माँग को समय t के एक फलन के रूप में ज्ञात कीजिए।

ii) माँग की गई राशि की परिवर्तन–दर ज्ञात कीजिए, जब $t=100$ दिन है।

E13) $y=\sqrt{(1-3x)^{2/3}(1+3x)^{1/3}}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

E14) $f(x)=5x^3-30x^2+45x+5\sqrt{x}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f का आलेख खींचिए तथा अंतराल $[0,5]$ पर उसके अवकलज f' का आलेख खींचिए। तब, उन बिंदुओं का आकलन कीजिए जहाँ पर f की स्पर्श रेखा क्षैतिज है।

E15) बिंदु $(0, 1)$ पर $f(x)=e^{-x}$ द्वारा परिभाषित फलन f के आलेख की स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

E16) $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $x=a\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ और $y=b\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ है।

E17) निम्नलिखित के लिए निर्दिष्ट x_0 पर nवाँ टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए :

i) $e^x, x_0=1$ पर

ii) $\dfrac{1}{x}, x_0=-1$ पर

iii) $\sin\pi x, x_0=\dfrac{1}{2}$ पर

iv) $\ln x, x_0=1$ पर

E18) निम्नलिखित फलनों के लिए, मेकलोरिन बहुपद में x^9 का गुणांक ज्ञात कीजिए :

i) $\cos 2x$

ii) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

E19) यदि $\sin x$ के लिए मेकलोरिन बहुपद को उसके पदों के अनुसार अवकलित किया जाता है, तो क्या आप $\cos x$ के लिए मेकलोरिन बहुपद प्राप्त करते हैं?

E20) यदि हम e^x के लिए मेकलोरिन बहुपद को उसके पदों के अनुसार अवकलित करते हैं, तो हमें पुनः वही बहुपद प्राप्त होता है। इसे सिद्ध कीजिए।

हल / उत्तर

$$\text{E1) i) } f'(5/2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(5/2+h)-f(5/2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2\left(\frac{5}{2}+h\right)^2+3\left(\frac{5}{2}+h\right)-4\right]-\left[2\left(\frac{5}{2}\right)^2+3\left(\frac{5}{2}\right)-4\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\left(\frac{25}{4}+h^2+5h\right)+\frac{15}{2}+3h-4-\frac{25}{2}-\frac{15}{2}+4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+13h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+13)$$

$$= 13$$

$$\text{ii) } f'(5) = \lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{5+h}\right)-\left(\frac{1}{5}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{5(5+h)(h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{5(5+h)} = -\frac{1}{25}$$

$$\text{iii) } f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[1+\frac{1}{2}h+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}h^2+\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3\times 2}h^3+\ldots\right]-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}h+\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{iv) } f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+h}}-\frac{1}{\sqrt{1}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+h}}{1+\sqrt{1+h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-(1+h)}{h\sqrt{1+h}(1+\sqrt{1+h})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\sqrt{1 \times h}(1+\sqrt{1+h})}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

E2) i) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{(x+h)^2+3} - \frac{1}{x^2+3}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2+3-x^2-h^2-2xh-3}{h(x^2+3)\{(x+h)^2+3\}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h-2x}{(x^2+3)\{(x+h)^2+3\}} = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्राँत सभी घनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, अर्थात् $]0, \infty[$ है।

मान लीजिए कि $x > 0$ है। हमें प्राप्त है:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$= \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$, जब $x > 0$ है।

iii) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [h^2 + 2x(x+h)]$$

$= 2x^2$, जब $x \in \mathbb{R}$ है।

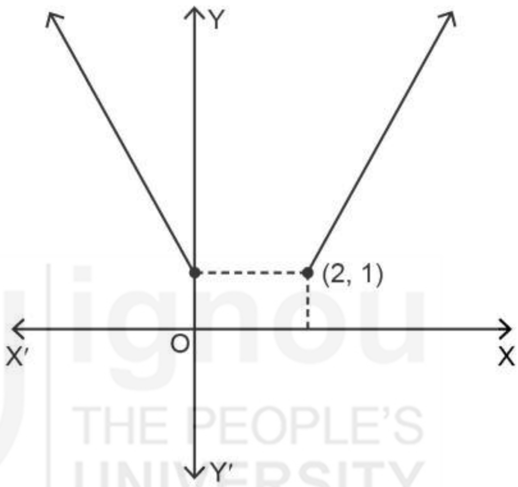
iv) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} [ah + 2ax + b] = 2ax + b$, जब $x \in \mathbb{R}$ है।

E3) $f(x) = |x| + |x-1|$ है। $x = 0$ पर, $f(0) = 1$ है। साथ ही, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ है। तथा $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ है।

इस प्रकार, $x = 0$ पर f संतत है। इसी प्रकार, $f(1) = 1$ है। साथ ही, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ है। तथा $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ है। इस प्रकार, $x = 1$ पर f संतत है।



चित्र 2

चित्र 2 यह दर्शाती है कि $x = 0$ और $x = 1$ पर आलेख के कोने हैं। इसलिए, इन बिंदुओं पर किसी भी स्पर्श रेखा का कोई अस्तित्व नहीं है। साथ ही, हम पुनः लिख सकते हैं:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, \text{if } x < 0 \\ 1 \quad\quad , \text{if } 0 \le x < 1 \\ 2x - 1, \text{if } x \ge 1 \end{cases}$$

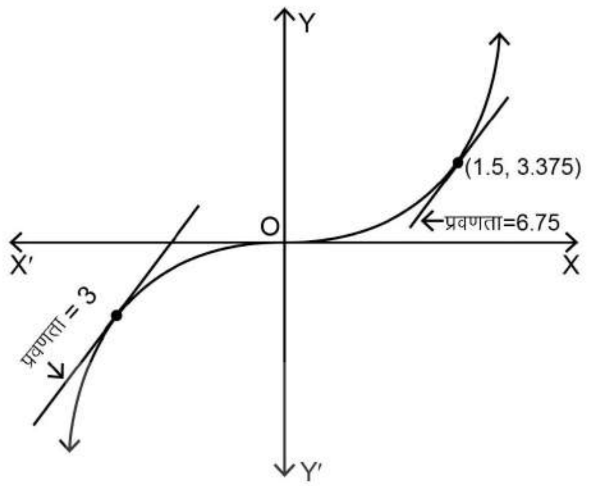
हम $f'(0^-) = -2$ और $f'(0^+) = 0$ तथा $f'(1^-) = 0$ और $f'(1^+) = 2$ ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार, $x = 0$ और $x = 1$ पर f अवकलनीय नहीं है।

E4) ऐसा एक फलन $f(x) = |x-2| + |x-3| + |x-4|$ है।

E5) हमें प्राप्त है: $\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^3 - x^3}{\delta x} = 3x^2 + 3x\delta x + \delta x^2$, $\delta x \ne 0$ है।

तब, $f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} (3x^2 + 3x\delta x + \delta x^2) = 3x^2$ है।

इस प्रकार, $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$ तथा $f'(1.5) = 3(1.5)^2 = 6.75$ है।



चित्र 3

E6) i) $\frac{dP}{dt} = 4000t$

ii) 300,000 लोग

iii) 40,000 लोग प्रति वर्ष

iv) वृद्धि दर समय के सापेक्ष जनसंख्या में परिवर्तन दर्शाती है।

E7) i) $A'(r) = 6.28r$

ii) त्रिज्या के सापेक्ष क्षेत्रफल की परिवर्तन-दर त्रिज्या की 6.28 गुनी है।

E8) मान लीजिए कि $s(t) = at^2 + bt + c$

$$\frac{ds}{dt} = 2at + b$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2a$$

हम देख सकते हैं कि समय के सापेक्ष दूरी का द्वितीय अवकलज, जिसे त्वरण कहते हैं, एक अचर फलन है। इस प्रकार, त्वरण सदैव अचर रहता है।

E9) वेग $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 4t + 3$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0 \text{ पर}} = 3\,m/s$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=1 \text{ पर}} = 2\,m/s$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=2 \text{ पर}} = 7\,m/s$$

त्वरण $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 4$

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=0 \text{ पर}} = -4\,m/s^2$$

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=1 \text{ पर}} = 2\,m/s^2$$

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{t=2 \text{ पर}} = 8\,m/s^2$$

E10) i) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-1)^2 - (x^2-1).2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)^2[x-x-1]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}$$

ii) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+4)(x-3)-(x+4)^2.(1)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{(x+4)(2x-6-x-4)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{(x+4)(x-10)}{(x-3)^2}$$

iii) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x^2-3x+2)-(x^2+1)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$$

E11) i) मान लिजिए कि $y = \sqrt{(ax^2+2bx+c)}$ है।

$$\frac{dy}{dx} = 2(ax^2+2bx+c)^{-1/2}.(2ax+2b)$$

$$= \frac{4(ax+b)}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}, \text{ जहाँ } ax^2+2bx+c \neq 0 \text{ है।}$$

ii) मान लिजिए कि $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{(x^2+1)+(x^2-1)-2\sqrt{x^4-1}}{x^2+1-x^2+1}$$

$$= x^2 - \sqrt{x^4-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4-1}}$$

$$= 2x - \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}, \text{ जहाँ, } x^4-1 \neq 0 \text{ है।}$$

iii) मान लिजिए कि $y = \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ है।

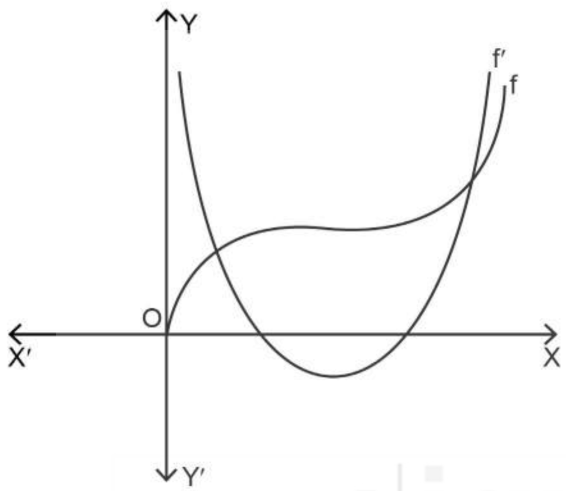
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x.x\sqrt{1+x^2} - (2x^2-1)\left[\sqrt{1+x^2} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right]}{x^2(1+x^2)}$$

E12) i) $D(t)=\frac{80000}{1.6t+9}$ है।

ii) $\left(\frac{dD}{dt}\right)_{t=100 \text{ पर}} = -4.482$ इकाई 1 दिन।

E13) $\frac{dy}{dx}=\frac{-1-9x}{2(1-3x)^{2/3}(1+3x)^{5/6}}$

E14)



चित्र 4

चित्र 4 अंतराल $[0, 5]$ पर f और f' के आलेख दर्शाती है।

E15) $y=-x+1$

E16) $\frac{dx}{dt}=\frac{-4at}{(1+t^2)^2}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1-t^2}{2t}$$

E17) i) $f(x)=e^x$ और $f(1)=e$ है।

$$p_0(x)=e$$

$$p_1(x)=e+e(x-1)$$

$$p_2(x)=e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2$$

$$p_3(x)=e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e}{3!}(x-1)^3$$

$$\vdots$$

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{e}{i!}(x-1)^i$$

ii) $p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)(x+1)^i$

iii) $p_n(x) = \sum_{i=0}^{(n/2)} \frac{(-1)^i \pi^{2i}}{(2i)!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2i}$

iv) $p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}(x-1)^i$

E18) i) 0 ii) $\frac{1}{9!}\sqrt{2}$

E19) हाँ

E20) हाँ, आप इसे स्वयं ही सिद्ध करने का प्रयास कर सकते हैं।

परिशिष्ट 1: वक्रों का प्राचलिक निरूपण

अभी तक, हमने अधिकांशतः जिन वक्रों पर विचार किया है, वे $y = f(x)$ के रूप के फलनों के आलेख थे। परंतु, ऐसी वक्र होती हैं, जहाँ वक्र पर स्थित प्रत्येक बिंदु $P(x, y)$ के x और y निर्देशांक स्वयं एक तीसरे चर, जिसे **प्राचल** कहते हैं, के फलन होते हैं। हम $\mathbb{R}^2$ में प्राचलिक निरूपणों से प्रारंभ करेंगे।

मान लीजिए एक अंतराल I पर t के f और g संतत फलन हैं। तब, समीकरण $x = f(t)$ और $y = g(t)$ प्राचल t वाले प्राचलिक समीकरण कहलाते हैं। जब t प्राचलिक समुच्चय I पर विचरण करता है, तब बिंदु $(x, y) = (f(t), g(t))$ एक प्राचलिक वक्र आरेखित करता है।

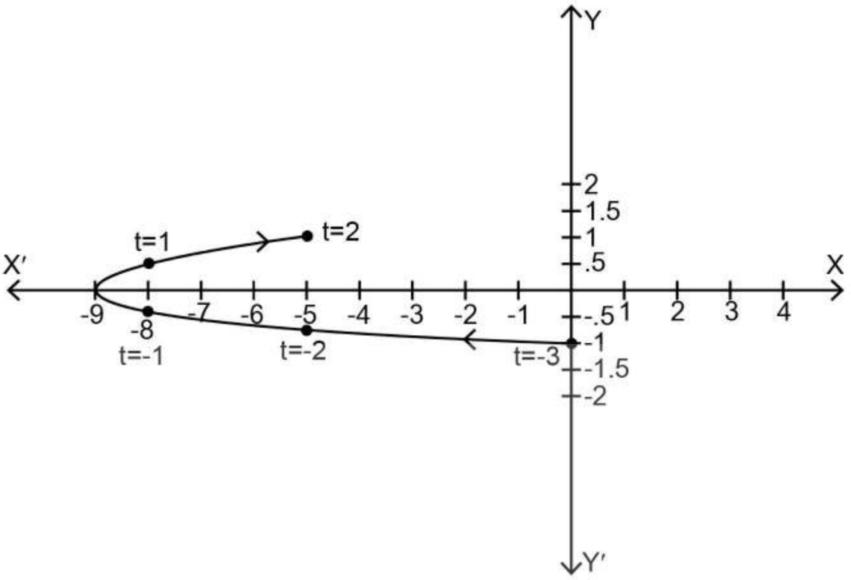
आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि प्राचल के लिए प्रयुक्त अक्षर "t" आवश्यक रूप से समय को व्यक्त नहीं करता है, यद्यपि अनेक अनुप्रयोगों में समय उपयुक्त प्राचल होता है। निसंदेह, किसी भी अक्षर या प्रतीक को एक प्राचल को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है। आइए और अधिक समझने के लिए, निम्नलिखित उदाहरणों का अध्ययन करें।

उदाहरण 1: $-3 \le t \le 2$ के लिए, वक्र $x = t^2 - 9, y = \frac{1}{3}t$ का स्केच खींचिए।

हल: प्राचल t के विभिन्न विकल्पों के संगत x और y के मानों को सारणी 1 में दर्शाया गया है।

सारणी 1

t	x	y
-3	0	-1 (प्रारंभिक बिंदु)
-2	-5	$-\frac{2}{3}$
-1	-8	$-\frac{1}{3}$
0	-9	0
1	-8	$\frac{1}{3}$
2	-5	$\frac{2}{3}$ (अंत या अंतिम बिंदु)



चित्र 1 : $-3 \le t \le 2$ के लिए $x = t^2 - 9, y = \frac{1}{3}t$ का आलेख

आलेख चित्र 1 में दर्शाया गया है। आप प्रेक्षित कर सकते हैं कि जब t में –3 से 2 तक वृद्धि होती है, तब किस प्रकार तीर दिक्स्थापन (दिशाओं) को दर्शाते हैं।

परंतु, कभी-कभी हम एक कार्तीय समीकरण प्राप्त करने के लिए प्राचल का विलोपन करना चाहते हैं। उदाहरण के लिए, यहाँ हमें $y = \frac{1}{3}t$ प्राप्त है। इसलिए $t = 3y$ है। इसे समीकरण $x = t^2 - 9$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x = (3y)^2 - 9 = 9y^2 - 9$$

जो एक परवलय की कार्तीय समीकरण है जो दाईं ओर को खुलता है। प्राचल t के प्राँत के कारण, हम देखते हैं कि चित्र 1 में प्राचलिक वक्र उन बिंदुओं के समुच्चय का एक उपसमुच्चय है, जो समीकरण $x = 9y^2 - 9$ को संतुष्ट करते हैं।

टिप्पणी: प्राचलिकीकरण अद्वितीय नहीं होते हैं। उदाहरणार्थ, उदाहरण 1 में प्राचलिक समीकरणों मे दिये गये वक्र को $-\frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{9}$ के लिए, $x = 9(9t^2 - 1), y = 3t$ द्वारा भी निरूपित किया जा सकता है। यह चित्र 1 में दिये वक्र के समान ही है।

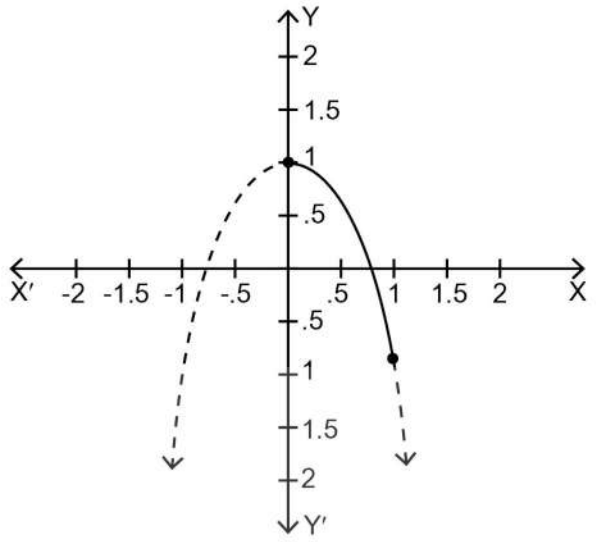
***

उदाहरण 2: $0 \le t \le 0.5$ के लिए, पथ $x = \sin \pi t, y = \cos 2\pi t$ को खींचिए।

हल: हम जानते हैं कि $\cos 2\pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t$ होता है। जिससे $y = 1 - 2x^2$ है।

हम इसकी एक परवलय के लिए कार्तीय समीकरण के रूप में पहचान करते हैं।

क्योंकि t अंतराल $0 \le t \le 0.5$ तक सीमित है, इसलिए प्राचलिक निरूपण में परवलय $y = 1 - 2x^2$ का केवल दाईं ओर का भाग संबद्ध है। यह वक्र बिंदु $(0, 1)$ जहाँ $t = 0$ है, से बिंदु $(1, -1)$, जहाँ $t = 0.5$ है, तक स्थित है तथा इस परवलय का भाग चित्र 2 में दर्शाया गया है।



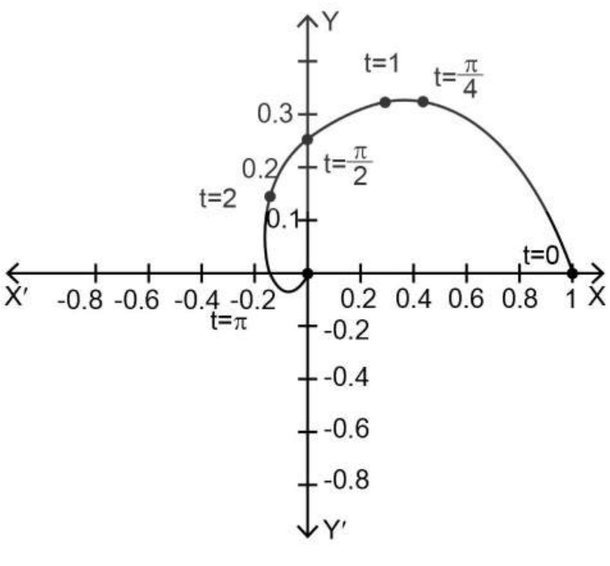
चित्र 2 : $0 \le t \le 0.5$ के लिए परवलयिक चाप $x = \sin \pi t, y = \cos 2\pi t$

जब किसी दिए हुए प्राचलिक निरूपण से प्राचल का विलोपन कठिन हो, तो कभी-कभी बिंदुओं के आलेखन द्वारा प्राचलिक वक्र का एक अच्छा चित्र हम प्राप्त कर सकते हैं।

***

उदाहरण 3: $t \ge 0$ के लिए, प्राचलिक समीकरणों $x = e^{-t} \cos t,\ y = e^{-t} \sin t$ द्वारा आरेखित वक्र के पथ की चर्चा कीजिए।

हलः हमारे पास प्राचल को विलोपित करने की कोई सुविधाजनक विधि नहीं है। इसलिए, हम t के विभिन्न मानों के संगत x और y के मानों को सारणी 2 में लिखते हैं। कार्तीय तल में इन बिंदुओं को आलेखित करके, इन आलेखित बिंदुओं से होकर जाता हुआ चिकना या मृद (Smooth) वक्र प्राप्त होता है, जैसा कि चित्र 3 में दर्शाया गया है।



चित्र 3 : $t \ge 0$ के लिए, $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ का आलेख

सारणी 2

t	x	y
0	1	0
$\frac{\pi}{4}$	0.32	0.32
1	0.20	0.31
$\frac{\pi}{2}$	0	0.21
2	–0.006	0.12
π	–0.04	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	–0.01
2π	0.00	0

ध्यान दीजिए कि t के प्रत्येक मान के लिए, वक्र पर स्थित बिंदु $P(x,y)$ की मूलबिंदु से दूरी $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(e^{-t}\cos t)^2+(e^{-t}\sin t)^2}=\sqrt{e^{-2t}(1)}=e^{-t}$ है।

क्योंकि t में वृद्धि होने के कारण e^{-t} में कमी होती जाती है, इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि जैसे-जैसे t में वृद्धि होती जाती है, वैसे-वैसे P मूलबिंदु के निकटतर और अधिक निकटतर होता जाता है। परंतु, क्योंकि $\cos t$ और $\sin t$ के मान –1 और +1 के बीच में ही होतें हैं, इसलिए यह अधिगम (पहुँच) सीधी नहीं है, अपितु सर्पिल के आकार मे चलती है।

***

अभी तक, हमारे उदाहरण प्राचलिक समीकरणों के दिए रहने पर एक प्राचलिक वक्र का अनुरेखण करने से संबंधित रहे हैं। व्यापक रूप में, यह प्रक्रिया जटिल हो सकती है। परंतु, इसकी विपरीत प्रक्रिया, अर्थात् एक दिए हुए वक्र के लिए प्राचलिक समीकरणों के एक उपयुक्त समुच्चय को ज्ञात करने की प्रक्रिया एक कला है, जिसके लिए कोई सरल प्रक्रम नहीं है। निसंदेह, एक दिए हुए वक्र के अनेक भिन्न-भिन्न प्राचलिकीकरण हो सकते हैं तथा ऐसे भी वक्र हैं, जिनके लिए कोई सरल प्राचलिकीकरण नहीं दिया जा सकता। निम्नलिखित उदाहरण एक दिए हुए वक्र के प्राचलिकीकरण की विभिन्न विधियों को स्पष्ट करता है।

उदाहरण 4: निम्नलिखित में प्रत्येक स्थिति में, वक्र का प्राचलिक रूप लिखिए :

i) $y=9x^2$ ii) $r=5\cos^3\theta$ (ध्रुवीय निर्देशांकों में)

हलः i) एक परवलय के लिए सामान्य प्राचलिकीकरण यह है कि प्राचल t ऐसा चर लिया जाए, जिसका वर्ग किया जाता हैः $x=t, y=9t^2$ है। परंतु, एक अन्य प्राचलिकीकरण है कि $t=3x$ मान लिया जाए, ताकि $x=\frac{1}{3}t$ और $y=t^2$ है।

ii) ध्रुवीय निर्देशांकों में, हमें $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ प्राप्त है। इसलिए, हम x और y का प्राचलिकीकरण प्राचल θ के पदों में कर सकते हैं :

$$x=r\cos\theta=(5\cos^3\theta)\cos\theta=5\cos^4\theta$$

$$y=r\sin\theta=(5\cos^3\theta)\sin\theta$$

अतः, वक्र $r=5\cos^2\theta$ का प्राचलिक रूप $x=5\cos^4\theta$ और $y=5\cos^3\theta\sin\theta$ है, जहाँ θ एक प्राचल है।

***

परिशिष्ट 2: आंशिक भिन्न

आपके द्वारा इकाई 6 में अध्ययन किए गए परिमेय फलनों का स्मरण कीजिए। परिमेय फलन दो बहुपदों का अनुपात होता है, जहाँ हर वाला बहुपद शून्येतर होता है। यहाँ, हम दर्शाएँगे कि किस प्रकार एक परिमेय फलन को सरल भिन्नों के रूप में व्यक्त किया जाता है, जिन्हें **आंशिक भिन्न** कहते हैं।

आइए $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ द्वारा परिभाषित एक परिमेय फलन पर विचार करें, जहाँ $p(x)$ और $q(x)$ बहुपद हैं तथा $q(x)\neq 0$ है। यदि $p(x)$ की घात $q(x)$ की घात से छोटी है, तो वह परिमेय फलन एक **उचित परिमेय फलन** कहलाता है। यदि $p(x)$ की घात $q(x)$ की घात से बड़ी या के बराबर हो, तो वह परिमेय फलन **विषम (या अनुचित) परिमेय फलन** कहलाता है। आइए सर्वप्रथम विचार करें कि f एक विषम परिमेय फलन है, अर्थात् $p(x)$ की घात $\geq q(x)$ की घात है। तब, हम लंबी विभाजन विधि द्वारा $p(x)$ को $q(x)$ से तब तक भाग देते जाते हैं, जब तक $r(x)$ की घात $q(x)$ की घात से छोटी न हो जाए, जहाँ $r(x)$ शेषफल बहुपद है।

अर्थात्, $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ है, जहाँ $s(x)$ और $r(x)$ बहुपद हैं

तथा ये क्रमशः भागफल और शेषफल हैं।

इस रूप के बाद, $f(x)$ एक बहुपद और एक उचित परिमेय फलन का योग है। निम्नलिखित उदाहरण इसे स्पष्ट करता है।

उदाहरण 1: $\frac{x^4-x^2-1}{x-5}$ को एक बहुपद और उचित परिमेय फलन के योग के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल: यहाँ, $p(x)=x^4-x^2-1, q(x)=x-5$ है। स्पष्टतः, $p(x)$ की घात $>q(x)$ की घात है। अतः, हम $p(x)$ को $q(x)$ से भाग देते हैं।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+5x^2+24x+120 \\
\hline
x-5 & x^4-x^2-1 \\
 & \underline{x^4-5x^3} \\
 & 5x^3-x^2-1 \\
 & \underline{5x^3-25x^2} \\
 & 24x^2-1 \\
 & \underline{24x^2-120x} \\
 & 120x-1 \\
 & \underline{120x-600} \\
 & 599
\end{array}
$$

अतः, हम $\frac{x^4-x^2-1}{x-5}=x^3+5x^2+24x+120+\frac{599}{x-5}$ लिखते हैं।

स्कूल में, आपने बहुपदों के गुणनखंडन के बारे में अवश्य ही अध्ययन किया होगा। उदाहरणार्थ, हम जानते हैं कि $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ है। यहाँ $(x-1)$ और $(x-3)$, x^2-4x+3 के दो रैखिक गुणनखंड हैं। आपके सामने x^2+1 जैसे बहुपद भी आए होंगे,

जिन्हें वास्तविक रैखिक गुणनखंडों के रूप में गुणनखंडित नहीं किया जा सकता है। इस प्रकार, यह सदैव संभव नहीं होता कि एक दिए हुए बहुपद को रैखिक गुणनखंडों के रूप में गुणनखंडित किया जा सके। परंतु किसी बहुपद को, सैद्धांतिक रूप में, रैखिक और द्विघात गुणनखंडों में गुणनखंडित किया जा सकता है। हम इस कथन को यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे। परंतु हम इन दोनों स्थितियों पर विचार करेंगे, अर्थात् जब हर को रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित किया जा सकता है तथा जब हर को रैखिक और अखंडनीय वास्तविक गुणनखंडों में गुणनखंडित किया जा सकता है। आंशिक भिन्नों को ज्ञात करने के लिए, हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 2: $f(x)=\frac{6x-8}{x^2-x-6}$ द्वारा परिभाषित परिमेय फलन f को आंशिक भिन्नों के रूप में लिखिए।

हल: यहाँ, $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ है। अब,

$$\frac{6x-8}{x^2-x-6}=\frac{6x-8}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+2)} \qquad \dots (1)$$

अचरों A और B को ज्ञात करने की एक विधि यह है कि समीकरण (1) को (x–3 (x+2) से गुणा कर लिया जाए, जिससे भिन्न स्पष्ट हो जाएँ। इससे प्राप्त होता है :

$$6x-8=A(x+2)+B(x-3) \qquad \dots (2)$$

यह संबंध x के सभी मानों लिए सत्य है। इसलिए यह विशेष रूप से $x=-2$ और $x=3$ के लिए सत्य है।

समीकरण (2) में, $x=-2$ रखने पर, हम $-12-8=B(-2-3)$ या $B=4$ प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार, समीकरण (2) में $x=3$ रखने पर, हम $18-8=A(5)$ या $A=2$ प्राप्त करते हैं।

अब, इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{6x-8}{x^2-x-6}=\frac{2}{(x-3)}+\frac{4}{(x+2)} \qquad \dots (3)$$

समीकरण (1) से, अचरों A और B को ज्ञात करने की एक अन्य विधि यह है कि हम बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष से x की समान घातों के गुणांकों को एकत्रित करें तथा उनको परस्पर बराबर करें। समीकरण (2) के दोनों पक्षों से x के गुणांकों और अचर पदों को बराबर करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$6=A+B \text{ और } -8=2A-3B$$

समीकरणों के उपरोक्त निकाय को A और B के लिए हल करने पर, हम पहले की तरह $A=2$ और $B=4$ प्राप्त करते हैं। अतः आंशिक भिन्न विघटन है :

$$\frac{6x-8}{x^2-x-6}=\frac{2}{(x-3)}+\frac{4}{(x-2)}$$

आइए एक अन्य उदाहरण लें, जहाँ हर में आवर्ती (repeated) रैखिक गुणनखंड हैं।

उदाहरण 3: $\frac{2x+4}{x^3-2x^2}$ को आंशिक भिन्नों के योग के रूप में लिखिए।

हल: $\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=\frac{2x+4}{x^2(x-2)}$ है। यहाँ x^2 एक द्विघात गुणनखंड है। परंतु यह अखंडनीय

नहीं है, क्योंकि $x^2 = x.x$ है। इसलिए गुणनखंड x^2, $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$ के रूप के दो आंशिक भिन्न देता है तथा गुणनखंड $(x-2)$ एक पद $\frac{C}{(x-2)}$ देता है।

अतः, आंशिक भिन्न है :

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)} \qquad \ldots (4)$$

समीकरण (4) को $x^2(x-2)$ से गुणा करने पर, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता हैं :

$2x+4 = Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$

दोनों पक्षों के x^2, x और अचर के गुणांकों को बराबर करने पर, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता हैं :

x^2 का गुणांक $\Rightarrow 0 = A + C$

x का गुणांक $\Rightarrow 2 = -2A + B$

अचर पद $\Rightarrow 4 = -2B$

उपरोक्त समीकरणों के निकाय को A, B और C के लिए हल करने पर, हम $A = -2$, $B = -2$ और $C = 2$ प्राप्त करते हैं।

अब, आंशिक भिन्न $\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=\frac{-2}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{2}{(x-2)}$ हैं।

***

उदाहरण 4: $\frac{x}{x^3-3x+2}$ को आंशिक भिन्नों के योग में बदलिए।

हल: हर x^3-3x+2 के गुणनखंड $(x-1)^2(x+2)$ हैं। x^3-3x+2 में रैखिक गुणनखंड $(x-1)$ की दो बार आवर्ती हुई है। इस स्थिति में, हम लिखते हैं :

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

इस बिंदु से, हम पहले की तरह A, B और C ज्ञात करने के लिए कार्य करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$x = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$

हम $x = 1$ और $x = -2$ रखकर $C = \frac{1}{3}$ और $A = -\frac{2}{9}$ प्राप्त करते हैं। तब B को ज्ञात करने के लिए, आइए कोई अन्य सुविधाजनक मान, मान लीजिए $x = 0$ रखें। इससे हमें $0 = A - 2B + 2C$ या $0 = \frac{-2}{9} - 2B + \frac{2}{3}$ प्राप्त होता है।

इसका अर्थ है कि $B = \frac{2}{9}$ है। इस प्रकार,

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = -\frac{2}{9(x+2)}+\frac{2}{9(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}$$ है।

***

हम अपने अगले उदाहरण में, उस स्थिति पर विचार करेंगे। जब हर में एक अखंडनीय द्विघात गुणनखंड, अर्थात् ऐसा द्विघात गुणनखंड, जिसके आगे रैखिक गुणनखंड नहीं किए जा सकते हैं, हो।

उदाहरण 5: $\frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}$ को आंशिक भिन्नों के एक योग के रूप में लिखिए।

हल: सर्वप्रथम, हम $x^4-2x^3+x^2-2x$ के $x(x-2)(x^2+1)$ के रूप में गुणनखंड करते हैं।

तब, हम लिखते हैं: $\frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$ ... (5)

आप ध्यान दे सकते हैं कि अखंडनीय द्विघात गुणनखंड (x^2+1) पद $\frac{Cx+D}{x^2+1}$ जोड़ा जा रहा है।

हम समीकरण (5) को $x(x-2)(x^2+1)$ से गुणा करते हैं तथा प्राप्त करते हैं:

$6x^3-11x^2+5x-4=A(x-2)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D).x.(x-2)$

आगे, हम $A=2$ और $B=1$ प्राप्त करने के लिए, $x=0$ और $x=2$ प्रतिस्थापित करते हैं।

फिर हम $x=1$ और $x=-1$ (कुछ सुविधाजनक मान) रखते हैं, जिससे $C=3$ और $D=-1$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, $\frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{3x-1}{x^2+1}$

अगले उदाहरण में, हम आवर्ती वाले अखंडनीय द्विघात गुणनखंड पर विचार करेंगे।

उदाहरण 6: $\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}$ को आंशिक भिन्नों में बदलिए।

हल: ध्यान दीजिए कि क्योंकि अंश की घात 4 है और हर की घात 5 है, इसलिए दिया हुआ परिमेय फलन एक उचित परिमेय फलन है।

इस प्रकार,

$$\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{Bx+C}{x^2+3}+\frac{Dx+E}{(x^2+3)^2} \quad ...(6)$$

हम दोनों पक्षों को $(x+2)(x^2+3)^2$ से गुणा करते हैं तथा प्राप्त करते हैं:

$3x^4+4x^3+16x^2+20x+9=A(x^2+3)^2+(Bx+c)(x^2+3)+(Dx+E)(x+2)$

अब, हम संगत गुणांकों को बराबर करते हैं तथा निम्नलिखित समीकरणों का निकाय प्राप्त करते हैं।

$A+B=3$

$2B+C=4$

$6A+3B+2C+D=16$

$6B+3C+2D+E=20$

$9A+6C+2E=9$

समीकरणों के इस निकाय के हल से $A=1, B=2, C=0, D=4$ और $E=0$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, वाँछित आंशिक भिन्न है:

$$\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}=\frac{1}{(x+2)}+\frac{2x}{(x^2+3)}+\frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

***

शब्दावली

Acceleration	त्वरण
Acceleration due to gravity	गुरुत्व त्वरण
Chain rule	श्रृंखला नियम
Circular function	वृत्तीय फलन
Corollary	उपप्रमेय
derivative	अवकलज
Derived function	व्युत्पन्न फलन
differentiability	अवकलनीयता
Differential calculus	अवकल गणित
differentiation	अवकलन
Dimension	विमा
Dimensionless	विमाहीन
Expansion	प्रसार
Exponential function	चरघातांकी फलन
Factorial notation	क्रमगुणन चिह्न
First Principle	प्रथम सिद्धांत
Hyperbolic function	अतिपरवलयिक फलन
Identity	सर्वसमिका
Implicit function	अस्पष्ट फलन
Induction	आगमन
Infinite series	अनंत श्रेणी
Instantaneous velocity	तात्क्षणिक वेग
Natural exponential function	प्राकृतिक चरघातांकी फलन
Parameter	प्राचल
Parametric equation	प्राचलिक समीकरण
Reciprocal	व्युत्क्रम
Representation	निरूपण
Scalar multiple	अदिश गुणज
Secant	छेदक रेखा
Sequence	अनुक्रम
Series	श्रेणी
Slope	प्रवणता
Space	समष्टि
Tangent line	स्पर्शरेखा
Transformation	रूपांतरण
Vector	सदिश