इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय
मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-131
कलन

खंड
5

समाकलन

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति*

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पूणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन. आई. एस. ई. आर., भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई. आई. एस. ई. आर., मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई. आई. टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य, विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
प्रो. महेन्द्र सिंह नाथावत (निदेशक)
डॉ. दीपिका
प्रो. परवीन सिंक्लेयर
प्रो. पूर्णिमा मित्तल
श्री पवन कुमार
प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. सु. वेंकटरामन

* पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. अंबर हबीब (संपादक)
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर, उ.प्र.

डॉ. सु. वेंकटरामन
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयकर्ता: प्रो. परवीन सिंक्लेयर तथा डॉ. दीपिका

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन सी ई आर टी, नई दिल्ली

डॉ. सु. वेंकटरामन
विज्ञान विद्यापीठ, इं.गां.रा.मु.वि

आभार: इस खण्ड के कुछ भाग पिछले पाठ्यक्रम कलन (MTE-01) पर आधारित है।

सामग्री निर्माण

श्री राजीव गिरधर
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

श्री हेमन्त कुमार परिदा
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

नवम्बर, 2019

ISBN : 978-93-89668-30-8

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in *से प्राप्त की जा सकती है।*

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. पूर्णिमा मित्तल, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेज़र टाईपसेटिंग : डिज़ाईन क्रिएशन, E-mail: dzine.creations2@gmail.com

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली–110002

खंड 5 समाकलन

प्राचीन व्यक्ति जानते थे कि एक वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। वे यह भी जानते थे कि अनेक अन्य नियमित आकृतियों, जैसे कि बहुभुज, के क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। परंतु, वे उस समय की उपलब्ध विधियों से अनियमित आकृतियों के क्षेत्रफलों, लंबाइयों और आयतनों को ज्ञात करने में समर्थ नहीं थे। ये समस्याएँ केवल ज्ञान के पुनर्जागरण के बाद ही यूरोप के वासियों ने हल कीं। इसी काल में ही अति सूक्ष्म छोटी वस्तुओं की संकल्पना तथा उन्हें किस प्रकार जोड़ा जाता है, को ज्ञात किया गया। खगोलिकी, ज्यामिति तथा भौतिक विज्ञानों की समस्याओं के अध्ययन से अनेक अंतर्दृष्टियाँ प्राप्त की गई। सत्रहवीं शताब्दि में, आइज़क बेरो (Isaac Barrow) तथा अन्य जैसे अपने से पूर्व के व्यक्तियों की अंतर्दृष्टि के साथ, न्यूटन और लेबनिज़ ने कैलकुलस की आघारशिला रखी। उनके कार्य में, बर्नूली परिवार, ऑयलर, लाग्रांज, लाल्पास जैसे उनके उत्तराधिकारियों ने तथा बाद में कौशी, रिमांन (Riemann) तथा अन्य ने सुघार किया।

इस पाठ्यक्रम के दूसरे, तीसरे और चौथे खंड में, हमने अवकलन की प्रक्रिया की चर्चा की थी। हमने यह भी देखा था कि किस प्रकार, गणित में एक उपयोगी साधन रहता है। इस खंड में हम समाकलन का अध्ययन करेंगे, जिसे अवकलन की विपरीत प्रक्रिया के रूप में देखा जा सकता है।

इकाई 17 में, हम आपका परिचय समाकलन से कराएँगे। इस इकाई में, हम देखेंगे कि किस प्रकार एक फलन के आलेख के नीचे के क्षेत्रफल को आयतों के क्षेत्रफलों के योगों द्वारा सन्निकटित किया जा सकता है। जैसे-जैसे आयतों की संख्या में वृद्धि होती जाती है तथा उनकी माप कम तथा और कम होती जाती है, तब उनका योग क्षेत्रफल की ओर अग्रसर होता जाता है। हम कैलकुलस की मूलभूत प्रमेय को भी देखेंगे, जो समाकलन और अवकलन की प्रक्रियाओं को जोड़ती है। यहाँ, हम यह भी देखेंगे कि कुछ सरल फलनों को किस प्रकार समाकलित किया जाता है।

इकाई 18 में हम परिमेय फलनों, त्रिकोणमितीय फलनों, तथा ऐसे फलनों, जिनमें दो घात वाले एक बहुपद का वर्गमूल संबद्ध हो, जैसे विभिन्न प्रकार के फलनों को समाकलित करने की तकनीकों पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे। इन सभी विधियों का मेरूदंड (backbone) प्रतिस्थापन की विधि है, जिसकी चर्चा हम इस इकाई के प्रारंभ में करेंगे। हम खंडशः समाकलन जैसी कुछ अन्य तकनीकों को भी देखेंगे। हम यह भी देखेंगे कि परिमेय फलनों को समाकलित करने में किस प्रकार आंशिक भिन्नों का प्रयोग किया जाता है।

इकाई 19 में, हम समानयन सूत्रों की चर्चा करेंगे। अनुप्रयोगों में हमारे सम्मुख, जो सामान्य फलन आते हैं, उनको समाकलित करने में, समानयन सूत्र हमारी सहायता करते हैं। एक समानयन सूत्र की पृष्ठभूमि में, मुख्य धारणा यह है कि एक प्राचल, जो प्राय; समाकल्य में x या एक त्रिकोणमितीय फलन की घात होती है, को धीरे-धीरे, खंडश; समाकलन का उपयोग करते हुए, कम करते जाएँ। इससे अंत में एक सरलतम समाकल्य प्राप्त हो जाता है, जिसे मानक विधियों द्वारा समाकलित किया जा सकता है।

इकाई 20 में हम देखेंगे कि हम किस प्रकार विभिन्न प्रकार की विधियों का उपयोग करते हुए, समतल वक्रों से परिबद्ध क्षेत्रफलों तथा समतल वक्रों की लंबाइयों को ज्ञात कर सकते हैं। इसका प्रारंभ, हम दो फलनों के आलेखों के बीच के क्षेत्रफल को ज्ञात करने से करते हैं, जब कि आलेख कार्तीय निर्देशांकों में दिए गए हों। फिर हम समतल में ध्रुवीय और प्राचलिक रूपों में दी वक्रों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की चर्चा करेंगे। हम इसकी भी चर्चा करेगे कि कार्तीय, ध्रुवीय और प्राचलिक रूपों में दी हुई वक्रों की लंबाइयाँ किस प्रकार ज्ञात की जाती है।

इन इकाइयों में प्रयुक्तों किए जाने वाले चिह्नों के बारे में कुछ बात ! प्रत्येक इकाई में, आपको प्रमेय, उदाहरण और प्रश्न देखने को मिलेंगे। किसी प्रमेय की उपपत्ति को दर्शाने के लिए, हम चिह्न ■ का प्रयोग करेंगे। किसी उदाहरण की समाप्ति को दर्शाने के लिए हम *** का प्रयोग करेंगे। आगे, उन समीकरणों, जिनके संदर्भ की आवश्यकता होगी, उन्हे एक इकाई में क्रमानुसार अंकित किया जाएगा। तथा ऐसा ही प्रश्नों और आकृतियों के लिए किया जाएगा। जैसे E1, E2 इत्यादि प्रश्नों को व्यक्त करेंगे तथा आकृति 1, आकृति 2, इत्यादि आकृतियों को व्यक्त करेंगे।

संकेत और प्रतीक (खंड 5 में प्रयोग होने वाले)

$L(P, f)$	उपरि योग
$U(P, f)$	निम्न योग
$\mathcal{P}([a, b])$	[a, b] पर विभाजनों का समुच्चय
$\overline{\int_a^b} f(x)dx$	अंतराल [a, b] पर फलन f(x) निम्न समाकल
$\int f(x)\, dx$	f(x) का अनिश्चित समाकल
$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$	अंतराल [a, b] पर फलन f(x) का निम्न समाकज
$\mathcal{L}(f)$	{L(P, f)|P [a, b] का एक विभाजन है।}
$\mathcal{U}(f)$	{U(P, f)|P [a, b] का एक विभाजन है।}

अन्य संकेतों और प्रतीकों के लिए पिछले खण्डों में दी गई सूचियों को देखिए।

इकाई 17

समाकलन का परिचय

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

17.1 प्रस्तावना

जैसा कि हम इस खंड की प्रस्तावना में देख चुके हैं कि, प्राचीन काल से ही, निर्माण कार्यों के उद्देश्यों के लिए क्षेत्रफलों और आयतनों का मापन आवश्यक था। हम यह भी देख चुके हैं कि कर लगाने के उद्देश्य के लिए, भूमि का मापन आवश्यक था। प्राचीन पाँडुलिपियों में, वर्गों और आयतों जैसी समतल आकृतियों के क्षेत्रफलों के लिए सूत्रों का वर्णन किया गया था, परंतु इनका कोई औचित्य नहीं दिया गया था।

ए. एल. कौशी
1789-1857

ई. पू. तीसरी शताब्दि में, यूनानी गणितज्ञ आर्कमिडीज़ ने एक वृत्त के क्षेत्रफल के लिए एक सूत्र ऐसी विधि से ज्ञात किया जो अब **निर्गम की विधि (method of exhaustion)** कहलाती है। उसके हल में वर्तमान समय के समाकल कैलकुलस के बीज (मंत्र) अंतर्विष्ट थे। परंतु बाद में, केवल सत्रहवीं शताब्दि में ही न्यूटन और लेबनिज, आर्कमिडीज की इस विधि को व्यापीकृत कर सके। उन्होंने अवकल और समाकल कैलकुलस में संबंध भी स्थापित किया।

फ्राँसीसी गणितज्ञ ए. एल. कौशी ने समाकल की एक परिभाषा दी, जिसके अंतर्गत केवल संतत फलन ही समाकलनीय होते हैं। बाद में, जर्मन गणितज्ञ रिमांन ने समाकल की एक परिभाषा दी जिसके अंतर्गत फलनों का एक बड़ा वर्ग समाकलनीय हो जाता है।

स्टीलचिज़ (Stieltjes) और लेबेग (Lebesgue) जैसे अन्य गणितज्ञों ने समाकलों को परिभाषित किया जो रिमांन समाकल में सुधार थे। परंतु सबसे प्रसिद्ध समाकलन का परिचय कराने की विधि रिमांन समाकल के माध्यम से है तथा हम इस प्रक्रिया का अनुसरण करेंगे। अपनी चर्चा में, हम समाकल की एक समतुल्य परिभाषा का प्रयोग करेंगे, जिसका श्रेय एक फ्राँसीसी गणितज्ञ दार्बू (Darboux) को जाता है।

भाग 17.2 में, दार्बू द्वारा परिचित कराए गए उपरि और निम्न योगों की चर्चा करेंगे। इससे हम निश्चित समाकल की एक परिभाषा तथा उसके कुछ मौलिक गुणों पर पहुँच जाएँगे। भाग 17.3 में, हम समाकल कलन की मूलभूत प्रमेय का कथन देंगे तथा स्पष्ट करेंगे कि कुछ निश्चित समाकलों के मान निकालने में इसका किस प्रकार उपयोग किया जाता है। भाग 17.3 में, हम अनिश्चित समाकल की भी चर्चा करेंगे। भाग 17.4 में, हम बहुपदों, परिमेय फलनों, त्रिकोणमितीय फलनों जैसे कुछ सामान्य फलनों तथा चरधातांकीय, लघुगणकीय और प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों जैसे फलनों के अनिश्चित समाकल ज्ञात करेंगे।

जी. बी. रिमांन
1826-1866

जे. जी. दार्बू
1842-1917

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

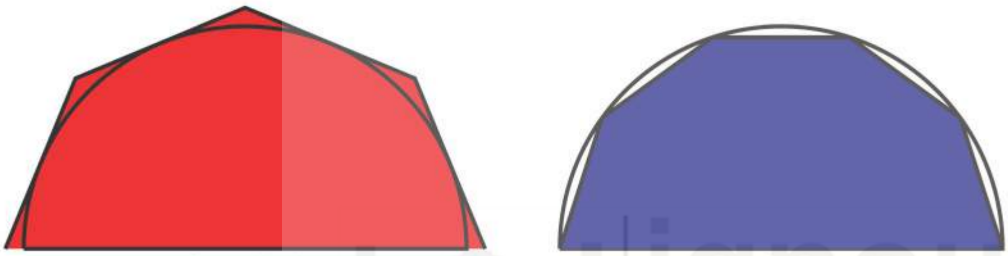
- [a, b] के विभाजन के संगत, [a, b] पर परिभाषित कुछ सरल फलनों के निम्न और उपरि योगों को परिभाषित कर पाएँगे तथा उनका परिकलन कर पाएँगे;
- किसी फलन के उपरि और निम्न समाकलों को परिभाषित कर पाएँगे;
- एक दिए हुए फलन के निश्चित समाकल को परिभाषित कर पाएँगे तथा जाँच कर पाएँगे कि सरल स्थितियों में एक दिया हुआ फलन समाकलनीय है या नहीं;
- कलन की मूल भूत प्रमेय का कथन दे पाएँगे तथा उसका अनुप्रयोग कर पाएँगे;
- किसी फलन के पूर्वग या प्रतिअवकलज को परिभाषित कर पाएँगे;
- किसी समाकलनीय फलन का निश्चित समाकल परिकलित करने में कलन के मूलभूत प्रमेय का प्रयोग कर पाएँगे; और
- कुछ सामान्य फलनों के अनिश्चित समाकल ज्ञात कर पाएँगे।

17.2 समाकलनीयता

प्रस्तावना में, हमने वर्णन किया था कि आर्कमिडीज़ ने एक वृत्त का क्षेत्रफल **निर्गम की विधि** का उपयोग करते हुए ज्ञात किया। आइए एक उदाहरण की सहायता से इस विधि की संक्षेप में चर्चा करें। मान लीजिए कि हम एक अर्ध-वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करना

चाहते हैं। हम इस क्षेत्रफल को सम नियमित बहुभुजों द्वारा ऊपर और नीचे से परिबद्ध कर देते हैं (आकृति 1 देखिए)। आकृति 1 (क) में, बाहरी बहुभुज, जो लाल रंग से दर्शाया गया है, अर्धवृत्त के क्षेत्रफल का एक उपरि परिबद्ध (upper bound) प्रदान करता है। आकृति 1 (ख) में, बाहरी बहुभुज, जो नीले रंग से दर्शाया गया है, अर्धवृत्त के क्षेत्रफल का निम्न परिबद्ध प्रदान करता है। अकृति 2 में, पीले रंग वाला क्षेत्र अर्धवृत्त के क्षेत्रफल तथा आंतरिक बहुभुज के क्षेत्रफल के अंतर को दर्शाता है। लाल रंग वाला क्षेत्र बाहरी बहुभुज के क्षेत्रफल तथा अर्धवृत्त के क्षेत्रफल के अंतर को दर्शाता है। आप आकृति से यह देख सकते हैं कि जैसे-जैसे हम आंतरिक और बाहरी बहुभुजों की भुजाओं की संख्या में वृद्धि करते जाते हैं, वैसे-वैसे लाल और पीले रंगों वाले क्षेत्र छोटे तथा और छोटे होते जाते हैं। दूसरे शब्दों में, क्षेत्रफलों का अंतर कम होता जाता है तथा बाहरी और आंतरिक बहुभुजों के क्षेत्रफल अर्धवृत्त के क्षेत्रफल के निकटतर तथा और निकटतर होते जाते हैं। सीमांत स्थिति में, ये अर्धवृत्त का क्षेत्रफल प्रदान करते हैं।

हमारी चर्चा केवल प्रेरणा के उद्देश्य के लिए है। हम यह दावा नहीं करते कि हम गणित के इतिहास के प्रति निष्ठावान हैं।



(क) एक अर्धवृत्त के क्षेत्रफल के लिए उपरि परिबद्ध

(ख) एक अर्धवृत्त के क्षेत्रफल के लिए निम्न परिबद्ध

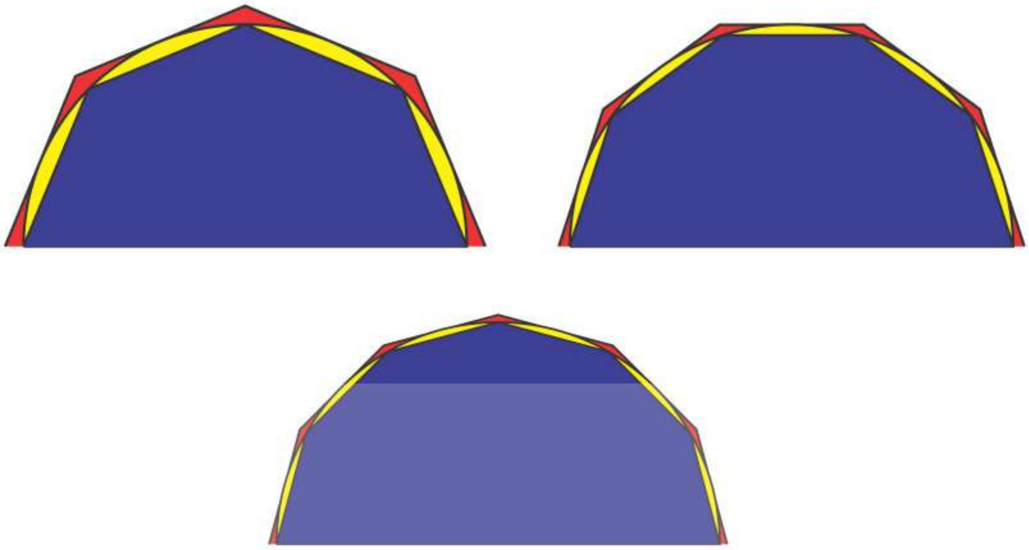
आकृति 1: एक अर्धवृत्त के क्षेत्रफल के लिए परिबद्ध

दूसरी ओर, मान लीजिए कि हम $x = 0$ से $x = 2$ तक वक्र $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x + 1$ के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं। आपने तीसरे खंड में, यह सीखा था कि फलनों के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। आप उस ज्ञान का निम्नलिखित की जाँच करने में उपयोग कर सकते हैं:

1. अंतराल $[0, 2]$ में, $x = 0$ और $x = \frac{1}{2}$ के बीच फलन $f(x)$ वर्धमान है तथा $x = \frac{1}{2}$ और $x = \frac{3}{2}$ के बीच ह्रासमान है। यह $x = \frac{3}{2}$ और $x = 2$ के बीच वर्धमान है।

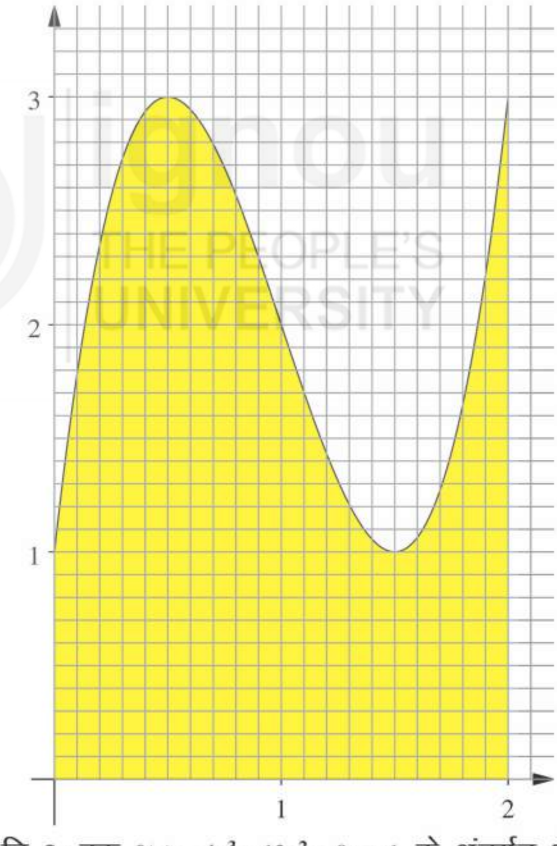
2. अंतराल $[0, 2]$ में, $x = \frac{1}{2}$ और $x = 2$ पर इस फलन का उच्चिष्ठ है तथा $x = \frac{3}{2}$ पर इसका एक निम्निष्ठ है।

आकृति 3 को देखिए। जैसा अर्धवृत्त में किया है, वैसा, $f(x)$ के अंतर्गत क्षेत्रफल को सम (नियमित) बहुभुजों द्वारा समीपतः सन्निकटित नहीं किया जा सकता है। इसलिए, एक सम (नियमित) बहुभुज जैसी अकेली आकृति के स्थान पर, हम अनेक आयतों का उपयोग करते हैं। आकृति 4 को देखिए। यहाँ, हम अंतराल $[0, 2]$ को $x = \frac{1}{4}, x = \frac{3}{4}$ और $x = \frac{5}{4}$ पर चार भागों में विभाजित करते हैं। इस प्रकार, A_1 बिंदु $(0, 0)$ को व्यक्त करता है, A_2 बिंदु $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ को व्यक्त करता है, A_3 बिंदु $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ को व्यक्त करता है, A_4 बिंदु $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ को व्यक्त करता है तथा A_5 बिंदु $(2, 0)$ को व्यक्त करता है।



आकृति 2: निर्गम की विधि द्वारा अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

A_3 बिंदु $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ को व्यक्त करता है, A_4 बिंदु $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ को व्यक्त करता है।



आकृति 3: वक्र $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x + 1$ के अंतर्गत क्षेत्रफल

तथा A_5 बिंदु $(2, 0)$ को व्यक्त करता है।

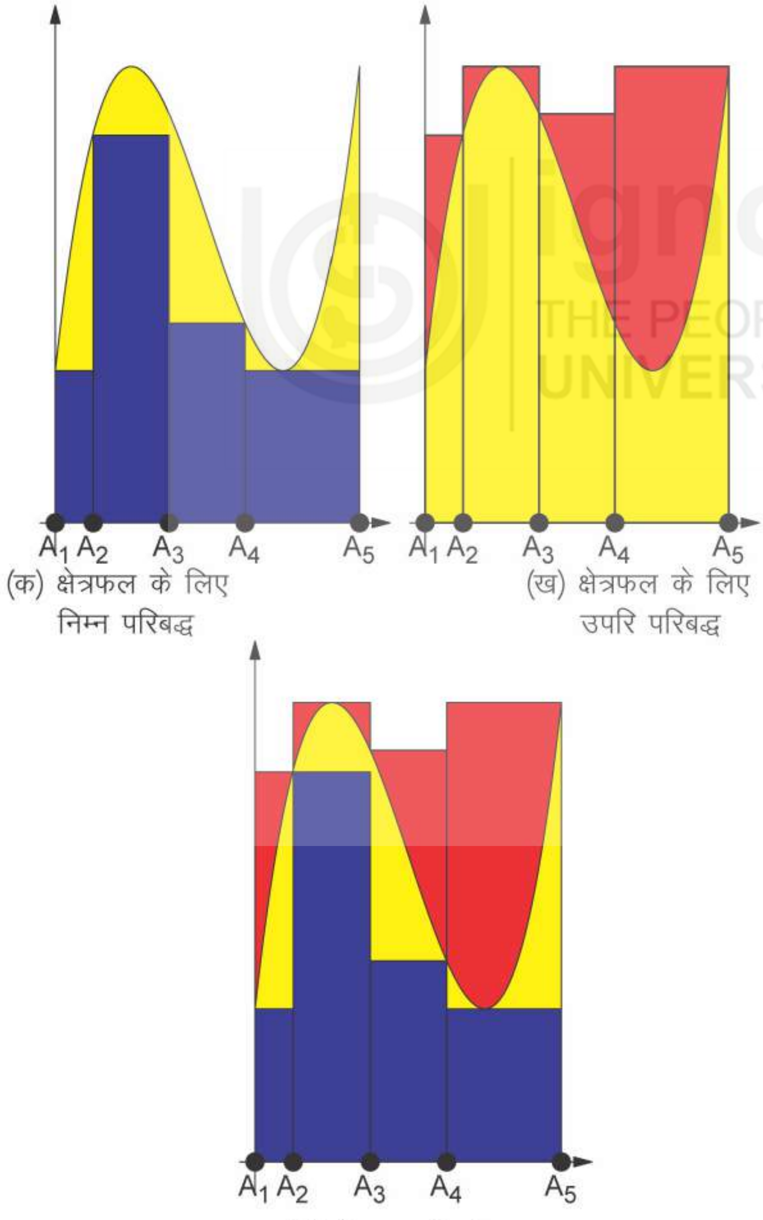
रेखाखंडों A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 और A_4A_5 आधारों वाले आयतों पर विचार कीजिए, जो नीले रंग द्वारा दर्शाए गए हैं। आप देख सकते हैं कि प्रत्येक आयत की ऊँचाई उसके आधार द्वारा दिए गए अंतराल में f फलन f(x) का निम्नतम (infimum) मान है। उदाहरणार्थ, आधार A_1A_2 वाले नीले रंग के आयत की ऊँचाई

$$\inf\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \right\} \text{ है।}$$

आप शायद यह सोच रहे होंगे कि हम $f(x)$ का निम्नक किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। जैसा कि हम पहले बता चुके हैं कि $x = 0$ से $x = \frac{1}{4}$ तक $f(x)$ में वृद्धि होती रहती है। इसी कारण, प्रारंभिक बिंदु $x = 0$ पर $f(x)$ का मान $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ में किसी भी बिंदु पर $f(x)$ के मान से छोटा होता है। इसलिए, निम्नतम मान प्रारंभिक बिंदु $x = 0$ पर प्राप्त किया जाता है तथा निम्नतम मान $f(0) = 1$ है। जैसा कि आप आकृति 4 (क) में देख सकते हैं कि इन नीले आयतों के क्षेत्रफलों का योग वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल से कम है। इसलिए, नीले आयतों के क्षेत्रफलों का योग वक्र $y = f(x)$ के क्षेत्रफल के लिए, एक निम्न परिबद्ध प्रदान करता है।

इस प्रकार, आकृति 4 (ख) में, प्रत्येक लाल रंग के बाहरी आयत की ऊँचाई उसके आधार द्वारा दिए जाने वाले अंतराल में $f(x)$ का **उच्चक (supremum)** मान है। उदाहरणार्थ, आधार A_1A_2 वाले बाहरी आयत की ऊँचाई

$$\sup\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \right\} \text{ है।}$$



आकृति 4: आयतों का उपयोग करते हुए वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल का सन्निकटन

पुनः, यह तथ्य कि $f(x)$ में $x = 0$ से $x = \frac{1}{4}$ तक वृद्धि होती रहती है उसका परमतम ज्ञात करने में उपयोगी रहता है। क्योंकि $f(x)$ में वृद्धि होती रहती है (अर्थात् यह वर्धमान है), इसलिए अंतराल $\left[0, \frac{1}{4}\right[$ में $f(x)$ के सभी मानों से $x = \frac{1}{4}$ पर उसका मान बड़ा है। अतः, $x = \frac{1}{4}$ पर परमतम मान प्राप्त हो जाता है तथा यह $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{41}{16} = 2\frac{9}{16}$ इकाई है।

जैसा कि आकृति 4(ख) में आप देख सकते हैं कि लाल रंग के आयतों के क्षेत्रफलों का योग वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल से अधिक है। इसलिए, लाल रंग के आयतों के क्षेत्रफलों का योग वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल के लिए एक **उपरि परिबद्ध** प्रदान करता है।

आपने आकृति 4 (ग) में यह ध्यान दिया होगा कि पीले रंग का भाग वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल तथा छोटे नीले रंग के आयतों के क्षेत्रफलों के बीच के अंतर को दर्शाता है। लाल रंग वाला भाग वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल तथा बड़े लाल रंग वाले आयतों के क्षेत्रफलों के बीच के अंतर को दर्शाता है। जैसा कि निर्गम की विधि की स्थिति में था, बाहरी आयतों के क्षेत्रफलों का योग तथा आंतरिक आयतों के क्षेत्रफलों का योग $f(x)$ के अंतर्गत क्षेत्रफल के निकटतर तथा और निकटतर होते हुए उसकी ओर अग्रसर होता है।

अगले उपभाग में, हम अपनी चर्चा औपचारिक आधार पर करेंगे।

17.2.1 उपरि और निम्न योग

हम इस उपभाग का प्रारंभ एक **विभाजन (partition)** की परिभाषा के साथ करेंगे।

परिभाषा 1 : मान लीजिए कि $n \geq 1$ है तथा यह भी मान लीजिए कि $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b = x_n$ अंतराल $[a, b] \subset \mathbb{R}$ में बिंदु हैं। तब, क्रमित समुच्चय $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ अंतराल $[a, b]$ का एक **विभाजन** कहलाता है। हम $[a, b]$ के सभी विभाजनों के समुच्चय को $\mathcal{P}([a, b])$ द्वारा व्यक्त करेंगे।

एक क्रमित समुच्चय से हमारा तात्पर्य यह है कि अवयवों के लिखने में उनका क्रम महत्वपूर्ण है। इस प्रकार, क्रमित समुच्चयों के रूप में है। क्रमित समुच्चय विशेष प्रकार के समुच्चय हैं इनका सामान्य समुच्चयों से कोई भ्रम नहीं होना चाहिए, जिनमें क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता है।

उदाहरण 1 : अंतराल $[0, 2]$ का एक विभाजन दीजिए।

हल : अपनी पिछली चर्चा में, अंतराल $[0, 2]$ को उपविभाजित करने के लिए, हमारे द्वारा प्रयुक्त बिंदुओं का समुच्चय, अर्थात् $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2\right\}$ अंतराल $[0, 2]$ का एक विभाजन प्रदान करता है। ध्यान दीजिए कि $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = \frac{5}{4}$ और $x_4 = 2$ है।

***

आगे, हम उपरि और निम्न योगों की संकल्पनाओं से परिचय कराएँगे।

परिभाषा 2: मान लीजिए कि $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ एक परिबद्ध फलन है तथा मान लीजिए कि $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \subset [a, b]$ एक विभाजन है। $1 \leq i \leq n$ के लिए, आइए लिखें:

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1} \qquad \ldots(1)$$

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad \ldots(2)$$

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad \ldots(3)$$

तब, हम **उपरि योग (upper sum)** U(P, f) को

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i \qquad \ldots(4)$$

द्वारा तथा **निम्न योग (lower sum)** L(P, f) को

$$L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \qquad \ldots(5)$$

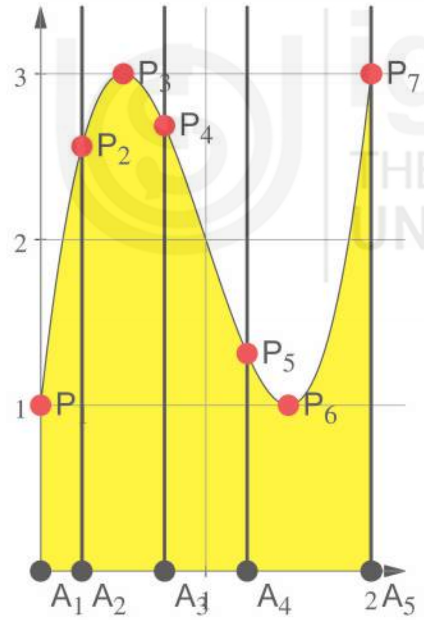
द्वारा परिभाषित करते हैं।

ये योग फ्राँसीसी गणितज्ञ जीन गास्टन दार्बू **(Jean Gaston Darboux)** के नाम **दार्बू** योग कहलाते हैं, जिन्होंने इन्हें परिभाषित किया।

आइए उपरि और निम्न योगों को समझने के लिए, एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 2 : अंतराल $[0, 2]$ पर फलन $f(x)=4x^3-12x^2+9x+1$ के लिए, विभाजन $\left\{0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},2\right\}$ के सापेक्ष उपरि और निम्न योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{3}{4}$, $x_3=\frac{5}{4}$ और $x_4=2$ है। आइए अब Δ_i को परिकलित करें।



आकृति 5: अंतराल $[0, 2]$ में फलन $f(x)=4x^3-12x^2+9x+1$ के निम्नतम और परमतम मान

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1 &= x_1-x_0=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}\\
\Delta_2 &= x_2-x_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\\
\Delta_3 &= x_3-x_2=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\\
\Delta_4 &= x_4-x_3=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(6)$$

आइए अब मानों M_i और m_i, $1\le i\le 4$ का अभिकलन करें। आइए इन मानों को ज्ञात करने के लिए, आकृति 5 का उपयोग करें।

हम देखते हैं कि $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ पर $f(x)$ वर्धमान है। इसलिए निम्नक मान $x = 0$ पर प्राप्त होता है तथा उच्चक मान $x = \frac{1}{4}$ पर प्राप्त होता है। P_1 का y निर्देशांक निम्नक मान है तथा P_2 का y निर्देशांक उच्चक मान है। इस प्रकार, हमें m_1 और M_1 निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \inf\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \right\} = f(0) = 1 \\ M_1 &= \sup\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \right\} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{41}{16} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(7)$$

आकृति 5 से आप देख सकते हैं कि अंतराल $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ में, $x = \frac{1}{4}$ से $x = \frac{1}{2}$ तक फलन $f(x)$ में वृद्धि होती जाती है तथा $x = \frac{1}{2}$ से $x = \frac{3}{4}$ तक उसमें कमी होती जाती है। इस अंतराल में, $x = \frac{1}{4}$ पर फलन $f(x)$ निम्नक मान प्राप्त करता है तथा $x = \frac{1}{2}$ पर उच्चक मान प्राप्त करता है। निम्नक मान $P_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{41}{16}\right)$ का y-निर्देशांक है तथा उच्चक मान $P_3 = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ का y-निर्देशांक है। इस प्रकार, हम m_2 और M_2 के निम्नलिखित मान प्राप्त करते हैं:

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= \inf\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \right\} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{41}{16} \\ M_2 &= \sup\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \right\} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(8)$$

अंतराल $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ में, $x = \frac{3}{4}$ से $x = \frac{5}{4}$ तक $f(x)$ में कमी होती जाती है। इसलिए, $x = \frac{5}{4}$ पर फलन निम्नक मान प्राप्त करता है तथा यह निम्नक मान बिंदु $P_5 = \left(\frac{5}{4}, \frac{21}{16}\right)$ का y-निर्देशांक है। $x = \frac{3}{4}$ पर फलन उच्चक मान प्राप्त करता है तथा यह उच्चक मान बिंदु $P_4 = \left(\frac{3}{4}, \frac{43}{16}\right)$ का y-निर्देशांक है। इस प्रकार, हम m_3 और M_3 के निम्नलिखित मान प्राप्त करते हैं:

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= \inf\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right] \right\} = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{21}{16} \\ M_3 &= \sup\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right] \right\} = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{43}{16} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(9)$$

अंतराल $\left[\frac{5}{4}, 2\right]$ में, $x = \frac{5}{4}$ से $x = \frac{5}{2}$ तक $f(x)$ में कमी होती जाती है तथा $x = \frac{5}{2}$ से $x = 2$ तक उसमें वृद्धि होती जाती है। निम्नक मान $P_6 = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$ का y-निर्देशांक है तथा उच्चक मान $P_7 = (2, 3)$ का y-निर्देशांक है। इस प्रकार, हम m_4 और M_4 के निम्नलिखित मान प्राप्त करते हैं:

$$\left.\begin{aligned} m_4 &= \inf\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[\frac{5}{4}, 2\right] \right\} = f\left(\frac{5}{2}\right) = 1 \\ M_4 &= \sup\left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[\frac{5}{4}, 2\right] \right\} = f(2) = 3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(10)$$

समीकरण (7), समीकरण (8), समीकरण (9) और समीकरण (10) से, हम देखते हैं कि

$$U(P,f) = M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 + M_4\Delta_4$$
$$= \frac{41}{16}\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{43}{16}\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{511}{64}$$
$$L(P,f) = m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + m_2\Delta_3 + m_4\Delta_4$$
$$= 1\cdot\frac{1}{4} + \frac{41}{16}\cdot\frac{1}{2} + \frac{21}{16}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{59}{16}$$

***

आपने इस ओर ध्यान दिया होगा कि $m_1\Delta_1$, $m_2\Delta_2$, $m_3\Delta_3$ और $m_4\Delta_4$ क्रमशः आकृति 4 (क) में आधारों A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 और A_4A_5 वाले नीले रंगों के आयतों के क्षेत्रफल हैं। इसी प्रकार, $M_1\Delta_1$, $M_2\Delta_2$, $M_3\Delta_3$ और $M_4\Delta_4$ क्रमशः आकृति 4 (ख) में आधारों A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 और A_4A_5 वाले लाल रंगों के आयतों के क्षेत्रफल हैं। आपने यह भी ध्यान दिया होगा कि उपरि योग जो हमने प्राप्त किया है वह लाल रंगों के आयतों के क्षेत्रफलों का योग है निम्न योग जो हमने प्राप्त किया है वह नीले रंगों के आयतों के क्षेत्रफलों का योग है। इस प्रकार, सहजात्मक रूप से, उपरि योग वक्र $y = f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x + 1$ के नीचे के क्षेत्रफल के लिए एक उपरि परिबद्ध प्रदान करता है तथा निम्न योग इस क्षेत्रफल के लिए एक निम्न परिबद्ध प्रदान करता है। उपरि और निम्न योगों की अपनी समझ की जाँच करने के लिए, अगले प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

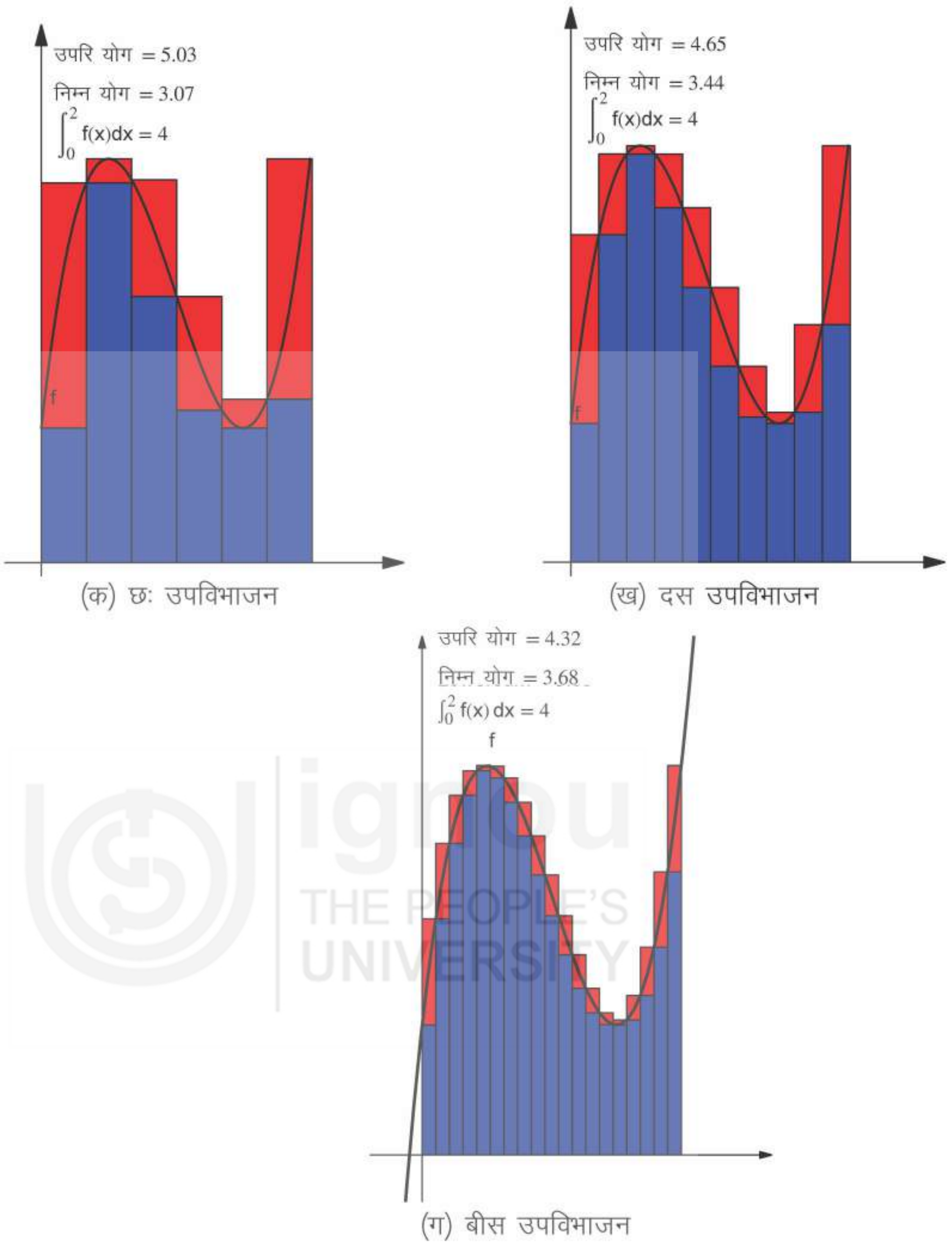
E1) विभाजन $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\right\}$ के सापेक्ष अंतराल $[0, 1]$ में फलन $f(x) = \frac{1}{1+x}$ के लिए, $U(P,f)$ और $L(P,f)$ ज्ञात कीजिए।

इस उपभाग में, हमने किसी अंतराल के विभाजन को परिभाषित किया, तथा एक विभाजन के सापेक्ष किसी फलन के उपरि और निम्न योगों को परिभाषित किया। हम उपरि निम्न योगों की अपनी चर्चा को समाप्त करते हैं तथा अगले उपभाग में, हम उपरि और निम्न समाकलों की चर्चा प्रारंभ करेंगे।

17.2.2 उपरि और निम्न समाकल

आइए अब $x = 0$ से $x = 2$ तक वक्र $4x^3 - 12x^2 + 9x + 1$ के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या पर वापिस आ जाएँ। जैसा कि हम पहले ही देख चुके हैं कि उपरि योग क्षेत्रफल के लिए उपरि परिबद्ध प्रदान करते हैं तथा निम्न योग क्षेत्रफल के लिए निम्न परिबद्ध प्रदान करते हैं। जैसे-जैसे हम विभाजन में अंतरालों की संख्या में वृद्धि करते जाते हैं, तो इन योगों का क्या होता है? आइए उसी उदाहरण से अब इसका अन्वेषण करें।

जैसे-जैसे हम उपविभाजनों की संख्या में वृद्धि करते जाते हैं, वैसे-वैसे आंतरिक आयतों के क्षेत्रफल बड़े तथा और बड़े होते जाते हैं तथा बाहरी आयतों के क्षेत्रफल छोटे तथा और छोटे होते जाते हैं। उपरि योग एक मान के निकटतर तथा और निकटतर होते हुए उसकी ओर अग्रसर होते हैं, जिसे हम **उपरि समाकल** कहते हैं। निम्न योग एक मान के निकटतर तथा और निकटतर होते हुए उसकी ओर अग्रसर होते हैं, जिसे हम **निम्न समाकल** कहते हैं।



आकृति 6: उपरि और निम्न योग

उस स्थिति में, जब उपरि और निम्न समाकल बराबर होते हैं, उपरि और निम्न दोनों ही योग एक उमयनिष्ठ सीमांत मान की ओर निकटतर तथा और निकटतर होते हुए अग्रसर होते हैं, जो वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल होता है। उपरि योग इस मान की ओर ऊपर की ओर अग्रसर होते हैं तथा निम्न योग नीचे की ओर से (आकृति 6 देखिए)। इस आकृति को देने का उद्देश्य एक सहजात्मक अनुभव कराना है। इस तथ्य की औपचारिक उपपत्ति, आप आपने वास्तविक विश्लेषण (Real Analysis) कोर्स में देखेंगे।

अब हम एक वास्तविक मान फलन के जो एक संवृत्त अंतराल में परिबद्ध है, उपरि और निम्न समाकलों को औपचारिक रूप से परिभाषित करने की ओर बढ़ेंगे। हम एक सरल प्रमेय प्रारंभ करते हैं, जो इन संकल्पनाओं की परिभाषाओं के लिए एक मौलिक आधारशिला प्रदान करती है।

प्रमेय 1 : मान लीजिए कि $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ एक परिबद्ध फलन है तथा मान लीजिए कि $m = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}$ और $M = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$ है, तब, $[a, b]$ के किसी विभाजन के लिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a) \qquad \ldots(11)$$

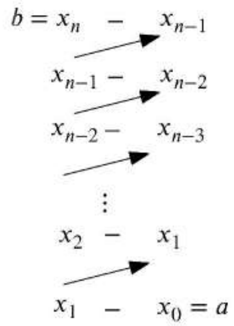
क्योंकि $f(x)$ परिबद्ध है, इसलिए m और M का अस्तित्व है।

उपपत्तिः मान लीजिए कि $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ अंतराल $[a, b]$ का एक विभाजन है। समीकरण (3) में M_i की परिभाषा तथा समीकरण (4) में $U(P, f)$ की परिभाषा का स्मरण कीजिए। क्योंकि $[x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$ है, इसलिए हमें $M_i \le M$ प्राप्त होता है। क्योंकि $\Delta_i > 0$ है, इसलिए हम $M_i\Delta_i \le M\Delta_i$ प्राप्त करते हैं। अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i \le \sum_{i=1}^{n} M\left(x_i - x_{i-1}\right) = M\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

यदि A और B, $\mathbb{R}$ के उपसमुच्चय इस प्रकार हैं कि $A \subset B$ है, तो $\inf A \ge \inf B$ और $\operatorname{Sup} A \le \operatorname{Sup} B$ होता है। यदि $a < b$ और $c > 0$ है, तो $ac < bc$ होता है।

पिछली पंक्ति में लिखे अंतिम योग को **टेलिस्कोपिक (telescopic)** योग कहते हैं, क्योंकि यह एक टेलिस्कोप (telescope) की तरह मुड़ सकता है। इस योग के पदों को उल्टे क्रम में लिखने पर हम देखते हैं कि प्रथम पद और अंतिम पद के अतिरिक्त सभी पद कट जाते हैं (आकृति 7 देखिए)। (तीर उन पदों को दर्शाते हैं, जो कट जाते हैं)। अतः, हम प्राप्त करते हैं:



आकृति 7 : टेलिस्कोपिक योग

$$U(P,f) \le M\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right) \le M(b-a)$$

तथा यह समीकरण (11) के प्रथम भाग को सिद्ध कर देता है। हम इन्हीं चरणों पर चल कर, $m(b-a) \le L(P,f)$ के लिए, असमिका को सिद्ध कर सकते हैं। यह तथ्य $m_i \ge m$ से प्राप्त हो जाता है।

आइए अब बीच वाली असमिका, अर्थात् $L(P,f) \le U(P,f)$ को सिद्ध करें। हमें $m_i \le M_i$, $1 \le i \le n$ प्राप्त है। क्योंकि $\Delta_i > 0$ है, इसलिए यह निष्कर्ष निकलता है कि $m_i\Delta_i \le M_i\Delta_i$ है। इस असमिका के दोनों पक्षों को $i = 1$ से $i = x$ तक जोड़ने पर, हम $L(P,f) \le U(P,f)$ प्राप्त करते हैं। ■

आइए लिखें:

$\mathscr{L}(f) = \{L(P,f) | [a,b]$ का एक विभाजन P है$\}$

$\mathscr{U}(f) = \{U(P,f) | [a,b]$ का एक विभाजन P है$\}$

प्रमेय 1 से यह निष्कर्ष निकलता है कि $\mathscr{U}(f)$ नीचे $m(b-a)$ द्वारा परिबद्ध है। इसलिए, इस समुच्चय का परमतम परिमित है। इसी प्रकार, $\mathscr{L}(f)$ ऊपर $m(b-a)$ द्वारा परिबद्ध है तथा इसी कारण इस समुच्चय का निम्नतम परिमित है। इसलिए, उपरि और निम्न समाकलों की निम्नलिखित परिभाषा अर्थपूर्ण है:

परिभाषा 3: मान लीजिए कि $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ एक परिबद्ध फलन है। तब, उपरि समाकल को

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf(\mathscr{U}(f)) = \inf\{U(P,f) | [a,b] \text{ का एक विभाजन } P \text{ है}\} \qquad \ldots(12)$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा निम्न समाकल को

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup(\mathcal{L}(f)) = \sup\{L(P,f) \mid [a,b] \text{ का एक विभाजन } P \text{ है}\} \qquad \text{... (13)}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।

अब हम कुछ उदाहरणों को देखते हैं।

उदाहरण 3 : आइए $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है} \\ 1, \text{ यदि } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन $f(x)$ पर विचार करें। यह फलन सुप्रसिद्ध जर्मन गणितज्ञ लेजेयून दिरिचलेट (Lejeune Dirichlet) के नाम पर **दिरिचलेट फलन** कहलाता है, जिन्होंने इसे परिभाषित किया। फलन $f(x)$ के उपरि और निम्न समाकल ज्ञात कीजिए।

पी. जी. एल. जे दिरिचलेट
1805-1851

हल : मान लीजिए कि $[0, 1]$ का कोई एक विभाजन $P = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1\}$ है। प्रत्येक उपअंतराल $[x_i, x_{i-1}]$ में परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ दोनों ही सम्मिलित हैं। प्रत्येक अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ पर, x के परिमेय मानों के लिए, $f(x)$ मान 1 ग्रहण करता है तथा x के अपरिमेय मानों के लिए, $f(x)$ मान 0 ग्रहण करता है। इसलिए, प्रत्येक i के लिए, $M_i = 1, m_i = 0$ है।

इस प्रकार,

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (1)\left(x_i - x_{i-1}\right) = 1 - 0 = 1 \text{ है।}$$

तथा

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (0)\left(x_i - x_{i-1}\right) = 0 \text{ है।}$$

क्योंकि $[0, 1]$ का P एक स्वेच्छिक विभाजन है, इसलिए इसका अर्थ है कि $[0, 1]$ के किसी भी विभाजन के लिए, $U(P, f) = 1$ है और $L(P, f) = 0$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि

$$\inf\{U(P,f) \mid [0,1] \text{ का } P \text{ एक विभाजन है }\} = \{1\} \text{ है।}$$

तथा $\sup\{L(P,f) \mid [0,1] \text{ का } P \text{ एक विभाजन है }\} = \{0\}$ है।

इसलिए, $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup\{U(P,f) \mid [0,1] \text{ का } P \text{ एक विभाजन है }\} = 1$

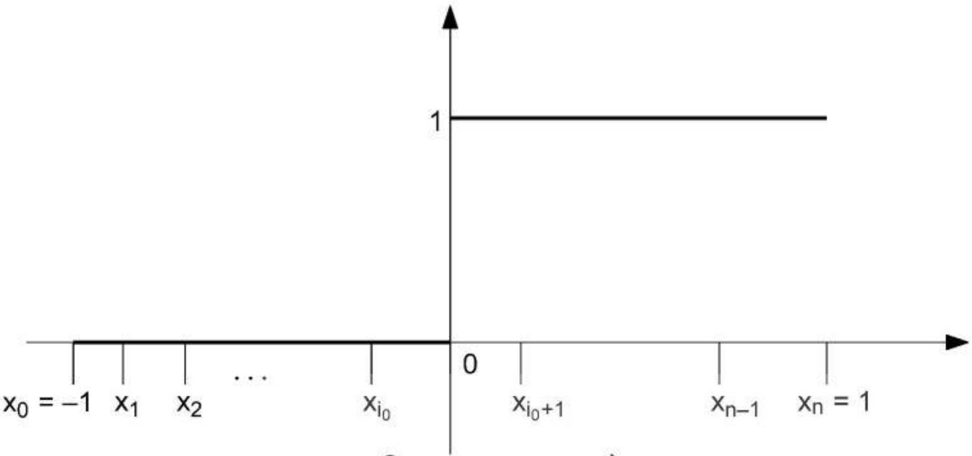
तथा $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf\{L(P,f) \mid [0,1] \text{ का } P \text{ एक विभाजन है }\} = 0$ है।

***

आइए एक अन्य उदाहरण को देखें, जिसमें एक **पग फलन (step function)** के उपरि और निम्न समाकलों की बात की गई है।

उदाहरण 4 : $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ यदि } -1 \le x < 0 \\ 1, \text{ यदि } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन $f(x)$ के लिए, अंतराल $[-1, 1]$ में उपरि और निम्न समाकल ज्ञात कीजिए।



आकृति 8: **f (x) का आलेख**

हल : मान लीजिए कि $[-1, 1]$ का

$$P = \{-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1\}$$

एक विभाजन है। मान लीजिए कि i_0 इस प्रकार है कि $x_{i_0} < 0 \le x_{i_0+1}$ है।

ध्यान दीजिए कि $m_k = \begin{cases} 0 \text{ यदि } 0 \le k \le i_0 + 1 \\ 1 \text{ यदि } i_0 + 1 < k \le n \end{cases}$ है।

क्या आप देख सकते हैं कि ऐसा क्यों? उपअंतराल $\left[-1, x_{i_0}\right]$ में, $f(x) = 0$ है। इसलिए, सभी $1 \le k \le i_0$ के लिए, $m_k = 0$ है। साथ ही, $\left[x_{i_0}, 0\right[$ में $f(x) = 0$ है। इसलिए, सभी $k = i_0 + 1$ के लिए भी $m_k = 0$ है। क्योंकि $\left[x_{i_0+1}, x_n\right]$ में $f(x) = 1$ है, इसलिए $k > i_0 + 1$ के लिए, $m_k = 1$ है। अतः,

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{i_0+1} m_k \Delta_k + \sum_{k=i_0+2}^{n} m_k \Delta_k = \sum_{k=i_0+2}^{n} (x_k - x_{k-1}) \text{ है।}$$

क्योंकि अंतिम योग टेलिस्कोपिक योग है, इसलिए हम प्राप्त करते हैं:

$$L(P, f) = x_n - x_{i_0+1} = 1 - x_{i_0+1}$$

यदि हम $d = x_{i_0+1}$ लिखें, तो d बिंदु 0 और बिंदु x_{i_0+1} के बीच की दूरी है। आइए

$$\Delta(P) = \max\{\Delta_i | 1 \le i \le n\} \text{ लिखें।}$$

तब, जब $\Delta(P)$ शून्य की ओर अग्रसर होता है, तब d भी शून्य की ओर अग्रसर होता है तथा $L(P, f)$ नीचे से 1 की ओर अग्रसर होता है।

इसलिए, $\underline{\int_{-1}^{1}} f(x)\,dx = 1$ है।

पुनः, जैसा कि हमने m_k की स्थिति में किया था, जाँच कीजिए कि

$$M_k = \begin{cases} 0, \text{ यदि } 0 \le k \le i_0 \\ 1, \text{ यदि } i_0 + 1 \le k \le n \end{cases} \text{ है।}$$

अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{i_0} M_k \Delta_k + \sum_{k=i_0+1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=i_0+1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$
$$= 1 - x_{i_0}$$

$x_{i_0} = -e$ लिखने पर, $e > 0$ और 0 के बीच की दूरी $e > 0$ है। इसलिए, $U(P, f) = 1 + e \geq 1$ है तथा जब $\Delta(P)$ शून्य की ओर अग्रसर होता है, तब $1 + e$ निकटतर तथा और निकटतर होते हुए 1 की ओर अग्रसर होता जाता है। अतः,

$$\overline{\int_{-1}^{1}} f(x)\,dx = 1 \text{ है।}$$

***

अभी तक जो हमने चर्चा की है, उसकी जाँच करने के लिए, यहाँ कुछ प्रश्न हैं।

E2) $[0, 1]$ पर $f(x) = 2$ द्वारा परिभाषित फलन के लिए $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx$ और $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx$ ज्ञात कीजिए।

इस उपभाग में, हमने उपरि और निम्न योगों की संकल्पनाओं को परिभाषित किया। हमने यह भी देखा कि जैस-जैसे हम अधिक तथा और अधिक बिंदुओं को सम्मिलित करते हुए, विभाजन में सुधार करते जाते हैं, वैसे-वैसे उपरि योग और निम्न योग कुछ मानों के निकटतर तथा और अधिक निकटतर होते हैं, जिन्हें हम क्रमशः उपरि और निम्न समाकल कहते हैं। कुछ स्थितियों में, उपरि और निम्न समाकल बराबर, मान लीजिए α होते हैं। इस स्थिति में, उपरि और निम्न योग एक उभयनिष्ठ मान α के रूप में अभिसृत (converge) हो जाते हैं। अगले उप भाग में, हम उन स्थितियों का अध्ययन करेंगे, जिनमें उपरि और निम्न समाकल संपाती हो जाते हैं।

17.2.3 निश्चित समाकल

ऊपर प्रश्न 2 में, हमने अचर फलन $f(x) = 2$ के अंतराल $[0, 1]$ पर उपरि और निम्न समाकल ज्ञात किए थे। आपने यह देखा होगा कि मान संपाती हो जाते हैं तथा उमयनिष्ठ मान 2 है। ध्यान दीजिए कि फलन $f(x) = 2$ के अंतर्गत, अंतराल $[0, 1]$ पर, 'क्षेत्रफल' 2 है तथा यह भुजाओं 1 और 2 इकाइयों वाले आयत का क्षेत्रफल है। (यहाँ, हम 'क्षेत्रफल' को कोट्स (quotes या ' ') के अंदर रख रहे हैं, क्योंकि यह ऋणात्मक भी हो सकता है। आप इसके बारे में इस खंड की अंतिम इकाई में अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे। यह हमारे सहजज्ञान से सहमत है कि उपरि योग ऊपर की ओर से 'क्षेत्रफल' के निकटतर तथा और निकटतर होते हुए उसकी ओर अग्रसर होते हैं तथा निम्न योग नीचे की ओर से 'क्षेत्रफल' के निकटतर तथा और निकटतर होते हुए उसकी ओर अग्रसर होते हैं। इसलिए, उमयनिष्ठ सीमा उस फलन द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का 'क्षेत्रफल' है। इससे प्रेरित होते हुए, हम एक अंतराल पर एक वास्तविक–मान फलन के समाकल को नीचे दिए हुए प्रकार से परिभाषित करते हैं।

परिभाषा 4 : मान लीजिए कि $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ एक परिबद्ध फलन है। हम कहते हैं कि f समाकलनीय है, यदि

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{ है।}$$

हम इस उमयनिष्ठ मान को f का **समाकल (integral)** कहते हैं तथा इसे $\int_a^b f(x)\,dx$ द्वारा व्यक्त करते हैं। हम b और a को **समाकलन** की क्रमशः उपरि और निम्न सीमाएँ भी कहते हैं।

कुछ पाठ्य पुस्तकों में, आपको समाकल के लिए रिमांन की परिभाषा देखने को मिलेगी, जो परिभाषा 4 से भिन्न है। परंतु हमारी परिभाषा और रिमांन की परिभाषा इस अर्थ में समाकलनीयता की तुल्य परिभाषाएँ हैं कि एक फलन जो एक परिभाषा के अनुसार समाकलनीय है, वह अन्य परिभाषा के अनुसार भी समाकलनीय है। साथ ही, समाकल का मान वही रहेगा।

सुविधा के लिए, हम निम्न परिपाटी का पालन करेंगे:

हम $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ .... (14)

मान लेते हैं। फलनों की समाकलनीयता के लिए, एक सर्वविदित निकष (या कसौटी) (criterion) है। अब हम इसका बिना उपपत्ति दिए कथन दे रहे हैं।

प्रमेय 2 : मान लीजिए कि $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ एक परिबद्ध वास्तविक-मान फलन है। तब, f समाकलनीय होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए, एक विभाजन P_ϵ का इस प्रकार अस्तित्व है कि $|U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f)| < \epsilon$ है।

जबकि विशिष्ट स्थितियों में, यह दर्शाना कठिन है कि उपरि और निम्न समाकल बराबर हैं, फिर भी ऐसे कुछ व्यापक परिणाम हैं जो यह सिद्ध करते हैं कि फलनों के कुछ वर्ग समाकलनीय हैं। आप ऐसे परिणामों की उपपत्ति अपने वास्तविक विश्लेषण कोर्स में देखेंगे। यहाँ हम एक परिणाम बिना उपपत्ति के दे रहे हैं।

प्रमेय 3 (समाकलनीयता) : मान लिजिए की $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ कोई फलन है। यदि f परिबद्ध और एकदिष्ट (monotonic) है या f संतत है, तो f समाकलनीय होता है।

यदि कोई फलन समाकलनीय है, तो वह आवश्यक रूप से परिबद्ध होता है। हम इस **आवश्यक** प्रतिबंध का प्रायः यह **सिद्ध** करने के लिए उपयोग कर सकते हैं कि कुछ फलन कुछ विशेष अंतरालों पर समाकलनीय नहीं होते हैं। ■

दूसरी ओर, प्रमेय 3 हमें किसी फलन के समाकलनीय होने के लिए एक **पर्याप्त प्रतिबंध (sufficient condition)** प्रदान करती है तथा हम इसका उपयोग एक अंतराल पर कुछ फलनों के समाकलनीयता सिद्ध करते हैं। यह ध्यान देने योग्य बात है कि एक संवृत अंतराल पर कोई भी संतत फलन उस अंतराल में परिबद्ध होता है।

आइए अब यह समझने के लिए कि एक वास्तविक-मान फलन की समाकलनीयता के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंधों का किस प्रकार अनुप्रयोग किया जाता है कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 5 : निम्नलिखित फलनों की समाकलनीयता की चर्चा कीजिए:

i) $\sin x$ ii) $\tan x$ iii) $\ln|x|$ iv) $\frac{3}{2+x^2}$ v) $\frac{2+x}{x^2-1}$

vi) $\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x+1}$ vii) $\frac{\sin x}{x}$

एक संवृत परिबद्ध अंतराल से हमारा मतलब [a, b], a, b$\in\mathbb{R}$ रूप के अंतराल से है।

हल : i) $\mathbb{R}$ के किसी भी संवृत परिबद्ध अंतराल में, त्रिकोणमितीय फलन $\sin x$ संतत है। हम यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि $\mathbb{R}$ के प्रत्येक संवृत परिबद्ध अंतराल में $\sin x$ समाकलनीय है प्रमेय 3 का अनुप्रयोग कर सकते हैं।

ii) $\frac{\pi}{2}$ के विषम गुणज, यानि $(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ के रूप की वास्तविक संख्या को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी अंतराल में $\tan x$ समाकलनीय नहीं है, क्योंकि $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ को अंतर्विष्ट करने वाले किसी संवृत अंतराल में $\tan x$ अपरिबद्ध है।

निस्संदेह, सबसे पहले कठिनाई यह है की यह फलन $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ में परिभाषित ही नहीं है। क्योंकि $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}$ शून्य है। और शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है, फलन $\tan x (2k+1)\frac{\pi}{2}$ पर परिभाषित नहीं है। हम $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ पर इस फलन को कोई भी मान निर्दिष्ट करके इस स्थिति को संशोधित करने का प्रयास कर सकते हैं। जैसा कि आप और अधिक उच्चस्तरीय पाठ्यक्रम में देखेंगे, यदि हम किसी समाकलनीय फलन का मान एक संवृत परिबद्ध अंतराल के परिमित बिंदुओं पर भी बदल दें, तो भी वह फलन समाकलनीय रहता है। साथ ही, किसी समाकलनीय फलन के मानों एक संवृत परिबद्ध अंतराल में परिमित बिंदुओं पर बदलने से उस अंतराल पर उस फलन के समाकल के मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। अतः हम किसी फलन f(x) को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं।

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{यदि } x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ \tan x, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

जब $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ है, तब $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ तथा $\cos x \to 0$ जब $x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}$, परन्तु $\sin x \to 1$ है। इसलिए इनका अनुपात, $x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}$ होने पर, ∞ की ओर प्रवृत्त होता है। अतः $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी अंतराल में f(x) समाकलनीय नहीं है। दूसरी और, $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ अंतर्विष्ट करने वाले प्रत्येक संवृत परिबद्ध अंतराल में $\tan x$ समाकलनीय है।

iii) 0 पर फलन $\ln|x|$ परिभाषित नहीं है। जैसाकि हमने $\tan x$ की स्थिति में किया था, हम $x = 0$ पर $\ln|x|$ के मान को 1 के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। क्योंकि $x \to 0$ होने पर $\ln|x| \to -\infty$ है। इसलिए, 0 को अंतर्विष्ट करने वाले $\mathbb{R}$ के किसी भी संवृत परिबद्ध अंतराल में $\ln|x|$ अपरिबद्ध है। अतः, 0 को अंतर्विष्ट करने वाले $\mathbb{R}$ के किसी भी संवृत परिबद्ध अंतराल पर, यह समाकलनीय नहीं है। 0 को अंतर्विष्ट न करने वाले $\mathbb{R}$ के किसी भी संवृत परिबद्ध अंतराल पर फलन $\ln|x|$ संतत है। इसलिए, यह $\mathbb{R}$ के सभी परिबद्ध उपअंतरालों पर समाकलनीय होगा।

iv) फलन $\frac{2}{3+x^2}$ एक परिमेय फलन, अर्थात् दो बहुपदों का एक अनुपात है। सभी परिमेय फलन जिनका हर किसी अंतराल में लुप्त (शून्य) नहीं होता, उस अंतराल में समाकलनीय होते हैं। क्या आप देख सकते हैं कि ऐसा क्यों है? यदि $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ दो बहुपदों का एक अनुपात है तथा एक अंतराल में $h(x) \neq 0$ है, तो उस अंतराल में $\frac{1}{h(x)}$ भी संतत है। क्योंकि एक बहुपद होने के कारण g (x) संतत है, इसलिए $g(x) \cdot \frac{1}{h(x)}$ भी संतत है। क्योंकि $3 + x^2 \geq 3 > 0$ है, इसलिए हर सदैव धनात्मक है। इसलिए, विशेष रूप में, $\mathbb{R}$ में किसी भी परिबद्ध अंतराल पर परिमेय फलन $f(x) = \frac{2}{3+x^2}$ समाकलनीय है।

v) इस स्थिति में, समीकरण $x^2 - 1 = 0$ को हल करने पर, हम $x = \pm 1$ प्राप्त करते हैं। साथ ही, जब $x \to 1$ और $x \to -1$ है, तब अंश शून्य के अतिरिक्त अन्य परिमित सीमा की ओर अग्रसर होता है तथा हर 0 की ओर अग्रसर होता है। इसलिए, यह फलन

±1 को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी अंतराल में परिबद्ध नहीं है। अतः, यह ±1 को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी अंतराल पर समाकलनीय नहीं है।

vi) यहाँ हर $x^3 - x^2 + x + 1 = (x-1)(x^2+1)$, $x = 1$ पर शून्य है तथा वास्तविक रेखा के प्रत्येक अन्य बिंदु पर शून्येतर है। जब $x \to 1$ है, तब अंश और हर दोनों शून्य की ओर अग्रसर होते हैं, परंतु अंश और हर में एक उमयनिष्ठ गुणनखंड (x–1) है।

इसलिए, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+1}{x^2+1} = 1$ है।

हम फलन f(x) को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3-x^2+x+1}, & \text{यदि } x \neq 1 \\ 1, & \text{यदि } x = 1 \end{cases} \text{ है।}$$

अतः, 1 को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी संवृत परिबद्ध अंतराल में f (x) संतत है। साथ ही, f(x) का हर किसी अन्य बिंदु पर लुप्त नहीं होता है। इसलिए, $\mathbb{R}$ के किसी भी परिबद्ध उपअंतराल में f(x) संतत रहता है और इसी कारण $\mathbb{R}$ के प्रत्येक परिबद्ध संवृत परिबद्ध में f(x) समाकलनीय है।

vii) हर $x = 0$ पर 0 है। $x \to 0$ होने पर अंश और हर दोनों ही 0 की ओर अग्रसर होते हैं। परन्तु इन में कोई उभयनिष्ट गुणखंड नहीं है, जिसे हम हरा सकते हैं। इकाई 7, उदाहरण 25 से हम $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ प्राप्त करते हैं। हम फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{यदि } x \neq 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित कर सकते हैं। अतः $x = 0$ फलन संततः रहता है। अन्य सभी बिंदुओं पर हर लुप्त भी नहीं होता और 0 की ओर प्रवृत्त भी नहीं होता । इसलिए यह फलन $\mathbb{R}$ के प्रत्येक संवृत परिबद्ध अंतराल पर समाकलनीय है।

***

टिप्पणी 1 : आप यह पाएँगे कि हमारे सम्मुख आने वाली अधिकांश स्थितियों में, किसी फलन के असमाकलनीय होने के सामान्य कारणों में से अधिकांशतः एक कारण उसका अपरिबद्ध होना है। इसका एक कारण यह है कि वह फलन किसी बिंदु पर अनंत की ओर प्रवृत्त होता है। पुनः, इसके लिए एक सामान्य कारण हो सकता है कि वह फलन दो फलनों के एक अनुपात के रूप में परिभाषित हो तथा हर वाला फलन उस अंतराल में किसी बिंदु पर लुप्त हो जाए। परंतु इन स्थितियों में भी, हमें उस स्थिति में फलन की सीमा की सावधानीपूर्वक जाँच करने की आवश्यकता है, जब प्राँत में मान संभवतः उस जटिलतम (या कष्टकर) बिंदु की ओर अग्रसर होता है। यदि सीमा का अस्तित्व है तथा वह परिमित है, तो हर के लुप्त होने से कोई समस्या नहीं है। हम सदैव ऐसे बिंदुओं पर मानों को पुनः परिभाषित कर सकते हैं, जबकि प्रतिबंध यह है कि ऐसे केवल अनेक परिमित बिंदु ही हों। अभी तक की चर्चा की आपकी समझ की जाँच करने के लिए, यहाँ कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

E3) निम्नलिखित में से कौन से फलन समाकलनीय हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

i) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, अंतराल $[1, 2]$ में

ii) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x = 1 \\ \frac{x^2+x+1}{x^2-4x+3} & \text{यदि } 1 < x \leq 2 \end{cases}$, अंतराल $[1, 2]$ में

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sin x}{\cos x} & \text{यदि } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{यदि } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में

iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x = 0 \\ x \ln x & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$, अंतराल $[0, 1]$ में

E4) उदाहरण 3 में परिभाषित दिरिचलेट फलन क्या परिबद्ध है? क्या यह समाकलनीय है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

अगली प्रमेय में, हम समाकलों के कुछ गुणों की, बिना उपपत्ति दिए, सूची दे रहे हैं। आप इन परिणामों की उपपत्ति अपने वास्तविक विश्लेषण पाठ्यक्रम में देखेंगे।

प्रमेय 4 : क) यदि $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ एक अचर फलन $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ है, तो $\int_a^b f(x)dx = k(b-a)$ होता है।

ख) यदि f एक वास्तविक-मान फलन है, जो $[a, c]$ और $[c, b]$ पर परिभाषित और समाकलनीय है, तो यह $[a, b]$ पर समाकलनीय होता है तथा

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ होता है।}$$

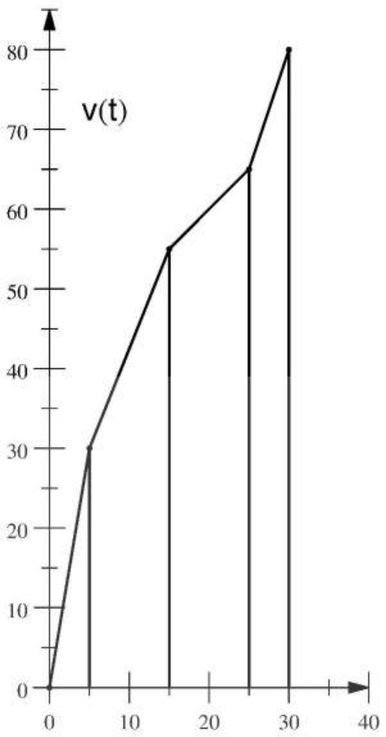
ग) **समाकलों का बीजगणितः** मान लीजिए कि $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ और $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ समाकलनीय फलन हैं। तब, किन्हीं भी अचरों a_1 और $a_2 \in \mathbb{R}$ के लिए $(a_1f_1 + a_2f_2)(x) = a_1f_1(x) + a_2f_2(x)$ द्वारा परिभाषित फलन $(a_1f_1 + a_2f_2) : [a, b] \to \mathbb{R}$ भी समाकलनीय होता है तथा हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_a^b (a_1f_1 + a_2f_2)(x)\,dx = a_1\int_a^b f_1(x)\,dx + a_2\int_a^b f_2(x)\,dx \qquad \ldots(15)$$

$(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$ द्वारा परिभाषित फलन $(f_1f_2) : [a, b] \to \mathbb{R}$ भी समाकलनीय होता है।

अभी हम प्रमेय 4 के अनुप्रयोगों के उदाहरणों की चर्चा नहीं करेंगे, क्योंकि हम अनिश्चित समाकलों के लिए ऐसी ही संगत परिणाम बाद में सिद्ध करेंगे तथा वहीं हम उदाहरणों पर चर्चा करेंगे।

आपने इस ओर ध्यान दिया होगा कि, जबकि हमने विभिन्न फलनों के समाकलों के अस्तित्व की चर्चा की थी, हमने, सरलतम फलनों के अतिरिक्त, कभी भी वास्तव में किसी फलन के समाकल ज्ञात नहीं किए। सामान्यतः, प्रथम सिद्धांतों से किसी फलन का समाकल ज्ञात करना कठिन होता है। अगले भाग में, हम अनेक स्थितियों में वास्तव में समाकल ज्ञात करने की एक विधि की चर्चा करेंगे।



आकृति 9: चाल–समय फलन

17.3 कलन की मूलभूत प्रमेय

अभी तक की अपनी चर्चा में, हमने अवकलन और समाकलन के बीच किसी संबंध को नहीं देखा है। जितना हम जानते हैं, उसके अनुसार ये असंबंधित हो सकते हैं। परंतु, क्या ये वास्तव में असंबंधित हैं? इससे पहले कि हम समाकलन और अवकलन के बीच संबंध प्रस्तुत करें, आइए एक स्थिति की चर्चा करें।

मान लीजिए कि आप कार द्वारा एक लंबी यात्रा पर जा रहे हैं तथा आप यह जानना चाहेंगे कि प्रत्येक आधे घंटे के बाद आपने कितनी दूरी तय कर ली है। यद्यपि आपका ओडोमीटर (odometer) (दूरी मापने का यंत्र) काम नहीं कर रहा है, परंतु आपका स्पीडोमीटर (speedometer) काम कर रहा है। मान लीजिए कि आपका मित्र समय-समय पर स्पीडोमीटर के पाठ्यांकों (readings) को नोट करता जाता है तथा ये मान इस प्रकार हैं:

समय (मिनटों में)	5	15	25	30
चाल (km/hr में)	30	50	65	80

क्या आप प्रथम आधे घंटे में तय की गई लगभग दूरी ज्ञात कर सकते हैं? आइए अब यहाँ गणित को ले आएँ। हमें दो फलन प्राप्त हैं। पहला s(t) जो t सेकण्डों में तय की गई दूरी प्रदान करता है तथा दूसरा v(t) जो tवें सेकण्ड में चाल प्रदान करता है।

इन बातों को सरलीकृत करने के लिए, आइए मान लें कि दिए हुए समय अंतरालों में त्वरण अचर रहता है। इस स्थिति में, फलन का आलेख आकृति 9 में दर्शाए अनुसार है। हमें प्राप्त हैं:

तय की गई दूरी = चाल x लिया गया समय

प्रथम 5 मिनटों में तय की गई दूरी $s(5)-s(0)$ है। क्योंकि इस अंतराल में **न्यूनतम चाल** $v(0)$ है, इसलिए इस अंतराल में **न्यूनतम** तय की गई दूरी, $v(0)\cdot\frac{5}{60}$ है, अर्थात्

$$v(0)\cdot\frac{5}{60}\le s(5)-s(0) \text{ है।}$$

दूसरी ओर, अधिकतम चाल $v(5)$ है। इसलिए, इस अंतराल में अधिकतम तय की गई दूरी $v(5)\cdot\frac{5}{60}$ है, अर्थात्

$$s(5)-s(0)\le v(5)\cdot\frac{5}{60} \text{ है।}$$

उपरोक्त असमिकाओं को संयोजित करने पर, हम प्रत्येक समय अंतराल में चली गई दूरी के लिए निम्नलिखित उपरि परिबद्ध और निम्न परिबद्ध प्राप्त करते हैं:

$$v(0)\cdot\frac{5}{60}\le s(5)-s(0)\le v(5)\cdot\frac{5}{60}$$

इसी प्रकार, शेष समय अंतरालों में से प्रत्येक के लिए, हम उस समय अंतराल में चली गई दूरी के लिए परिबद्ध प्राप्त करते हैं। ये परिबद्ध निम्नलिखित हैं:

$$\left.\begin{array}{rcl} v(0)\cdot\frac{5}{60}\le & s(5)-s(0) & \le v(5)\cdot\frac{5}{60} \\ v(5)\cdot\frac{10}{60}\le & s(15)-s(5) & \le v(15)\cdot\frac{10}{60} \\ v(15)\cdot\frac{10}{60}\le & s(25)-s(15) & \le v(25)\cdot\frac{10}{60} \\ v(25)\cdot\frac{5}{60}\le & s(30)-s(25) & \le v(30)\cdot\frac{5}{60} \end{array}\right\} \qquad \ldots(16)$$

समीकरण (16) की सभी असमिकाओं को जोड़ने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$S_1\le s(30)-s(0)\le S_2, \text{ जहाँ}$$

$$S_1=v(0)\cdot\frac{5}{60}+v(5)\cdot\frac{5}{60}+v(15)\cdot\frac{10}{60}+v(25)\cdot\frac{5}{60} \text{ है तथा}$$

$$S_2=v(5)\cdot\frac{5}{60}+v(15)\cdot\frac{10}{60}+v(25)\cdot\frac{10}{60}+v(30)\cdot\frac{5}{60} \text{ है।}$$

क्या आपने इस ओर ध्यान दिया कि अंतराल $[0, 30]$ के विभाजन

$P=\{x_0=0, x_1=5, x_2=15, x_3=25, x_4=30\}$ के सापेक्ष S_1 फलन V का निम्न योग $L(P, v)$ है? साथ ही, हमें प्राप्त है:

$$v(0)=\inf\{v(t)\,|[x_0, x_1]\},\ v(5)=\inf\{v(t)\,|[x_1, x_2]\}$$

$$v(15)=\inf\{v(t)\,|[x_2, x_3]\},\ v(25)=\inf\{v(t)\,|[x_3, x_4]\}$$

इसी प्रकार, जाँच कीजिए कि $S_2=U(P, v)$ है।

जैसे-जैसे हम विभाजनों की संख्या में वृद्धि करते हैं, अर्थात् n के मान में वृद्धि करते हैं, वैसे-वैसे $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$ के निकटतर तथा और अधिक निकटतर होते हुए S_1 उसकी ओर अग्रसर होता है तथा $\overline{\int_a^b} f(x\,dx)$ के निकटतर तथा और अधिक निकटतर होते हुए S_2 उसकी ओर अग्रसर होता है। तथा हम प्राप्त करते हैं:

$$\underline{\int_a^b} v(t)\,dt \le s(30) - s(0) \le \overline{\int_a^b} v(t)\,dt$$

क्योंकि v(t) संतत है, इसलिए समाकलनीय है। इस प्रकार, v(t) के उपरि समाकल और निम्न समाकल बराबर हैं। अतः,

$$s(30) - s(0) = \underline{\int_a^b} v(t)\,dt = \overline{\int_a^b} v(t)\,dt = \int_0^{30} v(t)\,dt \qquad \ldots(17)$$

सत्याभासी प्रतीत होता है।

अब, तय की गई दूरी और चाल के बीच संबंध का स्मरण कीजिए। हम जानते हैं कि चाल दूरी के परिवर्तन की दर होती है। दूसरे शब्दों में, $\frac{ds}{dt} = v(t)$ है।

इससे सुझाव मिलता है कि समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ ज्ञात करने के लिए, हमें एक फलन F ऐसा ज्ञात करना चाहिए कि सभी $x \in [a, b]$ के लिए, $F'(x) = f(x)$ हो। तब, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ होगा।

यह अंतिम कथन सत्य है। अब हम इस संबंध का कथन औपचारिक रूप से, स्पष्टतः फलनों f और F पर वे प्रतिबंध बताते हुए जिनके अंतर्गत यह संबंध सत्य है, देंगे। इससे पहले कि हम इस संबंध का औपचारिक रूप से कथन दें, हमें कुछ शब्दावली की आवश्यकता है।

परिभाषा 5 : मान लीजिए कि कुछ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ के लिए, (a, b) पर परिभाषित f और F दो वास्तविक-मान फलन हैं। हम कहते हैं कि (a, b) पर f का F **प्रति-अवकलज** है, यदि

1) फलन F अंतराल (a, b) में अवकलनीय है तथा [a, b] पर संतत है।

2) [a, b] पर फलन f संतत है।

3) सभी $x \in (a, b)$ के लिए, $F'(x) = f(x)$ है।

हम F को f का **पूर्वग (primitive)** भी कहते हैं।

अगले उदाहरण में, हम फलनों और उनके प्रति-अवकलजों के कुछ उदाहरण देंगे।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित की जाँच कीजिए:

i) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ द्वारा फलन F, $\mathbb{R}$ के किसी उपअंतराल पर $f(x) = x$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f का प्रति-अवकलज है।

ii) $\mathbb{R}$ के प्रत्येक उपअंतराल पर, $F(x) = x|x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f(x) = 2|x|$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रति-अवकलज है।

हल : i) हम खंड 3 की इकाई 9 से जानते हैं कि $F(x) = x^2/2$ एक बहुपद है। इसलिए, यह $\mathbb{R}$ के प्रत्येक उपअंतराल पर अवकलनीय है तथा संतत है। साथ ही, $f(x) = x$ भी एक अवकलनीय फलन है, क्योंकि यह एक बहुपद है। विशेष रूप में, यह

संतत भी है। साथ ही, $F'(x) = f(x)$ है। अतः, सभी तीनों प्रतिबंध संतुष्ट हो रहे हैं तथा f का F प्रति-अवकलज है।

ii) इकाई 11 के उदाहरण 3 से, हम जानते हैं कि F अवकलनीय है तथा इसका अवकलज f है। साथ ही, हम जानते हैं कि $\mathbb{R}$ के किसी भी उपअंतराल पर $2|x|$ एक संतत फलन है। अतः, इससे निष्कर्ष निकलता है कि f का F प्रति-अवकलज है।

प्रति-अवकलज की संकल्पना के बारे में अपनी समझ की जाँच करने के लिए, यहाँ आपके लिए कुछ प्रश्न हैं।

E5) निम्नलिखित की जाँच कीजिए:

i) $\mathbb{R}$ के किसी भी उपअंतराल पर फलन $\cos x + x \sin x$ फलन $x \cos x$ का प्रति-अवकलज है।

ii) 0 को अंतर्विष्ट न करने वाले $\mathbb{R}$ के किसी भी उपअंतराल पर फलन $x \ln|x| - x$ फलन $\ln|x|$ का प्रति-अवकलज है।

प्रति-अवकलज की परिभाषा का अध्ययन करने के बाद तथा उदाहरणों को देख कर, आप जो एक स्वाभाविक प्रश्न पूछ सकते हैं वह यह है: उदाहरण 6 के भाग क) की स्थिति में $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ द्वारा परिभाषित फलन F_1 भी परिभाषा में दिए तीनों प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। इसलिए, यह भी f का एक प्रति-अवकलज है। किसी फलन के कितने प्रति-अवकलज हो सकते हैं तथा किसी फलन के विभिन्न प्रति-अवकलज परस्पर किस प्रकार संबंधित हैं? अगली प्रमेय इस प्रश्न का उत्तर देती है।

प्रमेय 5 : मान लीजिए कि [a, b] पर f के दो प्रति-अवकलज F और G हैं, अर्थात् (a, b) पर $F' = f$ और $G' = f$ है। तब, किसी अचर फलन C के लिए, $F(x) = G(x) + C$ होता है। विलोमतः, यदि F फलन f का प्रति-अवकलज है, तो $F(x) + C$ भी फलन f का एक प्रति-अवकलज होता है, जहाँ C एक अचर फलन है।

उपपत्ति : हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

अतः, $F - G$ एक अचर फलन, मान लीजिए C है। तब, $F(x) = G(x) + C$ है। विलोमतः, यदि [a, b] पर F फलन f का एक प्रति-अवकलज है, तो किसी अचर फलन C के लिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x)$$

अतः, $F(x) + C$ भी किसी अचर C के लिए $f(x)$ का एक प्रति-अवकलज है।

आइए [a, b] पर एक संतत अवकलज वाले सभी अवकलनीय फलनों के समुच्चय को समुच्चय S लें। हम $F \sim G$ द्वारा S पर एक संबंध परिभाषित करते हैं, यदि $F'(x) = G'(x)$ है। तब, आप इसकी सरलता से जाँच कर सकते हैं कि यह तुल्यता संबंध है। इसलिए, किसी संतत फलन के सभी प्रति-अवकलजों का समुच्चय एक तुल्यता

वर्ग (equivalence class) बनाता है। आइए इस चर्चा का एक प्रमेय के रूप में सारांश दें।

प्रमेय 6 : मान लीजिए कि $[a, b]$ पर एक संतत अवकलज वाले सभी अवकलनीय फलनों का समुच्चय S है। हम $F \sim G$ द्वारा S पर एक संबंध परिभाषित करते हैं, यदि $F'(x) = G'(x)$ है। तब, S पर $\sim$ एक तुल्यता संबंध होता है।

अगली प्रमेय हमें यह बताती है कि सभी संतत फलनों के लिए, प्रति-अवकलजों का अस्तित्व होता है।

प्रमेय 7 : मान लीजिए कि $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन है।

भाग 1: $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ...(18)

द्वारा परिभाषित फलन $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ फलन $f(x)$ का एक प्रति-अवकलन है, अर्थात् सभी $x \in [a, b]$ के लिए $F'(x) = f(x)$ है।

भाग 2 : यदि (a, b) में f का एक प्रति-अवकलज F है, तो

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \quad ...(19)$$

प्रमेय 7 समाकल कैलकुलस की मूलभूत प्रमेय या कैलकुलस की मूलभूत प्रमेय कहलाती है।

आइए अब प्रमेय 7 के कुछ अनुप्रयोगों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 7 : निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

i) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \sin t\, dt\right)$ ii) $\frac{d}{dx}\left(\int_1^{\sin x} \left(1 - t^2\right) dt\right)$

iii) $\frac{d}{dt}\left(\int_x^{x^2} \left(t^2 + t\right) dt\right)$

हल : हम इन अवकलजों को ज्ञात करने के लिए, श्रंखला नियम का प्रयोग करेंगे।

i) हम $v = x^2$ स्थापित करते हैं तथा $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t\, dt$, $f(t) = \sin t$ लिखते हैं। तब,

$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dv}(F(v))\frac{dv}{dx}$ है।

समीकरण (18) का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dv}(F(v)) = f(v) = \sin x^2$$

साथ ही, $\frac{dv}{dx} = 2x$ है।

अतः, $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t\, dt = 2x \sin x^2$ है।

ii) $v = \sin x$ स्थापित करने तथा $F(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{\sin x}(1-t^2)\,dt,\ f(t) = 1-t^2$ लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dv}(F(v))\frac{d}{dx}(v) = f(v)\cos x = (1-\sin^2 x)\cos x = \cos^3 x$$

iii) प्रमेय 4 के भाग ख) से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_1^{x^2}\left(t^2+t\right)dt = \int_1^{x}\left(t^2+t\right)dt + \int_x^{x^2}\left(t^2+t\right)dt$$

अतः, $\int_x^{x^2}\left(t^2+t\right)dt = \int_1^{x^2}\left(t^2+t\right)dt - \int_1^{x}\left(t^2+t\right)dt = F_1(x) - F_2(x)$

(मान लीजिए) हमें प्राप्त है:

$$\frac{d}{dx}\left(F_1(x)\right) = \left(x^4+x^2\right)2x \text{ तथा } \frac{d}{dx}\left(F_2(x)\right) = x^2+x$$

अतः, $\int_x^{x^2}\left(t^2+t\right)dt = 2x^5+2x^3-x^2-x$ है।

***

यदि आपने उपरोक्त उदाहरण को समझ लिया है, तो आपको निम्नलिखित परिणाम सिद्ध करने में कोई कठिनाई नहीं होगी:

प्रमेय 8 : मान लीजिए कि $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन है तथा यह भी मान लीजिए कि $F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt$ है, जहाँ $g_1(x): [c,d] \to [a,b]$ और $g_2(x): [c,d] \to [a,b]$ अंतराल $[c, d]$ पर अवकलनीय फलन हैं। तब, हम प्राप्त करते हैं

$$F'(x) = F'(g_2(x))g_2'(x) - F'(g_1(x))g_1'(x). \qquad \ldots(20)$$

अर्थात्, $$\frac{d}{dx}\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt\right) = f\left(g_2(x)\right)g_2'(x) - f\left(g_1(x)\right)g_1'(x) \qquad \ldots(21)$$

उपपत्ति : प्रमेय 4 के भाग (ख) का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_a^{g_2(x)} f(x)\,dx = \int_a^{g_1(x)} f(x)\,dx + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x)\,dx \qquad \ldots(22)$$

हम लिखते हैं:

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt$$

$$= \int_a^{g_2(x)} f(x)\,dx - \int_a^{g_1(x)} f(x)\,dx,$$ समीकरण (22) के प्रयोग से हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^{g_2(x)} f(x)\,dx\right) - \frac{d}{dx}\left(\int_a^{g_1(x)} f(x)\,dx\right)$$

आइए पहले पद $\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g_2(x)} f(x)\,dx\right)$ पर विचार करें।

पहले की तरह, हम $v = g_2(x)$ स्थापित करते हैं। तब,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g_2(x)} f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dv}(F(v))\frac{d}{dx}(g_2(x)) = F'(g_2(x))g_2'(x) \qquad \ldots(23)$$

इसी प्रकार, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_a^{g_1(x)} f(t)\,dt = F'(g_1(x))g_1'(x). \qquad \ldots(24)$$

समीकरण (20) का परिणाम, समीकरण (23) और समीकरण (24) से प्राप्त होता है तथा समीकरण (21), समीकरण (20) को एक दूसरे रूप में लिखना ही है। पिछले उदाहरण के बारे में आपकी समझ की जाँच के लिए, यहाँ कुछ प्रश्न हैं।

E6) निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

i) $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}}\left(1+t^4\right)dt$ ii) $\frac{d}{dx}\int_1^{\tan x}\left(1+t^2\right)dt$ iii) $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{dt}{1+t^2}$

ध्यान दीजिए कि जब हम निश्चित समाकलों के मान निकालने के लिए, समीकरण (19) का उपयोग करते हैं, तब अंतराल $[a, b]$ पर $f(x)$ के प्रति-अवकलजों के समुच्चय में कोई भी फलन वही मान $\int_a^b f(x)\,dx$ प्रदान करता है। यदि $f(x)$ का $F_1(x)$ कोई अन्य प्रति-अवकलज है, तो हमने देखा था कि किसी अचर C के लिए, $F_1(x) = F(x) + C$ होता है। समीकरण (19) से किसी अचर C के लिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \{F_1(b) - F_1(a)\} = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a),$$ जो

C से स्वतंत्र है।

इसलिए, किसी अर्थ में, हम एक संवृत अंतराल पर एक फलन के किन्हीं दो प्रति-अवकलजों को, जहाँ तक उस अंतराल में फलन के समाकल ज्ञात करने की बात है, 'समान ही' मान सकते हैं। अधिक औपचारिकता के लिए, मान लीजिए कि $[a, b]$ पर S उन सभी फलनों का समुच्चय है, जिनके अवकलज संतत हैं। '$F \sim G$ यदि अंतराल $[a, b]$ में उनका समान ही अवकलज है, अर्थात् $F'(x) = G'(x)$ है' द्वारा एक संबंध '$\sim$' परिभाषित कीजिए। ध्यान दीजिए कि इसका अर्थ है कि F और G एक ही फलन के प्रति-अवकलज हैं। हम यह आपके लिए छोड़ रहे हैं कि आप जाँच करें कि $\sim$ एक तुल्यता संबंध परिभाषित करता है।

परिभाषा 6 : मान लीजिए कि $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन है। यदि $f(x)$ का $F(x)$ एक प्रति-अवकलज है, तो हम लिखते हैं:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

जहाँ C एक स्वेच्छिक अचर है तथा $\int f(x)\,dx$ को अनिश्चित समाकल (indefinite Integral) कहते हैं।

हम इस भाग की समाप्ति आपके लिए एक प्रश्न से करते हैं।

E7) संबंध $\sim$ जिसे हमने पहले परिभाषित किया था, की जाँच कीजिए कि यह एक तुल्यता संबंध है।

अगले भाग में, हम कुछ सामान्य फलनों के अनिश्चित समाकलों की चर्चा करेंगे, जो अभी तक हमारे सम्मुख आए हैं।

17.4 मानक समाकल

आपने इस ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि सामान्यतः हमारे सम्मुख आने वाले फलन या तो बहुपद या परिमेय फलन या त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध फलन होते हैं। एक बार हमें ज्ञात हो जाए कि फलनों के एक विशेष समुच्चय को किस प्रकार समाकलित किया जाता है, तब हम नीचे दिए हुए परिणाम का प्रयोग करते हुए, जो प्रमेय 4 के भाग (ग) के संगत ही, अनेक अन्य फलनों को समाकलित कर सकते हैं।

आप देखेंगे कि ये परिणाम अवकलन के परिणामों के प्रत्यक्ष निष्कर्ष हैं।

प्रमेय 9 : क) मान लीजिए कि $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ का एक प्रति-अवकलज है। तब, किसी $\alpha \in \mathbb{R}$ के लिए $(\alpha f)(x)$ के प्रति-अवकलज का अस्तित्व है तथा यह $\alpha F(x)$ के बराबर होता है। साथ ही,

$$\int (\alpha f)(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \qquad \ldots(25)$$

ख) यदि $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ फलन $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ का प्रति-अवकलज है, तो $(f + g)(x)$ के प्रति-अवकलज का अस्तित्व है तथा यह $(F + G)(x)$ के बराबर होता है। साथ ही,

$$\int (f+g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \qquad \ldots(26)$$

उपपत्ति : क) यदि $\alpha = 0$ है, तो कुछ भी सिद्ध करने के लिए नहीं है, क्योंकि समीकरण (25) के RHS और LHS दोनों 0 हो जाते हैं। अतः, आइए मान लें कि $\alpha \neq 0$ है। क्योंकि $f(x)$ संतत है, इसलिए $\alpha f(x)$ भी संतत है। साथ ही, क्योंकि (a, b) पर $F(x)$ अवकलनीय है, इसलिए (a, b) पर $(\alpha F)(x)$ भी (a, b) पर अवकलनीय है तथा हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}((\alpha F)(x)) = \alpha \frac{d}{dx}(F(x)) = (\alpha f)(x)$$

अतः, अनिश्चित समाकल की परिभाषा द्वारा, $\alpha(f(x))$ का एक प्रति-अवकलज $(\alpha F)(x)$ है तथा हम प्राप्त करते हैं:

$$\int (\alpha f)(x)\, dx = (\alpha F)(x) + C,\ C \in \mathbb{R} \qquad \ldots(27)$$

अनिश्चित समाकल की परिभाषा द्वारा ही, हम प्राप्त करते हैं:

$$\alpha \int f(x)\, dx = \alpha\left(F(x) + C'\right),\ C' \in \mathbb{R}$$

$$= \alpha F(x) + \alpha C',\ C' \in \mathbb{R}$$

क्योंकि $\alpha \neq 0$ है, इसलिए $\mathbb{R}$ में C' सभी संभव मान ग्रहण करता है, $\alpha C'$ भी $\mathbb{R}$ में सभी संभव मान ग्रहण करता है। यदि हम $\alpha C'$ के लिए C लिखें, तो $\mathbb{R}$ में C सभी मान ग्रहण करता है। अतः,

$$\alpha \int f(x)\,dx = \alpha F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$
$$= \int (\alpha f)(x)\,dx, \text{ समीकरण (27) से}$$

ख) भाग ख) की उपपत्ति भी वही विधि अपनाते हुए लिखी जा सकती है। हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{(F+G)(x)\} &= \frac{d}{dx}\{F(x)+G(x)\}\\ &= \frac{d}{dx}(F(x)) + \frac{d}{dx}(G(x))\\ &= f(x)+g(x) = (f+g)(x)\end{aligned}$$

अतः, $$\int (f+g)(x)\,dx = (F+G)(x) + C,\ C \in \mathbb{R} \qquad \ldots(28)$$

हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx &= F(x) + C_1 + G(x) + C_2;\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\\ &= F(x) + G(x) + C_1 + C_2;\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

क्योंकि C_1 और C_2 संपूर्ण $\mathbb{R}$ पर मान ग्रहण करते हैं, इसलिए $C_1 + C_2$ भी संपूर्ण $\mathbb{R}$ पर मान ग्रहण करते हैं। $C_1 + C_2$ के लिए C लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx &= \{(F+G)(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}\\ &= \int (f+g)(x)\,dx, \text{ समीकरण (28) से}\end{aligned}$$

उपप्रमेय 1 : मान लीजिए कि [a, b] पर $f_1, f_2, \ldots, f_n$ संतत फलन हैं तथा $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ अचर हैं। तब,

$$\int \left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n\right)(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \int f_i(x)\,dx \qquad \ldots(29)$$

अब हम भविष्य में संदर्भ के लिए, सारणी 1 के रूप में फलनों और उनके अनिश्चित समाकलों की एक सारणी बनाते हैं। हमने स्पष्ट रूप से उन अंतरालों को नहीं बताया है जिन पर दूसरे स्तंभ का फलन पहले स्तंभ के फलन का अनिश्चित समाकल है। इसलिए, निश्चित समाकलों के मान निकालने के लिए, इन परिणामों का प्रयोग करने से पहले, इसकी जाँच कर लीजिए कि जिस अंतराल पर आप समाकलित कर रहे हैं, वहाँ प्रति-अवकलजों के प्रतिबंध संतुष्ट हो रहे हैं या नहीं।

आप इस सारणी की जाँच, सारणी के दूसरे स्तंभ के फलन को अवकलित करके तथा फिर यह देख कर के अपको पहले स्तंभ में उसका संगत फलन प्राप्त हो गया है, कर सकते हैं। हम कुछ मानों की जाँच अगले उदाहरण में करेंगे।

उदाहरण 8 : जाँच कीजिए कि

क) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ को अंतर्विष्ट न करने वाले $\mathbb{R}$ के किसी भी उपअंतराल में $\tan x$ का अनिश्चित समाकल $\ln|\sec x| + C$ है।

ख) $(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ को अंतर्विष्ट न करने वाले $\mathbb{R}$ के किसी भी उपअंतराल में $\sec x$ का अनिश्चित समाकल $\ln|\sec x + \tan x| + C$ है।

हल : निस्संदेह, हम $\frac{d}{dx}(\ln|\sec x|) = \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x = \tan x$ प्राप्त करते हैं। आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ का अंतर्विष्ट न करने वाले किसी भी अंतराल में $\tan x$ संतत है तथा $\ln|\sec x|$ का अवकलज है। अतः, $\tan x$ का प्रतिअवकलज $\ln|\sec x|$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\tan x$ का अनिश्चित समाकल $\ln|\sec x| + C$ है।

सारणी 1 : अनिश्चित समाकलों की सारणी

क्रम सं	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
1.	$x^n, n \neq -1,$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2.	$\frac{1}{x}$	$\ln|x| + C$
3.	$\sin x$	$-\cos x + C$
4.	$\cos x$	$\sin x + C$
5.	$\tan x$	$\ln|\sec x| + C$
6.	$\cot x$	$\ln|\sin x| + C$
7.	$\sec x$	$\ln|\sec x + \tan x| + C$
8.	$\operatorname{cosec} x$	$\ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$
9.	e^x	$e^x + C$
10.	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x + C$
11.	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$
12.	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$
13.	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\sec^{-1} x + C$
14.	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x + C$

ग) आइए अब इसकी जाँच करें कि $\sec x$ का प्रति-अवकलज $\ln|\sec x + \tan x|$ है। जाँच कीजिए कि जब भी $\sec x$ और $\tan x$ परिभाषित हैं, तब $\sec x + \tan x \neq 0$ है। हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}(\ln|\sec x + \tan x|) = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \left(\sec x \tan x + \sec^2 x\right)$$

$$= \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} = \sec x$$

***

E8) सारणी 1 के शेष मानों की जाँच कीजिए।

उदाहरण 9 : निम्नलिखित समाकलों को परिकलित कीजिए:

i) $\int x^3\,dx$ ii) $\int x^{\frac{3}{2}}dx$ iii) $\int_0^2 \frac{1}{x^5}\,dx$

iv) $\int \frac{1}{x^{7/5}}\,dx$ v) $\int \left(x^5 + 3x^3 - 2x\right)\,dx$ vi) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}\,dx$

हल : i) सारणी 1 की प्रथम प्रविष्टि से, $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ है। इसलिए, हम $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ प्राप्त करते हैं।

ii) पुनः, सारणी 1 की प्रथम प्रविष्टि से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\,dx + C$$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx$$

$$= \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

iv) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}\,dx = \int x^{-\frac{7}{5}}\,dx = \frac{x^{-\frac{7}{5}+1}}{-\frac{7}{5}+1} + C = -\frac{5}{2x^{\frac{2}{5}}} + C$$

v) अब हम $f_1 = x^5$, $c_1 = 1$, $f_2 = x^3$, $c_2 = 3$, $f_3 = x$ और $c_3 = -2$ के साथ समीकरण (29) का अनुप्रयोग करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$\int \left(x^5 + 3x^3 - 2x\right)\,dx = \int x^5\,dx + 3\int x^3\,dx - 2\int x\,dx$$

$$= \frac{x^6}{6} + C_1 + 3\frac{x^4}{4} + C_2 - 3\frac{x^2}{2} - C_3$$

$$= \frac{x^6}{6} + 3\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + C$$

जहाँ हम $C_1 + C_2 - C_3$ के लिए C लिखते हैं। आगे आने वाले पृष्ठों में, हम अधिकतर, बिना विस्तृत विवरण देते हुए, दो या अधिक अचरों को संयोजित करेंगे।

vi) हमें प्राप्त है: $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

अतः, $\dfrac{(x+1)^3}{x^2} = x + 3 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ है।

समीकरण (29) का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2}\,dx = \int \left(x + 3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$
$$= \int x\,dx + 3\int dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 3\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + 3x + \frac{x^2}{2} + 3\ln|x| + C$$

***

यहाँ आपके प्रयास करने के लिए कुछ प्रश्न हैं।

E9) निम्नलिखित समाकलों को परिकलित कीजिए:

i) $\int x^4\,dx$ ii) $\int x^{\frac{5}{2}}\,dx$ iii) $\int_0^2 \frac{1}{x^7}\,dx$

iv) $\int \frac{dx}{x^{5/3}}$ v) $\int \left(x^6 + 3x^4 - 2x^2\right) dx$ vi) $\int \frac{(x-1)^4}{x^2}\,dx$

आइए अब कुछ ऐसे उदाहरणों को देखें जिनमें त्रिकोणमितीय फलन संबद्ध होते हैं।

उदाहरण 10 : निम्नलिखित समाकलों को परिकलित कीजिए:

i) $\int(3\sin x + 4\cos x)\,dx$ ii) $\int \sec^2 x\,dx$ iii) $\int(x + \sin x)\,dx$ iv) $\int \frac{(2+3\sin x)^2}{\cos^2 x}\,dx$

हल : i) समीकरण (29) का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int (3\sin x + 4\cos x\,dx = 3\int \sin x\,dx + 4\int \cos x\,dx$$
$$= -3\cos x + 4\sin x + C$$

ii) हमें प्राप्त है:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$\therefore \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ है।

iii) समीकरण (29) का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int (x + \sin x)\,dx = \int x\,dx + \int \sin x\,dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$$

iv) हमें प्राप्त हैः

$$\frac{(2+3\sin x)^2}{\cos^2 x} = \frac{4+9\sin^2 x+12\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= 4\sec^2 x + 9\tan^2 x + 12\sec x\tan x$$
$$= 4\sec^2 x + 9(\sec^2 x - 1) + 12\sec x\tan x$$
$$= 13\sec^2 x + 12\sec x\tan x - 9$$

अतः, समीकरण (29) को प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{(2+3\sin x)^2}{\cos^2 x}\,dx = 13\int \sec^2 x\,dx + 12\int \sec x\tan x\,dx - 9\int dx$$

हमें प्राप्त हैः

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C_1$, इस उदाहरण के भाग ii) से साथ ही,

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$. है।

अतः, $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C_2$ है।

अतः, $\int \frac{(2+3\sin x)^2}{\cos^2 x}\,dx = 13\tan x + 12\sec x - 9x + C$ है।

***

उपरोक्त उदाहरण पर, अपनी समझ की जाँच करने के लिए, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E10) निम्नलिखित समाकलों को परिकलित कीजिए:

i) $\int(4\cos x + 3\tan x)\,dx$ ii) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$ iii) $\int \frac{(3+2\cos x)^2}{\sin^2 x}\,dx$

इस इकाई को हम यहीं समाप्त कर रहे हैं। आगे आने वाली इकाइयों में, हम समाकलनों के मान निकालने के लिए, प्रमेय 7 पर आधारित विधियों को विकसित करेंगे। अगले भाग में दिए सारांश को आप पढ़ना चाहेंगे, जिसमें इस इकाई में चर्चा किए मुख्य विषयों के बारे में बताया गया है।

17.5 सारांश

इस इकाई में, हमने

1. [a, b] के एक विभाजन के संगत [a, b] पर परिभाषित फलनों के उपरि और निम्न योगों को परिभाषित किया है तथा कुछ सरल फलनों के लिए उनका अभिकलन किया है।

2. किसी फलन के उपरि और निम्न समाकलों को परिभाषित किया है तथा सरल फलनों के लिए उनका परिकलन किया है।

3. एक दिए हुए फलन के निश्चित समाकल को परिभाषित किया है।

4. कलन की मूलभूत प्रमेय का कथन दिया है।

5. इस मूलभूत प्रमेय का कुछ समाकलनीय फलनों के निश्चित समाकलों परिकलित करने में उपयोग किया है।

17.6 हल / उत्तर

E1) मान लीजिए कि $f(x)=\frac{1}{1+x}$ है। तब, $[0,1]$ में $f(x)$ एकदिष्टी ह्रासमान है। इसलिए $[0,1]$ के किसी विभाजन $\{0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1\}$ के लिए, $\inf\left\{f(x)\,\middle|\,x\in[x_i,x_{i+1}]\right\}=f(x_{i+1})$ है तथा $\sup\left\{f(x)\,\middle|\,x\in[x_i,x_{i+1}]\right\}=f(x_i)$ है। हम प्राप्त करते हैं:
$\Delta_1=\frac{1}{4}, \Delta_2=\frac{1}{4}, \Delta_3=\frac{1}{10}, \Delta_4=\frac{2}{5}$ है। साथ ही, $m_1=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{5}$, $m_2=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$, $m_3=f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{8}$ और $m_4=f(1)=\frac{1}{2}$ है। अतः,
$$L(P,f)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{151}{240} \text{ है।}$$
साथ ही, $M_1=f(0)=1, M_2=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{5}, M_3=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$ तथा $M_4=f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{8}$ है। अतः, $U(P,f)=1\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}+\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}=\frac{23}{30}$ है।

E2) मान लीजिए कि $[0,1]$ का $P=\{0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1\}$ कोई विभाजन है। क्योंकि $[0,1]$ पर $f(x)$ एक अचर फलन है, इसलिए किसी अंतराल $[x_i,x_{i-1}]$ के लिए, $M_i=2$ और $m_i=2$ है। अतः, हम प्राप्त करते हैं:
$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=2\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=2(1-0)=2 \text{ है।}$$
$$\text{तथा } L(P,f)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=2\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=2(1-0)=2 \text{ है।}$$
अतः, $\{U(P,f)|\ [0,1]$ का P एक विभाजन है $\}=\{2\}$ है तथा

$\{L(P,f)|[0,1]$ का P एक विभाजन है $\}=\{2\}$ है।

इसलिए, $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=\sup\{U(P,f)|[0,1]$ का P एक विभाजन है। $\}$
$=\sup\{2\}=2$ है।

इसी प्रकार, $\underline{\int_0^1}f(x)\,dx=2$ है।

E3) i) इस स्थिति में, क्योंकि $f(x)=x^2+2x+1$ एक बहुपद है, इसलिए यह संतत है। अतः, यह समाकलनीय है।

ii) इस स्थिति में, हर के गुणनखंड $(x-1)(x-3)$ हैं। इसलिए, हम बिंदुओं

1 और 3 की जाँच करते हैं। अंश के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं। इसलिए उभयनिष्ठ गुणनखंड हटाने की कोई संभावना नहीं है। प्राँत में 3 अंतर्विष्ट नहीं है। इसलिए हमें 3 के बारे में चिंता करने की कोई आवश्यकता नहीं है। परंतु 1 प्राँत में सम्मिलित है तथा $x \to 1$ होने पर फलन अपरिबद्ध हो जाता है। इसलिए, फलन समाकलनीय नहीं है।

iii) यहाँ, $x \to \frac{\pi}{2}$ होने पर, अंश और हर 0 की ओर प्रवृत्त होते हैं। एल होपिटल नियम के उपयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0 \text{ है।}$$

अन्य सभी बिंदुओं पर, $1-\sin x$ और $\cos x$ संतत भी हैं। साथ ही, $\frac{\pi}{2}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर $\cos x \neq 0$ है। इसलिए, $x = \frac{\pi}{2}$ के अतिरिक्त अन्य सभी बिंदुओं पर फलन संतत है। अतः, फलन अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर समाकलनीय है।

iv) यहाँ, $x \to 0$ होने पर $\ln x - \infty$ की ओर प्रवृत्त होता है।

परंतु, $$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = 0 \text{ है।}$$

अतः, $x = 0$ पर फलन संतत है। क्योंकि $\ln x$ और x अन्य सभी बिंदुओं पर संतत हैं, इसलिए इनका गुणनफल भी 0 के अतिरिक्त अन्य सभी बिंदुओं पर संतत है। अतः, यह फलन अंतराल $[0, 1]$ में संतत है और इसीलिए समाकलनीय है।

E4) दिरिचलेट फलन परिबद्ध है, क्योंकि यह केवल मान 0 और 1 ग्रहण करता है तथा इसीलिए $|f(x)| \le 1$ है। परंतु, जैसा कि हमने उदाहरण 3 में देखा था, उपरि और निम्न समाकल बराबर नहीं है। इसी कारण, यह समाकलनीय नहीं है।

E5) i) $\mathbb{R}$ के प्रत्येक उपअंतराल में, फलन x और $\sin x$ अवकलनीय हैं। अतः, $\mathbb{R}$ के प्रत्येक उपअंतराल में, $x\sin x$ भी अवकलनीय है। क्योंकि $\mathbb{R}$ के प्रत्येक उपअंतराल में, $\cos x$ भी अवकलनीय है, इसलिए $\mathbb{R}$ के प्रत्येक उपअंतराल में $\cos x + x\sin x$ अवकलनीय है। साथ ही, $\frac{d}{dx}(\cos x + x\sin x) = -\sin x - \sin x + x\cos x = x\cos x$ है। क्योंकि फलन $\cos x$ संतत है, इसलिए यह निष्कर्ष निकलता है कि $x\cos x$ का प्रति-अवकलज $\cos x + x\sin x$ है।

ii) 0 को अंतर्विष्ट न करने वाले $\mathbb{R}$ के किसी भी अंतराल में, फलन $f(x) = x\ln|x|$ अवकलनीय है तथा $\mathbb{R}$ के किसी भी अंतराल में, $g(x) = x$ अवकलनीय है। इसलिए, 0 को अंतर्विष्ट न करने वाले $\mathbb{R}$ के प्रत्येक अंतराल में, $x\ln|x| - x$ अवकलनीय है। साथ ही,

$$\frac{d}{dx}(x\ln|x| - x) = \ln|x| + x\frac{1}{x} - 1 = \ln|x| \text{ है।}$$

0 को अंतर्विष्ट न करने वाले $\mathbb{R}$ के प्रत्येक उपअंतराल में, फलन $\ln|x|$ संतत है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि 0 को अंतर्विष्ट न करने वाले किसी भी अंतराल में, $\ln|x|$ का प्रति-अवकलज $x\ln|x| - x$ है।

E6) i) यहाँ, $F(x) = \int_0^{\sqrt{t}} \left(t^2 + 1\right) dt, f(t) = \left(1 + t^2\right)$ है। हम $v = \sqrt{x}$ स्थापित करते हैं। $\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dv}(F(v))\frac{dv}{dx} = f(v)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$ है।

ii) यहाँ, $F(x) = \int_1^{\tan x} \left(1 + t^2\right) dt, f(t) = \left(1 + t^2\right)$ हम $v = \tan x$ प्रतिस्थापित करते हैं।

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dv}(F(v))\frac{dv}{dx} = f(v)\sec^2 x \quad \text{है।}$$
$$= \left(1 + \tan^2 x\right)\sec^2 x = \sec^4 x$$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

आइए $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{1+t^2}$, $F_1(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ और $F_2(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ लिखें।

हम प्राप्त करते हैं: $\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}\left(F_1(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(F_2(x)\right)$

$$= f(x)\frac{d}{dx}(x) - f\left(\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

E7) हमें प्राप्त है $F'(x) = F'(x)$ अतः $F \equiv F$ और संबंध स्वतुल्य है। यदि $F \equiv G$ हमें प्राप्त है $F'(x) = G'(x)$, $G'(x) = F'(x)$ अतः $G'(x) = F'(x)$ यानि और संबंध सममित है। यदि $G \equiv F$ अतः $F \equiv G$ यानि $F'(x) = G'(x)$ और $G'(x) = H'(x)$, $F'(x) = H'(x)$ $F \equiv H$ इसलिए संक्रामक है। अतः तुलयता संबंध है।

E8) 1. जब $n \neq -1$ है, जब हम

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\{(n+1)x^{n+1-1}\} = x^n.$$

प्राप्त करते हैं।

2. हम $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ प्राप्त करते हैं।

3. हम $\frac{d}{dx}(-\cos x) = -\frac{d}{dx}(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x$. प्राप्त करते हैं।

4. हम $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ प्राप्त करते हैं।

6. हम $\frac{d}{dx}(\ln|\sin x|) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \cot x$. प्राप्त करते हैं।

8. हम

$$\frac{d}{dx}(\ln|\operatorname{cosec} x - \cot x|)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{cosec} x - \cot x}\left(-\operatorname{cosec} x \cot x + \operatorname{cosec}^2 x\right) = \operatorname{cosec} x$$ प्राप्त करते हैं।

9. हम $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ प्राप्त करते हैं।

9. हम $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ प्राप्त करते हैं। इकाई 9 देखिए।

10. हम

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(2x)\right)$$ प्राप्त करते हैं।

11. इकाई 11 के समान $= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

12. हम $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ प्राप्त करते हैं। इकाई 9 देखिए।

13. हम $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ प्राप्त करते हैं। इकाई 9 देखिए।

E9) i) सारणी 1 की प्रथम प्रविष्टि का उपयोग करने पर, हम

$$\int x^4\, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1}\, dx = \frac{x^5}{5} + C$$ प्राप्त करते हैं।

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\, dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{1}{x^7}\, dx = \int x^{-7}\, dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} = -\frac{1}{6x^6}$$

iv) समीकरण 29 का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \left(x^6 + 3x^4 - 2x^2\right) dx = \int x^6\, dx + 3\int x^4\, dx - 2\int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^7}{7} + 3\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + C$$

v) $$\int \frac{(x-1)^4}{x^2}\, dx = \int \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{x^2}\, dx$$

$$= \int \left(x^2 - 4x + 6 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 6x - 4\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

E10) i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int (4\cos x + 3\tan x)\, dx = 4\int \cos x\, dx + 3\int \tan x\, dx$$

$$= 4\sin x + \ln|\sec x| + C$$

ii) हम प्राप्त करते हैं

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$ इसलिए $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C.$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{9 + 12\cos x + 4\cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx = 9\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + 12\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx + 4\int \cot^2 x\, dx$$

$$= -9\cot x - 12\operatorname{cosec} x + 4\int \left(\operatorname{cosec}^2 x - 1\right) dx$$

$$= -9\cot x - 12\operatorname{cosec} x - 4\cot x - 4x + C$$

$$= -13\cot x - 12\operatorname{cosec} x - 4x + C$$

इकाई 18

समाकलन की विधियां

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

18.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हम देख चुके हैं कि निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध चिह्नित क्षेत्रफल होता है। कलन की मूलभूत प्रमेय हमें ऐसे समाकल का मान निकालने की एक सरल विधि प्रदान करती है, जिसमें पहले दिए हुए फलन का प्रतिअवकलज (antiderivative) ज्ञात किया जाता है जबकि उसका अस्तित्व हो।

इस इकाई से प्रारंभ करते हुए हम समाकलन की विभिन्न विधियों और तकनीकों का अध्ययन करेंगे। इस इकाई में हम **भाग 18.2** और **भाग 18.3** में प्रतिस्थापन की विधि तथा खंडशः समाकलन (भागों द्वारा समाकलन) (integration by parts) पर विचार

करेंगे। भाग 18.4 में हम परिमेय फलनों को समाकलित करने के लिए, आंशिक भिन्नों की विधि की चर्चा करेंगे। भाग 18.5 में हम परिमेय त्रिकोणमितीय फलनों के समाकलन के लिए विभिन्न विधियों को देखेंगे। भाग 18.6 में हम अपरिमेय फलनों के समाकलन पर विचार करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आपः

- कुछ समाकलों को सरल करने तथा उनके मान निकालने में प्रतिस्थापन की विधि का उपयोग कर पाएँगे।
- जब भी संभव होगा, दो फलनों के गुणनफल को खंडशः समाकलन द्वारा (भागों द्वारा) समाकलित कर पाएँगे।
- जब भी संभव होगा, एक परिमेय फलन को आंशिक भिन्नों तथा फलन के प्रसार का उपयोग करते हुए समाकलित कर पाएँगे।
- जब भी संभव होगा, परिमेय त्रिकोणमितीय फलनों को समाकलित कर पाएँगे।
- जब भी संभव होगा, अपरिमेय फलनों को समाकलित कर पाएँगे।

18.2 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन

आप पहले ही देख चुके हैं कि किस प्रकार कुछ प्रतिस्थापनों की सहायता से अवकलजों को ज्ञात करने का कार्य सरल हो सकता है। इस भाग में, हम देखेंगे कि समाकलन में प्रतिस्थापन की विधि किस प्रकार सहायता करती है। अवकल कैलकुलस के विपरीत, जहाँ प्रतिस्थापन की एक सीमित भूमिका थी, हम देखेंगे कि यह समाकलन की तकनीकों में से समान्यतः सबसे अधिक उपयोग की जाने वाली विधि है। हम इसके अनुप्रयोग को अनेक उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

आगे बढ़ने से पहले, हम पुनः वही दोहराते हैं जो हमने पिछली इकाईयों में कहा था। अनिश्चित समाकलों के बारे में जो हम परिणाम सिद्ध करेंगे, उनमें न तो हम अंतरालों के बारे कुछ बताएँगे और न ही यह जाँच करेंगे कि संबद्ध फलन उस अंतराल में समाकलता के प्रतिबंधों को स्पष्ट करता है या नहीं।

18.2.1 प्रतिस्थापन की विधि

हम इस उपभाग का प्रारंभ एक प्रमेय से करते हैं, जो प्रतिस्थापन की विधि को मेरूदंड प्रदान करती है।

प्रमेय 1: मान लीजिए कि $u(x)$ का अंतराल $[c, d]$ में एक संतत अवकलज है तथा $u([c, d]) = [a, b]$ है। साथ ही यह भी मान लीजिए कि $[a, b]$ पर $f(x)$ संतत है तथा $[a, b]$ में f का एक प्रतिअवकलज $F(x)$ है। तब, हमें अंतराल $[c, d]$ में प्राप्त है :

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C \quad \dots (1)$$

साथ ही,

$$\int_c^d f[u(x)]u'(x)\,dx = \int_{u(c)}^{u(d)} f(v)\,dv \qquad ...(2)$$

उपपत्तिः हम इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए, अवकलजों के शृंखला नियम (इकाई 9) का प्रयोग करेंगे। क्योंकि f का प्रतिअवकलज F है,

इसलिए हम $\frac{dF(u)}{du} = f(u)$ लिख सकते हैं। अब,

$$\frac{d}{dx}F[u(x)] = \frac{dF[u(x)]}{du(x)}.\frac{du(x)}{dx} \text{ शृंखला नियम द्वारा}$$

$$= f[u(x)].\frac{du(x)}{dx}$$

$$= f[u(x)].u'(x)$$

इससे यह प्रदर्शित होता है कि $f[u(x)]u'(x)$ का प्रतिअवकलज $F[u(x)]$ है।

इसका अर्थ है कि $\int f[u(x)]u'(x)\,dx = F[u(x)] + C$ है।

समीकरण (1) को लिखने की एक अन्य विधि हैः

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du, \qquad ...(3)$$

जहाँ $u = u(x)$ है। हम समीकरण (3) का निर्वचन इस अर्थ में कर सकते हैं कि $f(u)\frac{du}{dx}$ के अनिश्चित समाकल को $f(u)$ के अनिश्चित समाकल में u को $u = u(x)$ से प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 1: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिएः

i) $\int (2x+1)^9\,dx$ ii) $\int \sin 2x\,dx$ iii) $\int \frac{2x}{(x^2+1)^5}\,dx$ iv) $\int x\sqrt{3x+1}\,dx$

हलः i) हम इकाई 17 में दी अनिश्चित समाकलों की सारणी को देखते हैं। हम पाते हैं कि इस सारणी में $(2x+1)^n$ नहीं आ रहा है, परंतु इस सारणी में x^n का समाकल दिया हुआ है। इसलिए, प्रतिस्थापन $u(x) = 2x+1$ उपयुक्त प्रतीत होता है। तब, हम $\frac{d}{dx}(u) = 2$ प्राप्त करते हैं। अतः, $u(x) = 2x+1$ द्वारा,

$$\int (2x+1)^9\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^9\,2dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x+1)^9}_{u^9}\,\underbrace{2}_{\frac{du}{dx}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u^9\,du = \frac{1}{2}\int u^9\,du$$

हम प्राप्त करते हैंः

$$\int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + C$$

$u = u(x) = 2x+1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\int (2x+1)^9\,dx = \frac{(2x+1)^{10}}{10} + C$$

ii) हम $u(x) = 2x$ स्थापित करते हैं। तब, $\frac{du}{dx} = 2$ है। इसलिए,

$$\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, 2dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\sin 2x}_{\sin u} \underbrace{2}_{\frac{du}{dx}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{\cos u}{2} + C$$

$u = u(x) = 2x$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin 2x\, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

iii) हम $u(x) = x^2 + 1$ स्थापित करते हैं। तब, $\frac{du}{dx} = 2x$ है। हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^5}\, dx = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2+1)^5}}_{\frac{1}{u^5}} \underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}} dx$$

$$= \int \frac{1}{u^5}\, du = -\frac{1}{4u^4} + C$$

$u = u(x) = x^2 + 1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^5}\, dx = -\frac{1}{4(x^2+1)^4} + C$$

iv) प्रतिस्थापन $u(x) = 3x + 1$ उपयुक्त प्रतीत होता है। तब, $\frac{du}{dx} = 3$ है। हमें प्राप्त होता है:

$$\int x\sqrt{3x+1}\, dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{x}_{?} \underbrace{\sqrt{3x+1}}_{\sqrt{u}} \underbrace{3}_{\frac{du}{dx}} dx$$

हम लगभग सफल हो गए हैं। हमें केवल x को u के पदों में लिखने की आवश्यकता है। $u = 3x + 1$ से हम $x = \frac{u-1}{3}$ प्राप्त करते हैं। इसलिए,

$$\int x\sqrt{3x+1}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{u-1}{3}\sqrt{u}\, du = \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{9}\left(\int u^{\frac{3}{2}}\, du - \int u^{\frac{1}{2}}\, du\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{3}}}{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$u = 3x + 1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x\sqrt{3x+1}\, dx = \frac{2}{9}\left(\frac{(3x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + C$$

***

हम निम्नलिखित दो स्थितियों का विशेष रूप से उल्लेख करना चाहेंगे, जो प्रमेय 1 से निष्कर्ष रूप में प्राप्त होते हैं।

स्थिति i) यदि $f(u) = u^n$, $n \neq -1$ और $u = u(x)$ है, तो $f(u(x))u'(x) = (u(x))^n u'(x)$ है।

तब, इकाई 17 में, x^n के अनिश्चित समाकल के लिए दिए सूत्र द्वारा, हम $F(u) = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ प्राप्त करते हैं,

$$\text{इसलिए, } \int [u(x)]^n u'(x)\,dx = F(u(x)) + C = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + C \qquad \ldots (4)$$

स्थिति ii) यदि $f(u) = \frac{1}{u}$ और $u = u(x)$ है, तो इकाई 17 में दी सारणी 1 के सूत्र द्वारा हम $F(u) = \ln|u|$ प्राप्त करते हैं। इसलिए,

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = F(u(x)) + C = \ln|u(x)| + C \qquad \ldots (5)$$

आगे आने वाले उदाहरणों से आप देखेंगे कि ये दोनों स्थितियाँ बहुत उपयोगी हैं।

उदाहरण 2: $(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5$ का समाकलन कीजिए।

हलः इसके लिए, हम देखते हैं कि $\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right) = 2x+1$ है। इस प्रकार, $\int (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5 dx$, $\int [u(x)]^n u'(x)\,dx$ के रूप का है, जहाँ $u(x) = x^2+x+1$ है। इसलिए, हम समीकरण (4) का प्रयोग करके मान निकाल सकते हैं। अतः,

$$\int (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5 dx = \frac{1}{6}\left(x^2+x+1\right)^6 + C \text{ है।}$$

वैकल्पिक रूप से, हम $u = x^2+x+1$ स्थापित करते हैं। तब, $du = (2x+1)\,dx$ है। dx के लिए, हल करने पर, हम $dx = \frac{du}{2x+1}$ प्राप्त करते हैं। (नीचे देखिए।)

$$\int (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5 dx = \int (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5 \frac{du}{2x+1}$$

$$= \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + C$$

$u = x^2+x+1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$\int (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5 dx = \frac{(x^2+x+1)^6}{6} + C \text{ प्राप्त करते हैं।}$$

***

ध्यान दीजिए कि हमने पिछले उदाहरण में 'अवकल संकेतन' का प्रयोग किया है। यह नियमित रूप से प्रतिस्थापन करने में आपकी सहायता करेगा। यद्यपि, $\frac{du}{dx}$ एक भिन्न नहीं है, फिर भी हम dx के लिए हल करने को आगे दर्शाए अनुसार न्यायसंगत बता सकते हैं: मान लिजिए कि हम प्रतिस्थापन $u = u(x)$ द्वारा $\int h(x)\,dx$ को समाकलित करना चाहते हैं: तब dx के लिए $\frac{du}{dx} = u'(x)$ को हल करने का तात्पर्य है कि dx को $\frac{du}{u'(x)}$ द्वारा प्रतिस्थापित करना तथा

$$\text{इसलिए } \int h(x)\,dx = \int h(x)\frac{du}{u'(x)} \qquad \ldots (6)$$

सही है। मान लीजिए कि $f(u)$ इस प्रकार है कि $\frac{h(x)}{u'(x)} = f(u(x))$ है। तब, हम कह रहे हैं कि $h(x) = f(u)u'(x) = f(u(x))u'(x)$ है तथा हम समीकरण (6) को पुनः $\int f(u'(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ के रूप में लिख सकते हैं।

यह मूलतः समीकरण (3) ही है।

उदाहरण 3: $\int (ax+b)^n dx$ का मान निकालिए।

हल: हम $u = (ax+b)$ प्रतिस्थापित करते हैं। हमें $du = a\,dx$ प्राप्त होता है।

इसलिए, $\int \underbrace{(ax+b)^n}_{u^n} dx = \int u^n \frac{du}{a}$

$$= \frac{1}{a}\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \text{ यदि } n \neq -1 \text{ है।}$$

यदि $n = -1$,

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{a}\ln|u| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

***

उदाहरण 4: निश्चित समाकल $\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$ का मान निकालिए।

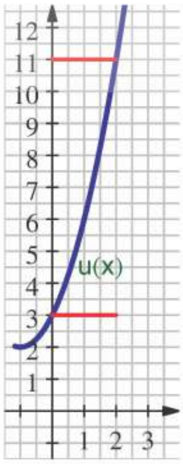
हल: समीकरण (2) से तुलना करने पर, यहाँ $c = 0$ और $d = 2$ है। हम $x^2 + 2x + 3 = u(x) = u$ रखते हैं। ध्यान दीजिए कि $u(x)$ एक बहुपद है। इसलिए वास्तविक रेखा पर प्रत्येक बिंदु पर इसका एक संतत अवकलज है। जब $x = 0$ है, तब $u(x) = 3$ है तथा जब $x = 2$ है, तब $u(x) = 11$ है। साथ ही, क्योंकि $(0, 2)$ में $u'(x) > 0$ है, इसलिए $[0, 2]$ में $u(x)$ वर्धमान है। अतः, $u([0, 2]) = [3, 11]$ है। इसलिए, $a = 3$ और $b = 11$ है (आकृति 1 देखिए)। हम पाते हैं कि $[3, 11]$ पर $f(u) = \frac{1}{u}$ संतत है, f का एक प्रतिअवकलज $F(u) = \ln|u|$ है तथा

$u'(x) = 2(x+1)$ है। इस प्रकार,

$$\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \underbrace{\frac{1}{x^2+2x+3}}_{f(u)=\frac{1}{u}} \underbrace{2(x+1)}_{u'(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 f(u(x))u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(c)}^{u(d)} f(u)\,du \quad \text{समीकरण (2) से}$$

$$= \frac{1}{2}\int_3^{11} \frac{1}{u} du$$



अकृति 1: $u(x) = x^2 + 2x + 3$ **का परिसर**

क्योंकि $[3, 11]$ में $u \neq 0$ है, इसलिए u का $\frac{1}{u}$ एक संतत फलन है तथा $\frac{1}{u}$ का $F(u) = \ln|u|$ एक प्रतिअवकलज है। अतः,

$\frac{1}{2}\int_3^{11} \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}(F(11) - F(3))$ कलन की मूलभूत प्रमेय द्वारा

इसलिए, $\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2}\int_3^{11} \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}(\ln 11 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{3}$ है

इसके लिए एक अन्य विधि यह है कि $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ का अनिश्चित समाकल ज्ञात किया जाए तथा समाकल अवकलन की मूलभूत प्रमेय का उपयोग किया जाए। ध्यान दीजिए कि समीकरण $x^2 + 2x + 3 = 0$ का विविक्तकर (discriminant) ऋणात्मक, अर्थात् $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$ है। इसलिए इस समीकरण के वास्तविक मूल नहीं हैं, अर्थात् $\mathbb{R}$ पर $x^2 + 2x + 3 \neq 0$ है। अतः, $\mathbb{R}$ पर f संतत है। हम $u(x) = x^2 + 2x + 3$ स्थापित करते हैं। तब, $du = 2(x+1)\,dx$ है। इसलिए, $dx = \frac{du}{2(x+1)} dx$ है। हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{x+1}{u} \frac{du}{2(x+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| + C$$

इसलिए, $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|$ फलन $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ का एक प्रतिअवकलज है।

स्मरण कीजिए कि $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ होता है, यदि $[a, b]$ पर f संतत है तथा f का एक प्रतिअवकलज F है।

इसलिए

$$\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|\Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|2^2+2\cdot 2+3\right| - \frac{1}{2}\ln\left|0^2+0\cdot 2+3\right|$$
$$= \frac{1}{2}\ln|11| - \frac{1}{2}\ln|3| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{11}{3}\right| \text{ है।}$$

***

उदाहरण 5: समाकल $\int xe^{2x^2} dx$ का मान निकालिए।

हलः हम $u = 2x^2$ प्रतिस्थापित करते हैं। तब, $du = 4x\,dx$ है। हमें

$\int xe^{2x^2} dx = \int e^u x \frac{du}{4x} = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{2x^2} + C$ प्राप्त होता है।

***

इस भाग में चर्चा किए गए नियमों के आधार पर, आप इस प्रश्न को हल कर पाएँगे।

E1) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sqrt{5x-3}\,dx$ ii) $\int (2x+1)^6 dx$ iii) $\int_1^3 \frac{dx}{4+5x} dx$

iv) $\int \frac{5}{10x+7} dx$ v) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+7} dx$ vi) $\int_2^3 \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x-8} dx$

vii) $\int x^{1/3}\sqrt{x^{4/3}-1}\,dx$ viii) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}} dx$

अब हम त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध कुछ समाकलों को समाकलित करने के लिए, प्रतिस्थापन की विधि का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 6: निम्नलिखित के मान निकालिए:

i) $\int \sin(ax+b)\,dx$ ii) $\int \cot(ax+b)\,dx$ iii) $\int \tan(ax+b)\,dx$ iv) $\int \cos\left(x^2\right) x\,dx$

हल: क) हम उसी प्रकार कार्य करेंगे जैसा हमने उदाहरण 1 में $\int \sin 2x\,dx$ के लिए किया था। हम $u = ax+b$ प्रतिस्थापित करते हैं। इससे $du = a\,dx$ प्राप्त होता है। इस प्रकार,

$$\int \sin(ax+b)\,dx = \int \sin u \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \sin u\,du$$
$$= -\frac{1}{a}\cos u + C = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$$

ii) हम $u = ax+b$ प्रतिस्थापित करते हैं। तब, $du = a\,dx$ है।

$\int \cot(ax+b)\,du = \int \cot u \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \cot u\,du = \frac{1}{a}\int \frac{\cos u}{\sin u}\,du$ यहाँ युक्ति यह है कि इस ओर ध्यान दिया जाए कि अंश हर का अवकलज है तथा यहाँ समीकरण (5) का अनुप्रयोग हो सकता है। इसलिए, इस स्थिति में समाकल

$\frac{1}{a}\ln|\sin u| + C = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + C$ है।

iii) हम $u = ax+b$ प्रतिस्थापित करते हैं। तब, $du = a\,dx$ है। इसलिए,

$\int \tan(ax+b)\,dx = \int \frac{\sin u}{\cos u}\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \frac{\sin u}{\cos u}\,du$ है।

सारणी 1: अनिश्चित समाकलों की सारणी

No.	f(x)	$\int f(x)\,dx$
1.	$(ax+b)^n$, $n \neq -1$,	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
2.	$\frac{1}{(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + C$
3.	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
4.	$\cos(ax+b)$	
5.	$\tan(ax+b)$	$\frac{1}{a}\ln\|\sec(ax+b)\| + C$
6.	$\cot(ax+b)$	$\frac{1}{a}\ln\|\sin(ax+b)\| + C$
7.	$\sec(ax+b)$	
8.	$\text{cosec}(ax+b)$	
9.	e^{ax+b}	

हमें $\frac{d}{du}\cos u = -\sin u$ प्राप्त है। यहाँ, अंश लगभग हर का अवकलज ही है, केवल चिह्न के अंतर को छोड़ते हुए। इसलिए हम लिखते हैं:

$$\frac{1}{a}\int \frac{\sin u}{\cos u}\,du = -\frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos u}(-\sin u)\,du \text{ (याद कीजिए कि } -\ln|x| = \ln\left|\tfrac{1}{x}\right| \text{ है)}$$

अब, हम समीकरण (5) का अनुप्रयोग कर सकते हैं:

$$\frac{1}{a}\int \frac{\sin u}{\cos u}\,du = -\frac{1}{a}\int \frac{-\sin u}{\cos u}\,du = -\frac{1}{a}\ln|\cos u| + C = \frac{1}{a}\ln|\sec u| + C$$
$$= \frac{1}{a}\ln|\sec(ax+b)| + C$$

iv) हम $u = x^2$ प्रतिस्थापित करते हैं। तब, $du = 2x\,dx$ है। इसलिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x\cos\left(x^2\right)dx = \int x\cos u\frac{du}{2x}$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + C$$

***

अब तक की चर्चा की समझ की जाँच करने के लिए नीचे दिए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E2) सारणी 1 में रिक्त स्थानों को भरिए।

E3) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot 2x\,\text{cosec}^2\,2x\,dx$ ii) ii) $\int \sin 2\theta\, e^{\cos 2\theta}\,d\theta$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(1+\cos^4\theta\right)d\theta$ iv) $\int (1+\cos\theta)^4\sin\theta\,d\theta$

v) $\int \frac{\sec^2\theta}{(1-5\tan\theta)^3}\,d\theta$ vi) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\tan\theta(1+\sec\theta)^3\,d\theta$

18.2.2 त्रिकोणमितीय सूत्रों के उपयोग से समाकल

अब हम देखेंगे कि समाकलों के मान निकालने के लिए किस प्रकार त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का उपयोग किया जाता है। हमें निम्नलिखित त्रिकोणमितीय सूत्रों की आवश्यकता होगी, जो आपने अपने उच्चतर माध्यमिक गणित कोर्स में अध्ययन किए थे।

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \ldots(7)$$
$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \qquad \ldots(8)$$
$$\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta \qquad \ldots(9)$$
$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B)) \qquad \ldots(10)$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)) \qquad \ldots(11)$$
$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)) \qquad \ldots(12)$$

यहाँ एक उदाहरण है, जो आपको यह दर्शाता है कि इनमें से कुछ सूत्रों का किस प्रकार अनुप्रयोग किया जाता है

उदाहरण 7: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sin 3x \cos 4x \, dx$ ii) $\int \sin 4x \sin 7x \, dx$ iii) $\int \cos 4x \cos 6x \, dx$

iv) $\int \cos 3x \cos 4x \sin 6x \, dx$

हल: क) समीकरण (10) से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\sin 3x \cos 4x = \frac{1}{2}(\sin(3x+4x) + \sin(3x-4x))$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin(-x)) = \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin x)$$

इसलिए, $\int \sin 3x \cos 4x \, dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin x) \, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x\right)$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

ख) समीकरण (12) द्वारा हम प्राप्त करते हैं:

$$\sin 4x \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos(4x-7x) - \cos(4x+7x)) = \frac{1}{2}(\cos(-3x) + \cos 11x)$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 11x)$$

इसलिए हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin 4x \sin 7x \, dx = \int \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 11x) \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{11}\sin 11x\right)$$
$$= \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{22}\sin 11x + C$$

ग) समीकरण (12) से हम प्राप्त करते हैं:

$$\cos 4x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos(4x+6x) + \cos(4x-6x)) = \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos(-2x))$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 2x)$$

इसलिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \cos 4x \cos 6x \, dx = \int \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\sin 10x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$
$$= \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

घ) हमें प्राप्त है:

$\cos 3x \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos x)$ समीकरण (11) के उपयोग से

इसलिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\cos 3x \cos 4x \sin 6x = \frac{1}{2}(\cos 7x \sin 6x + \cos x \sin 6x)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\sin(6x+7x) + \sin(6x-7x)\right.$$

$$+\frac{1}{2}(\sin(6x+x)+\sin(6x-x))\Big\}$$
$$=\frac{1}{4}(\sin 13x+\sin 7x+\sin 5x-\sin x)$$

इसलिए, $\int \cos 3x \cos 4x \sin 6x\, dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{13}\cos 13x - \frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{5}\sin 5x + \cos x\right)$

$$= -\frac{1}{52}\cos 13x - \frac{1}{28}\cos 7x$$
$$-\frac{1}{20}\cos 5x + \frac{1}{4}\cos x + C$$

***

अब हम देखेंगे कि $\sin x$ और $\cos x$ की घातों को किस प्रकार समाकलित किया जाता है। समीकरण (7) का प्रयोग करके, हम लिख सकते हैं:

$$\int \sin^{2n+1} x\, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^n \sin x\, dx \quad \ldots (13)$$

और $\int \cos^{2n+1} x\, dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^n \cos x\, dx \quad \ldots (14)$

समीकरण (13) के समाकल का मान निकालने के लिए, हम $u = \cos x$ प्रतिस्थापित करते हैं। समीकरण (13) का समाकल $-\int (1-u^2)^n\, du$ हो जाता है। हम $(1-u^2)^n$ को द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए प्रसारित करते हैं तथा उसके पदानुसार समाकलित करते हैं। समीकरण (14) की स्थिति में, प्रतिस्थापन $u = \sin x$ हमें $\int (1-u^2)^n\, du$ प्राप्त हो जाता है।

ध्यान दीजिए कि हम इसी प्रकार $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ के रूप के समाकलों के मान निकाल सकते हैं, यदि m या n में से एक विषम है। यदि m विषम है, तो हम प्रतिस्थापन $u = \cos x$ का प्रयोग करते हैं। यदि n विषम है, तो हम प्रतिस्थापन $u = \sin x$ का प्रयोग करते हैं।

अब हम एक ऐसे उदाहरण पर दृष्टि डालते हैं जो उन सभी विधिओं को स्पष्ट करता है, जिनकी चर्चा हम ऊपर कर चुके हैं।

उदाहरण 8: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sin^5 x\, dx$ ii) $\int \cos^7 x\, dx$ iii) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$ iv) $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$

v) $\int \cos^2 x\, dx$ vi) $\int \sin^4 x\, dx$

हल: i) हमें प्राप्त है:

$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \sin x\, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\, dx$, समीकरण (7) के प्रयोग से

हम $u = \cos x$ स्थापित करते हैं। तब, $du = -\sin x\, dx$ है। अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^5 x\, dx = -\int \left(1-u^2\right)^2 du = -\int \left(1-2u^2+u^4\right) du$$
$$= -u + 2\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

ii) हम समीकरण (7) का प्रयोग करके दिए हुए समाकल को इस रूप में लिखते हैं:

$$\int \cos^7 x\,dx = \int \cos^6 x \cos x\,dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^3 \cos x\,dx$$

अब, हम $v = \sin x$ स्थापित करते हैं। तब, $dv = \cos x\,dx$ है। अतः हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \cos^7 x\,dx = \int \left(1-v^2\right)^3 dv$$

$$= \int \left(1-3v^2+3v^4-v^6\right) dv = v - v^3 + 3\frac{v^5}{5} - \frac{v^7}{7} + C$$

$$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\sin^2 x \cos^3 x = \sin^2 x \left(1-\sin^2 x\right) \cos x$$

इसलिए, $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) \cos x\,dx$

हम $u = \sin x$ स्थापित करते हैं। तब, $du = \cos x\,dx$ है। अतः,

$$\int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) \cos x\,dx = \int \left(u^2 - u^4\right) du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

iv) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right) \cos^4 x \sin x\,dx$$

हम $u = \cos x$ स्थापित करते हैं। तब, $du = -\sin x\,dx$ है। अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \left(1-\cos^2 x\right) \cos^4 x \sin x\,dx = -\int \left(u^4 - u^6\right) du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

v) हमें $\cos 2x = 2\cos^2 x + 1$ प्राप्त है। (समीकरण (11) में $A = B = x$ रखिए)। इसलिए, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ है।

अतः, $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x\,dx\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$$

***

टिप्पणी 1: हम अगली इकाई में देखेंगे कि समानयन सूत्रों (reduction formulae) का उपयोग करते हुए, $\sin x$ और $\cos x$ की सम या विषम घातों का समाकलन किस प्रकार किया जाता है। परंतु $\sin x$ और $\cos x$ की विषम घातों के समाकलन के लिए, प्रतिस्थापन विधि एक तीव्र (कम समय लेने वाली) विधि है।

इस उदाहरण के बारे में अपनी समझ के जाँच करने के लिए, यहाँ आपके लिए कुछ प्रश्न हैं।

E4) मान निकालिए:

i) $\int \sin^7 x\,dx$ ii) $\int \cos^5 x\,dx$ iii) $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

iv) $\int \sin 5x \cos 3x\,dx$ v) $\int \cos 3x \cos 4x\,dx$ vi) $\int \sin 4x \sin 3x\,dx$

vii) $\int \sin 2x \sin 3x \sin 5x\,dx$

$\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ या a^2+x^2 से संबद्ध व्यंजकों को समाकलित करने के लिए, सामान्यतः एक त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन का प्रयोग किया जाता है। हम सारणी 2 में प्रतिस्थापनों के लिए सुझाव दे रहे हैं।

सारणी 2: त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन

संबद्ध व्यंजक	प्रतिस्थापन
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$
a^2+x^2	$x = a\tan\theta$

अब, हम फलनों $\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ और $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ के समाकलन के लिए सूत्र, सारणी 2 तथा समीकरण (7), समीकरण (8), और समीकरण (9) का प्रयोग करते हुए, निगमित करेंगे।

साध्य 1: हमें प्राप्त है:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \ldots(15)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \ldots(16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C \qquad \ldots(17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C \qquad \ldots(18)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \ldots(19)$$

उपपत्ति: यदि हम $x = a\sin\theta$ रखें, तो हमें $dx = a\cos\theta d\theta$ प्राप्त होता है।

साथ ही, $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2\theta\right)} = a\cos\theta$ है।

अतः हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C$$

$x = a\sin\theta$ से, हम $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ प्राप्त करते हैं। इसलिए,

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ जिससे समीकरण (17) सिद्ध हो जाती है।

आइए अब समीकरण (18) को सिद्ध करें। सारणी 2 से, हम जानते हैं कि हमें

$x = a\tan\theta$ प्रतिस्थापित करने की आवश्यकता है। इससे हमें $x = a\sec^2\theta\, d\theta$ प्राप्त होता है। हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\left(1+\tan^2\theta\right)}d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$

क्योंकि $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ है।

$$\therefore \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C$$
$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

आइए अब समीकरण (19) को सिद्ध करें। $x = a\tan\theta$ स्थापित करने पर, हम $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$ प्राप्त करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{\left(a^2+a^2\tan^2\theta\right)}}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a\sqrt{1+\tan^2\theta}}d\theta$$
$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \qquad \ldots(20)$$

हमें प्राप्त है:

$$\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

साथ ही, $\tan\theta = \left(\frac{x}{a}\right)$ है।

$$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$$

इसलिए, समीकरण (20) से हम

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C$ प्राप्त करते हैं।

समीकरण (18) और समीकरण (19), हम आपके अभ्यास के लिए छोड़ रहे हैं। अब हम अगले उदाहरण में साध्य 1 के कुछ सरल अनुप्रयोगों को देखते हैं।

उदाहरण 9: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ii) $\int \frac{dx}{9+x^2}$ iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}}$ iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$ v) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

हल: i) हमें प्राप्त है:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}$$

उपरोक्त समीकरण की RHS में $a = 2$ के साथ समीकरण (17) के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

ii) हमें प्राप्त है:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{3^2+x^2}$$

उपरोक्त समीकरण की RHS में $a = 3$ के साथ समीकरण (16) के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

iii) हमें प्राप्त है:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2+x^2}}$$

समीकरण (17) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{25+x^2}}{5}\right| + C$$

iv) हमें प्राप्त है:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}-x^2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(\sqrt{2}x) + C$$

v) हमें प्राप्त है:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}}\right|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right| + C$$

***

यहाँ कुछ प्रश्न हैं, जो उपरोक्त उदाहरण में की गई चर्चा के बारे में आपकी समझ की जाँच में आपकी सहायता करेंगे।

E5) हमने $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ के समाकल का मान प्रतिस्थापन $x = a\sin\theta$ का प्रयोग करते हुए निकाला था। इसी समाकल का मान प्रतिस्थापन $x = a\cos\theta$ का प्रयोग करते हुए निकालिए। आप को उत्तर $-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ प्राप्त होगा। परंतु जब हमने

प्रतिस्थापन $x = a\sin\theta$ का प्रयोग किया था, तब हमने उत्तर $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ प्राप्त किया था। आप उत्तरों के इस अंतर को किस प्रकार स्पष्ट करेंगे।

E6) समीकरण (20) और समीकरण (21) के परिणामों को सिद्ध कीजिए।

E7) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$ ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x^2}}$ iii) $\int \frac{dx}{x^2+5}$ iv) $\int \frac{dx}{3x^2+1}$

v) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$ vi) $\frac{dx}{\sqrt{1+5x^2}}$ vii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$ viii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$ x) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$

अभी हम अपने प्रतिस्थापन की चर्चा को यहीं समाप्त कर रहे हैं तथा एक अन्य विधि, जो खंडशः समाकलन (भागों द्वारा समाकलन) कहलाती है, पर अगले भाग में चर्चा करेंगे। परंतु अभी तक हमारी प्रतिस्थापन विधि पूरी नहीं हुई है। इस इकाई के बाद वाले भागों में इस विधि पर पुनः वापस आएँगे।

18.3 खंडशः समाकलन

इस भाग में, हम $\int u(x)v(x)\,dx$ के प्रकार के समाकलों के मान निकालने की विधि की खोज करेंगे, जिनमें समाकल्य (Integrand) $u(x)v(x)$ दो फलनों का एक गुणनफल है। दूसरे शब्दों में, हम पहले

$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x)$ के संगत समाकल की खोज करेंगे तथा फिर इस परिणाम का कुछ मानक समाकलों के मान निकालने में उपयोग करेंगे।

18.3.1 दो फलनों के गुणनफल के समाकल

हम दो फलनों के गुणनफल का अवकलज सूत्र

$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x)$ द्वारा परिकलित कर सकते हैं। आइए इसे पुनः इस रूप में लिखें:

$$u(x)\frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - v(x)\frac{d}{dx}u(x)$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int u(x)\frac{d}{dx}(v(x))dx = \int \frac{d}{dx}(u(x)v(x))dx - \int v(x)\frac{d}{dx}(u(x))dx$$

$$\text{या} \quad \int u(x)\frac{d}{dx}(v(x))dx = u(x)v(x) - \int v(x)\frac{d}{dx}(u(x))dx \qquad \ldots (21)$$

इसे एक अधिक सममित रूप में व्यक्त करने के लिए, हम $u(x)$ को $f(x)$ द्वारा

प्रतिस्थापित करते हैं तथा $\frac{d}{dx}v(x) = g(x)$ रखते हैं। इसका अर्थ $v(x) = \int g(x)dx$ है। इस प्रतिस्थापन के फलस्वरूप, समीकरण (23) का रूप

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x)dx - \int\left\{f'(x)\int g(x)dx\right\}dx \text{ हो जाता है।}$$

उपरोक्त सूत्र को निम्नलिखित रूप में पढा जा सकता है:

दो फलनों के गुणनफल का समाकल = पहला गुणक x दूसरे गुणक का समाकल
(पहले गुणक का अवकलज x दुसरे गुणक का समाकल)

यह **भागों द्वारा समाकलन के लिए** सूत्र कहलाता है। यह सूत्र आपको थोड़ा जटिल प्रतीत होता है। परंतु इस विधि की सफलता पहले गुणक (factor) को इस प्रकार चुनने पर निर्भर करती है कि दाएँ पक्ष में दूसरे पद का मान सरलता से निकल आए। यह भी आवश्यक है कि दूसरा गुणक इस प्रकार चुना जाए कि उसे सरलता से समाकलित किया जा सके।

निम्नलिखित उदाहरण आपको बहुत प्रकार के समाकलों को दर्शाएँगे, जिनके इस तकनीक द्वारा मान निकाले जा सकते हैं। आपको प्रत्येक उदाहरण में हमारे द्वारा चुने गए पहले और दूसरे फलनों का सावधानीपूर्वक अध्ययन करना चाहिए। आप फलनों के क्रम को उलट कर भी समाकलों के मान निकालने का प्रयास कर सकते हैं। इससे आप अनुभव करेंगे कि हमने क्यों इन फलनों को इस क्रम में चुना।

उदाहरण 10: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \ln|x|\,dx$ ii) $\int xe^x\,dx$ iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$ iv) $\int x\ln|x|\,dx$

हलः क) हम $\int \ln x\,dx$ का मान $\ln x$ को पहला गुणक तथा 1 को दूसरा गुणक लेकर निकाल सकते हैं। इस प्रकार,

$$\int \ln x\,dx = \int (\ln x)\,(1)\,dx$$

$$= \ln x\int 1dx - \int\left(\frac{1}{x}\int 1dx\right)dx$$

$$= (\ln x)(x) - \int \frac{1}{x}(x)\,dx$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

ख) समाकल्य xe^x में हम x को पहला गुणक तथा e^x को दूसरा गुणक चुनते हैं। इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int xe^x dx = x\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\right\}dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

ग) हम x^2 को पहला गुणक लेंगे तथा $\cos x$ को दूसरा गुणक लेंगे। आइए सर्वप्रथम

संगत अनिश्चित समाकल का मान निकालें।

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \int \cos x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \int \cos x\, dx \right\} dx$$
$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx$$
$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx$$

हम $\int x \sin x\, dx$ का मान निकालने के लिए, पुनः भागों द्वारा समाकलन का उपयोग करेंगे। हमें प्राप्त होता है:

$$\int x \sin x\, dx = x(-\cos x) - \int (1)(-\cos x) dx \ (f(x) = x \text{ और } g(x) = \sin x) \text{ है।}$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

अतः, $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

अब, ध्यान दीजिए कि हमने स्वेच्छिक अचर 2C के स्थान पर केवल C लिखा है। अब,

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx = (x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ है।}$$

घ) यहाँ हम $\ln|x|$ को पहला गुणक लेते हैं, क्योंकि इसको सरलता से अवकलित किया जा सकता है, परंतु सरलता से समाकलित नहीं किया जा सकता है। हम x को दूसरा गुणक लेंगे।

$$\int x \ln|x|\, dx = \int (\ln|x|)x\, dx = \left(\ln|x| \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{4}x^2 + C$$

***

यह देखने के लिए कि आपने उपरोक्त उदाहरण को समझ लिया है, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए। आप भागों द्वारा समाकल की विधि का प्रयोग करके, निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर पाएँगे।

E8) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int x^2 \ln|x|\, dx$ $(f(x) = \ln|x|$ और $g(x) = x^2$ लीजिए।)

ii) $\int (1+x)e^x dx$ $(f(x) = 1 + x$ और $g(x) = e^x$ लीजिए।)

iii) $\int \left(1+x^2\right) e^x dx$

iv) $\int x^2 \sin x \cos x\, dx$ $(f(x) = x^2$ और $g(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x)$ लीजिए।)

E9) 1 को दूसरा गुणक लेते हुए, निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sin^{-1} x\,dx$ ii) $\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$ iii) $\int \cot^{-1} x\,dx$

E10) x के सापेक्ष $x \ln\left|(1+x^2)\right|$ को समाकलित कीजिए।

18.3.2 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ और $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ के मान निकालना

$\int e^{ax}\sin bx\,dx$ और $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ के मान निकलने के लिए, हम भागों द्वारा समाकलन वाले सूत्रों का उपयोग करते हैं।

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = (e^{ax})\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right) - \int (ae^{ax})\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)dx$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left[(e^{ax})\left(\frac{1}{b}\sin bx\right) - \int\left(e^{ax}\frac{a}{b}\sin bx\right)dx\right]$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

आपने यह देख लिया होगा कि दाएँ पक्ष में अंतिम समाकल वही है, जो बाएँ पक्ष में है। अब हम दाएँ पक्ष के इस तीसरे पद (अंतिम समाकल) को बाएँ पक्ष में स्थानांतरित करते हैं तथा प्राप्त करते हैं:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{a}{b^2}\sin bx - \frac{1}{b}\cos bx\right)$$

इसका अर्थ है कि $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$ है।

हम अभ्यास के तौर पर आपके लिए

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

दर्शाने के लिए छोड़ रहे हैं।

यदि हम $a = r\cos\theta$ और $b = r\sin\theta$ लिखें, तो ये सूत्र

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}\sin(bx-\theta) + C \qquad \ldots(22)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}\cos(bx-\theta) + C \qquad \ldots(23)$$

के रूप में बदल जाते हैं।

यहाँ एक उदाहरण, जो आपके यह समझने में सहायक होगा कि समीकरण (22) और समीकरण (23) का अनुप्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 11: (22) और (23) का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int e^x \sin x\,dx$ ii) $\int e^x \cos\sqrt{3}x\,dx$ iii) $\int e^{-x}\cos x\,dx$

हलः (i) आइए a = 1 और b = 1 के साथ, समीकरण (22) का अनुप्रयोग करें। तब, $a^2 + b^2 = 2$ है। साथ ही, $a^2 + b^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2$ या $r = \sqrt{2}$ है।

इसलिए, $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ है। अतः, यह निष्कर्ष निकलता है कि $\theta = \frac{\pi}{4}$ है। इसलिए, समीकरण (22) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$$

ii) आइए a = 1 और $b = \sqrt{3}$ के साथ, समीकरण (23) का अनुप्रयोग करें। तब, पहले की ही तरह, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4} = 2$ है। साथ ही, $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ और $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है। इसलिए, $\theta = \frac{\pi}{3}$ है। अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^x \cos\sqrt{3}x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cos\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{3}\right) + C$$

iii) यहाँ, $a = -1$ और $b = 1$ है। इसलिए, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ है। क्योंकि $\sin\theta$ धनात्मक तथा $\cos\theta$ ऋणात्मक है, इसलिए θ दूसरे चतुर्थांश में है। हम $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ लेते हैं। अतः हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{-x} \cos bx \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + C$$

***

यहाँ आपके प्रयास के लिए, कुछ प्रश्न हैं।

E11) निम्नलिखित के मान निकालिए:

i) $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$ ii) $\int e^{4x} \sin 3x \, dx$ iii) $\int e^{-4x} \cos 4x \, dx$

आइए कुछ अन्य उदाहरणों को देखें, जो भागों द्वारा समाकलन की विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 12: $\int e^{2x} \sin x \cos 2x \, dx$ का मान निकालिए।

हलः हम सर्वप्रथम $\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$ लिखेंगे, जैसा कि भाग 18.2 में किया था। अतः,

$$\int e^{2x} \sin x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin 3x \, dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x \, dx$$

अब, दाएँ पक्ष के दोनों समाकलों के मान निकाले जा सकते हैं। हम देखते हैं कि

$$\int e^{2x} \sin 3x \, dx = \frac{1}{\sqrt{13}} e^{2x} \sin\left(3x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) + C$$

और $\int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{2x} \sin\left(x - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right) + C'$ है।

अतः

$$\int e^{2x} \sin x \cos 2x \, dx = \frac{e^{2x}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{13}} \sin\left(3x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(x - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right] + C$$

उदाहरण 13: $\int x^3 \sin(a\ln x)dx$ का मान निकालिए।

हल: मान लीजिए कि $\ln x = u$ है। इसका अर्थ है कि $x = e^u$ और $du/dx = 1/x$ है। तब,

$$\int x^3 \sin(a\ln x)\,dx = \int x^4 \sin(a\ln x)\,(1/x)\,dx$$

$$= \int e^{4u} \sin au\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{16+a^2}} e^{4u} \sin(au - \tan^{-1}(a/4)) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{16+a^2}} x^4 \sin\left(a\ln x - \tan^{-1}\frac{a}{4}\right) + C$$

***

हम पहले ही देख चुके हैं कि $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ और $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ के प्रकारों के समाकलों के मान किस प्रकार निकाले जाते हैं। अगले भाग में, हम देखेंगे कि किस प्रकार हम इस तकनीक को भागों द्वारा समाकलन के साथ संयोजित कर सकते हैं तथा फिर इन्हें $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ और $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx$ के रूप में समाकलों को निकालने में उपयोग कर सकते हैं। परंतु इससे पहले कि हम इस विषय की ओर चलें, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास करके जाँच कर लीजिए कि आपने भागों द्वारा समाकलन की तकनीक को समझ लिया है या नहीं।

E12) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int e^{4x} \cos x \cos 2x\, dx$ ii) $\int e^{2x} \cos^2 x\, dx$ iii) $\int xe^{ax} \sin bx\, dx$

18.3.3 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$ और $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ के मान निकालना

इस भाग में, हम देखेंगे कि हम $\sqrt{a^2 - x^2}dx$, $\int \sqrt{a^2 + x^2}dx$ और $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$ जैसे समाकलों के मान भागों द्वारा समाकलन वाले सूत्र तथा साध्य 1 की सहायता से निकाल सकते हैं।

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - x^2}(1)\,dx$$

$$= \sqrt{a^2 - x^2} \times x - \int \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \times x \right) dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

दाएँ पक्ष के अंतिम पद को बाएँ पक्ष में स्थानांतरित करने पर, हम

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$ प्राप्त करते हैं।

सूत्र $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{... (24)}$$

हम आपके अभ्यास के लिए, यह छोड़ रहे हैं कि आप

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right| + C \qquad \text{... (25)}$$

और $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C \qquad \text{... (26)}$$

को सिद्ध करें।

आइए अब कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 14 : निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ ii) $\int \sqrt{25+x^2}\,dx$ iii) $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$

हल: i) हम समाकल को इस रूप $\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{2^2-x^2}\,dx$ में लिखते हैं तथा $a = 2$ के साथ समीकरण (24) का अनुप्रयोग करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2^2-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{2^2-x^2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2} + C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

ii) हम $a = 5$ के साथ समीकरण (25) का अनुप्रयोग करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{25+x^2}\,dx &= \int \sqrt{5^2+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{25+x^2} + \frac{25}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+5^2}}{5}\right| + C\end{aligned}$$

iii) हम $a = 3$ के साथ, समीकरण (24) का प्रयोग करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-9}\,dx &= \int \sqrt{x^2-3^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + C\end{aligned}$$

***

आइए अब एक ऐसे स्पष्ट उदाहरण को देखते हैं; जिसमें अभी तक हमने जितने समाकल्य देखे थे उनसे एक अधिक समाकल्य संबद्ध हैं।

उदाहरण 15: समाकल $\int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$ का मान निकालिए।

हल: हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$$

$$= \int \frac{x(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{(a^2-x^2)-a^2+ax}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} - a\sqrt{a^2-x^2} + C$$

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास करके जाँच कीजिए कि आप अभी तक इस उपभाग में की गई चर्चा को समझ पाए हैं या नही।

E13) सिद्ध कीजिए:

i) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a} + C$

ii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C$

E14) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$ ii) $\int \sqrt{1-5x^2}\,dx$ iii) $\int \sqrt{x^2+7}\,dx$ iv) $\int \sqrt{1+5x^2}\,dx$

v) $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ vi) $\int \sqrt{9x^2-1}\,dx$ vii) $\int x\sin^{-1}x\,dx$

अगले उपभाग में, हम एक अन्य प्रकार के समाकल्य पर विचार करेंगे, जो गणित में अनेक बार प्रकट होता रहता है।

18.4 परिमेय फलनों का समाकलन

यदि आप खंड 3 का परिशिष्ट 2 का अध्ययन कर चुके हैं, तो आप यह पहले से ही जानते होंगे कि एक परिमेय फलन क्या होता है। आप यह भी जानते हैं कि हम एक उचित परिमेय फलन को सरल परिमेय फलनों के योग के रूप में विभक्त कर सकते हैं। हम इस ज्ञान का परिमेय फलनों को समाकलित करने के लिए उपयोग करेंगे।

हम $\frac{1}{(x-b)^k}$ और $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ के रूप के कुछ सरल प्रकार के उचित परिमेय फलनों पर विचार करते हुए प्रारंभ करेंगे। बाद में, हम इस तथ्य का उपयोग करेंगे कि किसी भी उचित परिमेय फलन को सरल प्रकार के फलनों के योग के रूप में लिखा जा सकता है। तथा इसे व्यापक परिमेय फलनों को समाकलित करने में उपयोग किया जा सकता है। हम इकाई 18 से पहले से ही जानते हैं कि $\frac{1}{ax+b}$ के प्रकार के फलन को किस प्रकार समाकलित किया जाता है इसलिए, आइए देखें कि $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ के प्रकार के फलनों को किस प्रकार समाकलित किया जाए।

$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ के रूप के फलनों के समाकलन को लेने से पहले, हम अगले उदाहरण में इस प्रकार की एक विशिष्ट स्थिति को लेते हैं। बाद में, हम देखेंगे कि यह विशिष्ट स्थिति व्यापक स्थिति के समाकलन के लिए बहुत उपयोगी रहती है।

उदाहरण 16: $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ का मान निकालिए।

हल: हमें $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$ प्राप्त है। इसलिए, हम लिखते हैं:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{\alpha}{x - a} + \frac{\beta}{x + a} \qquad \text{... (27)}$$

उपरोक्त समीकरण के दोनों पक्षों को $x^2 - a^2$ से गुणा करने पर, हम $1 = \alpha(x + a) + \beta(x - a)$ प्राप्त करते हैं।

$x = a$ रखने पर, हम $1 = 2\alpha a$ या $\alpha = \frac{1}{2a}$ प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार, $x = -a$ रखने पर, हम $1 = -2\beta a$ या $\beta = -\frac{1}{2a}$ प्राप्त करते हैं। अतः हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{\frac{1}{2a}}{x - a} - \frac{\frac{1}{2a}}{x + a}$$

इसलिए,
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx &= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x + a} \\ &= \frac{1}{2a}\ln|x - a| - \frac{1}{2a}\ln|x + a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C\end{aligned}$$

आइए संदर्भ के लिए इस अंतिम परिणाम के एक संख्या निर्दिष्ट करें। तब,

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C \qquad \text{... (28)}$$

***

अब हम देखेंगे कि $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ के रूप के परिमेय फलनों को किस प्रकार समाकलित करते हैं। सर्वप्रथम, हम अंश $Ax + B$ को $p(2ax + b) + q$ के रूप में लिखते हैं। हम $Ax + B = p(2ax + b) + q$ स्थापित करते हैं तथा p और q के लिए हल करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx + p\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\, dx + q\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{... (29)}$$

समीकरण (31) के दाएँ पक्ष में पहला समाकल $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ के रूप का है,

जहाँ $f(x) = ax^2 + bx + c$ है। इसलिए,

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\, dx = \ln\left|ax^2 + bx + c\right| + C \text{ है।}$$

आइए, अब दूसरे समाकल पर विचार करें। घ्यान दीजिए कि हम $ax^2 + bx + c$ को $a\left(x^2 + \alpha^2\right)$ या $a\left(x^2 - \beta^2\right)$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ $\alpha > 0, \beta > 0$ है। अधिक परिशुद्ध रूप में,

$$ax^2+bx+c=\begin{cases} a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right\}, \text{ यदि } b^2 \le 4ac \text{ है} \\ a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}, \text{ यदि } b^2 > 4ac \text{ है} \end{cases} \quad \ldots (30)$$

इसलिए, $u = x+\frac{b}{2a}$ प्रतिस्थापित करने पर, हम समीकरण (31) के दूसरे समाकल को

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{u^2+\alpha^2}$$

या $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{u^2-\beta^2}$ के रूप में लिख सकते हैं।

समीकरण (16) से, हम जानते हैं कि $\int \frac{dx}{a^2+x^2}dx$ को किस प्रकार समाकलित किया जाता है। समीकरण (28) से, हम जानते हैं कि $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ को किस प्रकार समाकलित किया जाता है। इसलिए, हम $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ के रूप के किसी भी फलन को समाकलित कर सकते हैं।

उदाहरण 17 : फलन $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+5}$ को समाकलित कीजिए।

हलः जैसा कि हमने पहले चर्चा की थी, हम
$2x+3 = p(2x-4)+q = 2px+(q-4p)$ लिखते हैं।

दोनों पक्षों पर x के गुणांकों की तुलना करने पर, हम $p=1$ प्राप्त करते हैं। दोनों पक्षों के अचर पदों की तुलना करने पर, हम $q-4p=3$ प्राप्त करते हैं। $p=1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम $q=7$ प्राप्त करते हैं। इसलिए, हम
$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+5}dx$ को

$$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + \int \frac{7}{x^2-4x+5}dx$$ के रूप में लिख सकते हैं।

जैसे कि हमने अपनी पहली चर्चा में देखा था, पहला समाकल $\frac{f'(x)}{f(x)}$ के रूप का है तथा हम जानते हैं कि $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$ होता है।

इस प्रकार, $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx = \ln|x^2-4x+5| + C_1$ है।

दूसरे समाकल का मान निकालने के लिए, हम लिखते हैं;

$$\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{1}{(x^2-4x+4)+1}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx$$

अब, यदि हम $x-2=u$ रखें, तो

$$\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \tan^{-1}u + C_2$$
$$= \tan^{-1}(x-2)+C_2 \text{ है।}$$

इसका अर्थ है कि $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+5}dx = \ln|x^2-4x+5| + 7\tan^{-1}(x-2)+C$ है।

***

आइए अब एक ऐसे उदाहरण को देखें, जहाँ समीकरण (28) उपयोगी है।

उदाहरण 18 : $\int \frac{2x+1}{x^2+8x+1}\,dx$ का मान निकालिए।

हल: हमें $\frac{d}{dx}\left(x^2+8x+1\right) = 2x+8$ प्राप्त है। हम $2x+1 = 2x+8-7$ लिख सकते हैं। इसलिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+8x+1}\,dx = \int \frac{2x+8}{x^2+8x+1}\,dx - 7\int \frac{dx}{x^2+8x+1}$$

पहले समाकल $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ के रूप का है, जिसमें $f(x) = x^2+8x+1$ है।

इसलिए $\int \frac{2x+8}{x^2+8x+1}\,dx = \ln\left|x^2+8x+1\right| + C_1$ है।

अब, हम दूसरे समाकल का मान निकालते हैं।

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+1}\,dx = \int \frac{dx}{(x+4)^2-\left(\sqrt{15}\right)^2} \text{ है।}$$

$u = x+4$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+1} = \int \frac{du}{u^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{15}}{u+\sqrt{15}}\right| + C_2, \text{ समीकरण (28) के प्रयोग से}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+4-\sqrt{15}}{x+4+\sqrt{15}}\right| + C_2$$

इसलिए, $\int \frac{2x+1}{x^2+8x+1}\,dx = \ln\left|x^2+8x+1\right| - \frac{7}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+4-\sqrt{15}}{x+4+\sqrt{15}}\right| + C$

***

आइए अब कुछ और उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 19: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{3x+5}{x^2+7x+10}\,dx$ ii) $\int \frac{4x+1}{3x^2+4x+1}\,dx$

हल: i) हमें $\frac{d}{dx}\left(x^2+7x+5\right) = 2x+7$ प्राप्त है। $3x+5 = p(2x+7)+q$ लिखने तथा p और q के लिए, हल करने पर, हम $p = \frac{3}{2}$, $7p+q=5$ या $q = 5-7p = 5-\frac{21}{2} = -\frac{11}{2}$ प्राप्त करते हैं।

अतः, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{3x+5}{x^2+7x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+7}{x^2+7x+10}\,dx - \frac{11}{2}\int \frac{dx}{x^2+7x+10}$$

पहले की ही तरह, $\int \frac{2x+7}{x^2+7x+10}\,dx = \ln\left|x^2+7x+10\right| + C$ है।

हमें यह भी प्राप्त होता है:

$$\int \frac{dx}{x^2+7x+10} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 + 10 - \frac{49}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$u = x + \frac{7}{2}$ प्रतिस्थापित करने तथा समीकरण (29) का प्रयोग करने पर, हम

$$\int \frac{dx}{x^2+7x+10} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C_2 = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right| + C_2$$ प्राप्त करते हैं

अतः, $\int \frac{3x+5}{x^2+7x+10}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+7x+10\right| - \frac{11}{6}\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right| + C$ है।

ii) हमें $\frac{d}{dx}\left(3x^2+4x+2\right) = 6x+4$ प्राप्त है। $4x+1 = p(6x+4)+q$ लिखने तथा p और q के लिए हल करने पर, हम $p = \frac{2}{3}, q = 1-4p = 1-\frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$ प्राप्त करते हैं। अतः, हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{4x+1}{3x^2+4x+1}dx = \frac{2}{3}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+1}dx - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{3x^2+4x+1}$$

हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+1}dx = \ln\left|3x^2+4x+1\right| + C_1$$

साथ ही, $$\int \frac{dx}{3x^2+4x+1} = \int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left\{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{4}{9}\right\}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}, \ u = x + \frac{2}{3}$$ प्रतिस्थापित करने पर

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-\frac{1}{3}}{u+\frac{1}{3}}\right| + C_2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{3}}{x+1}\right| + C_2$$

अतः, $$\int \frac{4x+1}{3x^2+4x+1}dx = \frac{2}{3}\ln\left|3x^2+4x+1\right| - \frac{5}{6}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{3}}{x+1}\right| + C$$

***

व्यापक परिमेय फलनों के समाकलन की चर्चा करने से पहले, आपके लिए यह लाभप्रद रहेगा कि निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास करके यह जाँच कर लें कि अभी तक की चर्चा को आपने कितना समझा है।

E15) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{dx}{2x-3}$ ii) $\int \frac{dt}{(t+5)^2}$ iii) $\int \frac{4x+1}{x^2+x+2}dx$ iv) $\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$ v) $\int \frac{3x+1}{x^2-6x+3}dx$

आइए अब आंशिक भिन्नों का उपयोग करते हुए, व्यापक परिमेय फलनों के समाकलन की चर्चा करें।

उदाहरण 20 $\int \frac{3x+1}{2x^3+3x^2-3x-2}dx$ का मान निकालिए।

हलः समाकल्य के हर के गुणनखंड $(2x+1)(x-1)(x+2)$ हैं।

आइए $\dfrac{3x+1}{2x^3+3x^2-3x-2} = \dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$ लिखें।

दोनों पक्षों को $2x^3+3x^2-3x-2$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$3x+1 = A(x-1)(x+2) + B(2x+1)(x+2) + C(2x+1)(x-1) \qquad \dots (31)$$

ध्यान दिजिए कि $-\frac{1}{2}, 2, -2$ बहुपद $2x^3+3x^2-3x-2$ के मूल हैं। हम उत्तरोत्तर $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$ और $x=-2$ रख कर, सरलता से A, B और C के लिए, हल कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि हम $x=-\frac{1}{2}$ रखें, तो समीकरण (31) के दाएँ पक्ष में, प्रथम पद को छोड़ कर, सभी पद लुप्त हो जाते हैं। हम $-\frac{3}{2}+1 = A(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}+2)$ प्राप्त करते हैं। अतः,

$$A = \frac{-\frac{3}{2}+1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right)} = \frac{2}{9} \text{ है।}$$

इसी प्रकार, हम $B = \frac{4}{9}$, $C = -\frac{5}{9}$ प्राप्त करते हैं। अतः हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{3x+1}{2x^3+3x^2-3x-2}dx = \frac{2}{9}\int \frac{dx}{2x+1} + \frac{4}{9}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{9}\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \frac{1}{9}\ln|2x+1| + \frac{4}{9}\ln|x-1| - \frac{5}{9}\ln|x+2| + C$$

***

आइए अब एक ऐसे उदाहरण को देखें, जहाँ हर में पुनरावर्ती रैखिक गुणनखंड आ रहे हैं।

उदाहरण 21: $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$ का मान निकालिए।

हलः समाकल्य के हर के गुणनखंड $(x-1)^2(x+2)$ हो जाते हैं। यहाँ x^3-3x+2 के गुणनखंडन में रैखिक गुणनखंड $(x-1)$ दो बार आ रहा है। ऐसी स्थिति में, हम $\dfrac{x}{x^3-3x+2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$ लिखते हैं।

यहाँ से आगे हम A, B और C ज्ञात करने के लिए, पहले की तरह कार्य करते हैं। उपरोक्त समीकरण के दोनों पक्षों को x^3-3x+2 से गुणा करने पर हल प्राप्त करते हैं:

$$x = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$

हम $x=1$ और $x=-2$ रख कर $C = 1/3$ और $A = -2/9$ प्राप्त करते हैं।

तब, B को ज्ञात करने के लिए, आइए कोई भी सुविधाजनक मान, मान लीजिए $x=0$ रखें। इससे हमें $0 = A - 2B + 2C$ या $0 = -\frac{2}{9} - 2B + \frac{2}{3}$ या $2B = \frac{4}{9}$ प्राप्त होता है। इसका अर्थ है कि $B = 2/9$ है। इस प्रकार,

$$\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx = \frac{-2}{9}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$
$$= \frac{-2}{9}\ln|x+2| + \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) + C$$
$$= \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + \frac{1}{3(x-1)} + C \text{ है।}$$

***

अपने अगले उदाहरण में, हम ऐसी स्थिति पर विचार करेंगे जब समाकल्य के हर में एक अखंडनीय द्विघात गुणनखंड है (अर्थात् ऐसा द्विघात गुणनखंड जिसके और रैखिक गुणनखंड नहीं किए जा सकते हैं)।

उदाहरण 22: $\int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} dx$ का मान निकालिए।

हलः हम $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$ के $x(x-2)(x^2+1)$ के रूप में गुणनखंड करते हैं तथा फिर $\frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ लिखते हैं।

इस प्रकार, $6x^3 - 11x^2 + 5x - 4 = A(x-2)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x-2)$ है।

आगे हम $x = 0$ और $x = 2$ प्रतिस्थापित करके $A = 2$ और $B = 1$ प्राप्त करते हैं। फिर, हम $x = 1$ और $x = -1$ रख कर (कुछ सुविधाजनक मान) $C = 3$ और $D = -1$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार,

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} dx &= 2\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{3x-1}{x^2+1} dx \\ &= 2\ln|x| + \ln|x-2| + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= 2\ln|x| + \ln|x-2| + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| - \tan^{-1} x + C\end{aligned}$$

इस प्रकार, आप देख सकते हैं कि जब एक बार हम अपने समाकल्य को, जो एक उचित परिमेय फलन है, आंशिक भिन्नों में विभक्त कर लें, तो दिए हुए समाकल को उदाहरणों 1, 2 और 3 के चर्चा किए गए प्रकार के कुछ समाकलों के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

***

अभी तक हमने जितने फलनों को समाकलित किया था वे सभी उचित परिमेय फलन थे। अब हम एक विषम (अनुचित) परिमेय फलन के एक उदाहरण को लेते हैं।

उदाहरण 23: $\int \frac{x^3+2x}{x^2-x+2} dx$ का मान निकालिए।

हलः क्योंकि समाकल्य एक विषम परिमेय फलन है, इसलिए हम पहले इसे एक बहुपद और उचित परिमेय फलन के योग के रूप में लिखेंगे।

इस प्रकार, $\frac{x^3 + 2x}{x^2 - x + 2} = x + 1 + \frac{x-2}{x^2 - x + 2}$

अतः,
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x + 2} dx &= \int x dx + \int dx + \int \frac{x-2}{x^2 - x + 2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x-2}{x^2 - x + 2} dx \text{ है।}\end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ पर बहुपद $x^2 - x + 2$ अखंडनीय है, क्योंकि इसके सम्मिश्र मूल हैं। इस बहुपद के C पर गुणनखंड करना संभव है तथा फिर इस फलन $\frac{x-2}{x^2-x+2}$ को सम्मिश्र गुणांकों वाली आंशिक भिन्नों में विभक्त किया जा सकता है। परंतु यह हमें सम्मिश्र-मान वाले फलनों पर पहुँचा देगा। एक वास्तविक चर वाले सम्मिश्र-मान फलनों के समाकलन अधिक कठिन नहीं हैं। क्योंकि हमने ऐसे फलनों के समाकलन की चर्चा नहीं की है, इसलिए

हम उदाहरण 17 उदाहरण 18 उदाहरण 19 में प्रयोग की गई विधियों द्वारा सम्मिश्र-मान फलनों को समाकलन को छोड़ रहे हैं।

हमें $\frac{d}{dx}(x^2 - x + 2) = 2x - 1$ प्राप्त है। $x - 2 = p(2x - 1) + q$ लिख कर तथा p और q के लिए हल करके, हम $p = \frac{1}{2}, q = -2 + p = -\frac{3}{2}$ प्राप्त करते हैं। अतः हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x^2-x+2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+2}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+2}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+2\right| - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+2\right| - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+2\right| - \frac{6}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{7}} + C\end{aligned}$$

अतः, $\int \frac{x^3+2x}{x^2-x+2}dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+2\right| - \frac{6}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{7}} + C$

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए। आप पाएँगे कि प्रत्येक समाकल्य अभी तक हमारे द्वारा लिए गए विभिन्न प्रकारों के समाकल्यों में से एक है।

E16) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{2}{x^2+2x}dx$ ii) $\int \frac{x}{x^2-2x-3}dx$

iii) $\int \frac{3x-13}{x^2+3x-10}dx$ iv) $\int \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)(x^2+x-6)}dx$

v) $\int \frac{3x^3}{x^2+x-2}dx$ vi) $\int \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx$

vii) $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2}dx$

18.4.1 प्रतिस्थापन की विधि

आंशिक भिन्नों में विभक्त करने की विधि, जिसका अध्ययन हमने पिछले उपभाग में किया है, का अनुप्रयोग सभी परिमेय फलनों में किया जा सकता है। हम यह इसलिए कह सकते हैं, क्योंकि बीजगणित की मूलभूत प्रमेय यह गारंटी देती है कि किसी भी बहुपद का रैखिक और द्विघात गुणनखंडों के रूप में गुणनखंडन किया जा सकता है। परंतु कभी-कभी एक बहुपद के गुणनखंडन की प्रक्रिया इतनी सरल नहीं होती है। ऐसी स्थितियों में यह एक अच्छा विचार होगा कि इसकी जाँच करें कि समाकल्य में प्रतिस्थापन की विधि का अनुप्रयोग किया जा सकता है या नहीं। अब हम दो उदाहरण देंगे जो यह दर्शाएँगे कि हम कभी-कभी एक दिए हुए परिमेय फलन को एक उपयुक्त प्रतिस्थापन की सहायता से किस प्रकार समाकलित कर सकते हैं।

उदाहरण 24: x के सापेक्ष $\frac{1}{x(x^5+1)}$ को समाकलित कीजिए।

हल: इसके लिए, हम लिखते हैं:

$$\int \frac{dx}{x(x^5+1)} = \int \frac{x^4 dx}{x^5(x^5+1)}$$

अब, आइए $x^5 = t$ लिखें। तब, $\frac{dt}{dx} = 5x^4$ है। अतः,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 dx}{x^5(x^5+1)} &= \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= \frac{1}{5}\int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right] dt \\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C \\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right| + C\end{aligned}$$

***

उदाहरण 25: x के सापेक्ष $\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$ को समाकलित कीजिए।

हल: $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx = \int \frac{(1-1/x^2)}{x^2+1+1/x^2} dx$, x^2 से भाग देने पर।

$$= \int \frac{(1-1/x^2)}{(x+1/x)^2 - 1} dx$$

$= \int \frac{dt}{t^2-1}$, यदि हम $t = x + \frac{1}{x}$ रखते हैं।

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + C\end{aligned}$$

***

उदाहरणों 24 और 25 में, आपने यह ध्यान दिया होगा कि समाकल्यों के हर सरलता से गुणनखंडनीय नहीं थे। प्रतिस्थापन की विधि ने एक सरल विकल्प प्रदान किया। देखिए कि क्या आप अब इस प्रश्न को हल कर पाते हैं।

E17) x के सापेक्ष निम्नलिखित फलनों को समाकलित कीजिए:

i) $\frac{x^2-1}{1+x^4}$ ii) $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$

इस भाग के प्रश्नों ने आपको परिमेय फलनों के समाकलन करने का पर्याप्त मात्रा में अभ्यास करा दिया होगा। अगले भाग में, हम परिमेय त्रिकोणमितीय फलनों की स्थिति को ले रहे हैं।

18.5 परिमेय त्रिकोणमितीय फलनों का समाकलन

आप जानते हैं कि दो चरों x और y वाला एक बहुपद

$P(x, y) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{p} a_{m,n}x^m y^n$, $a_{m,n} \in R$ के रूप का एक व्यंजक होता है।

इसके अनुसार, $\sin x$ और $\cos x$ में एक बहुपद

$P(\sin x, \cos x) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{p} a_{m,n}\sin^m x\cos^n x$, $a_{m,n} \in R$ के रूप का एक व्यंजक होता है।

एक व्यंजक, जो दो बहुपदों $P(\sin x, \cos x)$ और $Q(\sin x, \cos x)$ का अनुपात है, **$\sin x$ और $\cos x$** का **एक परिमेय फलन** कहलाता है। इस भाग में, हम $\sin x$ और $\cos x$ वाले कुछ सरल परिमेय फलनों के समाकलन की चर्चा करेंगे। सर्वप्रथम, हम इन फलनों को समाकलित करने की एक व्यापक विधि के बारे में बताएँगे। मान लीजिए कि $\sin x$ और $\cos x$ में $f(\sin x, \cos x)$ एक परिमेय फलन है। f के समाकलन का मान निकालने के लिए, पहला चरण है कि $\tan\frac{x}{2} = t$ का प्रतिस्थापन किया जाए।

इस प्रकार, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} = \frac{1+t^2}{2}$ है।

क्योंकि $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ है, तथा

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ है, इसलिए हम

$$\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int F(t)\, dt, \text{ प्राप्त करते हैं, जहाँ}$$

$F(t) = f\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}$, t का एक परिमेय फलन है। अब हम $F(t)$ को समाकलित करने के लिए, आंशिक भिन्नों में विभक्त करने की विधि का प्रयोग कर सकते हैं। तब, सैद्धांतिक रूप से, हम $\sin x$ और $\cos x$ वाले किसी भी परिमेय फलन का समाकलन कर सकते हैं। परंतु वास्तविक व्यवहार में हम पाते हैं कि परिमेय फलन प्रायः जटिल होता है तथा आंशिक भिन्नों की विधि का प्रयोग करना सुसंगत नहीं होता है। इस इकाई में, परंतु हम अपने को केवल कुछ सरल परिमेय फलनों तक ही सीमित रखेंगे।

उदाहरण 27: $\frac{1}{a+b\cos x}$ समाकलित कीजिए।

हल: अब,

$$a + b\cos x = a\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= (a+b)\cos^2\frac{x}{2} + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}$$

अतः, $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{(a+b)+(a-b)\tan^2 \frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{(a-b)\left[\frac{a+b}{a-b} + \tan^2 \frac{x}{2}\right]}$$

यदि हम $\tan \frac{x}{2} = t$ रखें, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = 2\int \frac{dt}{(a-b)\left(\frac{a+b}{a-b} + t^2\right)}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{\frac{a+b}{a-b} + t^2}$$

यदि $a > b > 0$ है, तो $\frac{a+b}{a-b} > 0$ है तथा हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1}\left(t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right) \qquad \ldots (34)$$

यदि $0 < a < b$ है, तो $\frac{a+b}{a-b} < 0$ है तथा

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2 - \left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\,t}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\,t}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\tan \frac{x}{2}}\right| \qquad \ldots (35)$$

***

उदाहरण 27: निम्नलिखित के मान निकालिए:

i) $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$ ii) $\int \frac{dx}{a+b\cos x + c\sin x}$

हलः i) हम प्रतिस्थापन $x = \frac{\pi}{2} + y$ का प्रयोग करते हैं। तब,

$$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \int \frac{dy}{a+b\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}$$

$= \int \frac{dy}{a+b\cos y}$, जो $\int \frac{dx}{a+\cos x}$ के रूप का है।

ii) हमें प्राप्त है: $b\cos x + c\sin x = \sqrt{b^2+c^2}\cos\left(x - \tan^{-1}\frac{b}{c}\right)$ इसलिए हम इस समाकल को $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ के रूप में बदल सकते हैं।

***

उदाहरण 28: $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ का मान निकालिए।

हल: हम लिखते हैं:

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} + \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec^4\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{t}dt + \int dt \left(\tan\frac{x}{2} = t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{t}dt + \int t\, dt\right] + \int dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|t| + \frac{t^2}{2}\right] + t + C$$

इस प्रकार, $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + C$ है।

***

अब, ठीक उदाहरण 26 और उदाहरण 27 की ही तरह कार्य करते हुए, आप इन प्रश्नों को कर सकते हैं।

E 18) x के सापेक्ष निम्नलिखित को समाकलित कीजिए:

i) $\frac{1}{4+5\cos x}$ ii) $\frac{\cos x}{2-\cos x}$

अब तक, आपने समाकलन की अनेक विभिन्न विधियाँ देखी हैं तथा उनका अनुप्रयोग किया है। इसमें महत्वपूर्ण बात एक दिए हुए फलन को समाकलित करने के लिए उपयुक्त विधि का चुनाव करने की है। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि हम आपको फलन $\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}$ को समाकलित करने के लिए कहते हैं। यह समझते हुए कि यह $\sin x$ और $\cos x$ में एक परिमेय फलन है, आप $\tan\frac{x}{2} = t$ रख सकते हैं तथा आगे बढ सकते हैं।

$$\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx = 4\int \frac{t(1-t^2)dt}{(1+t^2)\,(1+6t^2+t^4)}$$

अब, $1+6t^2+t^4 = (3+\sqrt{8}+t^2)\,(3-\sqrt{8}+t^2)$ है।

इस चरण द्वारा, आप अनुभव करेंगे कि यह कार्य बहुत कठिन होने जा रहा है। परंतु चिंता मत करिए। इसके लिए एक सरल विधि है।

$\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ में, यदि हम $1+\sin^2 x = t$ प्रतिस्थापित करें,

तो हम

$$\int \frac{\sin x\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C$$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, विधि का चुनाव करना बहुत महत्वपूर्ण है। अच्छा विकल्प चुनने में अभ्यास ही केवल आपकी सहायता कर सकता है। अब हम अपरिमेय फलनों को समाकलित करने के प्रयुक्त की जाने वाली कुछ तकनीकों को स्पष्ट करेंगे।

18.6 अपरिमेय फलनों के समाकलन

फलनों को समाकलित करने का कार्य अधिक कठिन हो जाता है, यदि दिया हुआ फलन एक अपरिमेय फलन हो। अर्थात् यह $\frac{P(x)}{Q(x)}$ के रूप का नहीं हो। इस भाग में, हम कुछ विशेष प्रकार के अपरिमेय फलनों के मान निकालने के लिए, कुछ युक्तियाँ बताएँगे। अधिकांशतः स्थितियों में, हम एक उपयुक्त प्रतिस्थापन के माध्यम से एक परिमेय फलन तक पहुँचने का प्रयास करेंगे। इस परिमेय फलन को हम पिछले भाग की तकनीकों का उपयोग करते हुए समाकलित कर सकते हैं।

I) उन फलनों का समाकलन जिनमें x की केवल भिन्नात्मक घातें अंतर्विष्ट हैं:

इस स्थिति में, हम $x = t^n$ रखते हैं जहाँ n, x की घातों के हरों का लघुत्म समावर्त्य (l.c.m.) है। यह प्रतिस्थापन उस फलन को t के एक परिमेय फलन में बदल देता है। निम्नलिखित उदाहरण को देखिए।

उदाहरण 30: $\int \frac{2x^{1/2}+3x^{1/3}}{1+x^{1/3}}dx$ का मान निकालिए।

हलः हम $x = t^6$ रखते हैं, क्योंकि 2 और 3 का l.c.m. 6 है। हम प्राप्त करते हैं

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^{1/2}+3x^{1/3}}{1+x^{1/3}}dx &= 6\int \frac{2t^3+3t^2}{1+t^2}t^5\, dt \\ &= 6\int \frac{2t^8+3t^7}{1+t^2}dt \\ &= 6\int \left[2t^6+3t^5-2t^4-3t^3+2t^2+3t-2-\frac{3t-2}{1+t^2}\right] dt \\ &= 6\left[\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{2}t^6-\frac{2}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t \right. \\ &\qquad \left. -\frac{3}{2}\ln(1+t^2)+2\tan^{-1}t\right]+C \\ &= \frac{12}{7}x^{7/6}+3x-\frac{12}{5}x^{5/6}-\frac{9}{2}x^{2/3}+4x^{1/2}+9x^{1/3}-12x^{1/6} \\ &\qquad -9\ln|1+x^{1/2}|+12\tan^{-1}x^{1/6}+C\end{aligned}$$

***

उदाहरण 29 की आपकी समझ की जाँच करने के लिए, यहाँ एक प्रश्न है।

E19) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$ को समाकलित कीजिए।

II) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ के प्रकार के समाकल

यहाँ हमें दो स्थितियों पर विचार करना होगाः (i) $a > 0$ और (ii) $a < 0$ प्रत्येक स्थिति में,

हम दिए हुए समाकल्य को ऐसे रूप में रखना चाहेंगे, जिसे हमें पहले ही कर चुके होंगे कि इसे कैसे समाकलित किया जाता है।

i) यदि $a > 0$ है, तो समीकरण (30) से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)}}$$

यदि हम $t = x + b/2a$ रखें, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)}}$$

यदि $b^2 > 4ac$ है, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2}} \quad \text{... (34)}$$

यदि $b^2 < 4ac$ है, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2}} \quad \text{... (35)}$$

हम प्रमेय 2 का उपयोग करते हुए, समीकरण (34) और समीकरण (35) के RHS के दोनों समाकलों का मान निकाल सकते हैं।

ii) $a < 0$: यदि हम $-a = d$ रखें, तो $d > 0$ है तथा हम लिख सकते हैं:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{d}\left\{\frac{4cd + b^2}{4d^2} - \left(x - \frac{b}{d}\right)^2\right\} \quad \text{... (36)}$$

यदि $4cd + b^2 < 0$ है, तो समीकरण (38) की RHS, x के सभी मानों के लिए ऋणात्मक होगी तथा $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ एक सम्मिश्र-मान फलन होगा। हमने ऐसे फलनों के साथ कार्य करने के लिए गणितीय संकल्पनाएँ विकसित नहीं की हैं। इसलिए, हम केवल स्थिति $4cd + b^2 \geq 0$ की ही चर्चा करेंगे। इस स्थिति में हम

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{b^2+4dc}}{2d}\right)^2 - \left(x - \frac{b}{d}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}}$$

प्राप्त करते हैं।

यदि हम $t = x - b/d$ प्रतिस्थापित करते हैं, तो पहले की तरह हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}},$$

जहाँ $\alpha = \frac{\sqrt{b^2+4dc}}{2d}$ है। यह पुनः मानक रूपों में से एक है।

आइए अब कुछ उदाहरणों को देखें, जो अभी तक की हमारी चर्चा को समझने में सहायक होंगे।

उदाहरण 31: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{1}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$ ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+1}}$

हल: क) वर्ग पूर्ण करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x^2+2x=(x+1)^2-1$$

इसलिए, $8-x^2-2x=8-(x+1)^2+1=9-(x+1)^2$ है। हम समाकल को पुनः

$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(x+1)^2}}$ रूप में लिख सकते हैं।

$u=x+1$ स्थापित करने पर, हम $du=dx$ प्राप्त करते हैं। इसलिए,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}=\int \frac{du}{\sqrt{3^2-u^2}}$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{u}{3}\right)+C=\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right)+C$$

ii) वर्ग पुर्ण करने पर, हम $x^2+4x=(x+2)^2-4$ प्राप्त करते हैं। इसलिए,
$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ है। हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}$$

$u=x+2$ स्थापित करने पर, हम $du=dx$ प्राप्त करते हैं। इसलिए,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|+C$$

$$=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$$

iii) हमें प्राप्त है:

$$2x^2+4x+1=2\left(x^2+2x+\frac{1}{2}\right)$$

हमें $x^2+2x=(x+1)^2-1$ प्राप्त है। इसलिए, $x^2+2x+\frac{1}{2}=(x+1)^2-\frac{1}{2}$ है। हम

$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$ प्राप्त करते हैं।

$u=x+1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{u^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{u^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+1}\right|+C$$

***

निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास करके, आप उपरोक्त उदाहरण की अपनी समझ की जाँच करना चाहेंगे।

E 20) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$ ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+3}}$ iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$

आइए अब अगले प्रकार के फलन की ओर चलें।

III) $\frac{(Ax+B)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ का समाकलन

हम $Ax+B$ को दो भागों में इस प्रकार विभक्त करते हैं कि पहला भाग ax^2+bx+c के अवकल गुणांक, अर्थात् $2ax+b$ का एक अचर गुणज हो तथा दूसरा भाग x से स्वतंत्र हो। इस प्रकार,

$Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}$ है तथा

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{(2aB-Ab)}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{(2aB-Ab)}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ है।}$$

अंतिम समाकल का मान निकालने की चर्चा II) में पहले ही हो चुकी है।

आइए एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 31: $\int \frac{2x+1}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$ का मान निकालिए।

हल: हमें $\frac{d}{dx}(8-2x-x^2) = -2-2x$ प्राप्त है। $2x+1 = A(-2x-2)+B$ लिखने तथा A और B के लिए हल करने पर, हम $A=-1$ और $B=-1$ प्राप्त करते हैं। अतः, हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx = -\int \frac{-2-2x}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$$

पहला समाकल $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ के रूप का है। इसलिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{-2-2x}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx = 2\sqrt{8-2x-x^2} + C_1$$

उदाहरण 30 से हमें प्राप्त है:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C_2$$

इसलिए, $\int \frac{2x+1}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx = -2\sqrt{8-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$ है।

***

उदाहरण 33: $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$ का मान निकालिए।

हलः हम देखते हैं कि $x+2=\frac{1}{2}(2x+2)+1$ है तथा लिखते हैं:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$
$$= \sqrt{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}}$$
$$= \sqrt{x^2+2x+3} + \ln\left|\frac{x+1+\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{2}}\right| + C$$

***

यहाँ आपके लिए एक प्रश्न है।

E21) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+4x+1}}dx$ ii) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{3x^2-4x+3}}dx$ iii) $\int \frac{x+2}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx$

IV) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ का समाकलनः

इसकी विधि उसी प्रकार की है जिसका हमने $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. के रूप के समाकलों के मान निकालने में किया था। यदि $a>0$ है, तो हम इन समाकलों को $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ या $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx$ के रूप में लिख सकते हैं तथा समीकरण (24), समीकरण (25) और समीकरण (26) का उपयोग कर सकते हैं। पहले की तरह यदि
$a<0$ है, तो हम इस समाकल को केवल तभी निकाल सकते हैं, जब $b^2>4ac$ है।

इस विधि को स्पष्ट करने के लिए, यहाँ एक उदाहरण है।

उदाहरण 33: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sqrt{8-2x-x^2}\,dx$ ii) $\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$ iii) $\int_0^1 \sqrt{x+x^2}\,dx$

हलः i) हमें प्राप्त है:

$$\int \sqrt{8-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{3^2-(x+1)^2}\,dx$$

$u=x+1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sqrt{8-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{3^2-u^2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}u\sqrt{3^2-u^2} + \frac{3^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{3} + C \quad \text{समीकरण (26) से}$$
$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{8-2x-x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$$

ii) हमें प्राप्त है:

$$\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx$$

$u = x + 1$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 2}\, dx = \int \sqrt{u^2 + 1}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + 1}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2}\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C$$

iii) अब, $\int_0^1 \sqrt{x + x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\, dx$

मान लीजिए कि $x + \frac{1}{2} = u$ है। तब,

$$\int_0^1 \sqrt{x + x^2}\, dx = \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}}\, du$$
$$= \left[\left\{\frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{8}\ln \frac{u + \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}}\right\}\right]_{1/2}^{3/2}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8}\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

***

यहाँ आपके अभ्यास के लिए कुछ प्रश्न हैं।

E23) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sqrt{3x^2 + 4x + 1}\, dx$ ii) $\int \sqrt{3x^2 - 4x + 3}\, dx$ iii) $\int \sqrt{5 - 2x - x^2}\, dx$

V) $\frac{1}{(fx+e)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ का समाकलन

$fx + e = \frac{1}{y}$ या $y = \frac{1}{fx+e}$ प्रतिस्थापित करने पर, हम $dy = -\frac{f}{(fx+e)^2}dx = -fy^2dx$ या $dx = -\frac{dy}{fy^2}$ प्राप्त करते हैं।

$h(x) = ax^2 + bx + c$ मान कर, हम $h(x) = A(fx + e)^2 + B(fx + e) + C$ लिखते हैं। हमें $C = h\left(-\frac{e}{f}\right), fB = h'\left(-\frac{e}{f}\right), 2f^2A = h''\left(-\frac{e}{f}\right)$ प्राप्त होता है। अतः, हम A, B और C ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$ax^2 + bx + c = \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y} + C = \frac{A + By + Cy^2}{y^2}$ है।

अतः, हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{1}{(fx + e)\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx = \int \frac{-\frac{dy}{fy^2}}{\frac{1}{y}\frac{\sqrt{A+By+Cy^2}}{y}} = -\frac{1}{f}\int \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2}}$$

आपको याद होगा कि हम उदाहरण 30 की समीकरण में पहले ही देख चुके हैं कि उपरोक्त अंतिम समाकल का मान किस प्रकार निकाला जाता है।

हम एक उदाहरण द्वारा इस विधि को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 34: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}$ का मान निकालिए।

हल: आइए $x+1=1/y$ रखें। तब $\frac{-1}{y^2}\frac{dy}{dx}=1$ है।

अब, हम x^2+4x+2 को y के पदों में व्यक्त करेंगे।
$h(x)=x^2+4x+1=A(x+1)^2+B(x+1)+C$ मान कर, हम $-1=h(-1)=C$ प्राप्त करते हैं; $2=h'(-1)=B$, $2=h''(-1)=A$ है। अतः हम प्राप्त करते हैं:

$$x^2+4x+2=(x+1)^2+2(x+1)-1$$
$$=\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}-1=\frac{1+2y-y^2}{y^2}$$

अतः, $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}=\int \frac{\frac{-1}{y^2}dy}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1+2y-y^2}{y^2}}}$$
$$=-\int \frac{dy}{\sqrt{1+2y-y^2}}$$
$$=-\int \frac{dy}{\sqrt{2-(y-1)^2}}=\cos^{-1}\left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)+C$$
$$=\cos^{-1}\left[\frac{-x}{(x+1)\sqrt{2}}\right]+C$$

***

आपके लिए उपरोक्त उदाहरण की अपनी समझ की जाँच करने के लिए, यहाँ एक प्रश्न है।

E23) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{8+2x-x^2}}$ ii) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+6x+10}}$

आइए अब अगले प्रकार की ओर चलें।

VI) $(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}$ का समाकलन

हम $Ax+B$ को उसी प्रकार विभक्त करते हैं, जैसा कि IV) में किया था तथा

$$\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$
$$=\frac{A}{2a}\int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx+\frac{B2a-Ab}{2a}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$
$$=\frac{A}{3a}(ax^2+bx+c)^{3/2}+\frac{2aB-Ab}{2a}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$ प्राप्त करते हैं।

हम भाग IV) में, पहले ही देख चुके हैं कि दाएँ पक्ष के समाकल का मान किस प्रकार निकाला जाता है।

आइए अब कुछ उदाहरण हल करने के लिए, इन विधियों का उपयोग करें।

उदाहरण 35: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int (2x+1)\sqrt{8-2x-x^2}\,dx$ ii) $\int (x+2)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

हल: i) हमें $\frac{d}{dx}\left(8-2x-x^2\right) = -2x-2$ और $2x+1 = -(-2x-2)-1$ प्राप्त है। अतः,

$$\int (2x+1)\sqrt{8-2x-x^2}\,dx = -\int (-2x-2)\sqrt{8-2x-x^2}\,dx - \int \sqrt{8-2x-x^2}\,dx \text{ है।}$$

पहला समाकल $\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx$ के रूप का है। इसलिए, $u = f(x)$ प्रतिस्थापित करने पर, यह $\int \sqrt{u}\,du$ हो जाता है। अतः,

$$\int (-2x-2)\sqrt{8-2x-x^2}\,dx = \frac{2}{3}\left(8-2x-x^2\right)^{3/2} + C_1 \text{ है।}$$

उदाहरण 34 से, हम जानते हैं कि

$$\int \sqrt{8-2x-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{8-2x-x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C_2 \text{ है।}$$

अतः, $$\int (2x+1)\sqrt{8-2x-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\left(8-2x-x^2\right)^{3/2} - \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{8-2x-x^2} - \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C \text{ है।}$$

ii) हमें $\frac{d}{dx}\left(x^2+2x+2\right) = 2x+2$ प्राप्त है। साथ ही, $x+2 = \frac{1}{2}(2x+2)+1$ है।

अतः $$\begin{aligned}\int (x+2)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int (2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx + \int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2+2x+2\right)^{3/2} + \int \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2+2x+2\right)^{3/2} + \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C\end{aligned}$$

***

यहाँ आपके अभ्यास के लिए, एक प्रश्न है।

E24) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int (2x-1)\sqrt{3x^2+4x+1}\,dx$ ii) $\int (x-3)\sqrt{5-2x-x^2}\,dx$

E25) x के सापेक्ष निम्नलिखित को समाकलित कीजिए:

i) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}$ ii) $\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-2x+3x^2}}$

जब आपके सम्मुख कोई नया समाकल्य आए, तब निम्नलिखित सुझाव आपको विधियों के चक्रव्यूह से निकलने का रास्ता बताएँगेः

1. समाकल्य की यह देखने के लिए जाँच कीजिए कि क्या यह पैटर्नों $\int u^n du$ या $\int \frac{du}{u}$ के साथ मेल कर रहा है।

2. देखिए कि क्या समाकल्य अवकलन सूत्रों के उलटने से प्राप्त पैटर्नों में से किसी एक के साथ मेल कर रहा है। (इस पर हमने इकाई 17 में विचार किया है।)

3. यदि इनमें से कोई भी पैटर्न उपयुक्त नहीं है तथा यदि समाकल्य एक परिमेय फलन है, तो आंशिक भिन्नों का हमारा सिद्धांत समाकलन करने में हमें समर्थ बनाता है।

4. यदि समाकल्य $\sin x$ और $\cos x$ का एक परिमेय फलन है तथा पिछली इकाइयों की सरल विधियाँ असफल रहती हैं, तो प्रतिस्थापन $t = \tan\frac{x}{2}$ समाकल्य को t के एक परिमेय फलन के रूप का बना देगा, जिसका फिर मान निकाला जा सकता है।

5. यदि समाकल्य रूपों $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ में से एक रूप की करणी (radical) है, तो त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन $x = a\sin\theta$, $x = a\cos\theta$ और $x = a\sec\theta$ समाकल्य को $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के एक परिमेय फलन में बदल देता है। यदि यह करणी $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ के रूप की है, तो एक वर्ग पूर्ण करना $\sqrt{a(x + b/2a)^2 + c - b^2/4a}$ इसे आवश्यक रूप से उपरोक्त में से एक करणी में बदल देगा।

6. यदि समाकल्य x का एक अपरिमेय फलन है, तो उपयुक्त प्रतिस्थापनों द्वारा इसे एक परिमेय फलन या एक समाकलनीय करणी के रूप व्यक्त करने का प्रयास कीजिए।

7. समाकल्य की यह देखने के लिए जाँच कीजिए कि क्या इसे भागों द्वारा समाकलन के रूप में लाया जा सकता है। अंत में, हम आपको पुनः याद दिलाना चाहेंगे कि यदि आप समाकलन की विभिन्न तकनीकों पर प्रवीणता प्राप्त करना चाहते हैं, तो आपके लिए प्रचुर मात्रा में अभ्यास आवश्यक है। हम पहले ही बता चुके हैं कि किसी भी समाकल का सही मान निकालने के लिए, समाकलन की विधि का उचित चुनाव ही एक कुंजी है। आइए अब संक्षिप्त रूप से स्मरण करें कि इस इकाई में, हमने क्या-क्या अध्ययन किया है।

18.7 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर अध्ययन किया हैः

1. x का एक परिमेय फलन f, $f(x) = P(x)/Q(x)$ द्वारा किया जाता है, जहाँ x में $P(x)$ और $Q(x)$ बहुपद हैं। यह उचित कहलाता है, यदि $P(x)$ की घात $Q(x)$ की घात से छोटी होती है। अन्यथा, इसे विषम कहते हैं।

2. एक उचित परिमेय फलन को रैखिक या द्विघात हरों वाली आंशिक भिन्नों में विभक्त किया जा सकता है।

3. एक परिमेय फलन को आंशिक भिन्नों वाली विधि से समाकलित किया जा सकता है।

4. $\sin x$ और $\cos x$ वाले परिमेय फलन का समाकलन $t = \tan\frac{x}{2}$ रख कर किया जा सकता है।

5. निम्नलिखित प्रकार के अपरिमेय फलनों की चर्चा की गई हैः

i) समाकल्य में x की भिन्नात्मक घातें हैं।

i) समाकल्य में x की निम्नात्मक घाते हैं।

ii) $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ iii) $\frac{1}{(fx+e)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

iv) $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ v) $(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}$

6. किसी भी समाकलन का मान निकालने के लिए, जिन बिंदुओं पर विचार करना होता है, उनकी एक जाँच सूची दी गई है।

18.8 हल / उत्तर

E1) i) $\int \sqrt{5x-3}\,dx = \int (5x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx$ है। $u = 5x-3$ रखने पर,

हम $\int \sqrt{5x-3}\,dx = \frac{1}{5}\int \underbrace{\sqrt{5x-3}}_{u^{\frac{1}{2}}}\underbrace{5}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$$= \frac{1}{5}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2(5x-3)^{\frac{3}{2}}}{15} + C$$ प्राप्त करते हैं।

ii) $x = 2x+1$ रखने पर, हम $\frac{du}{dx} = 2$ प्राप्त करते हैं। हम समाकल को इस रूप में लिख सकते हैंः

$$\frac{1}{2}\int \underbrace{(2x+1)^6}_{u^6}\underbrace{2}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \frac{1}{2}\int u^6 du = \frac{1}{2}\frac{u^7}{7} + C = \frac{(2x+1)^7}{14} + C$$

iii) $u = 4+5x$ रखने पर, $du = 5dx$ है। हम समाकल को इस रूप में लिख सकते हैंः

$$\frac{1}{5}\int \underbrace{\frac{1}{4+5x}}_{\frac{1}{u}}\underbrace{5}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|4+5x| + C$$

$$\therefore \int_1^3 \frac{dx}{4+5x} = \frac{1}{5}\ln|4+5x|\Big|_1^3 = \frac{1}{5}(\ln 19 - \ln 9) = \frac{1}{5}\ln\frac{19}{9}$$ है।

iv) $u = 10x+7$ रखने पर, हम $\frac{du}{dx} = 10$ प्राप्त करते हैं। हम समाकल को पुनः इस रूप में लिख सकते हैंः

$$\frac{5}{10}\int \underbrace{\frac{1}{(10x+1)}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{10}_{\frac{du}{dx}} dx = \frac{5}{10}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|n|+C = \frac{1}{2}\ln|10x+1|+C$$

v) $u = x^2 + 2x + 7$ रखने पर, हम $du = (2x+2)dx$ प्राप्त करते हैं। समाकल को हम इस रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{x^2+2x+7}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{(2x+2)}_{\frac{du}{dx}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+7\right| + C.$$

vi) $u = x^3 + x^2 + x - 8$ रखने पर, हम $du = \left(3x^2 + 2x + 1\right) dx$ प्राप्त करते हैं। हम पुनः समाकल को पुनः लिख सकते हैं

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^3+x^2+x-8}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{3x^2+2x+1}_{\frac{du}{dx}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln\left|x^3+x^2+x-8\right| + C$$

अतः $$\int_2^3 \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x-8}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^3+x^2+x-8\right|\Big|_2^3$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|27+9+3-8| - \ln|8+4+2-8|)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 31 - \ln 6) = \frac{1}{2}\ln\frac{31}{6}$$

vii) $u = x^{\frac{4}{3}} - 1$ रखने पर, $du = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$ है। हम समाकल को इस रूप में लिख सकते हैं।

$$\frac{3}{4}\int \underbrace{\sqrt{x^{\frac{4}{3}}-1}}_{\sqrt{u}} \underbrace{\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}}_{\frac{du}{dx}} dx = \frac{3}{4}\int \sqrt{u}\,du = \frac{3}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\left(x^{4/3}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{2} + C$$

viii) $u = 1 - 3x^2$ रखने पर, हम $du = -6xdx$ प्राप्त करते हैं। समाकल को हम इस रूप में लिख सकते हैं:

$$-\frac{1}{6}\int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{u}}} \underbrace{-6x}_{\frac{du}{dx}} dx = -\frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{6}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{u}}{3} + C = -\frac{(1-3x^2)^{\frac{1}{2}}}{3} + C$$

E2) $u = ax + b$ रखने पर, हम $u = adx$ प्राप्त करते हैं। इसलिए, हम समाकल को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{1}{a}\int \cos(ax+b)a\,dx = \frac{1}{a}\int \cos u\,du = \frac{1}{a}\sin u + c = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

7. $\sec(ax+b)$ $u = ax + b$ रखने पर, हम $du = adx$ प्राप्त करते हैं। हमें प्राप्त है

$$\frac{1}{a}\int \sec(ax+b)a\,dx = \frac{1}{a}\int \sec u\,du = \frac{1}{a}\ln|\sec u + \tan u| + C$$
$$= \frac{1}{a}\ln|\sec(ax+b) + \tan(ax+b)| + C$$

8. $\int \text{cosec}(ax+b)\,dx$. $u = (ax+b)$ रखने पर, हम $du = a\,dx$ प्राप्त करते हैं। समाकल को हम $\frac{1}{a}\int \text{cosec}(ax+b)\,a\,dx = \frac{1}{a}\int \text{cosec}\,u\,du = \frac{1}{a}\ln|\text{cosec}\,u - \cot u| + C$
$= \frac{1}{a}\ln|\text{cosec}(ax+b) - \cot(ax+b)| + C$ के रूप में लिख सकते हैं।

9. e^{ax+b}. $u = ax+b$ रखने पर, हम $du = adx$ प्राप्त करते हैं। समाकल को हम $\frac{1}{a}\int e^{ax+b}adx = \frac{1}{a}\int e^{u}dx = \frac{e^u}{a} + C = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$ के रूप में लिख सकते हैं।

E3) i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot 2x\,\text{cosec}^2 2x\,dx$ है। ध्यान दीजिए कि $\text{cosec}^2 2x$, अचर गुणक 2 को छोड़ते हुए, $\cot 2x$ का लगभग अवकलज ही है। $u = \cot 2x$ रखने पर, हम $du = -2\,\text{cosec}^2 2xdx$ प्राप्त करते हैं। हमें प्राप्त हैं:

$$-\frac{1}{2}\int u\,du = -\frac{u^2}{4} + C = -\frac{\cot^2 2x}{4} + C$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot 2x\,\text{cosec}^2 2x\,dx = -\left.\frac{\cot^2 2x}{4}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{4}\left(\cot^2\frac{2\pi}{3} - \cot^2\frac{2\pi}{6}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \text{ है।}$$

ii) $u = \cos 2\theta$ रखने पर, हम $du = -2\sin 2\theta d\theta$ प्राप्त करते हैं। इसलिए, हम समाकल को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$-\frac{1}{2}\int e^{\cos 2\theta}(-2\sin 2\theta)d\theta = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{\cos 2\theta} + C$$

iii) $u = \cos\theta$ रखने पर, हम $du = -\sin\theta d\theta$ प्राप्त करते हैं। इसलिए,

$$\int \sin\theta\left(1+\cos^4\theta\right)d\theta = -\int\left(1+\cos^4\theta\right)(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$= -\int\left(1+u^4\right)du = -\left(u + \frac{u^5}{5}\right) + C$$
$$= -\left(\cos\theta + \frac{\cos^5\theta}{5}\right) + C$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(1+\cos^4\theta\right)d\theta = -\left.\left(\cos\theta + \frac{\cos^5\theta}{5}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 0 - \left\{-\left(1+\frac{1}{5}\right)\right\} = \frac{6}{5} \text{ है।}$$

iv) $u = 1 + \cos\theta$ रखने पर, हम $du = -\sin\theta d\theta$ प्राप्त करते हैं। हम समाकल को $-\int u^4 du = \frac{-u^5}{5} + C = -\frac{(1+\cos\theta)^5}{5} + C$ के रूप में लिख सकते हैं।

v) $u = 1 - 5\tan\theta$ रखने पर, हम $du = -5\sec^2\theta d\theta$ प्राप्त करते हैं। हम समाकल को $-\frac{1}{5}\int\frac{du}{u^3} = -\frac{1}{5}(-\frac{1}{2u^2}) + C = \frac{1}{10(1-5\tan\theta)^2} + C$ के रूप में लिख सकते हैं।

vi) $u = 1 + \sec\theta$ रखने पर, हम $du = \sec\theta\tan\theta d\theta$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार हम

$$\int \sec\theta\tan\theta(1+\sec\theta)^3 d\theta = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(1+\sec\theta)^4}{4} + C$$ प्राप्त होता है।

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\tan\theta(1+\sec\theta)^3 d\theta = \left.\frac{1+\sec\theta}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1+\sqrt{2}}{4} - \frac{2}{4}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$ है।

E4) i) हमें प्राप्त है:

$$\int \sin^7 x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^3 \sin x\,dx$$

$$= \int \left(1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x\right)\sin x\,dx$$

$u = \cos x$ रखने पर, हम $du = -\sin x\,dx$ प्राप्त करते हैं। अब, समाकल हो जाता है:

$$= -\int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6)du$$

$$= -\left(u - u^3 + \frac{3u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) + C$$

$$= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

ii) हमें $\int \cos^5 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx$ प्राप्त है। $u = \sin x$ रखने पर, हम $du = \cos x\,dx$ प्राप्त करते हैं। अब, समाकल हो जाता है:

$$\int \left(1-u^2\right)^2 du = \int \left(1 + u^4 - 2u^2\right) du$$

$$= u + \frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + C$$

$$= \sin x + \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + C$$

iii) हमें $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \int \cos^2 x(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$ प्राप्त है। $u = \cos x$ रखने पर, हम $du = -\sin x\,dx$ प्राप्त करते हैं। अब, समाकल हो जाता है:

$$-\int \left(u^2 - u^4\right) du = -\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right) + C$$

$$= \left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right) + C$$

iv) समीकरण (10) से हमें प्राप्त होता है:

$$\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin(3x+5x) - \sin(3x-5x)) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$$

इसलिए, $$\int \sin 5x \cot 3x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin 8x\,dx + \int \sin 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + C$$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C$$ है।

v) समीकरण (11) का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\cos 3x \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos(3x-4x) + \cos(3x+4x)) = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 7x)$$

अतः, $\int \cos 3x \cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{\cos 7x}{7}\right) + C$ है।

vi) $\int \sin 4x \sin 3x dx = \int \frac{1}{2}(\cos(4x-3x) - \cos(4x+3x))dx$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos x - \cos 7x)dx = \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{\sin 7x}{7}\right) + C$$

vii) $\sin 2x \sin 3x \sin 5x = \frac{\sin 2x}{2}(\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x))$

$$= \frac{\sin 2x}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x \cos 2x - \sin 2x \cos 8x)$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 4x) - \frac{1}{2}(\sin 10x + \sin(-6x))$$

$$= \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 10x}{4} + \frac{\sin 6x}{4}.$$

$$\therefore \int \sin 2x \sin 3x \sin 5x\, dx = \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 10x}{40} + \frac{\cos 6x}{24} + C$$

E5) हमें $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$ प्राप्त है। मान लीजिए कि $x = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$ है। तब $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - a$ या $a = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$ है।

हमें $x = \sin a$ भी प्राप्त है। इसलिए, $a = \sin^{-1} x$, अर्थात् $\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x = \sin^{-1} x$ या $\sin^{-1} x - (-\cos^{-1} x) = \frac{\pi}{2}$ है। अतः, दोनों उत्तरों में केवल एक अचर का अंतर है। क्योंकि किसी फलन का पूर्वग (Primitive) केवल एक अचर द्वारा निर्धारित होता है, इसलिए $\sin^{-1} x$ और $-\cos^{-1} x$ दोनों $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ के पूर्वग हैं।

E6) आइए (18) को सिद्ध करें। $x = a\sec\theta$ रखने पर, $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$ है। साथ ही, $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\tan\theta$ है।

समाकल हो जाता है:

$$\int \frac{a\sec\theta.\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

इकाई 17 की सारणी 1 की प्रविष्टी 8 से। हम $\sec\theta = \frac{x}{a}$ प्राप्त करते हैं, जिससे

$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ है।

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

(19) को सिद्ध करने के लिए, हम प्रतिस्थापन पुनः $x = a\sec\theta$ का उपयोग करते हैं। हम $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$ प्राप्त करते हैं। समाकल

$\int \frac{a\sec\theta\tan\theta d\theta}{a\sec\theta\tan\theta} = \int d\theta = \theta + C$ हो जाता है।

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \text{ है।}$$

E7) i) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

ii) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(\frac{1}{5}-x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}(\sqrt{5}x) + C \text{ है।}$$

iii) $$\int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

iv) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dx}{3x^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\tan^{-1}(\sqrt{3}x) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\sqrt{3}x) + C$$

v) $$\int \frac{dx}{x^2+7} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+(\sqrt{7})^2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+7}}{\sqrt{7}}\right| + C$$

vi) $$\int \frac{dx}{\sqrt{5\left(\frac{1}{5}+x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+x^2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{1+5x^2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{1+5x^2}\right| + C$$

vii) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3^2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + C$$

viii) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2^2}} = \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

ix) $$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(x^2-\frac{1}{9}\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}{\frac{1}{3}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-1}\right| + C$$

x) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + C = \sqrt{2}\sec^{-1}(\sqrt{2}x) + C.$$

E8) i) $$\int x^2 \ln|x| dx = \frac{x^3}{3}\ln|x| - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx = x^3\ln|x| - \frac{x^3}{9} + C$$

ii) हमें प्राप्त होता है:

$$\int (1+x)e^x dx = (1+x)e^x - \int e^x dx = (1+x)e^x - e^x + C = xe^x + C.$$

iii) हमें प्राप्त होता है:

$$\int \left(1+x^2\right)e^x dx = \left(1+x^2\right)e^x - \int e^x \frac{d}{dx}\left(1+x^2\right) dx$$

$$= \left(1+x^2\right)e^x - 2\int xe^x dx$$

$\int xe^x dx$ को भागों द्वारा पुनः समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\therefore \int \left(1+x^2\right)e^x dx = \left(1+x^2\right)e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

iv) $$\int x^2 \sin x \cos x\, dx = \int x^2 \frac{\sin 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int x^2 \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x^2\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int x\cos 2x\, dx\right\}$$

पुनः, $$\int x\cos 2x\, dx = \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) + C.$$

$$\therefore \int x^2 \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2\cos 2x}{2} - \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4}\right)$$

$$= -\frac{x^2\cos 2x}{4} + \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C$$

E9) i) $$\int \sin^{-1}x\, dx = x\sin^{-1}x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$u = 1 - x^2$ रखने पर, हम $du = -2x\, dx$ प्राप्त करते हैं। अब, समाकल हो जाता है:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

इसलिए, $\int \sin^{-1}x\, dx = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$ है।

ii) $$\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1}x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx$$

$u = 1 + x^2$ रखने पर, $du = 2x\,dx$ है।

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln\left|(1+x^2)\right| + C$$

$$\therefore \int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

iii) $$\int \cot^{-1} x\,dx = x\cot^{-1} x - \int x\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)dx = x\cot^{-1} x + \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= x\cot^{-1} x + \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

E10) $$\int x\ln\left|\left(1+x^2\right)\right|dx = \frac{x^2}{2}\ln\left|\left(1+x^2\right)\right| - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{1+x^2}.2x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left|1+x^2\right| - \int \frac{x^3}{1+x^2}dx.$$

अब, $$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int \frac{x\left(1+x^2\right)-x}{1+x^2}dx$$

$$= \int x\,dx - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\left(1+x^2\right)\right| + C$$

$$\therefore \int x\ln\left|\left(1+x^2\right)\right|dx = \frac{(x^2+1)}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{x^2}{2} + C$$

E11) i) समीकरण (23) से तुलना करने पर, हम देखते हैं कि $a = 3$ और $b = 4$ है। इसलिए $r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ है।

$\therefore \int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{5}e^{3x}\cos(4x-\theta) + C$ है, जहाँ θ इस प्रकार है कि $\cos\theta = \frac{3}{5}$ और $\sin\theta = \frac{4}{5}$ है।

ii) समीकरण (23) से तुलना करने पर, हम देखते हैं कि $a = 3$ और $b = 4$ है। इसलिए $r = 5$ है। अब, $\int e^{4x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{5}e^{4x}\sin(3x-\theta) + C$ है, जहाँ θ इस प्रकार है कि $\cos\theta = \frac{4}{5}$ और $\sin\theta = \frac{3}{5}$ है।

iii) $\int e^{-4x}\cos 4x dx$ है। यहाँ, $a = -4$ और $b = 4$ है। $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ है।

$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ और $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ है। इसलिए, $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ है।

अतः $$\int e^{-4x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-4x}\cos\left(4x - \frac{3\pi}{4}\right) + C$$

E12) i) हमें प्राप्त है $\cos x\cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$ इसलिए

$\int e^{4x}\cos x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int e^{4x}\cos 3x\,dx + \int e^{4x}\cos x\,dx\right)$ दोनों ही समाकल मानक रूप में है जिनको हम पहले देख चुके हैं।

ii) हमें प्राप्त है $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ इसलिए $\int e^{2x}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x\,dx\right)$ दोनों समाकलों के मान निकालना आसान है।

iii) हमें प्राप्त है। $\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\sin(bx-\theta)$ जहाँ θ इस प्रकार का है कि $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ और $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ खंडशः समाकलन करने पर हमें $\int xe^{ax}\sin bx\,dx = xe^{ax}\sin(bx-\theta) - \int e^{ax}\sin(bx-\theta)\,dx$ प्राप्त होता है। $u = bx-\theta$ प्रतिस्थापन करने पर $du = b\,dx$ प्राप्त करते हैं। इसलिए $\int e^{ax}\sin(bx-\theta)\,dx = \int e^{a\left(\frac{u+\theta}{b}\right)}\sin u\,du = e^{\frac{a\theta}{b}}\int e^{\frac{au}{b}}\sin u\,du$ यह एक मानक रूप है और हम इसका समाकलन करना जानते हैं।

E13) i) भागों द्वारा समाकलन से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx &= \int\sqrt{a^2+x^2}(1)\,dx\\ &= x\sqrt{a^2+x^2} - \int x.\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+X^2}}2x\,dx\\ &= x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} - \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx &= x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}\\ &= x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\left[\ln\left|\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right|\right] + C\end{aligned}$$

$$\therefore \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right| + C$$

ii) भागों द्वारा समाकलन से,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.2x\,dx\\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{\left(x^2-a^2\right)+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.\end{aligned}$$

$$\therefore 2\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C.$$

$$\therefore \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

E14) i) $\int \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{3-x^2} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

ii) $$\int \sqrt{1-5x^2}\,dx = \sqrt{5}\int \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - x^2}\,dx$$
$$= \sqrt{5}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{5}-x^2} + \frac{1}{10}\sin^{-1}\left(\sqrt{5}x\right)\right) + C$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{1-5x^2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\sin^{-1}\left(\sqrt{5}x\right) + C$$

iii) $\int \sqrt{x + \left(\sqrt{7}\right)^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{7+x^2} + \frac{7}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+7}}{7}\right| + C$

iv) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sqrt{1+5x^2}\,dx = \sqrt{5}\int \sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2} + x^2}\,dx$$
$$= \sqrt{5}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + x^2} + \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{1}{5}+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right|\right) + C$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{1+5x^2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5x} + \sqrt{1+5x^2}\right| + C$$

v) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sqrt{x^2-9}\,dx = \int \sqrt{x^2-3^2}\,dx$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + C$$

vi) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sqrt{9x^2-1}\,dx = 3\int \sqrt{x^2 - \frac{1}{9}}\,dx$$
$$= 3\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{18}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}{\frac{1}{3}}\right|\right)$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{9x^2-1} - \frac{1}{6}\ln\left|3x + \sqrt{9x^2-1}\right| + C$$

vii) भागों द्वारा समाकलन से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x\sin^{-1}x\,dx = \frac{x^2\sin^{-1}x}{2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

हमें प्राप्त है:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{\left(1-x^2\right)-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= -\int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2} + \sin^{-1}\frac{x}{2} + C$$

E15) i) $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$, सारणी 1 के प्रविष्टी 2 के उपयोग से

ii) सारणी 1 के प्रविष्टी 1 के उपयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{dt}{(t+5)^2} = -\frac{1}{(t+5)} + C$$

iii) $\int \frac{4x+1}{x^2+x+2}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx - \int \frac{dx}{x^2+x+2}\right)$

$\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx$, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ के रूप का है, जहाँ $f(x) = x^2+x+2$ है।

$\therefore \int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx = \ln\left|x^2+x+2\right| + C$ है।

हमें प्राप्त है: $\int \frac{dx}{x^2+x+2} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}$

$$= \int \frac{du}{u^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2},\ u = x + \frac{1}{2} \text{ रखने पर}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2+x+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{7}}\right) + C_2$$
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C_2$$

$\therefore \int \frac{4x+1}{x^2+x+2}dx = 2\ln\left|x^2+x+2\right| - \frac{4}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$ है।

iv) $\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{5x-1}{(x+1)x-1} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)}$

दोनों पक्षों को x^2-1 से गुणा करने पर, हम $(5x-1) = A(x-1) + B(x+1)$ प्राप्त करते हैं। $x = 1$ रखने पर, हम $4 = 2B$ या $B = 2$ प्राप्त करते हैं। $x = -1$ रखने पर, हम $-6 = -2A$ या $A = 3$ प्राप्त करते हैं। अतः, समाकलन हो जाता है

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx = 3\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-1} = 3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$

v) $\frac{d}{dx}(x^2-6x+3) = 2x-6$ है। $3x+1 = A(2x-6)+B$ लिखने तथा A और B के मानों के लिए, दोनों पक्षों में अचर पदों और x के गुणांकों की तुलना द्वारा, हल करने पर, हम $A = 3/2$ और $B = 1+6A = 10$ प्राप्त करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-6x+3}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+3}dx + 10\int \frac{dx}{x^2-6x+3}$$

$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+3}dx$, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ के रूप का है, जहाँ $f(x) = x^2-6x+3$ है।

$\therefore \int \frac{2x-6}{x^2-6x+3}dx = \ln\left|x^2-6x+3\right| + C$ है।

हमें $\int \frac{dx}{x^2-6x+3} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-6}$ प्राप्त है। $u = x-3$ रखने पर यह समाकल हो जाता है:

$$\int \frac{du}{u^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{6}}{u+\sqrt{6}}\right| + C.$$

$$\therefore \int \frac{3x+1}{x^2-3x+6}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+3\right| + \frac{5}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{6}}{x-3+\sqrt{6}}\right| + C.$$

E16) i) हम इसे वर्ग पुर्ण करके भी समाकलित कर सकते हैं। परंतु हर के गुणनखंड $x(x+2)$ हो जाते हैं। इसलिए, हम आंशिक भिन्नों की विधि का प्रयोग कर सकते हैं। हम $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ लिखते हैं। दोनों पक्षों को $x(x+2)$ से गुणा करने पर, $1 = A(x+2) + Bx$ प्राप्त होता है। $x = 0$ रखने पर हम $2A = 1$ या $A = \frac{1}{2}$ प्राप्त करते हैं। $x = -2$ रखने पर, हम $1 = -2B$ या $B = -\frac{1}{2}$ प्राप्त करते हैं।

$$\therefore \int \frac{2}{x^2+2x}dx = 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \ln|x| - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C \text{ है।}$$

ii) $\int \frac{x}{x^2-2x-3}dx$ है। हम $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$ प्राप्त करते हैं। $\frac{x}{(x-3)(x+1)}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त करने के लिए, हम $\frac{x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+1)}$ लिखते हैं। दोनों पक्षों को $(x-3)(x+1)$ से गुणा करने पर, हम $x = A(x+1) + B(x-3)$ प्राप्त करते हैं। $x = -1$ रखने पर, हम $-1 = -4B$ या $B = \frac{1}{4}$ प्राप्त करते हैं। $x = 3$ रखने पर, हम $3 = 4A$ या $A = \frac{3}{4}$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए, $$\int \frac{x}{x^2-2x-3}dx = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \frac{3}{4}\ln|x-3| + \frac{1}{4}\ln|x+1| \text{ है।}$$

iii) $\int \frac{3x-13}{x^2+3x-10}dx$ है। हम हर के $(x+5)(x-2)$ के रूप में गुणनखंड कर सकते हैं।

हम $\frac{3x-13}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{x-2}$ लिखते हैं।

दोनों पक्षों को $(x+5)(x-2)$ से गुणा करने पर, हम $3x-13 = A(x-2) + B(x+5)$ प्राप्त करते हैं। $x = 2$ रखने पर, हम $-7 = 7B$ या $B = -1$ प्राप्त करते हैं। $x = -5$ रखने पर, हम $-28 = -7A$ या $A = 4$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए, $\int \frac{3x-13}{x^2+3x-10}dx = 4\int \frac{dx}{x+5} - \int \frac{dx}{x-2} = 4\ln|x+5| - \ln|x-2| + C$ है।

iv) हमें $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ प्राप्त है। हम लिखते हैं:

$$\frac{6x^2 + 22x - 23}{(2x-1)(x+3)(x-2)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}$$

दोनों पक्षों को $(2x-1)(x+3)(x-2)$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं:
$6x^2 + 22x - 23 = A(x+3)(x-2) + B(2x-1)(x-2) + C(2x-1)(x+3)$

$x = \frac{1}{2}$ रखने पर, हम $21A = 42$ या $A = 2$ प्राप्त करते हैं। $x = -3$ रखने पर, हम $-35 = 35B$ या $B = -1$ प्राप्त करते हैं। $x = 2$ रखने पर, हम $5C = 15$ या $C = 3$ प्राप्त करते हैं। इसलिए समाकल हो जाता है:

$$\therefore \int \frac{6x^2 + 22x - 23}{(2x-1)(x+3)(x-2)} dx = 2\int \frac{dx}{2x-1} - \int \frac{dx}{x+3} + 3\int \frac{dx}{x-2}$$
$$= \ln|2x-1| - \ln|x+3| + 3\ln|x-2| + C$$

v) लंबी विभाजन विधि से, यह जाँच कीजिए कि $3x^3 = (3x-3)(x^2 + x - 2) + 9x - 6$ है। हम समाकल को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$\int (3x-3)dx + \int \frac{9x-6}{x^2+x-2} dx = 3\int (x-1)dx + 3\int \frac{3x-2}{(x+2)(x-1)} dx$$

$\frac{3x-2}{(x+2)(x-1)}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{3x-2}{(x+2)(x-1)} = \frac{8}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)}$$
$$\therefore \int \frac{3x-2}{(x+2)(x-1)} dx = \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{8}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C_1$$

$$3\int (x-1)dx = \frac{3}{2}(x-1)^2 + C_2$$
$$\therefore \int \frac{x^3}{x^2+x-2} dx = \frac{3(x-1)^2}{2} + \frac{8}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C.$$

vi) ध्यान दीजिए कि $(x^2 - x + 1)$ के सम्मिश्र मूल हैं। यहाँ व्यंजक को आंशिक भिन्नों में विभक्त करने के लिए, हम लिखते हैं:

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

दोनों पक्षों का $(x-1)(x^2-x+1)$ से गुणा करने पर, हम $x^2 + x - 1 = A(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x-1)$ प्राप्त करते हैं। $x = 1$ रखने पर, हम $1 = A$ या $A = 1$ प्राप्त करते हैं। दोनों पक्षों x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर, हम $1 = A + C$ प्राप्त करते हैं, जिससे $C = 0$ है। दोनों पक्षों में अचर पदों की तुलना करने पर, हम $A - D = -1$ प्राप्त करते हैं, जिससे $D = 2$ प्राप्त होता है। हम समाकल को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

अब, $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ लेते हैं।

$u = x - \frac{1}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर, हम $du = dx$ प्राप्त करते हैं।

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_1$$

$$\therefore \int \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2 - x + 1)} dx = \ln|x-1| + \frac{4}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

vii) मान लीजिए कि $\frac{x^3 - 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$ है।

दोनों पक्षों को $(x^2+1)^2$ से गुणा करने पर, हम $(x^3 - 4x) = (Ax+B)(x^2+1) + cx + D$ प्राप्त करते हैं दोनों पक्षों में x^3 के गुणांकों की तुलना करने पर, हम $A = 1$ प्राप्त करते हैं। दोनों पक्षों x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर हम $B = 0$ प्राप्त करते हैं। दोनों पक्षों में x के गुणांकों की तुलना करने पर हम $A + C = -4$ प्राप्त करते हैं, जिससे $C = -5$ है। दोनों पक्षों में अचर पदों की तुलना करने पर हम $B + D = 0$ प्राप्त करते हैं, जिससे $D = 0$ है।

इसलिए, $\therefore \int \frac{(x^3 - 4x)}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)} - 5\int \frac{5x}{(x^2+1)^2} dx$ है।

अब, $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$

$u = x^2 + 1$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C_1 = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C_1$$

$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$ में $u = x^2 + 1$ प्रतिस्थापन करने पर हम $du = 2x.dx$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए,

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C = \frac{-1}{2(x^2+1)} + C_2$$

$$\therefore \int \frac{(x^3 - 4x)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{5}{2(x^2+1)} + C \text{ है।}$$

E17) i) $\int \frac{x^2 - 1}{1 + x^4} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx.$

$$= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} dx$$

$t = x + \frac{1}{x}$ रखने पर $dt = 1 - \frac{1}{x^2}$ प्राप्त करते हैं। इसलिए

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 2} \text{ यदि } t = x + \frac{1}{x} \text{ है।}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + C$$

ii) $\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}\, dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+1+x^2}\, dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}\, dx$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+3},\ \text{यदि } t = x - \frac{1}{x},\ \frac{dt}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} \text{ है।}$$

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}\, dx = \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right\} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}\right) + C$$

E18) i) यहाँ $a < b$ है। अतः,

$$\int \frac{dx}{4+5\cos x} = \frac{1}{\sqrt{5^2-4^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{4+5}+\sqrt{5-4}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{4+5}-\sqrt{5-4}\tan\frac{x}{2}} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}} \right| + C \text{ है।}$$

ii) $\int \frac{\cos x}{2-\cos x} dx = \int \frac{(2-\cos x)-2}{(2-\cos x)} dx = -\int dx + 2\int \frac{dx}{(2-\cos x)}$

हमें $-\int dx = -x + C_1$ प्राप्त है। दूसरे समाकल में, $a = 2$ और $b = -1$ है। इसलिए $a > b$ है। अतः, $\int \frac{dx}{(2-\cos x)} = \frac{2}{\sqrt{2^2-(-1)^2}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2-(-1)}{2+(-1)}} \tan\frac{x}{2}\right) + C$ है।

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + C_2$$

$$\therefore \int \frac{\cos x\, dx}{2-\cos x} = -x + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

E19) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{t^2}{1+t} 4t^3 dt$, यदि $t = \sqrt[4]{x}$ है।

$$= 4\int \frac{t^5}{1+t} dt$$

$$= 4\int \left[t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right] dt$$

$$= 4\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right] + C$$

$$= 4\left[\frac{x^{5/4}}{5} - \frac{x}{4} + \frac{x^{3/4}}{3} - \frac{x^{1/2}}{2} + x^{1/4} - \ln|x^{1/4}+1|\right] + C$$

E20) i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \sqrt{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}}}{1/3} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| 3x + 2 + \sqrt{3}\sqrt{3x^2 + 4x + 1} \right| + C$$

ii) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4x + 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}}}{\sqrt{5}/3} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{3x - 2 + \sqrt{3}\sqrt{3x^2 - 4x + 3}}{\sqrt{5}} \right| + C$$

iii) $5 - 2x - x^2 = 5 - (2x + x^2) = 5 - \left\{(x+1)^2 - 1\right\} = 6 - (x+1)^2$ है।

इसलिए, $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - (x+1)^2} = \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C$ है।

E21) i) $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x + 1) = 6x + 4$ है। इसलिए $3x + 1 = A(6x + 4) + B$

अतः $A = \frac{1}{2}$ और $4A + B = 1$ है, जिससे $B = -1$ है।

$$\therefore \int \frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{6x + 4}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}}$$

$\int \frac{6x + 4}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}} dx$, $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ के रूप का है, जहाँ $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ है।

$$\therefore \int \frac{6x + 4}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}} dx = 2\sqrt{3x^2 + 4x + 1} + C_1$$

E20) i) से हम जानते हैं कि

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| 3x + 2 + \sqrt{3}\sqrt{3x^2 + 4x + 1} \right| + C_2 \text{ है।}$$

$$\therefore \int \frac{3x + 1}{3x^2 + 4x + 1} dx = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| 3x + 2 + \sqrt{3}\sqrt{3x^2 + 4x + 1} \right| + C$$

ii) हमें $\frac{d}{dx}\left(3x^2-4x+3\right)=6x-4$ प्राप्त है। हम $2x-3=A(6x-4)+B$ के रूप में लिखते हैं। दोनों पक्षों में x के गुणांकों और अचर पदों की तुलना करने पर, हम $A=\frac{1}{3}$ और $B-4A=-3$ प्राप्त करते हैं। जिससे $B=-3+4A=-\frac{5}{3}$ है।

इसलिए, $\int \frac{2x-3}{\sqrt{3x^2-4x+3}}dx=\frac{1}{3}\int \frac{6x-4}{\sqrt{3x^2-4x+3}}-\frac{5}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+3}}$ है।

अब E20) ii) से, हम जानते हैं कि

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+3}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x-2+\sqrt{3}\sqrt{3x^2-4x+3}}{\sqrt{5}}\right|+C_1 \text{ है।}$$

आगे $u=3x^2-4x+3$ रखने पर

$$\int \frac{6x-4}{\sqrt{3x^2-4x+3}}=\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C_2=2\sqrt{3x^2-4x+3}+C_2$$

अतः $\int \frac{2x-3}{\sqrt{3x^2-4x+3}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-4x+3}$

$$-\frac{5}{3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x-2+\sqrt{3}\sqrt{3x^2-4x+3}}{\sqrt{5}}\right|+C \text{ है।}$$

iii) हमें $\frac{d}{dx}(5-2x-x^2)=-2(x+1)$ प्राप्त है। साथ ही, $x+2=\frac{1}{2}(-2(x+1))+1$ है।

इसलिए, $\int \frac{x+2}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{-2(x+1)}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx+\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$ है।

पहले की ही तरह, $\int \frac{-2(x+1)}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx=2\sqrt{5-2x-x^2}+C_1$ है।

E21) iii) से, हमें प्राप्त है: $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+C_2$

अतः, $\int \frac{(x+2)}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx=-\sqrt{5-2x-x^2}+\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+C$ है।

E22) i) $\int \sqrt{3x^2+4x+1}\,dx=\int \sqrt{3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)}dx$

$$=\sqrt{3}\int \sqrt{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}dx$$

$$=\sqrt{3}\int \sqrt{u^2-\frac{1}{9}}du \quad \left(u=x+\frac{2}{3} \text{ प्रतिस्थापित करने पर}\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{u\sqrt{u^2-\frac{1}{9}}}{2}-\frac{\frac{1}{9}}{2}\ln\left|\frac{u+\sqrt{u^2-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}}\right|\right)+C$$

$$= \frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}}{2}$$

$$-\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|3\left(x+\frac{2}{3}\right)+\sqrt{3}\sqrt{3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}}\right|+C$$

$$= \frac{(3x+2)\sqrt{3x^2+4x+1}}{6}$$

$$-\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|3x+2+\sqrt{3}\sqrt{3x^2+4x+1}\right|+C$$

ii) $\int\sqrt{3x^2-4x+3}\,dx = \sqrt{3}\int\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+1}\,dx$

$$= \sqrt{3}\int\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left\{\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{5}{9}}}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{1/9}{2}\ln\left|\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}}{\sqrt{5}/3}\right|\right\}+C$$

$$= \sqrt{3}\left\{\frac{(3x-2)}{6}\sqrt{3x^2-4x+1}\right.$$

$$\left.+\frac{5}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x-2+\sqrt{3}\sqrt{3x^2-4x+1}}{\sqrt{5}}\right|+C\right\}$$

iii) $\int\sqrt{5-2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-x+1^2}\,dx$

$$= \int\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-u^2}\,du \text{ (}u = x+1 \text{ प्रतिस्थापित करने पर)}$$

$$= \frac{u\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-u^2}}{2}+\frac{6}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{6}}\right)+C$$

$$= \frac{(x+1)\sqrt{5-2x-x^2}}{2}+3\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+C$$

E23) i) मान लीजिए कि $h(x) = 8+2x-x^2 = A+B(x-2)+C(x-2)^2$ है।

हमें प्राप्त है $8 = h(2) = A$ क्योंकि $h'(x) = 2-2x$, $-2 = h'(2) = B$ पुनः $h''(x) = -2$.
अतः $-2 = h''(2) = 2C$ और $C = -1$ है।

$$\therefore 8+2x-x^2 = 8-2(x-2)-(x-2)^2$$

$x-2 = \frac{1}{y}$ रखने पर, समाकल हो जाता है;

$$\int \frac{-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{8y^2-2y-1}{y^2}}}\,dy = -\int \frac{dy}{\sqrt{8y^2-2y-1}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-\frac{y}{4}-\frac{1}{8}}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}-\frac{1}{8}}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{8+2x-x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{9}{64}}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2}}$$

$u = y - \frac{1}{8}$ रखने पर

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{8+2x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{u^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2}}{3/8}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\left(y-\frac{1}{8}\right)+\sqrt{\left(y-\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2}}{3/8}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{8y-1+2\sqrt{2}\sqrt{8y^2-2y-1}}{3}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{8}{x-2}-1+2\sqrt{2}\sqrt{\frac{8}{(x-2)^2}-\frac{2}{(x-2)}-1}}{3}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{10-x+2\sqrt{2}\sqrt{8-2(x-2)-(x-2)^2}}{3(x-2)}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{10-x+2\sqrt{2}\sqrt{8+2x-x^2}}{3(x-2)}\right| + C$$

ii) $x^2 + 6x + 10 = (x+2)^2 + 2(x+2) + 2$ है।

$y = \frac{1}{x+2}$ रखने पर, समाकल हो जाता है:

$$-\int \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{2y^2+2y+1}{y^2}}}\,dy$$

$$= -\int \frac{dy}{\sqrt{2y^2+2y+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+y+\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{(y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{(y+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}}{1/2}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|2\left(\frac{2y+1}{2}\right) + \sqrt{2}\sqrt{2\left\{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\}}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|(2y+1) + \sqrt{2}\sqrt{2y^2 + 2y + 1}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2}{x+2} + 1 + \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+2} + 1}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+4+\sqrt{2}\sqrt{x^2+6x+10}}{x+2}\right| + C$$

E24) i) मान लिजिए कि $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ है। तब, $f'(x) = 6x + 4$ है। $2x - 1 = A(6x+4) + B$ लिखने तथा दोनों पक्षों के x के गुणांकों की तुलना करने पर, $6A = 2$ या $A = \frac{1}{3}$ है। दोनों पक्षों के अचर पदों की तुलना करने पर, हम $-1 = 4A + B$ या $B = -4A = -\frac{7}{3}$ प्राप्त करते हैं। अब, हम समाकल को

$\frac{1}{3}\int (6x+4)\sqrt{3x^2+4x+1}\,dx - \frac{7}{3}\int \sqrt{3x^2+4x+1}\,dx$ के रूप में लिख सकते हैं।

समाकल $\int (6x+4)\sqrt{3x^2+4x+1}\,dx$ $\int f(x)\sqrt{f(x)}\,dx$ के रूप का है। $u = f(x)$ रखने पर यह समाकल हो जाता है:

$$\int \sqrt{u}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\left(3x^2+4x+1\right)^{3/2} + C_1$$

E22) i) से, हम जानते हैं कि

$$\int \sqrt{3x^2+4x+1}\,dx = \frac{(3x+2)\sqrt{3x^2+4x+1}}{6} - \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|3x+2+\sqrt{3}\sqrt{3x^2+4x+1}\right| + C_1$$ है।

$$\therefore \int (2x-1)\sqrt{3x^2+4x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\left(3x^2+4x+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{(21x+14)\sqrt{3x^2+4x+1}}{18} + \frac{7}{18\sqrt{3}}\ln\left|3x+2+\sqrt{3}\sqrt{3x^2+4x+1}\right| + +C$$

ख) $f(x) = 5 - 2x - x^2$ लेने पर, $f(x) = -2 - 2x$ है।

$x - 3 = A(-2-2x) + B$ लिखने तथा दोनों पक्षों में x के गुणांकों और अचर पक्षों की तुलना करने पर, $-2A + B = -3$ या $B = -3 + 2a = -3 - 1 = -4$ है। इसलिए, हम समाकलन इस रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{-1}{2}\int(-2-2x)\sqrt{5-2x-x^2}\,dx-4\int\sqrt{5-2x-x^2}\,dx$$

समाकलन $\int(-2x-2)\sqrt{5-2x-x^2}\,dx$, $\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx$ के रूप का है।

$$\therefore \int(-2-2x)\sqrt{5-2x-x^2}\,dx=\frac{2}{3}\left(5-2x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C_1$$

$$\int\sqrt{5-2x-x^2}\,dx=\frac{(x+1)\sqrt{5-2x-x^2}}{2}+3\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+C_2$$ है।

$$\therefore \int(x-3)\sqrt{5-2x-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(5-2x-x^2)-2(x+1)\sqrt{5-2x-x^2}$$
$$-12\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+C$$

इकाई 19

समानयन सूत्र

इकाई की रूपरेखा — पृष्ठ संख्या

19.1 प्रस्तावना

इस खंड की प्रथम दो इकाइयों में, हमने निश्चित समाकल की संकल्पना से परिचय कराया था तथा कुछ मानक रूपों के समाकलों के मान प्राप्त किए थे। हमने समाकलों के मान निकालने की दो महत्वपूर्ण विधियों का भी अध्ययन किया था। ये प्रतिस्थापन की विधि तथा भागों द्वारा समाकलन (खंडशः समाकलन) की विधि थी। अनेक भौतिकी और इंजिनियरिंग की समस्याओं के हलों में, हमें त्रिकोणमितीय फलनों की घातों अथवा उनके गुणनफलों से संबद्ध कुछ समाकल्यों को समाकलित करना पड़ता है। इस इकाई में, हम इन समाकलों के मान निकालने की एक तीव्र विधि की खोज करेंगे। हम कुछ मानक रूपों के समाकल्यों को एक-एक करके लेकर उन पर विचार करेंगे तथा उनको समाकलित करने के लिए सूत्र निगमित करेंगे।

उन समाकल्यों जिनकी चर्चा हम यहाँ करेंगे उनमें एक बात सर्वनिष्ठ है। ये पूर्णांक प्राचल पर आश्रित (निर्भर) हैं। भागों द्वारा समाकलन की विधि का उपयोग करके, हम ऐसे समाकल को एक अन्य ऐसे ही कम प्राचल वाले समाकल के पदों में व्यक्त करने का प्रयास करेंगे। आप देखेंगे कि इस तकनीक का बार-बार उपयोग करके, हम दिए हुए समाकल का मान निकाल पाएँगे।

भाग 19.2 में, हम कुछ उदाहरणों की सहायता से, हम आपका परिचय समानयन सूत्र (reduction formula) के विचार से कराएँगे। भाग 19.3 में, हम त्रिकोणमितीय फलनों के घातों के लिए समानयन सूत्रों की चर्चा करेंगे। भाग 19.4 में, हम साइन (sine) और कोसाइन (cosine) फलों की घातों के गुणनफलों के लिए समानयन सूत्र की चर्चा करेंगे। हम $e^{ax}\sin x$ और $e^{ax}\cos x$ के समाकलन के लिए भी समानयन सूत्रों की चर्चा करेंगे। यहाँ दिए जा रहे हैं, अब

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आपः

- $\int x^n e^x dx$ के लिए समानयन सूत्रों को निगमित कर पाएँगे तथा उनका अनुप्रयोग कर पाएँगे;
- $\int \sin^n x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$, $\int \tan^n x\,dx$ इत्यादि के लिए समानयन सूत्र निगमित कर पाएँगे तथा उनका अनुप्रयोग कर पाएँगे;
- $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ के लिए समानयन सूत्र निगमित कर पाएँगे तथा उनका अनुप्रयोग कर पाएँगे; और
- $\int e^{ax}\sin^n x\,dx$ के लिए समानयन सूत्र निगमित कर पाएँगे तथा उनका अनुप्रयोग कर पाएँगे।

19.2 समानयन सूत्र

कभी-कभी समाकल्य न केवल स्वतंत्र चर का एक फलन होता है, अपितु एक संख्या पर भी आश्रित (प्रायः एक पूर्णांक) होता है। उदाहरणार्थ, $\int \sin^n x\,dx$ में, समाकल्य $\sin^n x$ चर x और पूर्णांक n पर आश्रित है। इसी प्रकार, $\int e^x \cos mx\,dx$ में, समाकल्य $e^x \cos mx$ चर x और पूर्णांक m पर आश्रित है। इन दोनों उदाहरणों में संख्याएँ n और m प्राचल (parameters) कहलाती हैं। हम यहाँ केवल पूर्णांक प्राचलों की ही चर्चा करेंगे।

भागों द्वारा समाकलन में, कभी-कभी हम दिए हुए समाकल का मान एक अन्य ऐसे ही समाकलों के पदों में प्राप्त कर लेते हैं जिसके प्राचल का मान दिए हुए समाकल के प्राचल से कम होता है। इस प्रकार, अनेक चरणों के बाद, हम ऐसे समाकल्य पर पहुँच सकते हैं, जिसको तुरंत ही समाकलित किया जा सकता है। ऐसी प्रक्रिया **उत्तरोत्तर समानयन की विधि (method of successive reduction)** कहलाती है तथा प्राचल x वाले समाकल को ऐसे ही एक अन्य कम प्राचल मान वाले समाकल से जोड़ने वाला सूत्र एक **समानयन सूत्र** कहलाता है।

परिभाषा 1 : $\int f(x,\ n)dx = g(x) + \int f(x,\ k)\,dx$ जहाँ $k < n$ है, एक समानयन सूत्र कहलाता है।

एक दृष्टांत के रूप में निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 1 : $\int x^n e^x \, dx$ के लिए एक समानयन सूत्र को निगमित कीजिए।

हल : $\int x^n e^x dx$ में समाकल्य x पर आश्रित है तथा प्राचल x पर भी आश्रित है, जो x का घातांक है। मान लीजिए कि $I_n = \int x^n e^x dx$ है। x^n को पहला फलन तथा e^x को दूसरा फलन मान कर, इसे भागों द्वारा समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$I_n = x^n \int e^x dx - \int \left(n x^{n-1} \int e^x dx \right) dx$$

$$= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$$

ध्यान दीजिए कि दाएँ पक्ष के समाकल में समाकल्य वैसा ही है जैसे समाकल से हमने प्रारंभ किया था। अंतर केवल इतना है कि x का घातांक n –1 है। अर्थात् हम कह सकते हैं कि x के घातांक में 1 की कमी हो गई है। इस प्रकार, हम लिख सकते हैं:

$$I_n = x^n e^x - n \, I_{n-1} \qquad \ldots (1)$$

***

समीकरण (1) का सूत्र समानयन सूत्र का एक उदाहरण है। आइए यह देखने के लिए कि इस सूत्र का किस प्रकार उपयोग होता है एक उदाहरण पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 2 : समीकरण (1) का उपयोग करते हुए, $\int x^4 e^x dx$ का मान निकालिए।

हल : ध्यान दीजिए कि $I_4 = \int x^4 e^x dx$ है। इसलिए, समीकरण (1) का उपयोग करने पर, हम लिख सकते हैं:

$$I_4 = x^4 e^x - 4 I_3$$

$$= x^4 e^x - 4[x^3 e^x - 3 I_2], \; I_3 \text{ के लिए समीकरण (1) के उपयोग से}$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12 I_2$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24 I_1, \; I_2 \text{ के लिए समीकरण (1) के उपयोग से}$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24 I_0$$

अब, $I_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x + c$ है।

इस प्रकार, उत्तरोत्तर समानयन की विधि से, हम पाँच सरल चरणों में
$\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x - 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + c$ प्राप्त करते हैं।

***

उदाहरण 2 में, आपने यह ध्यान दिया होगा कि हम चार बार भागों द्वारा समाकलन करने से बच गए। यह समीकरण (1) के सूत्र के कारण संभव हो सका। इस इकाई में ऐसे अनेक समानयन सूत्र निगमित करेंगे। यहाँ कुछ और उदाहरण हैं।

उदाहरण 3 : $\int x^m (\ln|x|)^n \, dx$ के लिए एक समानयन सूत्र ज्ञात कीजिए।
$\int x^3 (\ln|x|)^2 \, dx$ ज्ञात करने के लिए इसका उपयोग कीजिए।

हल : आइए $I_n = \int x^m (\ln|x|)^n \, dx$ लिखें। ...(2)

तब, $\ln(|x|)^n$ को पहला गुणक और x^m को दूसरा गुणक लेने तथा भागों द्वारा

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_n = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln|x|)^n - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\frac{d}{dx}(\ln|x|)^n\,dx$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln|x|)^n - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1} n(\ln|x|)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln|x|)^n - \frac{1}{m+1}\int x^m n(\ln|x|)^{n-1}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln|x|)^n - \frac{n}{m+1}I_{n-1}$$

इस प्रकार, $I_n = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln|x|)^n - \frac{n}{m+1}I_{n-1}$ है। ...(3)

पुनः ध्यान दीजिए कि जिस विधि से हमने समीकरण (2) में In को परिभाषित किया है, उसके अनुसार $\int x^3(\ln|x|)^2\,dx = I_2$ है। समीकरण (3) का अनुप्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_2 = \frac{x^4}{4}(\ln|x|)^2 - \frac{2}{4}I_1 = \frac{x^4}{4}(\ln|x|)^2 - \frac{2}{4}\left(\frac{x^4}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}I_0\right)$$
$$= \frac{x^4}{4}\left\{(\ln|x|)^2 - \frac{1}{2}\ln|x|\right\} + \frac{1}{8}I_0$$

हमें प्राप्त है: $I_0 = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

अतः, $I_2 = \frac{x^4}{4}\left\{(\ln|x|)^2 - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{8}\right\} + C$ है।

***

यहाँ एक अन्य उदाहरण है।

उदाहरण 4 : $\int x^n(ax+b)^m\,dx$ के लिए एक समानयन सूत्र ज्ञात कीजिए, जहाँ $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq -1$ और $a, b \in \mathbb{R}$ है। $\int x^3(2x+5)^{10}\,dx$ को समाकलित करने के लिए इसका उपयोग कीजिए।

हल : यहाँ, दो विकल्प हैं। हम क्रमिक रूप से x की घात या $(ax+b)$ की घात कम करते जा सकते हैं, इस पर निर्भर करते हुए कि n और m में कौन छोटा है। इस उदाहरण में, हम देखेंगे कि x की घात किस प्रकार कम की जाए। क्योंकि हम x वाले पद की घात एक कम करना चाहते हैं, इसलिए हम x^n को दूसरा गुणक चुनते हैं, जिससे जब हम x^n को अवकलित करें, तब उसकी घात 1 कम हो जाए। हमें प्राप्त होता है:

$$\int (ax+b)^m x^n\,dx = x^n\int (ax+b)^m\,dx - \int nx^{n-1}\left(\int (ax+b)^m\,dx\right)dx$$
$$= x^n\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} - \frac{n}{a(m+1)}\int x^{n-1}(ax+b)^{m+1}\,dx$$

$I_{n,m} = \int x^n(ax+b)^m\,dx$ लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_{n,m} = \frac{1}{a(m+1)}\left(x^n(ax+b)^{m+1} - nI_{n-1,m+1}\right) \quad ...(4)$$

आइए इसका अब $\int x^3(2x+5)^{10}\,dx$ को समाकलित करने में उपयोग करें।

यहाँ $n = 3, m = 10$ और $a = 2$ है। हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x^3(2x+5)^{10}\,dx = I_{3,10} = \frac{1}{2\cdot 11}\left(x^3(2x+5)^{11} - 3I_{2,11}\right)$$

$$I_{2,11} = \frac{1}{2\cdot 12}\left(x^2(2x+5)^{12} - 2I_{1,12}\right)$$

$$I_{1,12} = \frac{1}{2\cdot 13}\left(x(2x+5)^{13} - I_{0,13}\right)$$

$$I_{0,13} = \int (2x+5)^{13}\,dx = \frac{(2x+5)^{14}}{28} + C \quad \text{है।}$$

अतः, $$\int x^3(2x+5)^{10}\,dx = \frac{x^3(2x+5)^{11}}{22} - \frac{3}{22}\left\{\frac{1}{24}\left(x^2(2x+5)^{12} - 2I_{1,12}\right)\right\}$$

$$= \frac{x^3(2x+5)^{11}}{22} - \frac{x^2(2x+5)^{12}}{176} + \frac{1}{1144}\left(x(2x+5)^{13} - I_{0,13}\right)$$

$$= \frac{x^3(2x+5)^{11}}{22} - \frac{x^2(2x+5)^{12}}{176} + \frac{1}{1144}x(2x+5)^{13} - \frac{1}{32032}(2x+5)^{14} + C$$

***

यह तथ्य कि समीकरण (4) में प्राचल m एक द्वारा बढ़ता जाता है, उपयोगी हो सकता है। यहाँ एक उदाहरण है, जो इसे स्पष्ट करता है।

उदाहरण 5 : समाकल $\int \frac{x^5}{(1+x)^3}\,dx$ का मान निकालिए।

हल : मान लीजिए कि हम परिमेय फलनों को समाकलित करने के लिए इकाई 18 में चर्चा की गई विधि का उपयोग करते हैं। लंबी विभाजन विधि द्वारा हम $x^5 = \left(x^2 - 3x + 6\right)(1+x)^3 - (10x^2 + 15x + 6)$ प्राप्त करते हैं। यह अभिकलन स्वयं ही जटिल है। अगला चरण इसे इस रूप में लिखना है:

$$\int \frac{x^5}{(1+x)^3}\,dx = \int \left(x^2 - 3x + 6\right)dx - \int \frac{10x^2 + 15x + 6}{(1+x)^3}\,dx$$

पहला समाकल सीधा और सरल है। दूसरे समाकल के लिए, हमें आंशिक भिन्नों का उपयोग करना होगा।

परंतु, समीकरण (4) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{x^5}{(1+x)^3}\,dx = I_{5,-3} = \frac{1}{(-3+1)}\left(\frac{x^5}{(1+x)^2} - 5I_{4,-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{(1+x)^2} - 5\left\{\frac{1}{(-2+1)}\left(\frac{x^4}{(1+x)} - I_{3,-1}\right)\right\}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{(1+x)^2} + 5\frac{x^4}{1+x} - 20I_{3,-1}\right)$$

$$I_{3,-1} = \int \frac{x^3}{1+x}\,dx = \int \frac{(u-1)^3}{u}\,du,\ u = x+1 \text{ रखने पर}$$

$$= \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u}\,du = \frac{u^3}{3} - 3\frac{u^2}{2} + 3u - \ln|u| + C$$

$$= \frac{(1+x)^3}{3} - 3\frac{(1+x)^2}{2} + 3(1+x) - \ln|1+x| + C$$

$$\int \frac{x^5}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{x^5}{2(1+x)^2} - 5\frac{x^4}{2(1+x)} + 10\frac{(1+x)^3}{3} - 15(1+x)^2 + 30(1+x) + 10\ln|1+x| + C \text{ है।}$$

***

अब हम जिन सूत्रों की चर्चा करेंगे वे दो मुख्य श्रेणियों में, इसके अनुसार आते हैं कि समाकल्य

i) त्रिकोणमितीय फलनों की एक घात है,

ii) त्रिकोणमितीय फलनों का एक गुणनफल है।

हम इन्हें अगले दो भागों में लेंगे। इससे पहले कि हम अगले भाग की ओर चलें, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए:

E1) समाकल $\int x^n e^{ax} dx$ के लिए, एक समानयन सूत्र ज्ञात कीजिए। समाकल $\int x^3 e^{2x} dx$ का मान निकालने के लिए, इसका उपयोग कीजिए।

E2) समाकल $\int \frac{x^2}{(1+2x)^3} dx$ का मान निकालिए।

E3) उदाहरण 4 का समानयन सूत्र x की घात को एक कम कर देता है। एक ऐसे समानयन सूत्र को सिद्ध कीजिए, जो $(ax+b)$ की घात को एक कम कर देता है। समाकल $\int x^{10}(3x+1)^2 dx$ का मान निकालने के लिए, इस सूत्र का उपयोग कीजिए।

यदि आपने अभी तक की चर्चा पर सावधानीपूर्वक ध्यान दिया होगा, तो आपने समानयन सूत्रों को निगमित करते समय, पहले फलन और दूसरे फलन के चुनने में एक विशेष पैटर्न देखा होगा। हम सदैव दूसरे फलन को इस प्रकार चुनते हैं कि वह एक अन्य फलन की घात हो, जैसे कि एक बहुपद। ये इस कारण करते हैं, क्योंकि हम दूसरे फलन को अवकलित करते हैं, जिससे उसकी घात कम हो जाती है। इसके बार-बार अनुप्रयोग करने से, हम समाकल्य में इस फलन को हटा देते हैं। आशा रहती है कि जो फलन बचता है वह समाकलन के लिए एक सरल फलन रहेगा।

उदाहरणार्थ, $\int x^n e^x dx$ के लिए समानयन सूत्र निगमित करते समय हम दूसरे फलन के रूप में x^n को चुनते हैं। समानयन सूत्र के बार-बार अनुप्रयोग से, हम $\int e^x dx$ पर पहुँच जाते हैं, जो एक सरल समाकल है। इस अंतर्दृष्टि की सहायता से, आप बिना रटे ही समानयन सूत्रों के निगमन का स्मरण कर सकते हैं। आप इस विचार को अगले भाग में उपयोगी पाएँगे, जहाँ हम त्रिकोणमितीय फलनों की घातों से संबद्ध समाकल्यों के लिए समानयन सूत्रों की चर्चा करेंगे।

19.3 त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध समाकल

अनेक अवसर ऐसे आते हैं, जब हमें एक त्रिकोणमितीय फलन के एक बहुपद के साथ गुणनफल को समाकलित करना होता है। इस भाग में, हम यह इंगित करेंगे कि ऐसी स्थितियों में किस प्रकार आगे बढ़ा जाता है। आइए एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 6 : $\int x^n \sin \alpha x\, dx$ और $\int x^n \cos \alpha x\, dx$ के समानयन सूत्र ज्ञात कीजिए, जहाँ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ और $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ है। इनका उपयोग $\int x^2 \cos 4x\, dx$ और $\int x^2 \sin 6x\, dx$ के मान निकालने में कीजिए।

हल : जैसा कि हमने पहले बताया था, दूसरे फलन के लिए, x^n सही विकल्प है, क्योंकि अवकलन करने पर x की घात कम होती जाती है। आइए

$$I_n = \int x^n \cos \alpha x\, dx \text{ और } I'_n = \int x^n \sin \alpha x\, dx \text{ लिखें।}$$

हम प्राप्त करते हैं:

$$I_n = \int x^n \cos \alpha x\, dx = x^n \int \cos \alpha x\, dx - \int \frac{d}{dx} x^n \left(\int \cos \alpha x\, dx \right) dx$$

$$= \frac{x^n \sin \alpha x}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \sin \alpha x\, dx$$

$$= \frac{x^n \sin \alpha x}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} I'_{n-1} \qquad \ldots(5)$$

$$I'_n = \int x^n \sin \alpha x\, dx = x^n \int \sin \alpha x\, dx - \int \frac{d}{dx} x^n \left(\int \sin \alpha x\, dx \right) dx$$

$$= -\frac{x^n \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \cos \alpha x\, dx = -\frac{x^n \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{n}{\alpha} I_{n-1} \qquad \ldots(6)$$

समीकरण (6) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$I'_n = -\frac{x^n \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{n}{\alpha} \left(\frac{x^{n-1} \sin \alpha x}{\alpha} - \frac{n-1}{\alpha} I'_{n-2} \right)$$

$$= -\frac{x^n \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{n x^{n-1} \sin \alpha x}{\alpha^2} - \frac{n(n-1)}{\alpha^2} I'_{n-2} \qquad \ldots(7)$$

इसी प्रकार, समीकरण (6) में समीकरण (7) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_n = \frac{x^n \sin \alpha x}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} \left(-\frac{x^{n-1} \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2} \right)$$

$$= \frac{x^n \sin \alpha x}{\alpha} + \frac{n x^{n-1} \cos \alpha x}{\alpha^2} - \frac{n(n-1)}{\alpha^2} I_{n-2} \qquad \ldots(8)$$

आइए अब समीकरण (9) के प्रयोग से, $\int x^2 \cos 4x$ का मान निकालें।

$$I_2 = \int x^2 \cos 4x\, dx = \frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{2x \cos 4x}{16} - \frac{2}{16} I'_0$$

$$= \frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{x \cos 4x}{8} - \frac{2}{16} \int \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{x \cos 4x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

$\int x^2 \sin 6x\, dx$ के लिए $n = 2, \alpha = 6$ है। समीकरण (8) को प्रयोग करने से, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_2' = \int x^2 \sin 6x\, dx = -\frac{x^2 \cos 6x}{6} + \frac{2x \sin 6x}{36} - \frac{2}{36} I_0'$$
$$= -\frac{x^2 \cos 6x}{6} + \frac{x \sin 6x}{18} - \frac{1}{18} \int \sin 6x\, dx$$
$$= -\frac{x^2 \cos 6x}{6} + \frac{x \sin 6x}{18} + \frac{\cos 6x}{108} + C$$

***

आप अपनी उपरोक्त उदाहरण की समझ को इस प्रश्न को करने का प्रयास करके जाँच करना चाहेंगे।

E4) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

क) $\int x^4 \sin 3x\, dx$ ख) $\int x^4 \cos 5x\, dx$

19.3.1 $\int \sin^n x\, dx$ और $\int \cos^n x dx$ के लिए समानयन सूत्र

इस उपभाग में, हम ऐसे समाकल्पों पर विचार करेंगे, जो या तो sinx की घातें हैं या cosx की घातें हैं। व्यापक घातों की चर्चा करने से पहले, याद किजिए कि sinx और cosx के विषम घातों का समाकलन करना हम इकाई 1, उदाहरण 6 में देख चुके हैं।

आइए अब व्यापक समानयन सूत्रों को निगमित करें, जो $\sin^n x$ और $\cos^n x$ की सम और विषम दोनों घातों के लिए उपयुक्त रहते हैं। हम सर्वप्रथम cosx की घातों से प्रारंभ करते हैं। आइए, अब $\int \cos^n x\, dx$ के लिए समानयन सूत्र को निगमित करें। हम लिखते हैं:

$$I_n = \int \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\, dx,\ n > 1$$

इस समाकल को भागों द्वारा समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x - \int (n-1) \cos^{n-2} x(-\sin x).\sin x\, dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1-\cos^2 x)\, dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\, (I_{n-2} - I_n)$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_n = \int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \dots (9)$$

यद्यपि, यह सूत्र $n \neq 0$ के लिए मान्य है, परंतु यह सूत्र वास्तव में तभी उपयोगी है, जब $n \geq 0$ है। जब $n \leq 0$ है, तब हम $\int \sec^n x\, dx$ के लिए समानयन सूत्र का उपयोग करते हैं, जिसकी चर्चा हम बाद में करेंगे। आइए अब यह देखने के लिए कि cosx की घातों को समाकलित करने में हम समीकरण (9) का किस प्रकार अनुप्रयोग करते हैं, एक उदाहरण पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 7 : समीकरण (9) का प्रयोग करते हुए, $\int \cos^6 x\, dx$ का मान निकालिए।

हल : हमें प्राप्त है:

$$\int \cos^6 dx = I_6 = \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5}{6} I_4$$

$$= \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5}{6}\left(\frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4} I_2\right)$$

$$= \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5}{24}\cos^3 x \sin x + \frac{15}{24}\left(\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} I_0\right)$$

$$= \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5}{24}\cos^3 x \sin x + \frac{15}{48}\cos x \sin x + \frac{15}{48} x + C$$

***

आप अगले प्रश्न को हल करने का प्रयास करके, अभी तक हुई हमारी चर्चा के बारे में अपनी समझ की जाँच करना चाहेंगे।

E6) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

क) $\int \cos^7 x\, dx$ ख) $\int \cos^8 x\, dx$

अगले उदाहरण में, हम $\sin^n x$ को समाकलित करने के लिए समानयन सूत्र को निगमित करेंगे।

उदाहरण 9 : $\int \sin^n x dx$ का मान निकालने के लिए, हम लिखते हैं:

$$I'_n = \int \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-1} x \ \sin x\, dx, \text{ यदि } n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \text{ है।}$$

$\sin^{n-1} x$ को पहला फलन तथा $\sin x$ को दूसरा फलन लेते हुए, मानों द्वारा समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$I'_n = -\sin^{n-1} x \cos x - (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos x(-\cos x)\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\left[\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx\right]$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\left[\int \sin^{n-2} x\, dx - \int \sin^n x\, dx\right]$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\,[I'_{n-2} - I'_n]$$

अतः, $I'_n + (n-1)I'_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I'_{n-2}$ है।

अर्थात्, $nI'_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I'_{n-2}$

या $I'_n = \dfrac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n} I'_{n-2}$ है। ... (10)

यह $\int \sin^n x\, dx$ के लिए समानयन सूत्र ($n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ के लिए मान्य) है।

***

समीकरण 9 के अनुप्रयोग को समझने में सहायता के लिए, यहाँ एक उदाहरण है।

उदाहरण 9 : समीकरण (10) का प्रयोग करते हुए, $\int \sin^6 x\, dx$ का मान निकालिए।

हल : समीकरण (10) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^6 x\, dx = I_6 = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} I_4'$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6}\left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} I_2'\right)$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x + \frac{15}{24}\left(-\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} I_0'\right)$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x - \frac{15}{48}\sin x \cos x + \frac{15}{48}x + C$$

***

उपरोक्त उदाहरण के बारे में अपनी समझ की जाँच करने के लिए निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E7) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए :

क) $\int \sin^7 x\, dx$ ख) $\int \sin^8 x\, dx$

आइए अब $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ और $\int_0^{\frac{\pi}{e}} \cos^n x\, dx$ के लिए, समावयन सूत्र निगमित करें, एक स्वाभाविक प्रश्न जो आपके मस्तिष्क में उठ सकता है वह यह है "हम इन समाकल्यों के पूर्वगों को ज्ञात करने के लिए निगमित किए गए सूत्र का प्रयोग करके और कलन की मूल भूत प्रमेय का अनुप्रयोग क्यों नहीं कर सकते?

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए, व्यापक स्थिति लेने से पहले, आइए हम एक विशिष्ट स्थिति पर विचार करें।

उदाहरण 10 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx$ का मान निकालिए।

हल : हम वे अभिकलन कर सकते हैं, जो हमने उदाहरण 9 में किए थे तथा प्राप्त कर सकते हैं:

$$\int \sin^6 x\, dx = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x - \frac{15}{48}\sin x \cos x + \frac{15}{48}x + C$$

ध्यान दीजिए कि क्योंकि $\sin 0 = 0$ है और $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ है, इसलिए $\sin^p x \cos^q x$, $p, q > 0$ के रूप के सभी व्यंजक 0 और $\frac{\pi}{2}$ दोनों पर लुप्त (शून्य) हो जाते हैं।

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \left\{\left(\frac{15}{48}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{15}{48}\right)\cdot 0\right\} = \frac{5\pi}{16} \text{ है।}$$

जैसा कि हमने देखा कि $\sin^p x \cos^q x$, $p, q > 0$ समाकलन की उपरि और निम्न दोनों सीमाओं पर, अर्थात् क्रमशः $\frac{\pi}{2}$ और 0 पर लुप्त हो जाता है, आइए देखें कि क्या हम इस तथ्य का निश्चित समाकल $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx$ के अभिकलन के सरलीकरण में उपयोग कर सकते हैं। सर्वप्रथम, हम देखते हैं कि

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left.\frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx,\ n \geq 2 \qquad \ldots (11)$$

समीकरण (11) का बार-बार अनुप्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{5}{16}\pi$$

उदाहरण 11 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ और $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ के लिए समानयन सूत्रों को निगमित कीजिए।

हल : जैसा कि हमने समीकरण (12) में देखा था,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx,\ n \geq 2$$

इस सूत्र का बार-बार, उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx, & \text{यदि } n \geq 3 \text{ एक विषम संख्या है।} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx, & \text{यदि } n \geq 2 \text{ एक सम संख्या है।} \end{cases}$$

इसका अर्थ है कि

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & \text{यदि } n \geq 3 \text{ एक विषम संख्या है।} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & \text{यदि } n \geq 2 \text{ एक सम संख्या है।} \end{cases}$$

आप गुणकों (factors) के क्रम को उलट सकते हैं तथा इसे इस रूप में लिख सकते हैं:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{n-3}{n-2}\ \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}, & n \text{ विषम है, } n = 2k+1, n \geq 3 \text{ है।} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{n-1}{n}\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}, \dfrac{\pi}{2} & n \text{ सम है, } n = 2k,\ n \geq 2 \text{ है।} \end{cases} \qquad \ldots (12)$$

प्रतिस्थापन $x = \frac{\pi}{2} - u$ करने पर, हम $du = -dx$ प्राप्त करते हैं। जब $x = 0$, तब $u = \frac{\pi}{2}$ है। जब $x = \frac{\pi}{2}$, तब $u = 0$ है। अतः,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\, du \text{ है।}$$

इसलिए, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{n-3}{n-2}\ \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}, & n \text{ विषम है, } n = 2k+1, n \geq 3 \text{ है।} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{n-1}{n}\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ सम है, } n = 2k,\ n \geq 2 \text{ है।} \end{cases} \qquad \ldots (13)$$

जॉन वालिस
(1616–1703)

समीकरण (12) और समीकरण (13) के सूत्र एक अंग्रेज गणितज्ञ जॉन वालिस के नाम पर **वालिस-सूत्र** के रूप में जाने जाते हैं।

आइए अब यह देखने के लिए कि इन सूत्रों का किस प्रकार अनुप्रयोग किया जाता है एक उदाहरण पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 12 : निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\,dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx$

हल : i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\,dx = \frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi$$

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx = \frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3\cdot1} = \frac{16}{35}$$

***

E8) मान निकालिए : i) $\int_0^{\pi/2} \cos^9 x\,dx$ ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$

19.3.2 $\int \tan^n x\,dx$ और $\int \sec^n x\,dx$ के लिए समानयन सूत्र

इस उपभाग में, हम दो अन्य त्रिकोणमितीय फलनों $\tan x$ और $\sec x$ को लेंगे। अर्थात् हम $\int \tan^n x\,dx$ और $\int \sec^n x\,dx$ के लिए समानयन सूत्र निगमित करेंगे। $\int \tan^n x\,dx,\ n \in \mathbb{Z}$ के लिए सूत्र निगमित करने के लिए, हम कुछ अलग प्रकार से प्रारंभ करते हैं।

$\tan^n x = \tan x \tan^{n-1} x$ लिखने के स्थान पर, जो हमने $\sin^n x$ और $\cos^n x$ की स्थिति में किया था, हम $\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x$ लिखेंगे। आप शीघ्र ही इसका कारण देखेंगे। अतः, हम लिखते हैं:

$$\begin{aligned} I_n = \int \tan^n x\,dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\,dx \\ &= \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx \end{aligned} \quad \ldots (14)$$

आपने अवश्य ही यह प्रेक्षित कर लिया होगा कि दाएँ पक्ष में दूसरा समाकल I_{n-2} है। अब, दाएँ पक्ष के पहले समाकल में समाकल्य $[f(x)]^m.f'(x)$ के रूप का है। जैसा कि हम इकाई 18 में देख चुके हैं,

$\int [f(x)]^m f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1} + c$ है।

इस प्रकार, $\int \tan^{n-2} x \sec^2 x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C$ है, जब $n \neq 1$ है।

अतः, समीकरण 14 से $I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, $\int \tan^n x\,dx$ के लिए, समानयन सूत्र है:

$$\int \tan^n x\, dx = I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}, \text{ यदि } n \neq 1 \qquad \dots (15)$$

हम पहले से जानते हैं कि यदि $n = 1$ है, तो $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$ है।

$\int \sec^n x\, dx$, $(n > 2)$ के लिए, समानयन सूत्र निगमित करने के लिए, हम पहले $\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x$ लिखते हैं और फिर भागों द्वारा समाकलित करते हैं। इस प्रकार,

$$\begin{aligned} I_n = \int \sec^n x\, dx &= \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-3} x \sec x \tan^2 x\, dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x\, dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\, (I_n - I_{n-2}) \end{aligned}$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sec^n x\, dx = I_n = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \text{ यदि } n \neq 1 \qquad \dots (16)$$

हम पहले से जानते हैं कि यदि $n = 1$ है, तो $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ है।

आइए अब कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 13 : निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int_0^{\pi/4} \tan^5 x\, dx$ ii) $\int_0^{\pi/4} \sec^6 x\, dx$

हल : i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan^5 x\, dx &= \left.\frac{\tan^4 x}{4}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^3 x\, dx = \left.\frac{1}{4} - \frac{\tan^2 x}{2}\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \tan x\, dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\frac{1}{4} - \ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} \\ &= -\frac{1}{4} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 = -\frac{1}{4} + \ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \sec^6 x\, dx &= \left.\frac{\sec^4 x \tan x}{5}\right]_0^{\pi/4} + \frac{4}{5} \int_0^{\pi/4} \sec^4 x\, dx \\ &= \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \left\{ \left.\frac{\sec^2 x \tan x}{3}\right]_0^{\pi/4} + \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx \right\} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{8}{15} + \frac{8}{15} \int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx \\ &= \frac{4}{3} + \frac{8}{15} \tan x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{28}{15} \end{aligned}$$

***

इस भाग में हुई हमारी चर्चा के आधार पर, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर पाएँगे।

E9) $\int \cot^n x\,dx$ और $\int \text{cosec}^n x\,dx$ के लिए, निम्नलिखित समानयन सूत्रों को निगमित कीजिए:

i) $\int \cot^n x\,dx = I_n = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - I_{n-2}$

ii) $\int \text{cosec}^n x\,dx = I_n = -\frac{\text{cosec}^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

E10) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{cosec}^3 x\,dx$ ii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^4 x\,dx$ iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x\,dx$ iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5 x\,dx$

19.4 त्रिकोणमितीय फलनों के गुणनफलों से संबद्ध समाकल

पिछले भाग में, हम उस स्थिति के लिए समानयन सूत्र देख चुके हैं जब समाकल्य एक अकेले त्रिकोणमितीय फलन की घातें थीं। यहाँ हम त्रिकोणमितीय फलनों की घातों के गुणनफलों से संबद्ध कुछ समाकल्यों पर विचार करेंगे। समानयन सूत्र ज्ञात करने की तकनीक में मौलिक रूप से समाकलन की खंडशः (भागों द्वारा समाकलन) विधि संबद्ध है। क्योंकि समाकल्य को दो फलनों के गुणनफल के रूप में लिखने की एक से अधिक विधियाँ हो सकती हैं, इसलिए आप देखेंगे कि एक ही समाकल के लिए, आप अनेक समानयन सूत्र प्राप्त कर सकते हैं। जिन दो प्रकार के समाकल्यों का अध्ययन हम इस भाग में करेंगे, उनमें से हम पहले समाकल्य से प्रारंभ करते हैं।

19.4.1 $\sin^m x \cos^n x$ प्रकार का समाकल्य

इकाई 18, उदाहरण 8 में हमने देखा था कि यदि घात विषम है तो हम sin और cos फलनों की घातों का और sinx और cosx के घातों का गुणनफलन का प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन कर सकते हैं। इस भाग में व्यापक स्थिति पर चर्चा करेंगे। पहले sinx और cosx के घातों के गुणनफलन के लिए समानयन सूत्र निगमित करेंगे।

फलन $\sin^m x \cos^n x$ दो प्राचलों m और n पर आश्रित है। $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ के लिए समानयन सूत्र ज्ञात करने के लिए, आइए

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\,dx \text{ लिखें।}$$

अब हम समानयन सूत्रों के तीन रूप पर चर्चा करेंगे।

प्रमेय 1 : हमें प्राप्त है:

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \text{ यदि } m \neq -1,\ m+n \neq 0 \quad \ldots(17)$$

$$I_{m,n} = \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \text{ यदि } n \neq -1,\ m+n \neq 0 \quad \ldots(18)$$

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n+2} \text{ यदि } n \neq -1 \quad \ldots(19)$$

आप शायद सोच रहे होंगे कि हमें तीन विभिन्न समानयन सूत्रों की आवश्यकता क्यों है। इन सूत्रों के निगमन का कार्य करने से पहले, आइए देखें ऐसा क्यों है। हम समीकरण (17) का उपयोग करते हैं, यदि $n < m$ है तथा हम $\cos x$ की घात को कम करना चाहते हैं। इसका उपयोग करके हम $I_{m,n}$ को $I_{m,1}$ में समानयन कर (बदल) सकते हैं, यदि n विषम है तथा समाकल $\int \sin^m x\, dx$ के समानयन कर सकते हैं, यदि n सम है। यदि $n = 1$ है, तो

$$I_{m,1} = \int \sin^m x \cos x\, dx = \begin{cases} \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C & \text{यदि } m \neq -1 \\ \ln|\sin x| + C & \text{यदि } m = -1 \end{cases} \qquad \ldots (20)$$

हम समीकरण (18) का उपयोग करते हैं, यदि $n > m$ है तथा हम $\sin x$ की घात को कम करना चाहते हैं। इस स्थिति में, हम अंत में $\int \sin x \cos^n x\, dx$ तक पहुँचते हैं, यदि m विषम है तथा $\int \cos^n x\, dx$ तक पहुँचते हैं, यदि m सम है। यदि $m = 1$ है तो

$$I_{1,n} = \int \sin x \cos^n x\, dx = \begin{cases} -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C & \text{यदि } n \neq -1 \\ \ln|\text{cosec}\, x| + C & \text{यदि } n = -1 \end{cases} \qquad \ldots (21)$$

$\cos x$ की ऋणात्मक घातों को हटाने के लिए, हम समीकरण (19) का उपयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, समाकल $\int \sin^4 x \tan^4 x\, dx$ पर विचार कीजिए। हम इसे $\int \sin^8 x \cos^{-4} x\, dx$ के रूप में लिख सकते हैं तथा समस्या को $\int \sin^4 x\, dx$ ज्ञात करने में बदलने के लिए समीकरण (19) का दो बार अनुप्रयोग करते हैं। हम पहले से ही जानते हैं कि इस समाकल के साथ किस प्रकार कार्य किया जाता है।

प्रमेय 1 की उपपत्ति : पहले हम समीकरण (17) निगमित करते हैं।

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-1} x (\sin^m x \cos x)\, dx$$

भागों द्वारा समाकलन से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} \\ &\quad - \int (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} dx, \text{ यदि } m \neq -1 \\ &= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \left(1 - \cos^2 x\right) dx \\ &= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \left(I_{m,n-2} - I_{m,n}\right) \end{aligned}$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{m+n}{m+1} I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}$$

यह हमें $I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$ प्रदान करता है,

यदि $m \neq -1, m+n \neq 0$ है। यही समीकरण (17) है।

समीकरण (18) को निगमित करने के लिए, हम लिखते हैं:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x (\cos^n x \sin x) \, dx$$

इसे भागों द्वारा समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_{m,n} = \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1}$$
$$-(m-1)\int \sin^{m-2} x \cos x \frac{(-\cos^{n+1} x)}{n+1} dx, \; n \neq -1 \text{ के लिए}$$
$$= \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x (1-\sin^2 x) \, dx$$
$$= \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\left(I_{m-2,n} - I_{m,n}\right)$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{m+n}{n+1} I_{m,n} = \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + I_{m-2,n}$$

इससे हमें प्राप्त होता है:

$$I_{m,n} = \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}, \text{ यदि } m+n \neq 0, n \neq -1 \text{ है।}$$

समीकरण (19) को निगमित करने के लिए, हम लिखते हैं:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\int \sin^{m-1} x \cos^n x (-\sin x) \, dx$$
$$= -\left(\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx\right) \text{ यदि } n \neq -1 \text{ है।}$$
$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n+2}, \text{ यदि } n \neq -1 \text{ है।}$$

ध्यान दीजिए कि यदि $m + n = 0$ है, तो यदि $m > 0$ हम $\int \tan^m x \, dx$ के लिए समानयन सूत्र का उपयोग कर सकते हैं तथा यदि $n > 0$, $\int \cot^n x \, dx$ के लिए समानयन सूत्र का उपयोग कर सकते हैं।

आइए अब प्रमेय 1 के अनुप्रयोग को समझने के लिए एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 14 : निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \sin^4 x \cos^8 x \, dx$ ii) $\int \sin^8 x \cos^4 x \, dx$ iii) $\int \sin^4 x \tan^4 x \, dx$

हल : i) समीकरण (18) के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^4 x \cos^8 x \, dx = I_{4,8} = -\frac{1}{12}\sin^3 x \cos^9 x + \frac{3}{12} I_{2,8}$$

$$= -\frac{1}{12}\sin^3 x\cos^9 x + \frac{3}{12}\left(-\frac{1}{10}\sin x\cos^9 x + \frac{1}{10}I_{0,8}\right)$$

$$= -\frac{1}{12}\sin^3 x\cos^9 x - \frac{1}{40}\sin x\cos^9 x + \frac{1}{40}\int \cos^8 x\,dx$$

प्रश्न 5) ii) से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \cos^8 x\,dx = \frac{\cos^7 x\sin x}{8} + \frac{7\cos^5 x\sin x}{48} + \frac{35\cos^3 x\sin x}{192} + \frac{105}{384}\cos x\sin x + \frac{105}{384}x + C$$

$$\therefore \int \sin^4 x\cos^8 x\,dx = -\frac{1}{12}\sin^3 x\cos^9 x - \frac{1}{40}\sin x\cos^9 x + \frac{1}{320}\sin x\cos^7 x + \frac{7}{1920}\sin x\cos^5 x + \frac{7}{1536}\sin x\cos^3 x + \frac{21}{3072}\sin x\cos x + \frac{21}{3072}x + C$$

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^8 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{12}\sin^9 x\cos^3 x + \frac{3}{12}I_{8,2}$$

$$= \frac{1}{12}\sin^9 x\cos^3 x + \frac{3}{12}\left(\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x + \frac{1}{10}I_{8,0}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\cos^3 x\sin^9 x + \frac{1}{40}\cos x\sin^9 x + \frac{1}{40}\int \sin^8 x\,dx$$

प्रश्न 6 से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^8 x\,dx = -\frac{1}{8}\sin^7 x\cos x - \frac{7}{48}\sin^5 x\cos x - \frac{35}{192}\sin^3 x\cos x - \frac{105}{384}\sin x\cos x + \frac{105}{384}x + C$$

$$\int \sin^8 x\cos x\,dx = \frac{1}{12}\cos^3 x\sin^9 x + \frac{1}{40}\cos x\sin^9 x - \frac{1}{320}\sin^7 x\cos x - \frac{7}{1920}\sin^5 x\cos x - \frac{7}{1536}\sin^3 x\cos x - \frac{21}{3072}\sin x\cos x - \frac{21}{3072}x + C$$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^4 x\tan^4 x\,dx = \int \sin^4 x\sin^4 x(\cos x)^{-4}\,dx = \int \sin^8 x(\cos x)^{-4}\,dx$$

यहाँ $\cos x$ की घात का परिणाम बहुत छोटा है। $\cos x$ की घात ऋणात्मक है तथा समीकरण (19) वास्तव में $\cos x$ वाले पद की घात में दो जोड़ देती है। इसलिए, हम समीकरण (19) का उपयोग करके हम cos वाले पद से छुटकारा पा सकते हैं।

$$\int \sin^4 x \tan^4 x\, dx = -\frac{1}{(-3)} \sin^7 x (\cos x)^{-3} + \frac{7}{(-3)} I_{6,-2}$$

$$= \frac{1}{3} \sin^7 x (\cos x)^{-3} - \frac{7}{3} \left(-\frac{1}{(-1)} \sin^5 x (\cos x)^{-1} + \frac{5}{-1} I_{4,0} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \sin^7 x (\cos x)^{-3} - \frac{7}{3} \sin^5 x (\cos x)^{-1} + \frac{35}{3} I_{4,0}$$

समीकरण (10) के उपयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{2} \left(-\sin x \cos x + \int dx \right) \right\}$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} \sin x \cos x - \frac{3}{8} x + C$$

$$\therefore \int \sin^4 x \tan^4 x\, dx = \frac{1}{3} \sin^7 x (\cos x)^{-3} - \frac{7}{3} \sin^5 x (\cos x)^{-1} - \frac{35}{12} \sin^3 x \cos x - \frac{105}{24} \sin x \cos x + \frac{105}{24} x + C$$

***

E12) समाकलों के मान निकालिए: क) $\int \sin^4 x \cos^6 x\, dx$ ख) $\int \sin^6 x \cos^4 x\, dx$
ग) $\int \sin^4 x \tan^2 x\, dx$ घ) $\int \sec x \operatorname{cosec} x\, dx$

19.4.2 $e^{ax} \sin^n x$ के प्रकार के समाकल्य

इस उपभाग में, हम उन समाकलों के मान निकालने पर विचार करेंगे, जहाँ समाकल्य एक त्रिकोणमितीय फलन की घात और एक चरघातांकीय फलन का गुणनफल होगा। अर्थात् हम $e^{ax} \sin^n x$ के प्रकार के समाकल्यों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 15 : $\int e^{ax} \sin^n x\, dx$ को समाकलित करने के लिए, समानयन सूत्र का निगमन कीजिए।

हल : आइए $\int e^{ax} \sin^n x\, dx$ को L_n से व्यक्त करें तथा $\sin^n x$ को पहला फलन और e^{ax} को दूसरा फलन लेते हुए, भागों द्वारा समाकलित करें। इससे हमें प्राप्त होता है:

$$L_n = \frac{1}{a} e^{ax} \sin^n x - \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x\, dx$$

अब हम दाएँ पक्ष के समाकल को पुनः भागों द्वारा, $\sin^{n-1} x \cos x$ को पहला फलन और e^{ax} को दूसरा फलन लेकर, समाकलित करेंगे।

हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{1}{a} \int e^{ax} \left((n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x \right) dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin^{n-1}x\cos x - \frac{n-1}{a}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)\,dx$$
$$+\frac{1}{a}\int e^{ax}\sin^n x\,dx$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin^{n-1}x\cos x - \frac{n-1}{a}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx$$
$$+\frac{n-1}{a}\int e^{ax}\sin^n x\,dx + \frac{1}{a}\int e^{ax}\sin^n x\,dx$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{a}L_{n-2} + \frac{n-1}{a}L_n + \frac{1}{a}L_n$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{a}L_{n-2} + \frac{n}{a}L_n$$
$$\therefore L_n = \frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x - \frac{n}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\sin^{n-1}\cos x\right.$$
$$\left.+\frac{n-1}{a}L_{n-2} + \frac{n}{a}L_n\right)$$

इसका अर्थ है कि

$$L_n = \frac{e^{ax}}{a}\sin^n x - \frac{ne^{ax}}{a^2}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n(n-1)}{a^2}L_{n-2} - \frac{n^2}{a^2}L_n \text{ है।}$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\left(1+\frac{n^2}{a^2}\right)L_n = (a\sin x - n\cos x)\frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2} + \frac{n(n-1)}{a^2}L_{n-2}$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों को $\frac{a^2}{n^2+a^2}$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$L_n = (a\sin x - n\cos x)\frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{n^2+a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}L_{n-2}. \qquad \ldots(22)$$

कोई L_n दिया होने पर, हम इस समानयन सूत्र का प्रयोग तब तक बार-बार करते हैं, जब तक कि हमें L_1 या L_0 (n के विषम या सम होने पर निर्भर) प्राप्त न हो जाए। जैसा कि हम देखेंगे कि L_0 औरे L_1 के इकाई 18 में विकसित की गई विधियों से, मान निकालना सरल है। इसका अर्थ है कि L_n का किसी भी घनात्मक पूर्णांक n के लिए मान निकाला जा सकता है।

***

आइए यह देखने के लिए कि अभी हमारे द्वारा निगमित समानयन सूत्र का हम किस प्रकार उपयोग कर सकते हैं एक उदाहरण पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 16 : निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int e^{3x}\sin^4 x\,dx$ ii) $\int e^{2x}\sin^5 x\,dx$

हल : हम $a = 3$ और $n = 4$ के साथ समीकरण (23) का अनुप्रयोग करके, प्राप्त करते हैं: $\int e^{3x}\sin^4 x\,dx = L_4 = \frac{(3\sin x - 4\cos x)e^{3x}\sin^3 x}{16+9} + \frac{4(4-1)}{16+9}L_2$

$n = 2$ और $a = 3$ के साथ समीकरण (22) के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$L_2 = \frac{(3\sin x - 2\cos x)e^{3x}\sin x}{4+9} + \frac{2}{4+9}L_0$$

$$L_0 = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C \text{ है।}$$

$$\therefore L_2 = \frac{(3\sin x - 2\cos x)e^{3x}\sin x}{13} + \frac{2}{39}e^{3x} + C$$

$$\therefore L_4 = \frac{(3\sin x - 4\cos x)e^{3x}\sin^3 x}{25} + \frac{12(3\sin x - 2\cos x)e^{3x}\sin x}{325} + \frac{8}{325} + C$$

ii) समीकरण (22) का बार-बार उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{2x}\sin^5 x\,dx = L_5 = \frac{(2\sin x - 5\cos x)e^{2x}\sin^4 x}{29} + \frac{20}{29}L_3$$

$$L_3 = \frac{(2\sin x - 3\cos x)e^{2x}\sin^2 x}{13} + \frac{6}{13}L_1$$

इकाई (18) की समीकरण (24) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

$$\therefore L_1 = \frac{1}{1+4}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$$

$$\therefore L_3 = \frac{(2\sin x - 3\cos x)e^{2x}\sin^2 x}{13} + \frac{6}{13}\left(\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x)\right) + C$$

$$\therefore L_5 = \frac{(2\sin x - 5\cos x)e^{2x}\sin^4 x}{29} + \frac{20}{29}\left\{\frac{(2\sin x - 3\cos x)e^{2x}\sin^2 x}{13} + \frac{6e^{2x}}{65}(2\sin x - \cos x)\right\} + C$$

$$= \frac{(2\sin x - 5\cos x)e^{2x}\sin^4 x}{29} + \frac{20(2\sin x - 3\cos x)e^{2x}\sin^2 x}{377} + \frac{24}{377}(2\sin x - \cos x) + C$$

***

टिप्पणी 1 : यदि L_n में हम $a = 0$ रखें, तो समाकल $\int \sin^n x\,dx$ का रूप ले लेता है। इससे सुझाव मिलता है कि भाग 19.3 में जो हमने $\int \sin^n x\,dx$ के लिए समानयन सूत्र निगमित किया था वह L_n के लिए समानयन सूत्र की एक विशिष्ट स्थिति ही है।

यदि आपने इस उपभाग के तर्कों का समीपता से अनुसरण कर लिया है, तो आपको नीचे दिए प्रश्नों को हल करने में समर्थ हो जाना चाहिए।

E13) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int e^{4x} \sin^3 x\,dx$ ii) $\int e^{5x} \sin^2 x\,dx$

E14) सिद्ध कीजिए यदि $C_n = \int e^{ax} \cos^n x\,dx$ है, तो

$$C_n = \frac{(a\cos x + n\sin x)e^{ax}\cos^{n-1} x}{n^2+a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}C_{n-2} \text{ है।}$$

E15) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int e^{3x} \cos^2 x\,dx$ ii) $\int e^{2x} \cos^3 x\,dx$

E16) सत्यापन कीजिए कि $\int \cos^n x\,dx$ के लिए समानयन सूत्र प्रश्न 13 के समानयन सूत्र की एक विशिष्ट स्थिति ही है।

यह हमें इस इकाई की समाप्ति पर पहुँचा देता है। अब हम संक्षिप्त में यह बताएँगे कि हमने इस इकाई में क्या किया है।

19.5 सारांश

एक समानयन सूत्र वह सूत्र होता है, जो एक प्राचल पर आश्रित (निर्भर) समाकल को एक ऐसे ही प्राचल के कम मान वाले समाकल से जोड़ता है। इस इकाई में, हमने अनेक समानयन सूत्र निगमित किए हैं।

1) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx.$

2) $\int \sin^n x\,dx = \frac{-\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx,\ n \geq 2.$

3) $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx,\ n \geq 2.$

4) $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx,\ n > 2.$

5) $\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx,\ n > 2.$

6) हमें प्राप्त है।

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{n-1}{n} & \text{यदि n विषम है, } n \geq 3 \\ \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2} & \text{यदि n सम है, } n \geq 2 \end{cases}$$

7) यदि $n \neq -1$ और $m+n \neq 0$, हमें प्राप्त है।

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2} x\,dx,$$

$$= \frac{-\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x\cos^n x\,dx,\ m > 1$$

यदि $n \neq -1$ हमें प्राप्त है।

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n+2}, \text{ if } n \neq -1$$

8) $$\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{ae^{ax}\sin^n x}{n^2+a^2} - \frac{ne^{ax}\sin^{n-1} x\cos x}{n^2+a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\int e^{ax}\sin^{n-2} x\,dx$$

हमने देखा है कि समानयन सूत्रों के निगमित करने में संबद्ध मुख्य तकनीक भागों द्वारा समाकलन है। हम यह भी प्रेक्षित कर चुके हैं कि इसी तकनीक का उपयोग करते हुए, अनेक और भी त्रिकोणमितीय और अतिपरवलीय फलनों से संबद्ध समानयन सूत्रों को निगमित किया जा सकता है।

19.6 हल / उत्तर

E1) ठीक उदाहरण 1 की तरह ही कार्य करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x^n e^{ax}\,dx = x^n\int e^{ax}\,dx - \int\left(nx^{n-1}\int e^{ax}\,dx\right)dx$$
$$= x^n\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) - n\int x^{n-1}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)dx$$

$I_n = \int x^n e^{ax}\,dx$ लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_n = \frac{1}{a}\left(x^n e^{ax} - nI_{n-1}\right)$$

हम प्राप्त करते हैं:

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(x^3e^{2x} - 3I_2\right)$$
$$I_2 = \frac{1}{2}\left(x^2e^{2x} - 2I_1\right)$$
$$I_1 = \frac{1}{2}\left(xe^{x} - I_0\right)$$
$$I_0 = \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$
$$\therefore\ I_3 = \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(x^2e^{2x} - 2I_1\right)\right\}$$
$$= \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3x^2e^{2x}}{4} + 3\left\{\frac{1}{2}\left(xe^{2x} - I_0\right)\right\}$$
$$= \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3x^2e^{2x}}{4} + \frac{3xe^{2x}}{2} - \frac{3e^{2x}}{4} + C$$

E2) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int\frac{x^2}{(1+2x)^3}\,dx = I_{2,-3} = \frac{1}{2(-3+1)}\left(\frac{x^2}{(1+2x)^2} - 2I_{1,-2}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{x}{(1+2x)^2} - 2\left\{\frac{1}{(-2+1)}\left(\frac{x}{1+2x} - I_{0,-1}\right)\right\}\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(1+2x)^2} + \frac{x}{1+2x} + 2\int\frac{dx}{1+2x}\right\}$$
$$= -\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(1+2x)^2} + \frac{x}{1+2x} + \ln|1+2x| + C\right\}$$

E3) हम $(ax+b)$ की घात को एक कम करना चाहते हैं। इसलिए हम $(ax+b)^m$ को दूसरा गुणक चुनते हैं, जिससे उसको अवकलित करने पर घात एक कम हो जाएगी। हम मान लेते हैं कि $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ है। हमें प्राप्त होता है।

$$\int x^n(ax+b)^m = (ax+b)^m \int x^n\,dx - \int \frac{d}{dx}(ax+b)^m \left(\int x^n\,dx\right) dx$$

$$= \frac{x^{n+1}(ax+b)^m}{n+1} - \frac{am}{n+1} I_{n+1,m-1}$$

अतः, $I_{n,m} = \dfrac{x^{n+1}(ax+b)^m}{n+1} - \dfrac{am}{n+1} I_{n+1,m-1}$

इस सूत्र को प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x^{10}(3x+1)^2\,dx = I_{10,2} = \frac{(3x+1)^2 x^{11}}{11} - \frac{6}{11} I_{11,1}$$

$$I_{11,1} = \int x^{11}(3x+1)\,dx = 3\int x^{12}\,dx + \int x^{11}\,dx$$

$$= \frac{3x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + C$$

$$\therefore I_{10,2} = \frac{(3x+1)^2 x^{11}}{11} - \frac{18x^{13}}{143} - \frac{6x^{12}}{132} + C$$

E4) i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x^4 \sin 3x\,dx = I_4' = -\frac{x^4\cos 3x}{3} + \frac{4x^3 \sin 3x}{9} - \frac{12}{9} I_2'$$

$$= -\frac{x^4\cos 3x}{3} + \frac{4x^3 \sin 3x}{9} - \frac{4}{3}\left(-\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2x\sin 3x}{9} - \frac{2}{9} I_0'\right)$$

$$= \frac{-x^4\cos 3x}{3} + \frac{4x^3\sin 3x}{9} + \frac{4x^2\cos 3x}{9} - \frac{8x\sin 3x}{27} - \frac{8}{81}\cos 3x + C$$

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x^4\cos 5x\,dx = I_4 = \frac{x^4\sin 5x}{5} + \frac{4x^3\cos 5x}{25} - \frac{12}{25} I_2'$$

$$= \frac{x^4\sin 5x}{5} + \frac{4x^3\cos 5x}{25} - \frac{12}{25}\left(\frac{x^2\sin 5x}{5} + \frac{2x\cos 5x}{25} - \frac{2}{25}\int \cos 5x\,dx\right)$$

$$= \frac{x^4\sin 5x}{5} + \frac{4x^3\cos 5x}{25} - \frac{12x^2\sin 5x}{125} - \frac{24x\cos 5x}{625} + \frac{24}{3125}\sin 5x$$

E5) i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \cos^7 x\,dx = I_7 = \frac{1}{7}\cos^6 x\sin x + \frac{6}{7} I_5$$

$$= \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3\right)$$

$$= \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{35}\cos^4 x \sin x$$

$$+ \frac{24}{35}\left(\frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} I_1\right)$$

$$= \frac{1}{7}\cos^6 x \sin x + \frac{6}{35}\cos^4 x \sin x + \frac{8}{35}\cos^2 x \sin x$$

$$+ \frac{16}{35}\sin x + C$$

आप इस विधि की उस विधि से तुलना करना चाहेंगे जो हमने इकाई 18 के उदाहरण 8 में की थी। आप जाँच करने पर यह रोचक बात पाएँगे कि यहाँ हमारे द्वारा प्राप्त उत्तर वही है, जो इकाई 18 के उदाहरण 8 में प्राप्त हुआ था।

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \cos^8 x\, dx = I_8 = \frac{\cos^7 x \sin x}{8} + \frac{7}{8} I_6$$

$$= \frac{\cos^7 x \sin x}{8} + \frac{7\cos^5 x \sin x}{48} + \frac{35}{48} I_4$$

$$= \frac{\cos^7 x \sin x}{8} + \frac{7\cos^5 x \sin x}{48}$$

$$+ \frac{35\cos^3 x \sin x}{192} + \frac{105}{192} I_2$$

$$= \frac{\cos^7 x \sin x}{8} + \frac{7\cos^5 x \sin x}{48} + \frac{35\cos^3 x \sin x}{192}$$

$$+ \frac{105}{384}\cos x \sin x + \frac{105}{384} x + C$$

$$\int \sin^7 x\, dx = I'_7 = -\frac{1}{7}\sin^6 x \cos x + \frac{6}{7} I'_5$$

E6) i) हम प्राप्त करते हैं: $= -\frac{1}{7}\sin^6 x \cos x + \frac{6}{7}\left(-\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} I'_3\right)$

$$= -\frac{1}{7}\sin^6 x \cos x - \frac{6}{35}\sin^4 x \cos x$$

$$+ \frac{24}{35}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} I'_1\right)$$

$$= -\frac{1}{7}\sin^6 x \cos x - \frac{6}{35}\sin^4 x \cos x$$

$$- \frac{8}{35}\sin^2 x \cos x + \frac{16}{35}\cos x + C$$

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^8 x\, dx = I_8 = -\frac{1}{8}\sin^7 x \cos x + \frac{7}{8} I_6$$

$$= -\frac{1}{8}\sin^7 x \cos x + \frac{7}{8}\left(-\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} I_4\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\sin^7 x \cos x - \frac{7}{48}\sin^5 x \cos x$$

$$+\frac{35}{48}\left(-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}I_2\right)$$

$$=-\frac{1}{8}\sin^7 x\cos x-\frac{7}{48}\sin^5 x\cos x-\frac{35}{192}\sin^3 x\cos x$$

$$-\frac{105}{384}\sin x\cos x+\frac{105}{384}x+C$$

E7) i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 x\,dx=\frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}=\frac{128}{315}$$

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,dx=\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{32}$$

E8) i) हम प्राप्त करते हैं:

$$I_n=\int\cot^n x\,dx=\int\cot^{n-2}x\cot^2 x\,dx$$

$$=\int\cot^{n-2}x\left(\operatorname{cosec}^2 x-1\right)dx$$

$$=\int\cot^{n-2}x\operatorname{cosec}^2 x\,dx-\int\cot^{n-2}x\,dx$$

$$=\int\cot^{n-2}x\operatorname{cosec}^2 x\,dx-I_{n-2}$$

यदि $n-2\neq -1$ है, अर्थात् यदि $n\neq 1$ है, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$\int\cot^{n-2}x\operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\frac{\cot^{n-1}x}{n-1}$$

$$\therefore\ I_n=-\frac{\operatorname{cosec}^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$$ यदि $n\neq 1$ है।

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$I_n=\int\operatorname{cosec}^n x\,dx=\int\operatorname{cosec}^{n-2}x\operatorname{cosec}^2 x\,dx$$

$$=\operatorname{cosec}^{n-2}x(-\cot x)$$

$$-(n-2)\int\operatorname{cosec}^{n-3}x(-\operatorname{cosec}x\cot x)(-\cot x)\,dx$$

$$=-\operatorname{cosec}^{n-2}\cot x$$

$$-(n-2)\int\operatorname{cosec}^{n-2}x\left(\operatorname{cosec}^2 x-1\right)dx$$

$$=-\operatorname{cosec}^{n-2}x\cot x\,dx-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore (n-1)I_n=-\operatorname{cosec}^{n-2}x\cot x\,dx+(n-2)I_{n-2}$$

यदि $n\neq 1$ है, तो $I_n=-\dfrac{\operatorname{cosec}^{n-2}x\cot x}{n-1}+\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}$ है।

E9) i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec} x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(0-\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^4 x\,dx = -\frac{\cot^3 x}{3}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - I_2$$

$$= \left\{\left(-\frac{0}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)\right\} + \cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + I_0$$

$$= \frac{1}{3} + (0-1) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x\,dx = I_6 = \frac{\tan^5 x}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_4 = \frac{1}{5} - \left(\frac{\tan^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_2\right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \left(\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_0\right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$$

iv) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5 x\,dx = I_5 = \frac{\sec^3 x \tan x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{4}I_3$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{4} - 0\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\sec x \tan x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}I_1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) + \frac{3}{8}\left(\ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{7}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2})$$

E10) i) समीकरण (18) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx = I_{4,6} = -\frac{1}{10}\sin^3 x \cos^7 x + \frac{3}{10}I_{2,6}$$

$$= -\frac{1}{10}\sin^3 x\cos^7 x + \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x + \frac{1}{8}I_{2,6}\right)$$

$$= -\frac{1}{10}\sin^3 x\cos^7 x - \frac{3}{80}\sin x\cos^7 x + \frac{3}{80}I_{0,6}$$

उदाहरण 8 से, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_{0,6} = \int \cos^6 x\, dx = \frac{1}{6}\sin x\cos^5 x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{15}{48}\cos x\sin x + \frac{15}{48}x + C$$

$$\therefore \int \sin^4 x\cos^6 x\, dx = -\frac{1}{10}\sin^3 x\cos^7 x - \frac{3}{80}\sin x\cos^7 x + \frac{1}{160}\sin x\cos^5 x + \frac{1}{128}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{256}\sin x\cos x + \frac{3}{256}x + C$$

ii) समीकरण (17) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^6 x\cos^4 x\, dx = \frac{1}{10}\sin^7 x\cos^3 x + \frac{3}{10}I_{6,2}$$

$$= \frac{1}{10}\sin^7 x\cos^3 x + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{8}\sin^7 x\cos x + \frac{1}{8}I_{6,0}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\sin^7 x\cos^3 x + \frac{3}{80}\sin^7 x\cos x + \frac{3}{80}I_{6,0}$$

उदाहरण 9 से, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_{6,0} = \int \sin^6 x\, dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{15}{48}\sin x\cos x + \frac{15}{48}x + C$$

$$\therefore \int \sin^6 x\cos^4 x\, dx = \frac{1}{10}\sin^7 x\cos^3 x + \frac{3}{80}\sin^7 x\cos x - \frac{1}{160}\sin^5 x\cos x - \frac{1}{128}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{256}\sin x\cos x + \frac{3}{256}x + C$$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \sin^4 x\tan^2 x\, dx = \int \sin^6 x(\cos x)^{-2}\, dx = I_{6,-2}$$

$$= -\frac{1}{(-1)}\sin^5 x(\cos x)^{-1} + \frac{3}{(-1)}I_{4,0}$$

उदाहरण (14) iii) से, हम प्राप्त करते हैं:

$$I_{4,0} = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{8}\sin x\cos x - \frac{3}{8}x + C$$

$$\therefore \int \sin^4 x\tan^2 x\, dx = \sin^5 x\sec x + \frac{3}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{9}{8}\sin x\cos x + \frac{9}{8}x + C$$

iv) यहाँ, जो हमने समानयन सूत्र निगमित किया है, वह कार्य नहीं करेगा, क्योंकि m और n दोनों –1 हैं। परंतु, हम थोड़ी चतुराई (या कौशल) से इसे समाकलित कर सकते हैं।

$$\int \sec x \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{2}{2\sin x \cos x} dx$$
$$= 2\int \operatorname{cosec} 2x\, dx = -\ln|\operatorname{cosec} 2x + \cot x|\, dx + C$$

E11) i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{4x}\sin^3 x\, dx = \frac{(4\sin x - 3\cos x)e^{4x}\sin^2 x}{25} + \frac{6}{25}L_1$$
$$L_1 = \frac{1}{25}e^{4x}(4\sin x - \cos x) + C$$
$$\therefore \int e^{4x}\sin^2 x\, dx = \frac{(4\sin x - 3\cos x)e^{4x}\sin^2 x}{25}$$
$$+ \frac{6}{625}e^{4x}(4\sin x - \cos x) + C$$

ii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{5x}\sin^2 x\, dx = \frac{(5\sin x - 2\cos x)e^{5x}\sin x}{29} + \frac{2}{29}L_0$$
$$= \frac{(5\sin x - 2\cos x)e^{5x}\sin x}{29} + \frac{2}{145}e^{5x} + C$$

E12) हमें प्राप्त है:

$$\int e^{ax}\cos^n x\, dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos^n x - \frac{1}{a}\int e^{ax} n\cos^{n-1} x(-\sin x)\, dx$$
$$\int e^{ax}\cos^{n-1} x\sin x\, dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos^{n-1} x\sin x - \frac{1}{a}\int e^{ax}\frac{d}{dx}\left(\cos^{n-1} x\sin x\right) dx$$

हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{n-1} x\sin x\right) = (n-1)\cos^{n-2} x\left(-\sin^2 x\right) + \cos^n x$$
$$= -(n-1)\cos^{n-2} x\left(1-\cos^2 x\right) + \cos^n x$$
$$= -(n-1)\cos^{n-2} x + (n-1)\cos^n x + \cos^n x$$
$$= -(n-1)\cos^{n-2} x + n\cos^n x$$
$$\therefore \int e^{ax}\cos^{n-1} x\sin x\, dx = \frac{ne^{ax}}{a}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n(n-1)}{a}\int e^{ax}\cos^{n-2} x\, dx$$
$$- \frac{n}{a}\int e^{ax}\cos^n x\, dx$$
$$\therefore \int e^{ax}\cos^n x\, dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos^n x + \frac{e^{ax}}{a^2}\cos^{n-1} x\sin x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} x\, dx - \frac{n^2}{a^2}\int e^{ax}\cos^n x\, dx$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\left(1 + \frac{n^2}{a^2}\right)C_n = \frac{(a\cos x + n\sin x)}{a^2}e^{ax}\cos^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{a^2}C_{n-2}$$

दोनों पक्षों को $\frac{a^2}{n^2+a^2}$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$C_n = \frac{(a\cos x + n\sin x)}{n^2 + a^2} e^{ax} \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n^2 + a^2} C_{n-2} \qquad \ldots (23)$$

E13) क) $a = 3$ और $n = 2$ के साथ, समीकरण (23) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{3x} \cos^2 x\, dx = \frac{(3\cos x + 2\sin x)}{13} e^{3x} + \frac{2}{13} L_0$$

$$L_0 = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$\therefore \int e^{3x} \cos^2 x\, dx = \frac{(3\cos x + 2\sin x)}{13} e^{3x} + \frac{2}{39} e^{3x} + C$$

ख) $a = 2$ और $n = 3$ के साथ, समीकरण (23) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{2x} \cos^3 x\, dx = \frac{(2\cos x + 3\sin x)}{13} e^{2x} \cos^2 x + \frac{6}{13} \int e^{2x} \cos x\, dx$$

इकाई 18 से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{2x}}{a^2 + b^2} (a\cos x + b\sin bx) + C$$

$$\therefore \int e^{2x} \cos x\, dx = \frac{e^{2x}}{4+1} (2\cos x + \sin x) + C$$

$$\therefore \int e^{2x} \cos^3 x\, dx = \frac{(2\cos x + 3\sin x)}{13} e^{2x} \cos^2 x + \frac{6e^{2x}}{65} (2\cos x + \sin x) + C$$

E14) सूत्र

$$C_n = \frac{(a\cos x + n\sin x) e^{ax} \cos^{n-1} x}{n^2 + a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} C_{n-2}$$

हम प्राप्त करते है:

$$\int e^{0x} \cos^n x\, dx = \frac{(0\cos x + n\sin x) e^{0x} \cos^{n-1} x}{n^2 + 0^2} + \frac{n(n-1)}{n^2 + 0^2} \int e^{0x} \cos^{n-2} x\, dx$$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{n\sin x \cos^{n-1} x}{n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

जो $\int \cos^n x\, dx$ के लिए समानयन सूत्र है।

इकाई 20

समाकलन के अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

20.1 प्रस्तावना

आपको याद होगा कि इकाई 17 में हमने किसी फलन के निश्चित समाकल तथा उस फलन द्वारा परिभाषित वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल के बीच संबंध की चर्चा की थी। वहाँ, हमने देखा था कि किस प्रकार समाकलन की प्रक्रिया को उपयोग करके बड़ी संख्या में सूक्ष्मतः छोटे आयतों के जोड़ के किसी फलन के आलेख द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल को प्राप्त कर सकते हैं। इस इकाई में हम पुनः इसी बात की चर्चा करेंगे। इस इकाई के भाग 20.2 में, हम देखेंगे कि किस प्रकार एक समतल में हम किसी वक्र द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए समाकलन का उपयोग कर सकते हैं। हम ऐसा कार्तीय निर्देशांकों, ध्रुवीय निर्देशांकों तथा प्राचलिक रूपों का प्रयोग करते हुए निरूपित वक्रों के लिए करेंगे। भाग 20.3 में, हम इन्हीं धारणाओं का उपयोग समतल में वक्रों की लंबाइयाँ ज्ञात करने में करेंगे। यहाँ भी, हम तीनों रूपों, अर्थात् कार्तीय, ध्रुवीय या प्राचलिक रूप में निरूपित समतल वक्र की लंबाई ज्ञात करने की विधियों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप

- एक वक्र के अंतर्गत तथा दो वक्रों की बीच के क्षेत्रफल की संकल्पना को सम कर पाएँगे।
- एक वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल तथा कुछ सुप्रसिद्ध समतल वक्रों के बीच क्षेत्रफल को ज्ञात कर पाएँगे।

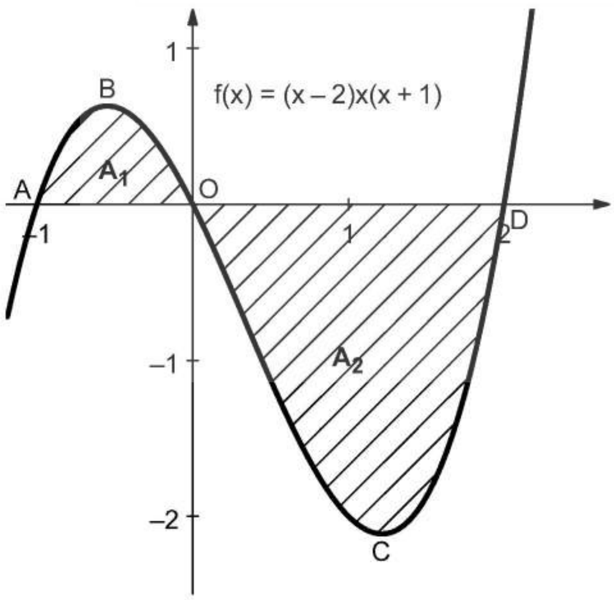
- वक्रों की लंबाई की संकल्पना को समझा सकेंगे।
- कुछ सुप्रसिद्ध समतल वक्रों के चाप की लंबाई ज्ञात कर पाएँगे।

20.2 एक वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल

याद कीजिए कि, इकाई 17 में, हमने देखा था कि एक वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल को आयतों द्वारा सन्निकटित किया जा सकता है। हमने देखा था कि सन्निकटन में हमारे द्वारा प्रयोग किए गए आयतों की संख्या में वृद्धि करते हुए, हम क्षेत्रफल के निकटतर तथा और निकटतर होते हुए, सन्निकटन को प्राप्त कर सकते हैं। हमने एक विभाजन से संबंधित उपरि और निम्न योगों की संकल्पना का उपयोग करते हुए, इस क्षेत्रफल की धारणा पर औपचारिक रूप से बात की थी। हमने देखा था उपरि योग क्षेत्रफल के लिए सन्निकटन ऊपर से देता है तथा निम्न योग क्षेत्रफल के लिए सन्निकटन नीचे से देता है। जब वह फलन समाकलनीय होता है, तब ये दोनों एक उभयनिष्ठ मान की ओर अग्रसर होते हैं, जो उस वक्र और x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल होता है।

इस भाग में, हम समाकलन का उपयोग करते हुए वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे। इससे पहले कि हम अपनी चर्चा प्रारंभ करें, हमें कुछ परिपाटियाँ स्थापित करने की आवश्यकता है, जो हमारी चर्चा को सुगम बनाएँगी।

आपने इस ओर ध्यान दिया होगा कि इकाई 17 में जो हमने सभी वक्र देखी थीं वे कार्तीय तल के उस भाग में थीं, जहाँ y-निर्देशांक 0 से बड़ा या 0 के बराबर था। तब क्या होगा जब हमें आकृति 1 दी हुई जैसी वक्र प्राप्त हो, जहाँ फलन ऋणात्मक मान भी ले सकता है?



आकृति 1: वक्र $f(x) = (x-2)x(x+1)$ और x-अक्ष द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

आइए -1 से 2 तक $f(x) = (x-2)x(x+1) = x^3 - x^2 - 2x$ के समाकलन द्वारा इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात करें। हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_{-1}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\Big|_{-1}^{2}=\left(4-\frac{8}{3}-4\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{9}{4}$$

परंतु क्षेत्रफल सदैव एक घनात्मक राशि होता है। हमारा उत्तर ऋणात्मक कैसे हो सकता है?

इसका उत्तर इसमें निहित है कि हमने उपरि और निम्न योगों को किस प्रकार परिभाषित किया है। इकाई 17 से, स्मरण कीजिए कि यदि एक फलन $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ तथा एक विभाजन $P=\{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$ दिया तो, हमने p के सापेक्ष f का उपरि योग $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n}M_k\Delta_i$ द्वारा परिभाषित किया था, जहाँ $\Delta_i=x_i-x_{i-1}$ है। यदि सभी $x\in[a,b]$ के लिए $f(x)\le 0$ है, तो सभी $k,\ 1\le k\le n$ के लिए $M_k\le 0$ है। क्योंकि $\Delta_i>0$ है, और इसलिए $M_k\Delta_k\le 0$ है। अतः, $\sum_{i=1}^{n}M_k\Delta_i\le 0$ है। इसलिए, यह आश्चर्य की बात नहीं है कि 'क्षेत्रफल', जो उपरि योगों का सीमांत मान है, ऋणात्मक हो।

इस अंतर्दृष्टि के साथ, आइए समाकल दो भागों में प्रथम कर लें। एक भाग में वह ऋणात्मक मान ग्रहण करता है तथा दूसरे भाग में धनात्मक मान ग्रहण करता है।

$$\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\Big|_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)=\frac{5}{12}$$

तथा $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\Big|_{0}^{2}=\left(4-\frac{8}{3}-4\right)-0=-\frac{8}{3}$ है।

यहाँ $\frac{5}{12}$ आकृति 1 में क्षेत्रफल A_1 है तथा $-\frac{8}{3}$ आकृति 1 में ऋणात्मक चिह्न के साथ क्षेत्रफल A_2 है। अतः, वास्तविक क्षेत्रफल $\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$ है।

व्यापक रूप में, यदि किसी अंतराल $[a,b]$ में $f(x)\le 0$ है, तो हम $x=a$ से $x=b$ तक वक्र $y=f(x)$ के अंतर्गत क्षेत्रफल को $-\int_a^b f(x)\,dx$ लेते हैं।

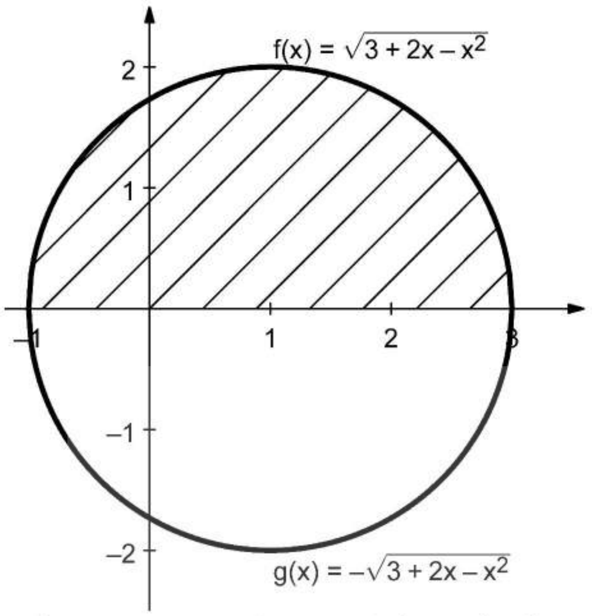
क्षेत्रफल ज्ञात करते समय, जहाँ भी संभव हो, हम विचाराधीन वक्र की सममिति का भी ध्यान रखेंगे तथा अपने को वक्र के केवल उस भाग तक सीमित रखेंगे जो x-अक्ष से ऊपर है। आइए अब एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 1 : वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यह द्वितीय घात की एक समीकरण है तथा x^2 और y^2 के गुणांक बराबर हैं। इसलिए, यह एक वृत्त की समीकरण है। वर्ग पूर्ण करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$(x-1)^2+y^2-4=0$ या $(x-1)^2+y^2=4$

यह केन्द्र $(1,0)$ और त्रिज्या 2 वाले एक वृत्त की समीकरण है।



आकृति 2: वक्र $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ के अंतर्गत क्षेत्रफल

हम इस समीकरण को $y^2 = 3+2x-x^2$ या $y = \pm\sqrt{3+2x-x^2}$ के रूप में पुनः लिख सकते हैं। चिह्न के प्रत्येक विकल्प से, हमें वक्र का अलग-अलग भाग प्राप्त होता है। समीकरण $y = \sqrt{3+2x-x^2}$ वक्र के उस भाग को प्रदान करती है, जो ऊपरी अर्धतल में है। समीकरण $y = -\sqrt{3+3x-x^2}$ वक्र के उस भाग को प्रदान करती है, जो निचले अर्धतल में है, अर्थात् कार्तीय तल का वह भाग जहाँ y-निर्देशांक ≤ 0 है।

क्योंकि यह वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित है, इसलिए इस वक्र द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ऊपरी अर्धतल वाले भाग के क्षेत्रफल का दुगुना है, अर्थात् कार्तीय तल के उस भाग के क्षेत्रफल का दुगुना है, जहाँ y-निर्देशांक ऋणेतर है। इसलिए, हमें आकृति 2 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तथा वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसको 2 से गुणा कर देना है। वह छायांकित भाग ऊपरी अर्धतल में है।

आकृति से, समाकलन की उपरि और निम्न सीमाएँ क्रमशः 3 और –1 है। अतः, वाँछित क्षेत्रफल है:

$$A = 2\int_{-1}^{3} \sqrt{3+2x-x^2}\,dx = 2\int_{-1}^{3} \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

$u = x-1$ प्रतिस्थापित करने पर, नई सीमाएँ $u = -2$ और $u = 2$ हैं। तब हम

$A = 2\int_{-2}^{2} \sqrt{2^2-u^2}\,du$ प्राप्त करते हैं।

$u = 2\sin\theta$ प्रतिस्थापित करने पर, हम $du = 2\cos\theta\, d\theta$ प्राप्त करते हैं। जब $u = -2$ है, तब $\sin\theta = -2$ या $\sin\theta = -1$ है। इसलिए, समाकलन की निम्न सीमा $\theta = -\frac{\pi}{2}$ है। जब $u = 2$ है, तब $\sin\theta = 1$ है। इसलिए उपरि सीमा $\theta = \frac{\pi}{2}$ है। साथ ही, क्योंकि $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में $\cos\theta \ge 0$ है, इसलिए

$\sqrt{2^2-u^2} = \sqrt{2^2-2^2\sin^2\theta} = 2\sqrt{1-\sin^2\theta} = 2\cos\theta$ है।

अतः, $A = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)(2\cos\theta)\,d\theta = 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$

$$= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 4\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{-\sin\pi}{2}\right)\right\} = 4\pi = \pi \times 2^2$$

यह उत्तर उसी मान के बराबर है, जो हमें हाई स्कूल में क्षेत्रमिति में अध्ययन किए गए त्रिज्या 2 वाले वृत्त के क्षेत्रफल के सूत्र से प्राप्त होता है।

***

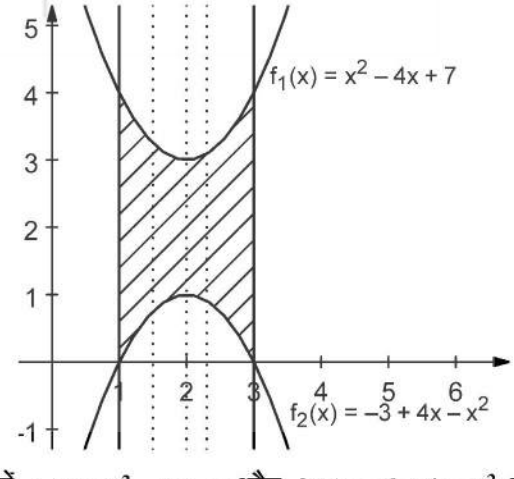
अगले उदाहरण में, हम दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 2 : वक्रों $y = x^2 - 4x + 7$ और $y = -3 + 4x - x^2$ तथा रेखाओं $x = 1$ और $x = 3$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त है:

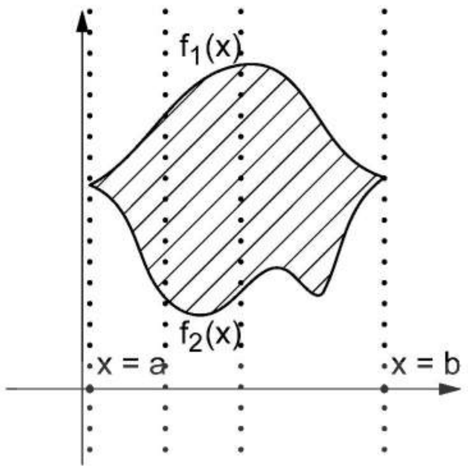
$x^2 - 4x + 7 - (-3 + 4x - x^2) = 2x^2 - 8x + 10$

$2x^2 - 8x + 10$ का विविक्तकर $64 - 80 = -16 < 0$ है। अतः, वक्र $y = 2x^2 - 8x + 7$ और $y = -3 + 4x - x^2$ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं। साथ ही, $2x^2 - 8x + 10$ सदैव ≥ 0 है। $f_1(x) = x^2 - 4x + 7$ और $f_2(x) = -3 + 4x - x^2$ लिखने पर, हम $f_1(x) \geq f_2(x)$ प्राप्त करते हैं, अर्थात् $f_1(x)$, $f_2(x)$ के ऊपर स्थित है। इन वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल आकृति 3 में दिखाया गया छायांकित क्षेत्र है।



आकृति 3: वक्रों $f_1(x) = x^2 - 4x + 7$ और $f_2(x) = -3 + 4x - x^2$ के बीच क्षेत्रफल

यह क्षेत्र **ऊर्ध्वाधरत : सरल क्षेत्र (Vertically simple region)** का एक उदाहरण है। हम कहते हैं कि किन्हीं दो फलनों $f_1(x)$ और $f_2(x)$ के आलेखों के बीच का क्षेत्र **ऊर्ध्वाधरतः सरल** है, यदि कोई ऊर्ध्वाधर रेखा उस क्षेत्र को या तो एक अकेले बिंदु में या एक रेखाखंड में प्रतिच्छेद करती है, जबकि उसका निम्न अंत-बिंदु $y = f_2(x)$ पर हो तथा उपरि अंत-बिंदु $y = f_1(x)$ पर हो। इसका एक अन्य उदाहरण आप आकृति 4 में देख सकते हैं।



आकृति 4: एक ऊर्ध्वाधरत : सरल क्षेत्र का उदाहरण

जैसा कि आप इस आकृति में देख सकते हैं, बाएँ और दाएँ सिरों पर बिंदुकित रेखाएँ वक्रों $y = f_1(x)$ और $y = f_2(x)$ के बीच के क्षेत्रफल को एक अकेले बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं। अन्य दोनों बिंदुकित रेखाएँ इन वक्रों के बीच के क्षेत्रफल को एक रेखाखंड के अनुदिश प्रतिच्छेद करती हैं, जबकि निम्न अंत-बिंदु $y = f_1(x)$ पर होता है तथा उपरि अंत-बिंदु $y = f_2(x)$ पर होता है। ऐसी स्थितियों में, वक्रों के बीच का क्षेत्रफल

$$\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx \text{ होता है।}$$

हमारी स्थिति में, वक्रों के बीच का क्षेत्रफल

$$\int_1^3 f_1(x)\,dx - \int_1^3 f_2(x)\,dx \text{ है।}$$

हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_1^3 f_1(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 7\right)\,dx = \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 7x\Big|_1^3$$

$$= (9 - 18 + 21) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 7\right) = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

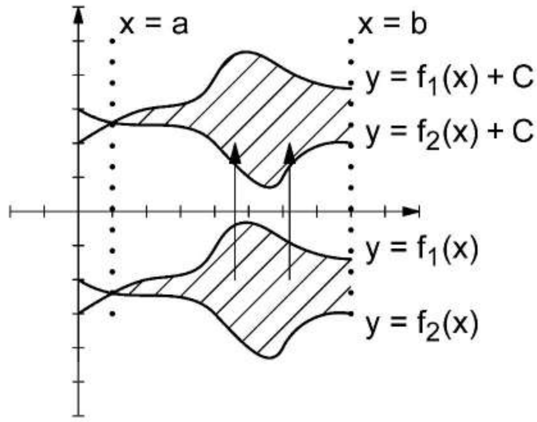
साथ ही, $\int_1^3 f_2(x)\,dx = \int_1^3 \left(-3 + 4x - x^2\right)\,dx = -3x + 4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_1^3$

$$= (-9 + 18 - 9) - \left(-3 + 2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \text{ है।}$$

अतः वक्रों के बीच का क्षेत्रफल $\frac{16}{3}$ है।

***

ध्यान दीजिए कि पिछले उदाहरण में, दो वक्रों $f_1(x) \geq 0$ है तथा $f_2(x) \geq 0$ के बीच के क्षेत्रफल को ज्ञात करने की हमारी विधि तब भी कार्य करती है, जब $f_1(x)$ और $f_2(x)$ ऋणेतर नहीं हों। क्यों? हम सदैव दोनों फलनों में, पर्याप्त रूप से बड़ा अचर C जोड़ कर फलनों को स्थानांतरित कर सकते हैं।



आकृति 5: ऋणेतर बनाने के लिए फलनों $f_1(x)$ और $f_2(x)$ का स्थानांतरण

आकृति 5 को देखिए। यहाँ, हम वक्रों $f_1(x)$ और $f_2(x)$ के बीच के क्षेत्रफल को ज्ञात करना चाहते हैं तथा इन दोनों के अंतराल [a, b] में ऋणात्मक मान हैं। इनको ऋणेतर बनाने के लिए, हम $f_1(x)$ और $f_2(x)$ में **एक ही** अचर C जोड़ते हैं। ध्यान दीजिए कि इस स्थानांतरण से क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है। अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$\text{वक्रों के बीच का क्षेत्रफल} = \int_a^b \left((f_1(x)+C)-(f_2(x)+C)\right) dx$$

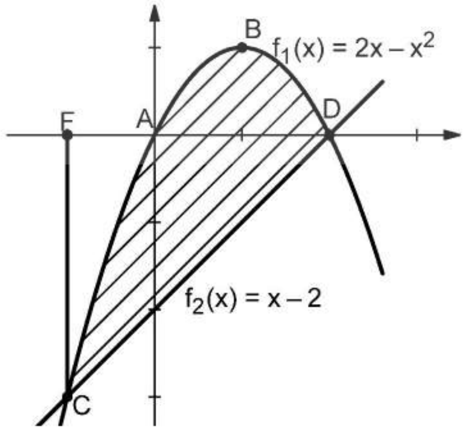
$$= \int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right) dx$$

इस प्रकार, हमारी यह विधि तब भी कार्य करती है, जब $f_1(x)$ और $f_2(x)$ ऋणात्मक मान ग्रहण कर लेते हैं।

आइए एक उदाहरण पर दृष्टि डालें, जहाँ $f_1(x)$ और $f_2(x)$ ऋणात्मक मान ग्रहण कर रहे हैं।

उदाहरण 3 : $x=-1$ से $x=2$ तक वक्रों $y=2x-x^2$ और $y=2-x$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : इन वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु का x-निर्देशांक $2x-x^2 = x-2$, अर्थात् $x^2-x-2=0$ द्वारा दिया जाता है। द्विघात बहुपद x^2-x-2 के **गुण्नखंड करने पर,** हम $(x-2)(x+1)=0$ प्राप्त करते हैं। अतः, ये दोनों वक्र परस्पर $x=-1$ और $x=2$ पर प्रतिच्छेद करती हैं। इनके प्रतिच्छेद बिंदु C और D हैं। आकृति 6 को देखिए।



आकृति 6: वक्रों $f_1(x) = 2x - x^2$ और $f_2(x) = x - 2$ के बीच का क्षेत्रफल

आइए $f_1(x) = 2x - x^2$ और $f_2(x) = x - 2$ लें। ध्यान दीजिए कि यद्यपि **अंतराल** $[-1,0]$ में ऋणात्मक मान ग्रहण करता है तथा $[-1,0]$ में $f_1(x)$ ऋणात्मक है, फिर भी वाँछित क्षेत्र ऊर्ध्वाधरतः सरल है।

आइए इसका सत्यापन करें कि $[-1, 2]$ में $f_1(x) \geq f_2(x)$ है। हम प्राप्त करते हैं:

$h(x) = 2x - x^2 - (x-2) = -x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2) = -(x-2)(x+1)$

ध्यान दीजिए कि $[-1, 2]$ में $x - 2 \leq 0$ है, क्योंकि $[-1, 2]$ में $x \leq 2$ है। इसी प्रकार, $[-1, 2]$ में $x \geq -1$ है। अतः, $[-1, 2]$ में $(x+1) \geq 0$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $[-1, 2]$ में $(x-2)(x+1) \leq 0$ है। इस प्रकार, $-(x-2)(x+1) \geq 0$ है।

वाँछित क्षेत्रफल है:

$$\int_{-1}^{2} \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{41}{6}$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 4 : स्ट्रोफायड (Strophoid) $y^2 = x^2\left(\frac{5-x}{5+x}\right)$ और रेखा $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 1$ के बीच के ऊपरी भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

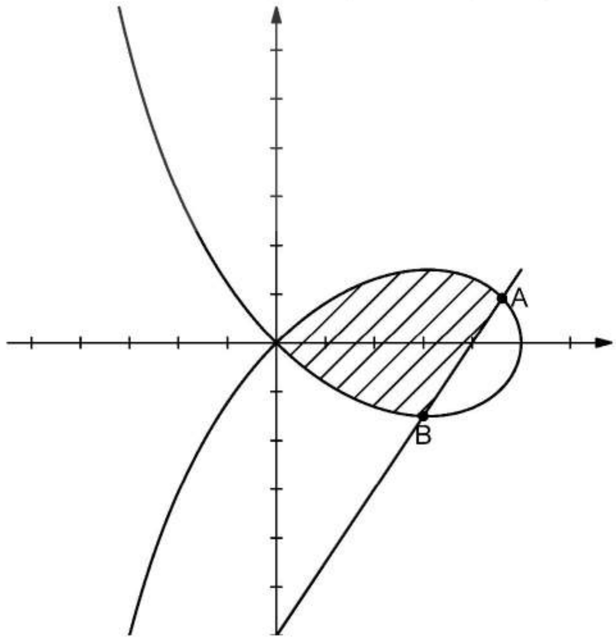
हल : हम इस वक्र का अनुरेखण आपके लिए छोड़ रहे हैं। आकृति 7 को देखिए। रेखा की समीकरण में से y के मान का प्रयोग कर स्ट्रोफायड की समीकरण में से y को निराकरण करने पर, हम, $x \neq -5$ के लिए, प्राप्त करते हैं।

$$\left(6\left(\frac{x}{4} - 1\right)\right)^2 = x^2\left(\frac{5-x}{5+x}\right) \text{ or } (5+x)\left(6\left(\frac{x}{4} - 1\right)\right)^2 = x^2(5-x)$$

अंतिम समीकरण को सरल करने पर, वक्र और रेखा के प्रतिच्छेद बिंदु निम्नलिखित द्वारा दिए जाते हैं:

$$\frac{13}{4}x^3 - \frac{47}{4}x^2 - 54x + 180 = \frac{1}{4}(x-3)(x+4)(13x-60)$$

ध्यान दीजिए कि स्ट्रोफायड के छल्ले (loop) (लूप) पर स्थित सभी बिंदुओं के लिए $x > 0$ है, क्योंकि यह छल्ला मानों $x \in [0, 5]$ के संगत है। इसलिए, रेखा और स्ट्रोफायड के छल्ले के प्रतिच्छेद बिंदु $A\left(\frac{60}{13}, \frac{12}{13}\right)$ और $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$ हैं।



आकृति 7: स्ट्रोफायड $y^2 = x^2\left(\frac{5-x}{5+x}\right)$ और रेखा $y = 6\left(\frac{x}{4} - 1\right)$ के बीच का क्षेत्रफल

हम $f_1(x)$ को इस प्रकार लेते हैं कि $y = f_1(x)$ का आलेख $x = 0$ से $x = \frac{60}{13}$ तक छल्ले का ऊपरी भाग हो। हम $f_2(x)$ को इस प्रकार चुनते हैं कि $x = 0$ से $x = \frac{60}{13}$ तक $y = f_2(x)$ मूलबिंदु से B से A तक के छल्ले का निचला भाग हो और उसके बाद B से A तक रेखा $y = 6\left(\frac{x}{4} - 1\right)$ हो। अतः, हम परिभाषित करते हैं कि $f_1(x) = x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}$, $x \in \left[0, \frac{60}{13}\right]$ के लिए है।

तथा $f_2(x) = \begin{cases} -x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}} & 0 \le x \le 3 \\ 6\left(\frac{x}{4} - 1\right) & 3 \le x \le \frac{60}{13} \end{cases}$ है।

अतः, वाँछित क्षेत्रफल है:

$$\int_0^{\frac{60}{13}} (f_1(x) - f_2(x))\, dx = \int_0^3 (f_1(x) - f_2(x))\, dx + \int_3^{\frac{60}{13}} (f_1(x) - f_2(x))$$
$$= 2\int_0^3 x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\, dx + \int_3^{\frac{60}{13}} x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\, dx - 6\int_3^{\frac{60}{13}} \left(\frac{x}{4} - 1\right) dx \qquad \ldots(1)$$

प्रतिस्थापन $x = 5\sin\theta$ का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int_0^3 x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\, dx = \int_0^\alpha (5\sin\theta)\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}(5\cos\theta)\, d\theta$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ इस प्रकार है कि $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ है। अंश और हर को $(1 - \sin\theta)$ से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

हम ऐसा इसलिए कर सकते हैं, क्योंकि $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ है और इसीलिए $(1 - \sin\theta) \neq 0$ है।

$$\int_0^3 x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\, dx = 25\int_0^\alpha \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

क्योंकि $[0, \alpha] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में $(1 - \sin\theta) > 0$ है, इसलिए

$$\int_0^3 x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\, dx = 25\int_0^\alpha \left(\sin\theta - \sin^2\theta\right) d\theta$$
$$= 25\left(-\cos\theta - \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^\alpha$$
$$= 25\left\{\left(-\cos\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\right) - (-1)\right\}$$

हमें प्राप्त है:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \text{ और } \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

अतः, $\int_0^3 x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\, dx = -20 - \frac{25\alpha}{2} + 6 + 25 = 11 - \frac{25\alpha}{2}$

इसी प्रकार, $\int_3^{\frac{60}{13}} x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\, dx = 25\int_\alpha^\beta \left(\sin\theta - \sin^2\theta\right) d\theta$,

जहाँ $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ इस प्रकार है कि $\sin\beta = \frac{12}{13}$ है।

$$\int_3^{\frac{60}{13}} x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\,dx = 25\left(-\cos\theta - \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_\alpha^\beta$$
$$= 25\left\{\left(-\cos\beta - \frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4}\right) - \left(-\cos\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\right)\right.$$

हमें $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$ तथा

$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13}$ प्राप्त हैं।

अतः, $\int_3^{\frac{60}{13}} x\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\,dx = 25\left(-\frac{5}{13} - \frac{\beta}{2} + \frac{30}{169} + \frac{4}{5} + \frac{\alpha}{2} - \frac{6}{25}\right) = \frac{1491}{169} - 25\frac{(\beta-\alpha)}{2}$ है।

हमें प्राप्त होता है:

$$\int_3^{\frac{60}{13}} \left(\frac{x}{4} - 1\right) dx = \frac{x^2}{8} - x\Bigg|_3^{\frac{60}{13}} = -\frac{105}{1352}$$

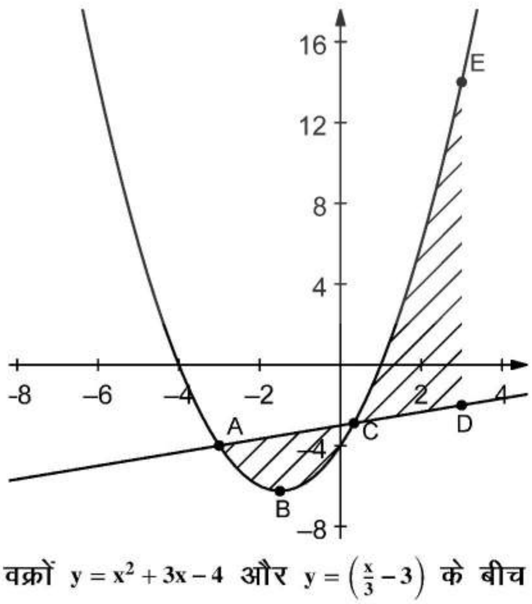
अतः, क्षेत्रफल है:

$$\int_0^{\frac{60}{13}} \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx = 2\left(11 - \frac{25}{2}\alpha\right) + \frac{1491}{169} - \frac{25(\beta-\alpha)}{2} - 6\left(-\frac{105}{1352}\right)$$
$$= \frac{1627}{52} - 25\frac{(\alpha+\beta)}{2}$$

***

आइए अब एक ऐसे उदाहरण को देखें, जहाँ, हमारे द्वारा परिकलित किए जाने वाला क्षेत्रफल दो भागों में है। इन दो भागों में, $f_1(x)$ और $f_2(x)$ परस्पर बदल दिए जाते हैं।

उदाहरण 5 : आकृति 8 में दर्शाई गई वक्रों $y = x^2 + 3x - 4$ और $y = \left(\frac{x}{3} - 3\right)$ के बीच में $x = -3$ से $x = 3$ तक क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 8: वक्रों $y = x^2 + 3x - 4$ और $y = \left(\frac{x}{3} - 3\right)$ के बीच का क्षेत्रफल

हल : वक्रों $y = x^2 + 3x - 4$ और $y = \left(\frac{x}{3} - 3\right)$ के प्रतिच्छेद बिंदुओं के x-निर्देशांक $x^2 + 3x - 4 = \left(\frac{x}{3} - 3\right)$ अर्थात् $x^2 + \frac{8}{3}x - 1 = 0$ द्वारा दिए जाते हैं। $x^2 + \frac{8}{3}x - 1$ के गुणनखंड करने पर, हम

$x^2+\frac{8}{3}x-1=\frac{1}{3}(x+3)(3x-1)$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए, वाँछित प्रतिच्छेद बिंदु $A(-3,-4)$ और $C\left(\frac{1}{3},-\frac{26}{9}\right)$ हैं। मान लीजिए कि $B=\left(-\frac{3}{2},-\frac{25}{4}\right)$, $D=(3,-2)$ और $E=(3,14)$ है। इस उदाहरण में, हम क्षेत्रों ABC और CDE के क्षेत्रफल पृथक-पृथक रूप से ज्ञात करेंगे। क्षेत्र ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हम $\left(\frac{x}{3}-3\right)$ को $f_1(x)$ लेंगे तथा x^2+3x-4 को $f_2(x)$ लेंगे। $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$ में, हमें प्राप्त है:

$$f_1(x)-f_2(x)=\left(\frac{x}{3}-3\right)-\left(x^2+3x-4\right)=-\frac{1}{3}(x+3)(3x-1)$$

आइए अब इसकी जाँच करें कि क्या $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$ में $f_1(x)-f_2(x)\geq 0$ है। क्योंकि $x\geq -3$ है, इसलिए $x+3\geq 0$ है। क्योंकि $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$ में $x\leq\frac{1}{3}$ है, इसलिए $3x-1\leq 0$ है। अतः, $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$ में $\frac{1}{3}(x+3)(3x-1)\leq 0$ है। अतः $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$ में $-\frac{1}{3}(x+3)(3x-1)\geq 0$ है।

क्षेत्रफल ABC ज्ञात करने के लिए, हम $x=-3$ से $x=\frac{1}{3}$ तक $f_1(x)-f_2(x)$ को समाकलित करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$\int\left(x^2+\frac{8}{3}x-1\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}x^2-x+C \qquad \ldots (2)$$

अतः, ABC का क्षेत्रफल है:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{\frac{1}{3}}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx &= \int_{-3}^{\frac{1}{3}}-\left(x^2+\frac{8}{3}x-1\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}x^2-x\right)\Bigg|_{-3}^{\frac{1}{3}}\\ &=-\left\{\left(\frac{1}{81}+\frac{4}{27}-\frac{1}{3}\right)-(-9+12+3)\right\}\\ &=-\left(-\frac{14}{81}-6\right)=\frac{500}{81} \qquad \ldots (3)\end{aligned}$$

CDE का क्षेत्रफल ज्ञात करते समय, हम $y=x^2+3x-4$ को $f_1(x)$ तथा $y=\left(\frac{x}{3}-3\right)$ को $f_2(x)$ चुनते हैं। अतः,

$f_1(x)-f_2(x)=\left(x^2+3x-4\right)-\left(\frac{x}{3}-3\right)=\frac{1}{3}(x+3)(3x-1)\geq 0$ आइए इसकी जाँच करें कि $f_1(x)-f_2(x)\geq 0$ है। क्योंकि $x\geq 0$ है, इसलिए $x+3\geq 3>0$ है। साथ ही, क्योंकि $x\geq\frac{1}{3}$ है, इसलिए हमें $3x-1\geq 0$ प्राप्त होता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\left[\frac{1}{3},3\right]$ में $f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{3}(x+3)(3x-1)\geq 0$ है।

हमें $x=\frac{1}{3}$ से $x=3$ तक $f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{3}(x+3)(3x-1)$ को समाकलित करने की आवश्यकता है। समीकरण (2) का प्रयोग करने पर, CDE का क्षेत्रफल है:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{3}\left(\frac{1}{3}(x+3)(3x-1)\right)dx &= \frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}x^2-x\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{3}=\left\{(9+12-3)-\left(\frac{1}{81}+\frac{4}{27}-\frac{1}{3}\right)\right\}\\ &=18+\frac{14}{81}=\frac{1472}{81} \qquad \ldots (4)\end{aligned}$$

समीकरण (3) और समीकरण (4) से, वाँछित क्षेत्रफल $\frac{1972}{81}$ है।

***

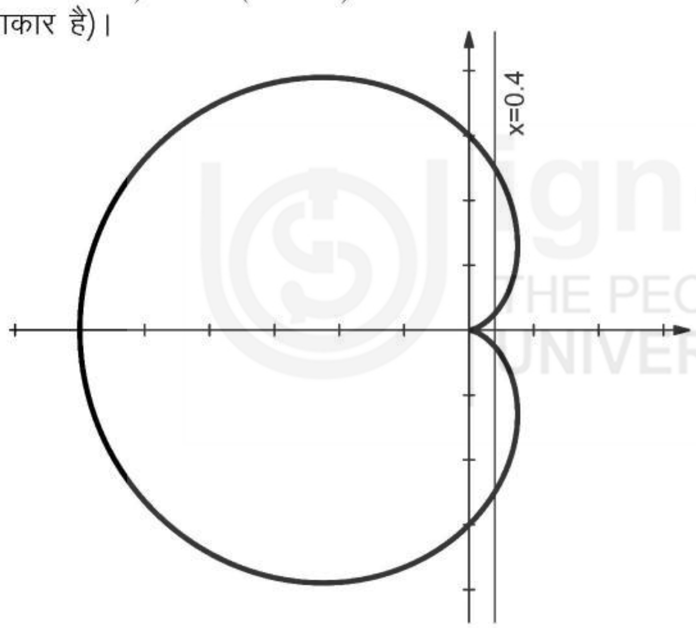
अभी तक हमने जिन उदाहरणों की चर्चा की है, उनके बारे में अपनी समझ की जाँच के लिए, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) वक्र $y = 16 - x^2$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 3$ और $x = -3$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E2) वक्रों $y = 3 - 4x - x^2$ और $y = -(x+1)$ के बीच तथा रेखाओं $x = -4$ और $x = 1$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E3) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ और रेखा $y = \frac{x}{5} - 1$ के बीच ऊपरी भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

समतल पर अनेक वक्रों में, यह संभव है कि x-निर्देशांक और y-निर्देशांक के बीच कोई फलनक (functional) संबंध नहीं हो। उदाहरणार्थ, कार्तीय रूप में हृदयाम (cardiod) की समीकरण $\left(x^2 + y^2 + ax\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$ है। आकृति 9 को देखिए (हृदयाम का अर्थ हृदय जैसा आकार है)।



आकृति 9: हृदयाम $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ का कार्तीय निरूपण, जन $a = 3$ है

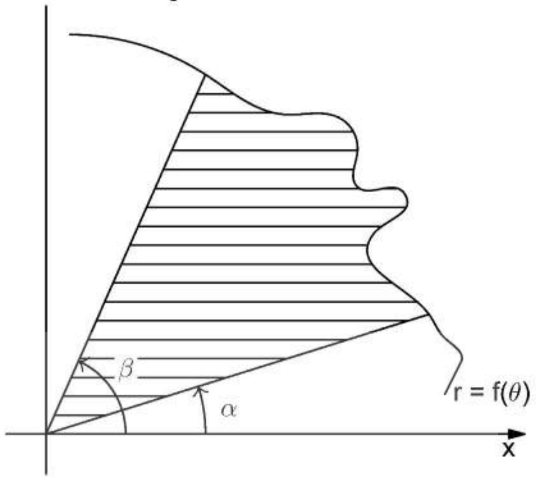
अभी तक जो हमने सीखा है, उसके अनुसार, हृदयाम का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें ऐसे फलन $f_1(x)$ और $f_2(x)$ ज्ञात करने चाहिए कि

1) $y = f_2(x)$ का आलेख x-अक्ष के नीचे उस वक्र का आलेख हो।

2) $y = f_1(x)$ का आलेख x-अक्ष के ऊपर उस वक्र का आलेख हो। आप देख सकते हैं कि रेखा $x = 0.4$ वक्र को चार बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, दो बार x-अक्ष ऊपर तथा दो बार x-अक्ष के नीचे। इस स्थिति में, ऐसे फलन $f_1(x)$ और $f_2(x)$ ज्ञात करना संभव नहीं है। ऐसी स्थितियों में, वक्र का कार्तीय निरूपण क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए बहुत अधिक उपयोगी नहीं है। परंतु, जैसाकि थोड़ी देर में ही आप देखेंगे कि यदि हम वक्र की समीकरण को ध्रुवीय रूप में लिख लें, तो क्षेत्रफल ज्ञात करना संभव है।

मान लीजिए कि हम रेखाओं $\theta = \alpha$ और $\theta = \beta$ के बीच $r = f(\theta)$ द्वारा दी गई वक्र का

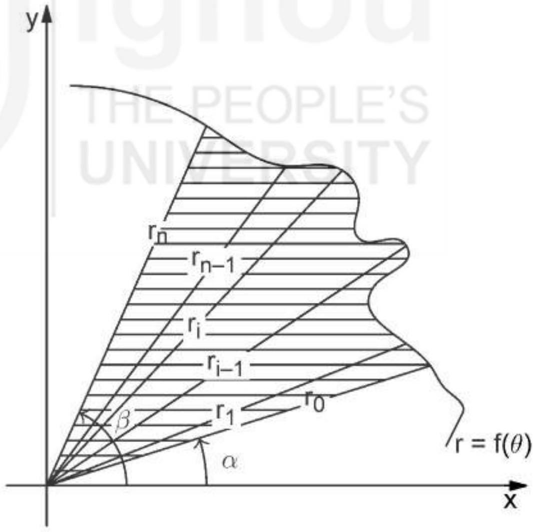
क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं। आकृति 10 को देखिए।



आकृति 10: रेखाओं $\theta = \alpha$ और $\theta = \beta$ के बीच वक्र $r = f(\theta)$ का क्षेत्रफल

जैसा कि हमने इकाई 17 में कार्तीय निर्देशांकों की स्थिति के लिये किया था, हम वक्र को छोटे भागों में विभाजित करते हैं। हम $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{i-1} < \theta_i < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$ चुनते हैं।

हम $r_i = f(\theta_i)$ लिखते हैं। रेखाएँ r_i क्षेत्रफल को पतले छोटे टुकड़ों (फाँकों) में विभाजित कर देती हैं, जैसाकि आकृति 11 में देख सकते हैं।

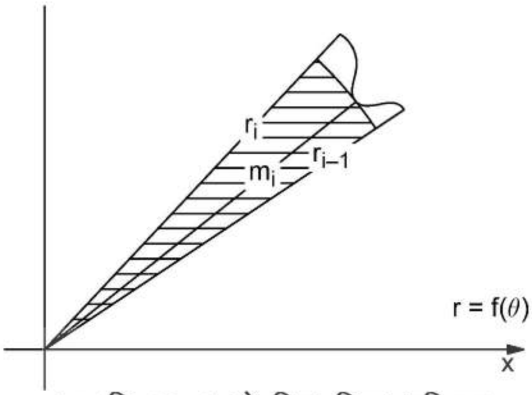


आकृति 11: रेखाओं $\theta = \alpha$ और $\theta = \beta$ के बीच वक्र $r = f(\theta)$ के क्षेत्रफल का विभाजन करना

अब रेखाओं $\theta = \theta_{i-1}$ और $\theta = \theta_i$ के बीच क्षेत्रफल पर विचार कीजिए। जैसा कि हमने कार्तीय निर्देशों की स्थिति में किया था, हम इस पतली फाँक (टुकड़े) के लिए निम्न और उपरि परिबद्ध ज्ञात कर सकते हैं। मान लीजिए कि $m_i = \inf\{f(\theta) | \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\}$ और $M_i = \sup\{f(\theta) | \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\}$, $\Delta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ है। आइए रेखाओं r_i और r_{i-1} के बीच के क्षेत्रफल को A_i द्वारा व्यक्त करें। याद कीजिए कि त्रिज्या r और त्रिज्यखंडीय कोण (sectorial angle) θ रेडियन वाले वृत्तीय त्रिज्यखंड (sector) का क्षेत्रफल $\frac{r^2\theta}{2}$ होता है। अतः, A_i त्रिज्या m_i और त्रिज्यखंडीय कोण $\Delta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ वाले त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल से अधिक है।

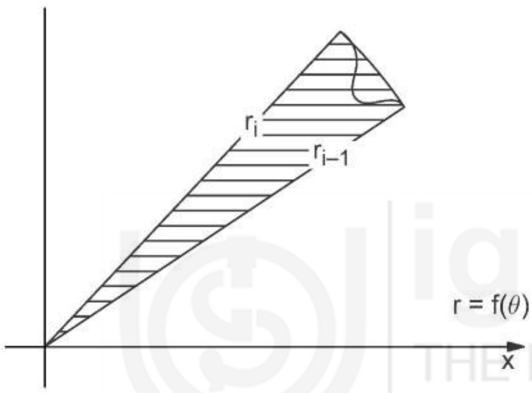
अर्थात् $\dfrac{m_i^2 \Delta_i}{2} \le A_i$ है।

आकृति 12 को देखिए।



आकृति 12: A_i के लिए निम्न परिबद्ध

इसी प्रकार, A_i त्रिज्या M_i और त्रिज्यखंडीय कोण $\Delta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ वाले त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल से कम है।



आकृति 13: A_i के लिए उपरि परिबद्ध

अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$A_i \le \frac{M_i^2 \Delta_i}{2} \qquad \dots (6)$$

समीकरण (5) और समीकरण (6) को संयोजित करने तथा इनका $i = 1$ से $i = 9$ तक योग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2 \Delta_i}{2} \le A \le \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^2 \Delta_i}{2} \qquad \dots (7)$$

क्योंकि $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_{i-1} + A_i + \cdots + A_{n-1} + A_n$ रेखाओं $\theta = \alpha$ और $\theta = \beta$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है। ध्यान दीजिए कि समीकरण (7) की LHS में योग विभाजन $P = \{\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{i-1} < \theta_i < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta\}$ के सापेक्ष फलन $f^2(\theta)$ के लिए निम्न योग $L(P, f)$ है तथा दाएँ वाला योग विभाजन P के सापेक्ष फलन $f^2(\theta)$ के लिए उपरि योग है। अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{2}\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f^2(\theta)\, d\theta \le A \le \frac{1}{2}\overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f^2(\theta)\, d\theta$$

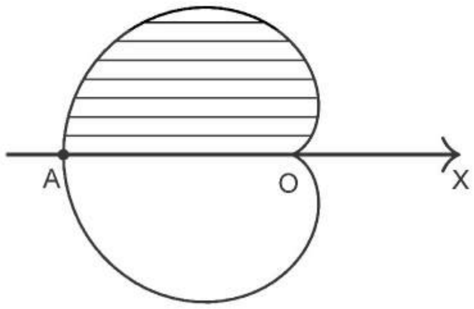
यदि $[\alpha, \beta]$ पर $f^2(\theta)$ समाकलनीय है, तो उपरि और निम्न समाकल संपाती हो जाते हैं तथा हम प्राप्त करते हैं:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta \qquad \dots (8)$$

आइए अब उपरोक्त किए गए कार्य का उपयोग हृदयाम का क्षेत्रफल, उसके ध्रुवीय निरूपण का प्रयोग करते हुए, परकलित करने में करें।

उदाहरण 6 : हृदयाम $r = a(1-\cos\theta)$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हमें $\theta = 0$ के लिए $r = 0$ तथा $\theta = \pi$ के लिए $r = 2a$ प्राप्त है। क्योंकि $\cos\theta = \cos(-\theta)$ है, इसलिए हृदयाम प्रारंभिक रेखा AOX के सापेक्ष सममित है। (आकृति 14 को देखिए)



आकृति 14: हृदयाम

अतः, वाँछित क्षेत्रफल A, जो आकृति 14 में छायांकित क्षेत्र का दुगुना है, निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है:

$$A = 2\int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$
$$= \int_0^\pi a^2 (1-\cos\theta)^2 \, d\theta$$

क्योंकि $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$ है, इसलिए हम प्राप्त करते हैं:

$$(1-\cos\theta)^2 = \left\{\cos^2\tfrac{\theta}{2} + \sin^2\tfrac{\theta}{2} - \left(\cos^2\tfrac{\theta}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\right)\right\}^2 = 4\sin^4\tfrac{\theta}{2}$$

अतः, $A = 4a^2 \int_0^\pi \sin^4 \frac{\theta}{2} d\theta$

$\phi = \frac{\theta}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$A = 8a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4\phi \, d\phi$$

इकाई 19 की समीकरण (13) के समानयन सूत्र का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$A = 8a^2 \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}a^2\pi$$

***

हमने जिस उदाहरण की चर्चा की है, उसके बारे में अपनी समझ की जाँच करने के लिए, अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

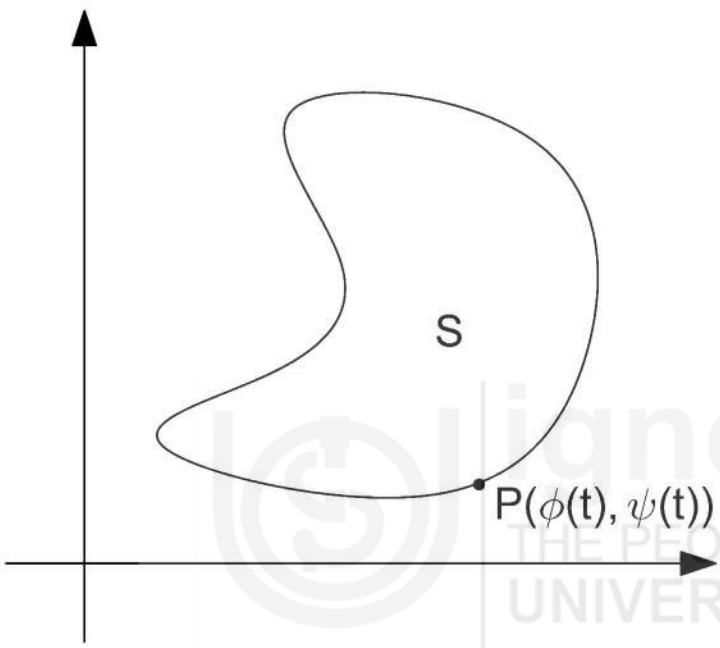
E4) वक्र $r = a\sin 3\theta$, $a > 0$ के छल्ले का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E5) वक्र $r = a\cos 2\theta$ तथा त्रिज्या सदिशों $\theta = 0$ और $\theta = \pi/2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E6) वृत्त $r = 2$ के बाहर तथा द्विपाशी (लेम्निसकेट) (lomniscate) $r^2 = 8\cos 2\theta$ के अंदर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अब हम अपना ध्यान उन बंद वक्रों की ओर करते हैं, जिनके समीकरण प्राचलिक रूप में दिए हैं।

मान लीजिए कि प्राचलिक समीकरण $x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ हैं, जहाँ $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ और $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ है; जो एक समतल वक्र को निरूपित करती हैं। आकृति 15 को देखिए।



आकृति 15

यदि हम यह मान कर चलते हैं कि $\phi(t)$ का एक संतत अवकलज है तथा $\psi(t)$ समाकलनीय है, तो हम प्राप्त करते हैं:

क्षेत्रफल $S = -\int_\alpha^\beta y\dfrac{dx}{dt}dt$ ...(i)

हम यह भी मान कर चलते हैं कि हम वामावर्त दिशा में गति कर रहे हैं। यदि हम यह मान कर चलते हैं कि $\psi(t)$ का एक संतत अवकलज है तथा $\phi(t)$ समाकलनीय है, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$S = \int_\alpha^\beta x\frac{dy}{dt}\,dt$$

पुनः, हम यह कल्पना करते हैं कि हम वामावर्त दिशा में गति कर रहे हैं।

(i) और (ii) से, हम प्राप्त करते हैं:

$$2S = \int_\alpha^\beta \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\,dt$$

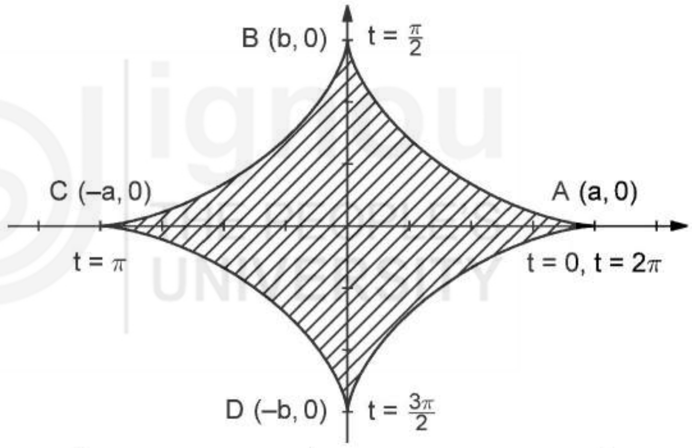
अतः, यदि x(t) और y(t) दोनों के संतत अवकलज हैं, तो हम प्राप्त करते हैं:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xdy - ydx) \qquad \text{...(9)}$$

इस कोर्स में, हम इनमें से किसी भी सूत्र को सिद्ध नहीं करेंगे। हम S परिकलित करने के लिए, उपरोक्त सूत्रों (i), (ii) और समीकरण (9) में से किसी का भी उपयोग कर सकते हैं। परंतु अनेक स्थितियों में आप यह पाएँगे कि समीकरण (9), अपनी सममिति के कारण, अधिक सुविधाजनक है।

उदाहरण 7 : जाँच कीजिए कि वक्र ताराभ (Astroid) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$ का प्राचलिक रूप $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ द्वारा दिया जाता है। इस प्राचलिक रूप का उपयोग करते हुए, वक्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : प्रतिस्थापन द्वारा, आप सरलता से इसकी जाँच कर सकते हैं कि $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ दी हुई वक्र का प्राचलिक रूप है। यह वक्र रेखाओं $x=\pm a$ और $y=\pm b$ के बीच में स्थित है, क्योंकि $-1\le\cos t\le 1$ है तथा $-1\le\sin t\le 1$ है। यह वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है, क्योंकि x और y के चिह्नों को बदलने पर, समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता है। मान $t=0$ बिंदु (a, b) के संगत है तथा $t=\pi/2$ बिंदु (b, 0) के संगत है। इकाई 9 में चर्चा की गई वक्र अनुरेखण की विधियों का अनुप्रयोग करते हुए, हम इस वक्र को खींच सकते हैं (आकृति 16 देखिए)। इस ताराभ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र आकृति में दर्शाया गया है।



आकृति 16: $a=4, b=3$ के साथ वक्र ताराभ का क्षेत्रफल

इस क्षेत्र का क्षेत्रफल A निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है:

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a\cos^3 t(3b\sin^2 t\cos t)-b\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt$$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt$$

$$=\frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{3ab}{8}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi ab}{8}$$

***

हमारी अभी तक की चर्चा के बारे में अपनी समझ की जाँच के लिए, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E7) वक्र $x=a\,(3\sin\theta-\sin^3\theta),\ y=a\cos^3\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E8) $x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta)$ द्वारा $y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ दी जाने वाली वक्र त्रिकसपोयड (त्रिदली) (tricuspoid) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E9) वक्र $x = a\sin 2t$, $y = a\sin t$ के एक छल्ले (लूप) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हम इस भाग को यहीं समाप्त कर रहे हैं। अगले भाग में, हम देखेंगे कि हम किस प्रकार, समाकलन का प्रयोग करते हुए, वक्रों के चापों की लंबाइयाँ ज्ञात कर सकते हैं।

20.3 एक समतल वक्र की लंबाई

इस भाग में, हम यह देखेंगे कि समतल वक्रों की लंबाइयाँ ज्ञात करने में निश्चित समाकलों का उपयोग किया जा सकता है, जब कि उनके समीकरण कार्तीय, ध्रुवीय या प्राचलिक रूप में दिए हैं। एक वक्र जिसकी लंबाई ज्ञात की जा सकती है **संशोधनीय (rectifiable) वक्र** कहलाती है तथा किसी वक्र की लंबाई ज्ञात करने की प्रक्रिया **संशोधन (rectification)** कहलाती है। यहाँ आप देखेंगे कि किसी वक्र के चाप की लंबाई ज्ञात करने के लिए, हमें एक ऐसे व्यंजक को समाकलित करना पड़ेगा, जिसमें न केवल दिया हुआ फलन संबद्ध होता है, अपितु उसका अवकलज भी संबद्ध होता है। अतः, चाप लंबाई को निर्धारित करने वाले समाकल के अस्तित्व को सुनिश्चित करने के लिए, हम यह मानकर चलते हैं कि वक्र को परिभाषित करने वाला फलन अवकलनीय है तथा समाकलन के अंतराल पर उसका अवकलज संतत भी है।

आइए सर्वप्रथम एक ऐसी वक्र पर विचार करें, जिसकी समीकरण कार्तीय रूप में दी हुई है।

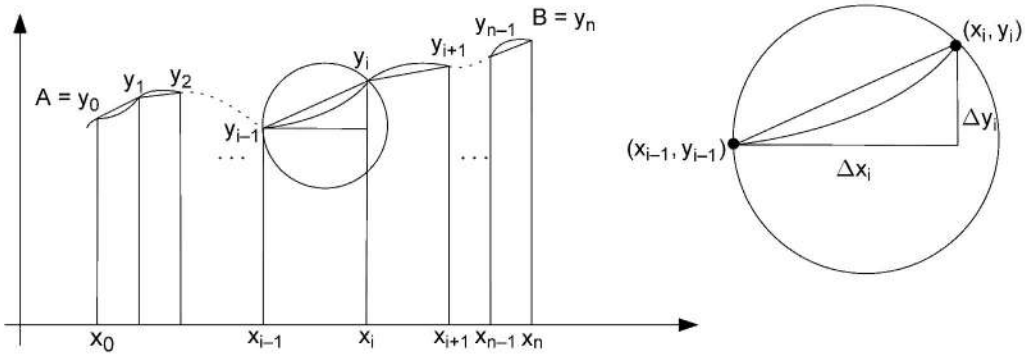
मान लीजिए कि अंतराल $[a, b]$ पर $y = f(x)$ परिभाषित है। हम यह मानकर चलते हैं कि f अवकलनीय है तथा इसका अवकलज f' संतत है। आइए

$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ द्वारा दिए जाने वाले $[a, b]$ के एक विभाजन P पर विचार करें।

कोटियाँ $x = a$ और $x = b$ वक्र $y = f(x)$ के चाप AB के विस्तार को निर्धारित करती हैं [आकृति 17 (क)]। मान लीजिए कि $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 2, \ldots, n$वें बिंदु हैं, जहाँ रेखाएँ $x = x_i$ वक्र से मिलती हैं।

उत्तरोत्तर बिंदुओं $A = y_0, y_1, y_2, \ldots, B = y_n$ को रेखाखंडों से जोड़िए। इन रेखाखंडों की लंबाइयों का योग वक्र की लंबाई का एक सन्निकटन प्रदान करता है। आइए बिंदुओं (x_{i-1}, y_{i-1}) और (x_i, y_i) को जोड़ने वाले रेखाखंड की लंबाई के लिए ℓ_i लिखें। यदि हम ℓ_i, $1 \le i \le n$ ज्ञात कर लें, तो $\sum_{i=1}^{n} \ell_i$ उस वक्र की लंबाई का हमें सन्निकटन प्रदान करेगा।

परंतु, इनमें से किसी भी रेखाखंड की लंबाई किस प्रकार ज्ञात की जाए? आकृति 17 (ख) परिवर्धित (बड़े हुए) भाग पर दुष्टि डालिए। इसको देखने पर, हम पाते हैं कि $\ell_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ है, जहाँ $\Delta x_i = \Delta_i = x_i - x_{i-1}$ है तथा $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ है। इस विधि के अनुसार, हम (x_{i-1}, y_{i-1}) और (x_i, y_i) को जोड़ने वाली जीवाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कर सकते हैं।



(क) (ख)

आकृति 17: एक वक्र की लंबाई

हमारा मानना है कि [a, b] पर f अवकलनीय है तथा यह कि f' संतत है, हमें माध्य मान प्रमेय का अनुप्रयोग करने की अनुमति प्रदान करती हैं। इस प्रकार, वक्र पर स्थित बिंदुओं (x_{i-1}, y_{i-1}) और (x_i, y_i) के बीच एक बिंदु $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ का अस्तित्व है, जहाँ वक्र की स्पर्श रेखा जीवा के समांतर है। अर्थात्,

$$f'(x_i^*) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

या $\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x_i$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\ell_i = \sqrt{1+f\left(x_i^*\right)^2}\,\Delta x_i$ है।

$M_i = \sup\left\{\sqrt{1+f'(x)^2}\,\middle|\,x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$ $m_i = \inf\left\{\sqrt{1+f'(x)^2}\,\middle|\,x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$

लिखने पर, हम $m_i\Delta x_i \le \ell_i \le M_i\Delta x_i$ प्राप्त करते हैं।

1 से n तक इन्हें जोड़ने पर, यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \ell_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \text{ है।}$$

परंतु विभाजन P के संगत फलन $g(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$ के लिए, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = L(P, g)$ है तथा $\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = U(P, g)$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि

$\underline{\int_a^b} g(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} \ell_i \le \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$ है। क्योंकि हमने कल्पना की है कि $f'(x)$ संतत है, इसलिए $g(x)$ समाकलनीय है तथा $\underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ है।

क्योंकि $\sum_{i=1}^{n} \ell_i$ उपरि और निम्न समाकलों के बीच में लगा है तथा उपरि और निम्न समाकल बराबर हैं, इसलिए योग $\sum_{i=1}^{n} \ell_i$, विभाजन के उपविभाजनों की संख्या में वृद्धि तथा और वृद्धि होने पर, एक निश्चित मान की ओर अग्रसर होता है और सीमांत स्थिति में वक्र की लंबाई प्रदान करता है। अतः,

$$L_A^B = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \text{... (10)}$$

टिप्पणी 1: कभी-कभी x को y के एक अकेले-मान फलन के रूप में व्यक्त करना सुविधाजनक रहता है। इस स्थिति में, हम x और y की भूमिकाएँ बदल देते हैं तथा

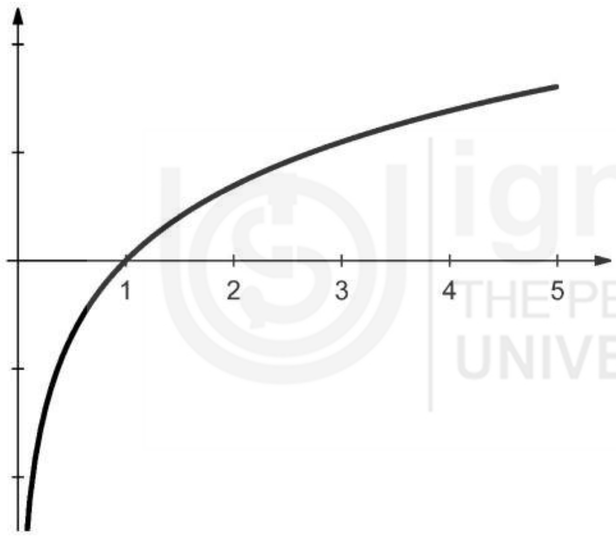
लंबाई $L_A^B = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ ... (11)

प्राप्त करते हैं, जहाँ समाकलन की सीमाएँ y के सापेक्ष हैं। ध्यान दीजिए कि किसी वक्र के एक चाप की लंबाई अपरिवर्तनीय है, क्योंकि यह निर्देशांकों के चुनाव, अर्थात् संदर्भ की रूपरेखा पर निर्भर नहीं करती है। हमारा मानना है कि [a, b] पर f' संतत है यह सुनिश्चित करता है कि समीकरण (10) और समीकरण (11) में समाकलों का अस्तित्व है तथा उनका मान L_A^B ही कोटियों $x = a$ और $x = b$ के बीच वक्र $y = f(x)$ की लंबाई है।

निम्नलिखित उदाहरण समीकरण (10) और समीकरण (11) द्वारा दिए गए सूत्रों के उपयोग को स्पष्ट करता है।

उदाहरण 8 : कोटियों $x = 1$ और $x = 2$ द्वारा वक्र $y = \ln x$ के अंतःखंडित चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : हमने आकृति 18 में वक्र $y = \ln|x|$ खींच ली है।



आकृति 18: $x = 1$ से $x = 2$ तक $y = \ln|x|$ की लंबाई

समीकरण (10) का प्रयोग करने पर, वाँछित लम्बाई L_1^2 निम्नलिखित द्वारा दी जाती है:

$$L_1^2 = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}\, dx, \text{ क्योंकि } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ है।}$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx$$

यदि हम $1 + x^2 = t^2$ रखें, तो हम $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$ प्राप्त करते हैं। तथा

इसलिए, $L_1^2 = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{(t^2 - 1)}\right) dt$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t^2 - 1}\, dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2}{\sqrt{5}+1} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{5}+1} \text{ है।}$$

हम इस उदाहरण को हल करने के लिए, समीकरण (11) का उपयोग भी कर सकते हैं। इसके लिए, हम समीकरण $y = \ln x$ को $x = e^y$ लिखते हैं। तब सीमाएँ $x = 1$ और $x = 2$ क्रमशः सीमाओं $y = 0$ और $y = \ln 2$ के संगत हैं। अतः, समीकरण (11) के उपयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$L_0^{\ln 2} = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + e^{2y}}\, dy$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2 - 1} du \text{ रखने पर } 1 + e^{2y} = u^2$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right) du, = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{5}+1}$$

जैसा हमने पहले भी देखा था। यह टिप्पणी 1 में किए गए हमारे प्रेक्षण को सत्यापित करता है कि समीकरण (10) और समीकरण (11) चाप की लंबाई के लिए समान मान प्रदान करती हैं।

***

अब यहाँ आपके हल करने के लिए कुछ प्रश्न हैं:

E10) बिंदुओं $(3, 1)$ और $(6, 2)$ के बीच रेखा $x = 3y$ की लंबाई ज्ञात कीजिए। दूरी सूत्र का प्रयोग करते हुए, अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

E11) बिंदुओं $x = 0$ और $x = \pi/3$ के बीच वक्र $y = \ln \sec x$ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

E12) शीर्ष से बिंदु (a, a) तक अर्धध्रुवीय परवलय $ay^2 = x^3$ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

E13) दर्शाइए कि रेखा $3y = 8x$ द्वारा परवलय $y^2 = 4ax$ पर काटे गए चाप की लंबाई $a(\ln 2 + 15/16)$ है।

अगले उपभाग में, हम ऐसी वक्रों पर विचार करेंगे जिनके समीकरण प्राचलिक रूप में व्यक्त होंगे। यहाँ, हम प्राचलिक समीकरणों एक युग्म द्वारा दी जानी वक्र की लंबाई ज्ञात करने के लिए एक सूत्र व्युत्पित करेंगे।

मान लीजिए कि $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ प्राचलिक रूप में एक वक्र की

समीकरण हैं। जैसा कि पिछले उपभाग में किया था, हम यह मान कर चलते हैं कि फलन ϕ और ψ अंतराल $[\alpha, \beta]$ में अवकलनीय हैं तथा उनके संतत अवकलज ϕ' और ψ' हैं। हमें प्राप्त है:

$$\frac{dx}{dt} = \phi'(t) \text{ और } \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

अतः, यह कल्पना करते हुए कि $t \in [\alpha, \beta]$ के लिए $\phi'(t) \neq 0$ है, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \text{ तथा } \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)^2} = \frac{\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}}{\phi'}$$

अब, समीकरण (11) का उपयोग करने पर, हम लंबाई

$$L = \int_{x=\phi(\alpha)}^{x=\phi(\beta)} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, \frac{\phi'(t)}{\phi'(t)} dt \text{ प्राप्त करते हैं।}$$

इस प्रकार, $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt$ है। ... (12)

निम्नलिखित उदाहरण यह दर्शाता है कि कभी-कभी वक्र की लंबाई ज्ञात करने के लिए, उस वक्र की समीकरण को प्राचलिक रूप में व्यक्त करना अधिक सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण 9 : आइए वक्र ताराभ पर हम वापस आ जाएँ, जिसकी चर्चा हमने उदाहरण 7 में की थी। हमने देखा था कि इस वक्र का प्राचलिक रूप $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t$ द्वारा दिया जाता है।

क्योंकि यह वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है, इसलिए इस वक्र की लंबाई प्रथम चतुर्थांश की लंबाई की चार गुनी होगी।

अब, $\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t;\ \frac{dy}{dt} = 3b\sin^2 t\cos t$ है।

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t) \text{ है।}$$

अतः, वक्र की लंबाई है:

$$L = 4\int_0^{\pi/2} 3\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt$$

$u^2 = a^2\cos t^2 t + b^2\sin^2 t$ रखने पर, हम

$2u = (2b^2 - 2a^2)\sin t\cos t\frac{dt}{du}$ प्राप्त करते हैं तथा सीमाएँ

$t = 0,\ t = \pi/2$ क्रमशः $u = a,\ u = b$ के संगत हैं।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं:

$$L = 12\int_a^b \frac{u^2 du}{b^2 - a^2} = \frac{12}{b^2-a^2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{12}{b^2 - a^2} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{4(a^2 + b^{2^2} + ab)}{a + b}$$

***

अगले उदाहरण में, हम वक्र त्रिकसपोयड (त्रिदली) की लंबाई, उसके प्राचलिक रूप का उपयोग करते हुए, ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 10 : प्रश्न 8 में देखे गए त्रिकसपोयड (त्रिदली) के चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्न 8 से, हम जानते हैं कि

$$\frac{dx}{d\theta} = -2a(\sin\theta + \sin 2\theta) \text{ और } \frac{dy}{d\theta} = 2a(\cos\theta + \cos 2\theta) \text{ है।}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= 4a^2(\sin\theta + \sin 2\theta)^2 + 4a^2(\cos\theta + \cos 2\theta)^2 \\
&= 4a^2\left(\sin^2\theta + \sin^2 2\theta + 2\sin\theta\sin 2\theta\right) \\
&\quad + 4a^2\left(\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta\right) \\
&= 4a^2(2 + 2\sin\theta\sin 2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta) \\
&= 4a^2\left(2 + 2\left(2\sin^2\theta\cos\theta + \cos\theta(1 - 2\sin^2\theta)\right)\right) \\
&= 8a^2(1 + \cos\theta)
\end{aligned}$$

अतः, वक्र की लंबाई है:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{8a^2(1 + \cos\theta)}\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{16a^2\cos\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\
&= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta - 4a\int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta, \text{ क्योंकि}
\end{aligned}$$

$0 \le \theta \le \pi$ के लिए $\cos\frac{\theta}{2} \ge 0$ है तथा $\pi \le \theta \le 2\pi$ के लिए $\cos\frac{\theta}{2} \le 0$ है।

$$= 4a\left(2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} + 2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 16a$$

***

अब आप आगे आने वाले प्रश्नों को हल करने के लिए, समीकरण (12) का अनुप्रयोग कर सकते हैं।

E14) वक्र चक्रज (cycloid) $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

E15) दर्शाइए कि वक्र $x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$ के चाप की लंबाई $t = 0$ से $t = \pi/2$ तक $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$ है।

अब हम वक्र की उस स्थिति पर विचार करेंगे जब उसकी समीकरण ध्रुवीय रूप में दी हुई है।

मान लीजिए कि $r = f(\theta)$ एक वक्र का निर्धारण करती है, जब $\theta = \alpha$ से $\theta = \beta$ तक θ विचरण करता है, अर्थात् फलन f अंतराल $[\alpha, \beta]$ में परिभाषित है (आकृति 10 देखिए)। पहले की ही तरह, हम यह मान कर चलते हैं कि यह फलन f अवकलनीय है तथा $[\alpha, \beta]$ पर इसका अवकलज f' संतत है। यह मानने पर यह सुनश्चित हो जाता है कि $r = f(\theta)$ द्वारा निरूपित वक्र संशोधनीय है। $x = r\cos\theta$ और $y = r\sin\theta$ लेकर दी हुई समीकरण को कार्तीय निर्देशांकों में रूपांतरित करने पर, हम $x = f(\theta)\cos\theta$ और $y = f(\theta)\sin\theta$ प्राप्त करते हैं।

अब हम प्राचलिक समीकरणों की स्थिति की ही तरह आगे कार्य करते हैं

तथा $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}{dx/d\theta}$ प्राप्त करते हैं।

अतः, चर x को θ में बदलने पर, $\theta = \alpha$ से $\theta = \beta$ तक वक्र $r = f(\theta)$ के चाप की लंबाई निम्नलिखित द्वारा दी जाती है:

$$L = \int_{x=f(\alpha)\cos\alpha}^{x=f(\beta)\cos\beta} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

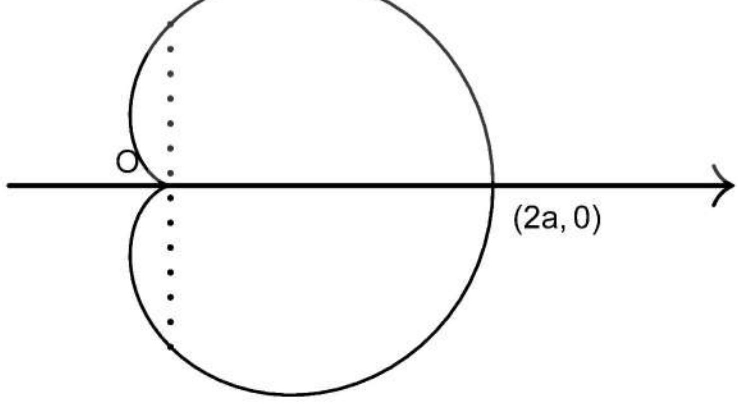
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]^2 + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]^2}\,d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \qquad \ldots (13)$$

अगले उदाहरण में, वक्र की लंबाई ज्ञात करने के लिए, हम इस सूत्र का अनुप्रयोग करेंगे।

उदाहरण 11 : हृदयाम $r = a(1+\cos\theta)$ का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि यह वक्र प्रारंभिक रेखा के सापेक्ष सममित है। आकृति 19 को देखिए। इसलिए, इसका परिमाप x-अक्ष के ऊपर स्थित वक्र के चाप की लंबाई का दुगुना है।



आकृति 19: हृदयाम $r = a(1+\cos\theta)$ के चाप की लंबाई

अब, $\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$ है। अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta$$

क्योंकि $\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$ है और $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ यदि $0 \le \theta \le \pi$, इसलिए

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a \text{ है।}$$

***

इस भाग में, हमने किसी वक्र की लंबाई ज्ञात करने के लिए सूत्र व्युत्पित किए हैं तथा उनका उपयोग वक्र लंबाई ज्ञात करने में किया है, जब कि उनके समीकरण तीनों रूपों में से किसी भी एक रूप में दिए हों, अर्थात् कार्तीय, प्राचलिक या ध्रुवीय रूप। आइए अपनी चर्चा का सारांश निम्नलिखित सारणी के रूप में दें।

वक्र की समीकरण	लंबाई L
$y = f(x)$	$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$
$x = g(y)$	$\int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$
$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$
$r = f(\theta)$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta$

सारणी 1 : किसी वक्र के चाप की लंबाई

इस सारणी का उपयोग करते हुए, आप अब इन प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E16) वक्र $r = a\cos^3(\theta/3)$ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

E17) त्रिज्या 2 वाले उस वृत्त की लंबाई ज्ञात कीजिए, जो समीकरणों $x = 2\cos t + 3,\ y = 2\sin t + 4,\ 0 \le t \le 2\pi$ द्वारा दिया जाता है।

E18) दर्शाइए कि वक्र $r = a(1-\cos\theta)$ के चाप का ऊपरी आधा भाग $\theta = 2\pi/3$ द्वारा समद्विभाजित होता है।

E19) $\theta = -1$ से $\theta = 1$ तक वक्र $r = a(\theta^2 - 1)$ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हम इस इकाई की समाप्ति पर पहुँच गए हैं। अगले भाग में, हम इस इकाई का संक्षिप्त में सारांश देंगे।

20.4 सारांश

इस इकाई में, हम देख चुके हैं:

1. हम कहते हैं कि दो फलनों $f_1(x)$ और $f_2(x)$ के आलेखों के बीच का क्षेत्र **ऊर्ध्वाधरतः सरल है**, यदि कोई भी ऊर्ध्वाधर रेखा उस क्षेत्र को या तो एक अकेले बिंदु में या रेखाखंड में प्रतिच्छेद करती है, जबकि उसका निम्न अंत-बिंदु $y = f_2(x)$ पर हो तथा उपरि अंत-बिंदु $y = f_1(x)$ हो।

2. वक्रों $y = f_1(x)$ और $y = f_2(x)$ तथा रेखाओं $x = a$ और $x = b$ से परिबद्ध ऊर्ध्वाधरतः सरल क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx$ द्वारा दिया जाता है।

3. वक्र की समीकरण ध्रुवीय रूप $r = f(\theta)$ में दी होने पर, रेखाओं $\theta = \alpha$ और $\theta = \beta$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta$ होता है।

4. यदि एक ऊर्ध्वाधरतः सरल क्षेत्र को परिबद्ध करने वाली बंद वक्र की समीकरण प्राचलिक रूप $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ में दी हुई है तथा α से β तक t के विचरण से वक्र वामावर्त दिशा में अनुरेखित होती है, तो परिबद्ध क्षेत्र के क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्रों द्वारा दिए जाते हैं:

$$A = -\int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}\, dt$$

$$A = \int_\alpha^\beta x\frac{dy}{dt}\, dt$$

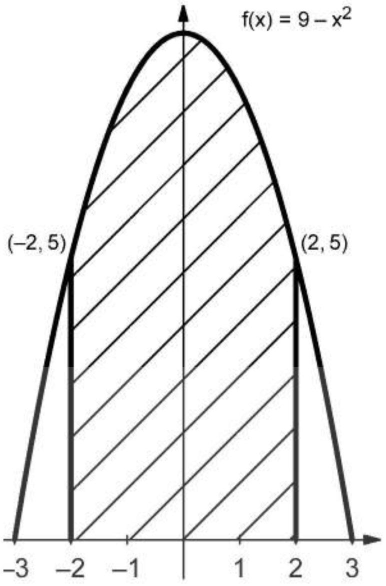
$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(x(t)\frac{dy}{dt} - y(t)\frac{dx}{dt}\right) dt$$

5. हमने किसी वक्र के चाप की लंबाई के लिए सूत्र भी देखे हैं, जब वक्र विभिन्न रूपों में दी हुई हों।

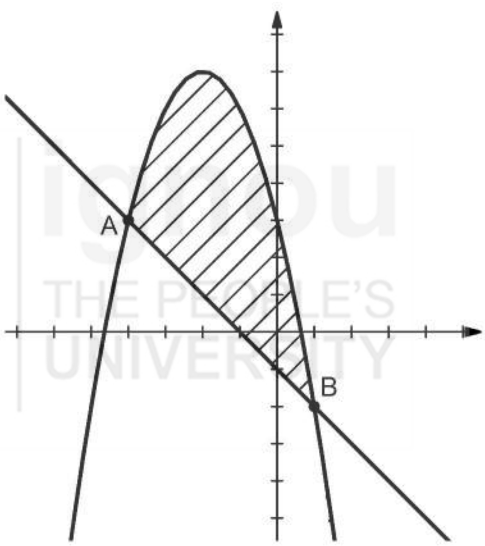
वक्र की समीकरण	**लंबाई**
कार्तीय रूप $y = f(x)$	$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$
कार्तीय रूप $x = g(y)$	$\int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$
प्राचलिक रूप $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$
ध्रुवीय रूप $r = f(\theta)$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta$

20.5 हल/उत्तर

E1) आकृति 20 पर विचार कीजिए। हमें छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।



आकृति 20: वक्र $f(x) = 9 - x^2$ के अंतर्गत क्षेत्रफल



आकृति 21: वक्रों $f_1(x) = 3 - 4x - x^2$ और $f_2(x) = -(1 + x)$ के बीच का क्षेत्रफल

संपूर्ण वक्र ऊपरी अर्धतल में स्थित है। अतः, क्षेत्रफल

$$\int_{-2}^{2} \left(9 - x^2\right) dx = 9x - \frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{2} = \left(18 - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 + \frac{8}{3}\right) = \frac{92}{3}$$ वर्ग इकाई है।

E2) आकृति 21 को देखिए : प्रतिच्छेद बिंदु $3 - 4x - x^2 = -(1 + x)$ या $(x + 4)(x - 1) = 0$ द्वारा दिए जाते हैं। इसलिए, $A(-4, 3)$ और $B(1, -2)$ वक्रों $y = 3 - 4x - x^2$ और $y = -(x + 1)$ के प्रतिच्छेद बिंदु हैं। हम $f_1(x) = 3 - 4x - x^2$ और $f_2(x) = -(1 + x)$ चुनते हैं। तब,

$f_1(x) - f_2(x) = 4 - 3x - x^2 = -(x + 4)(x - 1)$ है।

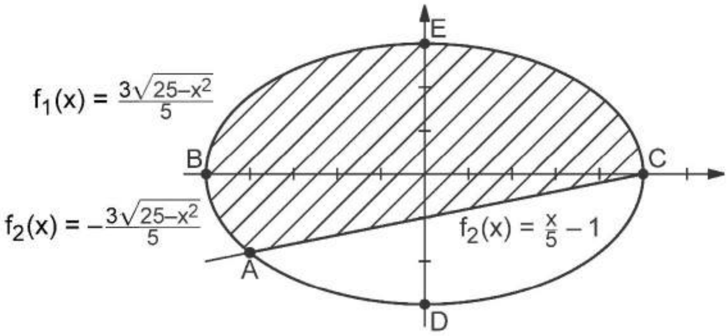
आइए अब $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$ की जाँच करें। क्योंकि $[-4, 1]$ में $x \leq 1$ है, इसलिए $x - 1 \leq 0$ है। साथ ही, $x \geq -4$ है। इसलिए, $x + 4 \geq 0$ है। इस प्रकार, $[-4, 1]$ में $(x - 1)(x + 4) \leq 0$ है तथा $-(x - 1)(x + 4) \geq 0$ है। अतः, क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

$$\int_{-4}^{1}\left(4-3x-x^2\right)\,dx = 4x-3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-4}^{1}$$

$$= \left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-16-24-\frac{-64}{3}\right)=\frac{125}{6}$$

E3) आकृति 22 को देखिए। यहाँ, हम $f_1(x)$ इस प्रकार लेते हैं कि इसका आलेख दीर्घवृत्त का चाप BEC हो। हम $f_1(x)=\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}$ प्राप्त करते हैं। हम

$f_2(x)=\begin{cases}-\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5} & \text{यदि } -5\le x\le -4\\ \frac{x}{5}-1 & \text{यदि } -4\le x\le 5\end{cases}$, को फलन $f_2(x)$ लेते हैं।



आकृति 22: वक्रों $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ और $y=\frac{x}{5}-1$ के बीच का क्षेत्रफल

ध्यान दीजिए कि B से A तक दीर्घवृत्त के चाप के भाग का आलेख फलन $-\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}$ का आलेख है। $x=-4$ से $x=5$ तक $f_2(x)$ के आलेख में $x=-4$ से $x=5$ तक रेखा $y=\frac{x}{5}-1$ का आलेख सम्मिलित है।

ध्यान दीजिए कि $[-5,-4]$ में

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}-\left(-\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}\right)=\frac{6\sqrt{25-x^2}}{5}\ge 0 \text{ है।}$$

$[-4,5]$ में,

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}-\left(\frac{x}{5}-1\right)=\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}+\left(1-\frac{x}{5}\right)\ge 0 \text{ है।}$$

पहला पद $\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}\ge 0$ है, क्योंकि हम $25-x^2$ का धनात्मक वर्गमूल लेते हैं। क्योंकि $[-4,5]$ में $x\le 5$ है, इसलिए $[-4,5]$ में $\frac{x}{5}\le 1$ है। इसलिए $1-\frac{x}{5}\ge 0$ है। वाँछित क्षेत्रफल है:

$$\int_{-5}^{5}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\,dx$$

$$=\int_{-5}^{-4}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\,dx+\int_{-4}^{5}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\,dx$$

$$=\int_{-5}^{-4}\left\{\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}-\left(-\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}\right)\right\}dx$$

$$+\int_{-4}^{5}\left\{\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}-\left(\frac{x}{5}-1\right)\right\}dx$$

$$=\frac{6}{5}\int_{-5}^{-4}\sqrt{25-x^2}\,dx+\frac{3}{5}\int_{-4}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx-\int_{-4}^{5}\left(\frac{x}{5}-1\right)dx \quad \ldots(14)$$

निम्नलिखित सूत्र का स्मरण कीजिए, जो हमने इकाई 18 के उपभाग 18.3.3 में व्युत्पित किया था:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C. \qquad \ldots(15)$$

समीकरण (14) के प्रथम समाकल का मान निकालने के लिए, समीकरण (15) का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$\int \sqrt{5^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$, जहाँ फलन $\sin^{-1} x$ का प्राँत $[-1, 1]$ है तथा परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है। तब, कलन की मूलभूत प्रमेय के उपयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}
&\int_{-5}^{-4} \sqrt{25 - x^2}\,dx \\
&\quad = \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)\Big|_{-5}^{-4} \\
&\quad = \left\{\left(\frac{1}{2}(-4)\sqrt{25 - (-4)^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{1}{2}(-5)\sqrt{25 - (-5)^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-5}{5}\right)\right)\right\} \\
&\quad = \left(-6 - \frac{25}{2}\alpha\right) - \left\{\left(\frac{25}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

जहाँ $0 < \alpha < 1$ इस प्रकार है कि $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ है। अतः,

$$\int_{-5}^{-4} \sqrt{25 - x^2}\,dx = \left(\frac{25}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) - 6 - \frac{25}{2}\alpha = \frac{25}{4}\pi - \frac{25}{2}\alpha - 6. \qquad \ldots(16)$$

पुनः, समीकरण (15) का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}
&\int_{-4}^{5} \sqrt{25 - x^2}\,dx \\
&\quad = \left\{\left(\frac{1}{2}(5)\sqrt{25 - 5^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{1}{2}(-4)\sqrt{25 - (-4)^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right)\right)\right\} \\
&\quad = \frac{25}{4}\pi + \frac{25}{2}\alpha + 6 \qquad \ldots(17)
\end{aligned}$$

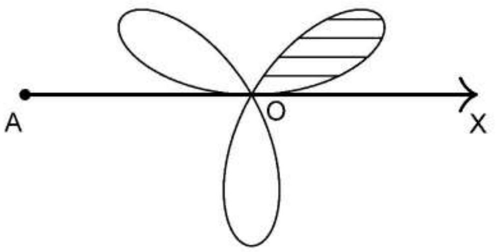
साथ ही,

$$\int_{-4}^{5} \left(\frac{x}{5} - 1\right) dx = \frac{x^2}{10} - x\Big|_{-4}^{5} = \left(\frac{25}{10} - 5\right) - \left(\frac{16}{10} + 4\right) = -\frac{81}{10} \qquad \ldots(18)$$

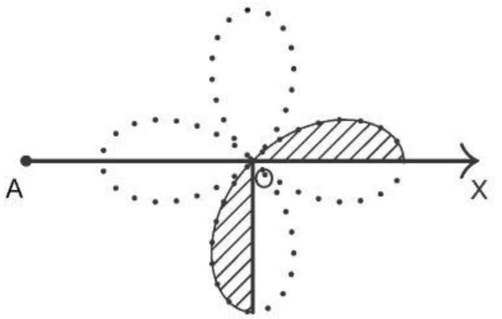
समीकरण (16), समीकरण (17) और समीकरण (18) से, वाँछित क्षेत्रफल है:

$$\frac{6}{5}\left(\frac{25}{4}\pi - \frac{25}{2}\alpha - 6\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{25}{4}\pi + \frac{25}{2}\alpha + 6\right) - \frac{81}{10} = \frac{45}{4}\pi - \frac{75}{4}\alpha - \frac{117}{10}$$

E4) आकृति 23 देखिए।



आकृति 23: वक्र $r = a\sin 3\theta$

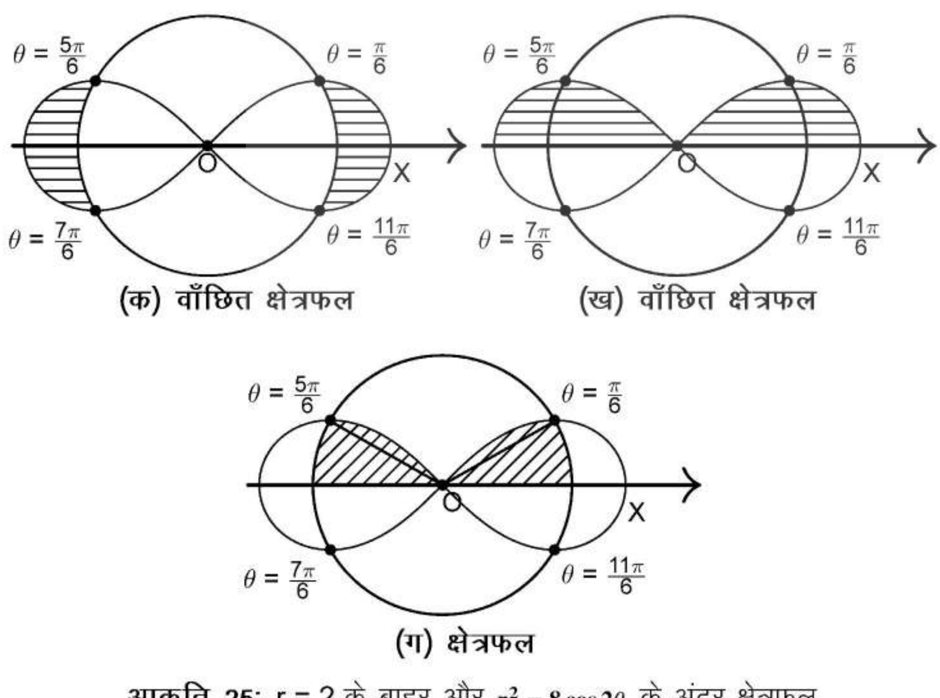


आकृति 24: वक्र $r = a\cos 2\theta$

ध्यान दीजिए कि पहले छल्ले के प्रारंभ के लिए, $r = 0$ है। इस छल्ले के अंत-बिंदु को ज्ञात करने के लिए, हमें θ का ऐसा प्रथम मान ज्ञात करना पड़ेगा जो 0 से अधिक हो तथा जिसके लिए $r = a\sin 3\theta = 0$ हो। ऐसे एक θ के लिए, $\sin 3\theta = 0$ है, क्योंकि $a \neq 0$ है। θ का ऐसा प्रथम मान $3\theta = \pi$ या $\theta = \frac{\pi}{3}$ है। अतः, वाँछित क्षेत्रफल है:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta\, d\theta = \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi} \sin^2 u\, du \text{ यदि } u = 3\theta \text{ है।}$$

$$= \frac{\pi a^2}{12}.$$



आकृति 25: $r = 2$ के बाहर और $r^2 = 8\cos 2\theta$ के अंदर क्षेत्रफल

E5) आकृति 24 को देखिए।

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi} \cos^2 \phi \, d\phi, \ \phi = 2\theta \text{ प्रतिस्थापित करने पर}$$

$$= \left(\frac{a^2}{8}\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{8}$$

एक स्विस गणितज्ञ और भौतिकविद् जैकब बर्नूली ने 1604 में एक शोध पत्र में वक्र द्विपाशी की व्याख्या की।

जैकब बर्नूली
1655-1705

E6) आकृति 25 को देखिए। प्रतिच्छेद बिंदु $8\cos 2\theta = 4$ या $\cos 2\theta = 1/2$ द्वारा दिए जाते हैं। θ के मान $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ हैं।

हमने चारों प्रतिच्छेद बिंदुओं को चार बिंदिओं (dots) द्वारा दर्शाया है। हमें आकृति 25 (क) में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। प्रारंभिक रेखा के सापेक्ष सममिति होने के कारण, वाँछित क्षेत्रफल $2\{(A-B)\}$ है, जहाँ आकृति 25 (ख) में क्षेत्रफल A दर्शाया गया है तथा आकृति 25 (ग) में क्षेत्रफल B दर्शाया गया है। क्षेत्र A का क्षेत्रफल है:

$$\text{क्षेत्रफल } A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cos 2\theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} 8\cos 2\theta \, d\theta$$

$$= 2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\sin 2\theta\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = 2 + 2\left(0 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 4$$

आइए अब क्षेत्रफल B अभिकलित करें। ध्यान दीजिए कि हमें दाएँ और बाएँ आधे भागों में से प्रत्येक को दो भागों में विभाजित करना पड़ेगा। दाएँ आधे वाला भाग रेखाओं $\theta = 0$ और $\theta = \frac{\pi}{6}$ द्वारा परिबद्ध वृत्त $r = 2$ के क्षेत्रफल तथा रेखाओं $\theta = \frac{\pi}{6}$ और $\theta = \frac{\pi}{4}$ द्वारा परिबद्ध द्विपाशी के क्षेत्रफल का योग है। अतः यह क्षेत्रफल

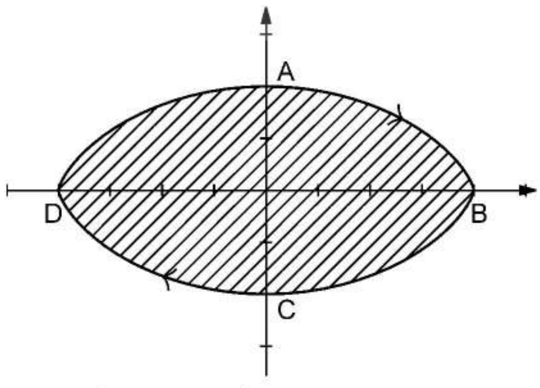
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 8\cos 2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{3} + 2\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3} + 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ है। इसी प्रकार,

B का बायाँ आधा भाग रेखाओं $\theta = \frac{3\pi}{4}$ और $\theta = \frac{5\pi}{6}$ द्वारा परिबद्ध द्विपाशी के क्षेत्रफल तथा रेखाओं $\theta = \frac{5\pi}{6}$ और $\theta = \pi$ द्वारा परिबद्ध वृत्त $r = 2$ के क्षेत्रफल का योग है। यह क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} 8\cos 2\theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} 4\, d\theta = 2\sin 2\theta\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ है।

अतः, वाँछित क्षेत्रफल $2(A-B) = 2\left\{4 - 2\left(\frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}\right)\right\} = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$ है।

E7) आकृति 26 को देखिए।



आकृति 26: वक्र $x = a\left(3\sin\theta - \sin^3\theta\right), y = a\cos^3\theta$ का क्षेत्रफल, जब $a = 2$ है।

ध्यान दीजिए कि जब 0 से 2π तक θ में वृद्धि होती है, तब A से प्रारंभ होते हुए वक्र का अनुरेखण दक्षिणावर्त दिशा (clockwise) में होता है। हम ऋणात्मक चिह्न को धनात्मक में बदल कर, समीकरण (i) का प्रयोग करते हैं। वाँछित क्षेत्रफल

$$A = \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a(\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta) = 3a\cos^3\theta \text{ है।}$$

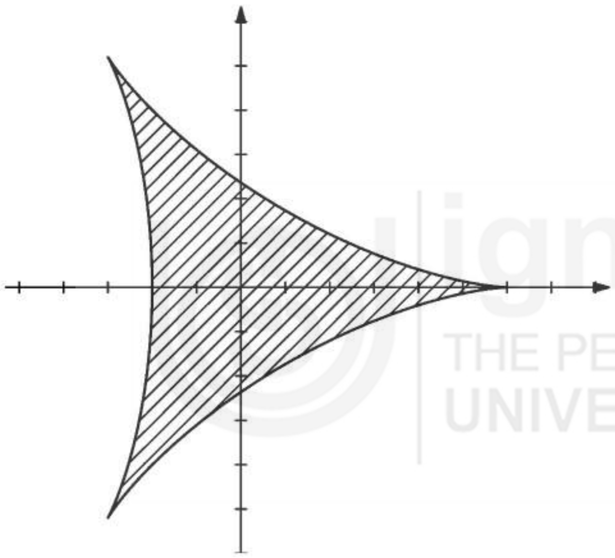
इकाई 19 के समीकरण (13) का प्रयोग करने पर,

$$A = \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{d\theta}d\theta = 3a^2\int_0^{2\pi}\cos^6\theta\ d\theta = 6a^2\cdot\frac{15}{48}2\pi = \frac{15a^2\pi}{8} \text{ है।}$$

आकृति 27 को देखिए।

एक दृष्टि-संबंधी (या प्रकाश संबंधी) समस्या के संबंध में त्रिकसपोयड पर सर्वप्रथम ऑयलर ने विचार किया था।

एल–ऑयलर
(1703-1783)



आकृति 27: त्रिकसपोयड (त्रिदली) $x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta),\ y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$ **का क्षेत्रफल, जब $a = 2$ है।**

हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dx}{d\theta} = -2a\sin\theta - 2a\sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2a\cos\theta - 2a\cos 2\theta$$

$$x\frac{dy}{d\theta} = 4a^2\cos^2\theta - 2a^2\cos\theta\cos 2\theta - 2a^2\cos^2 2\theta$$

$$y\frac{dx}{d\theta} = -4a^2\sin^2\theta - 2a^2\sin\theta\sin 2\theta + 2a^2\sin^2 2\theta$$

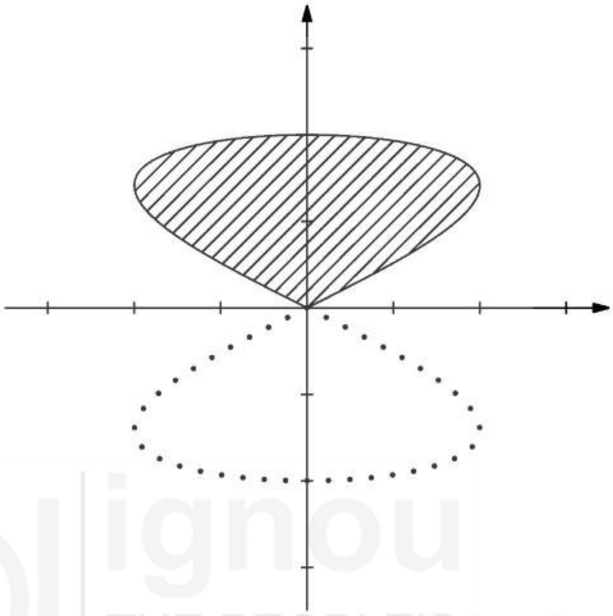
$$\begin{aligned} x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} &= 4a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2a^2(\cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta) \\ &\quad - 2a^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) \\ &= 2a^2 - 2a^2\cos 3\theta \end{aligned}$$

अतः, वाँछित क्षेत्रफल है:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}2a^2\,d\theta - \frac{1}{2}2a^2\int_0^{2\pi}\cos 3\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi a^2 - a^2 \left.\frac{\sin 3\theta}{3}\right|_0^{2\pi} = 2\pi a^2$$

E9) आकृति 28 को देखिए। ध्यान दीजिए कि $t = 0$ के लिए, हम बिंदु $(0, 0)$ प्राप्त करते हैं। $\sin t = 0$ रखने पर, $\sin 2t = 0$ है। तब, हम ज्ञात करते हैं कि $t = \pi$ है। साथ ही, t का कोई और छोटा मान नहीं है, जिसके लिए $\sin t = 0$ और $\sin 2t = 0$ हो। यह भी ध्यान दीजिए कि y-निर्देशांक $y = a \sin t > 0$ है। इसलिए, जहाँ $y \geq 0$ है, वहाँ वक्र का अनुरेखण वामावर्त दिशा में हो रहा है।



आकृति 28: वक्र $x = a\sin 2t, y = a\sin t$ के एक छल्ले (लूप) का क्षेत्रफल, जब $a = 2$ है।

समीकरण (ii) का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$A = \int_0^{\pi} x\frac{dy}{dt}\,dt = a^2\int_0^{\pi} \sin 2t \cos t\,dt = 2a^2\int_0^{\pi} \sin^2 \cos t\,dt$$

$\sin 2t = 2\sin t \cos t$ के प्रयोग से $u = \cos t$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$A = a^2\int_{-1}^{1} u^2\,du = 2a^2 \left.\left(\frac{u^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{4a^2}{3}$$ है।

E10) हम प्राप्त करते हैं:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (dx/dy)^2}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1 + (3)^2}\,dy = \sqrt{10}\int_1^2 dy = \sqrt{10}$$

दूरी-सूत्र द्वारा, $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$L = \sqrt{(3-6)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

E11) हम प्राप्त करते हैं:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x}.\sec x \tan x = \tan x\right)$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \tan^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \ln \left| \frac{\sec \pi/3 + \tan \pi/3}{\sec 0 + \tan 0} \right| = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

E12) $y = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$. इसलिए $\frac{dy}{dx} = (3/2)\sqrt{\frac{x}{a}}$ है।

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}} \, dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^a \sqrt{4a + 9x} \, dx = \frac{1}{27\sqrt{a}} (4a + 9x)^{3/2} \Big]_0^a$$

$$= \frac{1}{27\sqrt{a}} \left((13a)^{3/2} - (4a)^{3/2}\right) = \frac{a}{27}(13^{3/2} - 8)$$

E13) $3y = 8x \Rightarrow y = \frac{8x}{3}$ है। इसे $y^2 = 4ax$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम $\frac{64x^2}{9} = 4ax$ अर्थात् $64x^2 - 36ax = 0$ प्राप्त करते हैं।

$$\Rightarrow x = 0 \text{ या } x = \frac{9a}{16}$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ या } y = \frac{3a}{2}$$

अतः, $(0, 0)$ और $\left(\frac{9a}{16}, \frac{3a}{2}\right)$ प्रतिच्छेद बिंदु हैं। अब, $4ax = y^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a}$ है।

$$L = \int_0^{3a/2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4a^2}} \, dy = \frac{1}{2a} \int_0^{3a/2} \sqrt{4a^2 + y^2} \, dy$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\frac{y}{2}\sqrt{4a^2 + y^2} + 2a^2 \ln\left|y + \sqrt{4a^2 + y^2}\right| \right]_0^{3a/2}$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\frac{15a^2}{8} + 2a^2 \ln 2 \right] = \left(\frac{15}{16} + \ln 2\right) a$$

E14) हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$= a^2[1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta + \sin^2\theta] = 2a^2(1 - \cos\theta) = 4a^2\sin^2(\theta/2)$$

$$\therefore L = 2a \int_0^{2\pi} \sin(\theta/2) \, d\theta = 4a \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = 8a \int_0^{\pi/2} \sin\phi \, d\phi = 8a$$

E15) हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t + \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2e^{2t} \text{ है।}$$

$$\therefore L = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^t dt = \sqrt{2} e^t \Big|_0^{\pi/2} = \sqrt{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right)$$

E16) $r = a\cos^3\frac{\theta}{3} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -a\cos^2\frac{\theta}{3}\sin\frac{\theta}{3}$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2\cos^6\frac{\theta}{3} + a^2\cos^4\frac{\theta}{3}\sin^2\frac{\theta}{3} = a^2\cos^4\frac{\theta}{3}$$

$$\therefore L = 2a\int_0^{3\pi/2}\cos^2\frac{\theta}{3}d\theta = 6a\int_0^{\pi/2}\cos^2\phi\, d\phi = 3a\frac{\pi}{2} \text{ है।}$$

E17) $\frac{dx}{dt} = -2\sin t, \frac{dy}{dt} = 2\cos t$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 2$$

$$L = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi \text{ है।}$$

ध्यान दीजिए कि $L = 2\pi r = 2\pi \times 2 = 4\pi$ है, क्योंकि यहाँ $r = 2$ है।

E18) $r = a(1-\cos\theta),\ \frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$

$$\therefore \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = 2a\sin\frac{\theta}{2} \text{ है।}$$

ऊपरी आधे भाग में वक्र की लंबाई $\int_0^{\pi} 2a\sin(\theta/2)\, d\theta = 4a$ है।

$\theta = 0$ से $\theta = 2\pi/3$ तक लंबाई

$$= \int_0^{2\pi/3} 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta = 2a \text{ है।}$$

$\theta = 2\pi/3$ द्वारा वक्र के ऊपरी आधे वाला चाप समद्विभाजित होता है।

E19)

$r = a(\theta^2 - 1),\ \frac{dr}{d\theta} = 2a\theta$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2[\theta^4 - 2\theta^2 + 1 + 4\theta^2]$$

$$= a^2(\theta^2 + 1)^2$$

$$\therefore L = a\int_{-1}^{1}(\theta^2 + 1)d\theta = a\left(\frac{\theta^3}{3} + \theta\right)\Bigg]_{-1}^{1} = a\left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8a}{3} \text{ है।}$$

विविध उदाहरण और प्रश्न

नीचे दिए गए उदाहरण और प्रश्न, इस खंड में आपके द्वारा अध्ययन की गई संकल्पनाओं और प्रक्रियाओं पर आधारित हैं। इनको करने से, आपको संबंधित संकल्पनाओं की बेहतर समझ प्राप्त होगी तथा साथ ही ऐसे प्रश्नों को हल करने का अभ्यास भी हो जाएगा।

उदाहरण 1: निम्नलिखित को समाकलित कीजिए:

i) $\dfrac{x^{n-1}}{x^n + a^n}$

ii) $\tan^n x \sec^2 x$

iii) $\cos x\left(\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

iv) $\dfrac{1}{x\sqrt{2x^2 - 8}}$

v) $\dfrac{1}{x \sec^{-1} x\sqrt{x^2 - 1}}$

हल: i) $u = x^n + a^n$ प्रतिस्थापित करने पर, हम $du = nx^{n-1}dx$ या $x^{n-1}dx = \dfrac{du}{n}$ प्राप्त करते हैं।

$$\therefore \int \frac{x^{n-1}}{x^n + a^n}dx = \frac{1}{n}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{n}\ln|n| + C = \frac{1}{n}\ln\left|x^n + a^n\right| + C$$

ii) $u = \tan x$ रखने पर, $du = \sec^2 x\, dx$ हैं। तब, समाकल हो जाता है:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\tan^{n+1} x}{n+1} + C$$

iii) $\int \cos x\left(\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$u = \sin x$ रखने पर, $du = \cos x\ dx$ है।

$$\int\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\cos x\, dx = \int\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)du = \int\frac{du}{u} + \int\frac{du}{u^2} = \ln|u| - \frac{1}{u} + C$$
$$= \ln|\sin x| - \operatorname{cosec} x + C$$

iv) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - 8}} = \int\frac{dx}{x\sqrt{2(x^2 - 4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

v) $u = \sec^{-1}(x)$ रखने पर, हम $du = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}dx$ प्राप्त करते हैं।

$$\therefore \int\frac{dx}{x\sec^{-1} x\sqrt{x^2 - 1}} = \int\frac{du}{u} + C = \ln\left|\sec^{-1}(x)\right| + C$$

***

उदाहरण 2: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए:

i) $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx$ ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx$ iii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$

iv) $\int \frac{x^3\,dx}{1+x^8}$ v) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$

हल : i) $u=\tan^{-1}x$ रखने पर, हम $du=\frac{1}{1+x^2}dx$ प्राप्त करते हैं। अतः,

$$\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx=\int e^u du=e^u+C=e^{\tan^{-1}x}+C \text{ है।}$$

ii) $\sqrt{x}=u$, रखने पर, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=du$ है।

अतः, $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx=2\int \cos u\,du=2\sin u+C=2\sin\sqrt{x}+C$ है।

iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{6-(x+1)^2}}$ है। $u=x+1$ रखने पर, $du=dx$ है। अतः,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6-(x+1)^2}}=\int \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-u^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{6}}\right)+C=\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+C \text{ है।}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)\Bigg|_0^1=\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)-\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ है।}$$

iv) $x^4=u$ रखने पर, हम $4x^3dx=du$ प्राप्त करते हैं। अतः,

$$\int \frac{x^3}{1+x^8}dx=\frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{4}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{4}\tan^{-1}x^4+C \text{ है।}$$

v) $x=u^2$ रखने पर, $dx=2u\,du=2\sqrt{x}\,du$ है।

$$\therefore \int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}=\int \frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u+C=\tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)+C \text{ है।}$$

***

उदाहरण 3: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए :

i) $\int_a^{2a}\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 dx,\ a>0$ ii) $\int \frac{ae^{ax}+be^{bx}}{e^{ax}+e^{bx}}dx$ iii) $\int\left(ax+\frac{b}{x}+c\right)^n\left(\frac{ax^2-b}{x^2}\right)dx$

iv) $\int \frac{2ax^n+b}{\left(ax^{2n}+bx^n+c\right)}x^{n-1}dx$ v) $\int \frac{dx}{x\ln|x|}$

हल: i) $\int_a^{2a}\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 dx=\int_a^{2a}\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}+2\right)dx$

$$=a\ln|x|+\frac{x^2}{2a}+2x\Bigg|_a^{2a}=\left(a\ln 2a+\frac{4a^2}{2a}+4a\right)-\left(a\ln a+\frac{a^2}{2a}+2a\right)$$

$$=a\ln\frac{2a}{a}+6a-2a-\frac{a}{2}=a\ln 2+\frac{7a}{2}$$

ii) $u=e^{ax}+e^{bx}$ रखने पर, $du=(ae^{ax}+be^{bx})dx$ है। अतः, समाकल

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln\left|e^{ax}+e^{bx}\right|+C \text{ हो जाता है।}$$

iii) $u = ax + \frac{b}{x}$ रखने पर, हम $\left(a - \frac{b}{x^2}\right)dx = du$ या $\left(\frac{ax^2 - b}{x^2}\right)dx = du$ प्राप्त करते हैं। अतः, समाकल हो जाता है :

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{n+1}\left(ax + \frac{b}{x}\right) + C$$

iv) यह पुन : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ के रूप में है। अतः, समाकल $\ln\left|ax^{2n} + bx^n + C\right| + C$ है।

v) यह $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ के रूप में है, जहाँ $f(x) = \ln|x|$ है। इसलिए समाकल $\ln|x| + C$ है।

***

आइए अब उस स्थिति पर कार्य करने के लिए एक अन्य विधि को देखें, जहाँ हमें $\sin x$ या $\cos x$ की सम घातों को समाकलित करना होता है। आइए $y = \cos + i\sin x$ लिखें। तब, $\frac{1}{y} = \cos x - i\sin x$ है। आगे, द मुआव्र (De Moivre's) प्रमेय द्वारा, हम $y^n = \cos nx + i\sin nx$ और $\frac{1}{y^n} = \cos nx - i\sin nx$ प्राप्त करते हैं।

अतः, $y^n + \frac{1}{y^n} = 2\cos nx$ है तथा $y^n - \frac{1}{y^n} = 2i\sin x$ है।

$\cos^n x$ को समाकलित करने के लिए, हम संबंध $y^n - \frac{1}{y^n} = \left(\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right)^n$ का उपयोग करते हैं। इसके बाद, हम उपरोक्त समीकरण की RHS प्रसारित करने में द्विपद प्रमेय का उपयोग करते हैं, जिससे

$$\left(\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(y^n + C(n,1)y^{n-1}\frac{1}{y} + \ldots + C(n,n-1)y\frac{1}{y^{n-1}} + \frac{1}{y^n}\right)$$ प्राप्त होता है।

हम $y^{n-2k} = y^{n-k}\frac{1}{y^k}$ के रूप के प्रत्येक पद को $y^{-(n-2k)} = y^{2k-n}$ के रूप के एक अद्वितीय पद से समूहीकृत कर सकते हैं, $y^{2n-k} + \frac{1}{y^{2n-k}}$ को $\cos(2n-k)x$ द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं तथा फिर उन्हें पदों के अनुसार समाकलित कर सकते हैं।

$\sin^n x$ को समाकलित करने के लिए, हम संबंध $\sin^n x = \frac{1}{2i}\left(y - \frac{1}{y}\right)^n$ का उपयोग करते हैं। पहले की ही तरह, उपरोक्त समीकरण की RHS को प्रसारित करने में हम द्विपद प्रमेय का उपयोग करते हैं, जिससे

$$\left(\frac{1}{2i}\left(y - \frac{1}{y}\right)\right)^n = \frac{1}{(2i)^n}\left(y^n - C(n,1)y^{n-1}\left(\frac{1}{y}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)y\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{y}\right)^n\right)$$

प्राप्त होता है। हम $\pm y^{n-2k} = \pm y^{n-k}\frac{1}{y^k}$ के रूप के प्रत्येक पद को $\pm y^{-(n-2k)} = \pm y^k\frac{1}{y^{n-k}}$ के रूप के एक अद्वितीय पद से समूहीकृत कर सकते हैं। यदि n और k में एक ही सी समानता है, तो हम $y^{n-2k} + \frac{1}{y^{n-2k}}$ के रूप का एक पद प्राप्त करते हैं तथा हम इसे $\cos(n-2k)x$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं। यदि उनमें विभिन्न प्रकार की समानता है, तो हम $\pm\left(y^{n-2k} - \frac{1}{y^{n-2k}}\right)$ के रूप का एक पद प्राप्त करते हैं, तथा हम इसे $\pm\sin(n-2k)x$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं।

उदाहरण 4 : $\int \sin^4 x\,dx$ को समाकलित कीजिए।

हल : हम प्राप्त करते हैं :

$$\sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)^4 = \frac{1}{16}\left(y-\frac{1}{y}\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}\left(y^4 - 4y^3\frac{1}{y} + 6y^2\frac{1}{y^2} - 4y\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^4}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left\{y^4 + \frac{1}{y^4} - 4\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 6\right\}$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6)$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

अत :, $\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int dx$

$$= \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C$$

***

इस विधि द्वारा प्राप्त उत्तर तथा समानयन सूत्र द्वारा हमारे द्वारा प्राप्त उत्तर के अंतर पर ध्यान दीजिए। यहाँ हम उत्तर साइनों (sines) के गुणजों जैसे कि $\sin 2x$, $\sin 4x$, ... के रूप में प्राप्त करते हैं। इसलिए, इस पर निर्भर करते हुए की हमें उत्तर किस रूप में प्राप्त करना है, हम इनमें से किसी भी विधि का उपयोग कर सकते हैं।

$\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ के प्रकार के समाकल

सर्वप्रथम, हम सूत्र $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx = e^x f(x) + C$ को सिद्ध करेंगे तथा फिर देखेंगे कि कुछ फलनों को समाकलित करने में इसका उपयोग किस प्रकार किया जा सकता है। भागों द्वारा समाकलन के लिए सूत्र द्वारा,

$\int e^x f(x)dx = \int f(x)e^x dx = f(x)e^x - \int f'(x)e^x\,dx$ प्राप्त होता है।

इसका अर्थ है कि $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx = e^x f(x) + C$ है।

उदाहरण 5: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए :

i) $\int \frac{1+x}{(2+x)^2}e^x dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x}e^{-x/2}dx$

हल: i) हम प्राप्त करते हैं :

$$\int \frac{1+x}{(2+x)^2}e^x dx = \int \frac{2+x-1}{(2+x)^2}e^x dx$$

$$= \int\left[\frac{1}{2+x} + \frac{-1}{(2+x)^2}\right]e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{2+x}e^x + C, \text{ क्योंकि } \frac{-1}{(2+x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right) \text{ है।}$$

ii) क्योंकि $\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=1-\sin x$ है, इसलिए हम प्राप्त करते हैं :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x}e^{-x/2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^{-x/2}\,dx$$

ध्यान दीजिए कि हमने यहाँ $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}$ को $\sqrt{1-\sin x}$ का वर्गमूल के रूप में चुना है। इसका कारण यह है कि $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ के लिए $\tan\frac{x}{2}\le 1$ है तथा इसीलिए $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में $\sin\frac{x}{2}\le\cos\frac{x}{2}$ है (इसकी जाँच कीजिए!) । क्योंकि हम सदैव घनात्ममक वर्गमूल लेते हैं, इसलिए हमने $1-\sin x$ के वर्गमूल के रूप में $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}$ को लिया है। हम प्राप्त करते हैं:

$$\int\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^{-x/2}dx=\frac{1}{2}\int\sec\frac{x}{2}e^{-x/2}dx-\frac{1}{2}\int\tan\frac{x}{2}\sec\frac{x}{2}e^{-x/2}dx$$

अब, $\int\sec\frac{x}{2}e^{-x/2}dx=\left(\sec\frac{x}{2}\right)(-2e^{-x/2})-\int\left(\frac{1}{2}\sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\right)(-2e^{-x/2})\,dx$

$$=-2\sec\frac{x}{2}e^{-x/2}+\int\sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}e^{-x/2}dx \text{ है।}$$

इसलिए, $\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1+\cos x}e^{-x/2}\,dx=-\sec\frac{x}{2}e^{-x/2}+\frac{1}{2}\int\sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}e^{-x/2}\,dx$

$$-\frac{1}{2}\int\sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}e^{-x/2}dx=-\sec\frac{x}{2}e^{-x/2}+C \text{ है।}$$

अत :, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x}e^{-x/2}dx=-\sec\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=(-\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}})-(-1)=1-\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ है।

***

निम्नलिखित उदाहरण भागों द्वारा समाकलन का आपको और अधिक अभ्यास कराएँगे।

उदाहरण 6: भागों द्वारा समाकलन का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए

i) $\int e^{m\sin^{-1}x}\,dx$ ii) $\int x^2\sin^{-1}x\,dx$ iii) $\int\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx,\ a>0$ iv) $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

v) $\int e^x\sin 2x\cos x\,dx$

हलः i) भागों द्वारा समाकलन से,

$$\int e^{m\sin^{-1}x}dx=\int e^{m\sin^{-1}x}(1)\,dx=x\,e^{m\sin^{-1}x}-\int x\frac{d(e^{m\sin^{-1}x})}{dx}dx$$

$$=xe^{m\sin^{-1}x}-\int x\,e^{m\sin^{-1}x}\left(m\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$m\sin^{-1}x=u$ रखने पर, हम $du=\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ प्राप्त करते हैं। साथ ही, $x=\sin\left(\frac{u}{m}\right)$ है।

अतः, $\int x e^{m\sin^{-1}x}\left(\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int \sin\left(\frac{u}{m}\right)e^u du$ है। $\frac{u}{m} = v$ रखने पर, समाकल $\int e^{mv}\sin v\, dv$ हो जाता है। यह एक मानक रूप है, जिसकी चर्चा उपभाग 18.3.2 में की गई थी। अब आप हल को पूरा कर सकते हैं।

ii) भागों द्वारा समाकलन से, $\int x^2\sin^{-1}x\,dx = \frac{x^3\sin^{-1}x}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ है।

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}du$ पर विचार किजिए। $u = 1-x^2$ रखने पर, $du = -2x\,dx$ है।

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-u)}{\sqrt{u}}du$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du \text{ है।}$$

यह एक मानक रूप है। अब आप हल को पूरा कर सकते हैं।

iii) भागों द्वारा समाकलन से,

$$\int \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)dx = x\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)$$
$$-\int x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{a+x}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{x}}\left\{\frac{(a+x)-x}{(a+x)^2}\right\}dx$$

हम RHS वाले समाकल को पुनः इस रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{2}\int \frac{x\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a+x}{x}}\frac{a}{(a+x)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{ax(a+x)}{\sqrt{a}\sqrt{x}(a+x)^2}dx$$
$$= \frac{\sqrt{a}}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{(a+x)}dx.$$

$u = \sqrt{x}$ प्रतिस्थापित करने पर, हम $du = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ या $dx = 2u\,du$ प्राप्त करते हैं।

$\therefore \sqrt{x}\,dx = 2u^2du$ है। समाकल हो जाता है :

$$\frac{\sqrt{a}}{2}\int \frac{2u^2du}{(a+u^2)} = \sqrt{a}\int\left(1-\frac{a}{a+u^2}\right)du = \sqrt{a}\,u - a^{3/2}\int \frac{du}{(\sqrt{a})^2+u^2}$$
$$= \sqrt{a}\,u - a^{3/2}\frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right) + C$$
$$= \sqrt{ax} - a\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right) + C$$

iv) $\frac{1}{(1+x)^2}$ को $g(x)$ लेते हुए तथा भागों द्वारा समाकलन से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = xe^x\left(\frac{-1}{(x+1)}\right) - \int \frac{-1}{(x+1)}(e^x + xe^x)dx$$
$$= \frac{-xe^x}{x+1} + \int e^x dx = \frac{-xe^x}{x+1} + e^x + C$$

v) हमें $\sin 2x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$ प्राप्त है। अत :,

$\int e^x \sin 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int e^x \sin 3x\, dx + \frac{1}{2}\int e^x \sin x\, dx$ है।

अब, आप हल को पूरा कर सकते हैं, क्योंकि दोनों समाकल मानक रूपों के हैं, जिनकी चर्चा हमने 18.3.2 में की थी।

* * *

उदाहरण 7: प्रतिस्थान $x = a\cos 2\theta$ उपयोग करते हुए, समाकल $\int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$ का मान निकालिए।

हल: $x = a\cos 2\theta$ रखने पर, $dx = -2a\sin 2\theta$ है। आगे,

$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \sqrt{\frac{a(1-\cos 2\theta)}{a(1+\cos 2\theta)}}$ है। $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ के प्रयोग से,

$$1-\cos 2\theta = 1-\cos^2\theta + \sin^2\theta = 2\sin^2\theta \text{ है।}$$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, 1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ अतः,

$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}} = \tan\theta$ है।

$$\therefore I = \int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = -2a^2\int \cos 2\theta\, \tan\theta\, \sin 2\theta\, d\theta$$

$$= -2a^2\int \cos 2\theta \tan\theta 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = -2a^2\int \cos 2\theta 2\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= -2a^2\int \cos 2\theta(1-\cos 2\theta)\, d\theta = -2a^2\int\left(\cos 2\theta - \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= -2a^2\left(\frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{8}\right) = \frac{a^2}{4}(4\theta - 4\sin 2\theta + \sin 4\theta)$$

$x = a\cos 2\theta$ से यह निष्कर्ष निकलता है कि $\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\sin 2\theta = \sqrt{1-\cos^2 2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ और

$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 2\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\left(\frac{x}{a}\right)$ है।

$$\therefore \int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = \frac{a^2}{4}\left[2\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{4}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right] + c$$

$= \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{(x-2a)}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$ है।

***

उदाहरण 8: निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए :

i) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)(x-3)}$ ii) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

iii) $\int \frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}dx$ iv) $\int \frac{(x^2+a^2)}{x^4+a^2x^2+a^4}$

v) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^3-1)}$

हलः i) आंशिक भिन्नों में विभक्त करने के लिए, हम लिखते हैं :

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-3)}$$

दोनों पक्षों को $(x-1)^2(x-2)(x-3)$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$1 = A(x-1)(x-2)(x-3) + B(x-2)(x-3) + C(x-1)^2(x-3) + D(x-1)^2(x-2)$$

$x = 3$ रखने पर, हम $1 = D(3-1)^2(3-2) = 4D$ या $D = 1/4$ प्राप्त करते हैं।

$x = 2$ रखने पर, हम $1 = C(2-1)^2(2-3) = -C$ या $C = -1$ प्राप्त करते हैं।

$x = 1$ रखने पर, $1 = B(1-2)(1-3) = 2B$ या $B = \frac{1}{2}$ है।

$x = 0$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$1 = A(-1)(-2)(-3) + B(-2)(-3) + C(-1)^2(-3) + D(-1)^2(-2)$$

या $1 = -6A + \frac{6}{2} + 3 - \frac{1}{2}$ या $A = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)(x-3)} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-3}$$
$$= \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x-3| + C \text{ है।}$$

ii) आंशिक भिन्नों में विभक्त करने के लिए, हम लिखते हैं:

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

दोनों पक्षों को $(x^2+4)(x^2+1)$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$1 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+4)$$

$x = i$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं: $1 = 3(Ci + D)$ (1)

$x = -i$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं: $1 = 3(-Ci + D)$ (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, हम $2 = 6D$ या $D = 1/3$ प्राप्त करते हैं। इसे (1) में रखने पर, हम $C = 0$ प्राप्त करते हैं।

$x = 2i$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं: $1 = -3(2Ai + B)$ (3)

$x = -2i$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं: $1 = -3(-2Ai + B)$ (4)

इन्हें हल करने पर, हम $B = -1/3$ और $A = 0$ प्राप्त करते हैं। अतः,

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{1}{3}\left\{\int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+4}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right\} + C$$

iii) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{xdx}{x^4+x^2+1} = \int \frac{xdx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}} = \int \frac{xdx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$u = x^2 + \frac{1}{2}$ रखने पर, $du = 2x\,dx$ है। अतः,

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$ जो एक मानक रूप है।

iv) $$\int \frac{x^2+a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}dx = \int \frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2 - a^2x^2}dx$$

$$= \int \frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2+ax\right)\left(x^2+a^2-ax\right)}dx$$

अब, $$\frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2+ax\right)\left(x^2+a^2-ax\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+a^2+ax} + \frac{1}{x^2+a^2-ax}\right)$$ है।

$$\int \frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2+ax\right)\left(x^2+a^2-ax\right)}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x^2+a^2+ax} + \int \frac{dx}{x^2+a^2-ax}\right)$$ है।

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2+ax} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}$$

$u = x + \frac{a}{2}$ रखने पर, समाकल $\int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}$ हो जाता है, जो एक मानक रूप है।

इसी प्रकार,

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2-ax} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}}$$ है तथा हम इसे प्रतिस्थापन $u = x - \frac{a}{2}$ का उपयोग करते हुए, मानक रूप में बदल सकते हैं।

v) हमें प्राप्त है: $\frac{1}{(x+1)(x^3-1)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$

आंशिक भिन्नों में विभक्त करने के लिए, हम लिखते हैं:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

दोनों पक्षों को $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$1 = A(x-1)\left(x^2+x+1\right) + B(x+1)\left(x^2+x+1\right) + (Cx+D)\left(x^2-1\right)$$

$x = 1$ रखने पर, हम $1 = 6B$ या $B = \frac{1}{6}$ प्राप्त करते हैं। $x = -1$ रखने पर, हम $1 = -2A$ या $A = -\frac{1}{2}$ प्राप्त करते हैं। $x = 0$ रखने पर, हम $1 = -A + B - D$

या $D = B - A - 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{3}$ प्राप्त करते हैं। $x = 2$ रखने पर, $1 = 7A + 21B + 3(2C + D)$ प्राप्त होता है। C के लिए, हल करने पर, हमें $C = \frac{1}{3}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore \int \frac{dx}{(x+1)(x^3-1)} = \int \left(\frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)} \right) dx$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$$

***

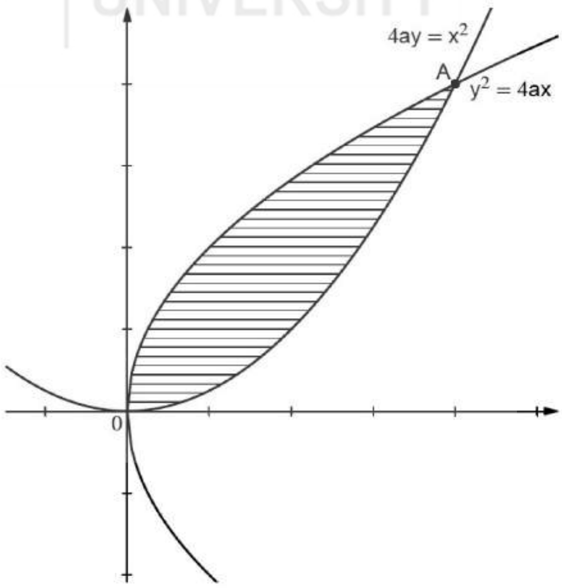
हमने इकाई 18 के उदाहरण 18 में, अंतिम समाकल के प्रकार के ही समाकल का मान निकाला था।

उदाहरण 9: वक्रों $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात किजिए।

हलः आकृति 1 को देखिए। प्रतिच्छेद बिंदु $\left(\frac{x^2}{4a}\right)^2 = 4ax$ या $x^4 - 64a^3x = 0$, अर्थात् $x(x^3 - 64a^3) = 0$ द्वारा प्राप्त होते हैं।

$(x^3 - 64a^3) = (x - 4a)(x^2 + 4ax + 16a^2)$ है।

समीकरण $x^2 + 4ax + 16a^2 = 0$ के सम्मिश्र मूल हैं, क्योंकि विविक्तकर $b^2 - 4ac = 16a^2 - 64a^2 < 0$ है। इसलिए, प्रतिच्छेद बिंदु $x = 0$ और $x = 4a$ द्वारा दिए जाते हैं। जब $x = 0$ है, तब $y = 0$ है। जब $x = 4a$ है, तब $y = (4a)^2 / 4a = 4a$ है।



आकृति 1: $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

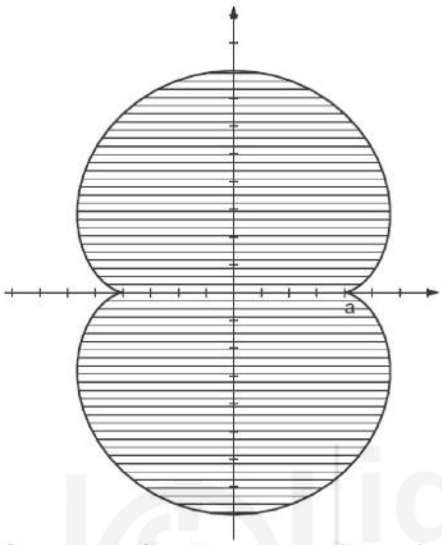
अतः, ये वक्र $(0,0)$ और $(4a,4a)$ पर प्रतिच्छेद करती हैं। हमें $2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a} = \sqrt{x}\left(2\sqrt{a} - \frac{x^{3/2}}{4a}\right)$ प्राप्त है। यदि $x \leq 4a$ है, तो $\frac{x^{3/2}}{4a} \leq \frac{(4a)^{3/2}}{4a} = \frac{8a^{3/2}}{4a} = 2\sqrt{a}$ है। इसलिए, यदि $x \leq 4a$ है, तो $2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a} \geq 0$ है।

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हम $f_1(x) = \sqrt{2ax}$ और $f_2(x) = \frac{x^2}{4a}$ लेते हैं। तथा 0 से 4a तक $f_1(x) - f_2(x)$ को समाकलित करते हैं, अर्थात् समाकल $\int_0^{4a}\left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{4a}\right)dx$ का मान निकालते हैं। इस समाकल का मान निकालना सरल है।

शब्द 'नेफरॉयड' का अर्थ "बृक्क या गुर्दे (Kidney) का आकार" है।

***

उदाहरण 10: वक्र नेफरॉयड (Nephroid) $x = a(3\cos t - \cos 3t)$ और $y = a(3\sin t - \sin 3t)$ का क्षेत्रफल तथा उसके चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।।



आकृति 2: एक नेफरॉयड द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

हल: जब $t = 0$ है, तब $x = 2a$ और $y = 0$ है। जब $t = \frac{\pi}{2}$ है, तब $x = 0$ और $y = 4a$ है। जब $t = \pi$ है, तब $x = -2a$ और $y = 0$ है। जब $t = \frac{3\pi}{2}$ है, तब $x = 0$ और $y = -2a$ है।

जब $t = 2\pi$ है, तब $x = 2a$ और $y = 0$ है। इसलिए नेफरॉयड एक बंद वक्र है, जिसके प्रारंभिक और अंतिम बिंदुओं के रूप में $\alpha = 0$ और $\alpha = 2\pi$ हैं। साथ ही, जब t का मान 0 से 2π तक विचरण करता है, तब यह वक्र वामावर्त दिशा में अनुरेखित होती है। क्षेत्रफल है :

$$A = \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{dt}dt$$

$\frac{dx}{dy} = a(-3\sin t + 3\sin 3t)$ है।

$$\therefore y\frac{dx}{dt} = -a^2(3\sin t - 3\sin 3t)(-3\sin t + 3\sin 3t)$$

$$= -a^2(-9\sin^2 t + 9\sin t\sin 3t + 3\sin 3t\sin t - 3\sin^2 3t)$$

$$= a^2(9\sin^2 t - 12\sin t\sin 3t + 3\sin^2 3t)$$

$$= 9a^2\frac{(1-\cos 2t)}{2} - 6a^2(\cos 2t - \cos 4t) + 3a^2\frac{(1-\cos 6t)}{2}$$

$$\therefore A = \frac{9a^2}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{9a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt - 6a^2\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt + \left[6a^2\int_0^{2\pi} dt - \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 6t\,dt\right]$$

$$= \frac{9a^2}{2}(2\pi) + \frac{3a^2}{2}(2\pi) = 12\pi a^2$$ है।

चाप की लंबाई है :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \frac{dy}{dt} = a[3\cos t - 3\cos 3t] \text{ है।}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2(3\sin 3t - 3\sin t)^2 + a^2(3\cos t - 3\cos 3t)^2$$

$$= a^2\{9\sin^2 3t + 9\sin^2 t - 18\sin 3t \sin t + 9\cos^2 t + 9\cos^2 3t - 18\cos t\cos 3t\}$$

$$= a^2\{18 - 18(\sin 3t \sin t + \cos t \cos 3t)\} = a^2\{18 - 18\cos 2t\} = 18a^2 2\sin^2 t$$

$$= 36a^2 \sin^2 t$$

$$L = \int_0^{2\pi} 6a|\sin t| dt = 6a\int_0^{\pi} \sin t dt - 6a\int_{\pi}^{2\pi} \sin t dt$$

$$= 6a(-\cos t)\Big|_0^{\pi} - 6a(-\cos t)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 6a[1-(-1)] - 6a[-1-(1)]$$

$$= 24a$$

***

उदाहरण 11: समीकरणों $x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta)$, $y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$ द्वारा दिए जाने वाली वक्र त्रिकसपोयड (त्रिदली) के चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल: $\frac{dx}{d\theta} = -2a\sin\theta - 2a\sin 2\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 2a\cos\theta - 2a\cos 2\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 4a^2\sin^2\theta + 4a^2\sin^2 2\theta + 8a^2\sin\theta\sin 2\theta + 4a^2\cos^2\theta + 4a^2\cos^2 2\theta$$

$$-8a^2\cos\theta\cos 2\theta$$

$$= 8a^2 + 8a^2(\sin\theta\sin 2\theta - \cos\theta\cos 2\theta)$$

$$= 8a^2 - 8a^2\cos 3\theta = 8a^2 . 2\sin^2\frac{3\theta}{2} = 16a^2\sin^2\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

अतः, चाप की लंबाई $L = 4a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{3\theta}{2}\right| d\theta$ है।

हमें $\sin\frac{3\theta}{2} \geq 0$ प्राप्त है, यदि $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ है; $\sin\frac{3\theta}{2} \leq 0$ प्राप्त है, यदि $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$ है तथा $\sin\frac{3\theta}{2} \geq 0$ प्राप्त है, यदि $\frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq 2\pi$ है।

$$\therefore L = 4a\left\{\int_0^{2\pi/3} \sin\frac{3\theta}{2} d\theta - \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \sin\frac{3\theta}{2} d\theta + \int_{4\pi/3}^{2\pi} \sin\frac{3\theta}{2} d\theta\right\}$$

$$= 4a\left\{\left(\frac{-2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi/3} - \left(\frac{-2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{4\pi/3} + \left(\frac{-2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\Bigg|_{4\pi/3}^{2\pi}\right\}$$

$$= 4a\left[-\frac{2}{3}\cos\pi - \left(-\frac{2}{3}\cos 0\right)\right] - 4a\left[-\frac{2}{3}\cos 2\pi - \left(-\frac{2}{3}\cos\pi\right)\right]$$

$$+ 4a\left[-\frac{2}{3}\cos 3\pi - \left(-\frac{2}{3}\cos 2\pi\right)\right] = \frac{16a}{3} \text{ है।}$$

उदाहरण 12: समानयन सूत्र $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+pn} + \frac{apx}{m+pn}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$ को व्युत्पन्न कीजिए। फिर, समाकल $\int (c^2 - x^2)^{3/2} dx$ का मान निकालने का लिए, इसका उपयोग कीजिए।

हलः x^{m-1} के g(x) मान कर, भागों द्वारा समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^p - \frac{1}{m}\int x^m p(a+bx^n)^{p-1} nbx^{n-1} dx$$

$$= \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^p - \frac{px}{m}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\left((a+bx^n)-a\right)dx$$

$$= \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^p - \frac{pn}{m}\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx + \frac{apn}{m}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$

$$\therefore \left(1+\frac{pn}{m}\right)\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m} + \frac{apn}{m}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$

$$\therefore \int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+pn} + \frac{apn}{m+pn}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$ है।

हम m = 1, $a = c^2, b = -1, n = 2$ और $p = \frac{3}{2}$ के साथ समानयन सूत्र का उपयोग करते हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$\int (c^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{x(c^2-x^2)}{4} + \frac{3c^2}{4}\int (c^2-x^2)^{1/2}dx$$

$\int (c^2-x^2)^{1/2}dx$ एक मानक रूप है, जिसकी चर्चा हमने इकाई 18 में की थी।

***

उदाहरण 13: निश्चित समाकलों के निम्नलिखित गुणों को सिद्ध कीजिए :

i) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ है।

ii) $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$ है। विशेष रूप में, यदि $f(2a-x) = f(x)$ है, तो $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^{2a} f(x)dx$ होता है। यदि $f(x) = -f(2a-x)$ है, तो $\int_0^{2a} f(x)dx = 0$ होता है।

iii) यदि $f(x) = f(a+x)$ है, तो $\int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx$ होता है।

हलः i) $y = a - x$ रखने पर, $dy = -dx$ है। यदि x = a है, तो y = 0 है तथा यदि x = 0 है, तो y = a है। अतः, समाकल हो जाता है:

$$-\int_a^0 f(y)dy = \int_0^a f(y)dy = \int_0^a f(x)dx$$

ii) $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$ है। दूसरे समाकल में, $y = 2a - x$ रखने पर, जब x = a तब y = a है तथा जब x = 2a है, तब y = 0 तथा dy = –dx है। अतः, दूसरा समाकल $-\int_a^0 f(2a-y)dy = \int_0^a f(2a-x)dx$ हो जाता है।

iii) हम प्राप्त करते हैं : $\int_0^{na} f(x)dx = \int_0^{a} f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx + \cdots +$

$$\int_{ia}^{(i+1)a} f(x)dx + \cdots + \int_{(n-1)a}^{na} f(x)dx$$

यह दर्शाना पर्याप्त है कि $\int_{ia}^{(i+1)a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ है। $f(x+a) = f(x)$ से यह निष्कर्ष निकलता है कि $f(x+2a) = f((x+a+a) = f(x)$ है। इसी प्रकार कार्य करते हुए, $f(x+ia) = f(x)$ प्राप्त होता है। समाकल $\int_{ia}^{(i+1)a} f(x)dx$ में, $x = y + ia$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं: $x = ia$ होने पर $y = 0$ है तथा $x = (i+1)a$ होने पर $y = a$ है। साथ ही, $dy = dx$ है। अतः, $\int_{ia}^{(i+1)a} f(x)dx = \int_0^a f(y+ia)dy = \int_0^a f(y)dy$ है।

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E1) $\int \cos^6 x dx$ का मान निकालिए।

E2) निम्नलिखित के मान निकालिए:

i) $\int \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2} e^x dx$ ii) $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx$

E3) निम्नलिखित को समाकलित कीजिए :

i) $\int (ax^2+bx+c)\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)dx$ ii) $\int \frac{ce^x}{ae^x+b}dx$

iii) $\int \frac{dx}{(1+x^2)(\tan^{-1}x)^n}$ iv) $\int \frac{x^2+4}{x^2-4}dx$

v) $\int (\cos x - \sin x)(2+\sin 2x)\sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

E4) सिद्ध कीजिए कि $\int_a^b \frac{\ln|x|}{x}dx = \frac{1}{2}\ln|ab|\ln\left|\frac{a}{b}\right|$ है।

E5) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए :

i) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

ii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}}$, प्रतिस्थापन $z = \left(\frac{a}{x}\right)^n$ का प्रयोग करते हुए

iii) $\int \frac{(ax^2-b)dx}{2e^{2x}+2e^x+1}$, प्रतिस्थापन $e^x = \frac{z}{1-z}$ का प्रयोग करते हुए

iv) $\int \frac{(ax^2-b)dx}{x\sqrt{c^2x^2-(ax^2+b)^2}}$ प्रतिस्थान $ax + \frac{b}{x} = z$ का प्रयोग करते हुए

E6) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)(x^2+4)^2}$ का मान निकालिए।

E7) वक्रो $y^2 = x+3$ और $y = \frac{x}{2}$ के बीच के क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।

E8) समीकरण $r = a\left(1+2\sin\frac{\theta}{2}\right)$ द्वारा दिए जाने वाली वक्र फ्रीथ का नेफरॉयड (Nephroid of Freeth) की बाहरी परिसीमा द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E9) दर्शाइए कि $\int_0^{ia} \sin^n x dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \int_0^{\pi} \cos^{2n+1} x\, dx = 0$

और $\int_0^{\pi} \cos^{2n} x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} dx$ है।

अब हम विविध प्रश्नों के समुच्चय के अंत तक पहुँच गए हैं। आप अगले भाग में इन प्रश्नों के उत्तरों का संदर्भ ले सकते हैं।

हल: उत्तर

E1) हमें $\cos x = \frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)$ प्राप्त है। अतः, हम प्राप्त करते हैं:

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^6}\left(y+\frac{1}{y}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\left(y^6 + 6y^5\frac{1}{y} + 15y^4\frac{1}{y^2} + 20y^3.\frac{1}{y^3} + 15y^2.\frac{1}{y^4} + 6y\frac{1}{y^5} + \frac{1}{y^6}\right)$$

y^i पदों को $\frac{1}{y^i}$ पदों से समूहीकृत करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}\left\{y^6 + \frac{1}{y^6} + 6\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right) + 15\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right) + 20\right\}$$

$$= \frac{1}{16}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$$

अतः, $\int \cos^6 x dx = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{6}{4}\sin 4x + \frac{15}{2}\sin 2x + 10x\right) + C$

E2) i) हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2} e^x dx = \int \frac{x^2+1-2x}{(1+x^2)^2} e^x dx$$

$$= \int \left\{\frac{1}{(1+x^2)} + \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right\} dx$$

यह $\int (f(x)+f'(x))e^x dx$ के रूप का है, जहाँ $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ हैं।

अतः, $\int \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2} e^x\, dx = \frac{e^x}{1+x^2} + C$ है।

ii) हम प्राप्त करते हैं: $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx = \int \frac{1+x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx$

$$= \int \left\{ \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right\} e^x dx$$

यह $\int (f(x) + f'(x)) e^x dx$ के रूप का है, जहाँ $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ है।

E3) i) $\int (ax^2 + bx + c)\left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c \right) dx =$

$$\int \left(a^2 + abx + acx^2 + \frac{ab}{x} + b^2 + bcx + \frac{ac}{x^2} + \frac{bc}{x} + c^2 \right) dx$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)x + (ab + bc)\frac{x^2}{2} + ac\frac{x^3}{3} + (ab + bc)\ln|x| - \frac{ac}{x} + C$$

ii) $u = ae^x + b$ रखने पर, हमें $du = ae^x dx$ प्राप्त होता है। अतः,

$\int \frac{ce^x}{ae^x + b} dx = \frac{c}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{c}{a}\ln|u| + C = \frac{c}{a}\ln|ae^x + b| + C$ है।

iii) $u = \tan^{-1} x$ रखने पर, $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ है। सामाकल हो जाता है :

$\int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{(1-n)u^{n-1}} + C = \frac{1}{(1-n)(\tan^{-1} x)^{n-1}} + C$ यदि $n > 1$ है।

यदि $n = 1$ है, तो समाकल $\ln|\tan^{-1} x| + C$ है।

iv) $\int \frac{x^2+4}{x^2-4} dx = \int \frac{x^2-4+8}{x^2-4} dx = \int \left(1 + \frac{8}{x^2-4} \right) dx = \int dx + \int \frac{dx}{x^2-4}$

$$= x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

v) $(\cos x - \sin x)(2 + \sin 2x)(\sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x)$

$$= 2\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x} \right)\left(\frac{1 + \sin x \cos x}{\sin x \cos x} \right)$$

$$= 2(\operatorname{cosec} x - \sec x)(1 + \operatorname{cosec} x \sec x)$$

$$= 2\operatorname{cosec} x + 2(1 + \cot^2 x)\sec x - 2\sec x - 2(1 + \tan^2 x)\operatorname{cosec} x$$

$$= 2\operatorname{cosec} x + 2\sec x + 2\operatorname{cosec} x \cot x - 2\sec x - 2\operatorname{cosec} x - 2\sec x \tan x$$

$$= 2\operatorname{cosec} x \cot x - 2\sec x \tan x$$

अतः, $\int (\cos x - \sin x)(2 + \sin 2x)(\sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x) dx$

$$= \int \operatorname{cosec} x \cot x - 2\int \sec x \tan x\, dx = -2\operatorname{cosec} x - 2\sec x + C$$

E4) हमें प्राप्त होता है: $\int_a^b \frac{\log x}{x} dx = \int_{\ln b}^{\ln b} u\, du$, $u = \ln x$ रखने पर

$$\therefore \int_a^b \frac{\log x}{x} dx = \left. \frac{u^2}{2} \right|_{\ln a}^{\ln b} = \frac{1}{2}\left[(\ln b)^2 - (\ln a)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(b) + \ln(a))(\ln(b) - \ln(a)) = \frac{1}{2}\ln(ab)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

E5) i) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ है। $u=1+x^2$ रखने पर, $du=2x\,dx$ है।

जब $x=0$ है, तब $u=1$ है। जब $x=1$ है, तब $u=2$ है।

$$\int_1^2 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}.\left.\frac{u^{1/2}}{1/2}\right|_1^2 = \sqrt{2}-1$$

ii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}} = \int \frac{dx}{x.x^n\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^{2n}}}$ है। $z=\left(\frac{a}{x}\right)^n$ रखने पर, $dz=-\frac{na^n}{x^{n+1}}dx$ है।

अतः,

अतः $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}} = -\frac{1}{na^n}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{-1}{na^n}\sin^{-1}z + C$ है।

$$= -\frac{1}{na^n}\sin^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)^n + C \text{ है।}$$

iii) $e^x = \frac{z}{1-z}$ रखने पर, $e^x dx = \left(\frac{(1-z)+z}{(1-z)^2}\right)dz = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)dz$ है।

$$2e^{2x}+2e^x+1 = e^{2x}+(e^x+1)^2 = \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \frac{z^2+1}{(1-z)^2}$$

$\therefore \int \frac{e^x}{2e^{2x}+2e^x+1}dx = \int \frac{1/(1-z)^2}{(z^2+1)/(1-z)^2}dz = \int \frac{dz}{z^2+1} = \tan^{-1}(z)$, $e^x = \frac{z}{1-z}$ है।

इसलिए $e^x - ze^x = z$ है। अर्थात् $e^x = (e^x+1)z$ या $z = \frac{e^x}{e^x+1}$ है।

$\therefore \int \frac{e^x}{2e^{2x}+2e^x+1}dx = \tan^{-1}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C$ है।

iv) $\int \frac{(ax^2-b)dx}{x\sqrt{c^2x^2-(ax^2+b)^2}}$ है। $ax+\frac{b}{x}=z$ रखने पर, हम $\left(a-\frac{b}{x^2}\right)dx = dz$ या

$\frac{(ax^2-b)}{2}dx = dz$ प्राप्त करते हैं। साथ ही, $\frac{ax^2+b}{x} = z$ है। समाकल को पुनः

$\int \frac{(ax^2-b)dx}{x^2\sqrt{c^2-\left(\frac{ax^2+b}{x}\right)^2}}$ लिखने पर, समाकल हो जाता है :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{z}{c}\right) + C = \sin^{-1}\left(\frac{ax^2+b}{cx}\right) + C$$

E6) आंशिक भिन्नों में विभक्त करने के लिए, हम लिखते हैं :

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$$

दोनों पक्षों का $(x-1)(x^2+1)(x^2+4)^2$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$1 = A(x^2+1)(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4)^2$$
$$+(Dx+E)(x-1)(x^2+1)(x^2+4) + (Fx+G)(x-1)(x^2+1)$$

$x = 1$ रखने पर, $1 = 50A$ है। $A = \frac{1}{50}$ है। $x = i$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$1 = 9(Bi + C)(i - 1) = -9(B + C) - 9i(B - C)$

दोनों पक्षों में वास्तविक और अधिकल्पित (imaginary) भागों की तुलना करने पर, हम $-9(B + C) = 1$ और $-9(B - C) = 0$ प्राप्त करते हैं। इन्हें हल करने पर, हम $B = C = -\frac{1}{18}$ प्राप्त करते हैं। $x = 2i$ रखने पर, हम $1 = (2Fi + G)(2i - 1)(-3) = 3(4F + G) + 6i(F - G)$ प्राप्त करते हैं।

वास्तविक और अधिकल्पित भागों की तुलना करने पर, हम $4F + G = \frac{1}{3}$ और $F - G = 0$ प्राप्त करते हैं। इन्हें हल करने पर, हमें $F = G = \frac{1}{15}$ प्राप्त होता है। दोनों पक्षों में, x^6 के गुणांकों की तुलना करने पर हम $A + B + D = 0$ प्राप्त करते हैं अतः, $D = -A - B = -\frac{1}{50} + \frac{1}{18} = \frac{8}{225}$ है।

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{1}{50}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{18}\frac{x+1}{(x^2+1)} + \frac{8}{225}\frac{x+1}{(x^2+4)} + \frac{1}{15}\frac{x+1}{(x^2+4)^2} \text{ है।}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{1}{50}\int\frac{dx}{(x-1)} - \frac{1}{18}\int\frac{x+1}{(x^2+1)}dx + \frac{8}{225}\int\frac{x+1}{(x^2+4)}dx + \frac{1}{15}\int\frac{x+1}{(x^2+4)^2}dx \text{ है।}$$

अंतिम समाकल को छोड़ कर, सभी समाकल मानक रूप में हैं, जिन्हें हम पहले ही देख चुके हैं। $\int \frac{(x+1)}{(x^2+4)^2}dx$ का मान निकालने के लिए, हम $x^2 + 4$ का अवकलज ज्ञात करते हैं, जो $2x$ है। हम $x + 1 = \frac{1}{2}(2x) + 1$ लिखते हैं। तब,

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+4)^2}dx + \int\frac{dx}{(x^2+4)^2} \text{ है।}$$

पहले समाकल का मान निकालने के लिए, हम $u = x^2 + 4$ रखते हैं, जिससे $du = 2xdx$ प्राप्त होता है। पहला समाकल अब $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}u^2 + C = -\frac{1}{2}(x^2+4) + C$ हो जाता है। दूसरे समाकल के लिए, हम $x = 2\sec\theta$ रखते हैं। तब, $dx = 2\sec\theta\tan\theta$ है।

साथ ही, $x^2 + 4 = 4\sec^2\theta + 4 = 4\tan^2\theta$ है।

अतः, $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{16\tan^4\theta}d\theta = \frac{1}{8}\int \cos^4\theta\sin^{-5}\theta d\theta$ समानयन सूत्र $I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$ का स्मरण कीजिए, जहाँ $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x dx$

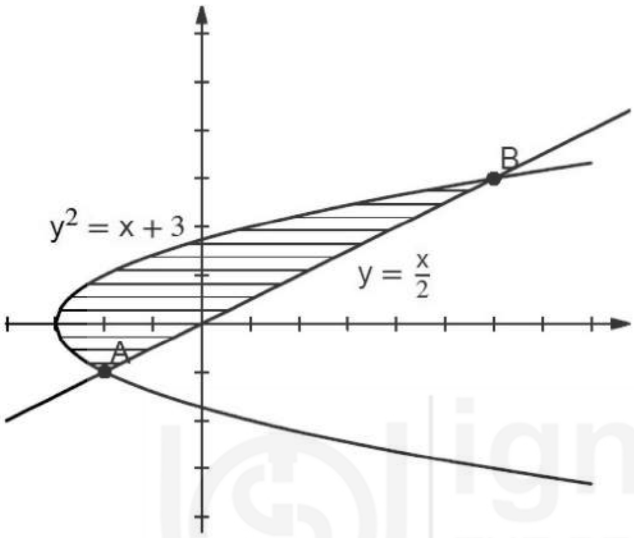
है। इसका दो बार अनुप्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \cos^4\theta \sin^{-5}\theta\, d\theta = -\cos^3\theta \sin^{-4}\theta - 2\int \cos^2\theta \sin^{-5}\theta d\theta$$

$$= -\cos^3\theta \sin^{-4}\theta - 2\left(-\frac{\cos\theta \sin^{-4}\theta}{3} - \frac{1}{3}\int \sin^{-5}\theta d\theta\right)$$

अब हम $\int \operatorname{cosec}^n \theta d\theta$ के लिए, इकाई 19 में E9) के समानयन सूत्र का प्रयोग करके समाकल के अभिकलन को पूरा कर सकते हैं।

E7) प्रतिच्छेद बिंदु $\frac{x^2}{4} = x + 3$ या $x^2 - 4x + 12 = 0$ द्वारा दिए जाते हैं।



आकृति 3: $y^2 = x + 3$ **और** $y = \frac{x}{2}$ **द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल**

इसके गुणनखंड करने पर, $(x+2)(x-6) = 0$ है। इसलिए, प्रतिच्छेद बिंदु $(-2, -1)$ और $(6, 3)$ हैं। हम $f_1(x) = \sqrt{x+3}$ तथा

$$f_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+3}, & \text{यदि } -3 \le x \le -2 \\ \frac{x}{2}, & \text{यदि } -2 \le x \le 6 \end{cases}$$

तब, $f_1(x) - f_2(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+3}, & \text{यदि } -3 \le x \le 2 \\ \sqrt{x+3}, & \text{यदि } -2 \le x \le 6 \end{cases}$

$f_1(x) - f_2(x) = 2\sqrt{x+3} \ge 0$ है, यदि $-3 \le x \le -2$ यदि $-2 \le x \le 6$ है, तो $f_1(x) - f_2(x) = \sqrt{x+3} - \frac{x}{2}$ है। हम प्राप्त करते हैं:

$$\left(x + 3 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(12 + 4x - x^2\right) = -\frac{1}{4}(x-6)(x+2)$$

क्योंकि $x \ge -2$ है, इसलिए $x + 2 \ge 0$ है। क्योंकि $x \le 6$ है, इसलिए $(x - 6) \le 0$ है। अतः, $(x-6)(x+2) \le 0$ है तथा $-\frac{1}{4}(x-6)(x+2) \ge 0$ है।

अतः, $\left(\sqrt{x+3} + \frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x+3} - \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{4}(x-6)(x+2) \ge 0$ है।

अब, $x \ge -2$ है। इसलिए, $x + 3 \ge 1$ है। अतः, $\sqrt{x+3} \ge 1$ है। साथ ही, $\frac{x}{2} \ge -1$ है। अतः,

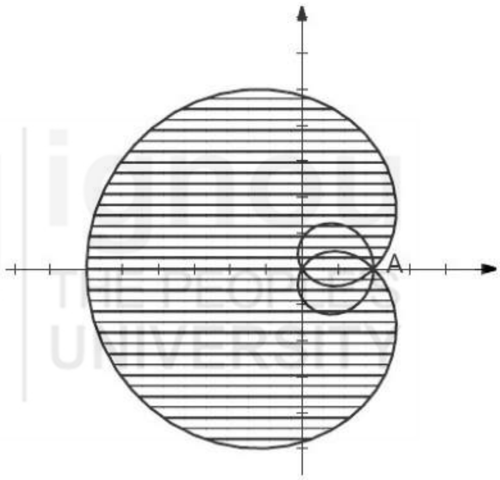
$\sqrt{x+3}+\frac{x}{2}\geq 0$ है।

क्योंकि गुणनफल $\left(\sqrt{x+3}+\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x+3}-\frac{x}{2}\right)$ ऋणेतर है तथा इनमें से एक गुणनखंड $\left(\sqrt{x+3}+\frac{x}{2}\right)$ भी ऋृणेतर है, इालिए अन्य गुणनखंड $\left(\sqrt{x+3}-\frac{x}{2}\right)$ भी ऋणेतर होगा। अर्थात् $\left(\sqrt{x+3}-\frac{x}{2}\right)\geq 0$ है। वाँछित क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें समाकल

$$\int_{-3}^{6}(f_1(x)-f_2(x))dx = 2\int_{-3}^{6}\sqrt{x+3}\,dx+\int_{-2}^{6}\sqrt{x+3}-\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}x\,dx$$

का मान निकालना होगा तथा यह मान निकालने की दृष्टि से अति सरल है।

E8) आकृति 4 को देखिए। जब $0\leq\theta\leq 2\pi$ है, तब $\sin\frac{\theta}{2}\geq 0$ है। इसलिए $(1+2\sin\theta/2)\geq 1$ है। अतः, बाहरी परिसीमा तब अनुरेखित होती है, जब $0\leq\theta\leq 2\pi$ है। जब $2\pi\leq\theta\leq 4\pi$ है, तब $\sin\frac{\theta}{2}\leq 0$ है तथा $(1+\sin\theta)\leq 1$ है। इसी कारण, दोनों आंतरिक छल्ले (लूप) $2\pi\leq\theta\leq 4\pi$ के लिए अनुरेखित होते हैं।



आकृति 4 : फ्रीथ के नेफरॉयड द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

इसलिए, बाहरी परिसीमा का क्षेत्रफल निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+4\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}d\theta+a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)d\theta+2a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\theta\Big|_0^{2\pi}+a^2(\theta-\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}+2a^2\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\pi a^2+2\pi a^2+8a^2=a^2(8+3\pi)$$

E9) हमें $\sin(\pi-x)=\sin x$ प्राप्त है। दूसरे गुण द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$\int_0^{\pi}\sin^n x dx=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx+\int_0^{\pi/2}\sin^n(\pi-x)dx=2\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$$

इसी प्रकार, क्योंकि $\cos(\pi-x)=-\cos x$ है, इसलिए

$\cos^{2n+1}(\pi-x)=-\cos x^{2n+1}x$ है।

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\pi - x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx = 0 \text{ है ।}$$

शब्दावली

Antiderivative	प्रतिअवकलज
Integration by parts	खंडश: समाकलन, भागों द्वारा समाकलन
Rational function	परिमेय फलन
Method of substitution	प्रतिस्थापन की वीधि
Integral	समाकल
Definite integral	निशचित समाकल
Integrand	समाकल्य
Standard form	मानक रूप
Reduction formula	समानयन सूत्र
Fundamental Theorem of Calculus	कैलकुलस की मूलभूत प्रमेय
Method of Partial Fractions	आंशिक भिन्नों की विधि
Partition	विभाजन
Ordered set	क्रमित समुच्चय
Upper integral	उपरि समाकल
Lower integral	निम्न समाकल
Step function	पग फलन
Converge	अभिसृत
Rectification	संशोधन