इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-132
अवकल समीकरण

खंड

1

दो या तीन चरों वाले फलन

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ
विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
षिव नाडर विष्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पुणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन.आई.एस.ई.आर.,
भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई.आई.एस.ई.आर.,
मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई.आई.टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य
विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू
प्रो. महेंद्र सिंह नाथावत (निदेशक)
डॉ. दीपिका
श्री पवन कुमार
प्रो. पूर्णिमा मित्तल
प्रो. परवीन सिंक्लेयर
प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. एस. वेंकटारमन

*पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन.आई.एस.ई.आर.
भुवनेश्वर (संपादक)

प्रो. सुजाता वर्मा
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयक : प्रो. पूर्णिमा मित्तल तथा प्रो. सुजाता वर्मा

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन.सी.ई.आर.टी.

प्रो. सुजाता वर्मा
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

आभार: प्रो. परवीन सिंक्लेयर, डॉ. आशा माथुर और प्रो. पूर्णिमा मित्तल का पांडुलिपि पर सुझाव के लिए।

खंड मुद्रण

श्री सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
विज्ञान विद्यापीठ, इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

दिसम्बर, 2019

ISBN : 978-93-89668-87-2

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय, मैदान गढ़ी, नई दिल्ली–110 068 और इग्नू की वेबसाइट *www.ignou.ac.in* से प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. पूर्णिमा मित्तल, निदेशक (विज्ञान विद्यापीठ) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेजर कम्पोजिंग : राजश्री कम्प्यूटर्स, वी-166ए, भगवती विहार (नजदीक सेक्टर 2, द्वारका), उत्तम नगर, नई दिल्ली-110059

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली–110002

अवकल समीकरण

आईत्रक न्यूटन (1642–1727) के समयकाल से ही भौतिक ज्ञानों के लिए, गणित के अनुप्रयोग में अवकल समीकरणों का भौतिक महत्व रहा है। अवकल समीकरण न केवल विज्ञान और प्रोद्योगिकी में, अपितु ऐसे विविध क्षेत्रों जैसे अर्थशास्त्र, सामाजिक विज्ञान, मनोविज्ञान, जनाकिकी, इत्यादि वास्तविक-जीवन से संबंधित उत्तेजक समस्याओं में भी गणितीय निदर्शनों का कार्य करती है। अवकल समीकरणों के सिद्धांत में तीव्र तथा ज्ञान की अधिकांशतः प्रत्येक शाखा में उसके अनुप्रयोग एक वृद्धि दर पर प्रकट हो रहे हैं, जिसके कारण अनेक विषयों में विद्यार्थियों द्वारा अध्ययन में सतत रूचि होती जा रही है। हम अवकल समीकरणों के इस पाठ्यक्रम को उन विद्यार्थियों के लिए एक कोर विषय के रूप में प्रदान कर रहे हैं, जो यू जी सी – सी बी सी एस के स्नातक डिग्री प्रोग्राम में प्रवेश कर रहे हैं।

ये अंग्रेज गणितज्ञ आईज़क न्यूटन तथा जर्मन गणितज्ञ गोटफ्रेड विहेल्म लेबनिज़ (1646–1716) थे, जिन्होंने 1675 में विषय अवकल समीकरणों को जन्म दिया। लेबनिज़ ने समाकल चिन्ह के एक शक्तिशाली साधन का निर्माण किया तथा न्यूटन ने प्रथम कोटि के अवकल समीकरणों का वर्गीकरण किया। पिछली तीन शताब्दियों के अनेक महान गणितज्ञों, जैसे फर्मा, न्यूटन, बर्नूलीस, आर्फेलर, लग्राज, चार्पिट, लाप्लास, गॉस, आबेल, हेमिल्टन, लियोविले, रीमा पोइनेकेयर तथा अन्य ने इस विषय को विकसित किया तथा इसे वर्तमान स्तर तक पहुँचाया।

अवकल समीकरणों के इस पाठ्यक्रम में, हम साधारण तथा साथ ही आंशिक अवकल समीकरणों दोनों पर ही कार्य करेंगे। इस पाठ्यक्रम की संकल्पनाओं को बेहतर रूप से समझने के लिए, एक चर वाले फलनों के कलन के एक अच्छे ज्ञान तथा दो और तीन चरों वाले फलनों के कुछ मूलभूत ज्ञान की आवश्यकता है। हमारा कलन पाठ्यक्रम BMTC-131 एक चर वाले फलनों की वाँछनीयता को पूरा करता है। दो या तीन चरों वाले फलनों के मूलभूत ज्ञान के लिए, हमने इस पाठ्यक्रम में कुछ विषय-सामग्री जोड़ी है। तदानुसार, हमने इस पाठ्यक्रम की सामग्री को चार खंडों में विभाजित किया है।

खंड 1 में, दो या तीन वास्तविक चरों वाले फलनों को लिया गया है। इस खंड में, हम आपका परिचय एक से अधिक चरों वाले फलनों की सीमा, सांतत्य और अवकलनीयता की संकल्पनाओं से कराने जा रहे है। कलन पाठ्यक्रम से आपको याद होगा कि जब इन संकल्पनाओं को एक चर वाले फलनों के लिए प्रविष्ट किया गया था, तब वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के बीजीय और स्थानिक संरचनाओं के ज्ञान का उपयोग किया गया था। वास्तविक संख्याओं के विभिन गुणों तथा दो वास्तविक संख्याओं के बीच की दूरी के सूत्र का भी उपयोग किया गया था। दो चरों वाले फलनों के लिए, इन संकल्पनाओं का अध्ययन करने के लिए, हमें एक समतल में बिंदुओं के समुच्चय की संरचना तथा इसी प्रकार के गुणों को जानने की आवश्यकता है। इसी प्रकार, तीन चरों के लिए, समष्टि (आकाश) में बिंदुओं के समुच्चय की संरचना की आवश्यकता है। हम इन संरचनाओं के बारे में एक संक्षिप्त चर्चा से प्रारंभ करेंगे तथा और के कुछ बीजीय और स्थानिक गुणों की चर्चा करेंगे। हम आपको एक से अधिक परों वाले फलनों से अवगत कराएँगे तथा इन फलनों के लिए सीमा और सांतत्य की संकल्पनाओं का परिचय देंगे। इस खंड में, हम अनेक चरों वाले फलनों के विभिन प्रकारों के अवकलजों की भी चर्चा करेंगे। यद्यपि हमने अपनी चर्चा दो और तीन चरों वाले के वास्तविक मान फलनों तक ही सीमित रखी है, फिर भी इस चर्चा को चरों की किसी भी संख्या वाले फलनों के लिए सरलता से विस्तृत किया जा सकता है।

खंड 2 में, हमने अवकल समीकरणों के अध्ययन से संबंधित आवश्यकताओं तथा मौलिक परिभाषाओं से प्रारंभ किया है। हमने प्रथम कोटि की साधारण अवकल समीकरणों (ODE) के हलों की प्रकृति के लिए प्रतिबंध दिए हैं, तथा वह प्रतिबंध भी दिया है जब अवकल समीकरण को एक अद्वितीम हल का अस्तित्व होगा। यहाँ हमने प्रथम कोटि तथा प्रथम धात की समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों की चर्चा की है। कुछ विशेष रूपों की प्रथम कोटि की ओ डी ई (ODEs) के लिए, एक से अधिक घातों वाले

समीकरणों के हलों की भी चर्चा वाली समस्याओं को प्रथम कोटि की रैखिक अवकल समीकरणों के पदों में भी सूत्रित किया है।

खंड 3 में, द्वितीय और उच्चतर कोटि की साधारण अवकल समीकरणों का वर्णन किया गया है। हमने व्यापक रैखिक अवकल समीकरणों को अचर गुणांकों वाली तथा चर गुणांकों वाली समीकरणों के रूप में वर्गीकृत किया है और फिर इन समीकरणों को समघात तथा असमघात समीकरणों में वर्गीकृत किया है। चर गुणांकों वाली समघात रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों की चर्चा इस खंड में की गई हैं। अचर गुणांकों वाली असमघात समीकरणों की स्थिति में, इन समीकरणों के विशिष्ट समाकल ज्ञात करने के लिए, अनिर्धारित गुणांकों की विधि तथा अवकल संकारकों की विधि दी गई हैं। प्राचलों के विचरण की विधि तथा कोटि के निरसन की विधि, जिनका अनुप्रयोग अचर तथा चर गुणांकों दोनों ही प्रकार की रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने में किया जा सकता है, को भी यहाँ दिया गया है। इस खंड में, हमने विशिष्ट बल द्वितीय कोटि की साधारण अवकल समीकरणों के अनुप्रयोग पर दिया है।

खंड 4 में, जो इस पाठ्यक्रम का अंतिम खंड है, हमने अपना ध्यान साधारण अवकल समीकरणों से आंशिक अवकल समीकरणों (पी डी ई) (PDEs) की ओर केन्द्रित किया है। हमने यहाँ प्रथम कोटि की युगपत, संपूर्ण और आंशिक अवकल समीकरणों का अध्ययन किया है। युगपत अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों तथा उनके कुछ अनुप्रयोगों जैसे कि एक दिए हुए पृष्ठ पर वक्रों के निकाय के लांबिक परिपथों, कला-समष्टि में कण की गति तथा विद्युत परिपथों की चर्चा की गई है। तीन चरों वाले संपूर्ण अवकल समीकरणों के लिए समाकलनीयता प्रतिबंध तथा उनकों हल करने की विधियाँ दी गई हैं। हमने प्रथम कोटि के पी डी ई को रैखिक, अर्ध-रैखिक, चौथाई-रैखिक तथा अरैखिक पी डी ई में वर्गीकृत किया है तथा इन पी डी ई के विभिन्न प्रकार के हलों/समाकलों की, इन विभिन्न समाकलों के बीच संबंध प्रदान करते हुए, चर्चा की है। इस खंड में, प्रथम कोटि के रैखिक पी डी ई को हल करने की लंग्राज विधि तथा प्रथम कोटि के अरैखिक पी डी ई को हल करने की चार्पिट विधि की चर्चा गई है।

प्रत्येक खंड में, 4 या 5 इकाइयाँ हैं। प्रत्येक इकाई में, पाठ्यसामग्री पर आधारित प्रचुर मात्रा में उदाहरण और प्रश्न हैं। ये उदाहरण आपको सिद्धांतों को समझने में सहायक सिद्ध होंगे तथा प्रश्न आपको अपनी प्रगति की जाँच करने में सहायता करेंगे। इस पाठ्यक्रम में प्रस्तुत विभिन्न तकनीकों में प्रवीणता प्राप्त करने के लिए, हम आपको सलाह देते हैं कि प्रचुर मात्रा में अभ्यास करें तथा सभी प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें। प्रत्येक खंड के अंत में विविध प्रश्न दिए गए हैं। ये प्रश्न आपको उस खंड में आपके द्वारा अध्ययन की गई विभिन्न संकल्पनाओं की समग्र समझ की जाँच करने में आपकी सहायता करेंगे। प्रत्येक समस्या के लिए आपको सोचना पड़ेगा तथा उसको हल करने में प्रयुक्त की जाने वाली विधि/तकनीक के बारे में निर्णय लेना पड़ेगा।

प्रत्येक खंड में हम पाठ्यसामग्री में प्रयुक्त किए गए विभिन्न प्रतीकों और संकेतनों की एक सूची दे रहे हैं, जो आपके संदर्भ के लिए हैं। सतत मूल्यांकन के एक भाग के रूप में, संपूर्ण पाठ्यक्रम पर आधारित एक सत्रीय कार्य (असाइनमेंट) (assignment) होगा, जिसको तीस प्रतिशत भारिता दी गई है। यह सत्रीय कार्य इग्नू वेबसाइट www.ignou.ac.in पर डाऊनलोड करने के लिए उपलब्ध होगा।

आप इस विषय की कुछ और पुस्तकों को देखना चाहेंगे तथा उनमें दिए हुए कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास करना चाहेंगे। इससे आपको इस पाठ्यक्रम में चर्चा की गई तकनीकों पर बेहतर पकड़ प्राप्त करने में सहायता मिलेगी। हम उन पुस्तकों के शीर्षो की एक सूची दे रहे हैं, जो संदर्भ के लिए आपके अध्ययन केन्द्र पर उपलब्ध होंगी।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. *Calculus by G.B. Thomas and R.L Finney, Pearson Eduation.*

2. *A Text Book of Differential Equations by N. M. Kapur, Pitambar Book Depot.*

3. *Differential Equations with Applications and Historical Notes by George F. Simmons, Tata McGraw Hill.*

4. *Elements of Partial Differential Equations by Ian N. Sneddon, McGraw-Hill Book Company.*

खंड 1 दो या तीन चरों वाले फलन

यह अवकल समीकरण पर इस पाठ्यक्रम का प्रथम खंड है। इस खंड का उद्देश्य है कि आपको एक से अधिक चरों वाले फलनों से परिचत कराके तथा कलन में एक चर वाले फलनों के लिए अध्ययन की गई संकल्पनाओं को दो या तीन चरों के लिए विस्तृत करके अवकल समीकरण पाठ्यक्रम के अध्ययन के लिए आपको एक आधारशिला प्रदान की जाए। आप कलन पाठ्यक्रम BMTC-131 द्वारा एक चर वाले फलनों के कलन के पहलुओं से पहले से ही परिचित हैं। न्यूटन और लेबनिज़ को कलन की स्थापना का जनक माना जाता है। कलन में अधिकांशतः विकास सत्रहवीं शताब्दि में हुआ। बाद में, अठारहवीं शताब्दी में, कलन की मूलभूत संकल्पनाओं, उदाहरणार्थ, सीमा, सांतत्य तथा अवकलनीयता को एक से अधिक चरों वाले फलनों के लिए विस्तृत किया गया। अनेक चरों वाले फलनों के अध्ययन की आवश्यकता तब पड़ी जब ऑयलर, डेलियल बर्नूली, फोरियर, ओगस्तिन-ल्यूस कोशी (Augustin-Louis Cauchy) तथा द एलम्बर्ट (d'Alembert) जैसे गणितज्ञ कुछ भौतिक समस्याओं के अन्वेषण कर रहे थे। ओगस्तिन ल्यूस कोशी (1789–1857) उस समय के गणितीय संसार के केन्द्र पेरिस में एक प्रभावशाली गणितीय हस्ति थे। कौशी ने भी अनेक चरों के विकास में बहुत ही अपना योगदान दिया है।

इस खंड को पाँच इकाइयों में विभाजित किया गया है। **इकाई 1** में हम R^2 और R^3 की संरचना के वर्णन से प्रारंभ करते हैं। हम R^2 और R^3 के लिए, दो बिंदुओं के बीच की दूरी की धारणा का परिचय कराते हैं तथा उसके प्रारंमिक गुणों का निगमन करते हैं। हम $R^2 \to R$ और $R^3 \to R$ से परिभाषित 2 या 3 चरों वाले फलनों को परिभाषित करते हैं तथा ऐसे फलनों के विभिन्न उदाहरण देते हैं। ये फलन सामान्यतः अनेक चरों के विभिन्न उदाहरण देते हैं। ये फलन सामान्यतः अनेक चरों वाले वास्तविक-मान फलन या केवल अनेक चरों वाले फलन कहलाते हैं। स्तर वक्रों तथा स्तर पृष्ठों की संकल्पनाओं का भी परिचय कराया गया है, जो क्रमशः 2 और 3 चरों वाले फलनों के आलेखों के वर्णन करने में उपयोग किए जाते हैं।

हम अनेक चरों वाले फलनों के लिए, सीमा और सांतत्य की संकल्पनाओं को **इकाई 2** में परिभाषित करेंगे। हम पदों युगपत सीमाओं और पुनरावृत्त सीमाओं की चर्चा करेंगे तथा उनके बीच संबंध को बताएँगे।

इकाई 3 में, हम अवकलनीयता की धारणा को एक चर से 2 या 3 चरों के लिए विस्तृत करेंगे। सर्वप्रथम, हम अनेक चरों वाले एक फलन के आंशिक अवकलज को परिभाषित करते हैं। आंशिक अवकलजों की धारणा एक चर वाले फलन के अवकलज की संकल्पना को पूर्ण रूप से व्यापिकृत नहीं करती हैं। बाद में, अनेक चरों वाले फलन की अवकलनीयता की संकल्पना को परिभाषित किया गया है। हम अवकलनीयता, सांतत्य तथा आंशिक अवकलजों के बीच संबंध की चर्चा करते हैं।

प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों की संकल्पनाओं से उच्चतर कोटि के अवकलजों की धारणा का उद्भाव होता है, जिसे **इकाई 4** में लिया गया है। हम कुछ महत्वपूर्ण प्रमेयों, जो यंग, श्वार्ज और ऑयलर प्रमेय कहलाती हैं, की चर्चा करेंगे। ये प्रमेय प्रतिबंधों के कुछ समुच्चय प्रदान करती हैं, जिनके अंतर्गत मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर हो जाते हैं।

इस खंड की अंतिम इकाई, अर्थात् **इकाई 5,** में आंशिक अवकलजों के कुछ अनुप्रयोग दिए गए हैं। हम 2 या 3 चरों वाले फलनों के आंशिक अवकलजों को निकालने के लिए, जहाँ प्रत्येक फलन स्वयं 2 या 3 चरों वाले फलन का एक फलन है, श्रृंखला नियम की चर्चा करेंगे। यहाँ, हम समघात फलनों को भी परिभाषित करेंगे। तथा समधात फलनों के लिए ऑयलर-प्रमेय को स्पष्ट करेंगे। इस पाठ्यक्रम में आप जिन संकल्पनाओं का अध्ययन करने जा रहे हैं, निश्चित रूप से एक चर वाले फलनों की संगत संकल्पनाओं की तुलना में कुछ अधिक जटिल होंगे। परंतु आप देखेंगे कि एक चर वाली स्थिति हमें एक रास्ता दिखाती है, जिसमें इन संकल्पनाओं को व्यापिकृत किया जा सकता है। इसलिए, जब भी हम एक

नई संकल्पना का परिचय देंगे, तब हम एक चर वाली स्थिति में उसकी संगत संकल्पना का स्मरण करेंगे तथा फिर देखेंगे कि इसे अनेक चरों वाली स्थिति के लिए किस प्रकार विस्तृत किया जा सकता है।

हमने पाठ्यसामग्री में, विभिन्न स्थानों पर प्रचुर मात्रा में उदाहरण दिए हैं। ये उदाहरण संबंधित सिद्धांतों को बेहतर रूप से समझने में आपकी सहायता करेंगे। हमने प्रत्येक इकाई में सभी प्रश्नों के उत्तर उस इकाई के अंत में दिए हैं। जैसा कि आप देखेंगे, हमने पिछली इकाइयों के परिणामों या परिभाषाओं का उल्लेख बीच–बीच में किया है। इसके लिए, हम इकाई x के अनुभाग y.z का निर्देश भाग x.y.z से या इकाई x के भाग y का निर्देश भाग x.y से करेंगे। हमारे कलन के पाठ्यक्रम BMTC-131 के कुछ परिणामों का स्मरण करेंगे। उस पाठ्यक्रम की किसी इकाई का निर्देश हम ''कलन पाठ्यक्रम की इकाई ..... '' से करेंगे।

प्रत्येक खंड में हमने जो गणितीय पारिभाषित शब्द प्रयोग में लाए हैं, उनके अंग्रेजी अनुवाद आप शब्दावली में देख सकते हैं, जो हमने खंड के अंत में दी है।

हमने कलन के बारे में पहले जो कुछ भी कहा है, वे सभी बातें इस पाठ्यक्रम पर भी लागू होती है। यहां दी गई विभिन्न विधियों की अच्छी तरह से समझने के लिए आपको काफी अभ्यास करना होगा। यदि यहां बतायी गई संकल्पनाओं के बारे में आप कुछ और अधिक जानकारी चाहते हैं या आप कुछ और प्रश्नों को हल करना चाहते हैं तो इसके लिए आप पुस्तक Calculus III by Jerrold Marsden and Alan Weinstein का अध्ययन कर सकते हैं।

यह आपके अध्ययन केन्द्र की लाइब्रेरी में उपलब्ध होगी।

हमें आशा है कि इस पाठ्यक्रम में विकसित तकनीकें आपके आगे के अध्ययनों में उपयोगी रहेंगी।

संकेत और प्रतीक

$\mathbf{R}$	: वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
R^n	: कार्तीय गुणनफल
$\Rightarrow$	: निहित है
$\subseteq$	: में अंतर्विष्ट है
$\in$	: का अवयव है
$<(\le)$	: से छोटा है (से छोटा है या के बराबर है)
$>(\ge)$	: से बड़ा है (से बड़ा है या के बराबर है)
$\therefore$	: इसलिए
$\because$	: क्योंकि
i.e.	: अर्थात्
$\forall$	: सभी के लिए
w.r.t.	: के सापेक्ष
$\frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}$	: x के सापेक्ष y का nवीं कोटि का अवकलज
$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$	: x के सापेक्ष y का nवीं कोटि का आंशिक अवकलज
$\propto$	: के समानुपाती है
] , [	: विवृत्त अंतराल
[,]	: संवृत्त अंतराल
[, [	: अर्ध विवृत्त या अर्ध संवृत्त अंतराल
$\lvert x \rvert$	: संख्या x का निरपेक्ष मान

यूनानी (ग्रीक) वर्णमाला

α	: अल्फा
β	: बीटा
γ	: गामा
θ	: थीटा
ν	: न्यू
ψ	: साई
ϕ	: फाई
μ	: म्यू
Σ	: बड़ा सिग्मा
i	: आयोटा

इकाई 1

R^2 और R^3

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

यह इकाई इस खंड तथा इस कोर्स की प्रथम इकाई है। इस इकाई से हम त्रिविमीय समष्टि या 3-D समष्टि की अपनी चर्चा प्रारंभ कर रहे हैं। हम अनुच्छेद 1.2 में त्रिविमीय कार्तीय निर्देशांक पद्धति का एक संक्षिप्त परिचय देते हुए प्रारंभ करेंगे तथा इस पद्धति में बिंदुओं, रेखाओं और समतलों के कुछ मौलिक तथ्यों से आपको अवगत कराएंगे। हम एक रेखा और एक समतल को बीजीय और ज्यामितीय रूप से निरूपित करने की विभिन्न विधियों की चर्चा करेंगे। अनुच्छेद 1.3 में, हम 3-D समष्टि (या आकाश) में बिन्दुओं को निरूपित करने के लिए दो अन्य निर्देशांक पद्धतियों की चर्चा करेंगे जो बेलनाकार और गोलाकार निर्देशांक पद्धतियां कहलाती हैं।

हम 2-D समतल और 3-D समष्टि के बिदुंओं के बीच तथा समुच्चयों $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ और $\boldsymbol{R}^3 = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ के बीच, जिन्हें $\boldsymbol{R}$ के कार्तीय गुणनफल कहते हैं, एक-एक संबंध स्थापित करेंगे तथा इन समुच्चयों के कुछ बीजीय और ज्यामितीय गुणों (या गुणधर्मो) की चर्चा करेंगे। यह चर्चा अनुच्छेद 1.4 में की जाएंगी। अनुच्छेद 1.5 में, हम $\boldsymbol{R}^3$ या $\boldsymbol{R}^2$ से $\boldsymbol{R}$ तक परिभाषित फलनों तथा स्तर वक्रों ओर स्तर पृष्ठों की धारणाओं की चर्चा करेंगे।

इस इकाई में वर्णित तथ्यों को बार-बार इस कोर्स के शेष भाग में निरंतर प्रयोग किया जाएगा। अतः, हम आपको सुझाव देते हैं कि आप इस इकाई में आने वाले सभी प्रश्नों को करें। साथ ही, कृपया अगली इकाई पर तब तक न जाएं जब तक कि आप यह सुनिश्चित न कर लें कि आपने निम्नलिखित उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं :

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

- 3-D समष्टि में किसी बिंदु को निरूपित कर पाएंगे।
- किसी रेखा की दिक्कोज्याओं और दिक्-अनुपातों को प्राप्त कर पाएंगे।
- किसी रेखा के समीकरणों को विहित रूप, प्राचलित रूप और/या दो-बिंदु रूप में प्राप्त कर पाएंगे।
- किसी समतल के समीकरणों को तीन-बिंदु रूप, अंतः खंड रूप या प्रसामान्य रूप में प्राप्त कर पाएंगे।
- एक बिंदु और एक समतल के बीच की दूरी ज्ञात कर पाएंगे।
- दो रेखाओं या दो समतलों या एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण ज्ञात कर पाएंगे।
- दो रेखाओं या एक रेखा और एक समतल के प्रतिच्छेद बिंदु /या बिंदुओं को ज्ञात कर पाएंगे।

आइए, अब 3-D समष्टि पर अपनी चर्चा को प्रारंभ करें।

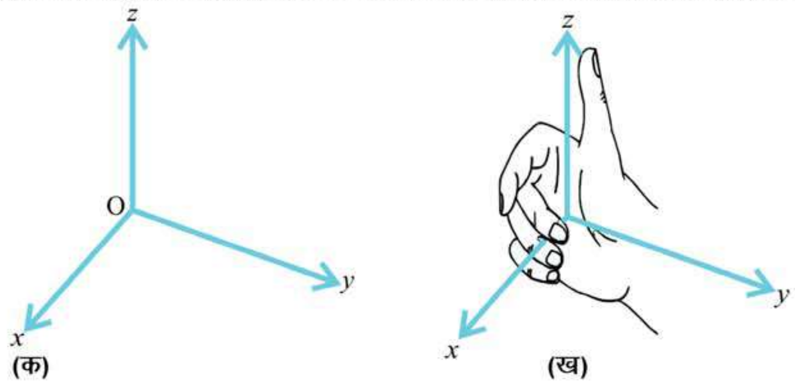
1.2 कार्तीय निर्देशांक पद्धति

इस अनुच्छेद में, हम त्रिविमीय कार्तीय निर्देशांक पद्धति की चर्चा करेंगे, जिसका आप शायद अपनी स्कूली गणित में अध्ययन कर चुके हैं। हम यह स्पष्ट करेंगे कि दिक्कोज्याओं और दिक्-अनुपातों की धारणाओं की प्रविष्टि करके इस पद्धति में रेखाओं और समतलों को किस प्रकार निरूपित किया जाता है।

याद कीजिए कि कलन पाठ्यक्रम के प्रथम सिमेस्टर की इकाई 3 द्वारा द्विविमीय निर्देशांक पद्धति से आप पहले ही परिचित हो चुके हैं। यहां हम द्विविमीय पद्धति की मौलिक धारणाओं को त्रिविमीय पद्धति के लिए व्यापीकृत करेंगे।

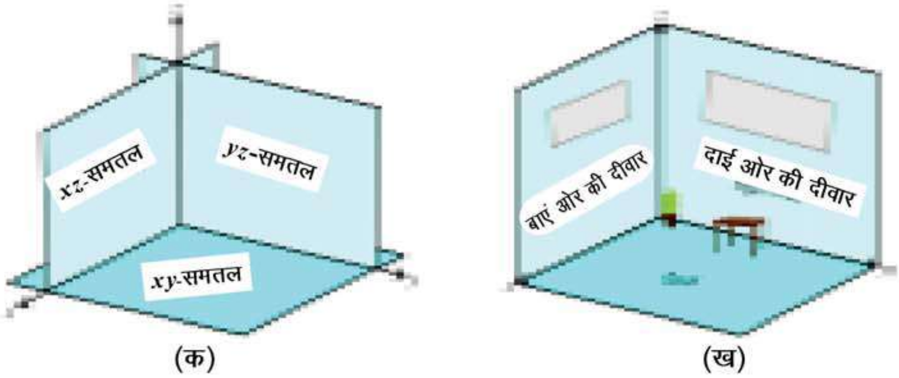
आप जानते हैं कि द्विविमीय निर्देशांक पद्धति (संक्षिप्त में 2-D निर्देशांक पद्धति) को दो परस्पर लंब रेखाओं द्वारा निरूपित किया जाता है। इसी के अनुसार, हम त्रिविमीय निर्देशांक पद्धति (3-D निर्देशांक पद्धति या संक्षिप्त में 3-D पद्धति) के लिए, समष्टि में तीन पारस्परिक लंब रेखाओं पर विचार करते हैं।

आइए समष्टि में तीन पारस्परिक लंब रेखाओं को लें, जो बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं देखिए चित्र 1 (क)। यह बिंदु O मूलबिंदु **(origin)** कहलाता है। यह भौतिक रूप से संभव है, क्योंकि हम एक त्रिविमीय समष्टि में है। ये तीन पारस्परिक लंब रेखाएं निर्देशांक अक्ष कहलाती हैं; जिन्हें x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष से नामांकित किया जाता है, जैसा कि चित्र 1 में दर्शाया गया है। सामान्यतः, x और y-अक्षों को एक समतल में लिया जाता है तथा z-अक्ष को इस समतल पर लांबिक रूप से लिया जाता है। रेखाओं ox, oy और oz की धनात्मक दिशाओं को इस प्रकार चुना जाता है कि यदि दाएं–हस्त (right-handed) स्क्रू (चित्र 1 (ख) देखिए) को o पर रख कर ox से oy की ओर घुमाया जाए, तो वह oz की दिशा में घूम जाता है। चित्र में ऋणात्मक दिशाओं को बिंदुंकित रेखाओं द्वारा दर्शाया गया है।



चित्र 1: तीन विमाओं में कार्तीय निर्देशांक अक्ष। x-अक्ष O है, y-अक्ष OY है और 2-अक्ष OZ है।

उपरोक्त तीनों अक्ष तीन निर्देशांक समतलों को निर्धारित करती हैं; जैसा कि चित्र 2(क) में दर्शाया गया है।



चित्र 2 : तीन निर्देशांक समतल

xy- समतल वह समतल है जिसमें x और y-अक्ष सम्मिलित है, yz-समतल में y और z-अक्ष सम्मिलित हैं तथा xz- समतल में x और z-अक्ष सम्मिलित हैं। ये तीन निर्देशांक समतल 3-D समष्टि को आठ भागों में बांटते हैं; जिन्हें **अष्टांश (octants)** कहा जाता है।

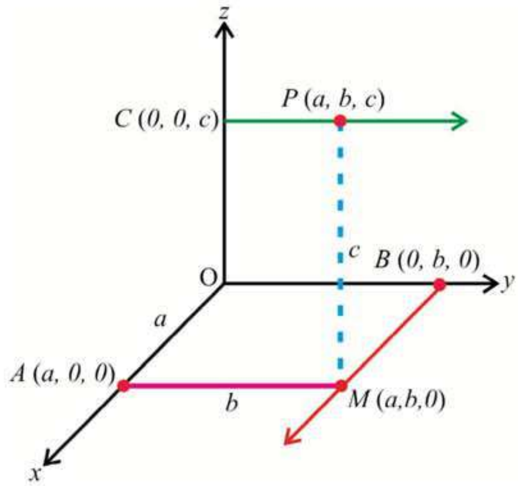
इन तीनों समतलों के बेहतर चित्रीयकरण के लिए आप एक कमरे के निचले कोने को देख सकते हैं तथा इस कोने को मूलबिंदु O कहें, फर्श को xy-समतल के रूप में चुनें, तब आपके बाईं ओर की दीवार xz-समतल है तथा दाईं ओर की दीवार yz-समतल है। (चित्र 2(ख)) देखिए।

आगे, हम चर्चा करेंगे कि 3-D पद्धति में एक बिंदु की स्थिति किस प्रकार निर्धारित करते है।

O को प्रत्येक अक्ष पर बिंदु O के रूप में निश्चित करने के बाद, प्रत्येक अक्ष पर एक बिंदु 1 चुनिए (जैसा कि चित्र 3 में दर्शाया गया है)। यह प्रक्रिया प्रत्येक अक्ष पर एक स्केल (scale) चुनने के समान है, जिससे अक्षों पर स्थित प्रत्येक बिंदु को एक संख्या से नामित कर दिया जाता है।

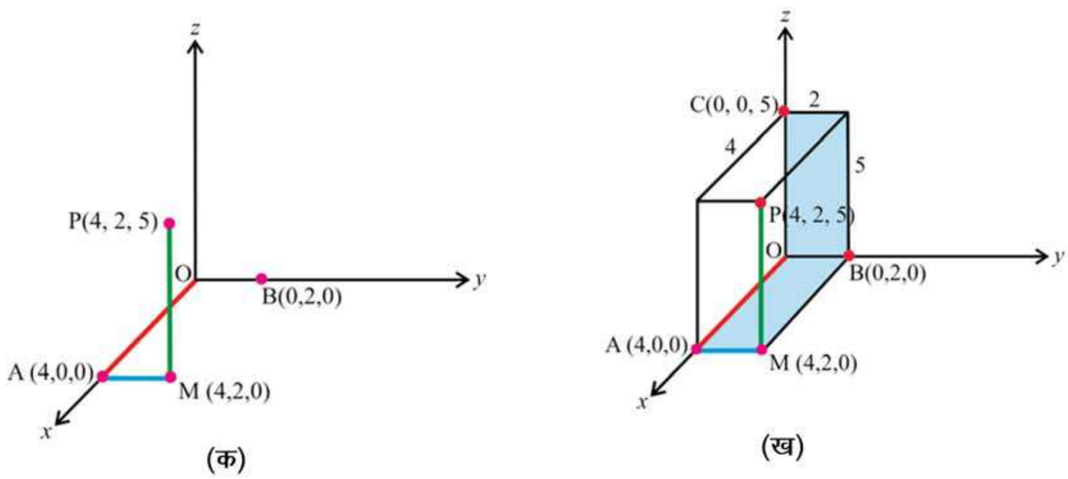
समष्टि में एक बिंदु P दिया होने पर, x-अक्ष पर उस बिंदु से एक लंब रेखा (चित्र 3 में दी गई पिंक रेखा देखिए) खींचिए (z-अक्ष और बिंदु P से निर्धारित समलत में)। उस बिंदु को C से अंकित कीजिए, जहां यह लंब z-अक्ष से मिलता है (देखिए चित्र 3)। मान लीजिए कि z-अक्ष पर स्थित पर बिंदु C की मूलबिंदु O से दूरी c है। c धनात्मक, शून्य या ऋणात्मक हो सकता है, जो z-अक्ष के संदर्भ में बिंदु C की स्थिति पर निर्भर करता है। (C स्वयं P भी हो सकता है, यदि P, x-अक्ष पर स्थित है)। अब, P से होकर

xy-समतल पर एक लंब रेखा खींचिए। मान लीजिए कि M इनके प्रतिच्छेद बिंदु को व्यक्त करता है (चित्र 3 देखिए)। (M स्वयं P होगा, यदि P स्वयं xy-समतल पर स्थित है)। अब, P से x-अक्ष और y-अक्ष पर लंब रेखाएं खींचिए जो इन्हें क्रमशः A और B पर प्रतिच्छेद करें। मान लीजिए कि मूल बिंदु O से क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष पर स्थित बिंदुओं A और B तक दूरियां a और b हैं। तब, P के निर्देशांक (a, b, c) हैं।



चित्र 3 : (a, b, c) रूप में P का निरूपण।

वैकल्पिक रूप से, मान लीजिए कि हमें एक त्रिक (x, y, z) दिया हुआ है। हम 3-D पद्धति में इसकी स्थिति किस प्रकार ज्ञात करते हैं? उदाहरणार्थ, आइए देखें कि हम बिंदु (4, 2, 5) की स्थिति किस प्रकार निर्धारित करते हैं। हम चित्र 4 में दर्शाए अनुसार निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं :



चित्र 4

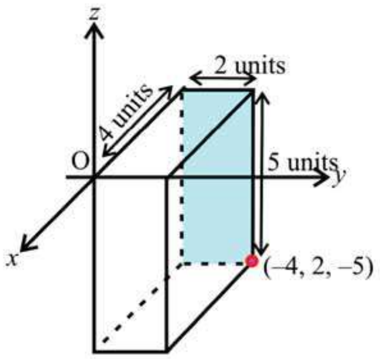
i) हम सर्वप्रथम ध्यान करते हैं कि x-निर्देशांक 4 है तब, x-अक्ष पर दूरी 4 मापते हैं तथा इस बिंदु को A (4,0,0) अंकित करते हैं।

ii) A से y-अक्ष के समांतर एक रेखा खींचते हैं तथा इस पर 2 इकाई की दूरी मापते हैं। इस बिंदु को $M(4, 2, 0)$ अंकित करते हैं। M से z-अक्ष के समांतर एक रेखा खींचते हैं तथा इस पर 5 इकाई की दूरी मापते हैं तथा इस बिंदु को $P(4, 2, 5)$ अंकित करते हैं।

जब, चित्र 4 में P उस बिंदु की वांछित स्थिति दर्शाता है।

वस्तुतः प्रत्येक बिंदु P के संगत हमें एक आयताकार बॉक्स प्राप्त होता है, जिसके शीर्ष चित्र 4 (ख) दर्शाए गए हैं तथा भुजाओं की लंबाइयां क्रमशः 4 इकाई, 2 इकाई और 5 इकाई हैं। तब, बिंदु P इस आयताकार बॉक्स के शीर्षों में से एक शीर्ष होता है।

हम ऋणात्मक संख्याओं के निर्देशांकों वाले बिंदुओं के स्थान किस प्रकार निर्धारित करते हैं? चित्र 5 बिंदु $P(-4,2,-5)$ की स्थिति को दर्शाती है।



चित्र 5

इस प्रकार, 3-D समष्टि में प्रत्येक बिंदु के लिए, वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित त्रिक (x, y, z) होता है। विलोमतः वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित त्रिक दिया होने पर, हम सरलता से समष्टि में एक बिंदु ज्ञात कर सकते हैं, जिसके निर्देशांक दिया हुआ त्रिक है अतः, 3-D समष्टि के बिंदुओं तथा क्रमित त्रिकों के समुच्चय के बीच एक एकैकी संगति (one-one correspondence) है।

यहां कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं :

E1) 3-D निर्देशांक अक्षों के ही चित्र में बिंदुओं $(1,1,0)$ और $(-4, -2,1)$ की स्थितियां निर्धारित कीजिए।

E2) मान लीजिए कि आप मूलबिंदु से प्रारंभ करते हुए, x-अक्ष के अनुदिश ऋणात्मक दिशा में 5 इकाई की दूरी चल कर बिंदु A पर पहुंचते हैं तथा y-अक्ष के समांतर एक रेखा के अनुदिश धनात्मक दिशा में क्षैतिजतः 3 इकाई की दूरी चल कर बिंदु B पर पहुंचते हैं तथा फिर z-अक्ष के समांतर एक रेखा के अनुदिश ऊपर की ओर 6 इकाई की दूरी चल कर बिंदु C पर पहुंचते हैं। बिंदुओं A, B और C के निर्देशांक क्या हैं?

E3) बिन्दुओं $P(-5, -1, 4)$, $Q(0, 3, 8)$ और $R(6, 2, 3)$ में से कौन–सा बिंदु xz-समतल के सबसे अधिक निकट है? कौन सा बिंदु yz-समतल में स्थित है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

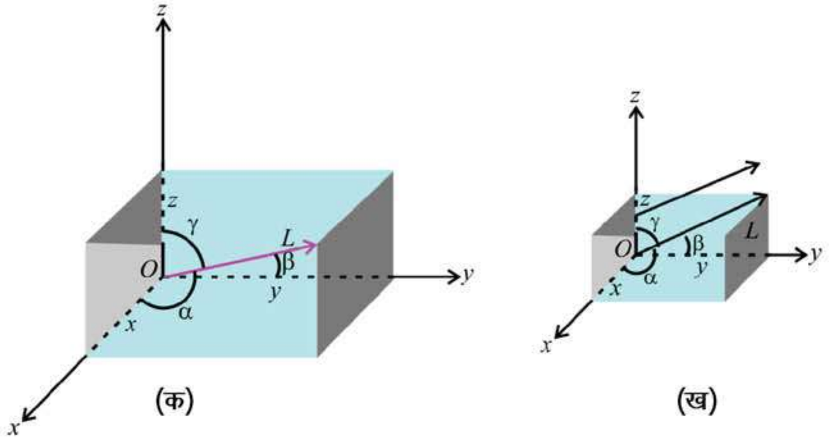
ये प्रश्न 3-D समष्टि में बिंदुओं की स्थितियों के बारे में जानकारी प्राप्त करने में आपकी सहायता करेंगे।

आगे हम त्रिविमीय समष्टि में रेखाओं तथा उनके निरूपणों के बारे में चर्चा करेंगे।

आप कलन पाठ्यक्रम, इकाई 3 से याद करें कि हम द्विविमीय समष्टि में एक रेखा को निर्धारित कर सकते हैं, यदि हमें उस रेखा पर स्थित एक बिंदु ज्ञात हो तथा साथ ही x-अक्ष से उसके झुकाव का कोण (या दिशा) अर्थात् उसकी प्रवणता भी ज्ञात हो।

इसी प्रकार, हम देखेंगे कि 3-D समष्टि में एक रेखा को किस प्रकार निरूपित करें, जबकि हमें उस रेखा पर एक बिंन्दु ज्ञात हो तथा उसकी दिशा ज्ञात हो। दिशा निर्धारित करने के लिए, हम इस प्रकार कार्य आरंभ करते हैं :

आइए कार्तीय निर्देशांक पद्धति पर विचार करें, जिसमें O मूलबिंदु है तथा OX, OY, OZ अक्ष हैं और O से होकर जाती हुई एक रेखा L है, जैसा कि चित्र 6 में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि रेखा L क्रमशः x, y और z-अक्षों की धनात्मक दिशाओं से कोण α, β और γ बनाती है। संख्याएं $\cos\alpha, \cos\beta$ और $\cos\gamma$ रेखा L की दिक्कोज्याएं कहलाती हैं।



चित्र 6 : $\cos\alpha, \cos\beta$ और $\cos\gamma$ रेखा L की दिक्कोज्याएं कहलाती हैं।

उदाहरणार्थ x-अक्ष की दिक्कोज्याएं $\cos 0, \cos\pi/2, \cos\pi/2$, अर्थात् 1, 0, 0 हैं। इसी प्रकार y-अक्ष की दिक्कोज्याएं 0, 1, 0 और z-अक्ष की 0, 0, 1 हैं।

आपने यह ध्यान दिया होगा कि दिक्कोज्याएं हमारे द्वारा चुनी गई निर्देशांक पद्धति पर निर्भर करती हैं।

मान लीजिए कि समष्टि में L एक स्वैच्छिक रेखा को निरूपित करती है। मूलबिन्दु O वाली निर्देशांक पद्धति दी होने पर O से होकर जाती हुई तथा L के समान्तर एक अद्वितीय रेखा L' खींचिए (दाईं ओर दिए गए चित्र 7 को देखिए)। मान लीजिए कि L' की दिक्कोज्याएं $\cos\alpha, \cos\beta$ और $\cos\gamma$ हैं। तब, L रेखा L' की दिक्कोज्याओं के साथ L पर स्थिति किसी भी बिंदु द्वारा अद्वितीय रूप से निर्धारित हो जाती है। उदाहरणार्थ (1, 1, 1) से होकर जाने वाली तथा x-अक्ष के समांतर रेखा की दिक्कोज्याएं, 1,0,0 है। क्यों? ध्यान दीजिए कि यहाँ $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ और $\gamma = \frac{\pi}{2}$ है।

हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है :

> **परिभाषा 1** : किसी रेखा की दिक्कोज्याएं उस रेखा तथा निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के बीच के कोणों की कोज्याएं (cosines) होती हैं।

अब, आइए कुछ सरल गुणों पर विचार करें, जो एक रेखा की दिक्कोज्याओं द्वारा संतुष्ट होते हैं।

आइए मूलबिंदु O से होकर जाने वाली एक रेखा L लें तथा मान लें कि L पर स्थित कोई बिंदु $P(x, y, z)$ है। मान लीजिए कि रेखा L की दिक्कोज्याएं $\cos\alpha, \cos\beta$ और $\cos\gamma$ हैं। तब, आप चित्र 6 से देख सकते हैं कि

$$x = OP\cos\alpha,\ y = OP\cos\beta \text{ और } z = OP\cos\gamma \text{ है।} \qquad (1)$$

क्योंकि $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 = OP^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$, है, इसलिए हम पाते हैं कि

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \tag{2}$$

एक रेखा की दिक्कोज्याओं का यह सरल गुण अनेक प्रकार से उपयोगी रहता है, जिसे आप बाद में आने वाली इकाइयों में देखेंगे।

नोट : दिक्कोज्याओं को अक्षरों l, m और n से भी व्यक्त किया जाता है, जहाँ $l = \cos\alpha, m = \cos\beta$ और $n = \cos\gamma$ है। तदानुसार, हम प्राप्त करते हैं :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{3}$$

आइए कुछ उदाहरणों को देखें :

उदाहरण 1 : यदि कोई रेखा x और y-अक्षों से क्रमशः कोण $\frac{\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{3}$ बनाती है, तो उसके द्वारा z-अक्ष से बनाया गया कोण क्या होगा?

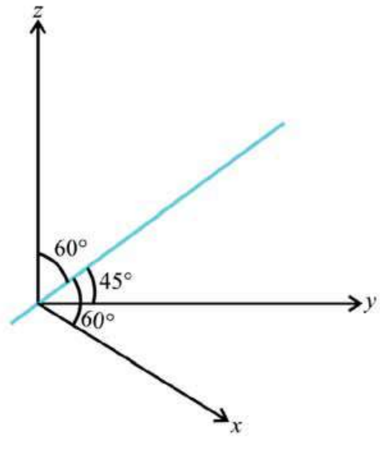
हल : हम उपरोक्त समीकरण (2) में $\frac{\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{3}$ रखते हैं। तब, यदि उस रेखा द्वारा z-अक्ष से बनाया कोण γ है, तो हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos\gamma = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3} \text{ or } \frac{2\pi}{3}$$ है।

***

उपरोक्त उदाहरण में, आपने यह ध्यान दिया होगा कि ऐसी दो रेखाएं हैं जो हमारी परिकल्पना को संतुष्ट करती हैं।

आश्चर्यचकित नहीं होइए। निम्नलिखित चित्र 7 इसको अनुभव करने में आपकी सहायता करेगा।



चित्र 7

* * *

यहां, एक अन्य उदाहरण है :

उदाहरण 2 : मूलबिंदु O (0,0,0) और $P(1,2,3)$ बिंदु को मिलाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएं ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण (3) से, हम जानते हैं कि $\cos\alpha = \frac{x}{OP}, \cos\beta = \frac{y}{OP}$ तथा $\cos\gamma = \frac{z}{OP}$ है।

यहाँ $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ और $OP = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ है।

$$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \text{ और } \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \text{ है।}$$

अतः, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$ और $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ है।

* * *

(x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी याद करने के लिए दूरी सूत्र $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ है।

उपरोक्त उदाहरण से, आपने अनुभव किया होगा कि दिक्कोज्याओं के अभिकलन जटिल हो सकते हैं। इसलिए, सुविधा की दृष्टि से हम दिक्कोज्याओं के समानुपाती संख्याएं लेते हैं। उदाहरणार्थ, संख्याएं 1, 2 और 3 संख्याओं $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}$ और $\frac{3}{\sqrt{14}}$ के समानुपाती हैं। ऐसी संख्याएं दिक्–अनुपात (direction ratios) कहलाती हैं।

इस प्रकार, यदि a, b, c और c वे संख्याएं हैं जो दिक्कोज्याओं l, m और n के समानुपाती हैं, तो a, b, c रेखा के **दिक्-अनुपात** कहलाते हैं। इसका अर्थ है कि $\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} = k$, (मान लीजिए) है, अर्थात् $l = \frac{a}{k}, m = \frac{b}{k}, n = \frac{c}{k}$ है। यदि हम समीकरण (3) में l, m और n के इन मानों को प्रतिस्थापित करें, तो हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{a^2}{k^2} + \frac{b^2}{k^2} + \frac{c^2}{k^2} = 1$$

अर्थात्, $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{k^2} = 1$ है

$\therefore k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ है।

इससे प्राप्त होता है कि $l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ है।

अब, हम इसकी औपचारिक रूप से परिभाषा देते हैं :

> **परिभाषा 2** : तीन संख्याएं a, b और c दिक्कोज्याओं $l, m,$ और n वाली एक रेखा के दिक्-अनुपात कहलाते हैं, यदि किसी $k \in \mathbf{R}$ के लिए $a = kl, b = km$ और $c = kn$ हो।

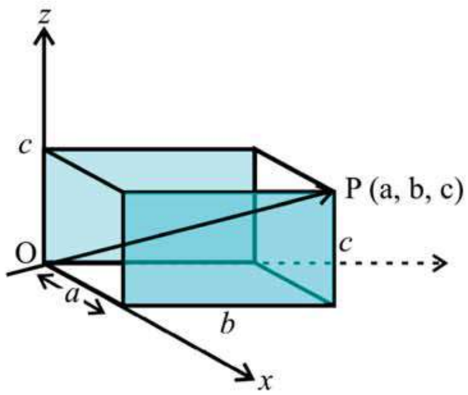
इस प्रकार, कोई भी त्रिक जो किसी रेखा की दिक्कोज्याओं के समानुपाती होता है, उस रेखा के दिक्-अनुपात होते हैं।

उदाहरणार्थ, यदि किसी रेखा की दिक्कोज्याएं $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, हो, तो $\sqrt{2}, 1, 1$ उसके दिक्-अनुपात होंगे।

यदि आप उदाहरण 1 तथा उसके बाद की चर्चा पर ध्यानपूर्वक दृष्टि डालें, तो आप नीचे दिए उदाहरण में स्पष्ट किए गए बिंदुओं को सरलता से प्रेक्षित कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : यदि L मूलबिंदु से होकर जाने वाली कोई रेखा है तथा $P(a, b, c)$ उस पर कोई बिंदु है, तो दर्शाइए कि a, b, c रेखा L के दिक्-अनुपात हैं।

हल : आइए चित्र 8 पर दृष्टि डालें जो $O(0, 0, 0)$ से होकर जाने वाली तथा $P(a, b, c)$ से भी होकर जाने वाली एक रेखा L को दर्शाती है।



चित्र 8

मान लीजिए कि $OP = r$ है। तब, x, y और z-अक्षों के सापेक्ष L की दिक्कोज्याएं $\cos\alpha = \frac{a}{r}, \cos\beta = \frac{b}{r}, \cos\gamma = \frac{c}{r}$ हैं। [स्कूली त्रिकोणमिति से याद कीजिए]। अतः, इस रेखा के दिक् अनुपात a, b और c से दिए जाते हैं।

* * *

अब आप इन प्रश्नों को करने का प्रयास कर सकते हैं :

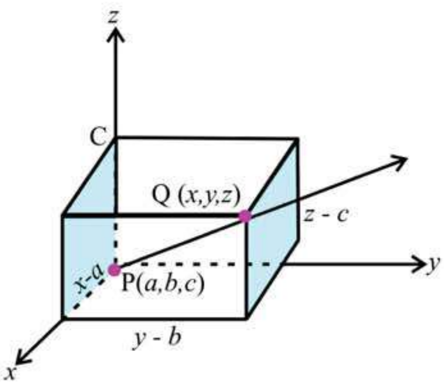
E4) यदि $\cos\alpha, \cos\beta$ और $\cos\gamma$ किसी रेखा की दिक्कोज्याएं हैं, तो दर्शाइए कि $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$ है।

E5) रेखा OP की दिक्कोज्याएं ज्ञात कीजिए, जहां P बिंदु $(2, 2, -1)$ है।

अब हम चर्चा करेंगे कि 3-D पद्धति में एक रेखा की दिक्कोज्याओं या दिक्-अनुपातों का प्रयोग उस रेखा के समीकरण ज्ञात करने में किस प्रकार किया जा सकता है।

आइए कल्पना करें कि एक रेखा L की दिक्कोज्याएं l, m और n हैं तथा साथ ही एक बिंदु $P(a,b,c)$ उस पर स्थित है। L के समीकरण को ज्ञात करने के लिए, हम इस प्रकार कार्य करते हैं :

मान लीजिए कि L पर एक अन्य बिंदु $Q(x, y, z)$ स्थिति है। आइए एक विकर्ण के रूप में PQ वाला घनाभ पूर्ण करें (चित्र 9 देखिए)।



चित्र 9

तब, $PA = x - a$, $PB = y - b$, और $PC = z - c$ है। अब, यदि $PQ = r$ है, तो आप देख सकते हैं कि $\cos\alpha = \frac{x-a}{r}$, अर्थात् $l = \frac{x-a}{r}$ है। इसी प्रकार, $m = \frac{y-b}{r}$ और $n = \frac{z-c}{r}$ है।

इस प्रकार, रेखा पर स्थिति कोई भी बिंदु समीकरणों

$$\frac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{l}} = \frac{\boldsymbol{y-b}}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{z-c}}{\boldsymbol{n}} \tag{4}$$

को संतुष्ट करता है। क्योंकि l, m और n शून्य मान ग्रहण कर सकते हैं, इसलिए समीकरण (4) समानुपातों का एक कथन है। ध्यान दीजिए कि समीकरण (4) में समीकरणों के निम्नलिखित युग्म सम्मिलित हैं :

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} \text{ और } \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n},$$

$$\frac{x-a}{l} = \frac{z-c}{n} \text{ और } \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

या

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} \text{ और } \frac{x-a}{l} = \frac{z-c}{n}$$

ध्यान दीजिए कि हमारे पास समीकरणों के तीन युग्म हैं, जिनमें से प्रत्येक उस रेखा को निरूपित करता है। वास्तव में, समीकरणों का प्रत्येक युग्म दो समतलों को निरूपित करता है, जिसका प्रतिच्छेद दी हुई रेखा है। विलोमतः समीकरण (4) के रूप की समीकरणों का कोई भी युग्म ऐसी एक सरल रेखा को निरूपित करता है, जो (a, b, c) से होकर जाती है तथा जिसके दिक्-अनुपात l, m और n हैं।

इसका अर्थ है कि ''रैखिक समीकरणों का एक युग्म एक रेखा निरूपित करता है''। समीकरण (4) एक **सरल रेखा के समीकरणों का विहित रूप (canonical form)** कहलाता है।

उदाहरणार्थ (1, 1, 1) से होकर जाने वाली तथा दिक्कोज्याओं $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ वाली सरल रेखा के समीकरण $\frac{x-1}{1/\sqrt{3}} = \frac{y-1}{-1/\sqrt{3}} = \frac{z-1}{1/\sqrt{3}}$, अर्थात् $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{(-1)} = \frac{z-1}{1}$ हैं।

ध्यान दीजिए कि ये समीकरण (4) के रूप में हैं, परंतु 1, –1, 1 इस रेखा के दिक्-अनुपात हैं तथा दिक्कोज्याएं नहीं हैं।

टिप्पणी 1 : समीकरण (4) में, ध्यान दीजिए कि (a, b, c) से होकर जाने वाली दिक्कोज्याओं l, m, n वाली रेखा की समीकरणों को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है :

$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} = t$ (मान लीजिए), जहां $t \in \boldsymbol{R}$ है।

इसका अर्थ है कि $\frac{x-a}{l} = t, \frac{y-b}{m} = t, \frac{z-c}{n} = t$ है।

इस प्रकार, एक अकेले चर t की तीन समीकरण प्राप्त करते हैं, जो निम्नलिखित द्वारा दी जाती हैं :

$$\boldsymbol{x = a + lt}\ ,\ \boldsymbol{y = b + mt}\ ,\ \boldsymbol{z = c + nt} \qquad \ldots (5)$$

समीकरण (5), (a, b, c) से होकर जाने वाली तथा दिक्कोज्याओं l, m और n वाली रेखा के निरूपण का एक अन्य रूप है।

समीकरण (5) में समीकरणों का रूप समीकरणों का **एक-प्राचलिक (one-parametric)** रूप कहलाता है, जो प्राचल t के पदों में है।

कृपया ध्यान दीजिए कि प्राचल t का प्रत्येक मान रेखा पर एक बिंदु (x, y, z) प्रदान करता है, अर्थात् t के एक दिए हुए मान के लिए, समीकरण (5) उस रेखा पर स्थित एक बिंदु निरूपित करती है, जिसकी दिक्कोज्याएं l, m, n के समानुपाती है तथा जो (a,b,c) से होकर जाती है। इसी कारण, ये समीकरण $P(a, b, c)$ से होकर जाने वाली रेखा L की प्राचलिक समीकरण कहलाती है। वास्तव में, समीकरण (5) परस्पर समांतर रेखाओं के एक कुल (family) को निरूपित करती है।

आइए यहां रूक जाएं तथा इस पर प्रकाश डालें कि हमने क्या चर्चा की है!!

एक रेखा की समीकरणों के दो रूप हैं।

(i) विहित रूप – यह दो चरों में समीकरणों का एक युग्म निरूपित करता है।

(ii) प्राचलिक रूप – यह एक स्वतंत्र चर में तीन रैखिक समीकरणों का एक निकाय निरूपित करता है।

अब आइए समीकरण (5) का उपयोग एक रेखा की समीकरण का एक अन्य रूप ज्ञात करने में करें।

मान लीजिए कि बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ एक रेखा L पर स्थित हैं। तब, यदि l, m और n उसकी दिक्कोज्याएं हैं, तो समीकरण (5) से हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \tag{6}$$

हमें यह भी ज्ञात है कि Q रेखा L पर स्थित है। अतः, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{x_2-x_1}{l} = \frac{y_2-y_1}{m} = \frac{z_2-z_1}{n} = k, \text{ (मान लीजिए) जहां } k \in \boldsymbol{R} \text{ है।} \tag{7}$$

इस प्रकार, हम $l = \frac{x_2-x_1}{k}, m = \frac{y_2-y_1}{k}, n = \frac{z_2-z_1}{k}$ प्राप्त करते हैं।

l, m और n के मान समीकरण (6) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1}}{\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1}} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1}} = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}-\boldsymbol{z_1}} \text{ है।} \tag{8}$$

यह रेखा L का समीकरण का एक अन्य रूप है, जो किसी रेखा का समीकरण का **दो-बिंदु रूप** कहलाता है।

एक रेखा की समीकरण का तीसरा रूप

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1}}{\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1}} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1}} = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}-\boldsymbol{z_1}}.$$

क्या आपको 2-D समष्टि में एक रेखा की समीकरण के दो-बिंदु रूप के बारे में याद है? आपने यह ध्यान दिया होगा कि समीकरण (8), 2-समष्टि में एक रेखा की समीकरण के दो-बिंदु रूप का 3-समष्टि में व्यापीकरण हैं।

उदाहरणार्थ, (1, 2, 3) और (0, 1, 4) से होकर जाने वाली एक रेखा का समीकरण

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{(z-3)}{1}$ अर्थात् $x-1 = y-2 = -(z-3)$ हैं।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि l, m, n के मान शून्य भी हो सकते हैं। ऐसी स्थिति में, व्यंजक $\frac{'a'}{0}$ को 0 के समानुपाती समझना चाहिए (जिसे $a \alpha 0$ से व्यक्त किया जाता है), a का 0' से विभाजन के रूप में नहीं (जो परिभाषित नहीं है)। इस प्रकार, समीकरण (6) और समीकरण (8) केवल समानुपात के कथन हैं, अर्थात्

$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ का अर्थ $(x-a, y-b, z-c)\,\alpha\,(l, m, n)$ है। जब $l = 0, m = 0$ और $n = 0$ हो, तब यह रेखा बिंदु के रूप में बदल जाती है। ध्यान दीजिए कि समीकरण (8) प्राप्त करते समय, हमने निम्नलिखित को भी दर्शाया था :

> यदि $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ रेखा L पर स्थित दो बिंदु है, तो $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ और $z_2 - z_1$ रेखा L के दिक्-अनुपात हैं।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 4: दर्शाइए कि $(-3,5,3)$ और $(2,4,3)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण $x + 5y = 22$, $z = 3$ हैं :

हल : क्योंकि रेखा $(-3,5,3)$ और $(2,4,3)$ से होकर जाती है, इसीलिए वांछित समीकरण है :

$$\frac{x+3}{2-(-3)} = \frac{y-5}{4-5} = \frac{z-3}{3-3} = r \text{ (मान लीजिए)}$$

इसका अर्थ है कि $-(x+3) = 5(y-5)$ और $z = 3$ है।

अतः, समीकरण है : $x+5y = 22, z = 3.$

* * *

अब आप कुछ प्रश्न हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E6) निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

i) बिंदुओं $(-1,0,1)$ और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

ii) दिक्कोज्याओं $\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{-\sqrt{6}}{5}, \frac{4}{5}$ वाली तथा $(1,-1,2)$ से होकर जाने वाली रेखा की समीकरण

अभी तक आप देख चुके हैं कि 3-D समष्टि में एक रेखा को निम्नलिखित तीन रूपों में निरूपित किया जा सकता है :

i) विहित रूप

ii) एक प्राचल रूप

iii) दो-बिंदु रूप

आगे, हम चर्चा करेंगे कि 3-D समष्टि में एक समलत को किस प्रकार निरूपित किया जाता है।

आइए सर्वप्रथम निर्देशांक समतलों पर दृष्टि डालें।

चित्र 2 (क) में दिए गए xy-समतल पर विचार कीजिए। इस समतल में प्रत्येक बिंदु का z-निर्देशांक 0 है। विलोमतः कोई भी बिंदु जिसका z-निर्देशांक शून्य है, xy-समतल में स्थित होगा। इस प्रकार, समीकरण $z=0$, xy-समतल को व्यक्त करती है।

इसी प्रकार, $z=3$ उस समतल को व्यक्त करती है, जो xy-समतल के समांतर है तथा उससे उपर 3 इकाई की दूरी पर है। (चित्र 11 देखिए)।

yz-समतल तथ xz-समतल के समीकरण क्या है? क्या आप इससे सहमत है कि ये क्रमशः $x=0$ और $y=0$ हैं?

एक अन्य तथ्य आपने इन समतलों के बारे में देखा होगा कि इनके समीकरण x, y और z में रैखिक हैं। इससे सुझाव मिलता है कि एक समतल को

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{9}$$

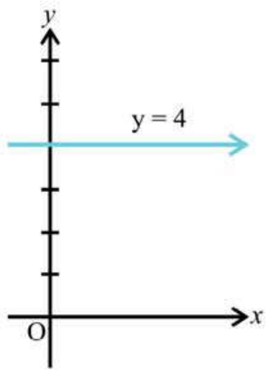
द्वारा निरूपित किया जा सकता है। वास्तव में, समीकरण (9) किसी समतल की व्यापक रैखिक समीकरण को निरूपित करती है, जहां A, B, C में से न्यूनतम एक शून्येतर है।

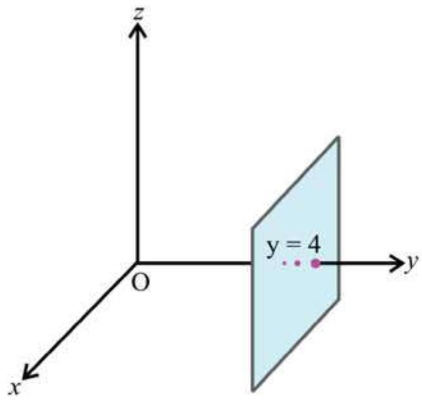
हम उपर दिए गए तथ्य के बारे में अधिक विस्तृत रूप से वर्णन नहीं कर रहे हैं, परंतु हम इस तथ्य का सदैव प्रयोग करेंगे कि, एक समतल 3 चरों वाली रैखिक समीकरण का पर्यायवाची है। इस प्रकार, उदाहरण के लिए, हम जानते हैं कि $2x+5z=y$ एक समतल को निरूपित करता है।

इस स्थान पर, हम एक **महत्वपूर्ण नोट** देना चाहेंगे।

नोट 1: 2-D पद्धति में एक रैखिक समीकरण एक रेखा को निरूपित करती है, जबकि 3-D पद्धति में एक रैखिक समीकरण एक समलत को निरूपित करती है।

उदाहरणार्थ, $y=4$ एक रेखा है $\boldsymbol{R}^2$ (चित्र 11 (क) देखिए), जबकि $\boldsymbol{R}^3$ में यह एक समतल है (चित्र 10 (ख) देखिए).





चित्र 10: एक ही समीकरण 2-D समष्टि में रेखा निरूपित करती है तथा 3-D समष्टि में समतल निरूपित करती है।

अब हम एक प्रमेय का कथन देंगे, जिससे तीन असंरेख बिंदुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण प्राप्त होती है। इस प्रमेय की उत्पत्ति छोड़ दी गई है।

प्रमेय 1 : तीन असंरेख बिंदुओं $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ और (x_3, y_3, z_3) से होकर जाने वाले समतल को निम्नलिखित सारणिक (determinant) समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है :

असंरेख बिन्दु वे बिन्दु है जो किसी एक रेखा पर स्थित नहीं होते, जिनसे कोई भी रेखा नहीं गुजरती।

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{.... (10)}$$

– ■ –

हम यहां इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे, परंतु इस प्रमेय का उपयोग हम बाद में आने वाली इकाइयों में करेंगे। हम आशा करते हैं कि आप सारणिक का मान ज्ञात करने की विधि से परिचित हैं। यहां एक उदाहरण दिया जा रहा जो आपको अपनी स्मरण शक्ति की जांच करने में सहायता करेगा।

उदाहरण 5: बिंदुओं (1, 1, 0), $(-2,2,-1)$ और $(1,2,1)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: वांछित समीकरण प्राप्त करने के लिए, हम निम्नलिखित सारणिक समीकरण ज्ञात करते हैं

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2x + 3y - 3z = 5$ है।

* * *

यहां, एक अन्य रोचक उदाहरण है।

उदाहरण 6 : दर्शाइए कि उस समतल का समीकरण, जो x, y, z-अक्षों से क्रमशः अंतः खंड $2, -1, 5$ बनाता है, $\frac{x}{2} + \frac{y}{(-1)} + \frac{z}{5} = 1$ है।

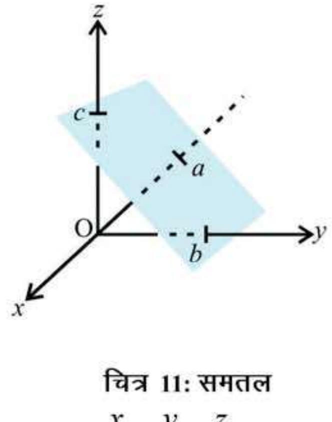
हल: हम सर्वप्रथम देखते हैं कि यह समतल x-अक्ष से अंतः खंड 2 बनाता है, जिसका अर्थ है कि यह समतल बिंदु $(2, 0, 0)$ से होकर जाता है। इसी प्रकार, यह समतल क्रमशः y और z-अक्षों पर बिंदुओं $(0, -1, 0)$ और $(0, 0, 5)$ से होकर जाता है।

इन तीन बिंदुओं को सारणिक समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 10y + 2z = 10$$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{(-1)} + \frac{z}{5} = 10$ है।

* * *



चित्र 11: समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

क्या उपरोक्त उदाहरण 6 को हल करते समय, आपने अंतः खंडों और समीकरण के गुणांकों के बीच संबंध के बारे कुछ ध्यान दिया?

व्यापक रूप में, आप देख सकते हैं कि निर्देशांक अक्षों पर a, b और c अंतः खंड बनाने वाले समतल का समीकरण (चित्र 11) है :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (11)$$

इसका कारण यह है कि (a, 0, 0), (0, b, 0) और (0, 0, c) इस समतल पर स्थित है।

समीकरण (11) समतल का समीकरण का **अंतः खंड रूप (intercept form)** कहलाता है। यहां आप 2-D पद्धति में, एक रेखा का समीकरण के अंतः खंड रूप का स्मरण कर सकते हैं। तब, आप देखेंगे कि समीकरण (ii) 2-D पद्धति से 3-D पद्धति में एक व्यापीकरण है।

यहां एक उदाहरण है।

उदाहरण 7: समतल $2x-3y+5z=4$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर बनाए गए अंतः खंड ज्ञात कीजिए।

हल: हम समतल की दी हुई समीकरण को पुनः निम्नलिखित रूप में लिखते हैं :

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{\left(\frac{4}{3}\right)}+\frac{z}{\left(\frac{4}{5}\right)}=1$$

इस प्रकार, अक्षों पर बनाए गए अंतः खंड $2, -\frac{4}{3}$ और $\frac{4}{5}$ है।

* * *

अब आप कुछ प्रश्न हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E7) दर्शाइए कि चार बिंदु $(0,-1,-1), (4,5,1), (3,9,4)$ और (-4, 4, 4) समतलीय है, अर्थात् ये एक ही समतल पर स्थित हैं। (**संकेत:** किन्हीं तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए तथा जांच कीजिए कि चौथा बिंदु भी इसी समतल पर स्थित है।)

E8) उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं P (1, 3, 2) $Q(3,-1,6)$ और $R(5,2,0)$ से होकर जाता है।

अगले अनुच्छेद में, हम अन्य दो निर्देशांक पद्धतियों की चर्चा करेंगे।

1.3 बेलनाकार और गोलाकार निर्देशांक पद्धतियां

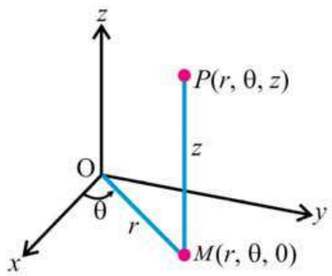
पिछले अनुच्छेद में, हमने कार्तीय निर्देशांक पद्धति के बारे में चर्चा की थी। इस अनुच्छेद में, हम दो अन्य निर्देशांक पद्धतियों-बेलनाकार निर्देशांक पद्धति और गोलाकार निर्देशांक पद्धति पर चर्चा करेंगे। सर्वप्रथम, हम बेलनाकार निर्देशांक पद्धति पर विचार करेंगे।

याद कीजिए कि कलन पाठ्यक्रम की इकाई 3 में, एक समतल में कुछ वक्रों और क्षेत्रों का सुविधाजनक वर्णन करने के लिए, हमने ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति को प्रविष्ट किया था। बेलनाकार निर्देशांक पद्धति ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति का एक विस्तार है, जो कुछ सामान्यतः प्रकट होने वाले पृष्ठों और ठोसों के सुविधाजनक वर्णन करने में सहायक होते हैं।

प्रारंभ करने के लिए, त्रिविमीय समष्टि में एक बिंदु $P(x,y,z)$ पर विचार करें। मान लीजिए कि xy-समतल पर P से डाले गए लंब का पाद M है। तब, M बिंदु P का

xy-समतल पर **प्रक्षेप (projection)** कहलाता है। (चित्र 13 देखिए)। तब, दूरी $PM = |z|$ है। ध्यान दीजिए कि M, xy-समतल में स्थित एक बिंदु है। मान लीजिए कि M के ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) हैं (चित्र 12)। तब P के बेलनाकार निर्देशांक (r, θ, z) होंगे, जहां z रेखाखंड PM की लंबाई है, जो P का z-निर्देशांक है।

टिप्पणी: समीकरण $r = c$ (अचर) $\boldsymbol{R}^3$ में एक बेलन (लंब वृतीय बेलन) निरूपित करती है, जिसकी त्रिज्या r है और $z-$अक्ष सममित अक्ष है।



चित्र 12: एक बिंदु (x, y, z) का बेलनाकार निर्देशांकों r, θ और z के पदों में निरूपण

समीकरण $\theta = a$, (एक अचर) $z-$अक्ष के अनुदिश एक अर्ध-समतल (half plane) निरूपित करती है।

समीकरण $z = h$ (एक अचर) xy-समतल के समांतर एक समतल निरूपित करती है, जो $(0, 0, h)$ से होकर जाता है।

इस प्रकार $\boldsymbol{R}^3$ में बेलनाकार निर्देशांक पद्धति के संदर्भ में, एक बिंदु को एक बेलन, अर्ध-समतल, एक समतल (तीन पारस्परिक लंब पृष्ठों) के प्रतिच्छेद बिंदु (अद्वितीय) के रूप में समझा जाता है।

इस प्रकार, 3-D समष्टि में बिंदुओं को निरूपित करने के लिए, हम एक अन्य पद्धति प्राप्त करते हैं।

एक पद्धति से दूसरी पद्धति में बिंदुओं का परिवर्तन निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है:

कार्तीय से बेलनाकार में परिवर्तन और विलोमतः

यदि (x, y, z) कार्तीय निर्देशांक पद्धति में निरूपित कोई बिंदु P है, तो P का बेलनाकार निर्देशांक पद्धति में निरूपण निम्नलिखित संबंध द्वारा दिया जाता है :

$$r^2 = x^2 + y^2, \ \tan\theta = \frac{y}{x}, \ z = z \qquad (12)$$

जबकि यदि बेलनाकार पद्धति में बिंदु P का निरूपण (r, θ, z) है तो कार्तीय पद्धति में P का निरूपण निम्नलिखित संबंध द्वारा दिया जाता है :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z \qquad (13)$$

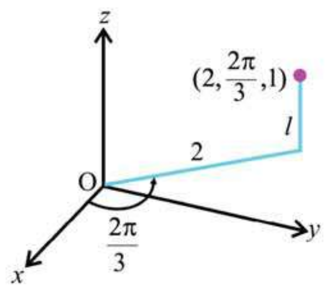
आइए कुछ उदाहरणों को देखें :

उदाहरण 8: निम्नलिखित को ज्ञात करें :

क) मान लीजिए कि कोई बिंदु P बेलनाकार निर्देशांकों $\left(2, \frac{2\pi}{3}, 1\right)$ वाला है। तब, इसके कार्तीय निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

ख) उस बिंदु के बेलनाकार निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिसके कार्तीय निर्देशांक $(3, -3, -7)$ हैं।

हल: a) बेलनाकार निर्देशांक $\left(2, \frac{2\pi}{3}, 1\right)$ वाले बिंदु को चित्र 13 में आलेखित किया गया है। समीकरण (15), इसके कार्तीय निर्देशांक निम्नलिखित द्वारा दिए जाते हैं :



चित्र 13

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

इस प्रकार, कार्तीय निर्देशांक पद्धति में वांछित बिंदु $(-1, \sqrt{3}, 1)$ है।

b) समीकरण (14) से, हमें प्राप्त है :

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1 \text{ है। अतः } \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi \text{ है।}$$

$$z = -7 \text{ है।}$$

इसलिए, बेलनाकार निर्देशांकों का एक समुच्चय $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$ है तथा अन्य समुच्चय $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$ है। ध्रुवीय निर्देशांकों के लिए, n के विभिन्न मानों के साथ यहां अपरिमित रूप से अनेक विकल्प हैं।

* * *

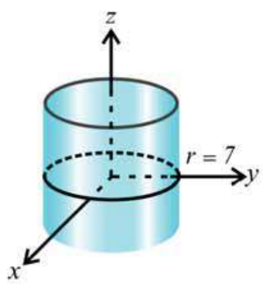
अब, आइए कार्तीय पद्धति में कुछ पृष्ठों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 9: निम्नलिखित द्वारा दिए जाने वाले पृष्ठ की पहचान कीजिए :

i) $r = 7$

ii) $r = z$

iii) $r^2 + z^2 = 64$



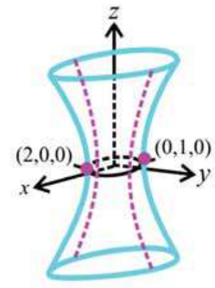
चित्र 14: r = 7 को संतुष्ट करने वाले बेलनाकार निर्देशांकों वाले बिंदुओं द्वारा बेलन का बनना।

हल : आइए एक-एक करके ज्ञात करें

i) हम जानते हैं कि ध्रुवीय समीकरण $r = 7$ द्विविमाओं में त्रिज्या 7 वाले एक वृत्त को निरूपित करती है। अतः प्रत्येक z (z बदलता रहता है), हमें त्रिज्या 7 वाले वृत्तों एक ढेरी प्राप्त हो जाती है। इसके द्वारा बनाई गई पृष्ठ क्या है? क्या आप अनुमान लगा सकते हैं? यह और कुछ नहीं बल्कि त्रिज्या 7 वाला एक बेलन है जिसका केन्द्र z-अक्ष पर स्थित है [चित्र 14 देखिए]।

ii) वर्ग करने पर, हम $r^2 = z^2$ प्राप्त करते हैं। अब हम संबंध $r^2 = x^2 + y^2$ पर विचार करते हैं। इस प्रकार, हमने $x^2 + y^2 = z^2$ अर्थात् $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ की चर्चा की है। यह पृष्ठ एक शीट (sheet) (या चादर) का अतिपरवलयज (hyperbola) कहलाता है, जो एक अतिपरवलय का त्रिविमीय विस्तार है। (चित्र 15)।

iii) दी हुई समीकरण में r^2 के लिए $x^2 + y^2$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं : $r^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 64$ है। अब इसकी सरलता से पहचान की जा सकती है कि यह पृष्ठ त्रिज्या 8 वाला एक गोला है।



चित्र 15: एक चादर वाला अतिपरवलयज

* * *

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरणों में, आपने शायद यह प्रेक्षित किया होगा कि बेलनाकार निर्देशांकों में, कुछ बेलनों की कार्तीय निर्देशांक पद्धति में समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ की तुलना में बहुत सरल समीकरण $r = c$ (एक अचर) होती है। इसी कारण नाम ''बेलनाकार निर्देशांक'' दिया गया है।

टिप्पणी: एक अन्य रोचक तथ्य यह है कि बेलनाकार निर्देशांक ऐसी समस्याओं में उपयोगी होते हैं; जिनमें एक अक्ष के परित सममिति सबंद्ध होती है तथा z-अक्ष को सममित अक्ष के संपाती चुना जाता है।

कार्तीय और बेलनाकार निर्देशांकों के बीच परिवर्तन से अधिक परिचित होने के लिए, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

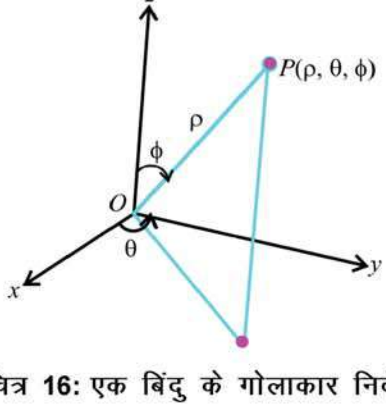
E9) किसी बिंदु के कार्तीय निर्देशांक $(-1, -\sqrt{3}, 2)$ हैं। उसके बेलनाकार निर्देशांक क्या हैं?

E10) निम्नलिखित बिंदुओं के कार्तीय निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिनके बेलनाकार निर्देशांक नीचे दिए हैं :

i) $(3, \frac{\pi}{2}, 1)$

ii) $(4, -\frac{\pi}{3}, 5)$

आगे, हम एक अन्य निर्देशांक पद्धति की चर्चा करेंगे, जो गोलाकार निर्देशांक पद्धति कहलाती है। यह 2-D पद्धति के ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति पर आधारित है। इसे एक आरेख (चित्र 16 देखिए) की सहायता से सरलता से समझा जा सकता है।



चित्र 16: एक बिंदु के गोलाकार निर्देशांक

चित्र 17, में कार्तीय निर्देशांक पद्धति में $P(x, y, z)$ एक बिंदु है। आइए देखें कि गोलाकार निर्देशांक पद्धति में इस बिंदु के निर्देशांक क्या हैं। एक बिंदु के गोलाकार निर्देशांकों में तीन प्राचल संबंद्ध हैं जिन्हें निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

1. **प्राचल** ρ : यह दूरी $|OP|$ है, अर्थात् यह मूलबिंदु से बिंदु P की दूरी है। हम $\rho \geq 0$ लेते हैं (चित्र 17 देखिए)

2. **प्राचल** θ **:** बिंदु P के xy-समतल के प्रक्षेप के ध्रुवीय निर्देशांक में लिया गया θ (उसी के समान जैसाकि बेलनाकार निर्देशांकों की स्थिति में होता है) (चित्र 17 देखिए)।

3. **प्राचल** ϕ **:** यह धनात्मक z-अक्ष और रेखा OP के बीच का कोण है (चित्र 17 देखिए)।

तब, (ρ, θ, ϕ) ही p के गोलाकार निर्देशांक हैं।

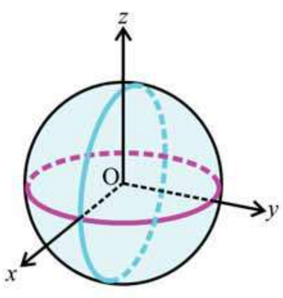
एक बिन्दु P के गोलाकार निर्देशांकों को (ρ, θ, ϕ) द्वाराा व्यक्त किया जाता है, जहां $\rho = |OP|$ मूलबिंदु से P की दूरी है, θ बिंदु P के xy-समतल पर प्रक्षेप के ध्रुवीय निर्देशांक में लिया गया है तथा ϕ धनात्मक z-अक्ष और रेखाखंड OP के बीच का कोण है। ध्यान दीजिए कि $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ है।

टिप्पणी: यहां बिंदु $(\rho_0, \theta_{0,} \phi_0)$, तीन पारस्परिक लंब पृष्ठों का अद्वितीय प्रतिच्छेद बिंदु है, जो निम्नलिखित हैं :

1) केन्द्र मूलबिंदु तथा ρ_0 त्रिज्या वाला गोला। इसे $\rho = \rho_1$ से व्यक्त किया जा सकता है।

2) z-अक्ष के अनुदिश अर्ध-समतल $\theta = \theta_0$ ।

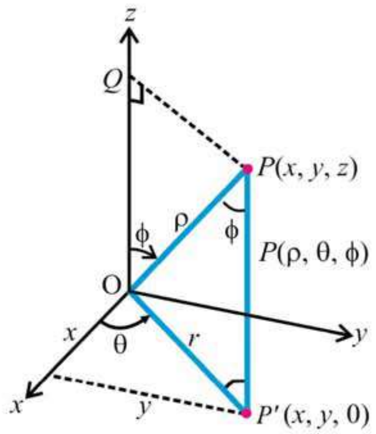
3) z-अक्ष के पारित सममित लंब वृत्तीय शंकु $\phi = \phi_0$ ।



चित्र 17: $\rho = c$ एक गोलीय है

गोलाकार निर्देशांक पद्धति विशेष रूप से ऐसी समस्याओं में उपयोगी है, जहां किसी बिंदु के पारित सममिति हो तथा मूलबिंदु उस बिंदु पर हो। उदाहरणार्थ, केन्द्र मूलबिंदु और त्रिज्या c वाले गोले की सरल समीकरण $\rho = c$ होती है। (चित्र 17 देखिए)। इसी कारण, इसे गोलाकार 'निर्देशांक' नाम दिया गया है।

अब, हम कार्तीय निर्देशांकों, गोलाकार निर्देशांकों तथा बेलनाकार निर्देशांकों के बीच संबंध को ज्ञात करते हैं। हम चित्र 18 देखते हैं। मान लीजिए 3-D पद्धति में $P(x, y, z)$ एक बिंदु है, जैसा कि चित्र 18 में दर्शाया गया है। आइए



चित्र 18

P से z-अक्ष पर एक लंब खीचे, जो उससे θ पर मिलता है। मान लीजिए कि P से xy-समतल पर लंब का पाद P' है, अर्थात् xy-समतल पर P का प्रक्षेप P' है। तब, त्रिभुजों OPQ और OPP' से हम प्राप्त करते हैं :

$z = \rho\cos\phi$ और $r = \rho\sin\phi$

परंतु $x = r\cos\theta$ और $y = r\sin\theta$. है। इस समीकरणों में r का मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\mathrm{x} = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \mathrm{y} = \rho\sin\varphi\sin\theta \text{ और } \mathrm{z} = \rho\cos\theta \tag{14}$$

और हमें प्राप्त है :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta \tag{15}$$

$$= r^2 + \rho^2\cos^2\theta$$

$$= \rho^2\sin^2\theta + \rho^2(\cos^2\theta)$$

$$= \rho^2$$

अब हम परिवर्तन समीकरणों को एक-एक करके व्यक्त करते हैं।

1) **गोलाकार निर्देशांकों** को **बेलनाकार निर्देशांकों** में परिवर्तित करने के लिए, हम संबंधों $r = \rho\sin\theta$, $\theta = \phi$, $z = \rho\cos\theta$ का प्रयोग करते हैं।

2) **कार्तीय निर्देशांकों** को **गोलाकार निर्देशांकों** में परिवर्तित करने के लिए हम

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\rho\sin\phi}\right)$$ का प्रयोग करते हैं।

3) **गोलाकार निर्देशांकों** को **कार्तीय निर्देशांकों** में परिवर्तित करने के लिए, हम निम्नलिखित समीकरणों का प्रयोग करते हैं :

$x = \rho \sin\phi \cos\theta$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta$

$z = \rho \cos\phi$.

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 10: बिन्दु $(2, \pi/4, \pi/3)$ गोलाकार निर्देशांकों में दिया है। इस बिंदु का कार्तीय निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल: इस बिंदु का आयताकार N निर्देशांक प्राप्त करने के लिए, हम, मान तब $\rho = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$ और $\phi = \frac{\pi}{3}$ समीकरण (15) में प्रतिस्थापित करते हैं हम प्राप्त करते हैं :

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \sin\phi \cos\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho\cos\phi = 2\cos\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

इस प्रकार, बिंदु $(2, \pi/4, \pi/3)$ कार्तीय निर्देशांकों में $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ द्वारा निरूपित होता है।

* * *

उदाहरण 11 : किसी बिंदु के कार्तीय निर्देशांक $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ द्वारा दिए जाते हैं। उसके गोलाकार निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल: हम समीकरण (15) का प्रयोग करते हैं तथा प्राप्त करते हैं :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho\sin\phi} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

(ध्यान दीजिए कि $\theta \neq 3\pi/2$ है, क्योंकि $y = 2\sqrt{3} > 0$ है।) अतः, दिए हुए बिंदु के गोलाकार निर्देशांक $\left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ है।

* * *

अब, आप कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते।

E11) निम्नलिखित बिंदुओं को गोलाकार निर्देशांकों से कार्तीय निर्देशांकों में परिवर्तित कीजिए :

i) $(1,0,0)$

ii) $\left(2,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$

E12) उस पृष्ठ की कार्तीय निर्देशांकों में समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी गोलाकार निर्देशांकों में समीकरण निम्नलिखित द्वारा दी जाती है :

$\rho = \cos\theta \sin\phi$

अभी तक, हम देख चुके हैं कि समष्टि में एक बिंदु को तीन रूपों के निर्देशांकों कार्तीय, बेलनाकार और गोलाकार में निरूपित किया जा सकता है। इस पर ध्यान देना महत्वपूर्ण है कि इन सभी तीनों निरूपणों में, एक बिंदु से वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित त्रिक (a,b,c) जुड़ा होता है। ध्यान दीजिए कि यहां क्रम इस अर्थ में महत्वपूर्ण है कि हम पहले x-निर्देशांक लिखते हैं तथा फिर y-निर्देशांक और z-निर्देशांक। गोलाकार और बेलनाकार में भी ऐसा ही होता है। अर्थात् इनमें किसी स्थान पर प्रकट होने वाली संख्या के विशिष्ट अर्थ के साथ एक क्रमित त्रिक होता है।

कार्तीय - $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$

बेलनाकार - $[0,\infty]\times[0,2\pi]\times\boldsymbol{R}$

गोलाकार- $[0,\infty]\times[0,2\pi]\times[-\pi,\pi]$

याद कीजिए कि कलन पाठ्यक्रम में आप सीख चुके हैं कि अवयवों के ऐसे क्रमित युग्म एक समुच्चय बनाते हैं, जो वास्तविक संख्याओं का कार्तीय गुणनफल कहलाता है, जिसे हम कार्तीय निर्देशांकों में $\boldsymbol{R}^3 = \{(x,y,z): x,y,z \in \boldsymbol{R}\}$ या $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ द्वारा, बेलनाकार निर्देशांकों में $[0,\infty]\times[0,2\pi]\times\boldsymbol{R}$ द्वारा तथा गोलाकार निर्देशांकों में $[0,\infty]\times[0,2\pi]\times[-\pi,\pi]$ द्वारा व्यक्त करते हैं। यहां, हमने सीखा कि $\boldsymbol{R}^3$ में अवयवों और 3-D समष्टि में बिंदुओं के बीच एकैकी संगति होती है। हम देख चुके हैं कि यह सहचारिता समुच्चय $\boldsymbol{R}^3$ के कुछ ज्यामितीय गुणों के अध्ययन में हमारी सहायता करती है।

अगले अनुच्छेद में, हम $\boldsymbol{R}^3$ के कुछ बीजीय गुणों की चर्चा करेंगे।

1.4 $\boldsymbol{R}$ के कार्तीय गुणनफल $\boldsymbol{R}^n$ और उनके गुण

इस अनुच्छेद में, हम आपका परिचय दो समुच्चयों से करवाएंगे, जो वास्तविक संख्याओं के कार्तीय गुणनफल कहलाते हैं। हम इन समुच्चयों पर कुछ मौलिक संक्रियाओं की चर्चा करेंगे तथा कुछ ज्यामितीय गुणों की भी चर्चा करेंगे।

कलन पाठ्यक्रम के खंड 1 का अध्ययन करते समय, आप सीख चुके हैं कि $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ प्रकार के समुच्चय, समुच्चयों X_i, $i=1$ से n के कार्तीय गुणनफल कहलाते हैं। यहां हम समुच्चय $\boldsymbol{R}$ के कार्तीय गुणनफलों का अध्ययन करेंगे। हम केवल $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ और $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ पर ही विचार करेंगे।

आइए कुछ परिभाषाओं से आरंभ करें।

परिभाषा 3: वास्तविक संख्याओं के समुच्चय कार्तीय गुणनफल $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ क्रमित युग्मों (x, y) का समुच्चय हैं, जहां $x, y, \in \boldsymbol{R}$ है।

हम इसे $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ या $\boldsymbol{R}^2$ से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार,

$\boldsymbol{R}^2 = \left\{(x,y) : x, y \in \boldsymbol{R}^2\right\}$ है।

उदाहरणार्थ $(0,1.5), (\pi,-1), \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2},\right), \left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ में सभी $\boldsymbol{R}^2$ के अवयव हैं। ध्यान दीजिए कि क्रमित युग्म (x, y) क्रमित युग्म (y, x) से भिन्न होता है, यदि $x \# y$ है, जबकि समुच्चय $\{x, y\}$ और $\{y, x\}$ बराबर हैं।

अब, हम $\boldsymbol{R}$ के तीन समुच्चयों के गुणनफल पर विचार करते हैं।

परिभाषा 4: $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ से परिभाषित $\boldsymbol{R}$ के तीन समुच्चयों का कार्तीय गुणनफल सभी क्रमित त्रिकों (x, y, z) का समुच्चय है, जहां $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ है। हम इस समुच्चय को $\boldsymbol{R}^3$ से भी व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार, $\boldsymbol{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \boldsymbol{R}\}$ है।

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$, और $(-1, -2, \pi)$ $\boldsymbol{R}^3$ के अवयवों के उदाहरण हैं।

पिछले अनुच्छेद से आप जानते हैं कि 3-D समष्टि के बिंदुओं और $\boldsymbol{R}^3$ के अवयवों में एकैकी संगति होती है। इसी कारण 3-D समाष्टि को प्रायः प्रतीक $\boldsymbol{R}^3$ से व्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार एक 2-D समतल को $\boldsymbol{R}^2$ से तथा एक रेखा को $\boldsymbol{R}$ से व्यक्त किया जाता है।

नोट: यद्यपि हम जानते हैं कि कार्तीय गुणनफलों को $\boldsymbol{R}$, की n प्रतिलिपियों के लिए परिभाषित किया जा सकता है, फिर भी इस पाठ्यक्रम में, हम केवल $\boldsymbol{R}^2$ और $\boldsymbol{R}^3$ पर ही विचार करेंगे।

अब, हम $\boldsymbol{R}^3$ पर कुछ संक्रियाओं और उनके गुणों पर विचार करेंगे। आपको यह ध्यान रखना चाहिए कि ये सभी परिभाषाएं और परिणाम केवल तीसरे निर्देशांक को छोड़ने के बाद $\boldsymbol{R}^2$ के लिए सत्य हैं।,

हम R पर संक्रिया "योग (addition)" से प्रारंभ करेंगे तथा इसे $\boldsymbol{R}^3$ में लागू करेंगे, जैसा नीचे परिभाषा में दिया गया है।

परिभाषा (योग) 5: यदि $\boldsymbol{R}^3$ के $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ दो अवयव हैं, तो P और $\boldsymbol{Q}$ के **योग $P + Q$** को अवयव

$P + Q = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ द्वारा दिया जाता है।

इस प्रकार, योग ज्ञात करने के लिए, हम एक अवयव के प्रत्येक निर्देशांक को दूसरे अवयव के संगत निर्देशांक में जोड़ देते हैं। इसका अर्थ है कि हम बार-बार योग द्वारा कितने भी परिमित अवयवों को जोड़ सकते हैं।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 12: निम्नलिखित को जोड़िए:

i) $(1,0,1)+(2,-3,4)$

ii) $(a,b,c)+(0,0,0)$

iii) $(x,y,z)+(-x,-y,-z)$

हल: i) $(1,0,1)+(2,-3,4)=(1+2,0+(-3),1+4)$

$$=(3,-3,5)$$

ii) $(a,b,c)+(0,0,0)=(a+0,b+0,c+0)$

$$=(a,b,c)$$

iii) $(x,y,z)+(-x,-y,-z)=(x-x,y-y,z-z)$

$$=(0,0,0)$$

* * *

उदाहरण 12 में, (ii) को हल करते समय, आपने अवश्य ही यह ध्यान दिया होगा कि यदि अवयव (या बिंदु) $(0, 0, 0)$ को किसी अन्य अवयव P में जोड़ा जाए, तो योग भी वहीं अवयव P रहता है। इसी कारण $(0,0,0)$ शून्य अवयव कहलाता है।

उपरोक्त उदाहरण 12 में (iii) में, आपने अवश्य ही यह ध्यान दिया होगा कि यदि P कोई बिंदु (x,y,z) है और यदि हम $-P$ को बिंदु $(-x,-y,-z)$ से व्यक्त करें, तो $P+(-P)=(0,0,0)$ है। इसका अर्थ है कि यदि हम P और $(-P)$ को जोड़ें, तो हमें शून्य अवयव (zero-element) प्राप्त होता है। हम $(-P)$ को P का **योज्य प्रतिलोम (additive inverse)** कहते हैं।

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए :

E13) निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

i) $(0,0,1)$ को $(1,0,0)$ और $(0,1,0)$ के योग से जोड़िए।

ii) (0.5, 1) तथा (–3, 0) का योग और (1,0.5) तथा (0, –3) का योग ज्ञात कीजिए। क्या ये दोनों योग बराबर है? स्थापित कीजिए।

E14) निम्नलिखित में से प्रत्येक का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

i) $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{3}\right)$

ii) $(-4.5,-8)$

E15) $(-5x,4y,-z)$ का योज्य प्रतिलोम तथा शून्य अवयव का योग ज्ञात कीजिए।

इसी प्रकार, हम घटा संक्रिया को भी परिभाषित करते हैं।

परिभाषा (घटा) 6 : यदि $\boldsymbol{R}^3$ के $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ दो अवयव हैं, तो P और Q का अंतर P-Q से व्यक्त किया जाता है, और इस अंतर को निम्नलिखित अवयव द्वारा दिया जाता है :

$$P - Q = (x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = P + (-Q)$$

$$= (x_1, y_1, z_1) + (-x_2 - y_2, -z_2)$$

$$= (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

उदाहरणार्थ, यदि $P = (2, 2, -1)$ और $Q = (5, -3, 2)$ है, तो

$$\begin{aligned} P - Q &= P + (-Q) \\ &= P + (-Q) \\ &= (2, 2, -1) + (-5, 3, -2) \\ &= (-3, 5, -3) \end{aligned}$$

इस प्रकार, हमने देखा कि योग और घटा की संक्रियाओं को सरलता से $\boldsymbol{R}$ से $\boldsymbol{R}^3$ (और $\boldsymbol{R}^2$) के लिए लागू किया जा सकता है। ध्यान दीजिए कि इन दोनों स्थितियों में, हमने दोनों अवयवों के संगत निर्देशांकों को जोड़ा या घटाया था। यह विधि निर्देशांकों अनुसार योग या निर्देशांकों अनुसार घटा कहलाती है।

क्या हम इस विधि को गुणन के लिए भी लागू कर सकते हैं? आइए देखें कि जब हम निर्देशांकों अनुसार गुणा करते हैं, तब क्या होगा।

$\boldsymbol{R}^3$ (या $\boldsymbol{R}^2$) के लिए गुणन परिभाषित करने की अनेक विधियां हैं। यहां हम एक संक्रिया जिसे 'अदिश गुणन "Scalar Multiplication" कहते हैं, की चर्चा करेंगे। (शब्द 'अदिश' वास्तविक संख्याओं के एक पर्यायवाची के रूप में प्रयोग किया जाता है।) यह गुणनफल एक वास्तविक संख्या तथा $\boldsymbol{R}^3$ के एक अवयव को संयोजित करता है। अधिक सुस्पष्ट रूप में, हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त है :

परिभाषा (अदिश गुणन) 7: यदि $\boldsymbol{R}^3$ का कोई अवयव $P(x, y, z)$ है तथा $\boldsymbol{R}$ का कोई अवयव α है, तो ***P* का α से अदिश गुणन अवयव** αP है, जो निम्नलिखित **द्वारा प्राप्त होता है :**

$$\alpha P = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

आइए कुछ उदाहरण हल करने का प्रयास करें।

उदाहरण 13 : निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

i) $0.1(1, -1, 4) + 3(0, 2, 3) - \dfrac{1}{2}(2, 4, 6)$

ii) $3(x, -y, z) + (-2, 4, 1)$

हल : आइए एक-एक करके हल करने का प्रयास करें।

i) $0.1(1,-1,4)=(0.1,-0.1,0.4)$

$3(0,2,3)=(0,6,9)$

$\frac{1}{2}(2,4,6)=(1,2,3)$

$\therefore 0.1(1,-1,4)+3(0,2,3)-\frac{1}{2}(2,4,6)$

$=(0.1,-0.1,0.4)+(0,6,9)-(1,2,3)$

$=(-0.9, 3.9, 6.4)$

अब हम ii) को ज्ञात करते हैं।

ii) $3(x,-y,z)=(3x,-3y,3z)$

तब, हमें प्राप्त होता है :

$$3(x,-y,z)+(-2,4,1)=(3x,-3y,3z)+(-2,4,1)$$

$$=(3x-2,-3y+4,3z+1)$$

* * *

$\boldsymbol{R^2}$ में घटा और अदिश गुणन, केवल तीसरे निर्देशांक को छोड़ते हुए, $\boldsymbol{R^3}$ में व्यवकलन और अदिश गुणन की तरह ही परिभाषित किए जाते हैं। निम्नलिखित गुणों का सत्यापन योग और अदिश गुणन की परिभाषाओं से सरलता से किया जा सकता है। हम इसे आपके लिए एक अभ्यास के लिए छोड़ रहे हैं।

गुण: i) $\alpha\{(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\}$

$=\alpha(x_1,y_1,z_1)+\alpha(x_2,y_2,z_2)$

ii) $(\alpha+\beta)(x_1,y_1,z_1)=\alpha(x_1,y_1,z_1)+\beta(x_1,y_1,z_1)$

iii) $(\alpha\beta)(x_1,y_1,z_1)=\alpha\{\beta(x_1,y_1,z_1)\}$

iv) प्रत्येक $(x,y,z)\in \boldsymbol{R^3}$ के लिए, $\alpha(x,y,z)=0$ है, यदि ओर केवल यदि $\alpha=0$ है।

नोट : उपर दिए हुए गुण $\boldsymbol{R^2}$ के लिए भी लागू होते हैं।

यहां, आपके लिए एक प्रश्न है।

E 16) अवयवों P= (2, 2,–1) और Q = (5, –3, 2,) के लिए P–Q ज्ञात कीजिए और जांच कीजिए कि यह Q-P से समान है।

E 17) ऊपर दिए गुणों i) से iv) तक का सत्यापन कीजिए।

इस प्रकार, हमने $\boldsymbol{R}^3$ (और $\boldsymbol{R}^2$) पर कुछ मौलिक अंकगणितीय संक्रियाओं को परिभाषित किया तथा उनके कुछ गुणों की चर्चा की, जिन्हें $\boldsymbol{R}^3$ (और $\boldsymbol{R}^2$) के बीजीय गुण कहा जाता है।

नोट: इस अनुच्छेद में, हमने जिन संकल्पनाओं की चर्चा की है, उन्हें सरलता से तीन विमाओं से किसी भी संख्या वाली विमाओं के लिए विस्तृत किया जा सकता है। हम $\boldsymbol{R}^n$, को, जहां n एक धनात्मक पूर्णांक है (संभवतः तीन से बड़ा), सभी n-त्रिकों के समुच्चय के रूप में परिभाषित करते हैं, जहां $x_i, i = 1 \ldots n$, वास्तविक संख्याएं हैं। $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ उदाहरणार्थ, $(1, \sqrt{7}, \pi, -4) \in \boldsymbol{R}^4$ है।

हम यहां कुछ संकेतनों को प्रविष्ट कर रहे हैं।

संकेतन: यहां से आगे, $\boldsymbol{R}^n$, $(n > 1)$ के अवयवों को **गहरे रंग** (bold) के छोटे अक्षरों $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$ से व्यक्त किया जाएगा। $\boldsymbol{R}^3$ और $\boldsymbol{R}^2$ के अवयवों में विभेद करने के लिए (मान लीजिए), हम $\boldsymbol{R}^3$ के किसी अवयव को $n = (x_1, x_2, x_3)$ के रूप में तथा $\boldsymbol{R}^2$ के अवयव को $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ के रूप में व्यक्त करते हैं।

$\boldsymbol{R}^3$ (और $\boldsymbol{R}^2$) के लिए चर्चित किए गए गुण $\boldsymbol{R}^3$ (और $\boldsymbol{R}^2$) पर कुछ मौलिक अंकगणितीय संक्रियाएं करने में हमारी सहायता करते हैं। क्या ये संक्रियाएं यह ज्ञात करने में हमारी सहायता करती हैं। कि 3-Dसमष्टि (या 2D-समष्टि) में कोई बिंदु मूलबिंदु के निकट है या मूलबिंदु से अधिक दूरी है। हम समष्टि (या आकाश) में दो बिंदुओं के बीच की दूरी किस प्रकार परिकलित करते हैं।

R में, हम जानते हैं कि दो बिंदुओं के बीच लंबाई उनकी दूरी प्रदान करती है। क्या आपको याद है कि वास्तविक रेखा पर स्थित दो बिंन्दु x और y के बीच की लंबाई को किस संकेतन से व्यक्त किया था? इसे $|x-y|$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। हम इसे x और y के अंतर का निरपेक्ष मान (absolute value) $|x-y| = \sqrt{(x-y)^2}$ कहते हैं। हमें यह भी प्राप्त है :

$$|x-y| = \sqrt{(x-y)^2} \tag{16}$$

हमें इसे $\boldsymbol{R}^3$ (और $\boldsymbol{R}^2$) के लिए लागू करते हैं।

यदि $\boldsymbol{R}^3$ में दो अवयव $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ और $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ हैं, तो हम ||x-y|| को (घटा की परिभाषा के द्वारा)

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3)\| = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)\|$$

द्वारा व्यक्त करते हैं।

व्यवकलन की परिभाषा के द्वारा उपरोक्त का मान निम्नलिखित के बराबर है।

$$+\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$ (समीकरण (16) से संकेत लेने पर)

उपरोक्त व्यंजक **दूरी सूत्र** कहलाता है अब, हम इसकी औपचारिक रूप से परिभाषा देते हैं।

परिभाषा 8 : यदि $\boldsymbol{R}^3$ में दो अवयव $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ और $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$ हैं, तो हम x और y के बीच की दूरी $\|x-y\|$ को निम्नलिखित रूप में परिभाषित करते हैं:

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2} \quad .... (17)$$

हम $\|.\|$ को मानक (Norm) कहते हैं।

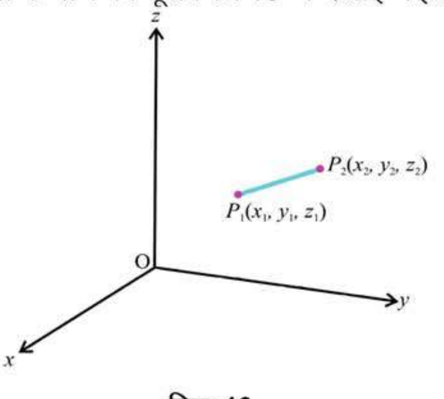
संकेत $\sum$ (जिसे सिगमा कहते हैं), का प्रयोग करते हुए, हम समीकरण (17) को पुनः निम्नलिखित रूप में लिखते हैं:

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2} \quad ..... (18)$$

$\boldsymbol{R}^2$ में x और y के बीच की दूरी निम्नलिखित द्वारा दी जाती है :

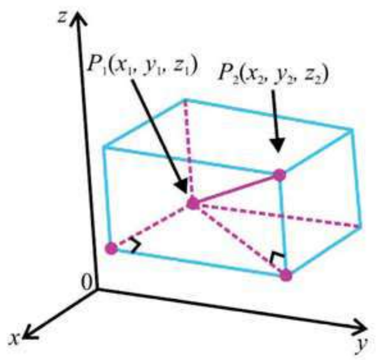
$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2} \quad ..... (19)$$

ज्यामितीय रूप से, दो बिंदुओं के बीच की दूरी चित्र 19 में दर्शाई गई है।



चित्र 19

दूरी सूत्र के सत्यापन के लिए, हम चित्र 20 में दर्शाए अनुसार आयताकार बॉक्स बनाते हैं तथा पाइथागोरस प्रमेय का अनुप्रयोग करते हैं। इसकी विस्तृत जानकारी को यहां छोड़ दिया गया है। इस संदर्भ में, निम्नलिखित चित्र आपकी सहायता कर सकता है :



चित्र 20

यहां, सूत्र को स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण दिए जा रहे हैं।

उदाहरण 14 : बिंदुओं $\boldsymbol{a} = (1, -3, 7)$ और $\boldsymbol{b} = (2, -1, 5)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: दूरी सूत्र से, $\boldsymbol{a}$ और $\boldsymbol{b}$ के बीच की दूरी निम्नलिखित द्वारा दी जाती है।

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (7-5)^2}$$

$$= \sqrt{1+4+4}$$

$$= 3$$

[ऋणात्मक संख्याओं के साथ कार्य करते समय, सावधान रहिए।]

* * *

उदाहरण 15 : बिंदुओं $\boldsymbol{a}$ और $\boldsymbol{b}$ में से कौन सा बिंदु $\boldsymbol{c}$ के निकटतम है, जहां $\boldsymbol{a} = (6, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (-5, -1, 4)$ और $\boldsymbol{c} = (0, 3, 8)$ है। $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ और $\boldsymbol{c}$ में से कौन सा बिंदु yz-समतल में स्थित है?

हल: आइए बिंदुओं $\boldsymbol{a}$ और $\boldsymbol{b}$ की $\boldsymbol{c}$ की दूरियां परिकलित करें।

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}\| = \|(6, -1, -5)\| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{36+1+25} = \sqrt{62}$$

$$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\| = \|(-5, -4, -4)\| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 16 + 16} = \sqrt{57}$$

क्योंकि a की तुलना में b की c से दूरी कम है, इसलिए a की तुलना में b बिंदु c के अधिक निकट है।

साथ ही, yx-समतल में किसी भी बिंदु का x-निर्देशांक 0 होता है। इसलिए केवल बिंदु c ही yz-समतल में स्थित है।

* * *

दूरी सूत्र के अनुप्रयोग के अधिक अभ्यास के लिए, आप कुछ प्रश्न क्यों नहीं हल करते।

E18) दर्शाइए कि शीर्षों $P(-2,4,0)$, $Q(1, 2, -1)$ और $R(-1,1,2)$ वाला त्रिभज एक समबाहु त्रिभुज है।

इस प्रकार, हमने देखा कि दूरी फलन $\|.\|$ दो बिंदुओं के बीच की दूरी परिकलित करने में हमारी सहायता करता है। आप यहां इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि ज्यामितीय रूप से यदि दो बिंदुओं की बीच की दूरी शून्य हो, तो दोनों बिंदु संपाती होते हैं। हम ज्यामितीय रूप से यह भी जानते हैं कि a और b के बीच की दूरी वही होती है जो b और a के बीच की दूरी होती है। ये दोनों गुण निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किए जा सकते हैं :

गुण 2: मान लीजिए कि $\boldsymbol{R^3}$ (या $\boldsymbol{R^2}$) में, $\boldsymbol{x}$ और $\boldsymbol{y}$ दो बिंदु हैं।

तब, निम्नलिखित कथन सत्य होते हैं :

i) $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=0$ यदि और केवल यदि $x=y$ हो।

ii) $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$

उपरोक्त गुणों को प्रत्यक्ष रूप से परिभाषा से सत्यापित किया जा सकता है।

अगला गुण, जिसका हम कथन देने जा रहे हैं, वह 'त्रिभुज असमिका' कहलाता है। आप जानते हैं कि किसी समतल में एक त्रिभुज में यह गुण होता है कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का योग सदैव तीसरी भुजा की लंबाई से बड़ा होता है। इसका अर्थ है कि यदि $\boldsymbol{R^3}$ में x, y, z तीन बिंदु है तो

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|+\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| \qquad (20)$$

यही तथ्य $\boldsymbol{R^2}$ के लिए भी सत्य है। इस असमिका को सिद्ध करने के लिए, हमें एक अन्य महत्वपूर्ण असमिका की सहायता लेनी पड़ती है, जो **कौशी–श्वार्त्ज (Cauchy-Schwarz) असमिका** कहलाती है। बाद में आने वाली इकाइयों में आप देखेंगे कि यह असमिका अन्य अनेक महत्वपूर्ण परिणामों के सत्यापन में बहुत उपयोगी रहती है।

अब, हम इसका कथन देते हैं :

कौशी–श्वार्त्ज असमिका

यदि $\boldsymbol{R^3}$ में $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ और $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ दो अवयव हैं, तो निम्नलिखित सत्य हैं:

$$\left|\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}\quad\sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2} \qquad .... (21)$$

इसी प्रकार, $\boldsymbol{R^2}$, के लिए, हमें प्राप्त है :

$$\left|\sum_{i=1}^{2} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{2} a_i^2}\quad\sqrt{\sum_{i=1}^{2} b_i^2} \qquad .... (22)$$

(21) और (22), में दिए संकलनों (summations) को आपको समझाने के लिए, हम कुछ उदाहरण हल करते हैं।

इस असमिका को समझने के लिए, आइए $\boldsymbol{R^3}$ में दो बिंदु लें तथा उनके लिए असमिका का सत्यापन करें।

उदाहरण 16: $\boldsymbol{a}=(0,-1,\sqrt{3})$ और $\boldsymbol{b}=(-3,\,0,4)$ के लिए कौशी–श्वार्त्ज असमिका का सत्यापन कीजिए।

हल: यहां $n=3$ है। इसलिए एक समीकरण (21) पर विचार करते हैं। हमें $a_1=0, a_2=-1, a_3=\sqrt{3}, b_1=-3, b_2=0, b_3=4$ दिया है।

हम इन मानों को समीकरण (22) में प्रतिस्थापित करते हैं तथा प्राप्त करते हैं :

$$\text{वाम पक्ष} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= 0 + 0 + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} \ \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$= \sqrt{0+1+3} \ \sqrt{9+0+16}$$

$$= \sqrt{4} \ \sqrt{25}$$

$$= 2 \times 5 = 10$$

क्योंकि $4\sqrt{3} \simeq 6..928 < 10$ है, इसलिए वाम पक्ष < दायाँ पक्ष है और इस प्रकार असमिका का सत्यापन हो जाता है।

* * *

आप $\boldsymbol{R}^3$ में अन्य अवयव a को लेकर प्रयास कर सकते हैं। इसी प्रकार $\boldsymbol{R}^2$ के लिए भी।

अब आप कौशी–श्वार्त्ज का उपयोग करते हुए त्रिभुज असमिका प्राप्त करने का प्रयास करें।

कौशी–श्वार्त्ज असमिका से, हम पहले यह नियमित करते हैं कि यदि $\boldsymbol{R}^3$ में x, y कोई दो अवयव हैं, तो

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \tag{23}$$

(24) में दी गई असमिका का सत्यापन आपके अभ्यास के लिए छोड़ा जा रहा है।

अब हम (21) में दी त्रिभुज असमिका को (24) में दी असमिका से निगमित करते हैं आइए $\boldsymbol{R}^3$ में कोई भी तीन बिंदु x, y, z लें। हम लिखते हैं :

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x} - z + z - \boldsymbol{y}\| \tag{24}$$

उपर दी असमिका (23) का अनुप्रयोग (24) के दाएँ पक्ष में करें, जिससे प्राप्त होता है

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x} - z + z - \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - z\| + \|z - \boldsymbol{y}\| \tag{25}$$

इस प्रकार, (21) में दी त्रिभुज असमिका सत्यापित हो जाती है।

अब कुछ रुक कर विचार कीजिए, आप कितना समझ पाये हैं इसके लिए प्रश्न दिए हैं।

E19) (23) में दी असमिका, अर्थात् $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, $x, y \in R^3$ का सत्यापन कीजिए।

E20) गुण 2 के भाग (i) और (ii) के सत्यापन कीजिए।

नोट: निर्देशांक पद्धतियों द्वारा परिभाषित दूरी फलन $\|.\|$ के साथ द्विविमीय और त्रिविमीय R^2 और R^3 क्रमशः दो तीन विमाओं वाली यूक्लिडीय समष्टियाँ कहलाती हैं। इन्हें प्राचीन यूनानी गणितज्ञ अलेक्जेंड्रिया के यूक्लिड के नाम पर नामांकित किया गया है। शब्द ''यूक्लिडीय'' इन समष्टियों को आधुनिक ज्यामिति में विचार की गईं अन्य समष्टियों से अलग कराता है।

आगे, हम R^3 (और R^2) के कुछ विशिष्ट उपसमुच्चयों पर विचार करेंगे।

आप जानते हैं कि $]a,b[=\{x \in R : a < x < b\}$ के प्रकार के समुच्चय, जहां a और b वास्तविक संख्याएं हैं, R में विवृत अंतराल (open intervals) कहलाते हैं। अब, हम R^3 में ऐसे समुच्चय को प्रविष्ट करेंगे जो R में वृिवत अंतरालों के अनुरूप हैं।

परिभाषा 9: मान लीजिए कि है तथा $r > 0$ कोई वास्तविक संख्या है। तब, समुच्चय

$$S(\boldsymbol{a},r)=\{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^3 : \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < r\} \tag{26}$$

विवृत गोला या **विवृत गेंद** कहलाता है, जिसका केन्द्र a है और त्रिज्या r है। इसे निम्नलिखि रूप में भी लिखा जा सकता है :

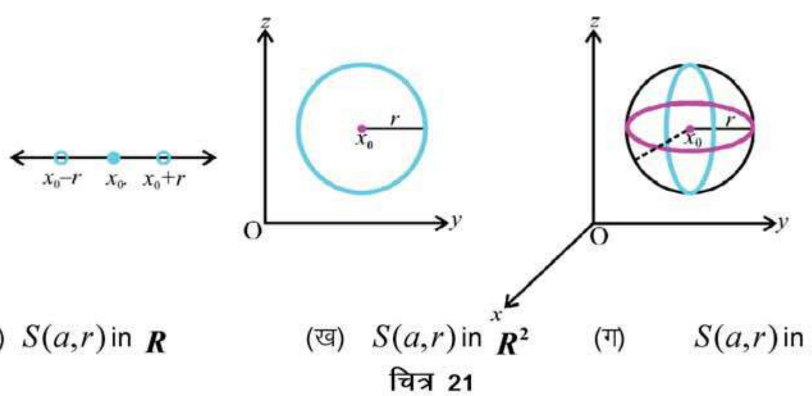
$$S(\boldsymbol{a},r)=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in \boldsymbol{R}^3 : \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\boldsymbol{a}_i)^2} < r\} \text{ जहां } \boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3) \tag{27}$$

इसी प्रकार, हम R^2 में एक विवृत चक्रिका को परिभाषित कर सकते हैं, जिसका केन्द्र a और त्रिज्या r है।

$$S(\boldsymbol{a},r)=\{x\in \boldsymbol{R}^2 : \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < r$$

$$=\left\{(x_1,x_2)\in \boldsymbol{R}^2 : \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-a_i)} < r\right\} \quad \begin{array}{l}\text{जहाँ } \boldsymbol{x}=(x_1,x_2) \text{ है।}\\ \text{और } \boldsymbol{a}=(a_1,a_2) \text{ है।}\end{array}$$

आप देख सकते हैं कि R^2 में $S(a,r)$ समतल में चक्रिका अभ्यंतर है जिसका केन्द्र a और त्रिज्या r है (कृपया चित्र 21(ख) देखिए) तथा R^3 में समुच्चय $S(\boldsymbol{a},r)$ केन्द $\boldsymbol{a}$ और त्रिज्या r वाली गेंद का अभ्यंतर है (कृपया चित्र 21(ग) देखिए)। ध्यान दीजिए कि यहां विवृत का अर्थ है कि केवल आंतरिक बिंदु ही सम्मिलित हैं तथा परिसीमा वाले बिंदु सम्मिलित नहीं है।



(क) $S(a,r)$ in R (ख) $S(a,r)$ in R^2 (ग) $S(a,r)$ in R^3

चित्र 21

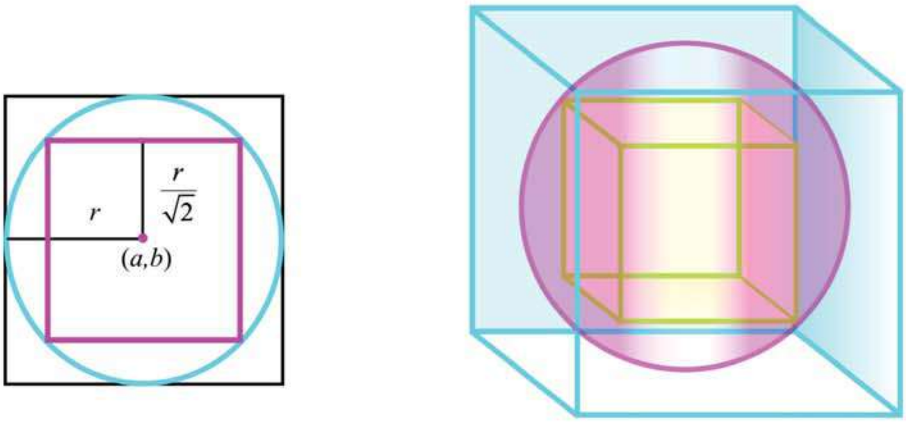
आगे, हम $\boldsymbol{R}^3$ (या $\boldsymbol{R}^2$) में एक अन्य वर्ग के समुच्चयों को परिभाषित करेंगे जो निम्नलिखित परिभाषा द्वारा दिए जाते हैं :

परिभाषा 10: मान लीजिए कि $\mathrm{a}=(a_1,a_2,a_3)\in \boldsymbol{R}^3$ है तथा $r>0$ है। निम्नलिखित द्वारा समुच्चय S को परिभाषित कीजिए

$$S=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in \boldsymbol{R}^3 : |x_1-a_1|<r, |x_2-a_2|<r, |x_3-a_3|<r\}.$$

$\boldsymbol{R}^3$ में S एक **विवृत घन** (open cube) कहलाता है।

इसी प्रकार, $\boldsymbol{R}^3$ में विवृत घनों के अनुरूप, हम $\boldsymbol{R}^2$ में विवृत वर्ग को परिभाषित कर सकते हैं। विवृत चक्रिका और विवृत वर्ग के बीच में एक रोचक ज्यामितीय संबंध है (चित्र 22 (क) और (ख देखिए)। आपने यह ध्यान दिया होगा कि चित्र 22(क) में एक विवृत चक्रिका है जिसमें एक विवृत वर्ग A_1 अंतर्विष्ट है तथा वह चक्रिका एक विवृत वर्ग A_2 में अंतर्विष्ट है। इसी प्रकार, चित्र 22 (ख) में, एक विवृत गोला है, जिसमें एक विवृत घन अंतर्विष्ट है तथा वह गोला एक अन्य विवृत घन में अंतर्विष्ट है। आप इसका सत्यापन चित्र 21 (क) और 21 (ख) द्वारा ही विवृत चक्रिका और विवृत गोले की परिभाषाओं की सहायता से कर सकते हैं। हम इस सत्यापन को आपके लिए अभ्यास के तौर पर छोड़ रहे हैं।



क) एक विवृत वर्ग अंतर्विष्ट करने वाली विवृत चक्रिका, जो एक विवृत वर्ग में अंतर्विष्ट है।

ख) एक विवृत घन एक विवृत गोले में अंतर्विष्ट है, जो एक अन्य विवृत घन में अंतर्विष्ट है।

चित्र 22

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E21) दर्शाइए कि $\boldsymbol{R}^2$ में, केन्द्र $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ और त्रिज्या r वाली एक विवृत चक्रिका D एक विवृत वर्ग

$$A_1=\{(x_1,x_2): |x_1-a_1|<r, |x_2-a_2|<r\}$$

में स्थित है तथा विवृत वर्ग

$$A_2 = \left\{(x_1, x_2) : |x_1 - a_1| < \frac{r}{\sqrt{2}}, |x_2 - a_2| < \frac{r}{\sqrt{2}}\right\}$$

को अंतर्विष्ट करती है।

E22) दर्शाइए कि $\boldsymbol{R^3}$ में केन्द्र $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ और त्रिज्या r वाला विवृत गोला एक विवृत घन

$$A_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) : |x_1 - a_1| < r, |x_2 - a_2| < r, |x_3 - a_3| < r\}$$

में स्थित है तथा विवृत घन

$$A_2 = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) : |x_1 - a_1| < \frac{r}{\sqrt{3}}, |x_3 - a_3| < \frac{r}{\sqrt{3}}, |x_3 - a_3| < \frac{r}{\sqrt{3}}\right\}$$

को अंतर्विष्ट करता है।

अब हम यूक्लिडीय समष्टियों $\boldsymbol{R^3}$ और $\boldsymbol{R^2}$ के कुछ उपसमुच्चय तथा उनका ज्यमितीय आकारों से परिचित हैं अब, हम आपका ध्यान $\boldsymbol{R^3}$ और $\boldsymbol{R^2}$ के उपसमुच्चयों पर परिभाषित फलनों पर आकृषित करेंगे।

1.5 $R^{\mathrm{n}} \to R$ तक (n = 2,3) फलन

इस उप-अनुच्छेद में हम आपका परिचय $\boldsymbol{R^3}$ (या $\boldsymbol{R^2}$) के उपसमुच्चयों पर परिभाषित फलनों से कराएंगे। हम आपको ऐसे फलनों के लिए आलेख, स्तर वक्र और स्तर पृष्ठ की धारणाओं से परिचित कराएंगे।

आप फलन की परिभाषा से पहले से ही परिचित हैं (कलन पाठ्यक्रम की इकाई 1 को देखिए)।

इस प्रकार, यदि X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं, तो X से Y तक एक फलन एक नियम या संगतता है जो X के प्रत्येक सदस्य को Y के एक अद्वितीय सदस्य से जोड़ता (या संयोजित करता) है। यहां हम ऐसे फलनों पर विचार करेंगे, जिनके लिए X, $\boldsymbol{R^3}$ (या $\boldsymbol{R^2}$) का एक उपसमुच्चय है तथा Y, R का एक उपसमुच्चय है। ऐसे फलन 3 चरों (या 2 चरों) का वास्तविक-मान (real-valued) फलन कहलाते हैं। इसे हम औपचारिक रूप से इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

परिभाषा 11: तीन चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन f ऐसा नियम है, जो $\boldsymbol{R^3}$ के एक समुच्चय में प्रत्येक त्रिक (x, y, z) को एक अद्वितीय वास्तविक संख्या से संयोजित करता है, जिसे $f(x, y, z)$ से व्यक्त किया जाता है। f का प्रांत समुच्चय S है तथा इसका परिसर समुच्चय $\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in S\}$ है। इसी प्रकार $\boldsymbol{R^2}$ के किसी समुच्चय D पर, दो चरों वाला, फलन परिभाषित किया जाता है और इसे $\boldsymbol{f(x, y)}$ से व्यक्त किया जाता है।

नोट: (1) **तीन चरों** वाले फलन का अर्थ है कि उस फलन का प्रांत $\boldsymbol{R^3}$ का एक उपसमुच्चय है।

(2) इसी प्रकार दो चरों वाले फलन का प्रांत $\boldsymbol{R^2}$ का एक उपसमुच्चय है।

हम कुछ उदाहरण दे रहे हैं :

i) $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ के लिए $f(x, y) = \sin x + \sin y$ परिभाषित कीजिए। तब, $f(x, y)$ दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है जो पूर्ण $\boldsymbol{R}^2$ पर परिभाषित है।

ii) मान लीजिए, कि S $\boldsymbol{R}^3$ में एक विवृत गोला है जिसका केन्द्र (0,0,0) और त्रिज्या 1 है। तब, $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ द्वारा परिभाषित फलन f तीन चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है, जिसका प्रांत S है।

iii) मान लीजिए कि p_1, p_2 और p_3

$p_1(x, y, z) = x$

$p_2(x, y, z) = y$

$p_3(x, y, z) = z$

द्वारा परिभाषित तीन चरों वाले तीन फलन है। फलन p_1, p_2 और p_3 संपूर्ण $\boldsymbol{R}^3$ पर परिभाषित वास्तविक मान फलन हैं। ये प्रक्षेण प्रतिचित्र (projection maps) कहलाते हैं।

iv) मान लीजिए कि $D = [-1, 1] \times [-1, 1[$ है। $(x, y) \in D$ के लिए, $f(x, y) = \sin^{-1} x \cos^{-1} y$ को परिभाषित कीजिए। तब $f(x, y)$ दो चरों वाला, D पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है।

इनके अतिरिक्त, आपके सम्मुख विभिन्न क्षेत्रों में दैनिक जीवन से संबांधित समस्याओं के अध्ययन में, स्वाभाविक रूप से विभिन्न चरों वाले फलन आपके सामने आएँगे। कुछ उदाहरण आगे दिए जा रहे हैं।

1) एक विशेष स्थान पर किसी दिए हुए समय पर पृथ्वी की पृष्ठ पर स्थित एक बिंदु का तापमान T मुख्यतः देशांतर रेखांश और अक्षांश (latitude) y पर निर्भर करता है। कुछ अध्ययनों में इसे $T(x, y) = a x^2 y + b y$ द्वारा निरूपित किया गया है, जहां a और b अचर हैं। यहां, T दो चरों वाला एक वास्तविक–मान फलन है।

2) किसी देश की अर्थव्यवस्था की वृद्धि के अध्ययन में, यह प्रेक्षित किया गया कि उत्पान P संबद्ध श्रम L की मात्रा तथा निवेशित पूंजी C की मात्रा द्वारा निर्धारित किया जाता है। इस अध्ययन में प्रयोग किया गया सूत्र निम्नलिखित था :

$$P(L, K) = b L^{\alpha} K^{1-\alpha}$$

जहां b और α अचर है। तब, P दो चरों L और K वाला एक वास्तविक मान फलन है। फलन p **को कोब–डगलस (Cobb-Douglas) उत्पादन फलन** कहलाता है। यह एक महत्पूर्ण फलन है, जो अनेक व्यवस्थाओं में, व्यक्तिगत फर्मो से वैश्विक आर्थिक प्रश्नों तक में, वृहत रूप से उपयोग किया जाता है।

ऊपर वर्णित उदाहरणों से यह सुझाव मिलता है कि कुछ स्थितियों में, हम दो या तीन चरों वाले फलनों को स्पष्ट रूप से बीजय व्यंजकों (या सूत्रों) द्वारा निरूपित कर सकते हैं। कुछ अन्य स्थितियों में, एक चर z अस्पष्ट रूप से $F(x, y, z) = 0$ के रूप की एक समीकरण के द्वारा फलन $z = f(x, y)$ के रूप में दिया जा सकता है। इसका अर्थ है कि f के प्रांत में सभी (x,y) के लिए $F(x, y, f(x, y) = 0)$ है। तब, F एक **अस्पष्ट (implicit) फलन** कहलाता है।

> **नोट:** हम प्राय : जातीय बिंदु (generic point) (x, y, z) पर एक तीन चरों वाले फलन f द्वारा ग्रहण किए जाने वाले मान को स्पष्ट बनाने के लिए, $\boldsymbol{w = f(x, y, z)}$ लिखते हैं तथा जातीय बिंदु (x,y) पर एक दो चरों वाले फलन f द्वारा ग्रहण किए जाने वाले मान को स्पष्ट करने के लिए $z = f(x, y)$ लिखते हैं।

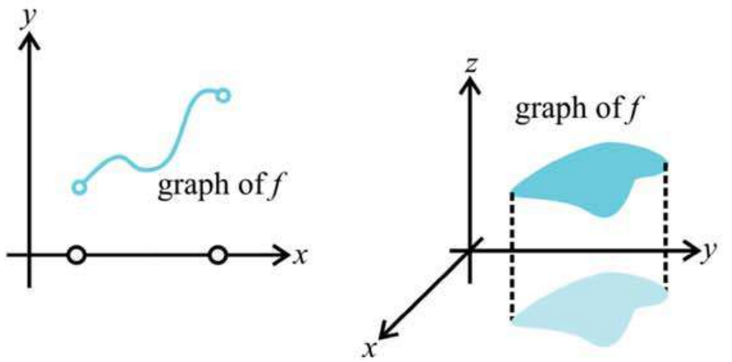
आप एक चर वाले फलन की स्थिति से जानते हैं कि फलन f के व्यवहार के चित्रीकरण की एक अन्य विधि उसके आलेख पर विचार करना है। एक दो या तीन चरों वाले फलन के आलेख का क्या अर्थ है? अब हम आपका परिचय इस आलेख की धारणा तथा अन्य संबंधित धारणाओं जैसे कि स्तर वक्रों (level curves) और स्तर पृष्ठों (level surfaces) से करवाएंगे।

1.5.1 फलन के स्तर समुच्चय और आलेख

इस उपअनुच्छेद में, हम दो चरों वाले फलन के आलेख की चर्चा करेंगे तथा आपको इससे संबंधित स्तर वक्रों (level curves) की धारणा से अवगत कराएंगे।

एक चर की स्थिति में, आप जानते हैं कि एक फलन $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ का आलेख $\boldsymbol{R}^2$ का एक उपसमुच्चय होता है, जिसमें $x \in \boldsymbol{R}$ के लिए समतल में सभी बिंदु $(x, f(x))$ सम्मिलित होते हैं। यह उपसमुच्चय प्रायः $\boldsymbol{R}^2$ में एक वक्र के रूप में माना जाता है जैसा कि नीचे चित्र 23 (क) में दर्शाया गया है। हम इसे $y = f(x)$ से निरूपित करते हैं।

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि एक दो चरों वाले फलन का आलेख क्या होगा? आपने शायद यह अनुमान लगा लिया होगा कि यह $\boldsymbol{R}^3$ में एक पृष्ठ है, जैसा कि चित्र 23 (ख) में दर्शाया गया है।



(क) एक चर वाले फलन का आलेख (ख) दो चरों वाले फलन का आलेख।

चित्र 23

अब, हम दो चरों वाले एक फलन के आलेख को परिभाषित करते हैं।

परिभाषा 12: मान लीजिए f, दो चरों वाला फलन है जिसका प्रांत $D \subseteq \mathbf{R}^3$ है, तो f का आलेख जिसे $G(f)$ से व्यक्त किया जाता है, $\mathbf{R}^3$ में सभी बिंन्दुओं (x, y, z) का समुच्चय है ताकि $z = f(x, y)$, होता है अर्थात्

$G(f) = \{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$.

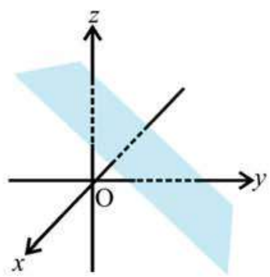
आइए अब कुछ सरल फलनों के आलेख खींचने का प्रयास करें।

उदाहरण 17: फलन $f(x, y) = x - y + 2$ का आलेख खींचिए।

हल: परिभाषा अनुसार f का आलेख समीकरण

$$z = x - y + 2$$

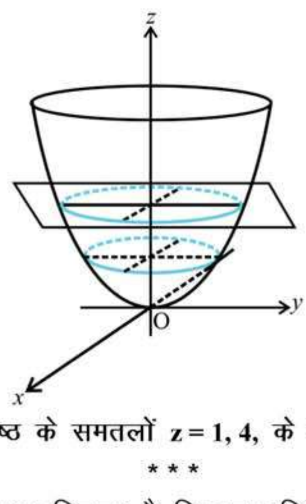
द्वारा दिया जाता है। आप जानते हैं कि यह समीकरण $\mathbf{R}^3$ में एक फलन निरूपित करता है। आलेख नीचे दिए गए चित्र 24 में दर्शाया गया है।



चित्र 24: $f(x, y) = x - y + 2$ **का आलेख**

उदाहरण 18: फलन $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ का आलेख खींचिए।

हल: मान लीजिए कि हम $z = c$ (एक अचर) रखते (या स्थापित करते) है। तब, हमें एक वृत्त $x^2 + y^2 = c$ प्राप्त होता है। c के विभिन्न मान, मान लीजिए $1, 4, 9...$ लेने पर, हमें क्रमशः त्रिज्याओं $1, 2, 3$ .... वाले वृत्त प्राप्त होते हैं। ये वृत्त वास्तव में पृष्ठ $z = f(x, y)$ के समतलों $z = 1^2, 2^2, 3^2$..... के साथ प्रतिच्छेद (चित्र 25 देखिए)।



चित्र 25: पृष्ठ के समतलों z = 1, 4, के साथ प्रतिच्छेद

* * *

उपरोक्त उदाहरण से यह सुझाव मिलता है कि कुछ स्थितियों में, यदि हम समतलों $z = k$ के साथ पृष्ठ के समतलीय प्रतिच्छेदन लें, तो उस पृष्ठ के आकर का चित्रीकरण कर सकते हैं। क्या आप इस बात से सहमत है?

निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E23) निम्नलिखित फलनों के आलेख खींचिए :

i) $f(x,y)=3x$

ii) $f(x,y)=x^2-y^2$

उपरोक्त (i) और (ii) को हल करते समय, आपने यह प्रेक्षित किया होगा कि (i) की स्थिति में, $z=k$ के साथ समतलीय प्रतिच्छेदन रेखाएं है तथा (ii) के लिए, समतलीय प्रतिच्छेदन अतिपरवलय है। याद कीजिए कि आप तीन शांकवों (conics), अर्थात् परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय से कलन पाठ्यक्रम या इससे भी पहले $10+2$ स्तर से ही परिचित हैं।

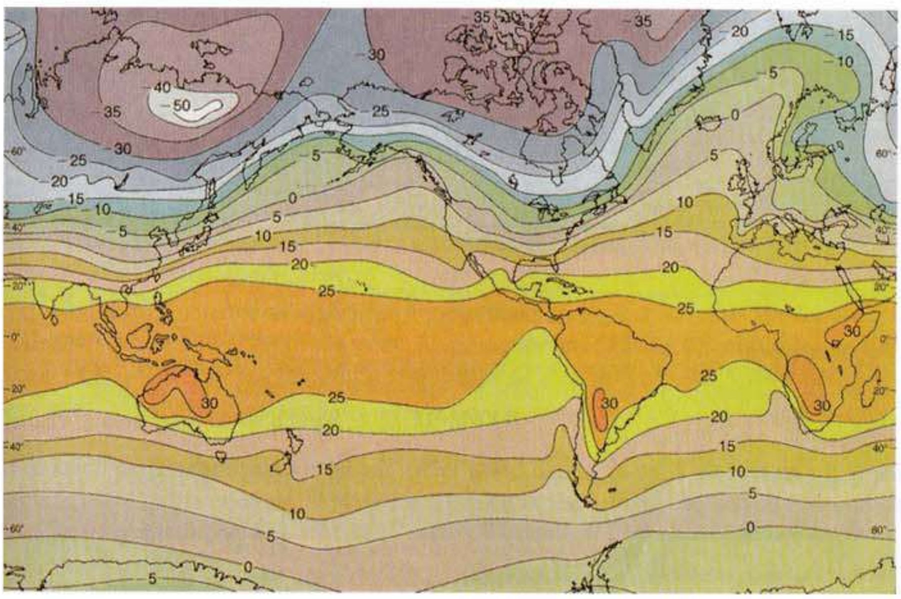
ऊपर हमने जिन समतलीय प्रतिच्छेदनों की चर्चा की है वह महत्वपूर्ण है तथा इन्हें एक विशिष्ट नाम दिया गया है। ये स्तर वक्र (level curves) कहलाता है।

परिभाषा (स्तर वक्र) 13: मान लीजिए कि f दो चरों वाला एक फलन है तथा c एक अचर है। तब समतल में एक बिन्दुओं (x,y) का समुच्चय कोजिससे की फलन $f(x,y)=c$ हो, f का एक स्तर वक्र कहलाती है।

यह आवश्यक रूप से समतल $z=c$ के साथ पृष्ठ $z=f(x,y)$ के प्रतिच्छेदन का $xy-$समतल पर प्रक्षेप है।

उपरोक्त चर्चा के अनुसार $f(x,y)=x^2+y^2$ के स्तर वक्र वृत्त हैं तथा $f(x,y)=x^2-y^2$ के स्तर वक्र अतिपरवलय हैं।

इस प्रकार, दो चरों वाले एक फलन का आलेख स्तर वक्रों $f(x,y)=c$ की (एक दूसरे के उपर) डेरी लगाकर प्राप्त किया जा सकता है। एतर वक्रों का एक सामान्य उदाहरण पर्वतीय क्षेत्रों में स्थान संबंधी प्रतिचित्रों में मिलता है। निम्नलिखित चित्र (चित्र 26) विश्व का मौसम प्रतिचित्र दर्शाती है, जो औसत जनवरी तापमान सूचित करता है। स्तर वक्र वे वक्र है जो रंगी बैंडों को पृथक करती है।



चित्र 26

अभी तक हमने यह प्रेक्षित किया है कि यदि हम स्तर वक्र खींचें, तो हम दो चरों वाले फलनों के आलेखों का चित्रीकरण कर सकते हैं।

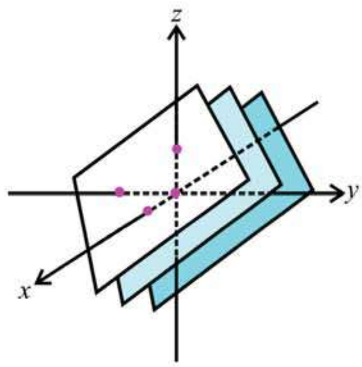
अब, हम तीन चरों वाले फलनों के आलेखों पर विचार करेंगे। आलेख की परिभाषा के अनुसार, यह समष्टि $\boldsymbol{R}^4$ में एक पृष्ठ होगा, जिसका चित्रीयकरण नहीं किया जा सकता है। परंतु यदि हम स्तर वक्र के अनुरूप पर विचार करें और $\boldsymbol{R}^3$ में इसे स्तर पृष्ठ से नामांकित करें, तो यह आलेख के चित्रीकरण शायद हमारी सहायता कर सकता है। आइए देखें।

यहां एक तीन चरों वाला फलन $f(x,y,z) = x - y + z + 2$ है। अब, हमें $f(x,y,z) = c$ अर्थात्

$$x - y + z + 2 = c$$

$$\text{अर्थात्} \quad x - y + z = c - 2$$

यदि हम $c = 1, 2, 3, ...$ रखें, तो चित्र 27 में दर्शाए अनुसार समतल प्राप्त होते हैं।



चित्र 27

अतः, हम इस फलन के आलेख का (four dimentional) समष्टि में इन समतलों की एक के ऊपर एक ढेरी रखने से प्राप्त एक पृष्ठ के रूप में चित्रीकरण कर सकते हैं।

ये समतल फलन $f(x,y,z) = x - y + z + 2$ के स्तर पृष्ठों के रूप में जाने जाते हैं।

हम इसे औपचारिक रूप से परिभाषित करते हैं।

परिभाषा 14: मान लीजिए कि f तीन चरों वाला एक फलन है। $\boldsymbol{R}^3$ में सभी बिंदुओं (x,y,z) का समुच्चय ताकि $f(x,y,z) = c$ हो, (c के साथ) f की स्तर पृष्ठ कहलाती है।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 19: मानों $c = 1, 8, 17$ इत्यादि के लिए $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8$ का स्तर पृष्ठ की जांच कीजिए और किसी एक का स्कैच (sketch) खींचिए।

हल : $c = 1$ कीजिए स्तर पृष्ठ निम्नलिखित समीकरण द्वारा दी जाती है :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 1$$

$$\text{अर्थात्} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

एक त्रिज्या 3 वाला एक गोला है।

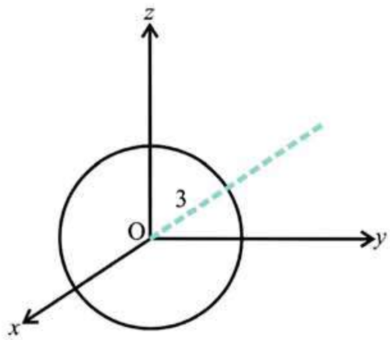
इसी प्रकार, $c = 8$ के लिए, हमें पृष्ठ निम्नलिखित रूप में प्राप्त होती है :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 8$$

अर्थात् $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

यह भी एक गोला है, त्रिज्या 4 है।

$c = 17$ के लिए, हमें गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ प्राप्त होता है।



चित्र 28

* * *

यहां, कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

E24) साथ में दिए c के मानों के लिए, निम्नलिखित फलनों के लिए, स्तर वक्रों के स्कैच खींचिए :

i) $f(x, y) = x^2 + 4y^2, c = 0, 1, 4, 9$

ii) $f(x, y) = x / y, c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

E25) दिए हुए फलनों के स्तर पृष्ठ ज्ञात कीजिए और उनके स्कैच खींचिए :

i) $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$

ii) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

इसके साथ ही, हम इस अनुच्छेद तथा इस इकाई की समाप्ति पर पहुंच गए हैं।

1.6 सारांश

इस इकाई में हमने

1. 2D समष्टि के बिन्दुओं और $\boldsymbol{R}^2$ के अवयवों के बीच तथा 3D-समष्टि के बिन्दुओं और $\boldsymbol{R}^3$ के अवयवों के बीच का एकैकी से संगति का विवरण दिया है।
2. किसी रेखा का दिक्कोज्याओं और दिक्-अनुपातों को परिभाषित किया।
3. रेखा के समीकरण के विकृत रूप, एक-प्राचलिक रूप और द्विबिन्दु को प्रस्तुत किया।

4. बेलनाकार और गोलाकार निर्देशांक पद्धति का विवरण दिए है और गोलाकार, बेलनाकार और कार्तीय पद्धति के बीच परिवर्तन को भी चर्चा किये हैं।

5. समुच्चय $\boldsymbol{R}$ का कार्तीय गुणनफल परिभाषित किया है और $\boldsymbol{R}^2$ और $\boldsymbol{R}^3$ के बीजीय गुणों की चर्चा की है।

6. 2 अथवा 3 चारों वाले वास्तविक मान फलनों को परिभाषित किए हैं अर्थात् $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ और $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ पर परिभाषित फलन है।

7. $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ और $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ पर फलनों का योगफल, गुणनफल, भागफल और संयुक्त फलन परिभाषित किए हैं।

8. दो और तीन चरों वाले फलनों के लिए क्रमशः स्तर वक्र और स्तर पृष्ठ परिभाषित किए हैं।

1.7 संकेत/हल

E1) हम सबसे पहले बिन्दु $(1,1,0)$ को लेते हैं। उसको निर्धारित करने के लिए हम पहले बिन्दु $A_1(1,0,0)$ को अंकित करते हैं और फिर को $A_2(1,1,0)$ अंकित करते हैं। इसलिए दिए गए बिन्दु के z-निर्देशांक 0 है, बिन्दु x, y-समतल में स्थित होते हैं। अतः A_2 दिए गए बिन्दु के स्थान है।

अगले हम बिन्दु $(-4,-2,-1)$ लेते हैं। उसके लिए हम x, y और z-अक्ष से क्रमशः दूरी माप करके अंकित करते हैं। हम बिन्दुओं $A_1(-4,0,0)$, $A_2(-4,-2,0)$ फिर $A_3(-4,-2,-1)$, को क्रमशः अंकित करते हैं।

तब A_3 बिन्दु का निर्दिष्ट स्थान है।

E2) A का निर्देशांक $(-5,0,0)$ है, B का $(-5,3,0)$ और $(-5,3,6)$ है।

E3) y-अक्ष से सबसे नजदीक बिन्दु P है P और yz-समतल पर स्थित बिन्दु Q है।

E4) क्योंकि $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ दिक्कोज्याएं है, तब

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = (1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)+(1-\cos^2\gamma)$$

$$= 3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

$$= 3-1 = 2$$

E5) दिक्कोज्याएं $\cos\alpha = \frac{x}{OP}, \cos\beta = \frac{y}{OP}$ और $\cos\gamma = \frac{z}{OP}$ द्वारा दी जाती है।

यहाँ $P(x,y,z) = (2,2,-1)$. दूरी सूत्र के द्वारा

$$OP = \sqrt{2^2+2^2+1} = \sqrt{9} = 3\cdot$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{-1}{3}.$$

E6) i) $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

यहां $(x_1, y_1, z_1)=(-1,0,1)$

$(x_2, y_2, z_2)=(1,2,3)$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$$

ii) रेखा की समीकरण है :

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}/5}=\frac{y+1}{-\sqrt{6}/5}=\frac{z-4}{4/5}$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}}=\frac{y+1}{-\sqrt{6}}=\frac{z-4}{4}.$$

E7) प्रथम तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले समतल की समीकरण है :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 5x-7y+11z+4=0$$

ऊपर वाले समीकरण की बायीं तरफ वाले व्यंजन में $x=-4, y=4$ और $z=4$ रखने पर हमें 0 मिलता है। इसलिए $(-4,4,4)$ इस समीकरण को संतुष्ट करता है,

E8) बिंदुओं $P(1,3,2), Q(3,-1,6)$ और $R(5,2,0)$ से होकर जाने वाले समतल समीकरण है :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x(3\times 6-2\times -3+1\times -12)-y(1\times -2-2\times -5+1\times -24)$$

$$+z(1\times 4-3\times -2\times -2+1\times -24)=0$$

$$\Rightarrow x(18+6-12)-y(-2+10-24)+z(4+6-24)=0$$

$$\Rightarrow 12x+16y-14z=0$$

$\Rightarrow 6x+8y-7z=0$ है। इससे समतल की

E9) बेलनाकार निर्देशांक निम्नलिखित द्वारा दिए जाते हैं :

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{4\pi}{3}+2n\pi$$

$$z=2$$

अतः, बेलनाकार निर्देशांक का एक समुच्चय $\left(2,\frac{4\pi}{3},2\right)$.

E10) i) कार्तीय निर्देशांक निम्नलिखित द्वारा दिए जाते हैं:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z$$

यहां $r=3,\theta=\frac{\pi}{2}$ और $z=1$ है।

अतः, वांछित निर्देशांक $(0,3,1)$.

ii) **संकेत** : इसी तरह यह भी दिखाया जा सकता है कि $x=z, y=\frac{-4\sqrt{3}}{2}$ और $z=5$. कार्तीय निर्देशांकों में वांछित निर्देशांक $(2,2\sqrt{3},5)$.

E11) i) गोलाकार निर्देशांक निम्नलिखित द्वारा दिए जाते हैं :
$x=\rho\sin\phi\cos\theta, y=\rho\sin\phi\sin\theta, z=\rho\cos\phi$ यहाँ $\rho=1,\phi=0,\theta=0$.
इन समीकरणों में इन्हीं मानों को स्थापित करने पर हमें मिलता है
$x=0, y=0, z=1$.

वांछित निर्देशांक $(0,0,1)$ हैं।

ii) कार्तीय और गोलाकार निर्देशांकों के बीच संबंध से, हम प्राप्त करते है :

$$x=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2},\ y=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}, z=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

निर्देशांक $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$ है।

E12) कार्तीय और गोलाकार निर्देशांकों के बीच संबंध से, हम प्राप्त करते हैं :
$x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi$. गोलाकार निर्देशांकों में इस पृष्ठ की समीकरण $\rho = \sin\theta\sin\phi$. तब हमें मिलता है।

$$y = \rho\sin\phi\sin\theta = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + z^2 = 0.$$

समीकरण एक गोला निरूपित करती है, जिसका केन्द्र $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ है तथा त्रिज्या $\frac{1}{2}$ है।

E13) i) $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0)$ और इसलिए $(1,1,0) + (0,0,0) = (1,1,1)$.

ii) $(0.5,1) + (-3,0) = (-2.5,1)$

$(1,0.5) + (0,-3) = (1,-2.5)$.

यह निर्देशांक बराबर नहीं है।

E14) $\frac{1}{2}$ योज्य प्रतिलोम और $\left(-\frac{1}{2}\right)$ और $\frac{1}{3}$ का योज्य प्रतिलोम $\left(-\frac{1}{3}\right)$ है।

प्रतिलोम अत $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ का योज्य प्रतिलोम क्योंकि

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right) = (0,0,0).$$

E15) $(-5x, 4y, -z)$ का योज्य प्रतिलोम $(5x, -4y, z)$ है।

$(5x, -4y, z) + (0,0,0) = (5x, -4y, z)$.

E16) i) $P - Q = (2,2,-1) - (5,-3,2)$

$= (-3,5,-3)$

$Q - P = (5,-3,2) - (2,2,-1)$

$= (3,-5,3)$

यह निर्देशांक बराबर नहीं है।

E17) i) $\alpha\{(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_3)\} = \alpha\{x_1 + x_2, y_1 + y_2, y_3 + z_3\}$

$$= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2), \alpha(y_3 + z_3))$$

$$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2, \alpha y_3 + \alpha z_3)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_3)$$

$$= \alpha(x_1, y_1, z_1) + \alpha(x_2, y_2, z_2)$$

ii) और (iii) इसी प्रकार किए जा सकता है।

iv) मान लीजिए $(x, y, z) \forall x \in \boldsymbol{R}^3$. $x = (1, 0, 0)$ को लीजिए।

तब $ax = 0 \Rightarrow a(1, 0, 0) = 0 = (a, 0, 0) \Rightarrow a = 0$

मान लीजिए r $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$. अतः $a(x, y, z) = (ax, ay, az) = 0$ क्योंकि $a = 0$.

E18) यह दिखाने के लिए P, Q और R एक समबाहु त्रिभुत के शीर्ष है, हम दिखाना होगा कि

$$\|P - Q\| = \|Q - R\| = \|R - P\|.$$

दूरी सूत्र के अनुसार

$$\|P - Q\|^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$$

$$\|Q - R\|^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

$$\|R - P\|^2 = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$$

इसलिए यह त्रिभुत समबाहु त्रिभुज है।

E19) मान लीजिएए कि $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ और $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ है।

$$\|x + y\|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i + y_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{i=1}^{3} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{i=1}^{3} y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} y_i^2}$$

(इसके फलस्वरूप)

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

अर्थात् $\|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$

या $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

E20) i) मान लीजिए कि $x = (x_1, x_2, x_3)$ और $y = (y_1, y_2, y_3)$ है।

$$\|x-y\|^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_i - y_i) = 0 \ \forall\ i$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i \ \ \forall\ i$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

ii) $$\|x-y\|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2$$

$$= \|y-x\|^2$$

or $\|x-y\| = \|y-x\|$.

E21) यदि $(x_1, x_2) \in S$, तब हम जानते हैं कि $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r}$

$$|x_1 - a_1| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2} < r$$

$$|x_2 - a_2| = \sqrt{(x_2 - a_2)^2} < r$$

अर्थात् , $(x_1, x_2) \in A_1$. इसलिए $S \subset A_1$

अब यदि $(x_1, x_2) \in A_2$, तब $|x_1 - a_1| < \frac{r}{\sqrt{2}}, |x_2 - a_2| < \frac{r}{\sqrt{2}}$ और इसलिए

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} = r^2$$

अर्थात् , $(x, y) \in S$. अतः $A_2 \subset S$

E22) $S = \{x_1, x_2, x_3) \in R^3 \| (x - a_1, y - a_2, z - a_3) | < r\}$

और, $(x_1, x_2, x_3) \in S \Rightarrow \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)} < r$

$$\Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2$$

$\Rightarrow (x_1 - a_1)^2 < r^2, (x_2 - y_2)^2 < r^2$ and $(x_3 - a_3)^2 < r^2$

$$\Rightarrow \|x_1 - a_1\| < r, \|x_2 - y_2\| < r, \|x_3 - a_3\| < r$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in C_1$$

$$\Rightarrow S \subset C_1$$

लेकिन, $(x_1, x_2, x_3) \in C_2 \Rightarrow \|x_1 - a_1\| < \frac{r}{\sqrt{3}}, \|x_2 - a_2\| < \frac{r}{\sqrt{3}}, \|x_3 - a_3\| < \frac{r}{\sqrt{3}}$

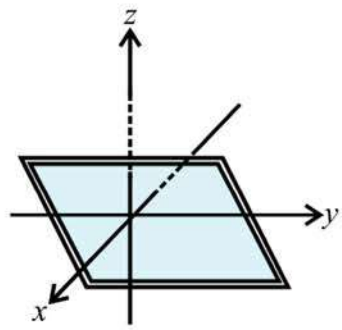
$$\Rightarrow \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} < \sqrt{\frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{3}} < r$$

$$\Rightarrow |(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3| < r$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in S$$

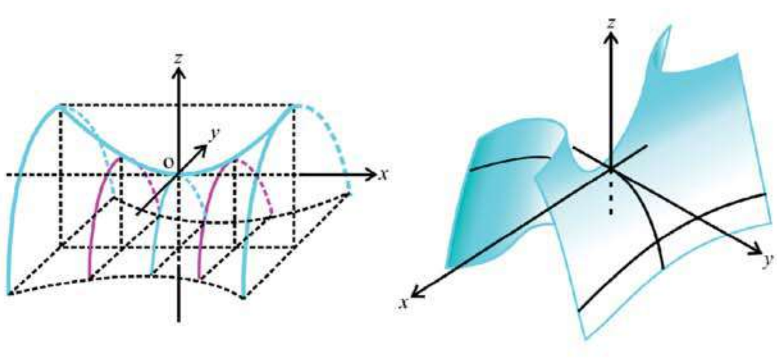
$$\Rightarrow C_2 \subset S.$$

E23) i) समीकरण चित्र 29 में दिए गए समतल को दर्शाता है।



चित्र 29

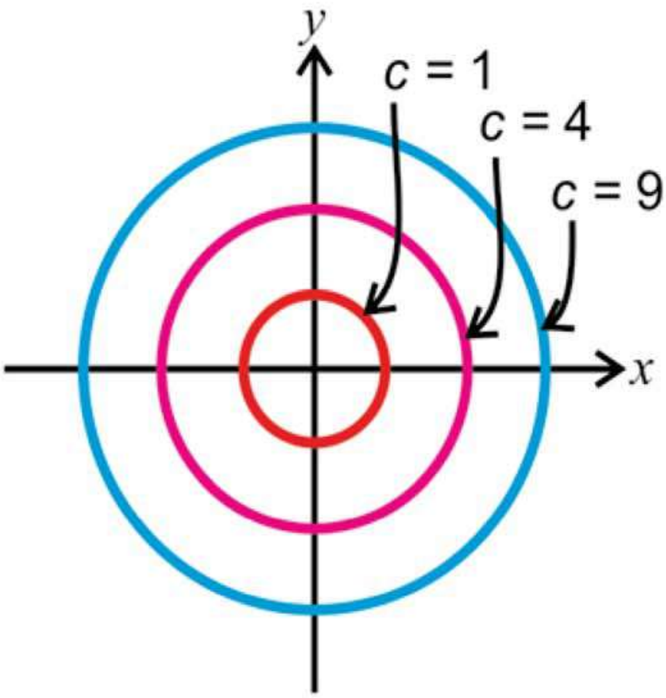
ii) समीकरण $z = x^2 - y^2$ है। $x = k$ रखने पर हमें चित्र 30 (क) में दिए गए परवलय प्राप्त होते हैं। चित्र 30(ख) में दिया गया आलेख को अतिपरवलयज कहलाता है।



(क) (ख)

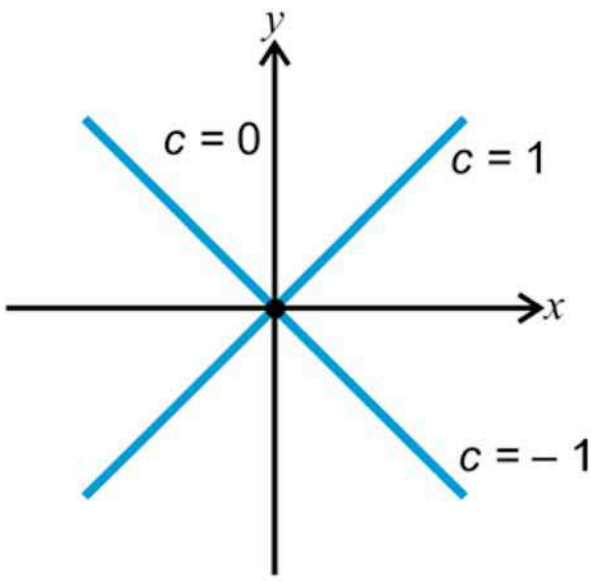
चित्र 30

E24) i) स्तर वक्र नीचे दिया गया चित्र में दर्शाता है।



चित्र 31

E24) ii) स्तर वक्र नीचे दिया गया चित्र में दर्शाता है।



चित्र 32

E25) i) जब $c<0$ होता है तब स्तर पृष्ठ त्रिज्या $\sqrt{-c}$ वाला गोला है और जब $c=0$ होता है तब मूल बिंदू है। जब $c>0$ होता है तब स्तर पृष्ठ का अस्तित्व नहीं होता है।

ii) जब $c>0$ होता है तब स्तर पृष्ठ त्रिज्या $\sqrt{c}$ वाला बेलन है और जब $c=0$ होता है तब मूल बिंदू है। जब $c<0$ होता है तब स्तर पृष्ठ का अस्तित्व नहीं होता है।

इकाई 2

सीमा और सांतत्य

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, आपने अनेक चरों (अर्थात् 2 या 3 चरों) वाले वास्तविक मान फलनों के कुछ उदाहरण देखे थे। इस इकाई में, हम सीमा (limit) और सांतत्य (continuity) की धारणाओं को एक चर वाली स्थिति में से n चरों वाली स्थिति के लिए विस्तार करेंगे, जहाँ $n = 2,3$ हैं। हम इन संकल्पनाओं को 2 और 3 चरों वाले वास्तविक-मान फलनों के लिए परिभाषित करेंगे। आप देखेंगे कि 2 और 3 चरों वाले फलनों के लिए, सीमा और सांतत्य की परिभाषाएँ एक अनेक चर वाले फलनों की परिभाषाएँ जैसे ही है। इस इकाई में, हम एक अन्य प्रकार की सीमा जो, ''पुनरावृत्त सीमा'' "repeated limit" कहलाती है, पर भी 2 चरों वाले फलनों के लिए विचार करेंगे।

जहाँ भी इस खंड में हम पद ''अनेक चरों'' का प्रयोग करेंगे उसका अर्थ "2 या 3 चरों" पर विचार करना होगा।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप:

- 2 या 3 चरों वाले एक वास्तविक-मान फलन की सीमा को परिभाषित कर पाएँगे तथा उसका मान निकाल पाएँगे;
- सीमाओं के बीजगणित के नियमों के कथन दे पाएँगे तथा उनका प्रयोग कर पाएँगे;
- यह जाँच कर पाएँगे कि अनेक चरों वाला एक फलन एक दिए हुए बिंदु अथवा बिंदुओं के एक समुच्चय पर संतत है या नहीं; और
- दो चरों वाले फलनों के लिए पुनरावृत्त सीमाओं के मान निकाल पाएँगे।

2.2 वास्तविक-मान फलनों की सीमाएँ

कलन पाठ्यक्रम की इकाई 7, अनुच्छेद 7.3 से एक चर वाले वास्तविक-मान फलनों की सीमाओं की संकल्पना से आप पहले से ही परिचित हैं। अब, हम अनेक चरों, अर्थात् 2 या 3 चरों, वाले फलनों के लिए, इस संकल्पना का अध्ययन करेंगे।

आइए किसी एक चर वाले फलन f की सीमा L की परिभाषा का स्मरण करें, जब x एक वास्तविक संख्या a की ओर प्रवृत्त होता है:

परिभाषा 1: मान लीजिए कि बिंदु a के इर्द-गिर्द (around), संभवतः बिंदु a के अतिरिक्त, एक विवृत (open) अंतराल $]a-h, a+h]$ पर परिभाषित एक चर x वाला एक वास्तविक-मान फलन f है, जहाँ $h>0$ है। हम कहते हैं कि जब a की ओर x प्रवृत्त होता है, तब $f(x)$ की सीमा एक वास्तविक संख्या L के बराबर होती है, यदि $\varepsilon>0$ दिया रहने पर, एक धनात्मक वास्तविक संख्या δ का अस्तित्व (जो ε पर निर्भर करता है), $\delta<h$ ताकि $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ है।

परिभाषा 1 से यह स्पष्ट है कि एक फलन की सीमा हमें एक आभास कराती है कि $f(x)$ का फलनीय मान एक विशिष्ट मान a की ओर x के अग्रसर (प्रवृत्त) होने पर किस प्रकार व्यवहार करता हैं। हम इसी विचार को 2 और 3 चरों वाले फलनों के लिए विस्तृत करेंगे।

प्रारंभ करने के लिए, आइए दो चरों x और y वाले नीचे दिए दो फलनों f और g विचार करें तथा (x, y) के (0,0) की ओर अग्रसर होने पर, अर्थात् जब एक साथ $x \to 0$ और $y \to 0$ होते हैं, $f(x, y)$ और $g(x, y)$ के व्यवहारों की तुलना करें।

$$f(x,y)=\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}((x,y)\neq(0,0))$$

$$g(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}(x,y)\neq(0,0)$$

सारणी 1 : $f(x,y)$ के मान

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
-0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
-0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.999	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

सारणी 2 : $g(x, y)$ के मान

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

सारणियाँ 1 और 2, (x, y) के (0,0) की ओर अग्रसर होने पर $f(x, y)$ और $g(x, y)$ के मान दर्शाती हैं। सारणी 1 से, हम यह अनुमान लगाते हैं कि जब (0,0) की ओर (x, y) अग्रसर होता है, तब 1 की ओर $f(x, y)$ अग्रसर होता है; जबकि $g(x, y)$ के मान किसी भी संख्या की ओर अग्रसर नहीं हो रहे हैं। इन संख्यात्मक प्रमाणों के आधार पर, हम लिखते हैं कि

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \text{ और } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ का कोई अस्तित्व नहीं है।}$$

व्यापक रूप में, यदि 2 और 3 चरों वाला कोई फलन f है, तो यह इंगित करने के लिए कि L की ओर $f(x, y)$ अग्रसर होता है, जब (a, b) की ओर (x, y) अग्रसर होता है अथवा यह कि $f(x, y)$ की सीमा L है, जब (a, b) की ओर (x, y) प्रवृत्त होता है, निम्नलिखित संकेतन का प्रयोग करेंगे:

$$f(x, y) \to L \text{ जब } (x, y) \to (a, b) \text{ अथवा } \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \tag{1}$$

उपरोक्त संकेतन का यह भी अर्थ है कि बिंदु (x, y) को पर्याप्त रूप से बिंदु (a, b) के निकट लेने पर, हम $f(x, y)$ के मानों का जितना चाहें उतना L के निकट बना सकते हैं। अर्थात् (x, y) और (a, b) के बीच की दूरी को पर्याप्त रूप से छोटा बनाकर $f(x, y)$ और L के बीच की दूरी को पर्याप्त रूप से छोटा बनाया जा सकता है। यहाँ, स्मरण कीजिए कि दो बिंदुओं $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ और $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ के बीच की दूरी को $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, जिसे $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

यह $\boldsymbol{R}^2$ में युक्लिडियन दूरी है। इसी प्रकार, हम $\boldsymbol{R}^3$ में भी युक्लिडियन दूरी को परिभाषित कर सकते हैं।

दो बिंदुओं $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ और $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ के बीच की दूरी को $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

ध्यान दीजिए कि '$\|.\|$' को $\boldsymbol{R}^n$ में दूरी व्यक्त करने के लिए प्रयोग किया जाता है जब $n = 2, 3$ तथा '$|.|$' को $\boldsymbol{R}$ में दूरी व्यक्त करने के लिए प्रयोग किया जाता है।

दूरी के इस संकेतन के साथ, हम n=2 या 3 के लिए $\boldsymbol{R}^n$ के उपसमुच्चयों को $B(a, h) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \|\boldsymbol{x} - a\| < h\}, n = 2$ या 3 के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। जब n=2 होता है, तब समुच्चय $B(\boldsymbol{a}, h)$ में समतल के वे सभी बिंदु सम्मिलित हैं जिनकी $\boldsymbol{a}$ से दूरी h से कम है। दूसरे शब्दों में, यह त्रिज्या h और केन्द्र a वाले वृत्त के अंदर स्थित बिंदुओं का समुच्चय है।

जब $n=3$ होता है, तब समुच्चय में त्रिज्या h और केन्द्र a वाले गोले के अंदर स्थित समष्टि के सभी बिंदु अंतर्विष्ट हैं।

कृपया ध्यान दीजिए कि समुच्चय $B(\boldsymbol{a},h)$ बिंदु a का एक **प्रतिवेश** (neighbourhood) कहलाता है। यह a का h-प्रतिवेश भी कहलाता है।

ध्यान दीजिए कि $\boldsymbol{R}^n$ $n=2,3$ के अवयवों को व्यक्त करने के लिए गहरे, अक्षरों का प्रयोग किया गया है।

यहाँ हम एक नोट दे रहे हैं।

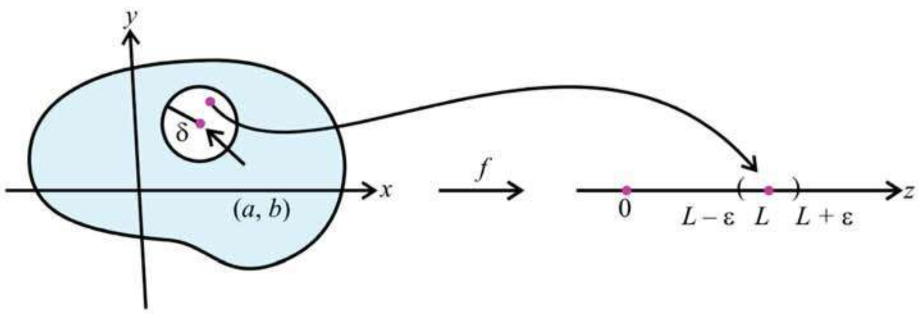
नोट : यहाँ से आगे, हम प्रत्येक बार प्रांत निर्दिष्ट नहीं करेंगे। यह समझा जाएगा कि यह ऐसा अधिकतम समुच्चय है, जिसके लिए f के व्यंजक का कोई सार्थक अर्थ है।

अब, हम सीमा की औपचारिक परिभाषा देते हैं।

परिभाषा 2 : मान लीजिए कि $\boldsymbol{R}^n\,(n=2$ या $3)$ में, एक समुच्चय $B(\boldsymbol{a},h)$ में परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन f है। हम कहते हैं कि जब a की ओर x प्रवृत्त होता है, तब $f(x)$ की सीमा एक वास्तविक संख्या L के बराबर होती है, यदि $\varepsilon>0$ दिया रहने पर, एक धनात्मक वास्तविक संख्या δ का अस्तित्व है (जो ε पर निर्भर करता है) $\delta<h$ ताकि

$$0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x})-L|<\varepsilon \text{ है।} \tag{2}$$

ध्यान दीजिए कि परिभाषा में $|f(x)-L|$ $\boldsymbol{R}_2$ में संख्याओं $f(x)$ और L के बीच की दूरी है तथा $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}$ $\mathbf{R}^2$ में संख्याओं $\boldsymbol{x}$ और $\boldsymbol{a}$ के बीच की दूरी है, जहाँ $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ और $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ है। नीचे दिया चित्र 1 इस परिभाषा को स्पष्ट करता है। यह चित्र दर्शाती है कि यदि L के इर्दगिर्द कोई छोटा अंतराल $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ दिया है, तो हम केन्द्र a और त्रिज्या $\delta>0$ वाली एक चक्रिका (disc) D_δ ज्ञात कर सकते हैं ताकि D_δ में f सभी बिंदुओं (संभवतः $\boldsymbol{a}$ के अतिरिक्त) को अंतराल $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ में प्रतिचित्रित कर देता है।



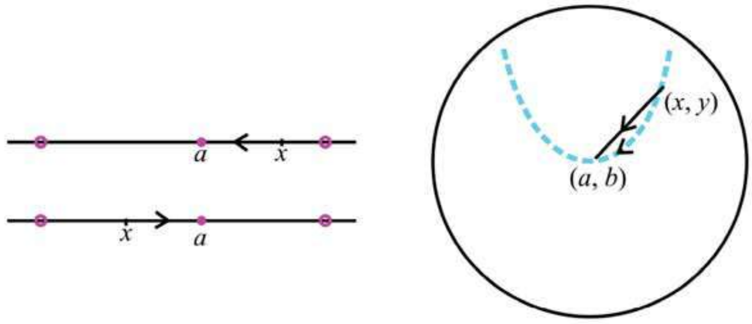
(क) $\boldsymbol{R}^2$ में (a, b) के पर्याप्त रूप से निकट के मानों (x, y) को दर्शाती है। (ख) $\boldsymbol{R}$ में L के निकट के मानों मानों $f(x, y)$ को दर्शाती है।

चित्र 1

आपने एक ओर ध्यान दिया होगा कि यह परिभाषा लगभग वैसी है जैसी कि एक अकेले चर वाले फलन की सीमा की परिभाषा है। परंतु इनमें कुछ अंतर है। हम स्पष्ट करते हैं कि एक चर वाले फलन की स्थिति में, जब a की ओर x अग्रसर होता है, तब अग्रसर होने की केवल दो संभव दिशाएँ हैं बाएं से या दाएँ से, जैसा कि चित्र 2(क) दर्शाया गया है कि जिन्हें $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

कलन पाठ्यक्रम से, आप सीख चुके हैं कि यदि $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ बराबर नहीं है, तो $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ का अस्तित्व नहीं होता है।

2 या 3 चरों वाले फलनों की स्थिति में यह बात इतनी सरल नहीं है। ऐसा इस कारण है कि यहाँ (a,b) की ओर (x, y) दिशाओं की अपरिमित संख्या से अग्रसर हो सकता है। चित्र 2(ख), n=2 के लिए दो भिन्न-भिन्न पथों एक रेखाखंड और एक चाप को दर्शाती है।



(क) एक चर वाली स्थिति **(ख) दो चरों वाली स्थितिः लाल रंग से छायांकित पथ नीले रंग में छायांकित पथ**

चित्र 2

इसलिए, यदि सीमा का अस्तित्व है, तो L की ओर $f(x, y)$ को उन्हीं पथों या दिशाओं से अग्रसर होना चाहिए, जिनसे (a, b) की ओर (x, y) अग्रसर होता है। दूसरे शब्दों में, यदि किन्हीं दो भिन्न-भिन्न पथों के अनुदिश $f(x, y)$ दो भिन्न-भिन्न मानों की ओर अग्रसर होता है, तो हम कह सकते हैं कि सीमा का अस्तित्व नहीं है। यह तथ्य एक सीमा के अस्तित्व नहीं होने की जाँच के लिए बहुत उपयोगी है।

हम इसके बारे में और अधिक कुछ देर बाद स्पष्ट करेंगे।

टिप्पणी 1 : i) व्यापक रूप में, δ का मान ε के मान पर निर्भर करेगा।

ii) परिभाषा 1 में, प्रतिबंध $0 < \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \|$ का अर्थ है कि x और a के बीच की दूरी शून्य से अधिक है। अर्थात् बिंदु $\boldsymbol{x}$ वहीं नहीं है जो $\boldsymbol{a}$ है।

हम $n = 2, 3$ के लिए $\boldsymbol{R}^n$ में एक बिंदु के प्रतिवेश को पहले ही परिभाषित कर चुके हैं। यदि हम a के एक प्रतिवेश में से बिंदु a को हटा दें, तो शेष समुच्चय **$\boldsymbol{a}$ का निष्कासित प्रतिवेश (deleted neighbourhood)** कहलाता है।

सीमाओं के अभिकलन के लिए उदाहरणों की चर्चा करने से पहले, हम सीमाओं के बीजगणित के बारे में एक प्रमेय का कथन दे रहे हैं। अनेक चरों वाले फलनों की सीमाओं को परिकलित करने के लिए, यह बहुत उपयोगी रहेगी। आपको याद होगा कि आपने इसी प्रकार की प्रमेय का अध्ययन और प्रयोग एक चर वाले फलनों की सीमाओं के लिए किया था। हम इस प्रमेय की उपपत्ति यहाँ नहीं दे रहे हैं।

प्रमेय 1 (सीमाओं का बीजगणित) : मान लीजिए कि $\boldsymbol{R}^n$ में बिंदु a के एक निष्कासित प्रतिवेश में दो वास्तविक-मान फलन f और g परिभाषित है, जहाँ $n = 2$ या 3 है। यदि $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$ है $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = M$ तथा है, तो निम्नलिखित सत्य होते हैं :

i) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (\alpha f)(\boldsymbol{x}) = \alpha \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha L$ किसी भी $\alpha \in \boldsymbol{R}$ के लिए।

ii) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f \pm g)(\boldsymbol{x}) = L \pm M$

iii) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (fg)(\boldsymbol{x}) = LM$

iv) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f/g)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{L}{M}$, जबकि $M \neq 0$ है।

– ■ –

अब हम एक सरल परिणाम को सिद्ध करेंगे, जो सीमाओं के अभिकलन को सरल बना देता है। यहाँ हम $n=3$ ले रहे हैं। ऐसा ही परिणाम $n=2$ के लिए भी सत्य है।

प्रमेय 2: मान लीजिए कि $\boldsymbol{R}^n$ में बिंदु a के एक निष्कासित h-प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन f है तब, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ है, यदि और केवल यदि $\varepsilon>0$ दिया होने पर, ऐसी धनात्मक वास्तविक संख्याओं $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ का अस्तित्व है (जो ε पर निर्भर है), $\delta_i<h\ ;\ 1\le i\le 3$ ताकि जब भी $0<|x_i-a_i|<\delta_i, \forall\ i=1,2,3,$ तो $|f(\boldsymbol{x})-L|<\varepsilon$ है, जहाँ $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ और $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ है।

उपपत्ति: मान लीजिए कि $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ है, तब, $\varepsilon>0$ दिया होने पर, एक वास्तविक संख्या का $\varepsilon>0$, $\delta<h$ का अस्तित्व है, ताकि

$0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ है।

मान लीजिए कि $\delta_i=\delta/\sqrt{3}, 1\le i\le 3$ है।

अब, यदि किसी बिंदु $x=(x_1,x_2,x_3)$ के लिए, हमें सभी i के लिए

$|x_i-a_i|<\delta_i=\delta/\sqrt{3}$ प्राप्त है, ताकि $1\le i\le 3$ है तो

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(x_1-a_2)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2}<\sqrt{\frac{\delta^2}{3}+\frac{\delta^2}{3}+\frac{\delta^2}{3}}=\delta$ होता है, तथा

इसी कारण जब भी $0<|x_i-a_i|<\delta_i, \forall i$ ताकि $1\le i\le 3$ है, तो $|f(x)-L|<\varepsilon$ होता है।

विलोमतः, मान लीजिए कि दिया हुआ प्रतिबंध संतुष्ट होता है।

मान लीजिए कि $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ है। तब,

$0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow 0<|x_i-a_i|=\sqrt{(x_i-a_i)^2}\le$

$\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2}<\delta\le\delta_i, \forall i$

ताकि $1\le i\le 3$ है। इसका अर्थ है कि $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ है।

अतः, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

– ■ –

हम निम्नलिखित उदाहरण में, सीमाओं को परिकलित करने के लिए, प्रमेयों 1 और 2 का अनुप्रयोग करेंगे।

उदाहरण 1 : दर्शाइए कि निम्नलिखित सीमाएं प्राप्त होते हैं।

i) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(x^2+y)=2$

ii) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$ है।

iii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} x = a$ और $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} y = b$ $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} z = c$ है।

iv) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(x^2+xy+y^3) = 37$ है।

v) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} (xy+yz+zx) = ab+bc+ca$ है।

अब हम निम्नलिखित उदाहरण में दिए गए सीमाओं के परिकलित करने के लिए प्रमेय 1 और प्रमेय 2 को लागू करते हैं।

हल : हम (i) और (ii) में सीमाओं की जाँच के लिए, प्रमेय 2 का प्रयोग करेंगे।

i) दिया हुआ फलन $f(x,y) = x^2 + y$ है। मान लीजिए कि $0<\varepsilon<1$ दिया है। तब, $|f(\mathbf{x})-L| = |x^2+y-2| \le |x^2|+|y-2| < \varepsilon$ है, जब भी $|x|<\sqrt{\varepsilon/2}$ है तथा $|y-2|<\varepsilon/2$ है। इस प्रकार, प्रमेय 2 के अनुसार $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(x^2+y) = 2$ है। ध्यान दीजिए कि यहाँ हमने $\delta_1 = \sqrt{\varepsilon/2}, \delta_2 = \varepsilon/2$ और लिया है।

ii) फलन f यहाँ $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$ द्वारा दिया गया है।

तब, हमें प्राप्त है :

$\left|x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x|+|y| < \varepsilon$ जब भी $|x|<\varepsilon/2, |y|<\varepsilon/2$ है।

इस प्रकार, पुनः प्रमेय 2 का अनुप्रयोग करने पर, हम कह सकते हैं कि

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$ है

हम (iii) और (iv) में सीमाओं की जाँच के लिए, सीमाओं के बीजगणित (प्रमेय 1) को प्रयोग करेंगे।

iii) सर्वप्रथम, हम सिद्ध करेंगे कि $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} x = a$ है। ध्यान

दीजिए कि $|x-a| \le \|(x,y,z)-(a,b,c)\|$ है इसलिए, एक दिए हुए $\varepsilon>0$ के

लिए, यदि $\delta=\varepsilon$ है, तो परिभाषा 1 को सीधा ही प्रयोग करने से हमें वाँछित सीमा प्राप्त हो जाती है।

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} y = b$ है तथा $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} z = c$ है।

iv) सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(x^2+xy+y^3) = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} x^2 + \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} xy + \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} y^3 = \lim(x).\lim(x) + \lim(x).\lim(y) + \lim(y).\lim(y).\lim(y) = 4+6+27 = 37.$$

v) अब, सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)}(xy+yz+zx)=\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)}xy+\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)}yz+\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)}zx$$

$$=\lim x.\lim y+\lim y.\lim z+\lim z.\lim x \;=\; ab+bc+ca \text{ है।}$$

* * *

आगे, हम सीमाओं से संबंधित एक महत्वपूर्ण तथ्य को देखेंगे। आपको याद होगा कि $\boldsymbol{R}$ के एक समुच्चय D पर किसी एक चर वाले फलन को परिबद्ध (bounded) कहा जाता है, यदि वास्तविक संख्याओं m और M का अस्तित्व हो ताकि प्रत्येक $x\in D$ के लिए $m\le f(x)\le M$ हो। इसी प्रकार, दो चरों x और y वाला एक फलन f, $\boldsymbol{R}^2$ में एक समुच्चय W पर परिबद्ध कहा जाता है, यदि सभी $(x,y)\in W$ के लिए, वास्तविक संख्याओं m और M का अस्तित्व हो ताकि $m\le f(x,y)\le M$ हो।

इसी प्रकार, हम $\boldsymbol{R}^3$ में भी परिबद्ध समुच्चयों को परिभाषित कर सकते हैं।

अब, हम निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 3 : यदि $\lim_{x\to a} f(\boldsymbol{x})=L$ है, तो a के निष्कासित परिवेश में, $f(\boldsymbol{x})$ परिबद्ध होता है। अर्थात् वास्तविक संख्याओं m और M का अस्तित्व है, ताकि a के निष्कासित परिवेश में सभी x के लिए $m\le f(\boldsymbol{x})\le M$ हो।

उपपत्ति : हम परिभाषा 2 का प्रयोग करेंगे। परिभाषा द्वारा $\lim_{x\to a} f(\boldsymbol{x})=L$ का अर्थ है कि कोई $\varepsilon>0$, दिया रहने पर, $\exists\delta>0$, ताकि

$$0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\Rightarrow|f(\boldsymbol{x})-L|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow L-\varepsilon<f(\boldsymbol{x})<L+\varepsilon \text{ है।}$$

अब, $m=L-\varepsilon$ और $M=L+\varepsilon$ लीजिए। तब, हम प्राप्त करते हैं कि प्रतिवेश $B(a,\delta)$ में x के ऊपर f परिबद्ध है, संभवतः $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ के अतिरिक्त (टिप्पणी 1 (ii) को देखिए) यह दर्शाता है कि जब भी $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व है, तब $\boldsymbol{a}$ के एक निष्कासित प्रतिवेश में f परिबद्ध होता है।

–■–

इस प्रमेय का विलोम सत्य नहीं है। दूसरे शब्दों में, यदि कोई फलन f किसी बिंदु a के एक निष्कासित प्रतिवेश में परिबद्ध है, तो यह आवश्यक नहीं है कि उस फलन की सीमा का $\boldsymbol{a}$ पर अस्तित्व हो। अगले उदाहरण में, आप एक फलन को देखेंगे जो इस कथन की पुष्टि करता है।

उदाहरण 2: दर्शाइए कि निम्नलिखित फलन परिबद्ध है, परंतु $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है :

i) $f(x,y)=\begin{cases}1, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

ii) $f(x,y)=\begin{cases}1, & x \text{ अपरिमेय है}\\ 0, & x \text{ परिमेय है}\end{cases}$

हल: आइए (i) और (ii) को एक-एक करके लें।

i) हम पहले ध्यान देते हैं कि $0 \le f(x,y) \le 1$ है, अर्थात f परिबद्ध है। आगे, हम सिद्ध करते हैं कि सीमा का अस्तित्व नहीं है। इसके विपरीत, आइए मान लें कि

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=L$ है।

तब, एक दिए हुए ε के लिए, ताकि $0<\varepsilon<1$, एक ऐसा वास्तविक संख्या $\delta>0$ का अस्तित्व है तथा $0<\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon/2$ है।

विशिष्ट रूप में, यदि $\sqrt{x_1^2+y_1^2}<\delta, \sqrt{x_2^2+y_2^2}<\delta$ के साथ दो बिंदु $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ है, तो प्राप्त करते हैं कि

$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| &= |f(x_1,y_1)-L+L-f(x_2,y_2)|\\ &\le |f(x_1,y_1)|-L|+|f(x_2,y_2)-L| \qquad \ldots(2)\\ &<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

यह (2) का अंतर्विरोध करता है। अतः, हमारी परिकल्पना कि सीमा $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ का अस्तित्व है, यह सत्य नहीं हो सकती।

अब, बिंदुओं $(x_1,y_1)=\left(\dfrac{\delta}{2},0\right)$ और $(x_2,y_2)=\left(0,\dfrac{\delta}{2}\right)$ पर विचार कीजिए।

तब, $f(x_1,y_1)=f\left(\dfrac{\delta}{2},0\right)=1$ है तथा $f(x_2,y_2)=f\left(0,\dfrac{\delta}{2}\right)=0$ है। इस प्रकार, $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=1>\varepsilon$ है।

आइए, अब दूसरे फलन पर विचार करें।

ii) यहाँ पर सर्वप्रथम ध्यान दीजिए कि f परिबद्ध है तथा $0 \le f(x,y) \le 1$ है। हम इस परिकल्पना से प्रारंभ करते हैं कि सीमा $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ का अस्तित्व है। फिर, i) की ही प्रकार से कार्य करने पर, हम देखते हैं कि कोई ε दिया रहने पर ताकि $0 \le f(x,y) \le 1.$ है, एक वास्तविक संख्या $\delta>0$ का अस्तित्व है, तथा जब भी $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ त्रिज्या δ के साथ (a, b) के प्रतिवेश B_δ के अवयव होते हैं, तब हमें प्राप्त होता है :

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon \qquad (3)$$

अब, हम इस प्रतिवेश δ में $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ इस प्रकार चुनते हैं कि x_1 अपरिमेय है और x_2 परिमेय है। तब, $f(x_1,y_1)=1$ है तथा $f(x_2,y_2)=0$ है। इस प्रकार, $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=1>\varepsilon$ है।

यह (3) का अंतर्विरोध करता है अतः, हमारी परिकल्पना कि सीमा का अस्तित्व है, संभव नहीं है। इसलिए, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

***

जैसा कि हम पहले भी बता चुके हैं, जब हम $\boldsymbol{R}^2$ या $\boldsymbol{R}^3$ फलनों की सीमाओं की बात करते हैं, तब अपरिमित से अनेक ऐसी विधियाँ हैं, जिनसे एक बिंदु x एक अन्य बिंदु a की ओर अग्रसर हो सकता है। इसलिए, इन विभिन्न पथों के सीमाओं को परिकलित करने कि अपरिमित रूप से अनेक विधियाँ हैं। परंतु यदि a की ओर x के प्रवृत्त होने पर $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व है, तो इन सभी विभिन्न सीमाओं का अस्तित्व होता है तथा ये सभी बराबर होती हैं।

हम निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 4: मान लीजिए कि f दो चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन इस प्रकार है कि $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ है। यदि $\phi(x)$ एक वास्तविक चर वाला वास्तविक-मान फलन है, ताकि $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=b$ है, तो $\lim\limits_{x\to a} f(x,\phi(x))=L$ होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए $\varepsilon>0$ है। तब, एक वास्तविक संख्या $\delta>0$ का अस्तित्व है ताकि (a,b) के δ-प्रतिवेश में $f(x,y)$ परिभाषित है, संभवतः (a,b) के अतिरिक्त, तथा

$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$ है।

क्योंकि $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=b$ है, इसलिए इस $\delta>0$ के लिए एक वास्तविक संख्या $\delta_1>0$, $\delta_1<\delta/\sqrt{2}$ का अस्तित्व है, ताकि $\phi(x)$ सभी x के लिए परिभाषित है, और

$0<|x-a|<\delta_1$ है तथा $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |\phi(x)-b|<\delta/\sqrt{2}$ है।

इस प्रकार, $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(\phi(x)-b)^2}<\sqrt{\delta_1^2+\frac{\delta^2}{2}}<\sqrt{\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{2}}=\delta$

है, इसीलिए, $|f(x,\phi(x))-L|<\varepsilon$ अर्थात् $\lim\limits_{x\to a} f(x,\phi(x))=L$ है।

– ■ –

टिप्पणी 2: उपरोक्त प्रमेय यह कहती है कि यदि $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ का अस्तित्व है और यह L के बराबर है, तो किसी भी पथ के अनुदिश जब (a,b) की ओर (x,y) अग्रसर होता है, तब L की ओर $f(x,y)$ अग्रसर होता है। इसका अर्थ है कि यदि $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x)=L$ का अस्तित्व है, तो किसी वक्र $y=\phi(x)$ के अनुदिश जब (a,b) की ओर (x,y) प्रवृत्त करता है, तब f की सीमा L होती है। दूसरे शब्दों में, f की सीमा उस पथ से स्वतंत्र होती है, जिसके अनुदिश बिंदु (x,y) बिंदु (a,b) की ओर अग्रसर होता है। जैसा कि हम पहले भी बता चुके हैं, इस परिणाम की निम्नलिखित रूप में भी व्याख्या की जा सकती है।

यदि दो विभिन्न पथों के अनुदिश $(x,y)\to(a,b)$ होने पर $f(x,y)$ दो विभिन्न सीमाओं की ओर प्रवृत्त होता है, तो $\lim\limits_{(x\to y)\to(a,b)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं होता है।

यह व्याख्या कुछ सीमाओं के अस्तित्व नहीं होने का सिद्ध करने में बहुत उपयोगी रहता है। अब हम अधिक परिशुद्ध रूप में प्रमेय 4 की एक उपप्रमेय के रूप में इसका कथन दे रहे हैं।

उपप्रमेय 1: मान लीजिए कि बिंदु (a,b) के किसी निष्कासित प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन $f(x,y)$ हैं। यदि वास्तविक-मान फलनों $\phi_1(x)$ और $\phi_2(x)$ का

अस्तित्व है ताकि $\lim\limits_{x\to a}\phi_1(x)=b=\lim\limits_{x\to a}\phi_2(x)$ है, तथा

$\lim\limits_{x\to a} f(x,\phi_1(x))\neq \lim\limits_{x\to a} f(x,\phi_2(x))$, है, तो $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं होता है।

– ■ –

हम एक उदाहरण की सहायता से इस उपप्रमेय की उपयोगिता को स्पष्ट करेंगें

उदाहरण 3: दर्शाइए कि $(x,y)\to(0,0)$ होने पर, निम्नलिखित फलनों की सीमाओं के अस्तित्व नहीं हैं :

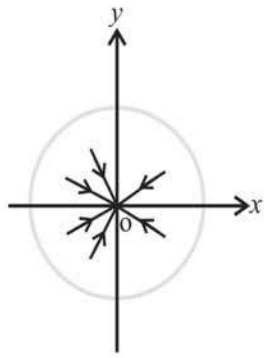
i) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

ii) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x-y}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$

हल :

i) मान लीजिए कि $y=mx$ है। तब,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$



चित्र 3

अब, $\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$ के मान भिन्न-भिन्न m के लिए भिन्न-भिन्न है। आप इसकी जाँच $m=1$ और $m=2$ रखकर कर सकते हैं। इसका अर्थ है कि विभिन्न त्रैज्य (या अरीय) (radial) सदिशों (vectors) के अनुदिश $(x,y)\to(0,0)$ होने पर, $f(x,y)$ विभिन्न मानों की ओर अग्रसर होता है। चित्र 3 देखिए।

इस प्रकार, उपप्रमेय 1 के दृष्टिगत रखते हुए, (0,0) $f(x,y)$ की ओर (x,y) $f(x,y)$ के प्रवृत्त होने पर $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ का अस्तित्व नहीं है।

(यहाँ हम $\phi_1(x)=m_1x,\ \phi_2(x)=m_2\,x,\ m_1\neq\pm m_2$) ले सकते हैं।)

ii) मान लीजिए कि $\phi_1(x)=x-x^3,\ \phi_2(x)=x-x^2$ ध्यान दीजिए कि $\phi_1(x)=\ \phi_2(x)=0$ है। तब,

$$\lim_{x\to 0} f(x,\phi_1(x))=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+(x-x^3)^3}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^3-3x^5+3x^7-x^9}{x^3}=2 \text{ है,}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,\phi_2(x))=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+(x-x^2)^3}{x^2}=0 \text{ है।}$$

इसलिए पुनः उपप्रमेय 1 द्वारा $(x,y)\to(0,0)$ होने पर, $f(x,y)$ की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

***

उदाहरण 4: मान लीजिए कि $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ है। जाँच कीजिए कि क्या $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $f(x,y)$ का अस्तित्व है।

हल : हम पहले विभिन्न पथों की अनुदिश $(x,y)\to(0,0)$ होने पर, सीमा की जाँच करेंगे। आइए पथ $y=mx$ पर विचार करें।

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{m^2x^3}{x^2+(mx)^4}=\frac{m^2x}{1+m^4x^2} \text{ है।}$$

तब, $y=mx$ के अनुदिश $(x,y)\to(0,0)$ होने पर $f(x,y)\to 0$ है। इससे प्रदर्शित होता है कि मूलबिंदु से होकर जाने वाली प्रत्येक ऐसी रेखा के अनुदिश जो ऊर्ध्वाधर नहीं है, f का एक ही सीमांत मान है। परंतु इससे यह प्रदर्शित नहीं होता कि दी हुई सीमा 0 है, क्योंकि यदि हम परवलय $x=y^2$ के अनुदिश पथ पर विचार करें, तो हमें प्राप्त होता है :

$$f(x,y)=f(y^2,y)=\frac{y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}$$

तब, $x=y^2$ के अनुदिश $(x,y)\to(0,0)$ होने पर, $f(x,y)\to\dfrac{1}{2}$ हैं क्योंकि विभिन्न पथों के अनुदिश विभिन्न सीमांत ले रहा है, इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

– ■ –

अब हम स्पष्ट करेंगे कि किस प्रकार ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तन अर्थात् प्रतिस्थापन $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ कुछ सीमाओं के मान निकालने में उपयोगी रहता है। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 5: सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=0$ है।

हल: इसके लिए, हम प्रतिस्थापन $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ का उपयोग करेंगे, ताकि $x^2+y^2=r^2$ है। तब,

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}{r^2}\right|$$

$$=\left|r(\cos^3\theta-\sin^3\theta)\right|\le r\left(\left|\cos^3\theta\right|+\left|\sin^3\theta\right|\right)\le 2r=2\sqrt{x^2+y^2} \text{ है। (क्यों?)}$$

अब, यदि $|x|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$ और $|y|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$ है, तो $2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$ और इसीलिए $\left|\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$ है,

अर्थात $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=0$ है।

***

अगले उदाहरण में, हम यह स्पष्ट करेंगे कि किस प्रकार सीमा की $\varepsilon-\delta$ परिभाषा सीमा ज्ञात करने में प्रयोग की जाती है।

उदाहरण 6: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2 y}{x^2+y^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल: हम परिभाषा 2 का अनुप्रयोग करते हैं।

मान लीजिए $\in > 0$ है। हम $\delta > 0$ ज्ञात करना चाहते हैं। ताकि

$\left|\dfrac{5x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$ है, जब भी $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ है।

अर्थात् $\dfrac{5x^2|y|}{x^2+y^2} - 0 < \varepsilon$ है, जब भी $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ है।

परंतु $x^2 \le x^2+y^2$ है, क्योंकि $y^2 \ge 0$, है। इसलिए $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$ और इसी कारण

$\dfrac{5x^2|y|}{x^2+y^2} \le 5|y| = 5\sqrt{y^2} \le 5\sqrt{x^2+y^2}$ है।

अब, यदि हम $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$, चुनें, तो जब भी $0 \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, होगा, तब हम प्राप्त करेंगे:

$\left|\dfrac{5x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| \le 5\sqrt{x^2+y^2} \le 5\,\delta = 5 \times \dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$ है।

अतः परिभाषा 1 से $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2 y}{x^2+y^2} = 0$ है।

***

अब देखिए कि क्या आप इन प्रश्नों को हल कर पाते हैं।

E1) ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित करके दर्शाइए कि

क) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ है।

ख) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ है।

E2) निम्नलिखित को दर्शाने के लिए, सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग कीजिए :

क) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \dfrac{x^2+3xyz-5z^2}{xy^3+5z^2-3xy+x^3} = -1$ है।

ख) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y}{2x^2+1} = 0$ है

E3) दर्शाइए कि $x \to 0, y \to 0$ होने पर, निम्नलिखित फलनों की सीमाओं का अस्तित्व है या नहीं :

क) $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$ । पथों $y = x^2, y = 2x^2$ का प्रयास कीजिए।

ख) $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ । पथों $y = x^3, y = 2x^3$ का प्रयास कीजिए।

ग) $f(x,y) = \frac{2x^2}{x^2 - y^2 + x}$ । पथों $y = x, y^2 = x$ का प्रयास कीजिए।

घ) $f(x,y) = \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$ । पथों $y = 0, x = 0$ अर्थात् दोनों अक्षों के अनुदिश प्रयास कीजिए।

E4) जाँच कीजिए कि $x \to 0, y \to 0$ होने पर, निम्नलिखित फलनों की सीमाओं का अस्तित्व नहीं है :

क) $\frac{xy}{x^2 + y^2}$

ख) $\frac{x^2}{x^2 + y}$

ग) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

E5) यदि $f(x,y) = xy$ और $\varepsilon = 0.0004$ है, तो दर्शाइए कि दिए हुए ε के लिए, हमें बिंदु (x, y) को मूलबिंदु के कितने निकट लेना चाहिए जिससे $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ हो। दूसरे शब्दों में, $\varepsilon = 0.0004$ के संगत δ ज्ञात कीजिए।

E6) $\varepsilon - \delta$ परिभाषा का प्रयोग करते हुए, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$ ज्ञात कीजिए।

अब तक, आप अनेक चरों वाले एक फलन की सीमा की संकल्पना से अवश्य ही परिचित हो गए होंगे। अब हम इन फलनों के सांतत्य की चर्चा करेंगे।

2.3 वास्तविक-मान फलनों का सांतत्य

कलन पाठ्यक्रम की इकाई 2 में, आपने देखा था कि एक चर वाले फलनों के सांतत्य का अध्ययन करने के लिए, इन फलनों की सीमा का ज्ञान आवश्यक होता है।

पिछले अनुच्छेद में, हमने अनेक चरों वाले वास्तविक-मान फलनों की सीमा की संकल्पना का अध्ययन किया है। आइए अब देखें कि किस प्रकार हम इस ज्ञान का $n = 2$ और 3 के लिए $\boldsymbol{R}^n$ से $\boldsymbol{R}$ तक संतत फलनों को परिभाषित करने में प्रयोग कर सकते हैं।

स्मरण कीजिए कि फलन $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ एक बिंदु $a \in \boldsymbol{R}$ पर संतत होता है यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ हो।

परिभाषा 3: मान लीजिए कि R^n ($n=2$ या 3) पर परिभाषित f अनेक चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन है तथा $a \in R^n$ है। हम कहते हैं कि a पर फलन f संतत होता है, यदि $\varepsilon > 0$ दिया होने पर, एक वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व है (जो ε पर निर्भर है), ताकि $\|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ हो। इसका अर्थ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ हैं। दूसरे शब्दों में, कोई फलन f किसी बिंदु (a,b) पर संतत होता है, यदि

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ हो।

उपरोक्त परिभाषा का तात्पर्य है कि यदि कोई फलन f किसी बिंदु (a,b) पर संतत है, तो नीचे दिए (i) और (ii) को आवश्यक रूप से सत्य होना चाहिए।

i) (a,b) पर f परिभाषित है।

ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ है।

नोट-1: प्रतिबंध (ii) केवल यह नहीं दर्शाता कि सीमा का अस्तित्व है, अपितु यह भी दर्शाता है कि सीमा $f(a)$ के बराबर है। यही किसी बिंदु पर एक फलन की सीमा के अस्तित्व तथा उस बिंदु पर फलन के सांतत्य के बीच आवश्यक अंतर है।

नोट-2: उपरोक्त आवश्यक प्रतिबंधों (i) और (ii) का यह भी तात्पर्य है कि यदि किसीं बिंदु a पर प्रतिबंधों (i) या (ii) में से एक भी असफल हो जाए, तो हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि f उस बिंदु पर संतत नहीं है। कोई फलन संतत है या नहीं इसकी जाँच करने के लिए, यह तथ्य बहुत महत्वपूर्ण है।

आइए कुछ उदाहरण देखें :

उदाहरण 7: $(0,0)$ पर निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिए :

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, यदि } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & \text{, यदि } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

हल: आइए (i), (ii) और (iii) को एक-एक करके प्रयास करें।

i) हम ध्यान देते हैं कि दिया हुआ फलन (0,0) पर परिभाषित नहीं है। अतः, (0,0) पर f संतत नहीं है।

ii) सर्वप्रथम, हम ध्यान देते हैं कि दिया हुआ फलन (0,0) पर परिभाषित है तथा $f(0,0) = 0$ है। आगे, हम जाँच करते हैं कि फलन की सीमा का (0,0) पर अस्तित्व है या नहीं। उदाहरण 6 में, हमने दर्शाया था कि सीमा का अस्तित्व है तथा यह सीमा (0,0) के बराबर है। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

अतः, (0,0) पर f संतत है।

iii) हम ध्यान देते हैं कि फलन (0,0) पर परिभाषित है। हम जाँच करेंगे कि इस फलन f की सीमा अस्तित्व है या नहीं। इसके लिए, हम मान लेंगे कि विभिन्न रेखाओं के अनुदिश $(x,y)\to(0,0)$ है। हम रेखा $y = mx$ पर विचार करते हैं।

$f(x,y) = f(x,mx) = \dfrac{m^2x}{1+m^4x^2}$ है।

इस प्रकार, $y = mx$ के अनुदिश $(x,y)\to(0,0)$ होने पर $f(x,y)\to 0$ है।

आगे हम मान लेंगे कि परवलय $x = y^2$ के अनुदिश $(x,y)\to(0,0)$ है।

$$f(x,y) = f(y^2,y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

इस प्रकार, वक्र $x = y^2$ के अनुदिश $(x,y)\to(0,0)$ होने पर $f(x,y)\to\dfrac{1}{2}$ है।

विभिन्न पथों से हमें विभिन्न सीमांत मान प्राप्त होते हैं, इसलिए दी हुई सीमा का अस्तित्व नहीं है। अतः, (0,0) पर फलन संतत नहीं है।

***

यहाँ कुछ परिभाषाएँ दी जा रही हैं।

परिभाषा 4: अनेक चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन अपने प्राँत में **अंतर्विष्ट एक समुच्चय A पर संतत होता है**, यदि वह फलन A के प्रत्येक बिंदु पर संतत हो। अनेक चरों वाल एक वास्तविक-मान फलन एक संतत फलन कहा जाता है, यदि वह फलन अपने प्राँत के प्रत्येक बिंदु पर संतत होता है।

सीमाओं के गुणों का प्रयोग करते हुए, आप देख सकते हैं कि संतत फलनों के योग, अंतर, गुणनफल और भागफल (जब भी परिभाषित हों) अपने प्राँतों में संतत होते हैं। हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त है :

प्रमेय 5 (संतत फलनों का बीजगणित): मान लीजिए कि n चरों वाले f और g दो वास्तविक-मान फलन हैं, जो एक बिंदु $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n, n = 2,3$ पर संतत है। तब,

i) a पर $f \pm g$ संतत हैं।

ii) प्रत्येक $\alpha\in\boldsymbol{R}$ के लिए, a पर αf संतत है।

iii) a पर fg संतत है।

iv) a पर f/g संतत है, जबकि $g(\boldsymbol{a})\neq 0$ है।

उपपत्ति : i) $\lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{x\to a}[f(\boldsymbol{x})\pm g(\boldsymbol{x})]$

$= \lim\limits_{x\to a} f(\boldsymbol{x}) \pm \lim\limits_{x\to a} g(\boldsymbol{x})$, प्रमेय 2 से।

$= f(\boldsymbol{a})\pm g(\boldsymbol{a})$ क्योंकि $\boldsymbol{a}$ पर f और g संतत हैं।

$= (f+g)\,(\boldsymbol{a})$

ii) $\lim_{x\to a}(\alpha f)(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to a}\alpha\, f(\boldsymbol{x}) = \alpha \lim_{x\to a} f(\boldsymbol{x}) = \alpha\ f\ (\boldsymbol{a})$

iii) $\lim_{x\to a}(fg)(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to a} f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to a} f(\boldsymbol{x}).\lim_{x\to a} g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$
$g(\boldsymbol{a}) = (fg)(\boldsymbol{a})$

iv) $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to a}\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{\lim f(\boldsymbol{x})}{\lim g(\boldsymbol{x})} = \frac{f(\boldsymbol{a})}{g(\boldsymbol{a})} = (f/g)(\boldsymbol{a}).$

यह दर्शाता है कि $(f \pm g), \alpha f,\ fg$ और f/g सभी $\boldsymbol{a}$ पर संतत है।

– ■ –

प्रमेय 5 से, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि 2 या 3 चरों में f कोई बहुपद है, तो f एक संतत फलन है। ध्यान दीजिए कि 2 चरों वाला बहुपद का रूप $cx^m y^n$ होता है, जहाँ एक c अचर है तथा m और n ऋणेतर (non-negative) पूर्णांक है। उदाहरणार्थ $f(x,y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$ एक बहुपद है और इसीलिए संपूर्ण $\boldsymbol{R}^2$ पर संतत है। फलन $g(x,y) = \frac{3xy+5}{x^2+y^2}$ भी (0,0) के अतिरिक्त, $\boldsymbol{R}^2$ के सभी बिंदुओं पर संतत है। ध्यान दीजिए कि $g(x,y)$ दो बहुपद फलनों का भागफल है। इस प्रकार के फलन **परिमेय फलन** कहलाते हैं।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 8: इंगित बिंदुओं पर निम्नलिखित फलनों की सीमा तथा सांतत्य की जाँच कीजिए :

i) $f(x,y) = \frac{7xy+1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$ जब $(x,y) \to (1,1)$

ii) $f(x,y) = 2x^2y^3 - 3x^3y^3 + 4x + 2y$ जब $(x,y) \to (-2,0)$

iii) $f(x,y,z) = \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2+y^2+z^2}$ जब $(x,y,z) \to (1,0,1)$

हल: आइए एक-एक करके प्रयास करें।

i) सर्वप्रथम, हम ध्यान देते हैं कि $f(x,y) = \frac{7xy+1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$ एक परिमेय फलन है। तब,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{7xy+1}{x^2+y^2} = \frac{7\lim x \times \lim y + 1}{\lim x^2 + \lim y^2},\ \text{जब } (x,y) \neq (0,0)$$

$$= \frac{7\times 1\times 1+1}{1+1} = \frac{8}{2} = 4 = f(1,1)\ \text{है।}$$

अतः, सीमा का अस्तित्व है तथा यह फलन के मान के बराबर है। अतः, दिए हुए बिंदु पर फलन संतत है।

ii) $f(x,y)$ एक बहुपद है तथा $f(-2,0)=-8$ है। साथ ही,

$$\lim_{(x,y)\to(-2,0)} f(x,y) = \lim(2x^2y^3) - \lim 3x^3y^2 + 4\lim x + 2\lim y$$

$$= 2\times4\times0 - 3\times(-8)\times0 + 4\times(-2) + 0$$

$$= -8$$

$$= f(-2,0)$$

क्योंकि सीमा के मान का अस्तित्व है तथा यह फलन के मान के बराबर है, इसलिए दिए हुए बिंदु पर फलन संतत है।

iii) $f(x,y,z)$ तीन चरों वाला एक परिमेय फलन है तथा $f(1,0,1)=\frac{1}{2}$ है।

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} f(x,y,z) = \frac{\lim(xy)+\lim(yz^2)+\lim(xz^2)}{\lim(x^2+y^2+z^2)}, (x,y,z)\neq 0$$

$$= \frac{0+0+1}{1\times1} = \frac{1}{2} = f(1,0,1).$$

अतः, सीमा का अस्तित्व है तथा यह फलन के मान के बराबर है। अतः, यह फलन संतत है।

***

आगे, हम दो संतत फलनों के संयुक्त (composite) के सांतत्य के बारे में एक परिणाम का कथन देकर उसे सिद्ध कर रहे हैं। आपने इसी प्रकार का परिणाम एक चर वाले फलनों के लिए अवश्य ही अध्ययन किया होगा।

प्रमेय 6: मान लीजिए कि अनेक चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन f है, जो एक बिंदु $\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}^n$ (n = 2 या 3) पर संतत है तथा मान लीजिए कि एक वास्तविक चर वाला एक वास्तविक-मान g है, जो $f(\boldsymbol{a})$ पर संतत है। तब, संयुक्त फलन $g\circ f$ बिंदु $\boldsymbol{a}$ पर संतत है।

उपपत्ति: मान लीजिए $\varepsilon>0$ है। $f(\boldsymbol{a})$ पर फलन g के सांतत्य का तात्पर्य है कि एक वास्तविक संख्या $\delta>0$ का अस्तित्व है, ताकि

$$|y-f(a)|<\delta \Rightarrow |g(y)-g(f(\boldsymbol{a}))|<\varepsilon \qquad \dots (5)$$

अब, $\boldsymbol{a}$ पर फलन f के सांतत्य का तात्पर्य है कि $\delta>0$ दिया होने पर, एक धनात्मक संख्या $\eta>0$ अस्तित्व है, ताकि

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\eta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|<\delta \qquad \dots (6)$$

(5) और (6) को संयोजित करने पर, हम देखते हैं कि

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\eta \Rightarrow |g(f(\boldsymbol{x}))-g(f(\boldsymbol{a}))|<\varepsilon$, अथवा

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\eta \Rightarrow |g\circ f(\boldsymbol{x})-g\circ f(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$

अर्थात्, $g\circ f$ पर निरंतर है $\boldsymbol{a}$ पर संतत है।

–■–

उदाहरण 9 : दर्शाइए कि $\lim_{(x,y)\to(0,\,\ln 5)} e^{x+y} = 5$ है।

हल : स्पष्टतः, फलन $f(x,y)=x+y$ और $g(t)=e^t$ अपने प्राँतों में प्रत्येक स्थान पर सतत है। इसलिए, प्रमेय 6 को दृष्टिगत रखते हुए, संयुक्त फलन $g\circ f$ प्रत्येक स्थान पर संतत है। इसके फलस्वरूप,

$$\lim_{(x,y)\to(0,\,\ln 5)} e^{x+y} = e^{0+\ln 5} = 5 \text{ है।}$$

***

निम्नलिखित प्रश्नों के साथ हम इस अनुच्छेद की समाप्ति करते हैं।

E7) दर्शाइए की निम्नलिखित फलन (0, 0) पर संतत नहीं है :

क) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ख) $$f(x,y)=\begin{cases}y\sin\dfrac{1}{x}+x\sin\dfrac{1}{y}, & x\neq 0,\ y\neq 0\\ 1, & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

E8) मान लीजिए कि $\boldsymbol{R}^2$ पर $p_1(x,y)=x$ और $p_2(x,y)=y$ द्वारा परिभाषित फलन π_1 और π_2 हैं। सिद्ध कीजिए कि $\boldsymbol{R}^2$ पर p_1 और p_2 संतत फलन है। फलन p_1 और p_2 प्रक्षेप प्रतिचित्रण (projection maps) कहलाते हैं।

E9) दर्शाइए कि निम्नलिखित फलन मूलबिंदु पर संतत है। प्रयोग किए गए प्रमेयों या ज्ञात परिणामों को स्पष्ट रूप से लिखिए।

क) $x\sin y+y\sin z+z\sin x$

ख) $e^x\cos y+e^y\cos z+e^z\cos x$

ग) $\ln(1+x^2+y^2+z^2)$

घ) $|x_1|+|x_2|+|x_3|$

अभी तक आपने सीखा है कि किस प्रकार सीमा और सांतत्य की संकल्पनाओं को अनेक चरों वाले फलनों के लिए विस्तृत किया जाता है। अगले अनुच्छेद में, हम अनेक चरों वाले एक फलन की सीमा परिभाषित करने की एक और विधि की चर्चा करेंगे।

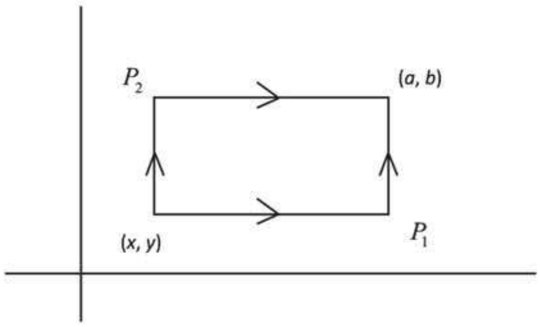
2.4 पुनरावृत्त सीमाएँ

आपने अनुच्छेद 2.2 में सीमा की जिस परिभाषा का अध्ययन किया है वह $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ तक फलनों की सीमा की परिभाषा का एक व्यापीकरण है। अब हम एक अन्य प्रकार की सीमा पर विचार करेंगे जो विशेष रूप से अनेक चरों वाले फलनों के लिए ही हैं सरलता के लिए, हम अपने को दो चरों वाले फलनों तक ही सीमित रखेंगे।

मान लीजिए कि f दो चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन है, जो बिंदु (a,b) के किसी निष्कासित प्रतिवेश में परिभाषित है।

मान लीजिए कि हम पहले y के b की ओर प्रवृत्त होने पर, $f(x,y)$ की सीमा ज्ञात करते हैं, जबकि x को एक अचर माना जाता है तथा फिर हम परिणामी फलन की सीमा ज्ञात करते हैं, जब a की ओर x प्रवृत्त करता है। यह सीमा **पुनरावृत्त सीमा** कहलाती है और इसे $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

कृपया ध्यान दीजिए कि जब हम पुनरावृत्त सीमाएँ ज्ञात करते हैं, तब वास्तव में हम एक के बाद एक दो विशिष्ट पथों P_1 और P_2 का अनुसरण कर रहे हैं ताकि बिंदु (a,b) की ओर अग्रसर हो सकें, जैसा कि आकृति 4 में दर्शाया है। P_1 वह पथ है, जिसमें $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))$ के संगत एक क्षैतिज और एक ऊर्ध्वाधर रेखाखंड सम्मिलित है तथा P_2 वह पथ है, जिसमें $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y))$ के संगत एक ऊर्ध्वाधर बिंदुकित और एक क्षैतिज बिंदुकित रेखाखंड सम्मिलित है।



चित्र 4: (x,y) और (a,b) को एक दिशा में मिलाने वाला सरल रेखा पथ P_1 है।
(x,y) और (a,b) को अन्य दिशा में मिलाने वाला रेखा पथ P_2 है।

ये दोनों सीमाएँ, जो पुनरावृत्त सीमाएँ कहलाती हैं, पिछले अनुच्छेद में हमारे द्वारा परिभाषित सीमा, अर्थात् $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ से स्वतंत्र है (पूर्व अनुच्छेद की परिभाषा 4 देखिए) हम $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ को युगपत सीमा (simultaneous limit) से नामांकित करते हैं, क्योंकि x और y क्रमशः a और b की ओर एक साथ (अर्थात् युगमत रूप से) अग्रसर हो रहे हैं।

अगले उदाहरण में, हम दोनों पुनरावृत्त सीमाओं तथा युगपत सीमा के अभिकलनों को स्पष्ट कर रहे हैं।

उदाहरण 10: मान लीजिए कि $f(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ है। दर्शाइए कि दोनों पुनरावृत्त सीमाओं $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ और $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ का अस्तित्व है तथा ये बराबर है; परंतु युगपत सीमा $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

हल: स्पष्टतः $\lim_{x \to 0} f(x,y) = 1 = \lim_{y \to 0} f(x,y)$ है और इसीलिए

$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right) = 1 = \lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x,y))$ है।

अब, हम युगपत सीमा पर विचार करेंगे। मान लीजिए कि $y = mx$ है। तब, रेखा $y = mx$ के अनुदिश, हमें प्राप्त हैं :

$$f(x,y) = \frac{(1-m)^2 x^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

इसलिए $(x,y) \to (0,0)$ होने पर, $f(x,y)$ विभिन्न पथों पर विभिन्न मानों की ओर अग्रसर होता है।

अतः, युगपत सीमा $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

***

उपरोक्त उदाहरण यह दर्शाता है कि युगपत सीमा का अस्तित्व होने पर आवश्यक नहीं है कि पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व हो और इसका विलोम भी सत्य है।
आइए एक अन्य उदाहरण देखें।

उदाहरण 11: मान लीजिए कि $f(x,y) = \frac{xy}{|y|}$ है। दर्शाइए कि $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ का अस्तित्व है, परंतु $\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right)$ का अस्तित्व नहीं है तथा $\lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x,y)\right) = 0$ है।

हल : क्योंकि $|f(x,y)| = \frac{|xy|}{|y|} = |x|$ है, इसलिए यह निष्कर्ष निकलता है कि

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0$ है।

आगे, $\lim_{y \to 0^+} \frac{xy}{|y|} = x$, और $\lim_{y \to 0^-} \frac{xy}{|y|} = -x$ है।

यह दर्शाता है कि जब $x \neq 0$ है, तब $\lim_{y \to 0} \frac{xy}{|y|}$ का अस्तित्व नहीं है और इसीलिए

$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{|y|}\right)$ का भी अस्तित्व नहीं है।

अब, $\lim_{x \to 0} \frac{|xy|}{|y|} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$ है। अतः, $\lim_{x \to 0} \frac{xy}{|y|} = 0$ है और इस प्रकार,

$\lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{|y|}\right) = 0$ है।

***

इसलिए, क्या इसका यह अर्थ है कि युगपत सीमा और पुनरावृत्त सीमाएँ पूर्ण रूप से असंबंधित है? नहीं, स्थिति इतनी खराब नहीं है। कुछ स्थितियों में, हम इनमें संबंध बता सकते हैं।

यहाँ एक प्रमेय दी जा रही है, जो युगपत सीमा और पुनरावृत्त सीमाओं के बीच के संबंध दर्शाती है।

प्रमेय 7: मान लीजिए कि $f(x,y)$ एक वास्तविक-मान फलन है, ताकि

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$ है। यदि दोनों पुनरावृत्त सीमाओं $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ और

$\lim\limits_{x\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$ का अस्तित्व है, तो इनमें से प्रत्येक सीमा L के बराबर होगी।

हम इस प्रमेय की यहाँ उपपत्ति नहीं दे रहे हैं, क्योकि यह इस पाठ्यक्रम की सीमा के बाहर है।

देखिए कि क्या आप अब इन प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E10) फलन $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि (0, 0) पर युगपत सीमा का अस्तित्व नहीं है, जब कि दोनों पृनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व है और ये बराबर है।

E11) फलन $f(x,y) = \dfrac{y-x}{y+x}\dfrac{1+x^2}{1+y^2}$ के लिए, दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = -1$ है तथा $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 1$ है। प्रमेय 7 लागू करके $(x,y)\to(0,0)$ होने पर, युगपत सीमा के अस्तित्व क जांच कीजिए।

E12) मान लीजिए कि $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1+xy, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{pmatrix}$ है। तब, सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right] = 1 = \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$ है। परंतु $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

यहाँ हम इस इकाई को समाप्त कर रहे हैं। आइए संक्षिप्त रूप से स्मरण करें कि हमने इसमें क्या-क्या अध्ययन किया है।

2.5 सारांश

इस इकाई में, हमने

1) फलन $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ $(n = 2$ या $3)$ की सीमा को परिभाषित किया है : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ है, यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ लिए धनात्मक वास्तविक संख्या δ (जो ε पर निर्भर है), ताकि $0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ है।

2) अनेक चरों वाले वास्तविक-मान फलनों के लिए सांतत्य को परिभाषित किया है : $\boldsymbol{a}$ पर एक फलन f संतत है, यदि $\lim_{x \to a} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$. है। अर्थात् यदि $\varepsilon > 0$ दिया रहने पर एक वास्तविक संख्या $\delta > 0$ (जो ε पर निर्भर है) का अस्तित्व है, ताकि $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon$ है।

3) संतत फलनों के बीजगणित तथा दो संतत फलनों के संयुक्त फलन के सांतत्य के बारे में परिणामों के कथन देकर उन्हें सिद्ध किया है।

4) पुनरावृत्त सीमाओं तथा उनके गुणपत सीमा से संबंध की चर्चा की है।

2.6 हल / उत्तर

E1) क) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ रखिए। तब,

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r\cos\theta.\ r\sin\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}}\right|$$

$$= \left|\frac{r^2\ \cos\theta\ \sin\theta}{r}\right|$$

$$\leq r = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$$

अतः, जब $\|(x,y)\|$ शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, तब $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ भी शून्य की ओर प्रवृत्त होता है।

ख) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ रखिए। तब,

$$\left|\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r^2\cos^2\theta.\ r^2\sin^2\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta}}\right|$$

$$\left|\frac{r^4\cos^2\theta.\sin^2\theta}{r}\right|$$

$$\leq r^3 = \left(x^2+y^2\right)^{3/2} = \|(x,y)\|^3.$$

अब, जब $\|(x,y)\|$ शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, तब $\|(x,y)\|^3$ भी शून्य की ओर प्रवृत्त होता है तथा इसीलिए $\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ शून्य की ओर प्रवृत्त होता है।

E2) क) सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} (x^2+3xyz-5z^2) = -20$$

तथा

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} (xy^3+5z^2-3xy+x^3) = 20$$

पुनः सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \left(\frac{x^2+3xyz-5z^2}{xy^3+5z^2-3xy+x^3}\right)$$

$$=\frac{\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} (x^2+3xyz-5z^2)}{\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} (xy^3+5z^2-3xy+x^3)} = \frac{-20}{20} = -1$$

ख) अब, $|x\sin y| \le |x|$ और इसलिए, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin y = 0$.

सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2+1) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x^2 + \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 0+1 = 1.$$

पुनः, सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करते हुए, हम प्राप्त करते हैं :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x\sin y}{2x^2+1}\right) = \frac{\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin y}{\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2+1)} = \frac{0}{1} = 0$$

E3) क) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^4+y^2}$ है। पथ $y = x^2$ के अनुदिश,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ है।}$$

पथ $y = 2x^2$ के अनुदिश, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ है।

इसलिए, सीमा का अस्तित्व नहीं है।

ख) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ है। पथ $y = x^3$, के अनुदिश सीमा ½ है तथा पथ $y = 2x^3$ के अनुदिश सीमा 1/5 है। इसलिए, सीमा का अस्तित्व नहीं है।

ग) $f(x,y) = \dfrac{2x^2}{x^2-y^2+x}$ है। पथ $y = x$ के अनुदिश

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 2x = 0 \text{ है।}$$

पथ $y^2 = x$ के अनुदिश $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 2 = 2$ है।
इसलिए, सीमा का अस्तित्व नहीं है।

घ) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$ पथ $y = 0$ के अनुदिश, अर्थात् x-अक्ष के अनुदिश,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$ है तथा पथ $x = 0$. के अनुदिश, अर्थात्,

y-अक्ष के अनुदिश, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} -1 = -1$ है।

अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

E4) क) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

यदि हम $y = \phi_1(x) = mx$ रखे, तो

$$f(x,\phi_1(x)) = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \text{ है।}$$

m के भिन्न-भिन्न मानों के लिए, उपरोक्त मान भिन्न-भिन्न है, जो यह दर्शाया है कि इस फलन की विभिन्न दिशाओं में विभिन्न सीमाएँ है। अतः, सीमा का अस्तित्व नहीं है।

ख) उपप्रमेय 1 को दृष्टिगत रखते हुए, यह सिद्ध करना पर्याप्त है कि वास्तविक मान फलनों $\lim_{x\to 0} \phi_1(x) = 0 = \lim_{x\to 0} \phi_2(x)$ का अस्तित्व है तथा $\lim_{x\to 0} f(x,\phi_1(x)) \neq \lim_{x\to 0} f(x,\phi_2(x))$ है।

मान लीजिए कि $\phi_1(x) = x^2$ और $\phi_2(x) = x - x^2$ हैं। तब,

$\lim_{x\to 0} \phi_1(x) = \lim_{x\to 0} \phi_2(x) = 0$ है।

साथ ही, $\lim_{x\to 0} f(x,\phi_1(x)) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ है।

तथा
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x,\phi_2(x)) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x - x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} x = 0\end{aligned}$$

इस प्रकार, $\lim_{x\to 0} f(x,\phi_1(x)) \neq \lim_{x\to 0} f(x,\phi_2(x))$ है।

अतः, उपप्रमेय 1 से, सीमा का अस्तित्व नहीं है।

ग) मान लीजिए कि $\phi_1(x) = x$ और $\phi_2(x) = -x$ है।

$$\lim_{x\to 0} f(x, \phi_1(x)) = \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} + \frac{2.x.x}{x^2 + x^2} = 1 \text{ है।}$$

इसी प्रकार, $\lim_{x\to 0} f(x, \phi_2(x)) = \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} - \frac{2.x.x}{x^2 + x^2} = -1$ है।

इसी प्रकार, $\lim_{x\to 0} f(x, \phi_1(x)) \neq \lim_{x\to 0} f(x, \phi_2(x))$ है। अतः, सीमा का अस्तित्व नहीं है।

E5) क) हमें ऐसा δ ज्ञात करना है, ताकि यदि $|x| < \delta, |y| < \delta$ और $|z| < \delta$, हो, तो $|x^2 + y^2 + z^2| < 0.01$ है।

अब, $|x| < \delta, |y| < \delta$ और $|z| < \delta \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 3\delta^2$ है।

तब, यदि हम δ चुने तकि $3\delta^2 < 0.01$ है, तो हमारी समस्या हल हो जाएगी। इसलिए किसी भी धनात्मक संख्या, जो $\sqrt{\frac{0.01}{3}}$ से छोटी है, से काम बन जाएगा। उदाहरण के लिए, हम $\delta = 0.05$ ले सकते हैं।

ख) हमें ऐसा δ ज्ञात करना है, ताकि यदि $|x| < \delta, |y| < \delta$ है, तो $|xy| < 0.0004$ δ हो। यदि $|x| < \delta, |y| < \delta$ है, तो $|xy| < \delta^2$ है। इसलिए, हम कोई भी ऐसा δ ले सकते हैं ताकि $\delta^2 < 0.0004$ हो। इसलिए, $\sqrt{0.0004}$ से छोटी किसी धनात्मक संख्या से काम बन जाएगा। उदाहरण के लिए $\delta = 0.01$ है।

E6) हम ध्यान देते हैं कि

$$\left|\frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = 2|y|$$

मान लीजिए कि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ है। तब, यदि हम $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ चुनें, तो हम प्राप्त करते हैं $0 < \|(x, y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. इसका तात्पर्य है कि $|y| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ है। तथा ऊपर दी हुई असमिका से मिलकर यह अर्थ निकलता है कि जब भी $|y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ हम प्राप्त करते हैं :

$$\left|\frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \leq 2|y| \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

अतः, सीमा 0 है।

E7) क) सर्वप्रथम, हम यह ध्यान देते हैं कि यह सिद्ध करने के लिए कि एक फलन किसी बिंदु पर असंतत है, यह दर्शाना पर्याप्त है कि किसी विशिष्ट दिशा में सीमा का अस्तित्व है तथा यह $f(0,0)$ के बराबर नहीं है।

मान लीजिए कि $\phi_1\,(x) = x$ है। तब,

$$\lim_{x\to 0} f(x,\phi_1\,(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1} = 0 \neq 2 = f(0,0) \text{ है।}$$

अतः, (0, 0) पर f संतत नहीं है।

ख) आप उदाहरण 1 में पहले ही देख चुके हैं कि

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(y\sin\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{y}\right) = 0 \text{ है।}$$

परंतु $f(0,0) = 1$ है। अतः, (0, 0) पर फलन संतत नहीं है।

सावधानी : जब भी आप इस प्रश्न का हल लिखें, आपको दर्शाना चाहिए कि

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(y\sin\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{y}\right) = 0$$ है। केवल उदाहरण 1 का संदर्भ ही न दिखाएँ।

E8) मान लीजिए कि $a = (a_1, a_2) \in \boldsymbol{R}^2$ है। हम पहले दर्शाते हैं कि

$\lim_{x\to a} p_1(x) = p_1(a)$ है।

ध्यान दीजिए कि किसी $\boldsymbol{x},\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^2$, के लिए, हमें प्राप्त है :

$|p_1(\boldsymbol{x}) - p_1(\boldsymbol{a})| = |p_1(x_1,x_2) - p_1(a_1,a_2)| = |x_1 - a_1|$, है, जहाँ

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$.

मान लीजिए कि $a > 0$ दिया हुआ है। $\delta_1 = \varepsilon$ लीजिए। तब,

$0 < |x_1 - a_1| < \delta_1 \Rightarrow |p_1(x) - p_1(a)| = |x_1 - a_1| < \delta_1 = \varepsilon$ है।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि $\lim_{x\to a} p_1(x) = p_1(a)$ है।

अतः, a पर p_1 संतत है। क्योंकि $\boldsymbol{R}^2$ में a एक स्वैच्छिक बिंदु था, इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि p_1 सम्पूर्ण $\boldsymbol{R}^2$ पर संतत है।

संकेत : इसी प्रकार का तर्क दर्शाता है कि प्रतिचित्रण p_2 संतत है।

E9) क) मान लीजिए $f(x,y,z) = x\sin y + y\sin z + z\sin x)$ है।

$|x\sin y + y\sin z + z\sin x| \leq |x| + |y| + |z|$

अतः, $|x| < \frac{\varepsilon}{3}, |y| < \frac{\varepsilon}{3}$ और $|z| < \frac{\varepsilon}{3}$ का तात्पर्य है कि

$|x\sin y + y\sin z + z\sin x| < \varepsilon$ है।

अतः, $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} (x\sin y + y\sin z + z\sin x) = 0 = f(0,0,0)$ है। क्योंकि यह सीमा $f(0,0,0)$ के बराबर है, इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि (0, 0, 0) पर फलन संतत है।

ख) मान लीजिए कि $f(x,y,z) = e^x \cos y + e^y \cos z + e^z \cos x$ है। सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करने पर,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (e^x \cos y + e^y \cos z + e^z \cos x) =$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} e^x . \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \cos y + \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} e^y .$$

$$\therefore \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \cos z + \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} e^z . \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \cos x = 1+1+1 = 3 = f(0,0,0)$$

(ध्यान दीजिए कि $\lim_{t\to 0} e^t = 1$, और $\lim_{t\to 0} \cos t = \cos 0 = 1$ हैं।)

यह प्रदर्शित करता है कि (0, 0, 0) पर f संतत है।

ग) मान लीजिए कि $f(x,y,z) = \ln\,(1 + x^2 + y^2 + z^2)$ है।

तब, $f = g \circ h$ जहाँ $h(x,y,z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$ है तथा $g(t) = \ln t$ है।

स्पष्टतः, (0, 0, 0) पर फलन h संतत है तथा $h(0,0,0) = 1$ पर g संतत है। क्योंकि दो संतत फलनों का संयुक्त फलन संतत होता है, इसलिए (0, 0, 0) पर f संतत है।

घ) $f(x_1, x_2, x_3) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ है।
मान लीजिए कि $f_i(x_1, x_2, x_3) = |x_i|$, $i = 1,2,3$ है। तब, $f_i, i = 1,2,3$ तीन चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन है तथा $f = f_1 + f_2 + f_3$ है। साथ ही, $f_i = go\pi_i$ है, जहाँ $g(t) = |t|$ है। प्रत्येक i के लिए, (0, 0, 0) पर फलन π_i संतत है तथा $\pi_i(0,0,0) = 0$ पर g संतत है। इसलिए, दो संतत फलनों का संयुक्त फलन होने के कारण (0, 0, 0) पर f_i संतत है। तब, सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करते हुए, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि (0, 0, 0), पर f संतत है।

E10) हम पहले ही E5 (क) के हल में देख चुके हैं कि $(0,0)$ पर फलन

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ की युगपत सीमा का अस्तित्व नहीं है। पुनरावृत्त सीमाओं $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right]$ और $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right]$ का अस्तित्व है और ये 0 के बराबर है, क्योंकि,

$\lim_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$ और $\lim_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$ है।

E11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{y-x}{y+x}\dfrac{1+x^2}{1+y^2}\right)=\dfrac{y}{y(1+y^2)}=\dfrac{1}{1+y^2}$ है।

अतः, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y-x}{y+x}\dfrac{1+x^2}{1+y^2}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{1+y^2}=1$ है।

अब,

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{y-x}{y+x}\cdot\dfrac{1+x^2}{1+y^2}\right)=\dfrac{-x(1+x^2)}{x}=-(1+x^2)$ है। इसलिए,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{y-x}{y+x}\cdot\frac{1+x^2}{1+y^2}\right)\right)=-1$$

यह प्रदर्शित करता है कि दोनों पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व है और ये बराबर नहीं है। इसलिए, युगपत सीमा

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)(1+x^2)}{(y+x)(1+y^2)}$ का अस्तित्व नहीं है। (प्रमेय 8 के अनुप्रयोग से)

E12) यदि $x\neq 0, f(x,y)=1+xy$, और $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$ है, तो

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]=1$ है।

(ध्यान दीजिए कि यदि $x=0$ है, तो $f(x,y)=0$ तथा $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$ है।

परंतु $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]=1$ ज्ञात करने के लिए, इस पर विचार करने की आवश्यकता नहीं है)

इसी प्रकार, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\right] f(x,y) \;=1$ है।

$y=\phi_1(x)=x$ पर विचार कीजिए। तब, हम $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\phi_1(x))=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1$ प्राप्त करते हैं।

जब हम $y=\phi_2(x)=0$ लेते हैं, तब हम प्राप्त करते हैं

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,\phi_2(x))=0$

क्योंकि प्रत्येक x के लिए $y=0\Rightarrow xy=0\Rightarrow f(x,y)=0$

इससे यह प्रदर्शित होता है कि युगपत सीमा का अस्तित्व नहीं है।

– x –

इकाई 3

प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज और अवकलनीयता

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

आप एक वास्तविक चर के एक वास्तविक-मान फलन के अवकलज की संकल्पना से पहले से ही परिचित हो चुके हैं (पाठ्यक्रम, खंड 3, इकाई 9)। इस इकाई में, हम $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, तक $(n = 2, 3)$ के फलनों के लिए, इस संकल्पना का अध्ययन करेंगे। आप देख चुके हैं कि सीमा और सांतत्य की धारणाओं को इन फलनों के लिए विस्तृत किया जा सकता है। परंतु एक वास्तविक चर वाले वास्तविक-मान फलन के अवकलज की परिभाषा का 2 चरों या 3 चरों वाले एक वास्तविक-मान फलन f के लिए अक्षरशः अनुप्रयोग नहीं किया जा सकता है। इसका कारण यह है कि किसी $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{h} \neq 0$, के लिए, भागफल $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ का कोई अर्थ नहीं है, क्योंकि $\boldsymbol{R}^2$ या $\boldsymbol{R}^3$ में किसी अवयव से भाग देना परिभाषित नहीं है।

फिर भी, यदि हम एक अवकलज की परिभाषा की ध्यानपूर्वक जाँच करें, तो हम अनुभव करेंगे कि एक चर वाला फलन किसी बिंदु पर अवकलनीय होता है, यदि और केवल यदि दो दिक्-अवकलज (directional derivatives) अर्थात् दक्षिण (दाएँ) पक्ष अवकलज और वाम (बाएँ) पक्ष अवकलज के अस्तित्व हो तथा वे इस बिंदु पर बराबर हों। कठिनाई केवल यह है कि $\boldsymbol{R}^2$, (या $\boldsymbol{R}^3$) में हमें अपरिमित रूप से अनेक दिशाओं के साथ कार्य

करना होता है, जो निर्देशांक अक्षों के समांतर है। यही हमें आंशिक अवकलजों की धारणा की ओर अग्रसित करता (पहुंचाता) है।

अनुच्छेद 3.2 में, हम विस्तृत रूप से एक से अधिक चरों के फलनों के आंशिक अवकलजों की संकल्पना की चर्चा करेंगे। ध्यान दीजिए कि आंशिक अवकलजों की यह धारणा किसी वास्तविक चर वाले एक वास्तविक-मान फलन के अवकलज की संकल्पना को पूर्ण रूप से व्यापीकृत नहीं करती है। इसके बाद अनुच्छेद 3.3 में, हम $\boldsymbol{R}^3$ (या $\boldsymbol{R}^2$) पर फलनों के लिए अवकलनीयता की संकल्पना का परिचय देंगे तथा अवकलनीयता, सांतत्य और आंशिक अवकलजों के अस्तित्व के बीच संबंधों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- 2 या 3 चरों वाले फलनों के लिए प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों को परिभाषित कर पाएँगे;
- इसकी जाँच कर पाएँगे कि एक विशिष्ट मान चर के सापेक्ष 2 या 3 चरों वाले एक दिए हुए वास्तविक-मान फलन के आंशिक अवकलज का अस्तित्व है या नहीं तथा यदि अस्तित्व है, तो इस आंशिक अवकलज के अभिकलित कर पाएँगे;
- दो चरों वाले फलन के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज का ज्यामितीय विवेचन कर पाएँगे;
- यह निर्णय ले पाएँगे कि दो या तीन चरों वाला एक दिया हुआ फलन अवकलनीय है या नहीं; और
- दो चरों वाले एक फलन के लिए, किसी बिंदु पर सांतत्य, अवकलनीयता आंशिक अवकलजों के अस्तित्व के बीच संबंध स्थापित करने के लिए उदाहरण दे पाएँगे।

3.2 प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज

इस अनुच्छेद में, हम देखेंगे कि किसी बिंदु पर एक फलन के आंशिक अवकलज का क्या अर्थ है। हम पहले से ही यह जानते हैं कि एक अकेले चर वाले किसी फलन के अवकलज को किस प्रकार परिभाषित किया जाता है। हम इस ज्ञान का अनेक चरों वाले फलनों के आंशिक अवलकजों को परिभाषित करने में प्रयोग करेंगे।

हम कुछ परिभाषाओं और उदाहरणों से प्रारंभ करेंगे।

3.2.1 परिभाषाएँ और उदाहरण

आइए एक स्थिति से प्रारंभ करें।

स्थिति: ऊष्मा सूचकांक (heat index) , जिसे हम I से व्यक्त करते हैं, वायु तापमान प्रदर्शित करता है, जबकि फारेनहाइट में वास्तविक तापमान t है तथा सापेक्षिक आर्द्रता h हैं अतः, I दो चरों t और h का एक फलन है, अर्थात् $I = f(t, h)$ है।

नीचे दी हुई सारणी t और h के विभिन्न मानों के संगत I के मान प्रदत्त करती (देती) है। (यह सारणी राष्ट्रीय मौसम सेवा द्वारा संकलित मानों की सारणी का एक भाग है।)

सारणी 1: तापमान और आर्द्रता के एक फलन के रूप में ऊष्मा सूचकांक I

	T \\ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
	90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
वास्तविक	92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
तापमान (°F)	94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
	96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
	98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
	100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

इस सारणी को ध्यान से देखने पर, आप देख सकते हैं कि तापमान के सम्मुख पंक्ति विभिन्न आर्द्रता सूचकांकों के लिए, ऊष्मा सूचकांक के विभिन्न मानों को दर्शाती है, जैसे एक निश्चित तापमान के मान $t = 94$ के लिए $h = 104, 107, 111, 118, 122, 127, 132$ और 137 है। इसका अर्थ है कि इस स्थिति में, ऊष्मा सूचकांक I को एक निश्चित मान $t = 94$ के साथ एक चर h का फलन माना जा सकता है। आइए एक चर वाले इस फलन को $g(h) = f(94, h)$ से व्यक्त करें। तब, यह $g(h)$ वर्णित करता है कि आर्द्रता में परिवर्तन होने पर ऊष्मा सूचकांक I में किस प्रकार परिवर्तन होता है, जबकि तापमान 94 है एक चर वाली स्थिति से, हम जानते हैं कि h के सापेक्ष I में परिवर्तन की दर, जब $t = 94^\circ$ है, h के सापेक्ष के सापेक्ष अवकलज कहलाता है, जिसे $g'(h)$ से व्यक्त करते हैं। साथ ही, $h = h_0$ के लिए, हमें प्राप्त है :

$$g'(h_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h_0 + h) - g(h_0)}{h} \tag{1}$$

तब, f का g' चर h के सापेक्ष आंशिक अवकलज (partial derivative) कहलाता है।

इसी प्रकार, मान लीजिए कि हम $h = 75$ निश्चित कर लेते हैं। तब $h = 75$ के सम्मुख स्तंभ तापमानों $t = 109, 115, 122, 120, 138,$ और 147 के लिए, I के मान प्रदर्शित करता है। इस प्रकार, यदि हम $k(t) = f(t, 75)$ व्यक्त करें, तो k एक चर वाला फलन है तथा इसका बिंदु $t = t_0$ पर अवकलज निम्नलिखित द्वारा प्रदत्त होता है:

$$k'(t_0) = \lim_{t\to 0} \frac{k(t_0 + t) - k(t_0)}{t} \tag{2}$$

तब, f का k' चर t के सापेक्ष आंशिक अवकलज कहलाता है। उपरोक्त स्थिति यह दर्शाती है कि यदि f दो चरों x और y का एक फलन है मान लीजिए कि हम, y को निश्चित (मान लीजिए) $y = b$ रखते हुए, केवल x को बदलने देते हैं, तो वास्तव में हम एक चर x वाले फलन, अर्थात् $g(x) = f(x, b)$ पर ही विचार कर रहे हैं। यदि फलन g का किसी बिंदु $a \in \mathbf{R}$ पर कोई अवकलज है, तो x के सापेक्ष g का यह अवकलज **x के सापेक्ष f** का **आंशिक अवकलज** कहलाता है। अब, हम इसे औपचारिक रूप से परिभाषित करते हैं।

परिभाषा 1: यदि f दो चरों x और y का एक फलन है, तो x के सापेक्ष f के **आंशिक अवकलज** को फलन

$$f_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, b) - f(x, y)}{h} \tag{3}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।

जब हमें किसी विशिष्ट बिंदु (a, b) पर आंशिक अवकलज b_X अभिकलित करना होता है, तब हम निम्नलिखित का प्रयोग करते हैं :

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \tag{4}$$

इस प्रकार, हम y के सापेक्ष आंशिक अवकलज को परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा 2: यदि f दो चरों x और y का एक फलन है, तो y के सापेक्ष f के **आंशिक अवकलज** को फलन

$$f_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{h} \tag{5}$$

जब, हमें किसी विशिष्ट बिंदु (a, b) पर आंशिक अवकलज f_y अभिकलित करना होता है, तब हम निम्नलिखित का प्रयोग करते हैं :

$$f_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} \tag{6}$$

यदि आप ऊष्मा सूचकांक की स्थिति पर वापस जाते हैं, जिसकी चर्चा हमने प्रारंभ में की थी, तो आप यह देखेंगे कि समीकरण (1) में हमने जिस अवकलज पर विचार किया है वस्तुतः बिंदु $(94, h_0)$ पर h के सापेक्ष I का आंशिक अवकलज है जिसे $I_h(94, h_0)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अचर सापेक्ष आर्द्रता $h = 75$ के साथ ऊष्मा सूचकांक I का किसी बिंदु t_0 पर आंशिक अवकलज $I_0(t_0, 75)$ है।

एक दिए हुए फलन के आंशिक अवकलजों को व्यक्त करने के लिए, गणित के ग्रंथों में विभिन्न संकेतन उपलब्ध हैं। परंतु, हम केवल निम्नलिखित संकेतनों का ही प्रयोग करेंगे :

आंशिक अवकलजों के लिए संकेतन

x के सापेक्ष आंशिक अवकलज

$$f_x,\ D_1 f,\ \frac{\partial f}{\partial x}$$

y के सापेक्ष आंशिक अवकलज

$$f_y,\ D_2 f,\ \frac{\partial f}{\partial y}$$

आप कलन पाठ्यक्रम में यह देख चुके हैं कि हम एक वास्तविक चर के एक वास्तविक मान फलन को व्यक्त करने के लिए, $y = f(x)$ लिखते हैं। दो चरों वाले फलनों के

लिए, परंपरागत रूप से इन्हें $z = f(x, y)$ लिखा जाता है तथा बिंदु (a, b) पर f के दोनों आंशिक अवकलजों को $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,\ b)}$ और $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,\ b)}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

टिप्पणी 1: i) ध्यान दीजिए कि (सांतत्य की तरह ही) किसी फलन के आंशिक अवकलज की धारणा अभिलक्षणित रूप में स्थानीय होती है। अर्थात्, हम एक बिंदु पर किसी फलन के आंशिक अवकलज के अस्तित्व की जाँच करते हैं। इस प्रकार, जब हम यह कहते हैं कि किसी समुच्चय A पर एक फलन के आंशिक अवकलज का अस्तित्व है, तब हमारे कहने का अर्थ यह होता है कि A के प्रत्येक बिंदु पर उस फलन के आंशिक अवकलज का अस्तित्व है।

ii) किसी बिंदु पर एक आंशिक अवकलज की परिभाषा से यह स्पष्ट है कि उस बिंदु के एक प्रतिवेश में वह फलन अवश्य ही परिभाषित होना चाहिए। साथ ही, हम आंशिक अवकलजों की बात केवल प्राँत D के आंतरिक बिंदुओं पर ही कर सकते हैं। उदाहरण के fy ,] ; fn $\boldsymbol{R}^2$ में D एक चक्रिका (disc) है, तो हम इस चक्रिका की परिधि पर स्थिति किसी बिंदु पर आंशिक अवकलज की बात नहीं कर सकते।

तीन चरों वाले एक फलन के लिए, हम आंशिक अवकलजों को दो चरों वाले फलन की तरह ही परिभाषित कर सकते हैं, जैसा कि नीचे परिभाषा में दिया गया है :

परिभाषा 3: यदि एक फलन f तीन चरों x, y और z का है, तो उसके क्रमशः x, y और z के सापेक्ष आंशिक अवकलज निम्नलिखित द्वारा प्रदत्त होते हैं :

$$f_x(x, y, z) = \lim_{p\to 0} \frac{f(x+p, y, z) - f(x, y, z)}{p} \tag{7}$$

$$f_y(x, y, z) = \lim_{q\to 0} \frac{f(x, y+q, z) - f(x, y, z)}{q} \tag{8}$$

$$f_z(x, y, z) = \lim_{r\to 0} \frac{f(x, y, z+r) - f(x, y, z)}{r} \tag{9}$$

जब हमें विशिष्ट बिंदु (a,b,c) पर आंशिक अवकलज अभिकलित करने होते हैं, तब हम निम्नलिखित का प्रयोग करते हैं :

$$f_x(a, b, c) = \lim_{p\to 0} \frac{f(a+p,\ b,\ c) - f(a,\ b,\ c)}{p} \tag{10}$$

$$f_y(a,b,c) = \lim_{q\to 0} \frac{f(a,b+q,c) - f(a,b,c)}{q} \tag{11}$$

$$f_z(a,b,c) = \lim_{r\to 0} \frac{f(a,b,c+r) - f(a,b,c)}{r} \tag{12}$$

अब हम यह दर्शाने के लिए कि एक दिए हुए बिंदु पर किसी फलन के आंशिक अवकलज किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं कुछ उदाहरण देंगे। यदि हम आंशिक

अवकलजों को परिकलित करने के लिए कोई विशिष्ट बिंदु नहीं लिखेंगे, तो इसका अर्थ होगा इन्हें (3), (5), (7), (8) और (9) में दिए व्यंजकों का प्रयोग करते हुए, व्यापक बिंदु (x, y) या (x, y, z) पर परिकलित किया जाता है।

उदाहरण 1: मान लीजिए कि $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$ से परिभाषित एक फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ है। $f_x(x, y)$ और $f_y(x, y)$ ज्ञात कीजिए।

हल: परिभाषा द्वारा,

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h)y + y^3 - x^2 - xy - y^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + xy + hy + y^3 - x^2 - xy - y^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h + y)$$

$$= 2x + y$$

इसी प्रकार ,

$$f_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,\ y+k) - f(x, y)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{x^2 + x(y+k) + (y+k)^3 - x^2 - xy - y^3}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{xk + 3y^2k + 3yk^2 + k^3}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} (x + 3y^2 + 3yk + k^2)$$

$$= x + 3y^2$$

***

जब हम दो चरों x और y वाले फलनों पर विचार कर रहे होते हैं, तब हम x में वृद्धि के लिए, सामान्यतः अक्षर h तथा y में वृद्धि के लिए अक्षर k का प्रयोग करते हैं। इसी प्रकार, जब हम तीन चरों x, y और z वाले फलनों के साथ कार्य करते हैं, तब हम x, y और z में वृद्धियों के लिए, क्रमशः अक्षरों p, q और r का प्रयोग करते हैं। यह केवल एक रिवाज़ है, नियम नहीं।

अगले उदाहरण में, हम तीन चरों वाले एक फलन पर विचार कर रहे हैं।

उदाहरण 2: मान लीजिए कि $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ से परिभाषित एक फलन $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ है। बिंद (a,b,c) पर आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: परिभाषा द्वारा,

$$f_x(a,b,c)=\lim_{p\to 0}\frac{f(a+p,b,c)-f(a,b,c)}{p}$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{(a+p)b+bc+c(a+p)-ab-bc-ca}{p}$$

$$= \mathrm{b} + \mathrm{c}$$

$$f_y(a,b,c)=\lim_{q\to 0}\frac{f(a,\,b+r,\,c)-f(a,b,c)}{q}$$

$$=\lim_{q\to 0}\frac{a(b+q)+(b+q)c+ca-ab-bc-ca}{q}$$

$$=a+c$$

$$f_z(a,b,c)=\lim_{r\to 0}\frac{f(a,\,b,\,c+r)-f(a,b,c)}{r}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{ab+b(c+r)+(c+r)a-ab-bc-ca}{r}$$

$$=b+a$$

***

उदाहरण 3: मान लीजिए $f(x,\,y,\,z)=x^2+y^2+z^2$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ है। बिंदु $(-1, 0, 2)$ पर x, y, z के सापेक्ष f के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ हम (10), (11) और (12) में दिए व्यंजकों का प्रयोग करेंगे। अतः, हम प्राप्त करते हैं।

$$f_x(-1,\,0,\,2)=\lim_{p\to 0}\frac{f(-1+p,\,0,\,2)-f(-1,\,0,\,2)}{p}$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{(-1+p)^2+0^2+2^2-5}{p}$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{-2p+p^2+4-5}{p}$$

$$=\lim_{p\to 0}-2+p$$

$$= -2$$

$$f_y(-1, 0, 2) = \lim_{q \to 0} \frac{f(-1, 0+q, 2) - f(-1, 0, 2)}{q}$$

$$= \frac{(-1)^2 + q^2 + 4 - 5}{q}$$

$$= 0$$

$$f_z(-1, 0, 2) = \lim_{r \to 0} \frac{f(-1, 0, 2+r) - f(-1, 0, 2)}{r}$$

$$= \lim_{r \to 0} 1 + \frac{4 + 4r + r^2 - 5}{r}$$

$$= 4$$

***

आपके सम्मुख $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ तक के फलन ऐसे अवश्य ही आए होंगे, जिनके कुछ बिंदुओं पर अवकलज नहीं होते हैं। उदाहरणार्थ, $f(x) = |x|$ को $x = 0$ पर अवकलित नहीं किया जा सकता है। यहाँ, हम दो चरों वाले फलनों के उदाहरण दे रहे हैं, जिनके कुछ बिंदुओं पर आंशिक अवकलजों का अस्तित्व नहीं हो पाता है।

उदाहरण 4: मान लीजिए $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ है। दर्शाइए कि (0, 0, 0) पर f के तीनों आंशिक अवकलजों में से किसी का भी अस्तित्व नहीं है।

हल: (0,0,0) पर f का आंशिक अवकलज f_x निम्नलिखित द्वारा प्रदत्त है :

$$f_x(0, 0, 0) = \frac{f(0 + p, 0, 0) - f(0,0,0)}{p} = \frac{|p|}{p}.$$

हमें प्राप्त है : $\lim\limits_{p \to 0^+} f_x(0, 0, 0) = \lim\limits_{\substack{p \to 0 \\ p > 0}} \frac{|p|}{p} = \lim\limits_{\substack{p \to 0 \\ p > 0}} \frac{p}{p} = 1,$

तथा $\lim\limits_{p \to 0^-} f_x(0, 0, 0) = \lim\limits_{\substack{p \to 0 \\ p < 0}} \frac{|p|}{p} = \lim\limits_{\substack{p \to 0 \\ p < 0}} \frac{-p}{p} = -1.$

अतः, $\lim\limits_{p \to 0} f_x(0,0,0)$ का अस्तित्व नहीं है।

इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि $\lim\limits_{q \to 0} f_y(0,0,0)$ और $\lim\limits_{r \to 0} f_z(0,0,0)$ का भी अस्तित्व नहीं है। इस प्रकार, (0,0,0) पर f के किसी भी प्रथम कोटि अवकलज का अस्तित्व नहीं है।

***

उदाहरण 5: यदि $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, y \neq 0, x \neq 0 \\ 0 \quad , \text{अन्यथा} \end{cases}$$

तो दर्शाइए कि $f_x(0,1)$ और $f_y(1,0)$ के अस्तित्व नहीं है।

हल: इसे सिद्ध करने के लिए, हम पहले यह देखेंगे।

$$\frac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h}=\frac{h+\frac{1}{h}-0}{h}=1+\frac{1}{h^2}$$

तथा $$\frac{f(1,0+k)-f(1,0)}{k}=\frac{\frac{1}{k}+k-0}{k}=\frac{1}{k^2}+1\cdot$$

क्योंकि $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}=\infty$ है इसलिए न हो

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h}$ का और न ही $\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(1,0+k)-f(1,0)}{k}$ का अस्तित्व है।
अतः क्रमशः बिंदुओं $(0,1)$ और $(1,0)$ पर f_x और f_y के अस्तित्व नहीं है।

***

अब इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) मान लीजिए कि $f(x,y)=c$ द्वारा सभी (x,y) के लिए परिभाषित एक अचर फलन $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ है। दर्शाइए कि सभी बिंदुओं (a,b) के लिए,

$f_x(a,b)=0=f_y(a,b)$ है।

E2) मान लीजिए कि $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है :

$$f(x,y)=\begin{cases}1 \text{ यदि } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ यदि } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

दर्शाईए कि $f_x(0,0)$ तथा $f_y(0,0)$ के अस्तित्व नहीं है।

E3) मान लीजिए कि $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है

$$f(x,y)=\begin{cases}x \text{ यदि } (x,\,y,\,z)\neq(0,0,0)\\ 0 \text{ यदि } (x,\,y,\,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

दर्शाइए कि $f_x(0,\,0,\,0)=1$, $f_y(0,\,0,\,0)=0$ और $f_z(0,\,0,\,0)=0$ है।

इन उदाहरणों और प्रश्नों से आपने देखा लिया होगा कि $f_x(x,y)$ और कुछ नहीं परंतु केवल $f(x,y)$ का अवकलज है, जब कि इसे अकेले चर x का फलन माना गया हो और y को एक अचर माना गया हो। इसी प्रकार, $f_y(x,y)$ और कुछ नहीं परंतु केवल $f(x,y)$ का अवकलज है, जबकि x को अचर मानते हुए इसे y का फलन माना गया हैं। इस प्रकार, आंशिक अवकलजों को परिकलित करने के लिए, हम एक अकेले वास्तविक चर वाले फलनों के अवकलज परिकलित करने के अपने ज्ञान का उपयोग कर सकते हैं।

दो चरों वाले एक फलन $f(x,y)$ के आंशिक अवकलज ज्ञात करने के लिए नियम

1. f_x, ज्ञात करने क लिए, y को अचर मानिए और $f(x,y)$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

2. f_y, ज्ञात करने के लिए x को अचर मानिए और $f(x,y)$ को y के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

तीन चरों वाले एक फलन $f(x,y,z)$ के आंशिक अवकलज ज्ञात करने के लिए नियम

1. f_x, ज्ञात करने के लिए y और z को अचर मानिए तथा $f(x,y)$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

2. f_y, ज्ञात करने के लिए, x और z को अचर मानिए तथा $f(x,y)$ को y के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

3. f_z, ज्ञात करने के लिए, x और y को अचर मानिए तथा $f(x,y)$ को z के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

नोट 1: आंशिक अवकलज को अभिकलित करने से पहले, इसकी जाँच करना महत्वपूर्ण है कि उस फलन को एक अकेले चर का फलन मानने पर, उसके अवकलज का अस्तित्व है या नहीं।

नोट 2: यदि हम आंशिक अवकलज परिकलित करने के लिए, कोई बिंदु निर्दिष्ट नहीं करते हैं, तो उसका अर्थ यह है कि उन्हें एक व्यापक बिंदु (x, y) या (x, y, z) पर $n=2$ या $n=3$ के अनुसार परिकलित करना है।

इसे स्पष्ट करने के लिए, यहाँ एक उदाहरण है।

उदाहरण 6: मान लीजिए कि $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$ द्वारा प्रदत्त कोई फलन $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ है। $f_x(x, y)$ और $f_y(x, y)$ ज्ञात कीजिए।

हल: विधि 1: परिभाषा से,

$$f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h)y + y^3 - x^2 - xy - y^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + xy + hy + y^3 - x^2 - xy - y^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h + y)$$

$$= 2x + y$$

इसी प्रकार,

$$f_y(x, y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x\ y)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{x^2 + x(y+k) + (y+k)^3 - x^2 - xy - y^3}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{xk + 3y^2k + 3yk^2 + k^3}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} (x + 3y^2 + 3yk + k^2)$$

$$= x + 3y^2$$

विधि 2: हम $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y)$ लिखते हैं, जहाँ

$f_1(x, y) = x^2,\ f_2(x, y) = xy,\ f_3(x, y) = y^3$ है।

मान लीजिए कि हम चर x के सापेक्ष f_1, f_2 और f_3 के आंशिक अवकलज ज्ञात करते हैं। उदाहरणार्थ, f_1 अर्थात् x^2 अकेले चर x का एक फलन है और इसका अवकलज $2x$ है।

जबकि f_2 अर्थात् xy दो चरों वाला एक फलन है। f_2 का आंशिक अवकलज ज्ञात करने के लिए, हम y को अचर मानते हैं और इसीलिए सीधे अवकलन द्वारा f_2 का अवकलज y है।

फलन f_3 एक अकेले चर y का फलन है। आंशिक अवकलज ज्ञात करने के लिए, हम y को अचर मानते हैं और इसीलिए सीधे अवकलन द्वारा f_3 का अवकलज 0 है। कृपया ध्यान दीजिए कि एक अचर फलन का अवकलज 0 होता है।

तब, चर x के सापेक्ष f_1, f_2 और f_3 के आंशिक अवकलजों का योग $2x + y$ है। यह हमारे द्वारा विधि 1 से परिकलित f के आंशिक अवकलज के अतिरिक्त कुछ नहीं है।

इसी प्रकार, हम y के सापेक्ष f_1, f_2 और f_3 के आंशिक अवकलज, x को अचर मानते हुए, ज्ञात करते हैं।

क्योंकि f_1 चर x का एक फलन है, इसलिए सीधे अवकलन द्वारा, हमें f का आंशिक अवकलज 0 प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, y के सापेक्ष f_2 का आंशिक अवकलज x है। y के सापेक्ष f_3 का आंशिक अवकलज $3y^2$ है।

तब y का सापेक्ष f_1, f_2 और f_3 के आंशिक अवकलजों का योग $x + 3y^2$ है। यह हमारे द्वारा विधि 1 से परिकलित f के आंशिक अवकलज के अतिरिक्त कुछ नहीं है।

***

यहाँ एक और उदाहरण दिया जा रहा है।

उदाहरण 7: निम्नलिखित फलनों के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

i) $z = f(x, y) = x^3 - 4x^2y^2 + 8y^2$

ii) $z = f(x, y) = x \sin y + y \cos x$

iii) $z = x\, e^y + y\, e^x$.

हल: सर्वप्रथम, यह ध्यान देते हैं कि इन सभी तीनों स्थितियों में, संबद्ध एक चर वाले फलन या तो बहुपद है या त्रिकोणमितीय अथवा चर घातांकीय फलन है। इससे यह सुनिश्चित होता है कि आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। इसके बाद, हम एक चर वाले फलनों को सीधा अवकलित करने की तकनीक का अनुप्रयोग करते हुए, आंशिक अवकलज परिकलित करते हैं। अतः हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं :

i) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 8xy^2; \frac{\partial z}{\partial y} = -8x^2y + 16y$$

ii) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin y - y \sin x\, ; \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y + \cos x$$

iii) $$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + ye^x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + e^x$$

***

आंशिक अवकलजों का परिकलन सदैव इतना सरल नहीं होता, जैसा कि इन उदाहरणों में है। कुछ अप्रत्याशित स्थितियों में, हमें एक चर की स्थिति की ही तरह सीधे परिभाषा का अनुप्रयोग करना पड़ सकता है। आप इन स्थितियों की पहचान करने में अभ्यास द्वारा समर्थ हो पाएँगे।

आइए एक ऐसी ही स्थिति पर विचार करें।

उदाहरण 8: मान लीजिए कि $\boldsymbol{f : R^2 \to R}$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4 + y^4}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & \text{यदि } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

बिंदुओं $(0,0), (a,0), (0,b)$ और (a,b), पर, जहाँ $a \neq 0, b \neq 0$ है, दोनों आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ, हम सीधे परिभाषा का अनुप्रयोग करते हैं।

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \text{ है।}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0 \text{ है।}$$

$$f_x(a,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,0)-f(a,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0 \text{ है।}$$

$$f_y(a,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,0+k)-f(a,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{ak}{a^4+k^4}}{k}=\frac{1}{a^3} \text{ है।}$$

$$f_x(0,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,b)-f(0,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{bh}{b^4+h^4}}{h}=\frac{1}{b^3} \text{ है।}$$

$$f_y(0,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,b+k)-f(0,b)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0 \text{ है।}$$

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(a+h)b}{(a+h)^4+b^4}-\frac{ab}{a^4+b^4}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(ab+hb)(a^4+b^4)-(ab)(a^4+4a^3h+6a^2h^2+4ah^3+h^4+b^4)}{h(a^4+b^4)\left[(a+h)^4+b^4\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{b(a^4+b^4)-(ab)(4a^3+6a^2h+4h^2a+h^3)}{(a^4+b^4)\left[(a+h)^4+b^4\right]}$$

$$=\frac{b^5-3a^4b}{(a^4+b^4)^2}$$

$$f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{a(b+k)}{a^4+(b+k)^4}-\frac{ab}{a^4+b^4}}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{(ab+ab)(a^4+b^4)-(ab)(a^4+b^4+4b^3k+6b^2k^2+4bk^3+k^4)}{k(a^4+b^4)\left[a^4+(b+k)^4\right]}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{a\left(a^4 + b^4\right) - (ab)\left(4b^3 + 6b^2k + 4bk^2 + k^3\right)}{\left(a^4 + b^4\right)\left[a^4 + (b+k)^4\right]}$$

$$= \frac{a^5 - 3ab^4}{\left(a^4 + b^4\right)^2}.$$

***

आप यहाँ ध्यान दे सकते हैं कि सीधे अवकलज से, हम $(a,b) \neq (0,0)$ के लिए $f_x(a,b)$ और $f_y(a,b)$ प्राप्त कर सकते थे, परंतु $f_x(0,0)$ या $f_y(0,0)$ नहीं। क्या आप कह सकते हैं कि ऐसा क्यों नहीं कर सकते थे? क्योंकि सभी $(x,y) \neq (0,0)$ के लिए, f दो बहुपद फलनों के एक भागफल के रूप में परिभाषित है, इसलिए हम इन बिंदुओं पर आंशिक अवकलजों को परिकलित करने के लिए सीधे अवकलन का प्रयोग कर सकते हैं। परंतु $f_x(0,0)$ या $f_y(0,0)$ को परिकलित करने के लिए, हमें $f(0,0)$ के प्रयोग की आवश्यकता है, जो उसी भागफल द्वारा परिभाषित नहीं है। इस पर भी ध्यान दीजिए कि $f_x(a,b)$ और $f_y(a,b)$ प्राप्त करने के बाद, हम $f_x(0,b)$, $f_y(0,b)$, $f_x(a,0)$ और $f_y(a,0)$ प्राप्त करने के लिए, $a = 0$ या $b = 0$ कर सकते थे।

अब, आप कुछ प्रश्न हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E4) यदि $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2$, तो बिंदु (1,2) पर $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए।

E5) निम्नलिखित फलनों के सभी प्रथम कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए :

क) $\sin\left(x^2 - y\right)$

ख) $\sqrt{x + y^2 + z^2 + 1}$

ग) $y \sin xz$

घ) x^y

ङ) $x^3 y + e^{xy^2}$

E6) दर्शाइए कि फलन $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$ प्रतिबंधों

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ को संतुष्ट करते हैं।

E7) मान लीजिए कि $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ और $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ दो अवकलनीय फलन है। मान लीजिए कि $F(x,y) = f(x) + g(y)$, सभी x और y के लिए। दर्शाइए कि

$F_x(x,y) = f'(x)$ तथा $F_y(x,y) = g'(y)$ है।

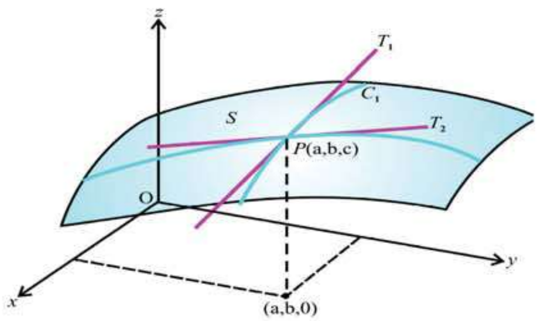
E8) मान लीजिए कि f और g दो वास्तविक-मान फलन है, जिनके लिए $f_x(a,b)$ और $g_x(a,b)$ के अस्तित्व हैं। दर्शाइए कि (a, b) पर $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}$ का अस्तित्व है तथा यह $f_x(a,b) + g_x(a,b)$ के बराबर है। क्या इसका विलोम सत्य है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

इन प्रश्नों के माध्यम से, आपको आंशिक अवकलजों को परिकलित करने का पर्याप्त अभ्यास हो गया होगा। अगले उप-अनुच्छेद में, हम इनका ज्यामितीय विवेचन करने का प्रयास करेंगे।

3.2.2 ज्यामितीय विवेचन

एक चर वाले एक वास्तविक-मान फलन f की स्थिति में, आप जानते हैं कि अवकलज $f'(x)$ एक व्यापक बिंदु (x, y) पर वक्र $y = f(x)$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता प्रदान करता है। अब, हम दो चरों वाले एक वास्तविक-मान फलन के आंशिक अवकलजों के चित्रण करने का प्रयास करेंगे। जैसा कि आप जानते हैं कि ऐसा फलन $\boldsymbol{R}^3$ में एक पृष्ठ निरूपित करता है।

ज्यामितीय विवेचन प्राप्त करने के लिए, आइए दो चरों वाले एक वास्तविक-मान फलन $f(x, y)$ पर विचार करें तथा मान लीजिए कि $S = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$, $\boldsymbol{R}^3$ में फलन $f(x, y)$ द्वारा निरूपित एक पृष्ठ है। मान लीजिए कि $f(x, y)$ के बिंदु (a, b) पर दोनों अवकलज है तथा $c = f(a, b)$ है। तब, बिंदु $P(a, b, c)$ पृष्ठ S पर स्थिति है। जब हम $y = b$ निश्चित करते है, तब हमें समतल $y = b$ प्राप्त होता है, जो समलत XOZ के समांतर है तथा P से होकर जाता है। यह पृष्ठ को एक वक्र C में प्रतिच्छेद करता है (चित्र 1 देखिए)।



चित्र 1 : नीले रंग से अंकित वक्र C_1 है और लाल रंग से अंकित वक्र C_2 है।

इसी प्रकार, जब हम $x = a$ निश्चित करते हैं, तब हमें समतल $x = a$ प्राप्त होता है, जो समतल YOZ के समांतर है तथा बिंदु $P(a, b, c)$ से होकर जाता है। यह पृष्ठ को वक्र C_2 में प्रतिच्छेद करेगा। ध्यान दीजिए कि वक्र C_1 और C_2 बिंदु $P(a, b, c)$ से होकर जाती है (चित्र 1 देखिए) ध्यान दीजिए कि वक्र C_1 एक चर वाले फलन $g_1(x) = f(x, b)$ का लेखाचित्र (आरेख) है। आप पहले से ही जानते हैं कि किसी बिंदु (a, b) पर g_1 का अवकलज g_1' बिंदु (a, b) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता प्रदान करता है। (स्पर्श रेखा T_1 दर्शाती हुइ चित्र 1 देखिए) परंतु $g_1'(b) = f_x(a, b)$ अर्थात् x के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज है। इसी प्रकार, वक्र C_2 फलन $g_2(y) = f(a, y)$ का लेखाचित्र है। आप पहले से ही जानते हैं कि बिंदु (a,b) पर g_2 का अवकलज g_2' उस बिंदु (a, b) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता प्रदान करता है (रेखा T_2 दर्शाती हुई चित्र 1 देखिए) परंतु $g_2'(a) = f_y(a, b)$ है, जो y के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज है। इस प्रकार, आंशिक अवकलजों $f_x(a, b)$ और $f_y(a, b)$ का ज्यामितीय विवेचन क्रमशः समतलों $y = b$ और $x = a$ की प्रतिच्छेद वक्रों की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताओं के रूप में की जा सकती है।

हमें इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 9: बिंदु (1, 1,1) पर फलन $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ के लिए f_x और f_y ज्ञात कीजिए तथा इन मानों का ज्यामितीय विवेचन कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, हम ध्यान देते हैं कि $f(1, 1) = 1$ है। अतः, बिंदु $(1, 1, 1)$, से प्रदत्त पृष्ठ पर स्थित है।

उदाहरण 6 की विधि अपनाते हुए, हम प्राप्त करते हैं कि

$$f_x(x, y) = -2x$$

$$\therefore \quad f_x(1, 1) = -2$$

साथ ही,

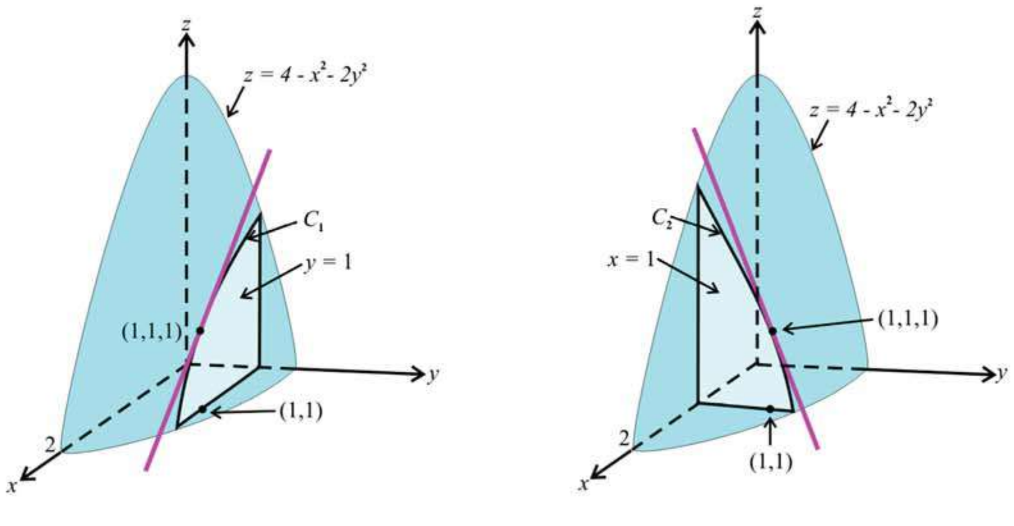
$$f_y(x, y) = -4y$$

$$f_y(1, 1) = -4 \text{ है।}$$

ज्यामितीय विवेचन ज्ञात करने के लिए, हम वक्र C_1 और C_2 प्राप्त करते हैं।

C_1 प्राप्त करने के लिए, हम f के लिए व्यंजक में $y = 1$ रखते हैं तथा हमें वक्र $z = 2 - x^2$, $y = 1$ (चित्र 2 (क)) प्राप्त होती है। एक चर वाली स्थिति से आप यह जानते हैं कि $x = 1$ पर वक्र की प्रवणता, $x = 1$ पर अवकलज ज्ञात करके प्राप्त की जाती है, जो -2 के बराबर है। यह वही है, जो $f_x(1, 1) = -2$ है।

इसी प्रकार, C_2 प्राप्त करने के लिए, हम f के लिए व्यंजक में $x = 1$ रखते हैं तथा वक्र $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$ (चित्र 2 (ख) देखिए) प्राप्त करते हैं, तथा इस वक्र की प्रवणता $y = 1$ पर प्राप्त करने के लिए, हम $y = 1$ पर z का अवकलज ज्ञात करते हैं, जो -4 है। यह वही है जो $f_y(1, 1) = -4$ है। इसे नीचे चित्र 2 द्वारा स्पष्ट किया गया है:



चित्र 2

***

नोट: ज्यामितीय विवेचन को स्पष्ट करने की आवश्यकता केवल तभी है, जब वाँछनीय हो। अन्यथा इंगित बिंदुओं पर आंशिक अवकलजों का परिकलन करना ही पर्याप्त है।

उदाहरण 10: समतलों $x=2$ और $y=3$ तथा पृष्ठ $z=xy+3x^2$ की प्रतिच्छेदन-वक्रों (curves of intersection) की स्पर्श रेखाओं की बिंदु $(2,3,18)$ पर प्रवणताएँ ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि समतल $x=2$ और पृष्ठ $z=xy+3x^2$ की प्रतिच्छेदन-वक्र की स्पर्श रेखा की बिंदु $(2,3,18)$ पर प्रवणता $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2,3)}$ द्वारा प्राप्त होगी।

अब, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2,3)} = (x)_{(2,3)} = 2$ है।

अतः, समतल $x=2$ और पृष्ठ $z=xy+3x^2$ की प्रतिच्छेदन-वक्र की स्पर्श रेखा की बिंदु $(2, 3, 18)$ पर प्रवणता 2 है।

इसी प्रकार, क्योंकि $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{(2,3)} = (y+6x)_{(2,3)} = 15$ है इसलिए समतल $y=3$ और पृष्ठ $z=xy+3x^2$ की प्रतिच्छेदन-वक्र की बिंदु $(2, 3, 18)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 15 है।

***

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कर सकेंगे।

E9) समतल $y=2$ और पृष्ठ $z=2x^2+3y^2$ की प्रतिच्छेदन-वक्र की बिंदु (1, 2, 14) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

आप जानते हैं कि यदि कोई फलन $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ किसी बिंदु पर अवकलनीय होता है, तो वह उस बिंदु पर संतत भी होता है। अगले उप-अनुच्छेद में, हम देखेंगे कि $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ तक के फलनों के सांतत्य और आंशिक अवकलजों के अस्तित्व की कोई कड़ी विद्यमान है या नहीं।

3.2.3 सांतत्य और आंशिक अवकलज

यदि किसी फलन $f(x,y)$ के दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है, तो इससे हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आइए देखें।

मान लीजिए कि $f(x,y)$ एक वास्तविक-मान फलन है, जिसके बिंदु (a, b) पर आंशिक अवकलज हैं। तब, $h \neq 0$ के लिए, हमें प्राप्त है :

$$f(a+h,b)-f(a,b)=\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\times h$$ और इसीलिए

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h,b)-f(a,b)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\lim_{h\to 0} h$$
$$= f_x(a,b).0$$
$$= 0.$$

अतः, हम कह सकते हैं कि जब $h \to 0$ है, तब $f(a+h,b) \to f(a,b)$ है। अर्थात् जब (x,y), x-अक्ष के समांतर किसी रेखा के अनुदिश (a,b) की ओर अग्रसर होता है, तब $f(x,y) \to f(a,b)$ है। इसी प्रकार, अन्य आंशिक अवकलज का अस्तित्व यह (x,y) के y-अक्ष के समांतर किसी रेखा के अनुदिश (a,b) की ओर अग्रसर होने पर, $f(x,y) \to f(a,b)$ है। f के $f_x(a,b)$ और $f_y(a,b)$ के अस्तित्व हमें आगे और कोई सूचना नहीं देते। इसलिए, हम यह नहीं जानते कि यदि किसी अन्य पथ पर $(x,y) \to (a,b)$ है, तो $f(x,y)$ की सीमा का अस्तित्व है या नहीं। परंतु आप इकाई 2 में यह सीख चुके हैं कि (a,b) पर $f(x,y)$ संतत होगा, यदि किसी भी पथ के अनुदिश (जिसका सरल रेखा होना भी आवश्यक नहीं है) $(x,y) \to (a,b)$ होने पर $f(x,y) \to f(a,b)$ हो।

इस प्रकार, उपरोक्त चर्चा से यह स्पष्ट है कि किसी बिंदु पर आंशिक अवकलजों के मात्र अस्तित्व से यह सुनिश्चित होना आवश्यक नहीं है कि उस बिंदु पर वह फलन संतत है। वस्तुतः, अगले उदाहरण में यही स्थिति दर्शाइ गई है। बाद में, हम देखेंगे कि यदि आंशिक अवकलज कुछ अतिरिक्त आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं, तो उनके अस्तित्व से सांतत्य अवश्य सुनिश्चित हो जाता है।

उदाहरण 11: मान लीजिए कि फलन $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ इस प्रकार परिभाषित है:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(0,0)$ पर f के आंशिक अवकलज, अर्थात् $f_x(0,0)$ और $f_y(0,0)$ ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए की $(0,0)$ पर f संतत है या नहीं।

हल : हमें प्राप्त है :

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \text{ और}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0 \text{ है।}$$

अतः, $(0,0)$ पर f के दोनों प्रथम कोटि के अवकलज हैं। परंतु यह फलन बिंदु (0, 0) पर संतत नहीं है, क्योंकि $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है (देखिए इकाई 2, E2)।

***

हम जानते हैं कि एक वास्तविक चर वाले एक वास्तविक-मान संतत फलन का अवकलनीय होना आवश्यक नहीं है। यही अनेक चरों वाले के लिए भी सत्य है। इसका अर्थ है कि अनेक चरों वाले एक फलन, जो किसी बिंदु पर संतत है, के उसी बिंदु पर किसी भी आंशिक अवकलज का होना आवश्यक नहीं है। यदि आपने इन उदाहरणों को समझ लिया है, तो आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर पाएँगे :

E10) मान लीजिए कि सभी $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ के लिए, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ है। दर्शाइए (0, 0) पर f संतत है, परंतु $f_x(0,0)$ और $f_y(0,0)$ के अस्तित्व नहीं है।

E11) मान लीजिए कि $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} + y \sin\dfrac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$.

दर्शाइए कि $f_x(0,0)$ और $f_y(0,0)$ के अस्तित्व है। यह भी दर्शाइए कि (0,0) पर f संतत है।

E12) दशाईए कि $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \text{ यदि } & x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 \quad , \text{ यदि } & x = 0 = y \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन के मूलबिंदु सहित सभी स्थानों पर प्रथम आंशिक अवकलज हैं, परंतु यह फलन मूलबिंदु पर असंतत है।

E13) मान लीजिए कि $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|y|}, & \text{यदि } y \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } y = 0 \end{cases}$ है

क) सिद्ध कीजिए कि (0,0) पर f संतत है तथा $f_x(0,0)$ और $f_y(0,0)$ दोनों का अस्तित्व है।

ख) दर्शाइए कि $f_x(1,0)$ का अस्तित्व है, परंतु $f_y(1,0)$ का अस्तित्व नहीं है।

उपरोक्त उदाहरणों और प्रश्नों में, हम देख चुके हैं कि आंशिक अवकलजों के अस्तित्व से, सांतत्य सुनिश्चित होना आवश्यक नहीं है। परंतु, यदि आंशिक अवकलज कुछ और प्रतिबंध संतुष्ट करे, तो हम सांतत्य को सुनिश्चित कर सकते हैं। इसका अध्ययन आप प्रमेय 3 में करेंगे। हम इसकी उपपत्ति को छोड़ रहे हैं, क्योंकि यह इस पाठ्यक्रम की सीमा के बाहर है।

अब, हम प्रमेय 1 का कथन देते हैं।

प्रमेय 1 : मान लीजिए कि f दो चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन है, किसी बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश N में इस प्रकार परिभाषित है कि प्रथम कोटि के आंशिक

अवकलजों में से एक का सभी बिंदुओं $(x,y)\in N$ पर अस्तित्व है तथा यह N पर परिबद्ध है, जबकि अन्य आंशिक अवकलज का बिंदु (a,b) पर अस्तित्व है। तब, फलन f बिंदु (a,b) पर संतत है।

–■–

उपप्रमेय 1: मान लीजिए कि f दो चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन है, जो किसी बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश N में इस प्रकार परिभाषित है कि N के सभी बिंदुओं पर f के दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है तथा इनमें से एक N पर परिबद्ध है। तब, N पर फलन f प्रत्येक स्थान पर संतत है।

–■–

ध्यान दीजिए कि प्रमेय 3 में दिए गए प्रतिबंध केवल पर्याप्त है तथा आवश्यक नहीं है। हम उदाहरण 11 में यह देख चुके हैं कि एक फलन संतत हो सकता है, चाहे उसके किसी भी आंशिक अवकलज का अस्तित्व नहीं हो। अगले उदाहरण में, हम यह स्पष्ट करेंगे कि एक दिए हुए फलन के सांतत्य को सिद्ध करने के लिए, उपप्रमेय 1 का प्रयोग किस प्रकार किया जा सकता है।

उदाहरण 12: उपप्रमेय 1 का अनुप्रयोग कीजिए तथा जाँच कीजिए कि क्या $f(x,y)=ye^x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ प्रत्येक स्थान पर संतत है।

हल: सर्वप्रथम, हम देखते हैं कि $f_x(x,y)=ye^x$ है और $f_y(x,y)=e^x$ है। मान लीजिए कि $\boldsymbol{R}^2$ में कोई भी बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश

$N=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<1\right\}$ पर विचार कीजिए। अब, $f_x(x,y)$ और $f_y(x,y)$ का प्रतिवेश N के सभी बिंदुओं पर अस्तित्व है साथ ही क्योंकि

$|x-a|\le\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ है, इसलिए हमें $|x-a|<1$ अर्थात् $a-1<x<a+1$ अर्थात् $e^{a-1}<e^x<e^{a+1}$ प्राप्त होता है।

अतः, N पर f_x परिबद्ध है। इसी कारण, उपप्रमेय 1 को दृष्टिगत रखते हुए, f बिंदु (a,b) पर संतत है। क्योंकि $\boldsymbol{R}^2$ का (a,b) कोई भी स्वेच्छिक बिंदु था, इसलिए हम कह सकते हैं कि $\boldsymbol{R}^2$ पर f सर्वत्र (प्रत्येक स्थान पर) संतत है।

***

अब इस प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए।

E14) निम्नलिखित फलनों को $\boldsymbol{R}^2$ पर प्रत्येक स्थान पर (सर्वत्र) संतत दर्शाने के लिए, उपप्रमेय 1 का प्रयोग कीजिए :

क) $f(x,y)=xe^y$

ख) $f(x,y)=3xy$

इस अनुच्छेद में, हमने देखा कि मात्र आंशिक अवकलजों के अस्तित्व से सांतत्य सुनिश्चित नहीं होता। इससे यह प्रदर्शित होता है कि आंशिक अवकलजों की संकल्पना से $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ तक के फलनों के अवकलन की संकल्पना से व्यापीकरण नहीं किया जा सकता है। अगले अनुच्छेद में, हम एक संकल्पना का परिचय देंगे जो एक चर के वास्तविक-मान फलनों के अवकलन की संकल्पना का व्यापीकरण है।

3.3 R^2 से R तक के फलनों की अवकलनीयता

हम एक अकेले चर वाले फलन के अवकलज की परिभाषा से प्रारंभ करते हैं। हम कहते हैं कि $\boldsymbol{R}$ से $\boldsymbol{R}$ तक कोई फलन f एक बिंदु c पर अवकलनीय होता है, यदि निम्नलिखित सीमा का अस्तित्व हो :

$$\lim_{n \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = A \tag{13}$$

तब, A बिंदु c पर f का अवकलज कहलाता है तथा इसे $f'(c)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

हम $x = c + h$ रखते हैं। तब, समीकरण (13) के इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \tag{14}$$

तब, यह निम्नलिखित रूप से लिखने के समान है :

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) = 0$$

अर्थात्, $$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{x - c} = 0$$

अर्थात्, $$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h} = 0.$$

यह निम्नलिखित प्रकार से लिखने के समान है :

$$f(c+h) - f(c) = f'(c)h + h\eta(h)$$

जहाँ $\eta(h) \to 0$ है।

हम जानते हैं कि यदि c पर अवकलज का अस्तित्व है, तो $f'(c) = A$ है, जो एक अचर है। अतः, हम प्राप्त करते हैं :

$$f(c+h) - f(c) = Ah + h\eta(h) \tag{15}$$

जहाँ $\eta(h) \to 0$ है।

एक चर वाले फलन की अवकलनीयता की (15) में दी गई इस परिभाषा को स्वाभाविक रूप में अनेक चरों वाले फलनों के लिए भी व्यापीकृत किया जा सकता है। इस अनुच्छेद में, हम दो चरों वाले वास्तविक-मान फलनों की अवकलनीयता का अध्ययन करेंगे। इसकी परिभाषा यहाँ दी जा रही है।

परिभाषा 2: मान लीजिए कि f कोई वास्तविक-मान फलन है, जो बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश N में परिभाषित है। हम कहते हैं कि यह फलन f बिंदु (a,b) पर अवकलनीयता है, यदि $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+h\phi(h,k)+k\psi(h,k)$ हो, जहाँ

- h और k ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि $(a+h,b+k)\in N$ है।
- A और B ऐसे अचर हैं, जो h और k से स्वतंत्र है; परंतु फलन f और बिंदु (a,b) पर आश्रित है।
- ϕ और ψ ऐसे दो फलन हैं जो $(h,k)\to(0,0)$ होने पर शून्य की ओर प्रदत्त होते हैं।

यहाँ, हम एक महत्वपूर्ण टिप्पणी करना चाहेंगे।

टिप्पणी 2:

i) गणित के ग्रंथों में, आप अवलनीयता की एक अन्य परिभाषा देख सकते हैं, जिसे हम नीचे दे रहे हैं :

   मान लीजिए कि f किसी बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश N में परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन है। तब, यह फलन f बिंदु (a,b) अवकलनीयता कहलाता है, यदि ऐसे दो अचरों A और B का अस्तित्व है (केवल f और बिंदु (a,b) पर आश्रित), ताकि

   $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\sqrt{h^2+k^2}\,\phi(h,k)$ है, जहाँ $\phi(h,k)$ एक वास्तविक-मान फलन ऐसा हैं कि $\phi(h,k)\to 0$ होने पर $(h,k)\to(0,0)$ हैं।

   सर्वसमिक $\sqrt{h^2+k^2}=h\left(\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)+k\left(\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$ का उपयोग करके इन दोनों परिभाषाओं की तुल्यता सरलता से स्थापित की जा सकती है।

ii) $\boldsymbol{R}$ से $\boldsymbol{R}$ तक के एक फलन f के लिए, यदि $f'(x_0)$ का अस्तित्व है, तो हम x_0 के निकट एक रैखिक फलन $(x-x_0)f'(x_0)$ द्वारा $b(x)$ - $b\,(x_0)$ का सन्निकटन कर सकते हैं। इसी प्रकार, यदि $(a,\,b)$ पर $g(x,y)$ अवकलनीय है, तो बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश में रैखिक फलन $(x-a)A+(y-b)B$ द्वारा $g(x,y)-g(a,b)$ का सन्निकटन किया जाता है। अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से अवकलनीयता की परिभाषा को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 13: मान लीजिए कि (a,b) एक स्वैच्छिक बिंदु है। दर्शाइए कि किसी बिंदु (a,b) पर f अवकलनीय है।

हल : मान लीजिए कि (a,b) एक स्वैच्छिक बिंदु है। किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं h और k के लिए, हमें प्राप्त है :

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=(a+h)^2+(b+k)^2-(a^2+b^2)$$

$$=2ah+2bk+hh+kk$$

यदि हम $A=2a,\ B=2b,\ \phi(h,k)=h,\ \psi(h,k)=k$, निश्चित करें, तो $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+h\phi(h,k)+k\psi(h,k)$, है, जहाँ A और B अचर है, जो h और k से स्वतंत्र हैं तथा $(h,k)\to(0,0)$ होने पर, $\phi(h,k)\to 0$ और $\psi(h,k)\to 0$ है। इस प्रकार, बिंदु (a,b) पर f अवकलनीय है।

***

उदाहरण 14 : मान लीजिए कि $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ दर्शाइए कि f इस फलन की परिभाषा के प्राँत के सभी बिंदुओं (a,b) पर अवकलनीय है।

हल : क्योंकि $y=0$ के लिए, f परिभाषित नहीं है, इसलिए हम $b\neq 0$ लेते हैं। मान लीजिए कि h और k ऐसी दो वास्तविक संख्याएँ हैं कि (a,b) के एक प्रतिवेश N में $(a+h,b+k)$ एक बिंदु है जो f के प्राँत में अंतर्विष्ट है। तब, $b+k\neq 0$ है तथा

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{a+h}{b+k}-\frac{a}{b}$$

$$=\frac{a}{b+k}-\frac{a}{b}+\frac{h}{b+k}$$

$$=-\frac{ak}{b(b+k)}+\frac{h}{b+k}$$

$$=-\frac{a}{b^2}\left[1-\frac{k}{b+k}\right]k+\frac{h}{b}\left[1-\frac{k}{b+k}\right]$$

$$=\frac{1}{b}h-\frac{a}{b^2}k+h\left(\frac{-k}{b(b+k)}\right)+k\left(\frac{ak}{b^2(b+k)}\right)$$

$A=\dfrac{1}{b},\ B=-\dfrac{a}{b^2},\ \phi(h,k)=\dfrac{-k}{b(b+k)},\ \psi(h,k)=\dfrac{ak}{b^2(b+k)}$ निश्चित कीजिए।

तब, $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+h\phi(h,k)+k\psi(h,k)$ है, जहाँ A और B ऐसे अचर हैं, जो h और k से स्वतंत्र है तथा $(h,k)\to(0,0)$ होने पर $\phi(h,k)\to 0$ और $\psi(h,k)\to 0$ है। अतः बिंदु (a,b) पर f अवकलनीय है।

अब, यहाँ फलन का एक ऐसा उदाहरण है, जो अवकलनीय नहीं है।

***

उदाहरण 15: हम सिद्ध करेंगे कि $f(x,y)=|x|+|y|$ से प्रदत्त फलन (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है।

हल : मान लीजिए कि, यदि संभव है तो, (0, 0) पर f अवकलनीय है। तब,
$f(0+h,\ 0+k)-f(0,0)=Ah+Bk+h\phi(h,k)+k\psi(h,k)$ है।

जहाँ A और B अचर हैं तथा $(h,k)\to(0,0)$ होने पर $\phi(h,k)\to 0$ और $\psi(h,k)\to 0$ है।

मान लीजिए कि, $h=0$ और $k>0$ है। तब,

$k=Bk+k\psi(0,k)$.

$(h,k)\to(0,0)$ होने पर दोनों पक्षों की सीमाएँ लेने पर, हम $B=1$ प्राप्त करते हैं, क्योंकि $\psi(0,k)\to 0$ है।

अब, मान लीजिए कि $h=0$ और $k<0$ है। तब,

$-k=Bk+k\psi(0,k)$

अर्थात् $-1=B+\psi(0,k)$

$(h,k)\to(0,0)$ होने पर, दोनों पक्षों की सीमाएँ लेने पर, हम $B=1$ प्राप्त करते हैं, क्योंकि $\psi(0,k)\to 0$ है।

इस प्रकार, दिए हुए फलन की (0, 0) पर अवकलनीय होने की परिकल्पना से, हम एक अंतर्विरोध $B=1=-1$ पर पहुँचते हैं। अतः, (0,0) पर $|x|+|y|$ अवकलनीय नहीं है।

***

अब देखिए कि क्या आप इन प्रश्नों को हल कर पा सकते हैं।

E15) नीचे दी सारणी में, हमने प्रथम स्तंभ में एक चर वाले वास्तविक-मान फलनों की अवकलनीयता के बारे में कुछ परिणामों की सूची दी है। दूसरे स्तंभ में, दो चरों वाले वास्तविक-मान फलनों के लिए अनुरूप कथन लिखिए तथा जाँच कीजिए कि इनमें से प्रत्येक सत्य है या नहीं।

एक चर	दो चर
क) एक अचर फलन अवकलनीय होता है।	
ख) यदि $a\in \boldsymbol{R}$ पर f अवकलनीय है, तो $cf\,(c\in \boldsymbol{R})$ भी a पर अवकलनीय होता है।	
ग) यदि $a\in \boldsymbol{R}$ पर f और g अवकलनीय है, तो a पर $f\pm g$ भी अवकलनीय होता है।	
घ) यदि $a\in \boldsymbol{R}$ पर f और g अवकलनीय है, तो a पर fg भी अवकलनीय होता है।	

E16) दर्शाइए कि $(0,0)$ पर फलन $x^2 + y + xy$ अवकलनीय है।

E17) दर्शाइए कि बिंदु $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ पर $\cos(x+y)$ अवकलनीय है।

E18) दर्शाइए कि

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{जब } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{जब } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

द्वारा प्रदत्त फलन f बिंदु $(0,0)$ पर अवकलनीय नहीं है।

एक वास्तविक चर वाले वास्तविक-मान फलन की स्थिति में, सांतत्य होने पर अवकलनीयता सुनिश्चित होना आवश्यक नहीं है। यही बात दो चरों वाले वास्तविक-मान फलनों के लिए भी सत्य है। उदाहरण 15 के फलन $f(x,y) = |x| + |y|$ पर विचार कीजिए। इकाई 2 के E9) घ) के अनुसार यह (0, 0) पर संतत है। उदाहरण 15 में, हम देख चुके हैं कि यह (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है। अतः,एक बिंदु पर फलन संतत होने से यह निष्कर्ष नहीं निकलता है उस बिन्दु पर अवकलनीय भी है। पंरतु, किसी बिंदु पर प्रत्येक अवकलनीय फलन उस बिंदु पर संतत होता है। इसे आगे आने वाली प्रमेय में सिद्ध किया जा रहा है।

प्रेमय 4: मान लीजिए कि f किसी बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश N में परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन है। यदि (a,b) पर f अवकलनीय है, तो (a,b) पर f संतत होता है।

उपपत्ति: मान लीजिए कि h और k दो वास्तविक संख्याएँ ऐसी है कि $(a+h, b+k) \in N$ है। तब, (a,b) पर f की अवकलनीयता का तात्पर्य है कि ऐसे दो चरों A और B तथा दो फलनों $\phi(h,k)$, $\psi(h,k)$ का अस्तित्व है कि

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + h\phi(h,k) + k\psi(h,k) \tag{16}$$

है जहाँ $(h,k) \to (0,0)$ होने पर, $\phi(h,k) \to 0$ और $\psi(h,k) \to 0$ है।

अब, $(h,k) \to (0,0)$ होने पर, (16) के दोनों पक्षों की सीमाएँ लेने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(f(a+h, b+k) - f(a,b)\right) = 0 \text{ या}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = f(a,b)$$

इससे प्रदर्शित होता है कि (a,b) पर f संतत है।

– ■ –

एक दिए हुए बिंदु पर किसी फलन की अवकलनीयता नहीं होने की स्थापना के लिए, हम उपरोक्त परिणाम का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, हम इकाई 2 में देख चुके हैं कि

फलन $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ यदि } x^2+y^2\neq 0\\ 0 \quad , \text{ यदि } x=y=0\end{cases}$

(0, 0) पर संतत नहीं है। इस प्रकार, प्रमेय 4 को दृष्टिगत रखते हुए, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि यह फलन (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है।

अब, आप इस प्रश्न को हल करने के लिए प्रमेय 4 का प्रयोग कर सकते हैं।

E19) निम्नलिखित को यह हल करते हुए कि ये फलन (0, 0) पर असंतत है; दशाईए कि ये (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है :

क) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ख) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ग) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x-y}, & x\neq y\\ 0 & , x=y\end{cases}$

घ) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$

अभी तक, हमने किसी बिंदु पर एक फलन की अवकलनीयता की परिभाषा में प्रकट होने वाले अचरों के मानो के बारे में कुछ भी नहीं कहा है। अब हम यह दर्शाएँगे (प्रमेय 5) की परिभाषा 2 में बताए गए अचर A और B केवल विचाराधीन फलन के एक बिंदु पर मात्र दोनों आंशिक अवकलजों के अतिरिक्त कुछ नहीं है। विशेष रूप से, इससे प्रदर्शित होगा कि यदि कोई फलन किसी बिंदु पर अवकलनीय है, तो उस बिंदु पर उस फलन के आंशिक अवकलज होते हैं। परंतु क्या इसका विलोम सत्य है? अर्थात्, यदि किसी फलन के किसी बिंदु पर दोनों आंशिक अवकलज हैं, तो क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वह फलन उस बिंदु पर अवकलनीय है? आंशिक अवकलजों का अस्तित्व जैसा कि हम उदाहरण 11 में देख चुके हैं, सांतत्य तक की गारंटी नहीं देता है। इसलिए, स्पष्ट है कि यह अवकलनीयता की गारंटी नहीं दे सकता।

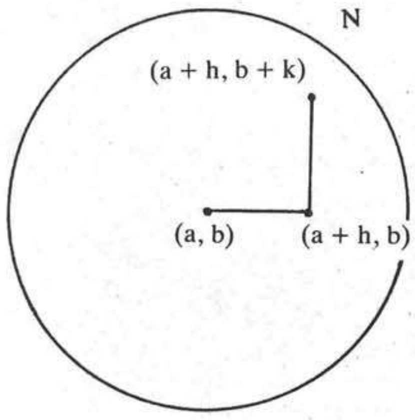
अब, निम्नलिखित प्रमेय को देखिए।

प्रमेय 5: मान लीजिए कि f किसी बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश N में परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन है। यदि (a,b) पर f अवकलनीय है, तो f के (a,b) पर दोनों आंशिक अवकलज होते हैं।

उपपत्ति: मान लीजिए h और k ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि $(a+h, b+k) \in N$ है। क्योंकि f बिंदु (a,b) पर अवकलनीय है, इसलिए यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + h\phi(h,k) + k\psi(h,k)$$

जहाँ A और B अचर हैं तथा $(h,k) \to (0,0)$ होने पर $\phi(h,k) \to 0$ और $\psi(h,k) \to 0$ है। आप चित्र 3 से यह देख सकते हैं कि यदि $(a+h, b+k) \in N$ है, तो $(a+h, b)$ और $(a, b+k)$ भी N के अंग होते हैं। अतः, यदि हम उपरोक्त समीकरण से $k = 0$ मान लें, तो हमें प्राप्त होता है :



चित्र 3

$$f(a+h, b) - f(a,b) = Ah + h\phi(h,0)$$

अर्थात्, $\dfrac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A + \phi(h,0)$ $h \neq 0$ के लिए।

अतः, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A$ है।

अब $f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + h\phi(h,k) + k\psi(h,k)$ है जहाँ $(h,k) \to (0,0)$ होने पर $\phi(h,k) \to 0$ और $\psi(h,k) \to 0$ है। इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि $f_y(a, b)$ का अस्तित्व है।

– ■ –

ऊपर दिए गए तर्क से, हम देखते हैं कि h और k के छोटे मानों के लिए, हम व्यंजक $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ द्वारा $hf_x(a,b) + kf_y(a,b)$ का सन्निकटन कर सकते हैं। इस व्यंजक को एक विशिष्ट नाम दिया जाता है, जैसा कि आप अब देखेंगे।

> **परिभाषा 3:** मान लीजिए कि $f(x,y)$ किसी बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन है। यदि (a,b) पर $f(x,y)$ अवकलनीय है, तो $T(h,k) = hf_x(a,b) + kf_y(a,b)$ द्वारा परिभाषित रैखिक फलन $T : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ पर f का **अवकल** (differential) कहते हैं। इसे $df(a,b)$ द्वारा दर्शाया जाता है।

अब हम यह दर्शाने के लिए एक उदाहरण देते हैं कि एक फलन के दोनों आंशिक अवकलज हो सकते हैं, फिर भी हो सकता है कि वह अवकलनीय नहीं हो।

उदाहरण 16: यदि $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ है, तो दर्शाइए कि

f के बिंदु (0, 0) पर दोनों प्रथम कोटि के अवकलज हैं, परंतु यह $(0,0)$ अवकलनीय नहीं है।

हल : अब, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h-0}{h}=1$ है तथा

$\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{-k-0}{k}=-1$ है।

अतः, बिंदु $(0,0)$ पर दोनों प्रथम कोटि के दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है तथा $f_x(0,0)=1$ और $f_y(0,0)=-1$ है। यदि संभव है तो, मान लीजिए कि (0, 0) पर f अवकलनीय है। तब टिप्पणी 2(i) द्वारा,

$f(0+h,0+k)-f(0,0)=hf_x(0,0)+kf_y(0,0)+\sqrt{h^2+k^2}\,\phi(h,k)$, जहाँ
$\phi(h,k)\to0$ as $(h,k)\to(0,0)$ है।

अब, $\phi(h,k)=\dfrac{f(h,k)-h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}$

इसका अर्थ है कि $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{f(h,k)-h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ है।

अब, यदि $h=r\cos\theta,\ k=r\sin\theta$ है, तो

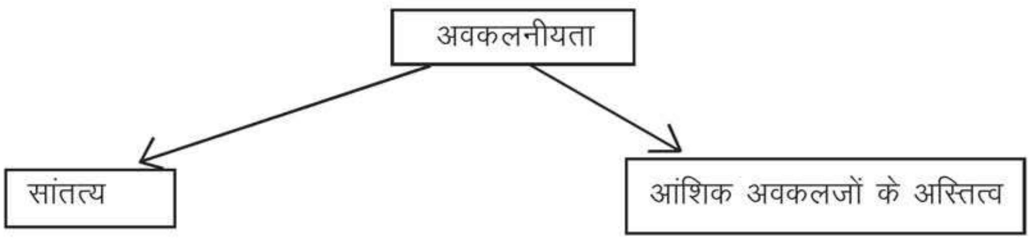
$\dfrac{f(h,k)-h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\cos^3\theta-\sin^3\theta-\cos\theta+\sin\theta$ है।

अतः, $0=\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{f(h,k)-h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim\limits_{r\to0}\left(\cos^3\theta-\sin^3\theta-\cos\theta+\sin\theta\right)$ (17)

अब, क्योंकि $\cos^3\theta-\sin^3\theta-\cos\theta+\sin\theta$ चर r से स्वतंत्र है, इसलिए (17) से निष्कर्ष है कि, सभी θ के लिए, $\cos^3\theta-\sin^3\theta-\cos\theta+\sin\theta=0$ है। परंतु यह सत्य नहीं है। अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँच जाते हैं, जिससे सिद्ध हो जाता है कि दिया हुआ फलन (0,0) पर अवकलनीय नहीं है।

***

अब हम इस अनुच्छेद के परिणाम को नीचे दिए चार्ट के रूप में प्रस्तुत करते हैं:



ध्यान दीजिए कि इस चार्ट में तीरों की दिशाओं को उलटा नहीं किया जा सकता है। अब, हम (बिना उपपत्ति के) प्रतिबंधों के एक पर्याप्त समुच्चय को देंगे, विचाराधीन फलन की अवकलनीयता सुनिश्चित करेगा।

प्रमेय 6: यदि (a,b) के एक प्रतिवेश में परिभाषित f एक वास्तविक-मान फलन इस प्रकार है कि

i) (a,b) पर f_x संतत है तथा

ii) (a,b) पर f_y का अस्तित्व है, तो f बिंदु (a,b) पर अवकलनीय होता है।

– ■ –

इसी प्रकार, हम यह दिखा सकते हैं कि (a,b) पर f अवकलनीय होता है, यदि (a,b) पर f_x का अस्तित्व है तथा (a,b) पर f_y संतत बिंदु हो। इस प्रकार, किसी एक आंशिक अवकलज के सांतत्य तथा अन्य का अस्तित्व विचाराधीन फलन की अवकलनीयता की गारंटी देता है।

अब, एक फलन, जिसके, दोनों आंशिक अवकलज सांतत्य होते हैं, को एक विशिष्ट नाम दिया गया है। यहाँ इसकी परिशुद्ध परिभाषा दी जा रही है।

परिभाषा 4: दो चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन f किसी बिंदु (a,b) पर संततः अवकलनीय (continuously differentiable) कहा जाता है, यदि (a,b) के एक प्रतिवेश में दोनों प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो तथा वे बिंदु (a,b) पर संतत हों।

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त परिभाषा के लिए, यह वाँछनीय है कि (a,b) को कोई प्रतिवेश दिए हुए फलन की प्राँत D में अंतर्विष्ट होना चाहिए।

परिभाषा 2 और प्रमेय 6 का सीधा (तुरंत) परिणाम निम्नलिखित हैं :

प्रमेय 7: एक फलन, जो किसी बिंदु पर संततः अवकलनीय है, उस बिंदु पर अवकलनीय होता है।

– ■ –

अब, हम उपरोक्त चर्चा को कुछ उदाहरणों के साथ स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 17: मान लीजिए कि $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ इस प्रकार परिभाषित फलन है :

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{यदि } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{यदि } x=0=y \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि $(0, 0)$ पर f अवकलनीय है।

हल : हम इस परिणाम को प्रेमय 6 का प्रयोग करते हुए सिद्ध करेंगे।

इसी प्रकार, $f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$

$= 0$

इसी प्रकार, , $f_y(0,0)=0$ है तथा $(x,y)\neq(0,0)$ के लिए

$$f_y(x,y)=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

ध्रुवीय निदेशांकों $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ का प्रयोग करते हुए, हम प्राप्त करते हैं :

$$|f_x(x,y)|=r\left|\left(\cos^4\theta\sin\theta+4\cos^2\theta\sin^3\theta-\sin^5\theta\right)\right|$$

$$\leq 6\sqrt{x^2+y^2}$$, क्योंकि $\sin\theta\leq 1$ और $\cos\theta\leq 1$ है।

इसे एक दिए हुए ε से छोटा बनाया जा सकता है, यदि हम $|x|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{72}}$ और $|y|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{72}}$

इसका अर्थ है $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=f_x(0,0)$ है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि *(0, 0)* पर f_x संतत है। इसके फलस्वरूप, प्रेमय 6 को दृष्टिगत रखते हुए, *(0, 0)* पर f अवकलनीय है।

***

उदाहरण 18: दर्शाइए कि $f(x,y)=e^{x+y}\sin x+x^2+2xy$ प्रत्येक स्थान पर (सर्वत्र) अवकलनीय है।

हल: हम $f_x(x,y)$ और $f_y(x,y)$ अभिकलित करते हैं। हम प्राप्त करते हैं :

$f_x(x,y)=e^{x+y}\sin x+e^{x+y}\cos x+2x+2y$ और $f_y(x,y)=e^{x+y}\sin x+2x$ है।

f_x और f_y दोनों प्रत्येक स्थान पर संतत है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि प्रमेय 6 को दृष्टिगत रखते हुए, f प्रत्येक स्थान अवकलनीय है।

***

अगला उदाहरण यह दर्शाता है कि प्रमेय 6 में दिए गए प्रतिबंध पर्याप्त हैं, परंतु आवश्यक नहीं है। अर्थात्, एक फलन किसी बिंदु पर अवकलनीय तब भी हो सकता है, जब कि उस बिंदु पर कोई भी आंशिक अवकलज नहीं हो।

उदाहरण 19: निम्नलिखित द्वारा दिए फलन $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ पर विचार कीजिए :

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+y^2\sin\frac{1}{y}, & \text{यदि } xy\neq 0\\ x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{यदि } x\neq 0,\ y=0\\ y^2\sin\frac{1}{y} & \text{यदि } x=0,\ y\neq 0\\ 0\quad , & \text{यदि } x=0=y \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि (0, 0) पर f अवकलनीय है, पंरतु $(0,0)$ पर न तो f_x और न ही f_y संतत है।

हल : यहाँ $f_x(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{यदि } x\neq 0 \\ 0 & \text{यदि } x=0 \end{cases}$

तथा $f_y(x,y)=\begin{cases} 2y\sin\frac{1}{y}-\cos\frac{1}{y} & \text{यदि } y\neq 0 \\ 0 & \text{यदि } y=0 \end{cases}$

क्योंकि $\lim\limits_{t\to 0}\cos\frac{1}{t}$ का अस्तित्व नहीं है तथा $\lim\limits_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t}=0$ है, इसलिए इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ और $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$ के अस्तित्व नहीं हैं।

इसका अर्थ है कि $(0, 0)$ पर f_x और f_y असंतत है।

परंतु, $f(h,k)-f(0,0)=0.h+0.k+h\left(h\sin\frac{1}{h}\right)+k\left(k\sin\frac{1}{k}\right)$ है,

जहाँ $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} h\sin\frac{1}{h}=0=\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} k\sin\frac{1}{k}$ है।

अतः, $(0,0)$ पर f अवकलनीय है।

***

देखिए कि क्या आप अब इन प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E20) दर्शाइए कि

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}+y\sin\frac{1}{y}, & xy\neq 0 \\ x\sin\frac{1}{x}, & y=0,\ x\neq 0 \\ y\sin\frac{1}{y}, & x=0,\ y\neq 0 \\ 0, & x=0=y \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ मूलबिंदु पर संतत है, परंतु अवकलनीय नहीं हैं।

E21) मूलबिंदु पर निम्नलिखित फलनों के सांतत्य और अवकलनीयता की जाँच कीजिए :

क) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{यदि } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{यदि } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ख) $f(x,y)=\begin{cases}y\sin\dfrac{1}{x}, & \text{यदि } x\neq 0\\ 0, & \text{यदि } x=0\end{cases}$

E22) दर्शाइए के निम्नलिखित फलन प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय हैं :

क) $f(x,y)=e^{x+y}$

ख) $f(x,y)=2\sinh x+3\cosh y$

आइए हम इस इकाई को संक्षिप्त करें और जो कुछ इस इकाई में पढ़ा है, उसे जल्दी से दोहरा लें।

3.4 सारांश

इस इकाई में, हमने अवकलजों की संकल्पना को अनेक चरों वाले फलनों के लिए विस्तृत किया है। इस प्रक्रिया में हमने :

1. एक बिंदु पर किसी फलन $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों को परिभाषित किया है, जहाँ $n=2$ और 3 है।
2. एक बिंदु पर प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व को सिद्ध करने तथा उनके मान ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा की है।
3. यह स्थापित करने के लिए कुछ उदाहरण दिए हैं कि किसी बिंदु पर प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व से यह निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है कि उस बिंदु पर फलन निश्चित रूप से संतत होगा।
4. एक फलन $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $n=2$ या 3 के अवकलनीयता को परिभाषित किया है।
5. एक फलन के आंशिक अवकलजों, अवकलनीयता तथा सांतत्य में संबंध स्थापित किया है।

3.5 हल/उत्तर

E1) $f_x(a,b)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h}=0$ है।

इसी प्रकार, $f_y(a,b)=0$ है।

E2) परिभाषा से, $f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}$ है।

क्योंकि $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}$ का अस्तित्व नहीं है, इसलिए $f_x(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

इसी प्रकार, $f_y(0, 0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}$ का अस्तित्व नहीं है।

E3) $$f_x(0, 0, 0) = \lim_{p\to 0}\frac{f(p, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{p} = \lim_{h\to 0}\frac{p-0}{p} = 1$$

$$f_y(0, 0, 0) = \lim_{q\to 0}\frac{f(0, q, 0) - f(0, 0, 0)}{q} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

$$f_z(0, 0, 0) = \lim_{r\to 0}\frac{f(0, 0, r) - f(0, 0, 0)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{0-0}{r} = 0$$ है।

E4) फलन $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$, x और y में एक बहुपद है। अतः आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है।

हम पहले $\frac{\partial f}{\partial x}$ ज्ञात करते हैं। तब, y अचर माना जाता है।

अतः, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y + 0$$

$$= 4x - y$$

फिर, हम $\frac{\partial f}{\partial y}$ ज्ञात करते हैं। यहाँ x को अचर माना जाता है।

इस प्रकार,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - x + 4y = -x + 4y$$ है।

E5) **संकेतः** दिए गए पांचो स्थितियों में फलन f बहुपद है। इनका प्रत्यक्ष अवकलन करके निम्नलिखित प्राप्त होता है :

क) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2 - y);\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x^2 - y)$$

ख) $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{2y}{(x + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}} = -\frac{y}{(x + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{2z}{(x+y^2+z^2+1)^{3/2}} = -\frac{z}{(x+y^2+z^2+1)^{3/2}}$$

ग) $\frac{\partial f}{\partial x} = yz\cos xz; \frac{\partial f}{\partial y} = \sin xz; \frac{\partial f}{\partial z} = xy\cos xz$

घ) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}; \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$.

ड.) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + y^2 e^{xy^2}; \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy\, e^{xy^2}$.

E6) $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ है। क्योंकि संबद्ध फलन u और v चरघातांकीय और त्रिकोणमितीय फलन है, इसलिए आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। तब,

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ और $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ तथा

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$ और $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ है। अतः, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ है।

E7) $$F_x(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) + g(y) - (f(x) + g(y))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$F_y(x, y) = \lim_{k\to 0}\frac{F(x, y+k) - F(x, y)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{f(x) + g(y+k) - (f(x) + g(y))}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = g'(y).$$

E8) परिभाषा से,

$$\left(\frac{\partial (f+g)}{\partial x}\right)_{(a,b)} = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)\,(a+h, b) - (f+g)\,(a, b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} + \frac{g(a+h, b) - g(a,b)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h, b) - g(a, b)}{h}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(a, b)} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(a\, b)}$$

इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है।

निम्नलिखित फलनों f और g पर विचार कीजिए :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 \text{ यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

तब, सभी (x, y) के लिए $(f+g)\,(x, y) = 1$ है।

पहले हम दर्शा सकते हैं कि $f_x(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

इसी प्रकार दर्शा सकते हैं कि $g_x(0, 0)$ का भी अस्तित्व नहीं है।

परंतु, *(0,0)* पर $\frac{\partial}{\partial x}(f+g)$ का अस्तित्व है, क्योंकि $f+g$ एक अचर फलन है।

E9) समतल $y = 2$ और पृष्ठ $z = 2x^2 + 3y^2$ की प्रतिच्छेदन-वक्र की बिंदु $(1, 2, 14)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{1,\, 2,\, 14)}$ से दी जाती है। अब, $z = 2x^2 + 3y^2$ है। इसलिए, $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$ है और इसीलिए $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{(1,\, 2,\, 14)} = 4$ है। इस प्रकार प्रवणता 4 है।

E10) f के $(0, 0)$ पर सांतत्य को दर्शाने के लिए, मान लीजिए कि $\varepsilon > 0$ एक दी हुई वास्तविक संख्या है। $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$ चुनिए। तब,

$$|x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}, |y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}} = \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ है।}$$

अतः $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$

इसलिए, (0,0), पर f संतत है। अब, परिभाषा से,

$$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \text{ है।}$$

क्योंकि, $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ का अस्तित्व नहीं है, इसलिए, $f_x(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है। इसी प्रकार, $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

E11) $f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \text{ है।}$$

इसी प्रकार, $f_y(0, 0) = 0$ है। अब, हमें यह दर्शाना है कि $(0, 0)$ पर f संतत है। हमें प्राप्त है :

$$\left| \mathrm{x} \sin \frac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{y} \sin \frac{1}{\mathrm{y}} \right| \le |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|.$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\lim_{x\to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} + y \sin \frac{1}{y} \right) = (0, 0) = f(0, 0)$ है।

अतः (0,0), पर f संतत है।

E12) $f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = 0 \text{ है।}$$

इसी प्रकार, $f_y(0, 0) = 0$ है।

इसी प्रकार, ऐसे बिंदुओं (x, y) के लिए, ताकि $xy = 0$ है, हम $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ प्राप्त करते हैं। अब, मान लीजिए कि $x \ne 0 \ne y$ है। तब, (x, y) पर दोनों आंशिक अवकलजों के अस्तित्व है; क्योंकि चरों x और y में $f(x, y)$ दो अवकलनीय फलनों का भागफल है। सीधे अवकलन द्वारा,

$$f_x(x, y) = \frac{(x^4 + y^2)\,(2xy) - x^2 y(4x^3)}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^5 y + 2xy^3 - 4x^5 y}{(x^4 + y^2)^2}$$

तथा $f_y(x, y) = \dfrac{(x^4 + y^2)(x^2) - x^2 y(2y)}{(x^4 + y^2)^2}$

$$= \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

परंतु $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि जब हम $y = x$ रखते हैं, तब

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^4 + x^2} = 0$ है तथा जब हम $y = x^2$ रखते हैं, तब

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2}$ है।

अतः $(0,0)$ पर f असंतत है।

E13) क) क्योंकि सभी $y \neq 0$ के लिए, $\left|\dfrac{xy}{y}\right| = \dfrac{|x||y|}{|y|} = |x|$ है।

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{|y|} = 0 = f(0, 0)$ अतः, $(0,0)$ पर f संतत है।

साथ ही, $f_x(0, 0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \text{ है।}$$

इसी प्रकार $f_y(0, 0) = 0$ है।

ख) $f_x(1, 0) = 0$ है। परंतु, $f_y(1, 0)$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि

$\dfrac{f(1, k) - f(1, 0)}{k} = \dfrac{\dfrac{k}{|k|} - 0}{k} = \dfrac{1}{|k|}$ तथा $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{1}{|k|}$ का अस्तित्व नहीं है।

E14) क) **संकेत:** $f(x, y) = xe^y \Rightarrow f_x(x, y) = e^x$ और $f_y(x, y) = xe^y$ है। हम n' ℞ d r sg@fd R^2 के किसी बिंदु के एक प्रतिवेश में f_x परिबद्ध है इसलिए, उपप्रमेय 1 द्वारा f प्रत्येक स्थान पर संतत है।

ख) अब, $f(x, y) = 3xy \Rightarrow f_x(x, y) = 3y$ तथा $f_y(x, y) = 3x$ है। दोनों आंशिक अवकलज f_x और f_y उपप्रमेय 1 के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। अतः, f प्रत्येक स्थान पर संतत है।

E15) क) दो चरों वाला एक अचर फलन प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय होता है।

ख) यदि $(a, b) \in \boldsymbol{R}^2$ पर f अवकलनीय है, तो (a, b) पर $cf (c \in \boldsymbol{R})$ भी अवकलनीय होता है।

ग) यदि $(a, b) \in \boldsymbol{R}^2$ पर f और g अवकलनीय है, तो (a, b) पर $f \pm g$ भी अवकलनीय होता है।

घ) यदि (a, b) पर f और g अवकलनीय हैं, तो (a, b) पर f भी अवकलनीय होता है।

अब, हम इन कथनों की मान्यता की जाँच करेंगे।

क) मान लीजिए कि $f(x, y) = c$ एक दिया हुआ अचर फलन है। मान लीजिए कि $\boldsymbol{R}^2$ का (a, b) कोई बिंदु है। तब,

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = c - c = 0$$

$= 0.h + 0.k + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$ है, जहाँ सभी h और k के लिए, $\phi(h, k) = 0 = \psi(h, k)$ है।

क्योंकि $\boldsymbol{R}^2$ का (a, b) कोई भी स्वैच्छिक बिंदु था, इसलिए f प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है।

ख) मान लीजिए कि (a, b) पर f अवकलनीय है। तब, ऐसे अचरों A और B तथा फलनों ϕ और ψ के अस्तित्व है; जो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर, शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं; ताकि

$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$ हो।

यदि $c \neq 0$ एक अचर है, तो उपरोक्त समीकरण को c से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(cf)(a+h, b+k) - (cf)(a, b) = A'h + B'k + h\phi'(h, k) + k\psi'(h, k)$$

जहाँ $A' = cA, B' = cB, \phi' = c\phi, \psi' = c\psi$ है।

हम पहले देख चुके हैं कि यदि $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर ϕ और ψ शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं, तो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर ϕ' और ψ' भी शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं। अतः, जब भी c एक शून्येतर अचर है, तो cf अवकलनीय होता है। यदि c शून्य है, तो cf एक अचर फलन है, जो प्रत्येक बिंदु को शून्य तक ले जाता है और इसीलिए यह अवकलनीय है।

ग) क्योंकि (a, b) पर f अवकलनीय है, अतः ऐसे अचरों A' और B' तथा फलनों $\phi'(h, k)$ और $\psi(h, k)$ के अस्तित्व है; जो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं ताकि

$f(a+h, b+k) - f(a, b) = A'h + B'k + h\phi'(h,k) + k\psi'(h,k)$ है।

इसी प्रकार, क्योंकि (a, b) पर g अवकलनीय है, अतः ऐसे अचरों A'' और B'' तथा फलनों $\phi''(h, k)$ और $\psi''(h, k)$ अस्तित्व है, जो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं ताकि

$$h(a+h, b+k) - g(a, b) = A''h + B''k + h\phi''(h,k) + k\psi''(h,k)$$

तब, $(f \pm g)\ (a+h, b+k) - (f \pm g)\ (a, b)$

$$= (A' \pm A'')h + (B' \pm B'')k + h[\phi'(h, k) \pm \phi''(h, k)]$$

$$+ k[\psi'(h, k) \pm \psi''(h, k)]$$

$$= Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$$

जहाँ $A = A' \pm A''$, $B = B' \pm B''$, $\phi(h, k) = \phi'(h, k) \pm \phi''(h, k)$ तथा $\psi(h, k) = \psi'(h, k) \pm \psi''(h, k)$ है।

अब, क्योंकि A और B अचर है तथा $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर, फलन ϕ और ψ शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं; इसलिए (a, b) पर $f+g$ तथा साथ ही, $f-g$ अवकलनीय हैं।

घ) ग) की तरह की प्रक्रिया कीजिए। तब

$$fg(a+h, b+k) - fg(a, b) = f(a+h, b+k)\ g(a+h, b+k)$$

$$- f(a+h, b+k)\, g(a, b) + f(a+h, b+k)\, g(a, b)$$

$$- f(a, b)\ g(a, b)$$

$$= f(a+h, b+k)[g(a+h, b+k) - g(a, b)] + g(a, b)$$
$$[f(a+h, b+k) - f(a, b)]$$

$$= [f(a,b) + A'h + B'k + h\phi'(h,k) + k\psi'(h,k)][A''h + B''k$$

$$+ h\phi''(h,k) + k\psi''(h,k)] + g(a,b)[A'h + B'k + h\phi'(h,k) + k\psi'(h,k)]$$

$$= Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi'(h,k)$$

जहाँ $A = A''f(a,b) + A'g(a,b), B = B''f(a,b) + B'g(a,b)$,

$$\phi(h,k) = [A' + \phi'(h,k)][A''h + B''k + h\phi''(h,k) + k\psi''(h,k)]$$

$$+ f(a,b)\phi''(h,k) + g(a,b)\phi'(h,k)$$

और $$\psi(h,k) = [B' + \psi'(h,k)][A''h + B''k + h\phi''(h,k) + k\psi''(h,k)]$$

$$+ f(a,b)\psi''(h,k) + g(a,b)\psi'(h,k)$$

E16) यहाँ $f(h,k) - f(0, 0) = h^2 + k + hk = 0.h + 1.k + h\phi(h,k) + k\psi(h,k)$ है, जहाँ सभी h, k के लिए $\phi(h,k) = h = \psi(h,k)$ है। और $(h,k) \to (0, 0)$ होने पर $\phi(h,k) \to 0$ और $\psi(h, k) \to 0$ है। $(h,k) \to (0, 0)$. इस प्रकार $(0,0)$ पर f अवकलनीय है।

E17) मान लीजिए कि $f(x, y) = \cos(x+y)$ है। निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$$f\left(\frac{\pi}{4}+h, \frac{\pi}{4}+k\right) - f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}+h+\frac{\pi}{4}+k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+h+k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin(h+k)$$

$$= -h-k+h\left[1-\frac{\sin(h+k)}{h+k}\right]+k\left[1-\frac{\sin(h+k)}{h+k}\right]$$

$$= Ah+Bk+h\phi(h, k)+k\psi(h, k) \text{ है,}$$

जहाँ $A=-1,\ B=-1,\ \phi(h,k)=\psi(h,k)=1-\dfrac{\sin(h+k}{(h+k)}$ है।

अब $\lim\limits_{(h, k)\to(0, 0)} \phi(h, k) = \lim\limits_{(h, k)\to(0, 0)} \psi(h, k) = 1 - \lim\limits_{(h, k)\to(0, 0)} \dfrac{\sin(h+k)}{h+k}$

$= 1-1 = 0$ है।

क्योंकि $\lim\limits_{(h, k)\to(0, 0)} \dfrac{\sin(h+k)}{h+k} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ है, जहाँ $t = h+k$ है।

अतः, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ पर f अवकलनीय है।

E18) मान लीजिए कि, यदि संभव है तो $(0, 0)$ पर f अवकलनीय है। तब, ऐसे अचरों A और B तथा फलनों ϕ और ψ के अस्तित्व हैं कि $(h, k)\to(0, 0)$ होने पर ये शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं; ताकि

$f(0+h, 0+k) - f(0, 0) = Ah+Bk+h\phi(h\ k)+k\psi(h, k)$,

i.e., $\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = Ah+Bk+h\phi(h, k)+k\psi(h, k)$ है।

$h=0,\ k\neq 0$ रखिए। तब, $0 = Bk+k\psi(0, k)$ है,

अर्थात्, $B+\psi(0, k) = 0$ है।

$k\to 0$ होने पर, सीमा लेने पर, हम $B=0$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, $h\neq 0,\ k=0$ रखने पर, हम $A=0$ प्राप्त करते हैं।

अब, यदि हम $h=k\neq 0$ मानते हैं, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{h}{\sqrt{2}} = Ah+Bh+h\phi(h, h)+h\psi(h, h)$$

अर्थात्, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = A+B+\phi(h, h)+\psi(h, h)$ है।

अतः, $h \to 0$ होने पर, सीमा लेने पर, हम $A+B=\frac{1}{\sqrt{2}}$ प्राप्त करते हैं, जो असंभव है, क्योंकि $A=0=B$ है।

इस प्रकार हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं और इसीलिए (0,0) पर f अवकलनीय नहीं हो सकता है।

E19) क) आप उदाहरण 3, इकाई 4 में पहले ही देख चुके हैं कि (0,0) पर

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ का अस्तित्व नहीं है इससे यह प्रदर्शित होता है कि फलन $(0, 0)$ पर अवकलनीय नहीं है।

ख) यदि हम $y=mx$ रखें, तो $f(x, y)=\frac{2}{1+m^2}$ है। इसका अर्थ है कि $(x, y)\to(0, 0)$ होने पर $y=mx$ के अनुदिश $f(x, y)$ की सीमा $\frac{2}{1+m^2}$ है तथा यह m के विभिन्न मानों के लिए विभिन्न हैं।

अतः, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ का अस्तित्व नहीं है तथा इसी कारण (0,0) पर f संतत नहीं है।

ग) जब हम $y=mx, m\neq 1$, रखते हैं, तब $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1+m^2)}{1-m}=0$ है। परंतु $f(0, 0)=1$ है।

अतः, (0,0) पर f असंतत है।

घ) $x^4+y^4 \leq x^4$

$\Rightarrow \ |f(x, y)| \leq \left|\frac{x^5}{x^4}\right| = |x|$ है।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=0$ है, जो $f(0, 0)=3$ से भिन्न है। इस प्रकार, (0,0) पर f संतत नहीं है।

E20) अब, सभी स्थितियों के लिए, $|f(x, y)| \leq |x|+|y|$ है।

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=f(0, 0)$ है और इसीलिए (0,0) पर f संतत है। अब, हमें यह दर्शाना है कि $(0, 0)$ पर f अवकलनीय नहीं है। प्रमेय 5 को दृष्टिगत रखते हुए, यह दर्शाना पर्याप्त है कि या तो f_x या f_y का अस्तित्व नहीं है।

अब, $f_x(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि

$$\frac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\sin\frac{1}{h} \text{ है तथा}$$

$\lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$ का अस्तित्व नहीं है। अतः, (0,0) पर f अवकलनीय नहीं है।

E21) क) अब, $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ है।

$(x, y) \neq (0, 0)$, $f_x(x, y) = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ तथा $f_y(x, y) = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ है।

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$|f_x(x, y)| = r|\sin^5\theta - \cos^2\theta\sin^3\theta| \leq 2r = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f_x(x, y) = f_x(0, 0)$ है। अतः, (0, 0) पर f_x संतत है तथा $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व है। इस प्रकार, f_x और f_y प्रमेय 6 के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। अतः, (0,0) पर f अवकलनीय है तथा इसी कारण (0, 0) पर f संतत भी है।

ख) क्योंकि $|f(x, y)| \leq |y|$ है, इसलिए यह सरलता से दर्शाया जा सकता है कि (0,0) पर f संतत है। अब, $f_x(0, 0) = 0$ और $f_y(0, 0) = 1$ है।
मान लीजिए कि, यदि संभव है तो, (0,0) पर f अवकलनीय है। तब, ऐसे फलनों ϕ और ψ के अस्तित्व है, तो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं ताकि

$f(h, k) - f(0, 0) = 0.h + 1.k + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$ हो

मान लीजिए कि $h = k \neq 0$ है। तब,

$$h\sin\frac{1}{h} = h + h\,\phi\,(h, h) + h\psi(h, h)$$

अर्थात्, $\sin\frac{1}{h} = 1 + \phi(h, h) + \psi(h, h)$ है।

अतः, $\lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h} = 1$ है, जो इस तथ्य का अंतर्विरोध करता है कि $\lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$ का अस्तित्व नहीं होता।

E22) क) क्योंकि $f_x(x, y) = e^{x+y} = f_y(x, y)$ है, इसलिए यह सरलता से देखा जा सकता है कि f_x और f_y प्रत्येक स्थान पर संतत हैं। अतः, f प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है।

ख) $f_x(x, y) = 2\cosh x$ है तथा $f_y(x, y) = 3\sinh x$ है।

अतः f_x और f_y प्रत्येक स्थान पर संतत हैं और इसी कारण f प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है।

– x –

इकाई 4

उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, आपने अनेक चरों वाले फलनों के लिए, आंशिक अवकलजों की नई संकल्पना का अध्ययन किया था। वहाँ के उदाहरणों में विभिन्न फलनों के लिए जो हमने आंशिक अवकलज अभिकलित किए थे, वे प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज कहलाते हैं। आपने यह अवश्य ही देखा होगा कि प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज भी पुनः फलन ही हैं। उदाहरणार्थ, यदि $f(x,y)=3x^3+2xy^2+5y^2+6$ है, तो $f_x(x,y)=9x^2+2y^2$ और $f_y(x,y)=4xy+10y$, पुनः प्राँत $\boldsymbol{R}^2$ के साथ दो चरों वाले वास्तविक-मान फलन ही है। इसलिए, हम इन नए फलनों के आंशिक अवकलजों की बात कर सकते हैं। यह नए अवकलज प्रारंभिक फलन के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज कहलाते हैं।

द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज महत्वपूर्ण हैं, क्योंकि ये अनेक भौतिक अनुप्रयोगों में प्रकट होते हैं, जैसे कि ऊष्मा प्रवाह का विवरण देने वाली ऊष्मा समीकरण, ध्वनि और जल तरंगों के अध्ययन में तरंग समीकरण, इत्यादि।

यदि हम दो चरों वाले एक फलन पर विचार करें, तो इससे दो प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज प्राप्त होते हैं, जिनसे द्वितीय कोटि के चार आंशिक अवकलज प्राप्त हो सकते हैं, जो पुनः फलन भी हो सकते हैं। यदि यह श्रृंखला जारी रहें, तो हम तृतीय कोटि, चतुर्थ कोटि, इत्यादि के आंशिक अवकलज प्राप्त करते जा सकते हैं। इस इकाई में, हम ऐसे ही उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों का अध्ययन करेंगे। आगे आने वाले खंडों से, आपको इन आंशिक अवकलजों का महत्व स्पष्ट हो जाएगा।

इस इकाई में, आप ऑयलर, श्वार्ज और यंग की प्रमेयों का भी अध्ययन करेंगे, जो प्रतिबंधों के कुछ समुच्चय प्रदान करती है, जिनके अंतर्गत मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर हो जाते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप

- उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों को परिभाषित कर पाएँगे तथा उनका मान निकाल पाएंगे;
- ऑयलर, श्वार्ज और यंग की प्रमेयों के कथन दे पाएँगे; और
- विभिन्न चरों के सापेक्ष आंशिक अवकलज लेकर उनसे प्राप्त संक्रियाओं की क्रम विनिमेयता के बारे में निर्णय ले पाएँगे।

4.2 उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज

इस अनुच्छेद में, हम जिन उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों की चर्चा करेंगे, उनमें मुख्यतः द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज होंगे। प्रस्तावना में, आप देख चुके हैं कि फलन $f(x,y)$ का आंशिक अवकलज f_X पुनः x और y का एक फलन है। उदाहरणार्थ, फलन $f(x,y) = 3x^3 + 2xy^2 + 5y^2 + 6$ का आंशिक अवकलज $fx, f(x,y) = 9x^2 + 2y^2$ है, जो पुनः x और y का एक फलन है। व्यापक रूप में, मान लीजिए कि $D \subset R^2$ है तथा मान लीजिए कि $f: D \to R$ का D के प्रत्येक बिंदु पर प्रथम कोटि का एक आंशिक अवकलज fx है। तब, हमें एक नया फलन, मान लीजिए $g = fx$ प्राप्त होता है जो D पर परिभाषित है। इस फलन g के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज हो भी सकते हैं तथा नहीं भी हो सकते हैं। आंशिक अवकलज होने की स्थिति में, g_X और g_y फलन f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज कहलाते हैं तथा इन्हें क्रमशः fxx और f_{yy} से व्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार, यदि फलन f का D के प्रत्येक fxx बिंदु पर प्रथम कोटि का एक आंशिक अवकलज f_y हैं तो f_y से एक नया फलन परिभाषित होता है। यदि इस नए फलन के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज है, तो हमें द्वितीय कोटि के दो और आंशिक अवकलज प्राप्त होते हैं, जिन्हें क्रमशः f_{yx} और f_{yy} से व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार, यदि $f(x,y)$ एक वास्तविक-मान फलन बिन्दु (a,b) के प्रतिवेश में परिभाषित है, जिसके दोनों आंशिक अवकलज इस प्रतिवेश के सभी बिंदुओं पर विद्यमान है, तो

$$f_{xx}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(a+h,b) - f_x(a,b)}{h}$$

$$f_{xy}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(a,b+k) - f_x(a,b)}{k}$$

$$f_{yx}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(a+h,b) - f_y(a,b)}{h}$$

$$f_{yy}(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f_y(a,b+k)-f_y(a,b)}{k},$$

जबकि प्रतिबंध है कि इन सीमाओं में से प्रत्येक का अस्तित्व हो।

इसका अर्थ है कि हम f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों को

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

द्वारा भी व्यक्त करते हैं।

यदि हम उस विशेष बिंदु को इंगित करना चाहते हैं जिस पर द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज लिए जाते हैं, तो हम

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(a,b)},\ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2},\ f_{xx}(a,b),\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{(a,b)}$$

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\,\partial y},\ f_{xy}(a,b)$$

इत्यादि लिखते हैं।

ध्यान दीजिए कि द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज f_{xy} और f_{yx} **द्वितीय कोटि के मिश्रित आंशिक अवकलज** या केवल **मिश्रित (mixed) आंशिक अवकलज** कहलाते हैं।

इसी प्रकार, दो से अधिक कोटि के उच्चतर आंशिक अवकलजों को परिभाषित किया जाता है। उदाहरणार्थ,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]$$

अर्थात् $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial x\,\partial y}$ चर x के सापेक्ष $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ के आंशिक अवकलज को व्यक्त करता है

तथा इसे $\dfrac{\partial^3 f}{\partial^2 x\,\partial y}$ लिखा जाता है।

नोट : उच्चतर कोटि आंशिक अवकलज तीन चरों वाले फलनों के लिए भी परिभाषित किया जाता है।

आगे आने वाले उदाहरणों में, हम दर्शा रहे हैं कि इन उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों को किस प्रकार परिकलित किया जाता है।

उदाहरण 1 : फलन $U(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy$ के द्वितीय कोअि के सभी आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए, जहाँ a एक अचर है।

हल: आइए फलन U से दिए जाने वाले $U(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy$ पर विचार करें।

सर्वप्रथम, हम प्रथम कोटि के आंशिक अवलकज परिकलित करते हैं।

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 3ay$ तथा $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + 3ax$ है।

फिर, हम द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज परिकलित करते हैं।

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3ay) = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 3ay) = 3a = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 + 3ax)$$

तथा

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}(3y^2 + 3ax) = 6y$ है।

***

उदाहरण 2: यदि $f(x, y) = x^2 \tan^{-1} \dfrac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \dfrac{x}{y}, x \neq 0, y \neq 0$,

है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ है।

हल: सर्वप्रथम, हम ध्यान देते हैं कि $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ है। यहाँ,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 . \frac{1}{1 + y^2/x^2} . \frac{1}{x} - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y} - y^2 . \frac{1}{1 + x^2/y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 2y \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

$= x - 2y \tan^{-1} \dfrac{x}{y}$ है।

इसलिए,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - 2y\tan^{-1}\frac{x}{y}\right)$$

$$= 1 - 2y.\frac{1}{1 + x^2/y^2}.\frac{1}{y}$$

$$= 1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ है।}$$

***

अगले उदाहरण में, हम एक कदम और आगे बढ़ते हैं तथा तृतीय कोटि के एक आंशिक अवकलज को परिकलित करते हैं।

उदाहरण 3: यदि $u(x, y) = e^{xy}$ है, तो दर्शाइए कि

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x\,\partial x} \text{ है।}$$

हल : अब, $u(x, y) = e^{xy}$ है। तब,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \text{ है।}$$

तथा,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy} = (1 + xy)e^{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(1 + xy)e^{xy}\right\} = (1 + xy)y\,e^{xy} + ye^{xy} = (2 + xy)ye^{xy} \text{ है।}$$

इस प्रकार, $\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{xy}\right) = y^2 e^{xy} \text{ है।}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 e^{xy}\right) = 2ye^{xy} + y^2 xe^{xy}$$

$$= ye^{xy}(2 + yx)$$

अतः परिणाम प्राप्त हो जाता है।

***

हमें विश्वास है कि आप आप इन प्रश्नों को हल कर पाएँगे।

E1) निम्नलिखित फलनों को द्वितीय कोटि के सभी आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए :

क) $f(x,y) = \cos\frac{y}{x}; \quad (x \neq 0)$

ख) $f(x,y) = x^5 + y^4 \sin x^6$

E2) दर्शाइए कि फलन $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ लाप्लास समीकरण $f_{xx} + f_{yy} = 0$ को संतुष्ट करता है।

E3) निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक के लिए जाँच कीजिए कि $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ है:

क) $f(x,y) = x^3 y + e^{xy^2}$

ख) $f(x,y) = \tan\left(xy^3\right)$

टिप्पणी 1: इकाई 3 में आप देख चुके हैं कि प्रत्यक्ष (सीधे) अवकलन से सदैव यह संभव नहीं होता कि प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज ज्ञात हो जाएँ। इकाई 3 के उदाहरण 5 को देखिए। ऐसा ही कुछ फलनों के उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों के लिए भी सत्य है। इसे निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 4: बिन्दु (0,0), पर f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों के मान निकालिए, जबकि फलन f निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

हल : क्योंकि $f_{xx}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h}$ है, इसलिए हमें पहले $f_x(h,0)$ और $f_x(0,0)$ के मान निकालने पड़ेंगे।

$$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \text{ है।}$$

$$f_x(h,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(h+t,0) - f(h,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \text{ है।}$$

अतः,

$$\boxed{f_{xx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \text{ है।}}$$

क्योंकि $f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k}$, है, इसलिए हमें पहले $f_x(0,k)$ का मान निकालना चाहिए।

अब, $f_x(0,k) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,k) - f(0,k)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{tk(t^2 - k^2)}{t^2 + k^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{k(t^2 - k^2)}{t^2 + k^2}$$

$$= -\frac{k^3}{k^2}$$

$$= -k \cdot$$

अतः, $f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$ है।

क्योंकि $f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$ है, इसलिए हम पहले $f_y(h,0)$ और $f_y(0,0)$ के मान निकालते हैं।

अब, $f_y(0,0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0,s) - f(0,0)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{0-0}{s} = 0$ है।

$$f_y(h,0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(h,s) - f(h,0)}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{\frac{hs(h^2 - s^2)}{h^2 + s^2} - 0}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{h(h^2 - s^2)}{h^2 + s^2}$$

$$= \frac{h^3}{h^2}$$

$= h$ है।

अतः, $$\boxed{f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1 \text{ है।}}$$

क्योंकि $f_{yy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(0,k) - f_y(0,0)}{k}$ है, इसलिए पहले हम $f_y(0,k)$ का मान निकालते हैं।

अब, $f_y(0,k) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0,k+s) - f(0,k)}{k} = \lim_{s \to 0} \frac{0-0}{k} = 0$ है।

अतः, $$\boxed{f_{yy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = 0}$$ है।

***

टिप्पणी 2

(i) इस प्रकार, आप देख सकते हैं, कि किसी फलन के आंशिक अवकलज का मान निकालने के लिए, हमें आंशिक अवकलजों की परिभाषा का सहारा लेना पड़ता है तथा प्रत्यक्ष अवकलन हमेशा संभव नहीं होगा।

(ii) उदाहरण 4 में दी गयी फलन के लिए $f_{xy}(0,0)$ और $f_{yx}(0,0)$ के अस्तित्व हैं, परंतु ये बराबर नहीं हैं।

अगले उदाहरण में, हम एक ऐसे फलन को ले रहे हैं जो कुछ अधिक जटिल है।

उदाहरण 5: निम्नलिखित फलन f के लिए $f_{xy}(0,0)$ और $f_{yx}(0,0)$ के मान निकालिए।

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^4 + y^4)\tan^{-1}(y^2/x^2), & x \neq 0 \\ \dfrac{\pi y^4}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

हल : सर्वप्रथम, हम ध्यान देते हैं कि

$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$ है तथा

$$f_x(0,k) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,k) - f(0,k)}{t}.$$

$= \lim_{t \to 0} \frac{(t^4 + k^4)\tan^{-1}(k^2/t^2) - \pi k^4/2}{t}$ है।

लोपिताल-नियम द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$f_x(0,k) = \lim_{t\to 0} \frac{4t^3 \tan^{-1} \frac{k^2}{t^2} + (k^4 + t^4) \frac{1}{1+(k^4/t^4)} \left(-\frac{2k^2}{t^3}\right)}{1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[4t^3 \tan^{-1} k^2/t^2 - 2k^2 t\right]$$

$$= 0$$

अतः, $f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$ है।

अब, $f_y(0,0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(0,s) - f(0,0)}{s}$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{(\pi s^4/2) - 0}{s}$$

$$= 0$$

साथ ही, $f_y(h,0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(h,s) - f(h,0)}{s}$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{(h^4 + s^4)\tan^{-1}(s^2/h^2) - 0}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{4s^3 \tan^{-1}(s^2/h^2) + (h^4 + s^4)\left(\frac{1}{1+s^4/h^4}\right)(2s/h^2)}{1}$$

$$= \lim_{s\to 0} \left[4s^3 \tan^{-1} s^2/h^2 + 2sh^2\right]$$

$= 0$ है।

इसके फलस्वरूप $f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$ है।

***

इकाई 3 में, कुछ ऐसे फलनों के उदाहरणों को देख चुके हैं, जिनके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व नहीं था। इकाई 3 का उदाहरण 3 देखिए।

यहाँ, हम एक ऐसे फलन का उदाहरण देंगे, जिसके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व हैं, परंतु उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व नहीं हैं। इस उदाहरण से आप यह भी देखेंगे कि एक विशेष कोटि के आंशिक अवकलज के अस्तित्व का यह अर्थ नहीं है कि उसी कोटि के अन्य आंशिक अवकलज को अस्तित्व अवश्य ही होगा।

उदाहरण 6: जाँच कीजिए कि (0,0) पर f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व हैं या नहीं, यदि $f:\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & xy\neq 0\\ 0 & , xy=0\end{cases}$$

हल: अब, $f_x(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

इसी प्रकार, $h\neq 0,\ f_x(h,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(h+t,0)-f(h,0)}{t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0 \text{ है।}$$

अतः, $\boxed{f_{xx}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h}=0}$ है।

अब, f_{xy} के अस्तित्व की जाँच करने के लिए, हमें देखना होगा कि क्या

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}$ का अस्तित्व है या नहीं।

अतः, आइए $k\neq 0$ के लिए, $f_x(0,k)$, ज्ञात करें।

$k\neq 0$ और $f_x(0,k)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,k)-f(0,k)}{t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{tk^2}{\sqrt{t^2+k^2}}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{k^2}{\sqrt{t^2+k^2}}$$

$$= \frac{k^2}{\sqrt{k^2}}$$

$= |k|$ है। (याद कीजिए, $\sqrt{k^2} = |k|$ है)

अब, $\lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k}$

$= \lim_{k \to 0} \frac{|k|}{k}$ है, जिसका अस्तित्व नहीं है।

यह दर्शाता है कि $\boxed{(0,0) \text{ पर } f_{xy} \text{ का अस्तित्व नहीं है।}}$

अब, $f_y(0,0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0,s) - f(0,0)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{0-0}{s} = 0$ है।

$h \neq 0$ के लिए $f_y(h,0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(h,s) - f(h,0)}{s}$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{\frac{hs^2}{\sqrt{h^2+s^2}} - 0}{s} \text{ है।}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{hs}{\sqrt{h^2+s^2}} = 0 \text{ है।}$$

अतः, $\boxed{f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0}$ है।

पुनः $k \neq 0$, के लिए $f_y(0,k) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0,k+s) - f(0,k)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{0-0}{s} = 0$ है।

अतः, $\boxed{f_{yy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(0,k) - f_y(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = 0}$ है।

इस प्रकार *(0,0)* पर f_{xx}, f_{yy} और f_{yx} के अस्तित्व है, जबकि $f_{xy}(0,0)$ का अस्तित्व नहीं है।

***

देखिए कि क्या आप इन प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E4) निम्नलिखित परिभाषित $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ फलन के लिए दर्शाइए कि $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ ।

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^5}{x^2+y^4}, & \text{यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{यदि } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

E5) बिन्दु (0,0) पर f_{xy} और f_{yx} की समता के लिए, निम्नलिखित फलनों की जाँच कीजिए:

क) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{यदि } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ख) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & \text{यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{यदि } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

E6) दर्शाइए कि $f(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{यदि } |y| \leq |x| \\ -xy, & \text{यदि } |y| > |x| \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए

$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ है।

उपरोक्त उदाहरणों और प्रश्नों के अध्ययन से, आप विश्वस्त हो गए होंगे कि हमें उन चरों के क्रम के बारे में सतर्क रहना है, जिनके सापेक्ष उच्चतम कोटि के अवकलज लिए जा रहे हैं। उदाहरणार्थ उदाहारण 4 से यह स्पष्ट है कि f_{xy} को f_{yx} के बराबर होना आवश्यक नहीं है। उदाहरण 6 और एक कदम आगे बढ़ जाता है, जहाँ (0,0) पर f_{xy} का अस्तित्व है, जबकि f_{yx} का अस्तित्व नहीं है, जो यह दर्शाता है कि इनकी समता का तो प्रश्न ही नही उठता है। यदि आप अधिक सावधानीपूर्वक बिंदु (a,b) पर f_{xy} और f_{yx} की परिभाषाओं को देखें, तो आप देखेंगे कि $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ की समता की प्रत्याशा स्वतः ही समाप्त हो जाती है। परिभाषा से,

$$f_{xy}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(a,b+k) - f_x(a,b)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\left[\frac{1}{k}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\right\}\right]$$

$$= \lim_{k\to 0}\left[\frac{1}{k}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b+k)-f(a,b)}{hk}\right\}\right],$$

इस प्रकार,

$$f_{yx}(a,b) = \lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0}\left\{\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)-f(a,b)}{hk}\right\}\right]$$

तथा इकाई 2 में हम पहले ही देख चुके हैं कि, व्यापक रूप में, पुनरावृत्त सीमाएँ बराबर नहीं होती हैं।

अगले अनुच्छेद में, हम उन प्रतिबंधों का अध्ययन करेंगे, जिनके अंतर्गत मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर हो जाते हैं।

4.3 मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता

अभी तक, हम देख चुके हैं कि द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों को किस प्रकार अभिकलित किया जाता है। हमने फलनों के मिश्रित आंशिक अवकलजों f_{xy} और f_{yx} की समता की भी चर्चा की है। अनेक भौतिक परिघटनाओं जैसे उष्मा और तरंग प्रचरण तथा गुरूत्वाकर्षण बल, इत्यादि के अध्ययन में द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज अति महत्वपूर्ण है। यहाँ हम कुछ सुप्रसिद्ध समीकरणों को दे रहे हैं :

i) **ऊष्मा समीकरण–** मान लीजिए कि समय t पर बिंदु (x, y, z) पर शरीर का तापमान $T(x, y, z, t)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। तब, T ऊष्मा समीकरण

$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial T}{\partial t}$ को संतुष्ट करता है, जहाँ k एक अचर है, जिसका मान शरीर को बनाने वाली सामग्री की संचालकता पर निर्भर करता है।

ii) एक-विमीय तरंग समीकरण $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

आंशिक अवकलजों से संबद्ध समीकरण को **आंशिक अवकल समीकरण (partial differential equations)** कहलाती है। इन समीकरणों का अध्ययन खंड 4 में किया जाएगा।

अब हम पर्याप्त प्रतिबंधों का एक समुच्चय देंगे, जो यह सुनिश्चित करेगा कि उन चरों के क्रम का कोई महत्व नहीं है, जिनके सापेक्ष उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज लिए जाते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि कोई फलन f इन प्रतिबंधों को सतुष्ट करता हैं, तो मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर होते हैं।

हम तीन प्रमेयों के कथन देंगे तथा उदाहरणों द्वारा इन्हें स्पष्ट करेंगे।

प्रमेय 1: मान लीजिए कि $f(x,y)$ एक वास्तविक मान फलन ऐसा है कि इसके दो द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज f_{xy} और f_{yx} बिंदु (a,b) पर संतत है। तब, $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ होता है।

– ■ –

इस परिणाम को लियोनार्ड ऑयलर ने लगभग 1734 में सिद्ध किया था, जब वे द्रवगतिकी (hydrodynamics) की कुछ समस्याओं पर कार्य कर रहे थे। बाद में, जर्मन गणितज्ञ हर्मन एमैण्डस श्वार्ज (1843-1921) ने मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता से संबंधित एक अन्य प्रमेय को सिद्ध किया। ऑयलर प्रमेय प्रमेय 1 की तुलना में श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंध कुछ कम कड़े है। यहाँ हम श्वार्ज-प्रमेय का केवल कथन ही दे रहे हैं।

प्रमेय 2: (श्वार्ज-प्रमेय): मान लीजिए कि (a,b) के प्रतिवेश में $f(x,y)$ एक वास्तविक-मान फलन ऐसा है कि

i) (a,b) के किसी प्रतिवेश में f_y का अस्तित्व है तथा

ii) (a,b) पर f_{xy} संतत है।

तब (a,b) पर f_{yx} का अस्तित्व होता है तथा $f_{yx}(a,b)=f_{xy}(a,b)$ होता है।

– ■ –

अब हम इन प्रमेयों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 7: $f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^6$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए, श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंधों की जाँच कीजिए। आप मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

हल: यहाँ, हम पहले f_{xy}, ज्ञात करेंगे तथा फिर बिंदु (x,y) पर f_{yx} का मान निकालने के लिए श्वार्ज-प्रमेय का उपयोग करेंगे।

प्रत्यक्ष अवकलन द्वारा, आप देख सकते हैं कि $f_y(x,y)=2x^2y+6y^5$ है। अतः,

$f_{xy}(x,y)=4xy$ है।

क्योंकि $4xy$ एक बहुपद है, इसलिए f_{xy} एक संतत फलन है।

अतः, f श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। इसलिए, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $f_{yx}(x,y)=f_{xy}(x,y)=4xy$ है।

***

उदाहरण 8: फलन $f(x,y)=e^x\cos y-e^y\sin x$ के लिए, ऑयलर-प्रमेय का सत्यापन

कीजिए।

हल: $f(x,y)=e^x \cos y - e^y \sin x$ है।

$\therefore f_y(x,y) = -e^x \sin y - e^y \sin x$ और $f_x(x,y) = e^x \cos y - e^y \cos x$ है।

f_x और f_y के व्यंजकों पर दृष्टि डालने पर, हम देख सकते हैं कि इन फलनों के अवकलजों के अस्तित्व हैं तथा ये संतत भी हैं। इसका अर्थ है कि प्रत्येक स्थान पर f_{xy} और f_{yx} दोनों के अस्तित्व हैं तथा ये प्रत्येक स्थान पर संतत हैं। अतः, ऑयलर-प्रमेय द्वारा हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\boldsymbol{R}^2$ के सभी बिंदुओं पर मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर हैं।

***

नोट: ध्यान दीजिए कि उपरोक्त उदाहरण के लिए, हम अवकलजों सीधे ही अभिकलित कर सकते हैं कि $f_{xy}(x,y) = -e^x \sin y - e^y \cos x$ और $f_{yx}(x,y) = -e^x \sin y - e^y \cos x$ है।

अतः, यह सरलता से देखा जा सकता है कि f_{xy} और f_{yx} दोनों प्रत्येक स्थान पर बराबर है और संतत हैं। आपको मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता के लिए, ऑयलर-प्रमेय की आवश्यकता नहीं है। परंतु दैनिक जीवन संबंधी स्थितियों में, अधिकतर फलन बहुत जटिल होते हैं तथा तब द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों का अभिकलित करना इतना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थिति में, यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर हैं ऑयलर-प्रमेय का अनुप्रयोग किया जाता है।

इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E7) निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन के लिए, बिंदु (x,y) पर f_{xy} का मान निकालिए :

क) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

ख) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},\ x \neq 0,\ y \neq 0$

सत्यापन कीजिए कि इनमें से प्रत्येक फलन श्वार्ज-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट करता है तथा फिर $f_{yx}(x,y)$ का मान निकालिए।

ऑयलर-प्रमेय में, हम यह मान लेते हैं कि दोनों मिश्रित आंशिक अवकलज संतत हैं, जबकि श्वार्ज-प्रमेय में हम यह मान लेते हैं कि इनमें से केवल एक, मान लीजिए f_{xy} ही संतत है तथा यह कि f_y का अस्तित्व है। यद्यपि श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंध कम कड़े है, फिर भी ये प्रतिबंध अभी भी मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता के लिए आवश्यक नहीं है। दूसरे शब्दों में, हमें ऐसे फलन प्राप्त हो सकते हैं कि जिनके कुछ बिंदुओं पर मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर होते हैं, परंतु वे श्वार्ज-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट नहीं करते। हम एक ऐसा ही फलन अगले उदाहरण में दे रहे हैं।

उदाहरण 9: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$ है, यद्यपि f श्वार्ज-प्रमेय की आवश्यकताओं को पूरा नहीं करता है।

हल: अब, $f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0 \text{ है।}$$

साथ ही, $y\neq 0$ के लिए

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2y^2}{h^2+y^2}.\frac{1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{hy^2}{h^2+y^2}$$

$$=0 \text{ है।}$$

अतः, $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}$

$$=0 \text{ है।}$$

इसी प्रकार, आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि

$f_y(0,0)=0$ है तथा $x\neq 0$ के लिए, हमें प्राप्त है :

$$f_y(x,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{x^2k^2}{x^2+k^2}.\frac{1}{k}$$

$$=0 \text{ है।}$$

इससे, हम प्राप्त करते हैं :

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$= 0$$

इस प्रकार, हमने दर्शा दिया है कि $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ है।

अब, हम दर्शाएँगे कि श्वार्ज-प्रमेय प्रतिबंध संतुष्ट नहीं हो रहे हैं। अब, $x \neq 0, y \neq 0$ के लिए, हम (x, y) पर f के आंशिक अवकलज प्रत्यक्ष अवकलन द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\right]$$

$$= \frac{2\left(x^2 + y^2\right)xy^2 - 2x^3 y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$= \frac{2xy^4}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

साथ ही, $f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2xy^4}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right]$

$$= \frac{8x\left(x^2 + y^2\right)^2 y^3 - 8xy^5\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^4}$$

$$= \frac{8xy^3(x^2 + y^2)\left[x^2 + y^2 - y^2\right]}{\left(x^2 + y^2\right)^4}$$

$$= \frac{8x^3 y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$$

अब, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{8x^3 y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$ का अस्तित्व नहीं है। इसके लिए, $\frac{8x^3 y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$, में $y = mx$ रखिए तथा $x \to 0$ पर सीमा निकालिए। आप पाएँगे कि m के विभिन्न मानों के लिए सीमाएँ भिन्न-भिन्न है। इसका अर्थ है कि $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_{xy}(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है, जिसका अर्थ है कि $(0,0)$ पर f_{xy} संतत नहीं है।

***

एक अन्य नियम भी है जो हमें बताता है कि एक विशेष बिंदु पर कब f_{xy} और f_{yx} बराबर होते हैं । हम इसका भी बिना उपपत्ति के कथन देते है।

प्रमेय 3 (यंग प्रमेय) : मान लीजिए कि $f(x,y)$ किसी बिंदु (a,b) के एक प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन ऐसा है कि दोनों प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज f_x और f_y बिंदु (a,b) पर अवकलनीय हैं। तब $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ होता है।

–■–

श्वार्ज-प्रमेय की स्थिति की तरह ही, यंग प्रमेय में दिए गए प्रतिंबध भी प्रमेय 1 की तुलना में कम कड़े हैं (क्यों)। परंतु ये भी मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता के लिए आवश्यक नहीं हैं।

हमारे सम्मुख जो भी फलन आते हैं, उनमें से अधिकतर फलनों के लिए, सभी आंशिक अवकलज संतत होते हैं तथा इसी कारण मिश्रित आंशिक अवकलजों के मानों में कोई परिवर्तन नहीं होता है, जब उन चरों के क्रम में परिवर्तन किया जाता है, जिनके सापेक्ष उन आंशिक अवकलजों को लिया गया है। आइए कुछ और उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 10: $$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3 + yz^2}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

परिभाषित फलन $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि $f_{xy}(0,0,0) \neq f_{yx}(0,0,0)$ है, जबकि $f_{xz}(0,0,0) = f_{zx}(0,0,0)$ है।

हलः आइए पहले $f_{yx}(0,0,0)$ परिकलित करें। इसके लिए, हमें $f_{xy}(0,0,0)$ और $f_x(0,k,0)$ के मान निकालने होंगे। अब,

$$f_x(0,0,0) = \lim_{p\to 0}\frac{f(p,0,0) - f(0,0,0)}{p} = \lim_{p\to 0}\frac{0-0}{p} = 0 \text{ है तथा}$$

$$f_x(0,k,0) = \lim_{p\to 0}\frac{f(p,k,0) - f(0,k,0)}{p}$$

$$= \lim_{p\to 0}\frac{\dfrac{p^3k - pk^3}{p^2+k^2} - 0}{p}$$

$$= \lim_{p\to 0}\frac{p^2k - k^3}{p^2+k^2} = -k \text{ है।}$$

$$\text{अतः, } f_{yx}(0,0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k,0) - f_x(0,0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k}$$

$$= -1.$$

आगें, हम $f_{yx}(0,0,0)$ का मान निकालेंगे। इसके लिए, हमें $f_y(h,0,0)$ और $f_y(0,0,0)$ की आवश्यकता है।

$$\text{अब, } f_y(0,0,0) = \lim_{q\to 0} \frac{f(0,q,0) - f(0,0,0)}{q} = 0, \text{ है तथा}$$

$$f_y(h,0,0) = \lim_{q\to 0} \frac{f(h,q,0) - f(h,0,0)}{q}$$

$$= \lim_{q\to 0} \frac{\dfrac{h^3 q - hq^3}{h^2+q^2} - 0}{q}$$

$$= \lim_{q\to 0} \frac{h^3 - hq^2}{h^2+q^2}$$

$$= h \text{ है।}$$

$$\text{अतः, } f_{yx}(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0,0) - f_y(0,0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1 \text{ है।}$$

इसलिए, $f_{xy}(0,0,0) \neq f_{yx}(0,0,0)$ है

$$\text{अब, } f_z(0,0,0) = \lim_{r\to 0} \frac{f(0,0,r) - f(0,0,0)}{r} = 0 \text{ है तथा}$$

$$f_z(h,0,0) = \lim_{r\to 0} \frac{f(h,0,r) - f(h,0,0)}{r} = 0 \text{ है}$$

$$\text{अतः, } f_{zx}(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_z(h,0,0) - f_z(0,0,0)}{h} = 0 \text{ है।}$$

साथ ही, $f_x(0,0,r)=\lim_{p\to 0}\dfrac{f(p,0,r)-f(0,0,r)}{p}=0$ है।

इसका अर्थ है कि $f_{xz}(0,0,0)=\lim_{r\to 0}\dfrac{f_x(0,0,r)-f(0,0,0)}{r}=0$ है।

अतः, $f_{xz}(0,0,0)=f_{zx}(0,0,0)$ है।

***

अब आप इस प्रश्न को करने का प्रयास कर सकते हैं।

E8) मान लीजिए फलन कि $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}, & y\neq 0,\ z\neq 0\\ 0 & \text{, अन्यथा}\end{cases}$$

दर्शाइए कि मूलबिंदु पर f_{xy}, f_{yx}, f_{xz} और f_{zx} सभी के अस्तित्व हैः, परंतु न तो f_{xy} का अस्तित्व है और न ही f_{yz} का अस्तित्व है।

इसके साथ, हम इस इकाई के अंत तक पहुँच जाते हैं।

आइए अब इस इकाई में हमने जो कुछ अध्ययन किया है, उसका संक्षिप्त में विवरण दें।

4.4 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर अध्ययन किया हैः

1) एक से अधिक कोटि वाले आंशकि अवकलजों का परिचय दिया है।

2) कुछ फलनों के लिए, उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों के मान निकाले है।

3) ऐसे फलनों के उदाहरणों का अध्ययन किया है जो यह स्पष्ट करते हैं कि मिश्रित आंशिक अवकलजों का बराबर होना आवश्यक नहीं है।

4) तीन प्रमेंयों के कथन दिए हैः ऑयलर-प्रमेय, श्वार्ज-प्रमेय और यंग-प्रमेय, जो f_{xy} और f_{yx} की समता को सुनिश्चित करने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध प्रदान करती हैं।

ऑयलर-प्रमेयः

यदि (a,b) पर f_{xy} और f_{yx} दोनों संतत हैं, तो $f_{xy}(a,b) = f_{xy}(a,b)$ होता है।

श्वार्ज-प्रमेयः

यदि (a,b) पर f_{xy} संतत है तथा (a,b) पर f_y का अस्तित्व है, तो (a,b) पर $f_{xy} = f_{yx}$ होता है।

यंग प्रमेयः

यदि (a,b) पर f_{xy} और f_{yx} अवकलनीय है, तो (a,b) पर $f_{xy} = f_{yx}$ होता है।

5) उदाहरणों की सहायता से यह दिखाया गया है कि कि श्वार्ज-प्रमेय और यंग-प्रमेय f_{xy} और f_{yx} की समता के लिए उल्लेख प्रतिबंधो केवल पर्याप्त पतिबंध है ये प्रतिबंध समता के लिए आवश्यक नहीं है।

4.5 हल/उत्तर

E1) क) $f(x,y) = \cos\frac{y}{x}$ है। तब,

$$f_x = -\sin\left(\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}$$

$$f_y = -\sin\left(\frac{y}{x}\right).\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}$$

$$f_{xx} = \frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \left(-\frac{2y}{x^3}\right)\sin\frac{y}{x}$$

$$= -\frac{y^2}{x^4}\cos\frac{y}{x} - \frac{2y}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

$$f_{yx} = \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\left(\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}$$

$$f_{xy} = \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\left(\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}$$

$$f_{yy} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}$$

ख) $f(x,y) = x^5 + y^4 \sin(x^6)$

$$\therefore f_x = 5x^4 + 6x^5 y^4 \cos(x^6)$$

$$f_y = 4y^3 \sin x^6$$

$$f_{xx} = 20x^3 + 30x^4 y^4 \cos(x^6) - 36x^{10} y^4 \sin(x^6)$$

$$f_{yx} = 34x^5 y^3 \cos(x^6) = f_{xy}$$

$$f_{yy} = 12y^2 \sin(x^6)$$

E2) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

तथा $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

इसलिए दिया गया फलन लाप्लास (Laplace) समीकरण को संतुष्ट करता है।

E3) क) $f(x,y) = x^3 y + e^{xy^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + y^2 e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy\, e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

अतः, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

ख) $f(x,y) = \tan(xy^3)$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = y^3 \sec^2(xy^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3y^2 \sec^2(xy)^3 + 6xy^5 \sec^2(xy^3)\tan(xy^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 \sec^2(xy^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3y^2 \sec^2(xy^3) + 6xy^5 \sec^2(xy^3)\tan(xy^3)$$

अतः, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ है।

E4) $f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ है। इसी प्रकार, $fy\ (0,0) = 0$ है।

साथ ही, $k \neq 0, f_x(0,k) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k)-f(0,k)}{k} = 1$ है।

साथ ही, $f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = 1$ है।

इसलिए, $h \neq 0, f_y(h,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{hk^4}{h^2+k^4} = 0 \text{ है।}$$

अतः, $f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = 0$ है।

इसी प्रकार, $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ है।

E5) क) $f_x(0,0) = 0$ है

For $k \neq 0, f_x(0,k) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hk^2}{\sqrt{h^4+k^4}} = 0$ है।

अतः, $f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = 0$ है।

इसी प्रकार, $f_{xy}(0,0) = 0$ है।

इसलिए, $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ है।

ख) $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ है।

$k \neq 0$ के लिए, $f_x(0,k) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{k^3}{\sqrt{h^2 + k^4}} = k$ है।

इसलिए, $f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = 1$ है।

$h \neq 0$ के लिए $f_y(h,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \dfrac{hk^2}{\sqrt{h^2 + k^4}} = 0$ है।

इसलिए, $f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = 0$ है।

इसके फलस्वरूप, $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ है।

E6) $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ है।

$k \neq 0$. के लिए, $f_x(0,k) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,k) - f(0,k)}{h}$

(क्योंकि k स्थिर है, इसलिए हम मान सकते हैं कि $|h| < |k|$ है)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-hk - 0}{h}$$

$= -k$ है।

For, $h \neq 0, f_y(h,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f(h,k) - f(h,0)}{k}$

(क्योंकि k स्थिर है, इसलिए हम मान सकते हैं कि $|k| < |h|$ है)

$$= \lim_{k\to 0} \frac{hk - 0}{k}$$

$= h$ है।

इसलिए, $f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \dfrac{-k - 0}{k} = -1$ है

तथा $f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$ है।

अतः, $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ है।

E7) क) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ तब

$$f_y(x,y) = x + 2y$$

$$f_{xy}(x,y) = 1$$

स्पष्टतः, प्रत्येक स्थान पर f_y का अस्तित्व है तथा एक अचर फलन होने के कारण f_{xy} संतत है। इससे प्रदर्शित होता है कि f श्वार्ज-प्रमेय की सभी आवयकताओं को संतुष्ट करता है। अतः, श्वार्ज-प्रमेय द्वारा, f_{yx} का अस्तित्व है तथा $f_{yx} = f_{xy} = 1$ है।

ख) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, x \neq 0, y \neq 0$ है।

$$f_y(x,y) = \frac{-4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$f_{xy}(x,y) = \frac{8xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$ है।

क्योंकि सभी बिंदुओं (x,y), पर f_y का अस्तित्व है तथा f_{xy} संतत है, जँहा $x \neq 0$, $y \neq 0$, इसलिए श्वार्ज-प्रमेय द्वारा हमें प्राप्त होता है:

$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \frac{8xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

E8) अब, $f_x(0,0,0) = f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 0$ है।

के लिए, $k \neq 0, f_x(0,k,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k,0) - f(0,k,0)}{h} = 0$ है।

इसलिए, $f_{yx}(0,0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k,0)-f_x(0,0,0)}{k}=0$ है।

$$r\neq 0, f_y(0,0,r)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k,r)-f(0,0,r)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{k/r}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{r}=\frac{1}{r}$$ है।

इसलिए, $f_{zy}(0,0,0)=\lim_{r\to 0}\frac{f_y(0,0,r)-f_y(0,0,0)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}$ है।

परंतु $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}$ का अस्तित्व नहीं हैं। इसलिए, $f_{zy}(0,0,0)$ का अस्तित्व नहीं है।

परंतु $f_z(0,k,0)=\lim_{r\to 0}\frac{f(0,k,r)-f(0,k,0)}{r}=k\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}$ है, और

$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}$ का अस्तित्व नहीं है।

इसलिए $f_z(0,k,0)$ का अस्तित्व नहीं है।

अतः, $f_{yz}(0,0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_z(0,k,0)-f_z(0,0,0)}{k}$ का अस्तित्व नहीं है।

- x -

इकाई 5

शृंखला नियम और फलन

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

आप शृंखला नियम से पहले से परिचित हैं, फलन के एक फलन के अवकलज को ज्ञात करने में प्रयोग किया जाता है (कलन, इकाई 3)। इस इकाई में, हम 2 या 3 चरों वाले फलनों के आंशिक अवकलजों को ज्ञात करने के लिए शृंखला नियम का अध्ययन करेंगे, जहाँ प्रत्येक चर स्वयं 2 या 3 स्वतंत्र चरों वाला एक फलन होता है। उदाहरणार्थ, यदि u, v और w एक चर t के फलन हैं, तो फलन $f(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$, जो तीन चरों का एक फलन है, एक अकेले चर t का एक फलन $F(t)$ है। हम बताएँगे कि संपूर्ण अवकलज $F'(t)$ को किस प्रकार ज्ञात किया जाता है।

इस इकाई में हम समघात फलन पर चर्चा करेंगे और इन फलनों को अभिलक्षणित करने वाला ऑयलर-प्रमेय का कथन देंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- शृंखला नियम का प्रयोग करते हुए, संपूर्ण अवकलज को परिभाषित कर पाएँगे तथा उसका मान निकाल पाएँगे;
- शृंखला नियम के विभिन्न रूपों की समस्याएँ हल करने में प्रयोग कर पाएँगे;
- समघात फलनों को परिभाषित कर पाएँगे तथा उनकी पहचान कर पाएँगे; और
- समघात फलनों के लिए ऑयलर-प्रमेय का कथन दे पाएँगे तथा उसका प्रयोग कर पाएँगे।

5.2 श्रृंखला नियम

इस अनुच्छेद में, हम उस श्रृंखला नियम के बारे में बताएँगें, जो हमें अनके चरों वाले फलनों के अवकलज परिकलित करने में हमें समर्थ बनाता है, जब कि प्रत्येक चर स्वयं एक स्वतंत्र चर का फलन होता है। याद कीजिए कि आपने अपने कलन पाठ्यक्रम में एक चर वाले फलन के लिए श्रृंखला नियम का अध्ययन किया था। यह नियम कहता है कि मान लीजिए

हमें फलन $y = f(x)$, ऐसा प्राप्त है, जहाँ x एक चर t का फलन, मान लीजिए, $x = g(t)$ है, तो y को भी t का एक फलन, मान लीजिए $y = F(t)$ समझा जा सकता है तथा तब हमें

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

प्राप्त होता है।

या दूसरे शब्दों में, $\boxed{F'(t) = f'(x)g'(t) = f'(g(t))g'(t)}$ है।

अब हम एक चर वाले फलनों के श्रृंखला नियम को 2 चरों वाले फलनों के लिए विस्तृत करते हैं। आपको याद होगा कि हमने इकाई 1 में 2 या 3 चरों वाले फलनों के संयुक्त फलनों (composite functions) को परिभाषित किया था। वहाँ आप देख चुके हैं कि संयुक्त फलन बनाने की अनेक विधियाँ हैं। उदाहरणार्थ,

स्थिति 1: मान लीजिए कि $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ $\boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$ का एक फलन है, $g(t) = \sin t$ $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ एक फलन है। तब

$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = \sin(x^2 + xy + y^2)$ द्वारा परिभाषित फलन $g \circ f$ $\boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$ तक का एक फलन है।

स्थिति 2: $\boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$ तक का फलन $\phi(x, y) = x^y + y^x$ पर विचार कीजिए, तथा $\boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$ तक का फलन $g(t) = (\sin t, \tan t)$ पर भी विचार कीजिए। तब, संयुक्त फलन $\phi \circ g$, जो $\phi \circ g(t) = \phi(g(t)) = \phi(\sin t, \tan t) = (\sin t)^{\tan t} + (\tan t)^{\sin t}$ द्वारा परिभाषित है, $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ तक का एक फलन है।

क्योंकि संयुक्त फलनों को बनाने की अनेक विधियाँ हैं, इसलिए हमें इनमें से प्रत्येक प्रकार के लिए, पृथक रूप से श्रृंखला नियम नियमित करना पड़ेगा। नीचे प्रमेय 1 में, हम स्थिति 1 में चर्चित किए गए संयुक्त फलनों के अवकलज ज्ञात करने के लिए श्रृंखला नियम नियमित करेंगे। आइए अब प्रमेय 1 का कथन दें, जिसकी उपपत्ति को छोड़ दिया जा रहा है।

प्रमेय 1 : मान लीजिए कि $f(x, y)$ एक वास्तविक-मान फलन है, जिसको बिंदु (a, b) पर प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलज हैं तथा मान लीजिए कि g एक

वास्तविक चर का एक वास्तविक-मान फलन है, जो बिंदु $f(a,b)$ पर अवकलनीय है। r c $\boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$ तक सयुंक्त फलन $\phi = g \circ f$ के बिंदु (a,b) पर प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व हैं तथा

$\phi_x(a,b) = g'(f(a,b))\, f_x(a,b)$ और

$\phi_y(a,b) = g'(f(a,b))\, f_y(a,b)$ है।

– ■ –

इस प्रमेय को हम एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 1: स्थिति 1 में दिए संयुक्त फलन $\phi(x,y) = \sin(x^2 + xy + y^2)$ पर विचार कीजिए। $\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,b)$ और $\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b)$ को परिकलित कीजिए।

हलः यहाँ $\phi = g \circ f$ है, जहाँ $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ और $g(t) = \sin t$ है। दोनों फलन f और g प्रमेय 1 की आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं। इसलिए, प्रमेय 1 द्वारा

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,b) = g'(f(a,b)).\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,b)$$

$$= \cos(a^2 + ab + b^2).(2a+b)$$

$$= (2a+b)\cos(a^2 + ab + b^2) \text{ है}$$

तथा $$\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b) = g'(f(a,b))\,\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b)$$

$$= \cos(a^2 + ab + b^2).(a+2b)$$

$$= (a+2b)\cos(a^2 + ab + b^2) \text{ है}$$

* * *

अब, आप इस प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E1) मान लीजिए कि $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ है तथा $g(t) = \cos t$ हैं। $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ पर $\phi = g \circ f$ के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित प्रमेय में, हम स्थिति 2 में बताए गए फलनों के लिए शृंखला नियम का कथन दे रहे हैं। इस प्रमेय की उपपत्ति इस कोर्स की सीमा के बाहर है।

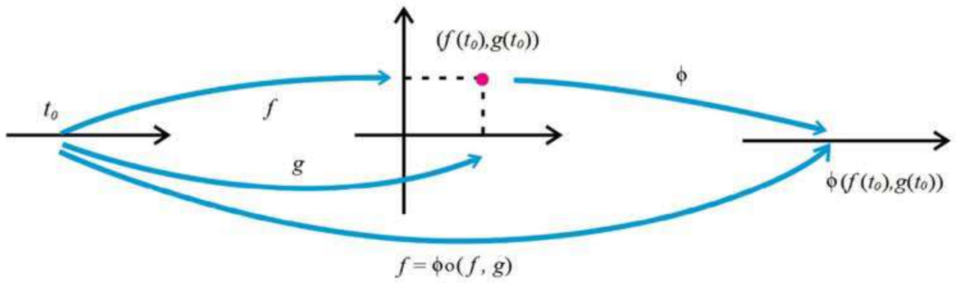
प्रमेय 2: यदि $f(t)$ और $g(t)$ दो वास्तविक-मान फलन है, जो एक बिंदु t_0 पर अवकलनीय हैं तथा यदि $\phi(x, y)$ दो चरों वाला एक वास्तविक-मान फलन है, जो बिंदु $f(t_0), g(t_0)$ पर अवकलनीय है, तो t_0 पर फलन

$F(t) = \phi(f(t), g(t))$ अवकलनीय है, तथा

$F'(t) = f'(t_0)\phi_x(f(t_0), g(t_0)) + g'(t_0)\phi_y(f(t_0), g(t_0))$ है।

– ■ –

चित्र 1 प्रमेय 2 में लिए गए फलनों को दर्शाया गया है।



चित्र 1

यदि हम $x = f(t), y = g(t), z = F(t) = \phi(f(t, g(t))) = \phi(x, y)$ लिखें, तो उपरोक्त प्रमेय के परिणाम को $\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$ के रूप में लिख सकते है।

टिप्पणी: यह आंशिक अवकलजों के लिए श्रृंखला नियम कहलाता है। अवकलज $\frac{dz}{dt}$, z का संपूर्ण अवकलज (total derivative) भी कहलाता है। आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 2: फलन $f(x, y) = x^2y - 2x + 3y - 4$ का संपूर्ण अवकलज ज्ञात कीजिए, जहाँ $x = t - 2$ और $y = t^2$ है।

हल: आप सरलता से इसका सत्यापन कर सकते हैं कि प्रमेय 2 की सभी आवश्यकताएँ संतुष्ट हो रही हैं। अतः हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy - 2)(1) + (x^2 + 3)(2t)$$

$$= [2(t-2)t^2 - 2] + [(t-2)^2 + 3]\,(2t)$$

$$= 2t^3 + 4t^2 - 2 + 2t^3 - 8t^2 + 14t$$

$$= 4t^3 - 12t^2 + 14t - 2.$$

* * *

e^{-t}

उदाहरण 3: $f:(x, y) = xy + xz$ द्वारा परिभाषित फलन f: $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ पर विचार कीजिए, जहाँ $x = t, y = e^{-t}$ है। इसका संपूर्ण अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : श्रृंखला नियम के प्रयोग से, हम प्राप्त करते है:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\ \frac{\partial x}{\partial t}\ + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$y + x\ e^{-t}$$

$$e^{-t} + t\ e^{-t}$$

$$e^{-t}\ (1+1)$$

उदाहरण 4: फलन $z = xy$ का संपूर्ण अवकलज ज्ञात कीजिए, जहाँ $x = \cos t,\ y = t^2$ है

हल: श्रृंखला नियम द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dz}{dt} = y(-\sin t) + x.2t$$

* * *

ध्यान दीजिए कि हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

इस सूत्र से आप परिचित हैं। यह और कुछ नहीं बल्कि एक चर वाले फलनों के अवकलन के लिए गुणनफल सूत्र ही है।

* * *

ध्यान दीजिए कि उदाहरणों 3 और 4 में, श्रृंखला नियम प्रयोग करने के स्थान पर, हम पहले x, y और/या z के लिए t के पदों में मान प्रतिस्थापित कर सकते थे तथा फिर परिणामी फलन को t के सापेक्ष अवकलित कर सकते थे। इस प्रकार, उदाहरण 3 के फलन $f(x,y) = xy$ जहाँ $x = \cos t$, $y = e^t$ है, के लिए हम लिख सकते हैं:

$$f(t) = \cos t \quad t^2 \quad \cos t$$

इसलिए, $f'(t) =\ 2t \cos t\ t^2\ \sin t$ है।

आप देख सकते हैं कि यह संपूर्ण अवकलज वहीं है, जो हमने श्रृंखला नियम द्वारा उदाहरण 3 में परिकलित किया था। आप सोच रहे होगें कि हमने $\frac{dz}{dt}$ ज्ञात करने के लिए, एक अतिरिक्त (जटिल) विधि खोजने के लिए इतना अधिक कार्य क्यों किया। इसके अनेक कारण हैं।

- सर्वप्रथम, हो सकता है कि x या y को स्पष्ट रूप से t के पदों में सदैव व्यक्त करना संभव नहीं हो।
- दूसरे, x और y के प्रतिस्थापन से z का व्यंजन बहुत अधिक जटिल हो सकता है।

इस प्रकार, $\frac{dz}{dt}$ का मान निकालना एक लंबी और जटिल प्रक्रिया हो सकती है। अपने सूत्र में, हम परिकलन टुकड़ों में धीरे-धीरे कर रहे हैं, जो प्रायः उन परिकलनों से सरल होते है, जो z को t के पदों में व्यक्त करने के बाद $\frac{dz}{dt}$ के मान निकालने में संबद्ध होते हैं। हम इसे एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 5: $(\sin t)^{\tan t} + (\tan t)^{\sin t}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः मान लीजिए कि $F(t) = (\sin t)^{\tan t} + (\tan t)^{\sin t}$

हम F (t) को पुनः $F(t)$` as $F(t) = \phi(f(t), g(t))$ के रूप में लिखते है, जहाँ

$\phi(x, y) = x^y + y^x$, $x = f(t) = \sin t$ और $y = g(t) = \tan t$ है

तब, ϕ, f और g प्रमेय 2 के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। अतः, शृंखला नियम द्वारा,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \left[yx^{y-1} + (\ln y)y^x\right](\cos t) + \left[(\ln x)x^y + xy^{x-1}\right]\sec^2 t$$

$$= (\tan t)\frac{(\sin t)^{\tan t}}{\sin t}\cos t + (\ln\tan t)(\tan t)^{\sin t}(\cos t)$$

$$+ (\ln\sin t)(\sin t)^{\tan t}(\sec^2 t) + \sin t\frac{(\tan t)^{\sin t}}{\tan t}(\sec^2 t)$$

$$= \left[1 + \sec^2 t \ \ln\ \sin t\right](\sin t)^{\tan t} + \left[\cos t\ln\tan t + \sec t\right](\tan t)^{\sin t}$$

* * *

क्या आप कल्पना कर सकते हैं कि F को एक संयुक्त फलन के रूप में लिखे बिना हमें इसे करने में कितना लंबा लगाना पड़ता?

अब, यदि आपने उदाहरणों का सावधानीपूर्वक अध्ययन कर लिया है, तो आपको इन प्रश्नों को हल करने में समर्थ हो जाना चाहिए।

E2) निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में, t के सापेक्ष संपूर्ण अवकलज ज्ञात कीजिए :

क) $z = x^2 + 3xy + y^2$ यदि $x = 2\cos\frac{\pi t}{8}$, $y = 3 + \sin\frac{\pi t}{8}$ है।

ख) $z = \frac{2x+3}{3y-2}$, यदि $x = e^t + t$, $y = e^{-t} = t$ है।

E3) निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में $\frac{dz}{dt}$ ज्ञात कीजिए :

क) $z = \ln(x^2 + 3xy), x = e^t, y = e^{-t}$

ख) $z = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \; x = \ln t, \; y = e^t$

E4) संपूर्ण अवकलज की संकल्पना का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

क) $t^{3\sin t} + (\sin t)^{t^3}$

ख) $t^{2t} + (t+1)^{t^2}$

ग) $e^{t^4} + t^{4\cos t}$

अगले अनुच्छेद में, हम श्रृंखला नियम के एक अनुप्रयोग की चर्चा करेंगे

5.3 समघात फलन

इस अनुच्छेद में, हम आपका परिचय अनेक चरों वाले फलनों के एक वर्ग से कराएँगे जो समघात फलन (homogeneous functions) कहलाते हैं हम मुख्यतः ऑयलर-प्रमेय के नाम से जाने वाली एक प्रमेय का विवरण देगें जो श्रृंखला नियम की तकनीकों का उपयोग करते हुए समघात फलनों को अभिलक्षणित करती है।

समघात फलन क्या है ? आइए देखें।

आपके सम्मुख विभिन्न संदर्भों में $ax + by, 2x^2 + 3xy + 5y^2$ जैसे बहुपद आए होंगे। ध्यान दीजिए कि $ax + by$, में प्रत्येक पद घात 1 का है, जबकि $2x^2 + 3xy + 5y^2$ में प्रत्येक पद घात 2 का है। मान लीजिए कि हम प्रथम बहुपद में x को tx से तथा y को ty से प्रतिस्थापित करते हैं। तब, हमें $atx + bty = t(ax + by)$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार, यदि हम दूसरे बहुपद में x को tx और y से तथा ty से प्रतिस्थापित करें, हम $2t^2x^2 + 3tx\,ty + 5t^2y^2 = t^2(2x^2 + 3xy + 5y^2)$ प्राप्त होता है। ये क्रमशः घात 1 और घात 2 के समघात बहुपदों के सरलतम उदाहरण हैं। अधिक व्यापक रूप में, वास्तविक गुणांकों वाला दो चरों x और y में एक बहुपद घात h का एक समघात बहुपद कहलाता है, यदि उस बहुपद के प्रत्येक पद की घात h होती है। x और y में घात h का सबसे अधिक व्यापक बहुपद

$$p(x, y) = \sum_{\substack{\lambda+\mu=h \\ \lambda\geq 0,\, \mu\geq 0}} a_{\lambda\mu}\, x^\lambda y^\mu \quad \text{है।} \tag{1}$$

व्यंजक (1) में यदि हम x को tx से तथा y को ty के प्रस्थापित करें तो हमें $p(tx, ty) = t^h p(x, y)$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, यदि $p(x, y)$ घात h का एक समघात बहुपद है, तो यदि हम किसी वास्तविक संख्या t के लिए, x को tx से तथा y को ty से प्रस्थापित करें, तब $p(x, y)$ का t^h से गुणा हो जाता है। यह परिघटना उन

फलनों के लिए भी सार्थक है जो बहुपद नहीं है।

उदाहरणार्थ यदि, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ है, तो सभी

$t>0$ के लिए $f(tx,ty)=tf(x,y)$ है।

हम $\sqrt{x^2+y^2}$ को घात 1 का समघात फलन कहते हैं। अधिक औपचारिक रूप में, हम निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त करते हैं:

परिभाषा 1: मान लीजिए कि $\boldsymbol{R}^2$ का D एक ऐसा उपसमुच्चय है कि यदि $(x,y)\in D$, है, तो $(tx,ty)\in D$ सभी $t>0$ के लिए है। एक फलन $f:D\to \boldsymbol{R}$ घात h का एक समघात फलन कहा जाता है, जब कि h एक वास्तविक संख्या है, यदि सभी बिंदुओं $(x,y)\in D$ के लिए और सभी $t>0$ के लिए $f(tx,ty)=t^h f(x,y)$ हो।

इसी प्रकार, हम 3 चरों वाले समघात फलनों को परिभाषित कर सकते हैं तथा व्यंजक $f(tx,ty,tz)=t^h f(x,y,z)$ की जाँच कर सकते हैं।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 6: दर्शाइए कि निम्नलिखित फलन समघात फलन है :

i) $f(x,y)=\tan\dfrac{y}{x}$

ii) $f(x,y)=(x^4+3y^4)^{1/3}$

iii) $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right)}$

iv) $f(x,y,z)=\dfrac{xy^2+yz^2+zx^2}{x+y+z}$

हल: आइए इन्हें एक-एक करके लें।

i) x को tx से तथा y को ty से प्रतिस्थापित करने पर, जबकि t एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, हम प्राप्त करते हैं :get

$$f(tx,ty)=\tan\frac{ty}{tx}=\tan\frac{y}{x}=t^0 f(x,y).$$

इस प्रकार, $f(x,y)$ दो चरों वाला घात शून्य का एक समघात फलन है।

ii) $f(tx,ty)=3\sqrt{t^4x^4+3t^4y^4}$

$$=(t^4)^{1/3}3\sqrt{x^4+3y^4}$$

$$=t^{4/3} f(x,y) \text{ है।}$$

इस प्रकार, $f(x,y)$ दो चरों वाला घात 4/3 का एक समघात फलन है।

iii) $$f(tx,ty)=\frac{\sin\left(\frac{t^2x^2.ty}{t^3x^3+t^3y^3}\right)}{\ln\left(\frac{tx+ty}{tx}\right)}, t>0$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{t^3x^2y}{t^3\left(x^3+y^3\right)}\right)}{\ln\left(\frac{x+y}{x}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{x^2y}{x^3+y^3}\right)}{\ln\left(\frac{x+y}{x}\right)}$$

$=t^0f(x,y)$ है।

इस प्रकार, $f(x,y)$ दो चरों वाला घात शून्य का एक समघात फलन है।

iv) $$f(tx,ty,tz)=\frac{tx.t^2y^2+ty.t^2z^2+tz.t^2x^2}{tx+ty+tz}\quad t>0$$

$$=\frac{t^3\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)}{t(x+y+z)}$$

$=t^2f(x,y,z)$ है।

इस प्रकार, $f(x,y,z)$ तीन चरों वाला घात 2 का एक समघात फलन है। क्या आपने इस ओर ध्यान दिया कि i), iii) और iv) में फलनों की समघतता की घात एक पूर्णांक है तथा ii) के फलन की घात एक पूर्णक नहीं है?

अब आपको इन प्रश्नों को हल करने में समर्थ होने चाहिए।

E5) निम्नलिखित में से कौन से फलन समघात है? यदि फलन समघात है, तो उसकी घात निर्धारित कीजिए।

क) $f(x,y)=\max\left\{\frac{x}{y},y\right\}$

ख) $f(x,y)=\frac{\sin x}{\sin y}$

ग) $f(x,y)=x^{1/3}+y^{-5/3}$

घ) $f(x,y)=3x^2y+xy^2-\pi y^3$

ङ) $f(x,y)=x^2y+2xy^2+xy+4y^3$

अब, हम ऑयलर-प्रमेय का कथन देते हैं, जो समघात फलनों का एक अति सुंदर अभिलक्षिकरण प्रदान करती है।

प्रमेय 3 (ऑयलर-प्रमेय): मान लीजिए कि $\boldsymbol{R}^2$ का D एक ऐसा उप समुच्चय है कि

i) किसी $(x, y) \in D$, के लिए, D में आविष्ट केन्द्र (x, y) और त्रिज्या r वाली एक विवृत्त चक्रिका (open disc) का अस्तित्व है तथा

ii) किसी बिंदु $(x, y) \in D$ के लिए, सभी $t > 0$ के लिए $(tx, ty) \in D$ है।

मान लीजिए कि $f : D \to \boldsymbol{R}$ एक फलन है, जिसके D के सभी बिंदुओं पर प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तिव है। तब $f(x, y)$ घात h का एक समघात फलन होता है, यदि और केवल यदि D में किसी भी बिंदु (a, b) के लिए $af_x(a,b) + bf_y(a,b) = hf(a,b)$ हो।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $f(x, y)$ घात h का एक समघात फलन है। फलन $F :]0, \infty[\to \boldsymbol{R}$ का $F(t) = f(at, bt) = f(u(t), v(t))$ द्वारा परिभाषित कीजिए, जहाँ D का कोई भी बिंदु (a, b) है तथा $u(t) = at$ और $v(t) = bt$ है।

F को दो चरों x और y का फलन मानते हुए, जहाँ $x = u(t) = at$ है और $y = v(t) = bt$ है, आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि F प्रमेय 2 के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है।

इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

$$F'(t) = u'(t)\ f_x(u(t), v(t)) + v'(t) f_y(u(t), v(t))$$

$$= af_x(u(t), v(t)) + bf_y(u(t), v(t)), \text{ क्योंकि } u'(t) = a \text{ और } v'(t) = b.$$

$$= af_x(at, bt) + bf_y(at, bt) \tag{2}$$

परंतु $f(x, y)$ घात h का एक समघात फलन हैं। इसलिए,

$$F(t) = f(at, bt) = t^h f(a, b)$$

और $F'(t) = ht^{h-1} f(a, b)$. (3)

समीकरणों (2) और (3) से, सभी $t > 0$ के लिए हम प्राप्त करते हैं

$$af_x(at, bt) + bf_y(at, bt) = ht^{h-1} f(a, b) \tag{4}$$

समीकरण (4) में $t = 1$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$af_x(a, b) + bf_y(a, b) = hf(a, b)$$

विलोमतः मान लीजिए कि फलन $f(x, y)$, D में सभी (a, b) के लिए संबंध

$af_x(a, b) + bf_y(a, b) = hf(a, b)$ को संतुष्ट करता है। (5)

ऊपर परिभाषित फलन $F(t)$ के लिए, हमें प्राप्त है :

$F'(t) = af_x(at, bt) + bf_y(at, bt)$, जहाँ (a, b), D का कोई भी एक

बिंदु है, क्योंकि $(a, b) \in D$ का यह अर्थ है कि $(at, bt) \in D$ है। इसलिए (3) और (4) से यह निष्कर्ष निकलता है कि

$atf_x(at, bt) + btf_y(at, bt) = f(at, bt)$ है।

इसके फलस्वरूप, $tF'(t) = hf(at, bt) = hF(t)$

या $F'(t) = \frac{h}{t}F(t)$ है।

अब सभी $t > 0$ के लिए, फलन $\phi(t) = t^{-h}F(t)$ पर विचार कीजिए।

स्पष्टतः $\phi'(t) = t^{-h}F'(t) - ht^{-h-1}F(t)$

$$= t^{-h}\left[F'(t) - \frac{h}{t}F(t)\right]$$

$= 0$ सभी $t > 0$ के लिए।

अतः, सभी $t > 0$ के लिए, $\phi(t)$ एक अचर फलन है।

परंतु $\phi(1) = F(1) = f(a, b)$ है। इसलिए,

$\phi(t) = f(a, b) \forall t > 0$

अर्थात् $t^{-h}F(t) = f(a, b)$, सभी t>0 के लिए

अर्थात् $F(t) = t^h f(a, b)$ है।

इस प्रकार, किसी भी बिंदु $(a, b) \in D$ के लिए $f(at, ab) = t^h f(a, b)$ है। इसका अर्थ है कि f घात h का एक समघात फलन है।

– ■ –

टिप्पणी 1 : यदि हम $z = f(x, y)$ लिखते हैं, तो ऑयलर-प्रमेय द्वारा $f(x, y)$ घात h का एक समघात होता है, यदि और केवल यदि

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = hz \text{ हो} \tag{6}$$

यह संबंध **ऑयलर संबंध** कहलाता है।

आगे बढ़ने से पहले इस प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E6) यदि $\boldsymbol{R}^2$ का D एक ऐसा उपसमुच्चय है, जो प्रमेय 3 के (i) और (ii) प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है तथा यदि $f : D \to \boldsymbol{R}$ घात n का एक समघात फलन है, जिसके संतत द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज हैं, तो $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ समघात होते हैं।

यह प्रश्न हमें निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचा देता है:

उपप्रमेय 1: मान लीजिए कि $f : D \to \boldsymbol{R}$ है, जहाँ $\boldsymbol{R}^2$ का D एक ऐसा उपसमुच्चय है, जैसाकि प्रमेय 3 के कथन में बताया गया है। यदि f घात n का एक समघात फलन है तथा यदि f के D के सभी बिंदुओं पर द्वितीय कोटि के संतत आंशिक अवकलज हैं, तो बिंदुओं $(x, y) \in D$ के लिए,

$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=n(n-1)z$ होता है, जहाँ $z=f(x,y)$ है।

उपपत्ति : क्योंकि z घात n का एक समघात फलन है तथा D के सभी बिंदुओं पर इसके द्वितीय कोटि के संतत आंशिक अवकलज हैं, इसलिए यह निष्कर्ष निकलता है कि $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ दोनों घात n-1 के समघात फलन हैं [(E6) को देखिए] तथा D के सभी बिंदुओं पर इसके प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलज होते हैं। फलनों $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ पर ऑयलर-प्रमेय के अनुप्रयोग से हम प्राप्त करते है :

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=(n-1)\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (7)$$

तथा

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(n-1)\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (8)$$

परंतु श्वार्ज -प्रमेय को दृष्टिगत रखते हुए (प्रमेय 2, इकाई 4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ है।

इसलिए (7) को x और (8) को y से गुणा करके जोड़ने पर, हम प्राप्त करते है :

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(n-1)\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

अतः

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=n(n-1)z \text{ (ऑयलर-संबंध द्वारा)}$$

– ■ –

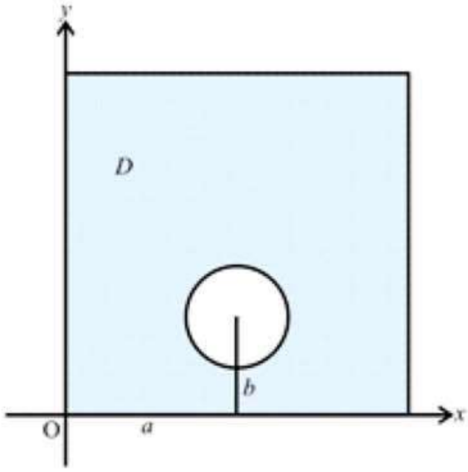
अब, हम कुछ उदाहरणों से ऑयलर-प्रमेय को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 7: दर्शाइए कि फलन $\dfrac{xy}{x+y},\ x>0,\ y>0$ ऑयलर-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट करता है तथा फिर प्रत्यक्ष अभिकलनों द्वारा ऑयलर-संबंध का सत्यापन कीजिए।

हलः मान लीजिए कि $D=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$, है तथा $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ द्वारा फलन $f:D\to \boldsymbol{R}$ परिभाषित है। तब,

i) $(x, y) \in D \Rightarrow (tx, ty) \in D$ सभी $t > 0$ के लिए

ii) यदि $(a,b) \in D$ है, तो त्रिज्या $r = \frac{1}{2}\min\{a,b\}$ और केन्द्र (a,b) वाली चक्रिया D में आविष्ट है



चित्र 2

अब दिया हुआ फलन घात 1 का एक समघात फलन है, क्योंकि

$$f(tx,ty) = \frac{t^2xy}{t(x+y)} = tf(x,y) \text{ है।}$$

साथ ही, किसी भी बिंदु $(a,b) \in D$ के लिए, एक सरल परिकलन दर्शाता है कि

$$f_x(x,y) = \frac{y^2}{(x+y)^2} \text{ और } f_y(x,y) = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

है तथा स्पष्टतः D पर संतत है। इस प्रकार, ऑयलर-प्रमेय की सभी आवश्यकताएँ संतुष्ट हो जाती हैं।

ऑयलर-संबंध को सत्यापित करने के लिए, हमें सिद्ध करना होगा कि

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 1.f(x,y)$$

अब,

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = x\frac{y^2}{(x+y)^2} + y\frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$$= xy\left[\frac{x+y}{(x+y)^2}\right]$$

$$= \frac{xy}{(x+y)}$$

$$= 1.\ f(x,y) \text{ है।}$$

इससे ऑयलर-संबंध सिद्ध हो जाता है।

* * *

अगले दो उदाहरणों में, हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 8: $D = \{(x,y) \,|\, 0 < x < y\}$ पर परिभाषित फलन $z = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ है।}$$

हल : सर्वप्रथम, हम इस ओर ध्यान देते हैं कि D ऑयलर-प्रमेय के प्रतिबंधों (i) और (ii) को संतुष्ट करता है। मान लीजिए कि $f(x,y) = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$ है।

तब, क्योंकि

(i) $(tx, ty) \in D$ सभी $(x,y) \in D,\ t > 0$, के लिए है तथा

(ii) सभी $(x,y) \in D$ के लिए $f(tx,ty) = t^0 f(x,y)$ है, इसलिए हम कह सकते हैं कि $z = f(x,y)$ घात 0 का एक समघात फलन है।

साथ ही, $f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\right) - \frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)$ है।

क्योंकि $(x,y) \in D$ ऐसा है कि $0 < x < y$ है, इसलिए D के सभी बिंदुओं के लिए fx परिभाषित है तथा संतत है। इसी प्रकार,

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\right)\left(-\frac{y}{y^2}\right) + \left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{x}{y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}\right)$$

D के सभी बिंदुओं के लिए परिभाषित है तथा संतत है। इस प्रकार, ऑयलर प्रमेय द्वारा

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ है।

* * *

उदाहरण 9 : यदि $u = \sin^{-1}\dfrac{x^2+y^2}{x+y},\ 0<x<1,\ 0<y<1$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \tan u$ है।

हल : मान लीजिए कि $D = \{(x,y)\,|x>0,\ y>0\}$ है तथा $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ द्वारा परिभाषित $f : D \to \boldsymbol{R}$ है।

तब, फलन $z = f(x,y)$ घात 1 का एक समघात फलन है तथा ऑयलर-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट करता है। अतः,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, \text{ सभी } (x,y)\in D \text{ के लिए।} \qquad (9)$$

अब, $D' = \{(x,y)\,|0<x<1,\ 0<y<1\}$ है। तब, $D' \subset D$ है और इसीलिए समीकरण (8) विशेष रूप से सभी $(x,y)\in D'$ के लिए सत्य है। साथ ही, सभी $(x,y)\in D'$ के लिए, हमें

$\sin u = \dfrac{x^2+y^2}{x+y} = z$ भी प्राप्त है।

अतः, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos u\dfrac{\partial u}{\partial y}$ है। इसके फलस्वरूप, इन मानों को (9) में रखनें पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos u = \sin u$$

या $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \tan u$ है।

* * *

अब, आप कुछ प्रश्नों को हल करने को प्रयास क्यों नहीं करते?

E7) यदि $z = \dfrac{x^{1/4}+y^{1/4}}{x^{1/5}+y^{1/5}}$ तो दर्शाइए कि $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{20}z.$

E8) निम्नलिखित फलनों के लिए, ऑयलर-संबंध का सत्यापन कीजिएः

क) $u = \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$

ख) $u = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

E9) यदि $z=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ है, तो दर्शाइए कि $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ है।

E10) यदि $z=\tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x+y}$ है, तो दर्शाइए कि

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2x$$ है।

आइए अब इस इकाई में चर्चा किए गए मुख्य बिंदुओं को संक्षिप्त रूप में स्मरण करें।

5.4 सारांश

इस इकाई में, हमने

1) सुंयक्त फलनों को अवकलित करने के लिए, श्रृंखला नियम के निम्नलिखित रूपों का उपयोग किया है :

   नियमः यदि $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ और $\phi=f\circ g$ है तो संयुक्त फलन $\phi=f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ के आंशिक अवकलज निम्नलिखित द्वारा दिए जाते हैं :

   $\phi_x(a,b)=g'(f(a,b))f_x(a,b)$ और

   $\phi_y(a,b)=g'(f(a,b))f_y(a,b).$

2) 2 चरों वाले फलनों के संपूर्ण अवकलज का चर्चा किया है।

   मान लीजिए z, दो चरों x और y वाला एक वास्तविक मान फलन है, जहाँ प्रत्येक x और y का एक फलन है, तब z का संपूर्ण अवकलज है

   $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

3) 2 या 3 चरों वाले समघात फलनों को परिभाषित किया है : f घात h का एक समघात फलन है, यदि

   $f(tx,ty)=t^h f(x,y),\ \forall\ t>0$

   $f(tx,ty,tz)=t^h f(x,y,z),\ \forall t>0$.

4) समघात फलनों के लिए ऑयलर-प्रमेय का कथन दिया है तथा चर्चा की है कि इसे किस प्रकार उपयोग किया जाता है।

5.5 हल / उत्तर

E1) प्रमेय 1 के अनुप्रयोग द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=g'\left[f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right].\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\times\left(2\sqrt{\frac{x}{2}}+3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=-5\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=g'\left[f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]\times\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=-\left(3\sqrt{\frac{\pi}{2}}+2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=-5\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

E2) क) $$\frac{dz}{dt}=\frac{-\pi}{8}(2x+3y)\sin\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{8}(3x+2y)\cos\frac{\pi t}{8}$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[12\cos\frac{\pi t}{8}-13\sin\frac{\pi t}{8}+3\left(\cos^2\frac{\pi t}{8}-\sin^2\frac{\pi t}{8}\right)\right]$$

ख) $$\frac{dz}{dt}=\frac{2}{3y-2}\left(e^t+1\right)+(2x+3)\left(-\frac{3}{(3y-2)^2}\right)\left(-e^t-1\right)$$

$$=\frac{\left(2e^t+2\right)\left(3e^{-t}-3t-2\right)+\left(2e^t+2t+3\right)\left(3e^{-t}+3\right)}{\left(3e^{-t}-3t-2\right)^2}$$

$$=\frac{17-6te^t+6te^{-t}+2e^t+15e^{-t}}{\left(3e^{-t}-3t-2\right)^2}$$

E3) क) $$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{x^2+3yx}.(2x+3y)e^t+\frac{1}{x^2+3xy}.3x\left(-e^t\right)$$

$$=\frac{(2e^t+3e^{-t})e^t-3e^te^{-t}}{e^{2t}+3e^t.e^{-t}}$$

$$=\frac{2e^{2t}}{e^{2t}+3}$$

ख) $$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right).\frac{1}{t}+\frac{1}{1+y^2/x^2}\left(\frac{1}{x}\right).e^t$$

$$=\frac{-e^t\frac{1}{t}+e^t.\text{lnt}}{(\text{lnt})^2+e^{2t}}=\frac{e^t(t\,\text{lnt}-1)}{t[(\text{lnt})^2+e^{2t}]}$$

E4) क) मान लीजिए कि $f(x,y)=x^y+y^x$, है, जहाँ $x=t^3$ और $y=\sin t$ है, जिससे जब फलन f को t का फलन माना जाए, तब हमें वह फलन प्राप्त हो जाए, जिसका अवकलज हम ज्ञात करना चाहते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$=[yx^{y-1}+\ln x.y^x]3t^2+[\ln y.x^y+xy^{x-1}]\cos t$$

$$=[(\sin t)t^{3(\sin t-1)}+\ln t^3.(\sin t)^{t^3}]3t^2+[\ln\sin t.t^{3\sin t}+t^3(\sin t)^{t^3-1}]$$

ख) मान लीजिए कि $f(x,y)=x^{y-1}+y^x$, है, जहाँ $x=t^2, y=t+1$ है

अतः, $$\frac{df}{dt}=[(y-1)x^{y-2}+y^x\ln y]2t+[\ln x.x^{y-1}+xy^{x-1}]$$

$$=[t.t^{2(t-1)}+(t-1)^{t^2}\ln(t+1)]2t+[\ln t^2.t^{2t}+t^2(t+1)^{t^2-1}]$$

$$=2t^{2t}+2t(t+1)^{t^2}\ln(t+1)+t^{2t}\ln t^2+t^2(t+1)^{t^2-1}$$

ग) मान लीजिए कि $f(x,y)=e^x+x^y$, जहाँ $x=t^4$ और $y=\cos t$ है

तब $$\frac{df}{dt}=[e^x+yx^{y-1}](4t^3)+(x^y\ln x)(-\sin t)$$

$$=4t^3e^{t^4}+4t^3\cos t\,t^{4(\cos t-1)}-\sin t.t^{4\cos t}\ln t^4$$

E5) क) $t>0$ के लिए $(tx,ty)=\max\left\{\frac{tx}{ty},ty\right\}$

$$=\max\left\{\frac{x}{y},ty\right\}$$

जो $t\max\left\{\frac{x}{y},y\right\}=t\,f(x,y)$ के बराबर होना आवश्यक नहीं है।

$x=2, y=1$ और $t=2$, लेकर जाँच कीजिए।

$\therefore f$ समघात नहीं है।

ख) क्योंकि $f(tx,ty)=\frac{\sin t\,x}{\sin t\,y}\neq t^n\frac{\sin x}{\sin y}=t^nf(x,y)$, है किसी भी n, के लिए,

इसलिए f समघात नहीं है।

$x=\pi, y=\frac{\pi}{2}$ और $t=\frac{1}{2}$ लेकर जाँच कीजिए।

ग) $f(tx,ty)=(tx)^{1/3}\ (ty)^{-5/3}$

$=t^{-4/3}x^{1/3}y^{-5/3}$

$=t^{-4/3}f(x,y)$ है।

इस प्रकार, f घात $-4/3$ का एक समघात फलन है।

घ) $f(tx,ty)=t^3(3x^2y+xy^2-\pi y^3)$

$=t^3 f(x,y)$ है।

इस प्रकार f घात 3 का एक समघात फलन है।

ङ) फलन f समघात नहीं है।

E6) क्योंकि f घात n का एक समघात फलन है तथा इसके प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलज है, इसलिए हम ऑयलर-प्रमेय का f पर अनुप्रयोग कर सकते हैं।

इसलिए, हम प्राप्त करते हैं

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf$$

उपरोक्त समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=n\frac{\partial f}{\partial x}$$

क्योंकि f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज है, इसलिए श्वार्ज-प्रमेय को दृष्टिगत रखते हुए (इकाई 4 देखिए), हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

इसके फलस्वरूप, हमें प्राप्त होता है:

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=(n-1)\frac{\partial f}{\partial x}$$

इसलिए, ऑयलरःप्रमेय के उपयोग से, हम प्राप्त करते हैं कि $\frac{\partial f}{\partial x}$ घात $(n-1)$

का एक समघात फलन है। इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि $\frac{\partial f}{\partial y}$ भी घात $(n-1)$ का एक समघात फलन है।

E7) ध्यान दीजिए कि z घात $\frac{1}{20}$ वाला समघात फलन है। इसलिए ऑयलर प्रमेय से हमें प्राप्त होता है $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{20}z.$

E8) क) ध्यान दीजिए कि u घात 2 का एक समघात फलन है। हमें ऑयलर-संबंध $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u.$ का सत्यापन करना है। अब,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2(x+y)-(x^3+y^3)}{(x+y)^2}=\frac{2x^3+3x^2y-y^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3y^2(x+y)-(x^3+y^3)}{(x+y)^2}=\frac{-x^3+3xy^2+2y^3}{(x+y)^2}$$

$$\therefore x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2x^4+2x^3y+2xy^3+2y^4}{(x+y)^2}$$

$$=2\cdot\frac{x^3+y^3}{(x+y)}=2u \text{ है।}$$

ख) u घात 0 का एक समघात फलन है। अब,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{और}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2/x^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{है। इस प्रकार,}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.u$$ है। यह ऑयलर-संबंध को सिद्ध कर देता है।

E9) मान लीजिए कि $D=[(x,y)\,|\,x>0, y>0\}$ है।

तब D ऑयलर-प्रमेय की आवश्यकताओं (i) और (ii) को संतुष्ट करता है। साथ ही, फलन

$z(x,y)=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ घात 0 का एक समघात फलन है तथा D पर

इसके संतत आंशिक अवकलज हैं। इसलिए, ऑयलर-प्रमेय के अनुप्रयोग से,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0 \text{ है।}$$

E10) मान लीजिए कि $D=\{(x,y)\,|\,x\neq y\}$ है तथा $f:D\to \boldsymbol{R}$ ऐसा है कि

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x-y} \text{ है।}$$

तब f घात 2 का एक समघात फलन है तथा इसके प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलज हैं। इसलिए, ऑयलर-प्रमेय को दष्टिगत रखते हुए,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2f \text{ है।}$$

ऑयलर संबंध में $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x\sec^2 z\frac{\partial z}{\partial x}+y\sec^2 z\frac{\partial z}{\partial y}=2\tan z$$

अर्थात् $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z.$ है।

अब हमें $\tan z=f$ प्राप्त है। तब,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sec^2 z\,\frac{\partial z}{\partial x} \text{ और } \frac{\partial f}{\partial y}=\sec^2 z\,\frac{\partial z}{\partial y} \text{ है।}$$

- x -

विविध उदाहरण और अभ्यास

नीचे दिए गए उदाहरण और अभ्यास इस खण्ड में आप के द्वारा पढ़ी गई अवधारणाओं और प्रक्रियाओं के बारे में हैं। उन्हें करने से आपको संबंधित अवधारणाओं की बेहतर समझ मिलेगी, साथ ही इस तरह की समस्याओं को हल करने का अभ्यास भी होगा।

हम पहले विविध उदाहरणों पर विचार करेंगे। आप इसी तरह से अभ्यासों को हल कर सकते हैं। हम आपको सलाह देते हैं कि अंत में दिए गए अभ्यासों के समाधानों को न देखें जब तक कि आपने स्वयं हल करने की कोशिश नहीं की है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 1 : बताइए कि निम्नलिखित कथन सही है या गलत। संक्षिप्त प्रमाण या प्रति-उदाहरण की मदद से अपने उत्तर को सही ठहराएं।

i) फलन $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ एक समघात फलन नहीं है।

ii) यदि $\boldsymbol{R}^3$ में $P(x,y,z)$ एक बिन्दु इस प्रकार का है कि $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |y| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ और $|z| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, तब $\boldsymbol{R}^3$ में p इकाई गोले के अन्दर स्थित होगा।

iii) यदि $\boldsymbol{R}^2$ पर परिभाषित f और g दो वास्तविक–मान फलन ऐसे हैं कि बिन्दु (a,b) पर $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}$ का अस्तित्व है, तब दोनों $f_x(a,b)$ और $g_x(a,b)$ का अस्तित्व होगा।

iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{xy}\cos(\pi xy) = \pi$

v) यदि $f(x,y) = x\ln y$, तब $f_{xy} = f_{yx}$ for $y \neq 0$.

हल : हल पर चर्चा करने से पहले हम एक महत्वपूर्ण टिप्पणी करते हैं।

[मान लीजिए कि दिया हुआ कथन $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 2$ है। केवल यह कहना कि यह असत्य है पर्याप्त नहीं है। यह कहने के लिए आपको कारण बताना होगा। कारण प्रमाण या प्रति-उदाहरण हो सकता है। इस मामले में आपको दिखाना चाहिए कि सीमा 2 नहीं है बल्कि यह शून्य है। इसी तरह, यदि आप मानते हैं कि कोई विशेष कथन सत्य है, तो आपको ऐसा कहने का कारण बताना होगा। उदाहरणार्थ, कथन निम्नलिखित जैसा है।

'' दो चरों वाले एक फलन, जो किसी बिन्दु पर संतत हो, के उस बिन्दु पर किसी भी आंशिक अवकलज का होना आवश्यक नहीं है।''

यह कथन सत्य है। यहाँ पर आप एक फलन का उदाहरण दे सकते हैं जो किसी बिन्दु पर संतत है और उस बिन्दु पर उसके आंशिक अवकलज नहीं हैं।]

अब हम एकक करके i), ii) , iii), iv) और v) के हल पर चर्चा करेंगे।

i) $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ }ारा दिए गए व्यंजक $f(x,y)$ में हम x के स्थान पर tx और y के स्थान पर ty प्रतिस्थापित करते हैं। तब

$$f(tx,ty)=\sin\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}$$

$$=\sin t\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\neq t^n\sin\sqrt{x^2+y^2}=t^n f(x,y),$$ किसी भी n के लिए।

अतः यह कथन **सत्य** है।

पपद्ध यह जांचने के लिए हम दूरी OP की गणना करते हैं यहाँ पर O मूल बिन्दु

$(0,0,0)$ है। तब $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=1$

क्योंकि OP इकाई गोले की त्रिज्या, जो 1 है, से कम है, हम पाते हैं कि P गोले के अन्दर स्थित है।

इसलिए यह कथन सत्य है।

पपपद्ध मान लीजिए $f(x,y)=|x|$

$$g(x,y)=-|x|$$

तब $f(x,y)+g(x,y)=0$

$\therefore \frac{\partial(f+g)}{\partial x}(x,y)$ का सभी बिन्दुओं पर अस्तित्व होगा।

परन्तु $\frac{\partial f}{\partial x}$ का $(0,0)$ पर अस्तित्व नहीं है।

यह दिखाता है कि दिया हुआ कथन असत्य है।

दिया गया फलन $f(x,y)$ दो फलनों $f(x,y)=e^{xy}$ और $f_g(x,y)=\cos(\pi xy)$ का गुणनफल है। दोनों फलन संतत हैं। अतः $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=e^0=1$ और

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\cos(\pi xy)=\cos(0)=1$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{xy}\cos(\pi xy)=1\neq\pi$$

इसलिए यह कथन असत्य है।

iv) हमारे पास $f_x(x,y) = \ln y$ है और $f_y(x,y) = \frac{x}{y}, y \neq 0$ है

$$f_{yx} = \frac{1}{y}; f_{xy} = \frac{1}{y}, y \neq 0.$$

तब दोनों फलन y = 0 पर परिभाषित नहीं हैं इसलिए दोनों फलन अपने परिसर में समान है।

इसलिए यह कथन सत्य है।

***

उदाहरण 2 : निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

i) आयताकार निर्देशांक उस बिंदु के जिस के हैं बेलनाकार निर्देशांक $(r, \theta, z) = (4, \pi/3, -3)$.

ii) आयताकार निर्देशांक उस बिंदु के जिस के गोलाकार निर्देशांक हैं $(\rho, \theta, \phi) = (4, \pi/3, \pi/4)$.

iii) गोलाकार निर्देशांक उस बिंदु के जिस के आयताकार निर्देशांक हैं $(x, y, z) = (4, -4, 4\sqrt{6})$.

हल : i) बेलनाकार–से–आयताकार निर्देशांक रूपांतरण सूत्र लागू करने पर हमें मिलता है

$$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2,\ y = r\sin\theta = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3},\ z = -3$$

अतः, इस बिंदु के आयताकार निर्देशांक होंगे $(x, y, z) = (2, 2\sqrt{3}, -3)$

ii) गोलाकार–से–आयताकार निर्देशांक रूपांतरण सूत्र लागू करने पर हमें मिलता है

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta = 4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{2}$$

$$y = \rho\sin\phi\sin\theta = 4\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{6}$$

$$z = \rho\cos\phi = 4\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

अतः, इस बिंदु के आयताकार निर्देशांक होंगे $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2})$

iii) आयताकार–से–गोलाकार निर्देशांक रूपांतरण सूत्र लागू करने पर हमें मिलता है

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{16 + 16 + 96} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

प्रतिबंध $0 \le \theta < 2\pi$ और $\tan\theta$ के गणना मूल्य के कारण, θ के लिए संभावनाएँ $\theta = 3\pi/4$ और $\theta = 7\pi/4$ बनती हैं। परन्तु प्रदत्त बिंदु का $y-$ निर्देशांक ऋणात्मक है, अतः $\theta = 7\pi/4$ होगा। इसके अतिरिक्त प्रतिबंध $0 \le \phi \le \pi$ और $\cos\phi$ के गणना मूल्य के कारण, ϕ के लिए केवल एक ही संभावना $\phi = \pi/6$ है। इस प्रकारण इस बिंदु के गोलाकार निर्देशांक $(\rho, \theta, \phi) = (8\sqrt{2}, 7\pi/4, \pi/6)$ होंगे।

***

उदाहरण 3 : बेलनाकार और गोलाकार निर्देशांकों में परवलज $z = x^2 + y^2$ के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार–से–बेलनाकार रूपांतरण सूत्र के द्वारा मिलता है।

$$z = r^2 \qquad \ldots (1)$$

जो एक बेलनाकार निर्देशांक में समीकरण है।

आयताकार–से–गोलाकार रूपांतरण बताता है।

$$\rho\cos\phi = \rho^2 \sin^2\phi$$

जिसको हम लिख सकते हैं $\rho = \cos\phi \operatorname{cosec}^2\phi$

यह गोलाकार निर्देशांकों में परवलज का समीकरण है।

***

उदाहरण 4 : मान लीजिए $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ । $f\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ और f का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल : प्रतिस्थापन द्वारा $f\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-(0)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

वर्गमूल चिन्ह के कारण, $f(x,y,z)$ के वास्तविक मान के लिए हमारे पास $0 \le 1-x^2-y^2-z^2$ होना चाहिए। इस असमिका को $x^2+y^2+z^2 \le 1$ के रूप में लिखने पर हम देखते हैं कि f के प्रांत में गोले के अन्दर और उस पर स्थित सभी बिंदु शामिल हैं। $x^2+y^2+z^2 = 1$.

***

उदाहरण 5 : निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।

i) $c = 1, 0, 4, -1$ के लिए $f(x,y) = x^2 - y^2$ द्वारा दी गई द्वारा के स्तर वक्रों।

ii) $c = 1, 0, 9$ के लिए $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ द्वारा दी गई स्तर पृष्ठों।

हल : i) दी हुई पृष्ठ $z = x^2 - y^2$ है। $c = 1$ के लिए स्तर वक्र है $x^2 - y^2 = 1$, जो

एक अतिपरवलय है जो बिंदु $(\pm 1,0)$ पर लंबवत x-एक्सिस से गुजरता है। $c=0$ के लिए स्तर वक्र सरल रेखाएँ हैं। $c=4$ के लिए स्तर वक्र एक अतिपरवलय है जो बिंदु $(\pm 2,0)$ पर x-एक्सिस से गुजरता है। $c=-1$ के लिए स्तर वक्र एक अतिपरवलय है जो बिंदु $(0,\pm 1)$ पर y-एक्सिस से गुजरता है।

ii) स्तर पृष्ठ $f(x,y)=x^2+y^2, z$ द्वारा मिलेगी। $c=1$ के लिए स्तर पृष्ठ त्रिज्या 1 का बेलन होगी। $c=0$, के लिए स्तर पृष्ठ z-एक्सिस होगी। $c=9$, के लिए स्तर पृष्ठ त्रिज्या 3 का बेलन होगी।

***

उदाहरण 6 : $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ की सीमा ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित रेखाओं के अनुदिष $(x,y)\to(0,0)$ होने पर

i) $y=3x$

ii) $y=5x$

आप $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ के बारे में क्या कह सकते हैं? अपने उत्तर के लिए उपयुक्त कारण बताइए।

हल : i) रेखा $y=3x$ पर, $x\neq 0$ के लिए, $f(x,y)=\dfrac{x^2-9x^2}{x^2+9x^2}=\dfrac{-8}{10}=\dfrac{-4}{5}$,

अतः रेखा $y=3x$ के अनुदिष $(x,y)\to(0,0)$, होने पर $f(x,y)\to-\dfrac{4}{5}$ होता है

ii) रेखा $y=5x$ के अनुदिष $(x,y)\to(0,0)$, होने पर $f(x,y)\to\dfrac{-12}{13}$ होता है।

तब $\lim f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं होगा, क्योंकि अलग अलग दिषाओं में $f(x,y)$ की सीमाएं अलग अलग हैं।

***

उदाहरण 7 : बिंदु $(0,1)$ पर निम्नलिखित

$$f(x,y)=2e^{3y}\cos x+e^x\sin 2y$$

के लिए उवार्ज प्रमेय को सत्यापित कीजिए। आप f_{xy} और f_{yx} के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

हल : हमारे पास $f(x,y) = 2e^{3y}\cos x + e^{x}\sin 2y$ है। तब $(0,1)$ पर

$$f_y(x,y) = 6e^{3y}\cos x + 2e^{x}\cos 2y \text{ और}$$

$$f_{xy}(x,y) = -6e^{3y}\sin x + 2e^{x}\cos 2y \text{ है।}$$

फिर संतत फलनों के योग होने के कारण दोनों f_y और f_{xy} भी संतत है। और $f_{xy}(0,1) = 2\cos 2$

अतः यह फलन उवार्ज प्रमेय के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है और इसलिए प्रमेय से, हमें प्राप्त होता है

$f_{yx}(0,1) = f_{xy}(0,1) = 2\cos 2$.

***

उदाहरण 8 : मान लीजिए $f(x,y) = \dfrac{\cos x + e^{xy}}{x^2 + y^2}$ **दिखाइए कि सभी बिंदुओं** $(x,y) \neq (0,0)$ **पर f अवकलनीय है।**

हल : हम आंशिक अवकलजों की गणना करते हैं।

$$f_x = \frac{(x^2+y^2)(ye^{xy} - \sin x) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{(x^2+y^2)\,x\,e^{xy} - 2y(\cos x + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

क्योंकि दोनों f_x और f_y बिंदुओं $(x,y) \neq (0,0)$ पर संतत हैं, इसलिए ऑयलर–प्रमेय के द्वारा, बिंदुओं $(x,y) \neq (0,0)$ पर f अवकलनीय होगा।

***

उदाहरण 9 : यदि $z = x^2 y + 3xy^4$, जब $x = \sin 2t$ और $y = \cos t$ हो, तो $t = 0$ के लिए $\dfrac{dz}{dt}$ ज्ञात कीजिए।

i) श्रृंखला नियम द्वारा।

ii) प्रत्यक्ष प्रतिस्थापन द्वारा।

हल : i) श्रृंखला नियम कहता है $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dt}{dt}$

हमारे पास है $z = x^2 y + 3xy^4$

अतः $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t$$

इस प्रकार $\dfrac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)$

$= 6,$ जब $t = 0, x = 0$ और $y = 1.$

ii) प्रत्यक्ष प्रतिस्थापन द्वारा देय प्राप्त होता है :

$$z = \sin^2 2t \cos t + 3\sin 2t \cos^4 t$$

$$\frac{dz}{dt} = 2\sin 2t \cos t + -\sin t \sin^2 2 + 6\cos 2t \cos^4(t) + 12\sin 2t \cos^3 t$$

$= 6$ जब $t = 0$.

***

उदाहरण 10 : मान लीजिए $f(x, y) = x^{-1/3} y^{5/3}$ । दिखाइए कि

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{3}z.$$

हल : पहले हम जांच करते हैं कि f ऑयलर के प्रमेय को संतुष्ट करता है कि नहीं।

मान लीजिए $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ ।

तब,

i) सभी $t > 0$ के लिए, $(x, y) \in D \Rightarrow (tx, ty) \in D$ ।

ii) $(x, y) \in D,$ तब त्रिज्या $r = \dfrac{1}{2}\min\{x, y\}$ वाली चक्रिगा, जिसका केन्द्र (x, y) है, D में आविष्ट होगी।

फिर x के स्थान पर tx और y के स्थान पर ty प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$f(tx,ty) = (tx)^{-1/3}(ty)^{5/3}$$

$$= t^{4/3}x^{-1/3}y^{5/3}$$

$$= t^{4/3}f(x,y).$$

अतः f घात $4/3$ वाला समघात फलन है। और आगे, किसी भी बिंदु $(x,y) \in D$ के लिए आंशिक अवकलज f_x और f_y निम्नलिखित द्वारा दिए जाते हैं।

$$f_x(x,y) = \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}y^{5/3}$$

$$f_y(x,y) = \frac{5}{3}x^{-1/3}y^{2/3}$$

D पर f_x और f_y संतत हैं। अतः f ऑयलर – प्रमेय के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है और ऑयलर–संबंध के द्वारा हमें मिलता है।

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{3}z.$$

***

उदाहरण 11 : बिंदु $(3,1,1)$ पर $x=3$ और $z = x^2y - 3xy^2 + 1$ के प्रतिच्छेदन वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : बिंदु $(3,1,1)$ पर प्रवणता $\frac{\partial z}{\partial y}$ द्वारा दी जाती है।

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6xy$$

$$= 9 - 18 \quad (3,1,1) \text{ पर}$$

$$= -9$$

***

विविध अभ्यास

E1) बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत। संक्षिप्त प्रमाण या प्रति–उदाहरण की मदद से अपने उत्तर को सही ठहराएं।

i) f/g का प्रांत $\mathbf{R}^2 - \left\{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ है, जहाँ $f(x,y) = 2\sin x + \sin y$ और

$g(x, y) = \frac{1}{x^2}\cos y$ हैं।

ii) फलन $F(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{y}\right)$ एक समघात फलन है।

iii) समुच्चय $S = \{(x, y, z) : |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$ एक विवृत घन है जिसके एक कोने के निर्देशांक $(-1, -1, -1)$ हैं।

iv) तीन चरों का एक वास्तविक–मान फलन, जो सर्वत्र संतत होता है, वह अवकलनीय होता है।

v) $z = f(x^2 y)$, जहाँ पर f अवकलनीय है, $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ को संतुष्ट करता है।

E2) $(0, 0)$ पर निम्नलिखित फलन की पुनरावृत्त सीमाएं ज्ञात कीजिए और जांच कीजिए कि प्रत्येक में वह बराबर हैं कि नहीं :

i) $f(x, y) = \frac{(1+y)(1+x^2)}{(2+x)(1+y^3)}$

ii) $f(x, y) = \frac{(y-3x)}{(2y+x)}\frac{(2+x^3)}{(1+y^3)}$

E3) $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{y}{3z}, & y \neq 0, z \neq 0 \\ 0, & \text{इसके अतिरिक्त} \end{cases}$ }ारा परिभाषित फलन f के लिए,

दिखाइए कि $f_{yz}(0, 0, 0)$ व $f_{zy}(0, 0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

E4) यदि $z = \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$, तो दिखाइए कि $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2z$.

E5) कौशी – असमिका का कथन दीजिए और इसका उपयोग करके $\boldsymbol{R}^2$ में दिखाइए कि सभी x, y के लिए $|x+y| \leq |x| + |y|$

E6) निम्नलिखित के स्तर–पृष्ठों को ज्ञात कीजिए उन मानों के लिए जो उनके सामने दिए गए हैं।

i) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 24$, $k = 1$ के लिए

ii) $f(x, y, z) = x + y - z + 3$, $k = 2$ के लिए

E7) $f(x,y)=2x^2y^2+2y+4x$ के द्वारा परिभाषित फलन के लिए $f_x(1,3)$ और $f_y(1,3)$ को निर्धारित कीजिए।

E8) मान लीजिए $f(x,y)=x^2y+5y^3$. समतलों $x=1$ और $y=2$ तथा पृष्ठ $z=f(x,y)$ के प्रतिच्छेद–वक्रो के बिन्दु $(1,2,42)$ पर स्पर्ष रेखाओं की प्रवणताएँ ज्ञात कीजिए।

E9) $f(x,y,z)=x^3y^2z^4+2xy+z$, का तो प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

E10) $f(x,y)=x^2y^3+x^4y$ के सभी द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

विविध अभ्यासों के लिए संकेत/हल

E1) संकेत

i) सत्य – यहाँ $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{x^2(\sin x+\sin y)}{\cos y}$

बिंदु $(1,\frac{\pi}{2})$ पर $g(x, y)$ परिभाषित नहीं है। (कई ऐसे अन्य बिन्दु है) अतः यह कथन असत्य है।

ii) असत्य दिखाइए कि यह समघात है।

iii) असत्य – बिंदु $(-1,-1,-1)$ घन पर स्थित नहीं है।

iv) असत्य – बिंदु $(0,0,0)$ पर $f(x,y,z)=|x|+|y|+|z|$ संतत है पर अवकलनीय नहीं है।

v) सत्य – $u=x^2y$ प्रतिस्थापित कीजिए फिर $z=f(u)$.

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)x^2$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)2x^2y$$

$$=2y\,f'(u)2x^2$$

$$=2y\frac{\partial z}{\partial y}$$

अतः कथन सत्य है।

E2) i) $$f(x,y)=\frac{(1+y)(1+x^3)}{(2+x)(1+y^3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)(1+x^3)}{(2+x)(1+y^3)}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^3)}{(2+x)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{(1+y)(1+x^3)}{(1+y^3)(2+x)}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{1+y}{2(1+y^3)}=\frac{1}{2}.$$

यह सीमाएं बराबर हैं।

ii) $$f(x,y)=\frac{(y-3x)(2+x^2)}{(2y+x)(1+y^2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{(y-3x)(2+x^2)}{(2y+x)(1+y^2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{-3x}{x}\right)(2+x^2)\right\}=\lim_{x\to 0}-3(2+x^2)=-6$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{(y-3x)(2+x^2)}{(2y+x)(1+y^2)}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{2y}{2y}\times\frac{1}{(1+y^2)}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{1+y^2}=1$$

यह सीमाएं बराबर नहीं हैं।

E3) $$f_y(0,0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k,0)-f(0,0,0)}{k}=0$$

$$f_y(0,0,t)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k,t)-f(0,0,t)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k}{3t}-0}{k}=\frac{1}{3t}$$

$$f_{zy}(0,0,t)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(0,0,t)-f_y(0,0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{3t^2}$$

दांयी तरफ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है और इसलिए f_{zy} का अस्तित्व नहीं है।

$$f_z(0,0,0) = 0$$

$$f_z(0,k,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,k,t) - f(0,k,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{k}{3t}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{k}{3t^2}$$

क्योंकि दांयी तरफ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है, इसलिए f_z का अस्तित्व नहीं है और इसके परिणामस्वरूप f_{yz} का भी अस्तित्व नहीं है।

E4) पहले हम जांच करते हैं कि प्रदत्त फलन आयॅलर–प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुश्ट करता है कि नहीं। इसके लिए, मान लीजिए $D = \{x, y\} : x > 0, y > 0\}$ और मान लीजिए $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x+y}$ । अब f एक फलन है जो $D \to \boldsymbol{R}$ पर परिभाषित है। और हमें प्राप्त है :

i) $t > 0$ के लिए, $(x,y) \in D \Rightarrow (tx, ty) \in D$

ii) यदि $(x,y) \in D$, तो त्रिज्या $r = \frac{1}{2}\min\{a,b\}$ वाली चक्रिका, जिसका केन्द्र (a,b) है, D में आविष्ट होती है।

अब हम f के लिए व्यंजक में x के स्थान पर tx और y के स्थान पर ty प्रतिस्थापित करते हैं। तब हमें प्राप्त होता है $f(tx,ty) = t\,f(x,y)$ ।

अतः f घात 1 वाला समघात फलन है। D पर f के आंशिक अवकलजों का भी अस्तित्व है। अतः आयॅलर–प्रमेय के द्वारा

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y) \qquad (2)$$

अब हमारे पास है $\tan z = f(x,y)$ । तब

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sec^2 z \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sec^2 z \frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) में $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ के लिए प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$x\sec^2 z\frac{\partial z}{\partial x}+y\sec^2 z\frac{\partial z}{\partial y}=\tan z$$

$$\begin{aligned}x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\tan z}{\sec^2 z}\\&=\frac{\sin z}{\cos z}\times\cos^2 z\\&=\sin 2z\end{aligned}$$

यह अपेक्षित समीकरण है।

E5) $\boldsymbol{R}^2$ के किसी भी दो बिंदुओं $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ के लिए हमें सिद्ध करना है कि $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\le|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$ होता है।

मान लीजिए $\boldsymbol{R}^2$ में $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ और $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ हैं। तब

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2&=\sum_{i=1}^{2}(x_i+y_i)^2\\&=\sum_{i=1}^{2}x_i^2+2\sum_{i=1}^{2}x_iy_i+\sum_{i=1}^{2}y_i^2\\&\le\sum_{i=1}^{2}x_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{2}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}y_i^2}+\sum_{i=1}^{2}y_i^2\end{aligned}$$ (कौशी असमिका के अनुसार)

इसके परिणामस्वरूप,

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2\le\|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|^2$$

या $\|(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2\le(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2$

या $\|(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|\le\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$

E6) i) स्तर पृष्ठ की समीकरण $x^2+y^2+z^2-24=1$ है। यह त्रिज्या 5 का एक गोला है।

ii) संकेत : यह एक समतल है।

E7) $f_x(x,3)=\frac{d}{dx}[f(x,3)]=\frac{d}{dx}[18x^3+4x+16]=54x^2+4,$

अतः $f_x(1,3)=54+4=58$

$$f_y(1,y) = \frac{d}{dx}[f(1,y)] = \frac{d}{dy}[2y^2 + 2y + 4] = 4y + 2,$$

अतः $f_y(1,3) = 4 \times 3 + 2 = 14$.

E8) $x = 1$ के सापेक्ष प्रवणता है : $f_y(x,y) = x^2 + 15y^2$, $(1,2)$ पर

अतः $f_y(1,2) = 61$.

$y = 2$ के सापेक्ष प्रवणता है $f_x(x,y) = 2xy$, $(1,2)$ पर

अतः $f_x(1,2) = 4$.

E9) $f_x(x,y,z) = 3x^2y^2z^4 + 2y$

$f_y(x,y,z) = 2x^3yz^4 + 2x$

$f_z(x,y,z) = 4x^3y^2z^3 + 1$

E10) हमें प्राप्त $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3y$ और $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + x^4$

इसलिए $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 + 4x^3y) = 2y^3 + 12x^2y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + x^4) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + x^4) = 6xy^2 + 4x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + 4x^3y) = 6xy^2 + 4x^3$$

– x –

शब्दावली

अदिश गुणन	scalar multiplication
अनेक चर	several variable
अवकल	differential
अवकलनीय	differentiable
असमिका	inequality
आंशिक अवकलज	partial derivative
उच्चतर कोटि	higher order
उपरि परिबंध	upper bound
कार्तीय निर्देशांक पद्धति	Cartesian coordinate system
कार्तीय गुणनफल	Cartesian product
कौशी-स्वार्ज	Cauchy Schwarz
गोलाकार	spherical
दूरी फलन	distance function
निम्न परिबंध	lower bound
निर्देशांक समतल	coordinate plane
निष्कासित प्रतिवेश	deleted neighbourhood
परिबंध	bound
परिसर	range
पुनरावृत्त सीमाएं	repeated limits
प्रथम कोटि	first order
प्रवणता	slope
प्रतिवेश	neighbourhood
बेलनाकार	cylindrical
मिश्रित आंशिक अवकलज	mixed partial derivative
युगपत सीमा	simultaneous limit
वास्तविक मान फलन	real-valued function
विवृत अंतराल	open interval
विवृत गोले	open sphere
विवृत घन	open cube
श्रृंखला नियम	chain rule
संपूर्ण अवकलज	total derivative
संयुक्त फलन	composite function
समष्टि	space
समघात फलन	homogeneous function
सांतत्य	continuity
सीमा	limit
स्तर वक्र	level curve
स्तर पृष्ठ	level surface

NOTES