इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-132
अवकल समीकरण

खंड

2

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ
विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
षिव नाडर विष्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पुणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन.आई.एस.ई.आर.,
भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई.आई.एस.ई.आर.,
मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई.आई.टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य

विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू

प्रो. महेंद्र सिंह नाथावत (निदेशक)
डॉ. दीपिका
श्री पवन कुमार
प्रो. पूर्णिमा मित्तल
प्रो. परवीन सिंक्लेयर
प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. एस. वेंकटारमन

*पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. ओ.पी. भूटानी (सेवानिवृत्त)
आई.आई.टी., दिल्ली (संपादक)

प्रो. पूर्णिमा मित्तल
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयक : प्रो. पूर्णिमा मित्तल तथा प्रो. सुजाता वर्मा

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन.सी.ई.आर.टी.

प्रो. पूर्णिमा मित्तल
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

आभार: प्रो. परवीन सिंक्लेयर, डॉ. दीपिका और श्री पवन कुमार को पांडुलिपि पर सुझाव के लिए।

खंड मुद्रण

श्री सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
विज्ञान विद्यापीठ, इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

दिसम्बर, 2018

ISBN-978-93-88498-46-3

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय, मैदानगढ़ी, नई दिल्ली–110 068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in से प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. महेंद्र सिंह नाथावत, निदेशक (विज्ञान विद्यापीठ) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेजर कम्पोजिंग : राजश्री कम्प्यूटर्स, वी-166ए, भगवती विहार (नजदीक सेक्टर 2, द्वारका), उत्तम नगर, नई दिल्ली-110059

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, दरिया गंज, नई दिल्ली

खंड 2 प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण

अवकल समीकरण के पाठ्यक्रम के चार खंडों में यह दूसरा खंड है। इसमें चार इकाइयाँ हैं जिनमें हम प्रथम कोटि और किसी भी घात वाले साधारण अवकल समीकरण पर चर्चा करेंगे।

इकाई 6 जो इस खंड की प्रथम इकाई है, में हम अवकल समीकरणों के अध्ययन से संबंधित आधारभूत परिभाषाओं से प्रारंभ करेंगे। यहां हमने अवकल समीकरण को साधारण अवकल समीकरण, आंशिक अवकल समीकरण और संपूर्ण अवकल समीकरण में वर्गीकृत किया है तथा रैखिक और अरैखिक समीकरणों के अंतर को स्पष्ट किया है। यहां हमने हल की प्रकृति और उन प्रतिबंधों का भी उल्लेख किया है जिनके अधीन प्रथम कोटि वाले अवकल समीकरण के अद्वितीय हल का अस्तित्व होता है। यहाँ हमने भौतिक एवं इंजीनियरी रूचि की कुछ समस्याओं को भी प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरणों के रूप में सूत्रित किया है।

इकाई 7 में हमने निम्नलिखित प्रकार के प्रथम कोटि और प्रथम घात वाले अवकल समीकरणों को हल करने की कुछ विधियां दी है : पृथ्क्करणीय समीकरण, समधात समीकरण या समधात रूप में समानेय समीकरण, यथातथ समीकरण या वे समीकरण जिन्हें एक समाकलन गुणक की सहायता से यथातथ बनाया जा सकता है।

इकाई 8 में रैखिक अवकल समीकरणों पर चर्चा की गई है। यहां समघात रैखिक समीकरण और असमघात रैखिक समीकरण के बीच अंतर स्पष्ट किया गया है। समघात अवकल समीकरणों के हल के कुछ महत्त्वपूर्ण गुणधर्मों पर चर्चा की है और इन समीकरणों को हल करने के लिए अनिर्धारित गुणांक विधि और प्राचल विचरण विधि से आपको परिचित कराया है। इकाई 6 में सूत्रित की गयी भौतिकी समस्याओं को हल करने के अतिरिक्त यहाँ हमने बर्नोली समीकरण को भी हल किया है।

इकाई 9 जो इस खंड की अंतिम इकाई है, में उन अवकल समीकरणों पर चर्चा की गई है जो प्रथम कोटि वाले हैं, परंतु जिनकी घात एक से बड़ी है। विशेष रूप से हमने उन स्थितियों पर चर्चा की है जबकि $f(x, y, p) = 0$ के रूप के समीकरण जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$ को $x, y,$ या p के लिए हल किया जा सकता है। इस इकाई में हमने क्लेरों और रिकेटी समीकरण जैसे कुछ विशेष समीकरणों पर भी चर्चा की है।

संकेत और प्रतीक

$\mathbf{R}$	: वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
$\mathbf{C}$	: समिश्र संख्याओं का समुच्चय
$\Rightarrow$	: निहित है
$\subseteq$	: में आविष्ट
$\in$	: का सदस्य
$<(\leq)$	: से कम (से कम या के बराबर)
$>(\geq)$	: से बड़ा (से बड़ा या के बराबर)
$\therefore$	: इसलिए
$\because$	: क्योंकि
i.e.	: अर्थात्
$\forall$	: सभी के लिए
w.r.t.	: के सापेक्ष
$\frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}$	: x के सापेक्ष y का nवीं कोटि का साधारण अवकलज
$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$	: x के सापेक्ष y का nवीं कोटि का आंशिक अवकलज
$\propto$	: के समानुपाती
] , [	: विवृत्त अंतराल
[,]	: संवृत्त अंतराल
[, [	: अर्ध विवृत्त या अर्ध संवृत्त अंतराल
$\|x\|$	: संख्या x का निरपेक्ष मान
IVP	: आदि मान समस्या
I.F.	: समाकलन गुणक

ग्रीक वर्णमाला

α	: एल्फा
β	: बीटा
γ	: गामा
θ	: थीटा
ν	: न्यू
ψ	: साई
ϕ	: फाई
μ	: म्यू
Σ	: बड़ा सिग्मा
i	: आयोटा

इकाई 6

अवकल समीकरणों से परिचय

इकाई की रूपरेखा

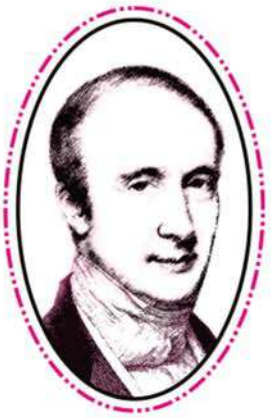
6.1 प्रस्तावना

अपने कैलकुलस के कोर्स में, आप पढ़ चुके हैं कि यदि $y = f(x)$ एक दिया हुआ फलन है, तो इसके अवकलज $\frac{dy}{dx}$ की व्याख्या x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर के रूप में की जा सकती है। परंतु इस कोर्स में हम जिस समस्या को लेने जा रहे हैं वह एक दिए गए समीकरण $\frac{dy}{dx} = xy$ के लिए ऐसा फलन $y = f(x)$ प्राप्त करना है जो इस समीकरण को संतुष्ट करे। ऐसे समीकरण **अवकल** (differential) **समीकरण** कहलाते हैं। अवकल समीकरणों का प्राथमिक उद्देश्य भौतिक जगत में हो रहे परिवर्तनों के अध्ययन करने के लिए इन्हें एक साधन के रूप में प्रयोग करना है।

एक अंग्रेज गणितज्ञ सर आइज़क न्यूटन (1642-1727) ने यह प्रेक्षित किया कि प्राकृतिक विज्ञान के कुछ महत्त्वपूर्ण नियम उन समीकरणों के पदों में सूत्रित किए जा सकते हैं जिनमें परिवर्तन दर सम्मिलित होती है। ऐसे प्राकृतिक नियम का सबसे प्रसिद्ध उदाहरण न्यूटन का द्वितीय नियम

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right] \qquad (1)$$

है, जो बल F के कारण किसी कण की स्थिति $u(t)$ के लिए है, जबकि बल समय t, स्थिति



कॉशी (1789-1857)

रीमान (1826-1866)

एक गणितीय निदर्श गणितीय संकल्पनाओं और भाषा का प्रयोग करते हुए, किसी समस्या/पद्धति का सूत्रण होता है

$u(t)$ तथा वेग $\frac{du(t)}{dt}$ का एक फलन हो सकता है। बल F के कारण कण की गति निर्धारित करने के लिए, हमें समीकरण (1) को संतुष्ट करने वाले फलन u को ज्ञात करने की आवश्यकता है। समीकरण (1) अवकल समीकरण का एक उदाहरण है।

1676 में, जर्मन गणितज्ञ गॉटफ्रीड लाइबनिज़ ने दो चरों x और y के अवकलन dx और dy में संबंध व्यक्त करने के लिए, अवकल समीकरण के नाम से परिचित कराया। इसका आगमन ज्यामिति में प्रतिलोम स्पर्श रेखा समस्या के अध्ययन, अर्थात एक ऐसा वक्र ज्ञात करना जिसकी स्पर्श रेखा कुछ विशिष्ट प्रतिबंधों को संतुष्ट करे, के संबंध में हुआ। 1690 में, भाइयों जेम्स और जॉन बर्नूली, जो लाइबनिज़ के अनुयायी थे, ने अवकल समीकरणों के सिद्धांतों के विकास और भौतिक समस्याओं को हल करने में इन समीकरणों के प्रयोग करने में एक महत्त्वपूर्ण भूमिका अदा की।

अठारवीं शताब्दी में, लियोनहॉर्ड ऑयलर, डेनियल बर्नूली, जोसफ लग्रांज तथा अन्य गणितज्ञों ने इस विषय के विकास में भरपूर योगदान दिया। मार्गदर्शक कार्य, जिसके कारण साधारण अवकल समीकरण आधुनिक गणित की एक शाखा के रूप में विकसित होने के लिए अग्रसर हुए, का श्रेय कॉशी, रीमान, पिकार्ड, प्वांकारे, लियापूनोव, बरखौफ तथा अन्य को जाता है।

विज्ञान और प्रौद्योगिकी, अर्थशास्त्र, तथा सामाजिक विज्ञान, इत्यादि से उत्पन्न होने वाली अनेक भौतिक स्थितियों को निरूपित करने वाले गणितीय निदर्श निर्मित करने में अवकल समीकरणों ने एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा की है। अवकल समीकरणों के सिद्धांत, जिसमें फलनों और उनके अवकलजों के पारस्परिक संबंध निहित होते हैं, उपयोगी होने के साथ-साथ स्वयं में भी बहुत रोचक होते हैं। इस इकाई में, हम भाग 6.2 में अवकल समीकरणों से संबंधित आधारभूत संकल्पनाओं और परिभाषाओं से आपको परिचित कराएंगे। साधारण अवकल समीकरण के हल का अर्थ क्या है और किन प्रतिबंधों के अंतर्गत साधारण अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व होता है पर चर्चा हम भाग 6.3 में करेंगे। भाग 6.4 में हम देखेंगे कि किस प्रकार वक्र कुल से अवकल समीकरणों की व्युत्पत्ति होती है। विभिन्न प्रकार के प्रथम कोटि अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों पर चर्चा हम इकाई 7 और 8 में करेंगे। इस इकाई से भाग 6.5 में हम भौतिक और इंजीनियरिंग से संबंधित कुछ समस्याओं को प्रथम कोटि वाले अवकल समीकरणों के पदों में सूत्रित करेंगे तथा प्रथम कोटि के समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करने के पश्चात, इकाई 8 में हम इन समस्याओं का हल प्राप्त करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- ❖ साधारण और आंशिक अवकल समीकरणों में अंतर कर सकेंगे;
- ❖ समघात, असमघात, रैखिक तथा अरैखिक साधारण अवकल समीकरणों को परिभाषित कर सकेंगे;
- ❖ अवकल समीकरणों की कोटि और घात में अंतर कर सकेंगे;
- ❖ साधारण अवकल समीकरण के हल को परिभाषित कर सकेंगे;
- ❖ एक प्रारंभिक या आदि मान समस्या की पहचान कर सकेंगे;
- ❖ प्रथम कोटि की आदि मान समस्याओं के हलों के अस्तित्व और उनकी अद्वितीयता के लिए प्रतिबंधों को बता सकेंगे तथा उनका प्रयोग कर सकेंगे; और
- ❖ कुछ भौतिक समस्याओं के लिए, अवकल समीकरण प्राप्त कर सकेंगे।

6.2 आधारभूत संकल्पनाएँ

हम अपनी चर्चा अवकल समीकरणों के सिद्धांतों की आधारभूत संकल्पनाओं को परिभाषित करने से प्रारंभ करेंगे और इन संकल्पनाओं को उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

अपने कैलकुलस के ज्ञान से, आप यह जानते हैं कि यदि दो चरों x और y वाले एक ऐसे संबंध $y = f(x)$ का अस्तित्व है जिसमें y का मान x पर निर्भर (आश्रित) रहता है, तो हम x को **स्वतंत्र** (independent) **चर** तथा y को **आश्रित** (dependent) **चर** कहते हैं। इसी प्रकार, यदि आप समीकरण (1) पर दृष्टि डालें, तो आप देख पाएँगे, कि यह

स्वतंत्र चर t तथा आश्रित चर u और उसके अवकलजों $\frac{du}{dt}$ और $\frac{d^2u}{dt^2}$ के बीच एक संबंध प्रस्तुत करता है।

ऐसा कोई भी समीकरण जो स्वतंत्र और आश्रित चरों तथा आश्रित चरों के अवकलजों के बीच संबंध प्रस्तुत करता है एक **अवकल समीकरण (differential equation)** कहलाता है।

ऐसे कुछ समीकरण निम्न हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x + \sin x \tag{2}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2} \tag{4}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)\,y = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = y \tag{6}$$

समीकरण (2) से (5) में से प्रत्येक में आश्रित चर y है, तथा स्वतंत्र चर या तो t है या x है। अक्षर k, m और n अचरों को निरूपित करते हैं। समीकरण (6) में, दो आश्रित चर x और y हैं तथा स्वतंत्र चर t है। ऐसे समीकरण भी होते हैं जिनमें आंशिक अवकलज, जिनके बारे में आप खंड 1 की इकाई 3 में अध्ययन कर चुके हैं, होते हैं, उदाहरणार्थ

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = nzx \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8}$$

यहाँ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ और $\frac{\partial v}{\partial x}$ आंशिक अवकलज हैं, जिनमें z, u और v आश्रित चर हैं तथा x और y स्वतंत्र चर हैं। समीकरण (2) से (8) अवकल समीकरणों के उदाहरण हैं।

औपचारिक रूप से, अब हम निम्न परिभाषा दे सकते हैं :

परिभाषा : वह समीकरण जिसमें एक (या अधिक) आश्रित चर हों तथा इन आश्रित चरों के एक या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष अवकलज हों, को अवकल समीकरण कहा जाता है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण

$$\frac{d}{dx}(xy) = y + x\frac{dy}{dx}$$

के प्रकार के समीकरण अवकल समीकरण नहीं होते।

भिन्न रूप से परिभाषित फलनों के बीच समानता को सर्वसमिका कहते हैं।

इस समीकरण में, यदि आप बायें पक्ष को प्रसारित करें, तो आप पाएँगे कि बायां पक्ष वही है जो दायाँ पक्ष है। ऐसे समीकरण **सर्वसमिकाएँ (identities)** कहलाते हैं।

जैसा कि आप ऊपर देख चुके हैं कि एक अवकल समीकरण में एक से अधिक आश्रित चर सम्मिलित हो सकते हैं, जैसा कि समीकरण (6) से (8) की स्थितियों में है। समीकरण में आश्रित चर तथा उसके अवकलज (या अवकलजों) की प्रकृति के आधार पर अवकल समीकरणों को विभिन्न प्रकारों में वर्गीकृत किया जाता है। इसी के अनुसार, हम निम्न परिभाषाएँ देते हैं :

परिभाषा : केवल साधारण अवकलजों (अर्थात् एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलज) को सम्मिलित करने वाले अवकल समीकरण को **साधारण अवकल समीकरण (ordinary differential equation)** कहा जाता है (जिसे संक्षिप्त रूप में ODE लिखते हैं)।

समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 \tag{9}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = [\sin(xy) + 2]^2 \tag{10}$$

$$y = x\frac{dy}{dx} + r\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{तथा} \tag{11}$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \sin t \tag{12}$$

में से सभी साधारण अवकल समीकरण हैं। समीकरण (9) से (11) में प्रथम और द्वितीय कोटियों के साधारण अवकलज क्रमशः $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ सम्मिलित हैं, जो स्वतंत्र चर x के सापेक्ष आश्रित चर y के अवकलज हैं। समीकरण (12) में स्वतंत्र चर t के सापेक्ष दो आश्रित चरों x और y के साधारण अवकलज सम्मिलित हैं।

ऐसे समीकरणों का एक विशिष्ट रूप निम्न हैं :

$$g\left[x,\, y(x),\, \frac{dy(x)}{dx},\, \frac{d^2y(x)}{dx^2},\, \ldots,\, \frac{d^ny(x)}{dx^n}\right] = 0 \qquad (13)$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण (13) में, हम कल्पना कर लेते हैं कि g एक ज्ञात वास्तविक मान वाला फलन है तथा निर्धारित की जाने वाली अज्ञात राशि y है। साथ ही, साधारण अवकल समीकरण में y तथा उसके अवकलजों के मान x पर निकाले जाते हैं।

ध्यान दीजिए कि समीकरण

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_x = (y)_{x+1}$$

एक अवकल समीकरण नहीं है। इसका कारण यह है कि हम y का मान $(x+1)$ पर निकाल रहे हैं, जबकि $\frac{dy}{dx}$ का मान x पर निकाला जा रहा है।

समीकरण

$$\frac{dy(x)}{dx} = \int_0^x e^{xs} y(s)\, ds$$

भी एक अवकल समीकरण नहीं है, क्योंकि यहाँ अज्ञात राशि y समाकल के अंदर प्रकट हो रही है। साथ ही, इस स्थिति में, समीकरण के दाएँ पक्ष में y के मान अंतराल 0 से x पर आश्रित हैं, जबकि एक अवकल समीकरण में **अज्ञात y का मान केवल x पर निकाला जाता है।**

आइए अब हम आंशिक अवकल समीकरण परिभाषित करें।

परिभाषा : उस अवकल समीकरण को जिसमें आंशिक अवकलज, अर्थात् दो या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष एक (या अधिक) आश्रित चरों के अवकलज, सम्मिलित हों **आंशिक अवकल समीकरण (partial differential equation)** कहा जाता है (इसे संक्षिप्त रूप में PDE लिखा जाता है)।

समीकरण

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \qquad (14)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + xtu = 0 \qquad (16)$$

में से सभी आंशिक अवकल समीकरण के उदाहरण हैं।

आप यह भी **देख सकते** हैं कि समीकरण (1) से (6) साधारण अवकल समीकरण हैं, जबकि समीकरण (7) और (8) आंशिक अवकल समीकरण हैं।

अब आप निम्न प्रश्न को हल करते समय ODE और PDE की अपनी समझ की जाँच कर सकते हैं :

E1) निम्न में से कौन से समीकरण अवकल समीकरण हैं? अवकल समीकरणों में से कौन से साधारण हैं तथा कौन से आंशिक हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

i) $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + y^3 = 5x + 2$$

ii) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = x + yt$$

iii) $$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \sin[xy(s)]\, ds$$

iv) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \int_0^1 \cos y(s)\, ds$$

v) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, A एक अचर है।

साधारण और आंशिक अवकल समीकरणों के अतिरिक्त तीसरी प्रकार के समीकरण होते हैं, जिन्हें संपूर्ण (total) अवकल समीकरण कहा जाता है। संपूर्ण अवकल समीकरण की परिभाषा देने से पहले, हम प्रतीकों dx और dy को एक अर्थ देंगे जो हमें अवकलज $\dfrac{dy}{dx}$ प्राप्त करने में समर्थ बनाएगा। प्रतीक dx और dy चर हैं, जो परिमित वास्तविक मान ग्रहण करते हैं तथा इन्हें **अवकल** (differential) कहा जाता है। एक दिए हुए फलन $y = f(x)$ के लिए, अवकल dy को $dy = f'(x)dx$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, जहाँ $f'(x)$ फलन f का x के सापेक्ष अवकलज है। यह dy, x और dx का एक फलन है।

खंड 1 की इकाई 5 में आपने पढ़ा है कि यदि $u = f(x, y)$ दो स्वतंत्र चरों x और y का एक ऐसा फलन है जिसके xy-तल के क्षेत्र R में संतत् आंशिक अवकलज हैं, तो इसके संपूर्ण अवकल du को निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

अर्थात, $du = u_x dx + u_y dy$

उदाहरण के लिए, यदि $u = x^2y - 3y$ है, तो $du = 2xy\; dx + (x^2 - 3)\; dy$ होगा।

इसी प्रकार, तीन चरों x, y और z वाले एक फलन u के लिए, संपूर्ण du निम्न से प्राप्त होता है :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

अब यदि $u(x, y, z) = c$ है, जहाँ c एक अचर है, तो $du = 0$ होगा।

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0$$

यहाँ, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial z}$ चरों x, y, और z के ज्ञात फलन हैं और इसलिए ऊपर दिए समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$P\ dx + Q\ dy + R\ dz = 0$$

इसे तीन चरों वाला **संपूर्ण अवकल समीकरण (total differential equation)** कहा जाता है। यहाँ P, Q और R चरों x, y और z के फलन हैं। इस समीकरण में, चरों x, y और z में से किसी भी एक को स्वतंत्र चर माना जा सकता है और तब शेष दो चर आश्रित चर कहलाते हैं।

इसी प्रकार यदि $u = u(x, y, z, t)$ हो, तो संगत संपूर्ण अवकल समीकरण

$$P\ dx + Q\ dy + R\ dz + T\ dt = 0$$

के रूप का होगा।

याद रखिए कि एक संपूर्ण अवकल समीकरण में सदैव **तीन या अधिक चर** सम्मिलित होते हैं।

अब हम निम्न परिभाषा देते हैं :

परिभाषा : संपूर्ण अवकल समीकरण एक ऐसा समीकरण होता है, जिसमें दो या अधिक आश्रित चर और एक स्वतंत्र चर, जो समीकरण में प्रत्यक्ष (या स्पष्ट) रूप में प्रकट हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता, के सापेक्ष इन आश्रित चरों के अवकलज सम्मिलित होते हैं।

उदाहरण के लिए समीकरण

$$yz(1+4xz)\ dx - xz(1+2xz)\ dy - xydz = 0$$

तथा

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{zdx - xdz}{x^2+z^2} + 3ax^2dx + 3by^2dy + 3cz^2dz = 0$$

संपूर्ण अवकल समीकरण हैं।

इस पाठ्यक्रम के खंड 2 और 3 में हम साधारण अवकल समीकरणों की चर्चा करेंगे तथा खंड 4 में संपूर्ण व आंशिक अवकल समीकरणों का अध्ययन किया जाएगा।

अब हम अवकल समीकरण की कोटि और घात की संकल्पनाओं पर विचार करेंगे,

जिनके आधार पर अवकल समीकरणों को आगे भी वर्गीकृत किया जा सकता है।

कलन के पाठ्यक्रम की समझ से आप जानते हैं कि एक या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष एक आश्रित चर का **nवाँ अवकलज** कोटि n का अवकलज या nवीं कोटि अवकलज कहलाता है। उदाहरण के लिए $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ द्वितीय कोटि के अवकलज हैं तथा $\frac{d^3z}{dx^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ तृतीय कोटि के अवकलज हैं। समीकरण में प्रस्तुत आश्रित चरों के अवकलजों के आधार पर, हमें निम्न परिभाषा प्राप्त है :

परिभाषा : किसी अवकल समीकरण की **कोटि (order)** उस समीकरण में प्रस्तुत उच्चतम कोटि अवकलज की कोटि होती है।

उदाहरण के लिए,
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^3 \qquad (17)$$

एक **द्वितीय** कोटि का साधारण अवकल समीकरण है (क्योंकि यहां उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है, जो कि द्वितीय कोटि का है), जबकि

$$(x+y)\,(y')^2 = 1 \qquad (18)$$

एक **प्रथम** कोटि का साधारण अवकल समीकरण है (क्योंकि उच्चतम कोटि अवकलज $y' = \frac{dy}{dx}$ है)।

इसी प्रकार,

$$\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + x^2\left[\frac{dy}{dx}\right]^4 = 0 \qquad (19)$$

एक **तृतीय** कोटि का साधारण अवकल समीकरण है, जबकि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (20)$$

एक **द्वितीय** कोटि का आंशिक अवकल समीकरण है।

ध्यान दीजिए कि किसी अवकल समीकरण की कोटि एक धनात्मक पूर्णांक होती है। साथ ही, यदि किसी अवकल समीकरण की कोटि n है, तो यह आवश्यक नहीं है कि इस समीकरण में कुछ या सभी निचली कोटि वाले अवकलज अथवा स्वतंत्र चर स्पष्ट रूप से सम्मिलित हों। उदाहरण के लिए, समीकरण $y^{iv} + 2y = 0$ चतुर्थ कोटि का साधारण अवकल समीकरण है।

अब एक बार फिर समीकरण (19) को देखिए, जो तृतीय कोटि का है, क्योंकि इस समीकरण में प्रस्तुत उच्चतम अवकलज की कोटि 3 है। साथ ही, आप यह भी देख सकते हैं कि उच्चतम कोटि अवकलज का घातांक 2 है। यह घातांक इस अवकल

समीकरण का घात परिभाषित करता है। हम कहते हैं कि समीकरण (19) घात 2 का एक तृतीय कोटि ODE है। इसके अनुसार, हम निम्न परिभाषा देते हैं :

परिभाषा : किसी अवकल समीकरण का **घात (degree)** उस समीकरण में प्रस्तुत उच्चतम कोटि अवकलज का उच्चतम घातांक होता है।

समीकरण (17) और (20) प्रथम घात के हैं, जबकि समीकरण (18) और (19) का घात दो है।

परंतु, अवश्य नहीं कि प्रत्येक अवकल समीकरण का घात हो। यदि अवकलज भिन्नों में या करणीगत (radical) चिन्हों के अंतर्गत हों, तो समीकरण का घात केवल तभी होता है जब उसका परिमेयीकरण (rationalization) किया जा सके तथा समीकरण में प्रस्तुत सभी अवकलजों को करणीगत चिन्हों और भिन्न/ऋणात्मक घातों से मुक्त रूप में व्यक्त किया जा सके।

उदाहरण के लिए, निम्न समीकरण को लीजिए :

$$y - x\frac{dy}{dx} = r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} \tag{21}$$

इस समीकरण का घात क्या है?

इस समीकरण का घात ज्ञात करने के लिए, हमें इसे करणियों से मुक्त करना होगा। इसलिए, हमें समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने की आवश्यकता है।
समीकरण (21) का वर्ग करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\left[y - x\frac{dy}{dx}\right]^2 = r^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]$$

अब आप देख सकते हैं कि इस समीकरण में, उच्चतम कोटि अवकलज, अर्थात $\frac{dy}{dx}$ का उच्चतम घातांक 3 है। इसलिए इस समीकरण का घात **तीन** है।

इसी प्रकार, समीकरण

$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{b}{dy/dx}$ का घात दो है।

इसका कारण यह है कि हम $\frac{dy}{dx}$ के ऋणात्मक घात को हटाने के लिए, पूरे समीकरण को $\frac{dy}{dx}$ से गुणा करते हैं तथा $y\frac{dy}{dx} = x\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + b$ प्राप्त करते हैं।

क्या आप समीकरण $\cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + xy = 3$ का घात ज्ञात कर सकते हैं? नहीं, क्योंकि cosine फलन को प्रसारित करने पर एक अपरिमित श्रेणी प्राप्त होती है। अतः इस समीकरण का घात परिभाषित नहीं है।

अब आप निम्न प्रश्न द्वारा अवकल समीकरण की कोटि और घात के बारे में अपनी समझ की जाँच कर सकते हैं :

E2) निम्न अवकल समीकरणों की कोटि और घात ज्ञात कीजिए :

i) $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

ii) $$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^2 = x$$

iii) $$\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x^2y^2 = 0$$

iv) $$dy + y^3 dx = 0$$

v) $$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = r\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

vi) $$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = x$$

vii) $$x^2(dx)^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2(dy)^2 - z^2(dz)^2 = 0$$

किसी समीकरण में प्रस्तुत आश्रित चरों और उनके अवकलजों के घात के आधार पर, हम अवकल समीकरणों को दो वर्गों में वर्गीकृत कर सकते हैं; रैखिक और अरैखिक।

परिभाषा : जब किसी साधारण या आंशिक अवकल समीकरण में आश्रित चर और उसके सभी अवकलज केवल प्रथम घात के हों तथा उच्चतर घातों या गुणनफलों के रूप में न हों, तो समीकरण को **रैखिक (linear)** समीकरण कहते हैं।

इस तरह हम यह पाते हैं कि रैखिक समीकरण के गुणांक या तो अचर होते हैं या स्वतंत्र चर (चरों) के फलन होते हैं। यदि अवकल समीकरण रैखिक नहीं हो, तो उसे हम **अरैखिक (non-linear)** कहते हैं।

उदाहरण के लिए साधारण अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y = x^2$$

रैखिक समीकरण है, जबकि समीकरण $(x+y)^2\frac{dy}{dx}=1$ और $\frac{d^2y}{dx^2}+x=y^2$ अरैखिक हैं। इन समीकरणों में अरैखिकता $y^2\frac{dy}{dx}$, $2xy\frac{dy}{dx}$ और y^2 जैसे पदों के कारण है। इसी प्रकार, समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ एक रैखिक आंशिक अवकल समीकरण है, जबकि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$$

अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण है। इसका कारण इस समीकरण के बाएँ पक्ष में तीसरे पद की उपस्थिति है। यदि एक आंशिक अवकल समीकरण रैखिक नहीं है, तो वह **रैखिक-कल्प** (*quasi-linear*), **सामि-रैखिक** (*semi-linear*) अथवा **अरैखिक** हो सकता है। हम इन वर्गीकरणों पर चर्चा खंड 4 की इकाई 16 में करेंगे।

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E3) कारण देते हुए निम्न अवकल समीकरणों को रैखिक और अरैखिक समीकरणों में वर्गीकृत कीजिए :

i) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=0$

ii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$

iii) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$

iv) $(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n\,(n+1)\;y=0$, n एक अचर है।

v) $(x^2+y^2)^{3/2}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\mu\,x=0$, μ एक अचर है।

सामान्यतः जब भी हमारा सामना किसी अवकल समीकरण से होता है, तब हमारी प्राकृतिक जिज्ञासा होती है उसके हल के बारे में पता लगाना। आप जानना चाहते हैं कि यर्थात् में उसके हल का अर्थ क्या है। अगले भाग में इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के साथ ही हम नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर भी प्राप्त करेंगे :

i) क्या प्रत्येक साधारण अवकल समीकरण का एक हल होता है?

ii) किन प्रतिबंधों के अंतर्गत एक दिए हुए साधारण अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व होता है?

iii) यदि हल का अस्तित्व है, तो क्या यह हल अद्वितीय है?

आइए इन प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने का प्रयास करें।

6.3 अवकल समीकरण का हल

आप देख चुके हैं कि nवीं कोटि वाला व्यापक साधारण अवकल समीकरण, समीकरण (13) अर्थात्,

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

के रूप का होता है। अवकलजों के शिखी संकेत (prime notations)

$$\left(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}\right)$$ का प्रयोग करते हुए,

हम समीकरण (13) को पुनः

$$g(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{22}$$

के रूप में लिख सकते हैं।

v kb,] ge ; g eku y afd I ehdj.k ½22) को $y^{(n)}$ के लिए हल किया जा सकता है अर्थात्, समीकरण (22) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{23}$$

सामान्यतः, यह जाँच करना कि एक दिया हुआ फलन ϕ समीकरण (22) या (23) को संतुष्ट करता है एक सरल कार्य है। इसके लिए आवश्यक यह होता है कि ϕ के अवकलज अभिकलित किए जाएँ तथा जाँच की जाए कि ϕ और उसके अवकलज, समीकरण में प्रतिस्थापित किए जाने पर, उसे x में एक सर्वसमिका (identity) के रूप में बदल देते हैं। यदि ऐसे फलन ϕ का अस्तित्व है, तो इसे हम समीकरण (22) या (23) का हल कहते हैं।

यहाँ हम यह मान लेते हैं कि

i) ϕ किसी अंतराल I पर परिभाषित है;

ii) ϕ अंतराल I पर n बार अवकलनीय हैं;

iii) ϕ, x का एक वास्तविक मान फलन या सम्मिश्र मान फलन (परिसर C का एक उपसमुच्चय) हो सकता है।

संदर्भ के अनुसार, I कोई भी अंतराल $[a, b]$, $]a, b[$, $]0, \infty[$ या $]-\infty, \infty[$, इत्यादि निरूपित कर सकता है।

औपचारिक रूप से, हम निम्न परिभाषा देते हैं :

परिभाषा : किसी अंतराल I पर परिभाषित एक वास्तविक या सम्मिश्र मान फलन ϕ अवकल समीकरण $g(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ का एक हल (solution) या **समाकल (integral)** कहलाता है, यदि ϕ, n बार अवकलनीय हो तथा I में सभी x के लिए $x, \phi(x). \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)$ इस समीकरण को संतुष्ट करे, अर्थात् I में सभी x के लिए, $g(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0$ हो। उदाहरण के लिए प्रथम कोटि अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 4x \tag{24}$$

का अंतराल $I = \{x : -\infty < x < \infty\}$ अर्थात्, संपूर्ण **R** पर एक हल $y = 2x + 1$ है।

इसकी जाँच समीकरण (24) में y और उसके अवकलज $(y' = 2)$ के मान स्थापित करके की जा सकती है। हमें प्राप्त होता है:

समीकरण (24) का दायाँ पक्ष $= 2y - 4x = 2(1+2x) - 4x = 2 = y' =$ समीकरण (24) का बायाँ पक्ष।

अंतराल $]-\infty, \infty[$ पर, अरैखिक समीकरण $\dfrac{dy}{dx} - x\,y^{1/2} = 0$ का एक हल फलन

$y = x^4/16$ है। हमें $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3}{16} = \dfrac{x^3}{4}$ प्राप्त है। तथा प्रत्येक वास्तविक संख्या x के

लिए बायाँ पक्ष $= \dfrac{dy}{dx} - x\,y^{1/2} = \dfrac{x^3}{4} - x\left(\dfrac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^3}{4} = 0 =$ दायाँ पक्ष।

इसी प्रकार, आप जाँच कर सकते हैं कि किसी भी अचर c के लिए,
$y = 1 + 2x + ce^{2x}, \; -\infty < x < \infty$ भी समीकरण (24) का एक हल है।

ऊपर दी गयी परिभाषा में, आपने ध्यान दिया होगा कि समीकरण (22) का हल y वास्तविक मान या सम्मिश्र मान वाला हो सकता है। यदि y वास्तविक मान वाला है, तो वह एक **वास्तविक हल** (real solution) कहलाता है। यदि y सम्मिश्र मान वाला है, तो वह एक **सम्मिश्र हल** (complex solution) कहलाता है। प्रायः हमारी रूचि समीकरण (22) के वास्तविक हलों में होती है। अभी हमने जो कहा है, उसे स्पष्ट करने के लिए, आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : दिखाइए कि किसी अचर c के लिए, फलन $y(x) = ce^x, \; x \in \mathbf{R}$ समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{25}$$

का एक हल है।

हल: यहाँ I स्वयं **R** है। किसी भी $x \in \mathbf{R}$ के लिए, हम जानते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ce^x) = c\frac{d}{dx}(e^x) = ce^x = y$$

जो यह दर्शाता है कि y समीकरण (25) को संतुष्ट करता है।

* * *

उदाहरण 2 : दिखाइए कि वास्तविक अचरों a और b के लिए, फलन
$y(x) = a\cos 2x$ और $z(x) = b\sin 2x$ समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0, \; x \in \mathbf{R} \tag{26}$$

के हल हैं।

हल : हम पहले यह दिखाएंगे कि $z(x), x \in \mathbf{R}$ समीकरण (26) का एक हल है।

क्योंकि $\frac{d}{dx}[z(x)] = \frac{d}{dx}(b\sin 2x) = 2b\cos 2x$.

इसलिए $\frac{d^2}{dx^2}[z(x)] = \frac{d}{dx}(2b\cos 2x) = -4b\sin 2x = -4z(x)$,

जिससे कि $\frac{d^2z}{dx^2} + 4z(x) = -4z(x) + 4z(x) = 0,\ x \in \mathbf{R}$

अर्थात्, **R** में प्रत्येक x के लिए, $z(x)$ समीकरण (26) को संतुष्ट करता है।

इसी प्रकार, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-2a\sin 2x) = -4a\cos 2x = -4y(x)$$

अर्थात् **R** में सभी x के लिए, $y(x) = a\cos 2x$ भी समीकरण (26) का एक हल है। यहाँ आप जाँच कर सकते हैं कि योग $y(x) + z(x)$ अर्थात्, $a\cos 2x + b\sin 2x$ पुनः समीकरण (26) का एक हल है।

उदाहरण 3 : दिखाइए कि $y(x) = e^{ix},\ x \in \mathbf{R}$ समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का एक हल है।

हल : हमें प्राप्त है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{ix}) = ie^{ix}$$

$\boxed{i = \sqrt{-1}}$

तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(ie^{ix}) = i^2e^{ix} = -e^{ix} = -y(x)$

इस प्रकार, $y(x) = e^{ix}$ के लिए $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0\ \forall\ x \in \mathbf{R}$

* * *

अभी तक लिए गए उदाहरणों में, आपने देखा है कि दिए हुए अवकल समीकरणों के हल/हलों का अस्तित्व है। उदाहरण 1 और 2 में हल वास्तविक मान वाले थे, जबकि उदाहरण 3 में हल एक सम्मिश्र मान फलन था। आपने यह भी देखा होगा कि उदाहरण 1, 2 और 3 में **R** में सभी x के लिए, अचर फलन $y = 0$ भी दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है। ऐसा हल एक **तुच्छ हल (trivial solution)** कहलाता है। यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक अवकल समीकरण का एक तुच्छ हल हो। मान लीजिए कि हम समीकरण $x^2 + 1 = 0$ के वास्तविक मूल मालूम करना चाहते हैं। हम जानते हैं कि ऐसे किसी मूल का अस्तित्व नहीं है। अवकल समीकरण $\left|\frac{dy}{dx}\right| + y^2 + 1 = 0$ तथा $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$ का भी कोई वास्तविक हल

नहीं होता। इसी प्रकार, अवकल समीकरण $\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)=2$ का कोई वास्तविक हल नहीं है, क्योंकि किसी वास्तविक फलन के sine का मान -1 और +1 के बीच स्थित होता है। साथ ही, अवकल समीकरणों के हलों में **स्पष्ट** (explicit) और **अस्पष्ट** (implicit) हलों के रूप में अंतर किया जा सकता है। उदाहरण 1 में, $y(x)=ce^x$, **R** में प्रत्येक x के लिए, समीकरण $\frac{dy}{dx}=y$ का एक स्पष्ट हल है। इसी प्रकार, उदाहरण 2 और 3 में दिए गए हल भी समस्याओं के स्पष्ट हल हैं। इन सभी उदाहरणों में y स्पष्ट रूप से x के एक फलन के रूप में प्राप्त है।
जबकि, यदि आप अवकल समीकरण

$$(1-y^2)\frac{dy}{dx}-x^3=0 \tag{27}$$

पर विचार करें तो आप इस बात की जाँच कर सकते हैं कि फलन

$$3y-x^3-y^3=c \tag{28}$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है, उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करता है और इसीलिए समीकरण (27) का एक हल है। समीकरण (28) से समीकरण (27) का हल अस्पष्ट रूप में प्राप्त होता है। हम कहते हैं कि x और y को सम्मिलित करने वाला समीकरण

$$F(x, y)=0 \tag{29}$$

अंतराल I पर अस्पष्ट रूप से अवकल समीकरण का एक हल परिभाषित करता है, यदि प्रत्येक x के लिए, हम समीकरण (29) को हल करके y का संगत मान ज्ञात कर सकते हैं। यदि समीकरण (29) सरल है, तो इसे y के लिए हल करना संभव हो सकता है तथा हल के लिए एक स्पष्ट सूत्र प्राप्त किया जा सकता है। परंतु, अधिकांशतः समीकरण (29) को y के लिए x के पदों में स्पष्ट रूप से हल करना सरल नहीं होता है, जैसा कि समीकरण (28) की स्थिति में है। ऐसी स्थितियों में यह बेहतर होता है कि हल को अस्पष्ट रूप में ही छोड़ दिया जाए।

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E4) सत्यापित कीजिए कि $y=\cos^{-1}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ समीकरण $\sin y\frac{dy}{dx}=x$ का एक हल है। साथ ही, वह अंतराल भी बताइए जिस पर y परिभाषित है।

E5) सत्यापित कीजिए कि $y=\frac{1}{x}(\ln y+c)$ अचर c के प्रत्येक मान के लिए समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}$ का एक हल है।

$\ln y$, y का प्राकृतिक लघुगणक (logarithm) अर्थात् $\log_e y$ है।

E6) सत्यापित कीजिए कि $y = e^{2x}$ और $y = e^{3x}$ दोनों ही द्वितीय कोटि समीकरण $y'' - 5y' + 6y = 0$ के हल हैं। क्या आप इस समीकरण का कोई अन्य हल ज्ञात कर सकते हैं?

E7) सत्यापित कीजिए कि समीकरण $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$, $y \neq 1$ का एक अस्पष्ट हल है। इस समीकरण का यदि कोई स्पष्ट हल है तो ज्ञात कीजिए।

ऊपर की गयी चर्चा में, आपने ध्यान दिया होगा कि हो सकता है एक अवकल समीकरण का कोई हल न भी हो या एक से अधिक हल हो। यहां तक कि अवकल समीकरण के अनंततः अनेक हल (infinitely many solution) भी हो सकते हैं।

उदाहरण के लिए $y = \sin x$, $y = \sin x + 3$, $y = \sin x - \frac{4}{5}$ में से प्रत्येक फलन अवकल समीकरण $y' = \cos x$ का एक हल है। कलन के अपने ज्ञान से आप यह भी जानते हैं कि इस समीकरण का कोई भी हल

$$y = \sin x + c \tag{30}$$

के रूप का होता है, जहाँ c एक अचर है। क्योंकि **R** में c अनंततः मान ले सकता है, इसलिए हम c को स्वेच्छ अचर मानते हैं। तब, संबंध (30) इस समीकरण के सभी हलों की संपूर्णता को निरूपित करता है। इस प्रकार, हम एक अवकल समीकरण के अनंततः हलों को भी स्वेच्छ अचरों (जो प्राचल भी कहलाते हैं) वाले एक सरल सूत्र द्वारा निरूपित कर सकते हैं। सम्मिलित स्वेच्छ अचरों की संख्या के आधार पर, हम एक साधारण अवकल समीकरण के हलों को विभिन्न प्रकारों में वगीकृत कर सकते हैं। उदाहरण 2 में, द्वितीय कोटि समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ के हल $y = a\cos 2x + b\sin 2x$ में स्वेच्छ अचरों की संख्या दो है, जो अवकल समीकरण की कोटि के बराबर है। ऐसा हल अवकल समीकरण का व्यापक हल या संपूर्ण हल कहलाता है। साथ ही, यदि इन स्वेच्छ अचरों को विशेष मान दे दिए जाएँ, जैसे कि $a = 1$ और $b = 3$, तो $y = 3\sin 2x + \cos 2x$ इस समीकरण का एक विशेष हल होगा। इसके अनुसार, हम निम्न परिभाषाएँ देते हैं :

परिभाषा : nवीं कोटि वाले अवकल समीकरण का हल, जिसमें n स्वेच्छ अचर होते हैं, इसका **व्यापक** (general) या **संपूर्ण हल** (complete solution) कहलाता है।

परिभाषा : व्यापक हल में प्रस्तुत स्वेच्छ अचरों को विशेष मान देने पर प्राप्त किया गया कोई भी हल एक विशेष **हल (particular solution)** कहलाता है। यह स्वेच्छ अचरों या प्राचलों (parameters) से मुक्त होता है।

कुछ स्थितियों में, एक दिए हुए समीकरण के और भी हल हो सकते हैं जिन्हें व्यापक हल में प्रस्तुत स्वेच्छ अचरों को निश्चित मान देकर प्राप्त नहीं किया जा सकता। ऐसे हल को अवकल समीकरण का एक **विचित्र हल (singular solution)** कहा जाता है। उदाहरण के लिए समीकरण

$$y'^2 - xy' + y = 0 \tag{31}$$

का व्यापक हल $y = cx - c^2$ है, जहां c एक अचर है। समीकरण (31) का एक और हल $y = \frac{x^2}{4}$ है। क्योंकि इस हल को व्यापक हल से, c को निश्चित मान देकर, प्राप्त नहीं किया जा सकता इसलिए यह समीकरण (31) का एक विचित्र हल है। इस प्रकार, हमने एक साधारण अवकल समीकरण के विभिन्न प्रकार के हलों को देखा। हम यह भी देख चुके हैं कि एक अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता। यदि हल का अस्तित्व है तो यह अद्वितीय भी हो सकता है या नहीं भी हो सकता।

अब हम उन प्रतिबंधों को ज्ञात करने का प्रयास करेंगे जिनके अंतर्गत एक दिए हुए साधारण अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व होता है तथा हल अद्वितीय होता है। यहाँ हम अपनी चर्चा केवल प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण तक ही सीमित रखेंगे।

6.3.1 हल के अस्तित्व तथा अद्वितीयता के लिए प्रतिबंध

आइए हम व्यापक प्रथम कोटि समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{32}$$

पर विचार करें। समीकरण (32) में, हम यह मान लेते हैं कि x और y का फलन f हमें ज्ञात है। आपको यह जान कर आश्चर्य होगा कि, यद्यपि यह समीकरण सरल दिखता है परन्तु इसके स्पष्ट हल को प्राप्त करना बहुत कठिन है। अधिक स्पष्टता के लिए हम निम्न उदाहरणों पर विचार करते हैं :

उदाहरण 4 : क्या प्रत्येक $x \in R$ के लिए साधारण अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \text{ जहाँ } f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 & \text{के लिए} \\ 1, x \geq 0 & \text{के लिए} \end{cases}$$

के हल $y(x)$ का अस्तित्व है?

हल :

$$y(x) = \begin{cases} c_1, \quad x < 0 & \text{के लिए} \\ x + c_2 \; x \geq 0 & \text{के लिए} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन पर विचार कीजिए, जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं। आप जाँच कर सकते हैं कि यह फलन दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है, यदि $x \neq 0$ हो। इसके साथ-साथ, इस फलन का $x = 0$ पर कोई अवकलज नहीं है, क्योंकि $x = 0$ पर $y(x)$ असंतत है।

इस प्रकार, इस अवकल समीकरण का $x = 0$ के लिए कोई मान्य हल नहीं है। परंतु ऊपर परिभाषित $y(x)$, $x = 0$ के अतिरिक्त अन्य सभी बिंदुओं पर दिए हुए अवकल समीकरण का हल है।

* * *

आइए अब हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : क्या समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{-y}x, \forall\, x \in \mathbf{R}$ का एक अद्वितीय हल है?

हल : यह सरलता से सत्यापित किया जा सकता है कि $y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + A\right)$, जहाँ *A* एक स्वेच्छ अचर है, दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है।

आप जानते हैं कि $\ln x$ केवल x के धनात्मक मानों के लिए ही परिभाषित है। इसलिए, दिए हुए अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व तभी होगा जब $\left(\frac{x^2}{2} + A\right) > 0$ होगा। स्पष्टतः, इसका अर्थ है कि $\forall x \in \mathbf{R},\, A > 0$.

साथ ही, *A* के विभिन्न मानों के लिए, हमें विभिन्न हल प्राप्त होते हैं। इस प्रकार दिए हुए अवकल समीकरण का एक अद्वितीय हल नहीं है।

* * *

ऊपर की गयी चर्चा से यह स्पष्ट है कि हल की अन्-अद्वितीयता (non-uniqueness) का कारण *A* (पर $A > 0$ के लिए) की स्वेच्छता है। इसलिए, हम हल पर कुछ प्रतिबंध लगाना चाहेंगे ताकि *A* अद्वितीय रूप से निर्धारित हो जाए। ऐसा एक प्रतिबंध है किसी बिंदु x_0 पर y का मान निर्दिष्ट कर दिया जाना, जबकि x_0, y के अस्तित्व अंतराल में स्थित हो। ऐसा प्रतिबंध एक **आदि (प्रारंभिक) प्रतिबंध** (initial condition) कहलाता है। तथा एक आदि प्रतिबंध के साथ एक अवकल समीकरण को हल करने वाली समस्या एक **आदि मान समस्या** (initial value problem) (IVP) कहलाती है। दूसरे शब्दों में, आदि मान समस्या एक ऐसी समस्या है जिसमें हम एक दिए हुए अवकल समीकरण का एक ऐसा हल प्राप्त करते हैं जो स्वतंत्र चर के एक मान पर कुछ प्रतिबंधों को संतुष्ट करता हो। इस प्रकार, प्रथम कोटि की आदि मान समस्या

$$\left.\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \right\} \tag{33}$$

के प्रकार की होती है, जहाँ x_0, y_0 के अचर मान होते हैं।

समीकरण (33) से प्राप्त एक आदि मान समस्या पर चर्चा करने पर हमारे सम्मुख दो मौलिक प्रश्न उठते हैं :

i) क्या समस्या के हल का अस्तित्व है?

ii) यदि हल का अस्तित्व है, तो क्या यह हल अद्वितीय है अर्थात्, समस्या का केवल यही हल है?

ज्यामितीय रूप से दूसरे प्रश्न में हम पूछ रहे हैं : समीकरण (33) के सभी हलों में जिनका किसी अंतराल I में अस्तित्व है, क्या केवल एक हल ही ऐसा है जिसका आलेख (x_0, y_0) से होकर जाता है?

ऊपर दिए गए प्रश्नों के उत्तर फ्राँसीसी गणितज्ञ पिकार्ड (1856-1941) द्वारा दिए गए प्रमेय, जिसे **अस्तित्व अद्वितीयता प्रमेय** (Existence Uniqueness Theorem) कहा जाता है, से प्राप्त होते हैं। अब हम प्रथम कोटि की आदि मान समस्या (33) के लिए इस प्रमेय का कथन देते हैं।

प्रमेय 1 : (अस्तित्व-अद्वितीयता)

मान लीजिए कि D, xy-तल में निम्न द्वारा परिभाषित

$$D : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b$$

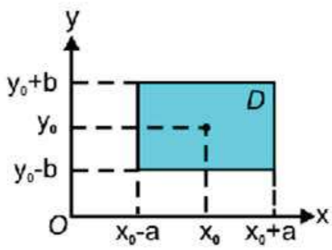
एक आयताकार प्रांत है, जिसके अभ्यंतर में बिंदु (x_0, y_0) अंतर्विष्ट करता है (देखिए चित्र 1)। यदि D में f संतत और परिबद्ध है, जैसे मान लीजिए

$|f(x, y)| \le \boldsymbol{k}$, D में सभी (x, y) के लिए जहाँ (34)

a, b और k अचर हैं।

फलन f को **परिबद्ध (bounded)** कहा जाता है जब xy-तल के एक प्रदेश में (x, y) का मान बदलता हो और यदि एक ऐसी संख्या k हो कि $|f| \le \boldsymbol{k}$ जबकि (x, y) उस प्रदेश में हो। उदाहरण के लिए यदि $|x| < 1$ और $|y| < 1$ है, तो $\boldsymbol{k=2}$ के लिए $f = x^2 + y^2$ परिबद्ध होता है।

तब IVP (33) का अंतराल $|x - x_0| <$ **h** में सभी x के लिए परिभाषित **कम से कम एक हल $y(x)$** अवश्य होता है, जहाँ $h = \min\left(a, \dfrac{b}{k}\right)$.



चित्र 1

साथ ही, यदि D में $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ संतत और परिबद्ध है, अर्थात्

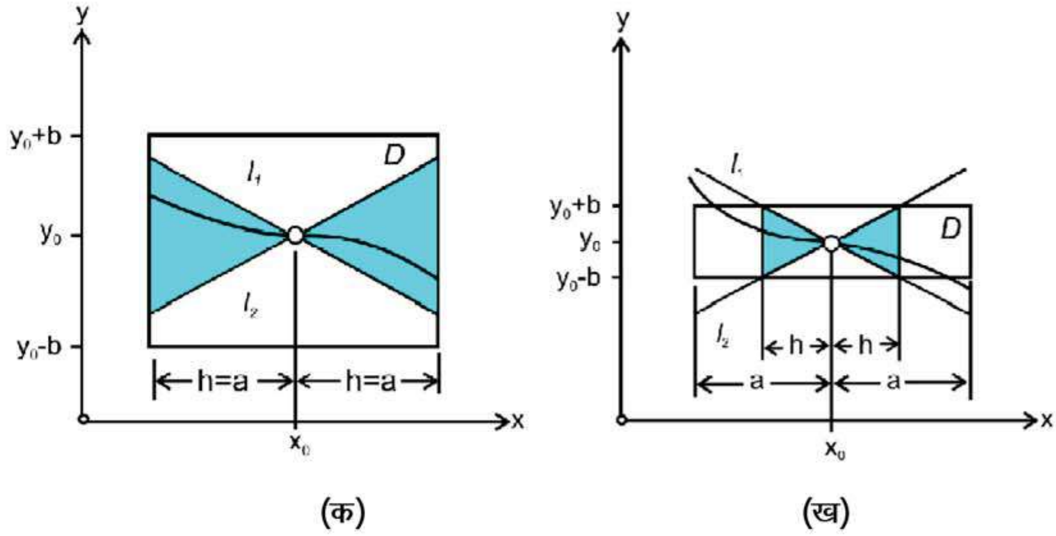
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$, D में सभी (x, y) के लिए (35)

जहाँ L एक धनात्मक अचर है, तब हल $y(x)$ अंतराल $|x - x_0| <$ **h** में सभी x के लिए एक **अद्वितीय हल है।**

— ■ —

क्योंकि इस प्रमेय की उपपत्ति के लिए, कई अन्य संकल्पनाओं से परिचित होना आवश्यक है, जो इस पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर हैं, अतः हम इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे। फिर भी, हम इस प्रमेय को कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे। निम्न टिप्पणी आपको इस प्रमेय को समझने में सहायक होगी।

टिप्पणी : क्योंकि $y' = f(x, y)$ इसलिए प्रतिबंध (34) से यह अर्थ निकलता है कि $|y'| \le k$ अर्थात्, D में किसी हल वक्र $y(x)$ की प्रवणता कम से कम $-k$ और अधिक से अधिक k है। अतः बिंदु (x_0, y_0) से होकर जाने वाला हल वक्र चित्र 2 में दर्शाए छायांकित प्रदेश में अवश्य स्थित होना चाहिए, जो क्रमशः प्रवणता $-k$ और k वाली रेखाओं l_1 और l_2 से परिबद्ध है।



चित्र 2

यहाँ *h* का मान निर्धारित करने में कठिनाई हो सकती है। D के रूप के आधार पर, यहाँ दो स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती है :

i) हमें $\frac{b}{k} \geq a$ प्राप्त हो सकता है। इस स्थिति में, $h = a$ होगा तथा $x_0 - a$ और $x_0 + a$ के बीच के सभी x के लिए हल का अस्तित्व होगा (देखिए चित्र 2 (क))।

ii) हमें $\frac{b}{k} < a$ प्राप्त हो सकता है। अतः, $h = \frac{b}{k}$ होगा तथा $x_0 - \frac{b}{k}$ और $x_0 + \frac{b}{k}$ के बीच के सभी x के लिए हल का अस्तित्व होगा। इस स्थिति में, x के अधिक बड़े या अधिक छोटे मानों के लिए, हल वक्र आयत D से बाहर निकल सकता है। (देखिए चित्र 2(ख)) तथा x के इन मानों के संगत हलों के बारे में कोई निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता।

प्रमेय 1 में दिए गए प्रतिबंध पर्याप्त **(sufficient)** हैं परंतु आवश्यक (necessary) नहीं हैं। अतः इनमें कुछ ढील दी जा सकती है। उदाहरण के लिए अवकल कलन के माध्य मान प्रमेय (mean value theorem) से हमें प्राप्त है :

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*)$$

जहाँ (x, y_1) और (x, y_2) D में एक ही x-निर्देशांक वाले दो भिन्न बिंदु माने गए हैं तथा y^*, y_1 और y_2 के बीच एक उपयुक्त मान है। प्रतिबंध (35) से तब यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|(y_2 - y_1)| \tag{36}$$

प्रतिबंध (35) के स्थान पर उससे हल्का प्रतिबंध (36) लागू किया जा सकता है, जिसे **लिपशिट्ज प्रतिबंध (Lipschitz condition)** कहा जाता है जिसे जर्मन गणितज्ञ रूडेल्फ लिपशिट्ज (1831-1903) के नाम पर रखा गया है। अचर L **लिपशिट्ज अचर (Lipschitz constant)** कहलाता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि IVP (33) के हल के अस्तित्व के लिए, यह आवश्यक है कि

i) f, D में संतत हो।

ii) f, D में परिबद्ध हो।

साथ ही, यह हल अद्वितीय होता है, यदि प्रतिबंध i) और ii) के साथ-साथ

iii) $\frac{\partial f}{\partial y}, D$ में संतत हो।

iv) $\frac{\partial f}{\partial y}, D$ में परिबद्ध हो (अथवा लिपशिट्ज संबंध संतुष्ट होता हो)।

परंतु, यदि उपरोक्त प्रतिबंध संतुष्ट नहीं भी हो तो भी संभव है कि IVP (33) का (क) कोई हल नहीं (ख) एक से अधिक हल या (ग) एक अद्वितीय हल हो। इसका कारण यह है कि **प्रमेय 1 केवल पर्याप्त प्रतिबंध प्रदान करता है आवश्यक प्रतिबंध नहीं।**

उदाहरण के लिए एक प्राँत $D: |x| < a, |y| < b$ जहाँ a और b अचर हैं; में $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \; y(0) = 0$ पर विचार कीजिए।

यहाँ, $f(x, y) = 3y^{2/3}$. एक बहुपद फलन होने के कारण, D में f संतत है तथा परिबद्ध भी है। इस प्रकार IVP के हल का अस्तित्व है।

और $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3 \times 2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{y^{1/3}}$ दर्शाता है कि $y = 0$ पर $\frac{\partial f}{\partial y}$ का अस्तित्व नहीं है। इसलिए x-अक्ष के भाग को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी प्रदेश में $\frac{\partial f}{\partial y}$ परिबद्ध नहीं है। अतः, ऊपर दिए प्रतिबंध iv) को ध्यान में रखते हुए, हम x-अक्ष के भाग को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी प्राँत में हल की अद्वितीयता के बारे में कोई निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। (यहाँ आप जाँच कर सकते हैं कि IVP के हलों $y = x^3$ और $y = 0$ का अस्तित्व है) परंतु यदि (x_0, y_0) एक ऐसा बिंदु है जो x-अक्ष पर स्थित नहीं है तब अवकल समीकरण $y' = 3y^{2/3}$ का एक अद्वितीय हल होगा जो (x_0, y_0) से होकर जाता है। साथ ही, IVP के लिए आप यह भी जाँच कर सकते हैं कि $y = 0$ पर फलन $3y^{2/3}$ लिपशिट्ज प्रतिबंध तक का उल्लंघन करता है। परन्तु, व्यावहारिक रूप में, ऐसे भी फलन हैं, जैसे $f(x, y) = |y|$, जो $y = 0$ पर अवकलनीय नहीं है, परंतु लिपशिट्ज अचर $L = 1$ के लिए लिपशिट्ज संबंध (36) को संतुष्ट करता है।

E8) जाँच कीजिए कि $y=0$ पर फलन $f(x, y)=3y^{2/3}$ लिपशिट्ज प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करता।

अब हम इस प्रमेय को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 6: $y(0)=1$ के लिए समीकरण $\frac{dy}{dx}=y$ के $D:|x|<a, |y-1|<b$ में हल के अस्तित्व तथा अद्वितीयता की जाँच कीजिए, जहाँ a और b अचर हैं।

हल: यहाँ $f(x, y)=y$ और $f_y(x, y)=1$. साथ ही, $x_0=0$ और $y_0=1$.

D में फलन f संतत और परिबद्ध है। अतः हल का अस्तित्व है। साथ ही, D में f_y भी संतत और परिबद्ध है अतः, हल अद्वितीय है।

आप इस बात की जाँच कर सकते हैं कि $y=e^x$ दिए हुए समीकरण का एक हल है, जो आदि प्रतिबंध $y(0)=1$ को संतुष्ट करता है। अतः, यह एक अद्वितीय हल है।

परंतु, यदि आदि प्रतिबंध को $y(0)=0$ में बदल दिया जाए, तो प्राँत D का रूप

$$D:|x-0|<a, |y-0|<b$$

होगा तथा इस स्थिति में, (0,0) को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी प्राँत D में सभी x और y के लिए $y=0$ ही अद्वितीय हल होगा।

***

उदाहरण 7 : $y(0)=0$ तथा अचरों a और b के लिए $D:|x|<a, |y|<b$ में $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}$ के हल के अस्तित्व और अद्वितीयता की जाँच कीजिए।

हल: यहाँ $f(x, y)=\sqrt{|y|}$, $x_0=0$ और $y_0=0$. बिंदु $(0, 0)$ को अंतर्विष्ट करने वाले प्राँत D में, फलन f संतत और परिबद्ध है। अतः, हल का अस्तित्व है।

हल की अद्वितीयता की जाँच करने के लिए, लिपशिट्ज प्रतिबंध पर विचार कीजिए।

$$\frac{|f(x, y_2)-f(x, y_1)|}{|y_2-y_1|}=\frac{|\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1}|}{|y_2-y_1|}$$

रेखा $y=0$ को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी प्रदेश में लिपशिट्ज प्रतिबंध का उल्लंघन होता है। क्योंकि $y_1=0$ और $y_2>0$ के लिए, हमें प्राप्त है :

$$\frac{|f(x, y_2)-f(x, y_1)|}{|y_2-y_1|}=\frac{\sqrt{y_2}}{y_2}=\frac{1}{\sqrt{y_2}}, \left(\sqrt{y_2}>0\right)$$

और इसे हम y_2 का पर्याप्त छोटा मान लेकर जितना चाहें उतना बड़ा बना सकते हैं, जबकि प्रतिबंध (35) के अनुसार यह आवश्यक है कि समीकरण (35) के बाएँ पक्ष का भागफल एक स्थिर अचर L से बड़ा नहीं हो सकता।

इसलिए, हम हल की अद्वितीयता के बारे में निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। साथ ही, इसकी जाँच की जा सकती है कि दी गई समस्या के निम्न हल हैं :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & y(x) = 0 \;\forall\; x \in D \\ \text{ii)} & y(x) = \frac{1}{4}x^2 \;\;\forall\; x \in D \end{array}\right\} \qquad (37)$$

***

उदाहरण 8 : अचरों a और b के लिए, $D: |x-1| < a, |y-1| < b$ में $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(1) = 1$ के हल के अस्तित्व और अद्वितीयता की जाँच कीजिए, जहाँ

$$f(x, y) = \begin{cases} y(1-2x), \; x > 0 & \text{के लिए} \\ y(2x-1), \; x < 0 & \text{के लिए} \end{cases}$$

हल : यहाँ $x_0 = 1$ और $y_0 = 1$. आप यह देख सकते हैं कि यह फलन $x = 0$ पर परिभाषित नहीं है। यह $x = 0$ पर असंतत है। इस प्रकार, $x = 0$ पर हल का अस्तित्व नहीं है। अन्य सभी बिंदुओं पर, बहुपद फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} y(1-2x)\,, \; x > 0 & \text{के लिए} \\ y(2x-1)\,, \; x < 0 & \text{के लिए} \end{cases}$$

तथा $\frac{\partial f}{\partial y}$, D में संतत और परिबद्ध है तथा $y(1) = 1$. अतः, $x = 0$ को छोड़ कर, अन्य सभी x के लिए, हल का अस्तित्व है और यह अद्वितीय है। आप इस बात की जाँच कर सकते हैं कि $x = 0$ को छोड़ कर, अन्य सभी x के लिए.

$$y(x) = \begin{cases} e^{x-x^2}, \; x > 0 & \text{के लिए} \\ e^{x^2-x}, \; x < 0 & \text{के लिए} \end{cases} \qquad (38)$$

दी हुई समस्या का एक अद्वितीय हल है।

***

ध्यान दीजिए कि जिस विधि से समीकरण (37) या (38) में फलन $y(x)$ प्राप्त किया गया है वह दिए गए अवकल समीकरण का सरल समाकलन है। इसकी विस्तृत जानकारी आपको इकाई 7 में प्रथम कोटि के अवकल समीकरणों को हल करने के विधियों का अध्ययन करने के पश्चात् प्राप्त हो जाएगी।

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E9) निम्न समस्याओं के लिए, xy-तल का ऐसा प्रदेश निर्धारित कीजिए जिसमें दिए गए अवकल समीकरण का बिंदु (x_0, y_0) से होकर जाने वाला एक अद्वितीय हल हो :

i) $$x\frac{dy}{dx} = y$$

ii) $$(4 - y^2)\frac{dy}{dx} = x^2$$

iii) $$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = y^2$$

iv) $$\frac{dy}{dx} = x^3 \cos y$$

E10) अचरों a और b के लिए, $D: |x| < a, |y| < b$ में $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(0) = 0$ के हल के अस्तित्व और अद्वितीयता की जाँच कीजिए,

जहाँ $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 y}{(x^4 + y^2)}, & \text{जब } x \text{ और } y \text{ दोनों शून्य नहीं हैं} \\ 0, & \text{जब } x = y = 0 \end{cases}$$

भाग 6.3 में की गई चर्चा से, आपने यह अनुभव अवश्य कर लिया होगा कि एक प्रथम कोटि के अवकल समीकरण का व्यापक हल एक वक्र होता है, जिसके समीकरण में सामान्यतः एक स्वेच्छ अचर या प्राचल सम्मिलित होता है। उदाहरण के लिए, वक्र $y = y(x, c)$, जहाँ c एक प्राचल है। इस प्राचल c के विभिन्न मानों के लिए, हमें कुल (family) के विभिन्न वक्र प्राप्त होते हैं। इन वक्रों में से प्रत्येक वक्र दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशेष हल अथवा समाकल वक्र होता है तथा ये सभी मिल कर उसके व्यापक हल को बनाते हैं। इस प्रकार, प्रथम कोटि अवकल l ehdj.k dsl ekdy oØ , d izpy oØ-कुल (family of curves) बनाते हैं। दूसरी ओर, हम यह अपेक्षा करते हैं कि एक प्राचल वक्र-कुल $y = y(x, c)$ जहाँ c एक प्राचल है, से हमें एक प्रथम कोटि अवकल समीकरण प्राप्त होना चाहिए। व्यापक रूप में, हम यह प्रश्न उठा सकते हैं कि यदि n-प्राचलों का एक वक्र-कुल मान लीजिए, $y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ जहाँ $c_1, c_2, \ldots, c_n$, n प्राचल हैं दिया गया हो, तो क्या हम इसके संगत nवीं कोटि का एक अवकल समीकरण ज्ञात कर सकते हैं, जो दिए हुए कुल को निरूपित करे तथा संपूर्ण रूप से स्वेच्छ प्राचलों से मुक्त हो? अधिकांश स्थितियों में इसका उत्तर है 'हाँ'। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

अवकल समीकरणों की व्युत्पत्ति वक्र-कुल से होती है। अगले भाग में हम इस विषय पर चर्चा करेंगे।

6.4 वक्र-कुल तथा अवकल समीकरण

आइए सरल रेखाओं के एक कुल

$$y = mx + c \tag{39}$$

पर विचार करें, जो दो प्राचल वक्र कुल है, जहाँ m और c प्राचल है। समीकरण (39) से यह स्पष्ट है कि $x \in \mathbf{R}$ के लिए, y को x का एक फलन माना जा सकता है। x के सापेक्ष समीकरण (39) को अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$y' = m \tag{40}$$

प्राप्त समीकरण को x के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$y'' = 0. \tag{41}$$

समीकरण (40) और (41) क्रमशः एक और दो कोटि वाले अवकल समीकरण हैं। जिस प्रकार हम समीकरण (40) या (41) तक पहुँचे हैं; उससे स्पष्ट है कि हमने वास्तव में प्राचलों अथवा अचरों c और m को विलुप्त करने का प्रयास किया है। व्यापक रूप में, हम एक प्राचल वक्र-कुल को समीकरण

$$f(x, y, a) = 0 \tag{42}$$

द्वारा निरूपित करते हैं, जहाँ a एक अचर या प्राचल है। समीकरण (42) में, आइए y को x का फलन मानें और इसे x के सापेक्ष अवकलित करें। मान लीजिए ऐसा करने पर हमें

$$g(x, y, y', a) = 0 \tag{43}$$

प्राप्त होता है। यदि हम समीकरणों (42) और (43) के बीच से अचर a को विलुप्त करने में समर्थ हो जाते हैं, तो हमें x, y और y' को जोड़ने वाला एक संबंध प्राप्त होता है, जो मान लीजिए :

$$h(x, y, y') = 0 \tag{44}$$

है। समीकरण (44) कोटि एक वाला साधारण अवकल समीकरण है। विशेष रूप में, यदि समीकरण (42) का रूप

$$\psi(x, y) = a \tag{45}$$

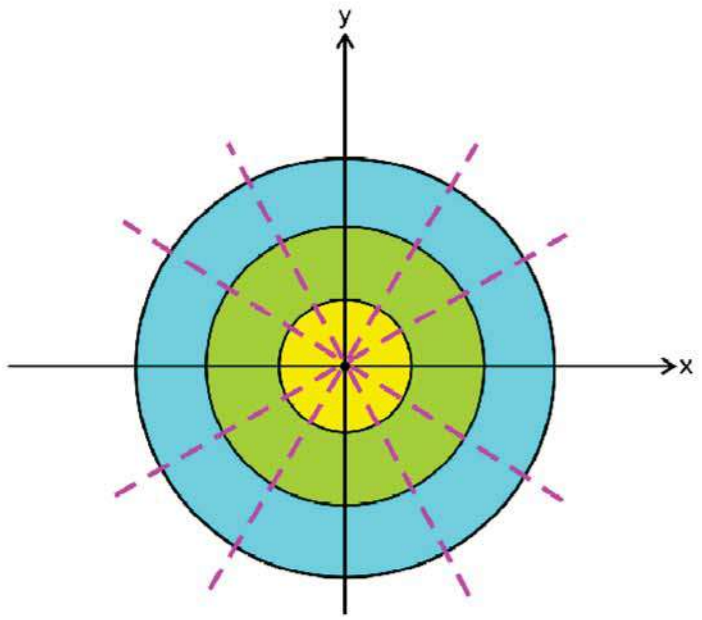
हो, तो समीकरण (45) से अचर a को विलुप्त करने से हमें अवकल समीकरण

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' = 0 \tag{46}$$

प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए,

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{47}$$

उन सभी **संकेन्द्रीय वृत्तों** के कुल का समीकरण है जिनके केन्द्र मूलबिंदु हैं (देखिए चित्र 3)।



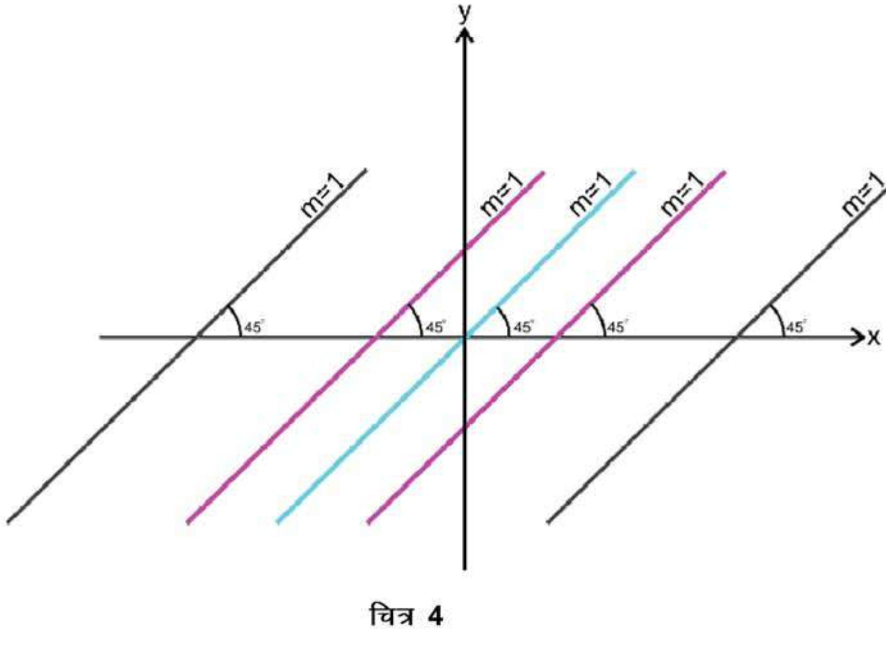
चित्र 3

a के विभिन्न मानों के लिए, हमें कुल के विभिन्न वृत्त प्राप्त होते हैं। समीकरण (47) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{48}$$

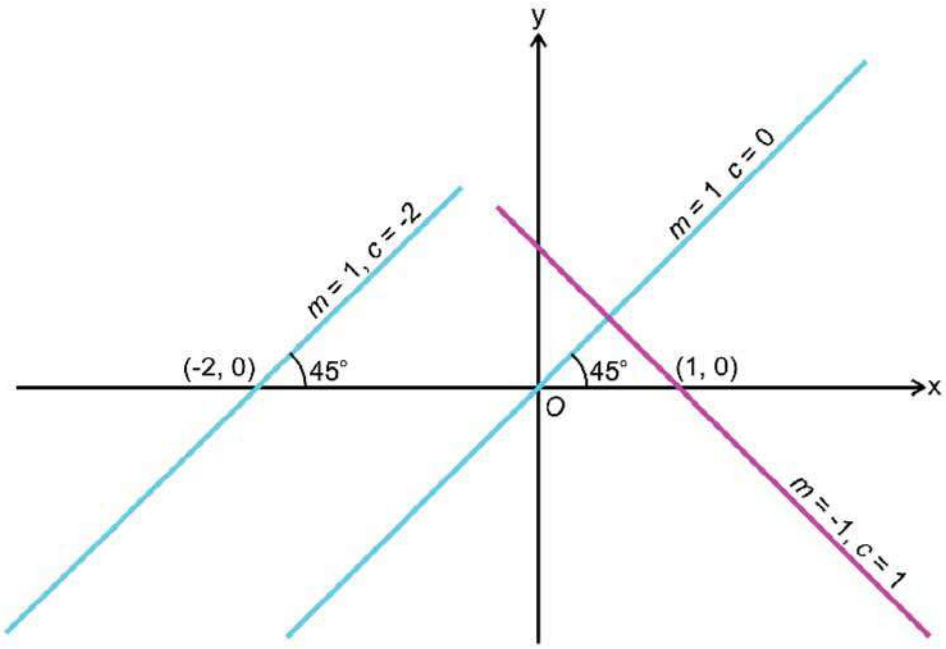
जो दिए हुए वृत्त कुल का अवकल समीकरण है।

समीकरण $y = mx + c$ पर चर्चा जारी रखते हुए, यदि हम केवल स्वेच्छ अचर c को ही विलुप्त करना चाहें तो हमें $y' = m$ प्राप्त होगा, जो अभिष्ट अवकल समीकरण को निरूपित करता है। ज्यामितीय रूप से, एक निश्चित m के लिए, $y' = m$ (तल में) उन सरल रेखाओं के कुल को निरूपित करता है जिनकी प्रवणता m है (देखिए चित्र 4)।



चित्र 4

दूसरी ओर, यदि हम यह मान लें कि समीकरण $y = mx + c$ में दोनों अचरों m और c को विलुप्त करना है, तो हमें अभिष्ट अवकल समीकरण $y'' = 0$ प्राप्त होता है। ज्यामितीय रूप से, यह तल में स्थित सभी सरल रेखाओं का कुल है। इनमें से कुछ रेखाएँ चित्र 5 में दिखायी गई हैं



चित्र 5

आइए अब हम निम्न उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 9: वक्र कुल $y = cx^3$, से उत्पन्न अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

हल : $y = cx^3$ को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = 3cx^2 \tag{49}$$

परंतु हमें दिए गए समीकरण से $c = y/x^3$ प्राप्त है। इस प्रकार, समीकरण (49) निम्न रूप का हो जाता है :

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2 = 3y/x$$

अतः, प्रथम कोटि रैखिक समीकरण

$$x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

ही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

***

उदाहरण 10: उन वृत्तों के कुल से उत्पन्न अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूलबिंदु से होकर जाते हैं तथा जिनके केन्द्र y-अक्ष पर स्थित हैं।

हल : आप वैश्लेषिक ज्यामिति के अपने ज्ञान से जानते हैं कि समीकरण

$$x^2 + y^2 = cy \tag{50}$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है, उन वृत्तों के कुल को निरूपित करता है जो मूल बिंद से होकर जाते हैं तथा जिनके केन्द्र y-अक्ष पर स्थित है। c के विभिन्न मानों के लिए, इस कुल के विभिन्न सदस्य प्राप्त होते हैं।

समीकरण (50) से प्राप्त कुल का अवकल समीकरण प्राप्त करने के लिए, हम इसे x के सापेक्ष अवकलित करते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = c\frac{dy}{dx}$$

ऊपर दिए गए समीकरण में, $c = \dfrac{x^2 + y^2}{y}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 2xy + 2y^2\frac{dy}{dx} = (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

***

उदाहरण 11 : परवलय कुल $y = (x+c)^2$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है, का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय के दिए हुए समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

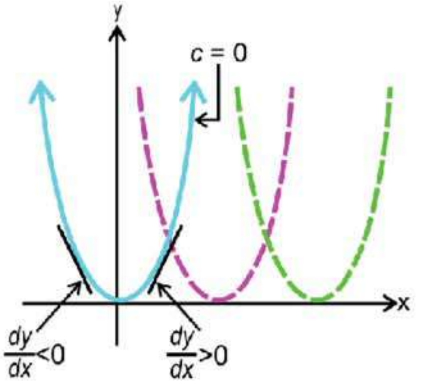
$$\frac{dy}{dx} = 2(x+c) \tag{51}$$

दिए हुए समीकरण से, हमें $x + c = \pm y^{1/2}$ प्राप्त होता है। इसे समीकरण (51) में स्थापित करने पर, इस कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण है :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\, 2y^{1/2} \text{ अथवा, } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$$

यहाँ आप **देख सकते हैं** कि $\dfrac{dy}{dx} = 2y^{1/2}$ से पूर्ण कुल की व्याख्या नहीं होती है। इससे किसी विशेष परवलय के केवल दाएँ पक्ष की शाखा $(x > -c)$ की प्रवणता प्राप्त होती है (देखिए चित्र 6)। चित्र 6 वह स्थिति स्पष्ट करता है जब $c = 0$.

इस स्थिति में हम कह सकते हैं कि $y = x^2$ अंतराल $[0, \infty[$ में $\frac{dy}{dx} = 2y^{1/2}$ का हल है।



चित्र 6

ऊपर दी गयी विधि के एक रोचक अनुप्रयोग के रूप में, हम एक दिए हुए वक्र-कुल की लंबकोणीय संछेदी (orthogonal trajectories) ज्ञात करने की समस्या पर विचार करते हैं।

यहाँ आप **देख सकते हैं** कि समीकरण (47) से निरूपित संकेन्द्रीय वृत्तों के कुल तथा मूलबिंदु से होकर जाने वाली सरल रेखाओं $y = mx$ के कुल (चित्र 3 में बिंदुकित रेखाएँ) में एक गुण है कि प्रत्येक कुल का प्रत्येक वक्र अन्य कुल के प्रत्येक वक्र पर लंब है। तब, प्रत्येक कुल अन्य कुल की **लंबकोणीय संछेदी** का कुल कहलाता है। औपचारिक रूप से हम निम्न परिभाषा देते हैं :

परिभाषा : जब एक वक्र-कुल $f(x, y, c_1) = 0$ के सभी वक्र अन्य वक्र-कुल $g(x, y, c_2) = 0$ के सभी वक्रों को लंबकोणीय रूप से प्रतिच्छेद करते हों, तो ये कुल परस्पर **लंबकोणीय संछेदी** कहलाते हैं।

दूसरे शब्दों में, एक लंबकोणीय संछेदी कोई भी ऐसा वक्र है जो अन्य कुल के प्रत्येक वक्र को समकोण पर प्रतिच्छेद करता है। लंबकोणीय संछेदी अनुप्रयोगिक गणित तथा समतलीय वक्रों की ज्यामिति के लिए रूचिपूर्ण होती हैं। उदाहरण के लिए कोई विद्युत धारा संचालक पदार्थ (conducting material) की एक समतल शीट में प्रवाह कर रही है, तो समान विभव (potential) वाली रेखाएँ विद्युत प्रवाह की रेखाओं की लंबकोणीय संछेदी होती हैं।

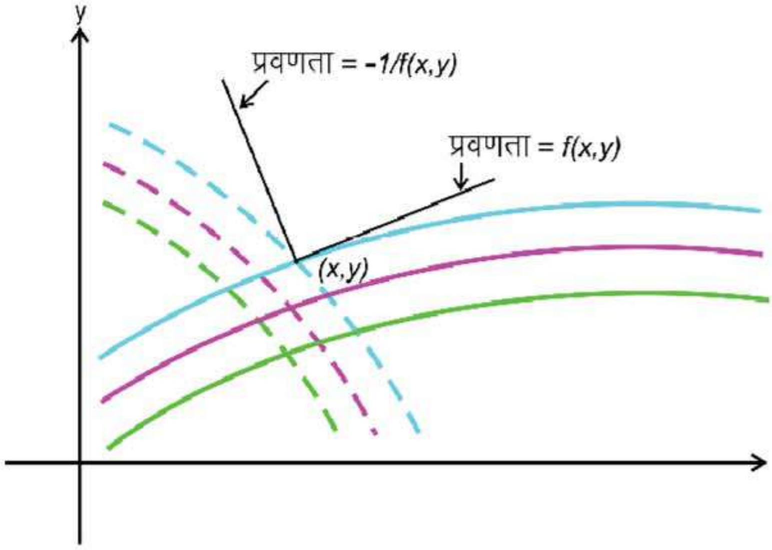
मूल बिंदु पर स्थित केन्द्र वाले संकेन्द्रीय वृत्तों की स्थिति में, यह ज्यामितीय रूप से स्पष्ट है कि मूलबिंदु से होकर जाने वाली सरल रेखाएँ ही लंबकोणीय संछेदी होती हैं।

परंतु ऐसी स्थिति सदैव होना आवश्यक नहीं। इसलिए अधिक जटिल स्थितियों के लिए, हमें लंबकोणीय संछेदी ज्ञात करने की एक वैश्लेषिक विधि विकसित करने की आवश्यकता है।

वैश्लेषिक ज्यामिति के अपने अध्ययन से आप स्मरण कर सकते हैं कि दो रेखाएँ L_1 और L_2 जो निर्देशांक अक्षों के समांतर नहीं है, परस्पर लंब होती है तभी और केवल तभी जब उनकी क्रमशः प्रवणताओं, मान लीजिए m_1 और m_2 का गुणनफल -1 हो अर्थात्, $m_1 m_2 = -1$ हो। इसी प्रकार, मान लीजिए

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{52}$$

चित्र 7 में दिए गए वक्र-कुल का अवकल समीकरण है। इन वक्रों में से प्रत्येक वक्र की किसी भी बिंदु (x, y) पर प्रवणता $f(x, y)$ है। तब, इसी बिंदु (x, y) से होकर जाने वाली लंबकोणीय संछेदी, जिसे बिंदुकित रेखाओं से दर्शाया गया है, की प्रवणता $\frac{-1}{f(x, y)}$ होगी, क्योंकि यह वक्र पर लंबकोणीय है।



चित्र 7

इस प्रकार, लंबकोणीय संछेदी पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = -1/f(x, y)$$

अर्थात्, $$\frac{1}{dy/dx} = -f(x, y) \tag{53}$$

हम कह सकते हैं कि एक दिए हुए वक्र-कुल की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात करने के लिए, सबसे पहले उस कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए और तब लंबकोणीय संछेदी का अवकल समीकरण प्राप्त करने के लिए, प्राप्त अवकल समीकरण में $\frac{dy}{dx}$ को $-\frac{1}{dy/dx}$ से प्रतिस्थापित कर दीजिए। उदाहरण के लिए संकेन्द्रीय वृत्त कुल के अवकल समीकरण (48) में, यदि हम $\frac{dy}{dx}$ को $-\frac{1}{dy/dx}$ से प्रतिस्थापित करें, तो हमें लंबकोणीय संछेदी के अवकल समीकरण के रूप में निम्न प्राप्त होता है :

$$x + y\left(-\frac{1}{dy/dx}\right) = 0$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad (54)$$

समीकरण (54) को समाकलित करने पर, हमें

$y = cx$ जहाँ c एक अचर है (55)

प्राप्त होता हे, जो संकेन्द्रीय वृत्त कुल की लंबकोणीय संछेदी का समीकरण है। आप **ध्यान दीजिए** कि समीकरण (55) मूलबिंदु से होकर जाने वाली सरल रेखाओं के कुल को निरूपित करता है।

इस प्रक्रिया को स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 12: आयताकार अतिपरवलय कुल $y = \frac{c}{x}$ की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए जहाँ c एक अचर है।

हल : $y = \frac{c}{x}$ को x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c}{x^2} \qquad (56)$$

समीकरण (56) में, c को $c = xy$ रखने पर हमें दिए हुए कुल का अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$ के रूप में प्राप्त होता है।

तब, लंबकोणीय कुल का अवकल समीकरण निम्न द्वारा प्राप्त होगा :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(-y/x)} = \frac{x}{y} \qquad (57)$$

समीकरण (57) का समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$y^2 - x^2 = c_1$, जहाँ c_1 एक अचर है।

जो अति परवलय कुल का समीकरण है और यही आयताकार अतिपरवलय कुल की लंबकोणीय संछेदी है।

***

उदाहरण 13 : दिखाइए कि परवलय कुल $y^2 = 2cx + c^2$ जहाँ c एक अचर है, स्वयं लंबकोणीय है।

> एक वक्र-कुल स्वयं लंबकोणीय होता है यदि लंबकोणीय संछेदी का सदस्य वक्र कुल का भी सदस्य हो।

हल : परवलय कुल को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2y\frac{dy}{dx} = 2c \Rightarrow c = yy'$$

दिए हुए कुल का अवकल समीकरण है :

$$y^2 = 2xy\,y' + y^2 y'^2 \tag{58}$$

समीकरण (58) में, y' को $\frac{-1}{y'}$ से प्रतिस्थापित करने पर, लंबकोणीय संछेदी कुल का अवकल समीकरण निम्न प्राप्त होता है :

$$y^2 = \frac{-2xy}{y'} + \frac{y^2}{y'^2}$$

या, $$y'^2 y^2 + 2xyy' = y^2 \tag{59}$$

समीकरण (59) वही है जो समीकरण (58) है और इसलिए दिया हुआ परवलय कुल स्वयं लंबकोणीय है।

***

अब, आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E11) y को x का एक फलन मानते हुए, निम्न समस्याओं में निर्दिष्ट स्वेच्छ अचर (या अचरों) को विलुप्त करके, अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए :

i) $xy = c$ (स्वेच्छ अचर c है)

ii) $y = \cos(ax)$ (स्वेच्छ अचर a है)

iii) $xy = ae^x + be^{-x} + x^2$ (स्वेच्छ अचर a और b हैं)

E12) निम्न वक्र-कुलों की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए, c एक स्वेच्छ अचर है :

i) $y = \frac{cx}{1+x}$

ii) $y = cx^2$

iii) $y = ce^x$.

E13) दिखाइए कि वृत्त कुल $x^2 + y^2 = px$ वृत्त कुल $x^2 + y^2 = qy$ को समकोण पर प्रतिच्छेद करता है।

ऊपर की गयी चर्चा में आपने देखा कि प्रथम कोटि अवकल समीकरण का व्यापक हल एक एक-प्राचल वक्र-कुल होता है। दूसरी ओर, आपने यह भी देखा कि किस प्रकार एक दिए हुए एक-प्राचल (या, n-प्राचल) वक्र-कुल के संगत प्रथम कोटि (या, nवीं कोटि) अवकल समीकरण प्राप्त होता है। इस इकाई की प्रस्तावना में, हमने बताया था कि भौतिक और इंजिनियरिंग रूचियों की ऐसी अनेक समस्याएँ हैं, जिनसे अवकल समीकरण उत्पन्न होते हैं। वैकल्पिक रूप में, हम कह सकते हैं कि वास्तविक संसार की अनेक समस्याओं का निरूपण अवकल समीकरणों के रूप में

होता है। अगले भाग में, हम ऐसी ही कुछ समस्याओं को लेंगे, जिन्हें प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के पदों में सूत्रित किया जा सकता है।

6.5 भौतिक स्थितियों से उत्पन्न अवकल समीकरण

इस भाग में हम दिखाएंगे कि अवकल समीकरण न केवल ज्यामितीय वक्र कुल पर विचार करने से ही उत्पन्न होते हैं; बल्कि भौतिक स्थितियों को गणितीय रूप में प्रस्तुत करने से भी उत्पन्न होते हैं।

आदि-मान समस्या

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= k\,y \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

जहाँ, k एक आनुपातिकता अचर (constant of proportionality) है, **वृद्धि** (growth) या **क्षय** (decay) से संबंधित अनेक भौतिक सिद्धांतों में प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए जैविकी में प्रायः यह देखा जाता है कि कुछ बैक्टीरिया में वृद्धि की दर, उस समय पर उपस्थित वैक्टीरिया की संख्या के समानुपाती होती है। भौतिकी में, समीकरण (60) जैसी आदि मान समस्या से रेडियो ऐक्टिवता (activity) के कारण विघटित (disintegrating) अथवा क्षयित हो रहे पदार्थ की बची हुई मात्रा का सन्निकट मान ज्ञात करने का एक निदर्श (model) प्राप्त होता है। समीकरण (60) रसायन में कुछ अभिक्रियाओं के दौरान बचे हुए पदार्थ की मात्रा का भी विवरण देता है तथा ठंडे हो रहे एक पिंड का तापमान भी निर्धारित कर सकता है।

आइए अब हम इन समस्याओं में से कुछ के सूत्रीकरण पर विचार करें।

I: जनसंख्या निदर्श

मान लीजिए $N(t)$ समय t पर किसी प्रजाति या पदार्थ की संख्या या मात्रा d ksO Dr djrk gS& rc] $N(t)$ की वृद्धि दर किसी भी समय t पर उसके अवकलज $\frac{d}{dt}N(t)$ से प्राप्त हो जाती है। इस प्रकार, यदि $N(t)$ में एक अचर दर से वृद्धि हो रही है, तो $\frac{d}{dt}N(t) = \beta$ एक अचर है। कभी-कभी सापेक्ष वृद्धि दर (relative rate of growth) पर विचार करना अधिक उपयुक्त रहता है, जिसे निम्न रूप में परिभाषित करते हैं :

$$\textbf{N(t) की सापेक्ष वृद्धि दर} = \frac{N(t) \text{ की वास्तविक वृद्धि दर}}{N(t) \text{ का आमाप}} = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{dN(t)/dt}{N(t)}$$

सापेक्ष वृद्धि दर, $N(t)$ में प्रतिशत वृद्धि या $N(t)$ में प्रतिशत कमी को प्रकट करती है। उदाहरण के लिए यदि 500 की जनसंख्या वाली किसी प्रजाति में 100 व्यक्तियों की वृद्धि होती है, तो संभवतः इस वृद्धि का एक सार्थक प्रभाव होगा, क्योंकि वृद्धि 20

प्रतिशत है। इसके विपरीत, यदि जनसंख्या 1,000,000 हो, तो 100 की वृद्धि पर कोई ध्यान नहीं जाता, क्योंकि वृद्धि 0.01 प्रतिशत है। यदि हम यह मान लें कि समय समय t पर N की परिवर्तन दर समय t पर उपस्थित जनसंख्या $N(t)$ के समानुपाती है, तो

$$\frac{d}{dt} N(t) \propto N(t)$$

जिसे इस रूप में लिखा जाता है :

$$\frac{d}{dt} N(t) = k\, N(t) \tag{61}$$

जहाँ k आनुपातिकता अचर है।

यदि t के साथ N में वृद्धि होती है, तो समीकरण (61) में $k > 0$ होता है।

यदि t के साथ N में कमी होती है, तो समीकरण (61) में $k \leq 0$ होता है।

सामान्यतः, हमें किसी आदि समय t_0 पर जनसंख्या मालूम होती है। मान लीजिए यह संख्या N_0 है। इसलिए समीकरण (61) के साथ हमें निम्न आदि प्रतिबंध भी प्राप्त है :

$$N(t_0) = N_0\,. \tag{62}$$

इस प्रकार, समीकरण (61) को प्रतिबंध (62) के साथ हल करके समय t पर जनसंख्या $N(t)$ ज्ञात की जा सकती है।

कुछ संशोधन के साथ, इस निदर्श को छूत की बीमारियों के फैलने का सूत्रण करने में प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिये किसी वायरस (virus) के फैलने में, यह मान लेना उचित ही है कि जिस दर $\frac{dx}{dt}$ से बीमारी (या रोग) फैल रही है, वह न केवल **संक्रमित** (infected) व्यक्तियों की संख्या $x(t)$ जो बीमारी से प्रभावित हो चुके हैं, के समानुपाती है; अपितु **सुग्राह्य व्यक्तियों** (susceptibles) जिन पर अभी बीमारी (रोग) का प्रभाव नहीं हुआ है, की संख्या $y(t)$ के भी समानुपाती होती है। अब, संक्रामकता के कारण, सुग्राही व्यक्तियों की संख्या में कमी होती है तथा संक्रांत व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि होती है।

संक्रमित वे व्यक्ति हैं जिनमें बीमारी विकसित हो चुकी है और उनसे यह अन्य व्यक्तियों में संचारित हो सकती है।

सुग्राह्य वे व्यक्ति हैं जिन पर बीमारी का अभी तक प्रभाव नहीं हुआ है, परंतु इनमें यह बीमारी किसी भी समय हो सकती है।

किसी भी समय पर बीमारी से पीड़ित नए रोगियों (नए संक्रामक व्यक्ति) की औसत संख्या संक्रामकों और सुग्राह्यों के संपर्क की दर पर निर्भर करेगी तथा इसे उस समय उपस्थित, (i) संक्रामकों की संख्या $x(t)$ और (ii) सुग्राह्यों की संख्या $y(t)$ के समानुपाती माना जा सकता है। अतः, किसी भी समय पर, हम नए संक्रांतों को $x(t)\;y(t)$ के समानुपात मान सकते हैं। अर्थात्,

$$\frac{dx}{dt} \propto x\,y$$

या, $$\frac{dx}{dt} = k\,x\,y \quad (63)$$

जहाँ k आनुपातिकता अचर है, जिसे **संपर्क दर (contract rate)** कहा जाता है। यदि हम यह मान लें कि n सुग्राहियों की जनसंख्या में, समय $t = 0$ पर एक संक्रात व्यक्ति शामिल है, तो $x(0) = 1$ तथा x और y निम्न संबंध से जुड़े होंगे :

$$x + y = n + 1 \quad (64)$$

समीकरण (63) में समीकरण (64) का उपयोग करते हुए, हम निम्न लिख सकते हैं :

$$\frac{dx}{dt} = k\,x\,(n + 1 - x) \quad (65)$$

तब, किसी भी समय t पर $x(t)$ ज्ञात करने के लिए, आदि प्रतिबंध $x(0) = 1$ के साथ समीकरण (65) को हल किया जा सकता है।

टिप्पणी : आपने ध्यान दिया होगा कि समीकरण (65) **अरैखिक** है। यह व्यापक समीकरण

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),\ a \text{ और } b \text{ अचर हैं}$$

की एक विशेष स्थिति है जिसे **लौजिस्टिक समीकरण** (logistic equation) कहा जाता है। यह समीकरण पर्यावरण संबंधी अध्ययनों में बहुत महत्वपूर्ण है। हम इस समीकरण पर विस्तृत रूप से चर्चा गणितीय निदर्शन के एक अन्य पाठ्यक्रम में करेंगे।

II: न्यूटन का शीतलन नियम

यहाँ हम एक अचर तापमान मान लीजिए तापमान T_0 वाले स्थान के आस-पास रखे एक गर्म पिंड के तापमान में हो रहे परिवर्तन पर विचार करेंगे। कुछ प्रतिबंधों के अंतर्गत, न्यूटन के शीतलन नियम का उपयोग करके, पिंड के तापमान का एक अच्छा सन्निकटन प्राप्त किया जा सकता है। मान लीजिए कि उस पिंड का किसी समय t पर तापमान T है। यदि $T \geq T_0$ तो हम जानते हैं कि यह पिंड अपने आस-पास (वातावरण में) ऊष्मा विकिरणित (radiates) करता है, जिसके कारण उस पिंड के तापमान में कमी होती जाती है। न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार जिस दर से शीतलन पिंड के तापमान $T(t)$ में परिवर्तन होता है, वह पिंड के तापमान और आस-पास के माध्यम के अचर तापमान T_0 के अंतर के समानुपाती होता है।

अर्थात्, $$\frac{d}{dt}T(t) \propto (T(t) - T_0)$$

या $$\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - T_0) \quad (66)$$

जहाँ k आनुपातिकता अचर है।

अचर $k < 0$ है, क्योंकि पिंड का तापमान कम हो रहा है (हमने कल्पना की है कि $T(t) \geq T_0$)। हम देखते हैं कि समीकरण (66) कोटि एक वाला अवकल l ehd j.k gSr Fkk; g fdl h l e; t पर वस्तु के तापमान $T(t)$ का वर्णन करता है।

III: रेडियो ऐक्टिव क्षय

अनेक पदार्थ रेडियो ऐक्टिव होते हैं। इसका अर्थ है कि ऐसे पदार्थों के परमाणु टूट कर अन्य पदार्थों के परमाणुओं में बदल जाते हैं। भौतिकी के वैज्ञानिकों ने यह देखा है कि समय t पर रेडियो ऐक्टिव पदार्थ के क्षय की दर उसकी मात्रा $y(t)$ के समानुपाती होती है। दूसरे शब्दों में,

$$\frac{d}{dt} y(t) = k\, y\,(t) \tag{67}$$

जहाँ $k < 0$ एक अचर है। यदि किसी आदि (प्रारंभिक) समय मान लीजिए $t = 0$, पर पदार्थ का द्रव्यमान A है, तो $y(t)$ आदि प्रतिबंध $y(0) = A$ को भी संतुष्ट करता है। इस प्रकार, रेडिया ऐक्टिव क्षय की भौतिक समस्या को निम्न IVP द्वारा निदर्शित करते हैं :

$$\frac{d}{dt} y(t) = k\, y\,(t),\; y(0) = A \tag{68}$$

जहाँ k एक अचर है तथा $k < 0$.

टिप्पणी : ऊपए दिए गए I, II और III ऐसी स्थितियाँ प्रकट करते हैं जिनमें अवकल समीकरण प्राकृतिक रूप से ही प्राप्त हो जाता है। इकाई 8 में, हम इन समीकरणों को हल करने की विधियाँ देंगे तथा कुछ और भौतिक स्थितियों पर चर्चा करेंगे।

इससे पहले कि हम आपसे कुछ भौतिक स्थितियों का सूत्रण करने में अपनी क्षमता की जाँच करने को कहें, हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 14: कोई दवाई किसी रोगी की रक्त धारा में r ग्राम प्रति सेकेण्ड की अचर दर से डाली जा रही है। साथ ही, यह दवाई एक दर से निकाली भी जा रही है, जो किसी समय t पर उपस्थित दवाई की मात्रा $x(t)$ के समानुपाती है। उस रोगी की रक्त धारा में किसी भी समय t पर दवाई की मात्रा $x(t)$ बताने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : रोगी के रक्त में डाली जा रही दवाई की दर $= r$

रोगी के रक्त से निकाली जा रही दवाई की दर $\propto x(t)$,

अर्थात्, यह दर $k\,x(t)$ है जहाँ k आनुपातिकता अचर है।

$\therefore$ रोगी के रक्त में दवाई की परिवर्तन दर

$$\frac{dx}{dt} = r - k\,x,\;\; k > 0 \tag{69}$$

समीकरण (69) के दाएँ पक्ष के दूसरे पद में लगा ऋण चिन्ह् रोगी की रक्त धारा में दवाई की मात्रा में कमी को दर्शाता है।

समीकरण (69) किसी समय t पर रोगी के रक्त में दवाई की मात्रा $x(t)$ का विवरण देता है। यदि यह कल्पना की जाए कि समय $t = 0$ पर रोगी के रक्त में कोई दवाई उपस्थित नहीं थी, तो आदि प्रतिबंध $x(0) = 0$ का प्रयोग समीकरण (69) के हल में करके किसी भी समय t पर $x(t)$ प्राप्त किया जा सकता है।

***

अब आप निम्न प्रश्न हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E14) निम्न समस्याओं में, दी हुई भौतिक स्थितियों की व्याख्या करने वाला अवकल समीकरण सूत्रित कीजिए :

i) एक संवर्धन (culture) में बैक्टीरिया की आदि संख्या p_0 है। बैक्टीरिया की संख्या में हो रही वृद्धि उपस्थित बैक्टीरिया की संख्या के समानुपाती है। किसी भी समय t पर उपस्थित बैक्टीरिया की संख्या p ज्ञात कीजिए।

ii) एक रेडियो ऐक्टिव पदार्थ, जिसका प्रारंभ में भार x_0 ग्राम था, उपस्थित मात्रा की समानुपातिक दर से क्षयित हो रहा है। यदि 2 वर्ष बाद प्रारंभिक मात्रा की केवल आधी मात्रा शेष रह जाती है, तो t वर्ष के बाद शेष रहने वाले पदार्थ की मात्रा x ज्ञात कीजिए।

हमने इस इकाई में जो कुछ भी अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, हम इसे यहीं समाप्त करते हैं।

6.6 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. एक (या अधिक) आश्रित चरों तथा एक या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष उनके अवकलजों को सम्मिलित करने वाला समीकरण **अवकल समीकरण** कहलाता है।

2. अवकल समीकरण जिसमें केवल साधारण अवकलज सम्मिलित हों **साधारण अवकल समीकरण** (ODE) कहलाता है।

3. अवकल समीकरण जिसमें आंशिक अवकलज सम्मिलित हों **आंशिक अवकल समीकरण** (PDE) कहलाता है।

4. अवकल समीकरण की **कोटि** उस समीकरण में प्रस्तुत उच्चतम कोटि अवकलज की कोटि होती है।

5. अवकल समीकरण का **घात** समीकरण के उच्चतम कोटि अवकलज का उच्चतम घातांक होता है, जबकि समीकरण को अवकलज की करणियों और भिन्नों से मुक्त रूप में व्यक्त कर दिया गया हो।

6. अवकल समीकरण में, जब आश्रित चर और उसके अवकलज केवल प्रथम घात में प्रस्तुत हो तथा उच्चतर घातों या गुणनफलों में नहीं, तो समीकरण **रैखिक** कहलाता है।

7. यदि साधारण अवकल समीकरण रैखिक नहीं है, तो उसे **अरैखिक** कहा जाता है।

8. अंतराल I पर परिभाषित एक वास्तविक या सम्मिश्र मान फलन ϕ समीकरण

$$g(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

का **हल** कहलाता है, यदि ϕ, n बार अवकलनीय हो तथा I में $\phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)$ ऊपर दिए गए समीकरण को सभी x के लिए संतुष्ट करते हैं।

9. n वीं कोटि अवकल समीकरण का हल, जिसमें n स्वेच्छ अचर सम्मिलित हों, उसक **व्यापक हल** कहलाता है।

10. व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशेष मान देकर प्राप्त किया गया कोई भी हल अवकल समीकरण का **विशेष हल** कहलाता है।

11. अवकल समीकरण का वह हल, जिसे व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को निश्चित मान देकर प्राप्त नहीं किया जा सकता, समीकरण का **विचित्र हल** कहलाता है।

12. हल के अस्तित्व अंतराल में स्वतंत्र चर के किसी एक मान पर आश्रित चर और उसके अवकलज के मान पर लगाए गए प्रतिबंध **आदि प्रतिबंध** कहलाते हैं।

13. आदि प्रतिबंधों के साथ अवकल समीकरण को हल करने की समस्या **आदि मान समस्या** कहलाती है।

14. $|x - x_0| < a$ और $|y - y_0| < b$ द्वारा परिभाषित एक क्षेत्र D में प्रथम कोटि समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, जहाँ $y(x_0) = y_0$, के **हल के अस्तित्व** के लिए पर्याप्त प्रतिबंध निम्नलिखित हैं :

    i) f, D में संतत है तथा

    ii) f, D में परिबद्ध है।

    और यदि हल का अस्तित्व है, तो यह अद्वितीय होता है, यदि i) और ii) के साथ हमें निम्न भी प्राप्त हो :

    iii) $\frac{\partial f}{\partial y}$, D में संतत है।

    iv) $\frac{\partial f}{\partial y}$, D में परिबद्ध है (अथवा लिपशिट्ज़ प्रतिबंध संतुष्ट होता है।)

15. प्रथम कोटि (n वीं कोटि) अवकल समीकरण का व्यापक हल **एक-प्राचल** (n-प्राचल) वक्र-कुल निरूपित करता है।

16. जनसंख्या परिवर्तन, पिंड के तापमान में परिवर्तन, रेडियो ऐक्टिव क्षय, इत्यादि से उत्पन्न अनेक भौतिक स्थितियों को प्रथम कोटि अवकल समीकरण से निरूपित किया जा सकता है।

6.7 हल / उत्तर

E1) i) साधारण अवकल समीकरण

ii) साधारण अवकल समीकरण

iii) यह एक अवकल समीकरण नहीं है, क्योंकि दाएँ पक्ष में अज्ञात y समाकल के अंदर प्रकट हो रहा है, जिसका मान अंतराल 0 से x में निकाला जाना है।

iv) उपरोक्त iii) की तरह ही, यह एक अवकल समीकरण नहीं है।

v) आंशिक अवकल समीकरण

E2) i) कोटि 2, घात 2

ii) कोटि 2, घात 1

iii) क्योंकि sine फलन के प्रसार से एक अपरिमित श्रेणी प्राप्त है, इसलिए कोटि 2 है और घात परिभाषित नहीं है।

iv) कोटि 1, घात 1

v) घातांक का परिमेयीकरण करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$\therefore$ कोटि 2, घात 2.

vi) कोटि 4, घात 1

vii) कोटि 1, घात 2

E3) i) रैखिक

ii) $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2$ की उपस्थिति के कारण अरैखिक।

iii) अरैखिक, क्योंकि दाएँ पक्ष में y^2 है।

iv) रैखिक

v) अरैखिक, क्योंकि घातांक के परिमेयीकरण से हमें प्राप्त होता है :

$\left(x^2+y^2\right)^3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \mu^2x^2$, तथा यहाँ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ के साथ y पदों के गुणनफल हैं।

E4) यहाँ $2\cos y = -x^2$ है।

x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है : $\sin y \dfrac{dy}{dx} = x$

अतः, $y = \cos^{-1}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$, $\sin y \dfrac{dy}{dx} = x$ का एक हल है।

क्योंकि $\cos\, y = -\dfrac{x^2}{2}$ है, इसलिए y का अस्तित्व तभी होगा जब $|x| \le \sqrt{2}$ हो। अर्थात् अस्तित्व का अंतराल $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ है।

E5) x के सापेक्ष $xy = \ln y + c$ को अवकलित करने पर हमें $y + x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$ प्राप्त होता है। अतः परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E6) c_1 और c_2 के सभी अचर मानों के लिए $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

E7) x के सापेक्ष $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$ को अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(2y-2)\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

द्विघात समीकरण $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$ को y के लिए हल करने पर, हमें दो स्पष्ट हल निम्न रूप में प्राप्त होते हैं :

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + c + 1}$$

E8) लिपशिट्ज प्रतिबंध

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{|3y_2^{2/3} - 3y_1^{2/3}|}{|y_2 - y_1|}$$

लीजिए। रेखा $y = 0$ को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी प्रॉंत के लिए लिपशिट्ज प्रतिबंध का उल्लंघन होता है। क्योंकि $y_1 = 0$ और $y_2 > 0$ के लिए, हमें प्राप्त है :

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{3}{y_2^{1/2}} \quad (y_2 > 0)$$

जिसे y_2 को पर्याप्त रूप से छोटा लेकर, हम जितना चाहें बड़ा बना सकते हैं।

E9) i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = f(x, y)$

$x \neq 0$ के लिए, $f(x, y)$ संतत और परिबद्ध है।

साथ ही $x = 0$ के लिए, $f_y = \frac{1}{x}$ परिबद्ध नहीं है।

$\therefore$ प्रत्येक अर्ध तल $x > 0$ या $x < 0$ में अद्वितीय हल का अस्तित्व है।

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{4-y^2} = \frac{x^2}{(2-y)\,(2+y)} = f(x, y)$

या तो $y < 2$, $y < -2$ या $-2 < y < 2$ के लिए, f संतत है।

$$f_y = \frac{2x^2 y}{(4-y^2)^2} = \frac{2x^2 y}{(2-y)^2 (2+y)^2}$$

$\therefore$ या तो $y > 2$, $y < -2$ या $-2 < y < 2$ के लिए अद्वितीय हल का अस्तित्व है।

iii) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y}$, $f_y = \frac{2yx^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$(0, 0)$ को अंतर्विष्ट नहीं करने वाले किसी भी क्षेत्र में अद्वितीय हल है।

iv) $f(x, y) = x^3 \cos y$ और $f_y = -x^2 \sin y$

$\therefore$ xy-क्षेत्र में प्रत्येक स्थान पर अद्वितीय हल है।

E10) यहाँ बिंदु $(0,0)$ को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी आयत में,

$f(x, y) == \frac{4x^3 y}{x^4 + y^2}$ परिबद्ध है और संतत है। अतः हल का अस्तित्व है।

हल की अद्वितीयता की जाँच के लिए, आइए लिपशिट्ज प्रतिबंध पर विचार करें। यहाँ,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{4x^3 y_1}{x^4 + y_1^2} - \frac{4x^3 y_2}{x^4 + y_2^2} \right|$$

$$= \left| \frac{4x^3 y_1 (x^4 + y_2^2) - 4x^3 y_2 (x^4 + y_1^2)}{(x^4 + y_1^2)\,(x^4 + y_2^2)} \right|$$

$$= \left| \frac{4x^3 (y_1 - y_2)\,(x^4 - y_1 y_2)}{(x^4 + y_1^2)\,(x^4 + y_2^2)} \right|$$

$$= \left| \frac{4\left(1-\frac{y_1y_2}{x^4}\right)(y_1-y_2)\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{y_1^2}{x^4}\right)\left(1+\frac{y_2^2}{x^4}\right)} \right|$$

$$= \frac{4\left|1-\frac{y_1y_2}{x^4}\right|\frac{|y_1-y_2|}{|x|}}{\left|\left(1+\frac{y_1^2}{x^4}\right)\left(1+\frac{y_2^2}{x^4}\right)\right|}$$

और इसलिए मूलबिंदु को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी आयत में लिपशिट्ज प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता है, अतः हम हल की अद्वितीयता के बारे में कोई निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। साथ ही इसका सत्यापन किया जा सकता है कि समीकरण $y = c^2 - \sqrt{x^4 + c^4}$, c एक स्वेच्छिक अचर है, से संतुष्ट हो जाता है, अर्थात् आदि प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाले अपरिमित हल हैं।

E11) i) यहाँ $xy = c$ है।

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

ii) $y = \cos(ax)$ (44)

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$y' = -a\sin ax$ (45)

समीकरण (44) से $ax = \cos^{-1} y$ और $\sin(ax) = \sqrt{1-y^2}$

इन्हें समीकरण (45) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$y' = -\frac{1}{x}(\cos^{-1} y)\sqrt{1-y^2}$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

iii) $xy = ae^x + be^{-x} + x^2$ (46)

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$xy' + y = ae^x - be^{-x} + 2x$ (47)

समीकरण (47) को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$xy'' + 2y' = ae^x + be^{-x} + 2$$

$$= (xy - x^2) + 2$$ [समीकरण (46) के प्रयोग से]

$$\Rightarrow \; xy'' + 2y' - xy + x^2 - 2 = 0,$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

E12) i) हमें प्राप्त है $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{(1+x)^2} = \frac{y}{x(1+x)}$

तब लंबकोणीय संछेदी अवकल समीकरण है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(1+x)}{y}$$

जिसे समाकलित करने पर प्राप्त होता है :

$$3y^2 + 3x^2 + 2x^3 = c_1.$$

ii) हमें प्राप्त हैं : $\frac{dy}{dx} = 2cx = \frac{2y}{x}$, तब लंबकोणीय संछेदी अवकल समीकरण है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y}$$

जिसे समाकलित करने पर दीर्घवृत्त कुल $2y^2 + x^2 = c_1$ प्राप्त होता है।

iii) $y^2 + 2x = c_1$.

E13) दिए हुए कुलों के लिए $y' = (y^2 - x^2)/2xy$ और $y' = 2xy/(x^2 - y^2)$.

E14) i) $\frac{dp}{dt} = kp$, इस प्रतिबंध के साथ कि

$p(0) = p_0$ जहाँ $k > 0$ एक अचर है।

ii) $\frac{dx}{dt} = k\,x$, $x(0) = x_0$ तथा $x(2) = \frac{x_0}{2}$

जहाँ $k < 0$, एक अचर है।

—×—

इकाई 7

प्रथम कोटि और प्रथम घात वाले समीकरणों को हल करना

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

इकाई 6 में, हमने आपको अवकल समीकरणों से संबंधित आधारभूत संकल्पनाओं और परिभाषाओं से परिचित कराया था। एक साधारण अवकल समीकरण के विभिन्न प्रकार के हलों की चर्चा की थी तथा प्रथम कोटि की आदि मान समस्या के हल के अस्तित्व और अद्वितीयता के लिए प्रतिबंध भी बताए थे। परंतु, हमने इन हलों को ज्ञात करने की विधियों की ओर कोई ध्यान नहीं दिया है। इसीलिए इस इकाई में, हम अपना ध्यान अवकल समीकरणों के इस महत्त्वपूर्ण पहलू पर सीमित रखेंगे।

सामान्यतः, दिखने में सरल लगने वाले अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ या $g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, जहाँ f और g स्वेच्छ फलन हैं, को हल करना संभव नहीं भी होता। इसका कारण यह है कि ऐसी कोई व्यवस्थित प्रक्रिया नहीं है जिससे कि f और g के स्वेच्छ रूपों के लिए इनके हल प्राप्त किए जा सकें। फिर भी, कुछ मानक प्रकार के प्रथम कोटि समीकरण हैं, जिन्हें हल करने की विधियाँ उपलब्ध हैं। इस इकाई के, भाग 7.2 से 7.5 में हम ऐसी कुछ विधियों पर चर्चा, उनके अनुप्रयोगों के विशेष संदर्भ के साथ, करेंगे। एक छोटी सी सलाह – अवकल समीकरणों को हल करने में, आपको अधिकांशतः खंडशः, प्रतिस्थापन द्वारा या आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन का उपयोग करना पड़ता है। इसलिए यह सार्थक होगा कि इन समीकरणों को हल करना प्रारंभ करने से

पहले, आप अपना कुछ समय समाकलन की तकनीकों, जिनका अध्ययन आप कलन के पाठ्यक्रम में कर चुके हैं, को दोहराने में व्यतीत करें।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- ❖ पृथक्करणीय समीकरण परिभाषित कर सकेंगे और उन्हें हल कर सकेंगे;
- ❖ समघात समीकरण परिभाषित कर सकेंगे और उन्हें हल कर सकेंगे;
- ❖ समघात समीकरणों में समानेय समीकरणों के हल प्राप्त कर सकेंगे;
- ❖ यथातथ समीकरण पहचान सकेंगे और उन्हें हल कर सकेंगे; और
- ❖ वह समाकलन गुणक प्राप्त कर सकेंगे जो एक दिए हुए अवकल समीकरण को यथातथ समीकरण में समानीत कर सकता है और इस तरह उसका हल प्राप्त करने में मदद करता है।

7.2 चर-पृथक्करण

प्रथम कोटि अवकल समीकरणों

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

के अध्ययन में हम अपना ध्यान उन समीकरणों की ओर करते हैं, जो अरैखिक हैं। उदाहरण के लिए निम्न समीकरण पर विचार कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \tag{2}$$

यहाँ, $f(x, y) = \dfrac{x^2}{1-y^2}$ आश्रित चर y पर अरैखितः आश्रित है परंतु समीकरण (2) को

$$M(x)dx = N(y)dy \tag{3}$$

के रूप में लिखना संभव है, जहाँ $M(x) = x^2$ तथा $N(y) = (1-y^2)$. इस प्रकार का समीकरण (3) **चर-पृथक्करण (variable separable)** समीकरण कहलाता है, क्योंकि समीकरण का प्रत्येक पक्ष केवल एक ही चर पर आश्रित है। जैसा कि आपको ज्ञात होगा कि एक दिए हुए वक्र पर एक दिए हुए बिन्दु की स्पर्श रेखा ज्ञात करने की समस्या का हल जर्मन गणितज्ञ लाइबनिज़ (1646-1716) ने प्राप्त किया था। स्पर्श रेखाओं की प्रतिलोम समस्या का हल खोजने में, अर्थात् किसी बिंदु पर एक वक्र की स्पर्श रेखा का समीकरण प्राप्त होने पर, उस वक्र का समीकरण ज्ञात करने के दौरान लाइबनिज़ को अनेक महत्त्वपूर्ण तथ्यों का पता चला। इस संदर्भ में, चर-पृथक्करण विधि का विशेष उल्लेख किया जा सकता है, जिसका पता लाइबनिज़ ने 1691 में लगाया। उन्होंने यह सिद्ध किया कि

> किसी समतल क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया 'क्षेत्रकलन' कहलाती है।

$$\frac{dy}{dx} = M(x)N(y)$$

के रूप का अवकल समीकरण क्षेत्रकलन (quadrature) विधि से समाकलनीय है। परंतु चरों के पृथक्कीकरण की शब्दावली और प्रक्रिया से परिचय कराने का श्रेय

जॉन बर्नूली (1694) को जाता है। संक्षिप्त में, यह अवकल समीकरणों को हल करने की एक विधि है, जिसका प्रयोग बार-बार होता है तथा इसे निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

परिभाषा : समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

पृथक्करणीय समीकरण (separable equation) या **चर पृथक्करणीय रूप में समीकरण** (equation in variable separable form) कहलाता है, यदि $f(x, y)$ को

$$f(x, y) = M(x)N(y), \tag{4}$$

के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ M और N क्रमशः x और y के दिए हुए फलन हों।

दूसरे शब्दों में समीकरण (1) एक पृथक्करणीय समीकरण है, यदि f दो ऐसे फलनों का गुणनफलन हो, जिनमें एक x का फलन तथा दूसरा y का फलन हो। यहाँ M और N क्रमशः x और y के वास्तविक मान फलन हैं।.

उदाहरण के लिए समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ एक पृथक्करणीय समीकरण है, क्योंकि, $e^{x+y} = e^x.e^y$ (यहाँ $M(x) = e^x$ और $N(y) = e^y$)। समीकरण $\frac{dy}{dx} = x^2(y^2 + y^3)$ भी एक पृथक्करणीय समीकरण है। परंतु समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{xy}$ एक पृथक्करणीय समीकरण नहीं है, क्योंकि e^{xy} को ऐसे दो फलनों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करना संभव नहीं है जिनमें एक केवल x का फलन हो तथा दूसरा केवल y का।

इसी प्रकार, समीकरण $\frac{dy}{dx} = x + y$ एक पृथक्करणीय समीकरण नहीं है।

समीकरण (1) और (4) से, हम लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = M(x)N(y)$$

या, $$\frac{1}{N(y)}\frac{dy}{dx} = M(x)$$

इस प्रकार, समीकरण (1), जब चर-पृथक्करणीय हो, तो उसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$N_l\ (y)\frac{dy}{dx} + M_l(x) = 0 \tag{5}$$

जबकि N_l और M_l में से प्रत्येक केवल एक ही चर का फलन है।

समीकरण (5) को हल करने के लिए, आइए मान लें कि ऐसे फलन A और B का अस्तित्व है कि $A'(y) = N_l\ (y)$ और $B'(x) = M_l(x)$. इस परिकल्पना के साथ, समीकरण (5) को पुनः निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{d}{dx}A(y(x)) + B'(x) = 0 \tag{6}$$

$$\left[\text{शृंखला नियम द्वारा } \frac{d}{dx}A(y(x)) = A'(y(x))\frac{dy}{dx} = N_l\ (y(x))\frac{dy}{dx} \right]$$

समीकरण (6) को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$A(y(x)) + B(x) = c \qquad (7)$$

जहाँ c एक अचर है।

इस प्रकार, समीकरण (5) का कोई भी हल $y(x)$ अस्पष्ट रूप से समीकरण (7) द्वारा प्राप्त हो जाता है।

अब हम इस विधि को और अधिक स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ को हल कीजिए।

हल : इस समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = e^x\ e^{-y}$$

या $$e^y \frac{dy}{dx} = e^x$$

या $$\frac{d}{dx}(e^y) = e^x$$

जिसका समाकलन करने पर, $e^y = e^x + c$ प्राप्त होता है जहाँ, c एक अचर है।

$e^x + c \geq 0$ की स्थिति में, $y(x) = \ln(e^x + c)$.

***

उदाहरण 2: $y(0) = -1$ के लिए आदि मान समस्या $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को चर पृथक्करण रूप में, निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = c$$

आदि प्रतिबंध $x = 0$ पर $y = -1$ से हम c का मान प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि अभीष्ट विशेष हल प्राप्त किया जा सकता है। क्योंकि $\tan^{-1} 0 = 0$ और $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, इसलिए $c = 0 - \frac{\pi}{4}$.

अतः आदि मान समस्या का हल :

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = -\frac{\pi}{4} \text{ है।} \qquad (8)$$

***

आप यह **देख सकते** हैं कि उदाहरण 1 में हम y का हल स्पष्ट रूप से x के एक फलन के रूप में प्राप्त कर पाए, जबकि उदाहरण 2 में हल समीकरण (8) द्वारा

अस्पष्ट रूप में प्राप्त है। हल के लिए, एक स्पष्ट सूत्र प्राप्त करने के लिए, यह आवश्यक है कि समीकरण (8) को y के लिए x के एक फलन के रूप में हल किया जाए, जो कि एक जटिल कार्य हो सकता है। जैसा कि हम पहले इकाई 6 में बता चुके हैं, जब तक यह महत्वपूर्ण या सुविधाजनक न हो, y का हल x के पदों में स्पष्ट रूप से प्राप्त करने के लिए, आपको ऐसे व्यंजक को सरल करने का प्रयास करने की आवश्यकता नहीं है।

आइए ऊपर बताए बिंदु को स्पष्ट करने के लिए, एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 3: आदि मान समस्या

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)},\ y\neq 1,\quad y(0)=-1 \tag{9}$$

को हल कीजिए।

हल: दिए हुए समीकरण को चर-पृथक्करण रूप में पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$2(y-1)dy=(3x^2+4x+2)dx$$

ऊपर दिए समीकरण को समाकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+c \tag{10}$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

आदि प्रतिबंध $x=0$ पर $y=-1$ से $c=3$ प्राप्त होता है। समीकरण (10) में, $c=3$ प्रतिस्थापित करने पर, IVP का हल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+3 \tag{11}$$

समीकरण (11) से अस्पष्ट रूप से समीकरण (9) का हल प्राप्त हो जाता है। IVP का हल स्पष्ट रूप से प्राप्त करने के लिए हमें समीकरण (11) को y के लिए x के पदों में हल करना चाहिए, जो इस स्थिति में संभव है। क्योंकि समीकरण (11), y में द्विघातीय है, हम प्राप्त करते हैं :

$$y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \tag{12}$$

आप **देख सकते** हैं कि समीकरण (12) से IVP के दो हल प्राप्त होते हैं, जो हैं

$$y=1+\sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \tag{13}$$

$$\text{तथा}\quad y=1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \tag{14}$$

ऊपर दिए दोनों हलों में से, केवल समीकरण (14) द्वारा प्राप्त हल ही दिए हुए आदि प्रतिबंध को संतुष्ट करता है। इस प्रकार, हम

$$y=1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \tag{15}$$

को IVP (9) के हल के रूप में प्राप्त करते हैं। आइए अब निर्धारित करें कि किस अंतराल में हल (15) मान्य है। समीकरण (15) में पद $\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$, $x>-2$

के लिए धनात्मक है। इस प्रकार, हल (15), $x > -2$ के लिए मान्य है।

समीकरण (15) से क्षेत्र $x > -2$ में मान्य समीकरण (9) का स्पष्ट हल प्राप्त होता है।

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E1) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(1-x)\,dy-(1+y)\,dx=0,\ x\neq 1.$

ii) $\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0,\ x\neq 1.$

iii) $y-x\dfrac{dy}{dx}=a\left(y^2+\dfrac{dy}{dx}\right),\ x>0,\ y>0$ तथा a एक धनात्मक अचर है।

iv) $3e^x\tan y\ dx+(1-e^x)\sec^2 y\ dy=0,\ x>0,\ y>0$

v) $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$

E2) निम्न अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कीजिए, जो उनके साथ में दिए आदि प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं :

i) $2xy\dfrac{dy}{dx}=1+y^2,\ y(2)=3\ \forall x,\ y>0$

ii) $\dfrac{dy}{dx}=-4xy,\ y(0)=y_0\ \forall\ y>0$

iii) $\dfrac{dy}{dx}=xe^{y-x^2},\ y(0)=0$

iv) $y\ \dfrac{dy}{dx}=g,\ y(x_0)=y_0$ जहाँ g एक वास्तविक अचर है।

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+2xy}{x^2},\ x\neq 0$ जैसे अनेक अवकल समीकरण हैं, जो पृथक्करणीय नहीं है; परंतु उन्हें सरल प्रतिस्थापनों द्वारा पृथक्करणीय रूप में बदला जा सकता है। अगले भाग में, हम समीकरणों के एक ऐसे ही वर्ग का अध्ययन करेंगे जिन्हें समघात समीकरण कहा जाता है। ये समीकरण $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ के रूप के होते हैं, जहाँ फलन f पृथक रूप से x और y पर आश्रित नहीं होता, अपितु केवल अनुपात $\dfrac{y}{x}$ या $\dfrac{x}{y}$ पर आश्रित होता है। प्रथम कोटि के समघात अवकल समीकरणों को हल करने की विधि 1692 में लाइबनिज़ द्वारा दी गयी थी।

7.3 समघात समीकरण

आइए एक समघात फलन को परिभाषित करके प्रारंभ करें।

परिभाषा : दो चरों x और y का एक वास्तविक मान फलन h घात n का एक समघात फलन कहलाता है, जहाँ n एक वास्तविक संख्या है, यदि हम सभी x, y और $\lambda > 0$ के लिए $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x, y)$ लिख सकते हैं।

उदाहरण के लिए $h(x, y) = x^3 + 2x^2 y + 3xy^2 + 4y^3$ घात 3 का एक समघात फलन है, क्योंकि $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 h(x, y)$.

फलन $h(x, y) = x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right) + (\ln|x| - \ln|y|)\ xy$ घात 2 का एक समघात फलन है। यहाँ, $\frac{y}{x}$ की घात 0 है और इसलिए $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots$ की घात 0 है। अचर 1 की भी घात 0 है।

साथ ही, $\ln|x| - \ln|y| = \ln\left|\frac{y}{x}\right|$ भी शून्य घात का है।

फलन $\frac{x^2}{x^2 + 2xy + y^2}$ घात 0 का एक समघात फलन है। परंतु, फलन $h(x, y) = x^2 + 2xy + 4$ समघात नहीं है, क्योंकि n के किसी भी मान के लिए, $h(\lambda x, \lambda y) \neq \lambda^n (x^2 + xy + 4)$.

विशेष रूप से हमारी रूचि उस स्थिति में होगी जहाँ $h(x, y)$ **घात 0 का एक समघात फलन** हो, अर्थात् जब $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 h(x, y) = h(x, y)$ हो। इसी के अनुसार, हम निम्न परिभाषा प्रस्तुत करते हैं :

परिभाषा : अवकल समीकरण

$$y' = f(x, y) \tag{16}$$

समघात अवकल समीकरण कहलाता है, जब f घात 0 का समघात फलन हो।

उदाहरण के लिए निम्न समीकरण समघात अवकल समीकरण हैं :

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y}{4x} = \frac{2 + 3(y/x)}{4}$

iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + x^2 y + y^3}{3x^2 y + y^3} = \frac{1 + (y/x) + (y/x)^3}{3(y/x) + (y/x)^3}$

ऊपर दिए गए उदाहरणों में, आप देख सकते हैं कि इन समीकरणों को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \tag{17}$$

जहाँ x और y में M और N समान घात वाले समघात फलन हैं तथा f घात 0 का एक समघात फलन है।

ध्यान दीजिए कि यदि f घात n का एक समघात फलन है, तो हम
$f(x, y) = x^n f(1, y/x)$ या $f(x, y) = y^n f(x/y, 1)$

लिख सकते हैं, जहाँ $f(1, y/x)$ और $f(x/y, 1)$ दोनों ही घात शून्य के समघात फलन हैं।

उदाहरण के लिए $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ घात 2 का एक समघात फलन है, जिसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$f(x, y) = x^2\left[1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = x^2 f(1, y/x)$$

या $$f(x, y) = y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right] = y^2 f\left(\frac{x}{y}, 1\right).$$

साथ ही, समीकरण (17) से यह निष्कर्ष निकलता है कि जब M और N दोनों घात n के समघात फलन हों, तब हम

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{x^n M(1, y/x)}{x^n N(1, y/x)} = F(y/x).$$

लिख सकते हैं।

इस प्रकार, एक समघात अवकल समीकरण को सदैव निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = F(y/x). \tag{18}$$

और इससे समीकरण को हल करने के लिए $v = \frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करने का सुझाव भी मिलता है। उदाहरण के लिए निम्न समघात अवकल समीकरण पर विचार कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y}{4x} = \frac{2 + 3(y/x)}{4} \tag{19}$$

यदि हम समीकरण (19) में $v = y/x$ प्रतिस्थापित करें, तो क्योंकि $y(x) = x\,v(x)$
इसलिए $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$.

इसे समीकरण (19) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}v$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{2-v}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2-v}{4x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{2-v} = \frac{dx}{4x} \tag{20}$$

समीकरण (20) v और x में एक चर पृथक्करणीय समीकरण है तथा इसे भाग 7.2 में दी गई विधि द्वारा हल किया जा सकता है।

व्यापक रूप में, प्रतिस्थापन $v(x) = \frac{y}{x}$ समीकरण (18) को निम्न रूप में बदल देता है :

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$$

या
$$\frac{dv}{dx} = \frac{F(v)-v}{x} \tag{21}$$

चर पृथक्करणीय होने के कारण समीकरण (21) को v के लिए x के पदों में हल किया जा सकता है तथा तब समीकरण (18) का हल $y = vx$ से प्राप्त होता है।

हम यहाँ यह बताना चाहेंगे कि प्रतिस्थापन $v = \frac{y}{x}$ के स्थान पर आप $v = \frac{x}{y}$ का भी प्रयोग कर सकते हैं। कभी-कभी, ऐसा भी हो सकता है कि किसी एक प्रतिस्थापन का प्रयोग करने के बाद, आपको एक ऐसा समाकल प्राप्त हो जिसका मान निकालना या तो कठिन हो या असंभव हो। ऐसी स्थिति में, हो सकता है कि प्रतिस्थापन बदलने से समस्या सरल हो जाए। व्यावहारिक रूप में, जब भी फलन $M(x, y)$ फलन $N(x, y)$ से सरल होता है, तो प्रतिस्थापन $x = vy$ बेहतर कार्य करता है। परंतु कौन-सा प्रतिस्थापन कब प्रयोग करना है, यह अभ्यास करने से ही समझ में आएगा।

अब हम इस विधि को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 4 : $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 + 3xy}{x^2}, x > 0$ को हल कीजिए।

हल : आप सरलता से जाँच कर सकते हैं कि दिया गया समीकरण घात 0 का एक समघात समीकरण है। इसे पुनः निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x}\right) \tag{22}$$

प्रतिस्थापन $v = \frac{y}{x}$ द्वारा समीकरण (22) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$x\frac{dv}{dx} + v = 2v^2 + 3v$$

या $$x\frac{dv}{dx} = 2v^2 + 2v = 2v(v+1)$$

या $$\frac{dv}{v(v+1)} = \frac{2dx}{x}$$

जो चर-पृथक्करणीय रूप में है।

$\frac{1}{v(v+1)}$ को आंशिक भिन्नों में बदलने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv = \frac{2}{x}\, dx$$

जिसे समाकलित करने पर, प्राप्त होता है :

$$\ln|v| - \ln|v+1| = \ln x^2 + \ln|c| \qquad (23)$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

समीकरण (23) से हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{v}{v+1} = cx^2$$

v के स्थान पर $\frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$cx^2 = \frac{y/x}{(y/x)+1} = \frac{y}{x+y}$$

या $$y = \frac{cx^3}{1-cx^2},$$

जो दिए गए समीकरण का व्यापक हल है।

***

उदाहरण 5 : $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x},\ x > 0$ को हल कीजिए।

हल : प्रतिस्थापन $y = vx$ से हमें प्राप्त होता है :

$$v + x\frac{dv}{dx} = v^3 + v$$

या $$\frac{1}{v^3}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (24)$$

समीकरण (24) का समाकलन करने पर हम पाते हैं :

$$-\frac{1}{2v^2} = \ln x + \ln |c|,$$

जहाँ, c एक वास्तविक अचर है। इसमें $v = \frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर, दिए गए समीकरण के व्यापक हल को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$y^2 = -\frac{x^2}{2[\ln x + \ln |c|\,]} \quad \text{या} \quad y^2 = -\frac{x^2}{2}\,\frac{1}{\ln\,(x\,|c|\,)}.$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : $2x^3 y\,dx + (x^4 + y^4)\,dy = 0,\ x > 0,\ y > 0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ dx का गुणांक dy के गुणांक से थोड़ा सरल है। इसलिए, हम प्रतिस्थापन $x = vy$ का प्रयोग करते हैं।

प्रतिस्थापन के बाद, समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है :

$$2v^3y^4[v\,dy + y\,dv] + (v^4y^4 + y^4)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2v^3y^5dv + (3v^4y^4 + y^4)dy = 0$$

या $$\frac{2v^3dv}{3v^4+1} + \frac{dy}{y} = 0 \qquad (25)$$

ऊपर दिए गए समीकरण को समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{6}\ln\,(3v^4+1) + \ln |y| = \ln |c|$$

या $$\ln(3v^4+1)y^6 = 6\ln|c|$$

$v = \frac{x}{y}$ प्रतिस्थापित करके इस हल को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$3x^4y^2 + y^6 = c_1$, जहाँ $c_1 = 6\ln|c|$ एक स्वेच्छ अचर है।

यहाँ आप यह **ध्यान दे** सकते हैं कि ऊपर प्राप्त हल अस्पष्ट रूप में है। यदि दिए गए समीकरण में प्रतिस्थापन $v = \frac{y}{x}$ का प्रयोग किया होता, तो हमें

$\frac{dx}{x} + \frac{v^4+1}{v^5+3v}dv = 0$ प्राप्त होता। यद्यपि, इस समीकरण में दूसरे समाकल का मान निकालना असंभव नहीं है, फिर भी यह समीकरण (25) में प्राप्त समाकल की तुलना में कठिन प्रतीत होता है।

***

आइए अब क्यों न कुछ प्रश्नों को हल करें।

E3) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $x \in]\,0, \infty\,[$ तथा $x \in]-\infty, 0\,[$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{3x+2y}$, $x > 0,\ y > 0$.

iii) $\left(x \sin \frac{y}{x}\right) dy - \left(y \sin \frac{y}{x} - x\right) dx = 0,\ x > 0,\ y > 0$

iv) $x \frac{dy}{dx} = y(\ln y - \ln x + 1),\ x > 0,\ y > 0$

v) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 - y^2}\ dx$.

E4) दिए गए आदि प्रतिबंधों के अधीन $x > 0, y > 0$ के लिए, निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $2x^2 \frac{dy}{dx} = 3xy + y^2,\ y(1) = -2$

ii) $(x + ye^{y/x})\,dx - xe^{y/x}\ dy = 0,\ y(1) = 0$

iii) $(y^2 + 3xy)\,dx = (4x^2 + xy)\,dy,\ y(1) = 1$

iv) $y^2 dx + (x^2 + xy + y^2)dy = 0,\ y(0) = 1$

कभी-कभी, ऐसा हो सकता है कि दिया गया समीकरण समघात नहीं हो, पंरतु इसे चरों के रूपांतरणों द्वारा समघात रूप में बदला जा सकता हो। अब हम कुछ ऐसे ही समीकरण लेते हैं।

समघात रूप में समानेय (reducible) समीकरण

आइए अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3} \tag{26}$$

को लेकर, प्रारंभ करें। आप देख सकते हैं कि समीकरण (26) एक समघात समीकरण नहीं है। आइए चरों x और y के निम्न प्रकार के रूपांतरण (transformation) पर विचार करें :

$$x = X + 1,\ y = Y + 1 \tag{27}$$

ऊपर दिए गए रूपांतरण से, समीकरण (26) निम्न रूप में समानीत (reduce) हो जाता है :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}=\frac{X+1+2(Y+1)-3}{2(X+1)+Y+1-3}, \quad [\because dx=dX \text{ और } dy=dY\ ]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y} \tag{28}$$

जो चरों X और Y में एक समघात समीकरण है। इस प्रकार, क्रमशः X और Y के पदों में चरों x और y के रूपांतरण (27) का प्रयोग करके समीकरण (26) एक समघात समीकरण (28) में समानीत हो जाता है। परंतु हम रूपांतरण (27) पर किस प्रकार पहुँचते हैं? ऐसा रूपांतरण प्राप्त करने के लिए, एक सुपरिभाषित प्रक्रिया है, जिस पर अब हम चर्चा करेंगे। समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}, \ ab'-ba'\neq 0 \tag{29}$$

के रूप के एक अवकल समीकरण को, जहाँ a, b, c, a', b' और c' सभी अचर हैं, प्रतिस्थापन

$$x=X+h \text{ और } y=Y+k,$$

द्वारा एक समघात समीकरण के रूप में बदला जा सकता है। यहाँ, h और k अचर हैं, जिन्हें इस प्रकार चुना जाता है कि दिया गया समीकरण समघात हो जाए। इन नए चरों के पदों में, समीकरण (29) निम्न हो जाता है :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY+(ah+bk+c)}{a'X+b'Y+(a'h+b'k+c')}. \tag{30}$$

समीकरण (30) समघात हो जाएगा, यदि h और k निम्न समीकरणों को संतुष्ट करें :

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c=0 \\ a'h+b'k+c'=0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

इसके परिणामस्वरूप समीकरण (30) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{a'X+b'Y} \tag{32}$$

जिसे प्रतिस्थापन $Y=vX$ द्वारा हल किया जा सकता है। यदि समीकरण (32) का हल $g(X, Y)=0$ के रूप का है, तो समीकरण (29) का हल
$g(x-h, y-k)=0$ होगा, जहाँ h और k को युगपत समीकरणों (31) को हल करके प्राप्त किया जाता है।

समीकरणों (31) को h और k के लिए हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$h=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}, k=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

जो परिभाषित है, केवल उस स्थिति को छोड़ कर जब

$$ab' - a'b = 0 \text{ अर्थात्, जब } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

यदि $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ हो, तो h और k के या तो अपरिमित रूप से अनेक मान होते हैं अथवा ये अनिर्धार्य (indeterminate) होते हैं। परिणामस्वरूप, यह प्रश्न उठता है कि :

यदि $\boldsymbol{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}}$ तो **क्या होता है?** ऐसी स्थितियों में, हम मान लेते हैं कि

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{1}{m}$ (मान लीजिए), $m \neq 0$.

समीकरण (29) को तब निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{m\,(ax+by)+c'} \tag{33}$$

$ax + by = v$ रखने पर, समीकरण (33) निम्न रूप का हो जाता है :

$$\frac{1}{b}\left[\frac{dv}{dx} - a\right] = \frac{v+c}{mv+c'}$$

जो चर पृथक्करणीय है और इसलिए इस समीकरण को भाग 7.2 में दी गयी विधि से हल किया जा सकता है। अब इस चर्चा को स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 7: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$ को हल कीजिए। (34)

हल : दिए हुए समीकरण की समीकरण (29) से तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$a = 1,\ b = -1,\ a' = 1,\ b' = 1.$$

$$\therefore\ \frac{a}{a'} = 1,\ \frac{b}{b'} = -1 \text{ तथा } \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}.$$

समीकरण (34) में $x = X + h$ और $y = Y + k$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y - X + k - h + 1}{Y + X + k + h + 5} \tag{35}$$

h और k हम इस प्रकार चुनते हैं कि

$$\left.\begin{aligned} k - h + 1 = 0 \\ k + h + 5 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

समीकरण (36) को हल करने पर, $h = -2$ और $k = -3$ प्राप्त होता है।
h और k के इन मानों के लिए समीकरण (35) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y - X}{Y + X} \tag{37}$$

जो एक समघात समीकरण है।

समीकरण (37) में $Y = vX$ रखने तथा प्राप्त समीकरण को सरल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$-\frac{1+v}{1+v^2}\frac{dv}{dX} = \frac{1}{X}.$$

या $$\left(\frac{1}{1+v^2} + \frac{v}{1+v^2}\right)\frac{dv}{dX} = -\frac{1}{X} \tag{38}$$

समीकरण (38) को समाकलित करने पर, हम पाते हैं :

$$\tan^{-1} v + \frac{1}{2}\ln\,(1+v^2) = -\ln|X| + c,$$ जहाँ c एक अचर है।

या $$\frac{1}{2}\ln(1+v^2)X^2 + \tan^{-1} v = c$$

v के स्थान पर $\frac{Y}{X}$ लिखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2}\ln(X^2 + Y^2) + \tan^{-1}\frac{Y}{X} = c$$

ऊपर दिए गए समीकरण में $X = x + 2$ और $Y = y + 3$ प्रतिस्थापित करने पर, समीकरण (34) का हल निम्न से प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2}\ln\,[(x+2)^2 + (y+3)^2] + \tan^{-1}\left(\frac{y+3}{x+2}\right) = c$$

***

उदाहरण 8: अवकल समीकरण $(4x + 6y + 5)\,dy = (3y + 2x + 5)\,dx$ को हल कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y + 2x + 5}{4x + 6y + 5}$$

$$= \frac{(2x + 3y) + 5}{2(2x + 3y) + 5} \tag{39}$$

इस स्थिति में, $a = 2, b = 3, a' = 4, b' = 6$. इस प्रकार, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ है। इसलिए, हम $2x + 3y = v$ लेते हैं। जिससे समीकरण (39) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dv}{dx}-2\right)=\frac{v+5}{2v+5}$$

अर्थात्, $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{3(v+5)}{2v+5}+2=\dfrac{3v+15+4v+10}{2v+5}=\dfrac{7v+25}{2v+5}$

अब चर पृथक्करणीय हैं तथा हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{2v+5}{7v+25}\cdot\frac{dv}{dx}=1$$

या $$\left[\frac{2}{7}-\frac{15}{7(7v+25)}\right]\frac{dv}{dx}=1$$

समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$\dfrac{2}{7}v-\dfrac{15}{49}\ln\left|\left(v+\dfrac{25}{7}\right)\right|=x+c$, जहाँ c समाकलन अचर है।

$v=2x+3y$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें अभिष्ट हल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$\frac{2}{7}(2x+3y)-\frac{15}{49}\ln\left|\left(2x+3y+\frac{25}{7}\right)\right|=x+c$$

या $$14(2x+3y)-15\ln\left|\left(2x+3y+\frac{25}{7}\right)\right|=49(x+c)$$

या $$42y-21x-15\ln|(14x+21y+25)|=49c-15\ln 7=c_1,$$ (मान लीजिए)।

***

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं। इस प्रश्न के प्रत्येक समीकरण के लिए सर्वप्रथम जाँच कीजिए कि क्या $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ तथा उसके बाद ही प्रतिस्थापन के बारे में निर्णय लें।

E5) $x, y>0$ के लिए निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x-4}{y-3x+3}$

ii) $(7y-3x+3)\dfrac{dy}{dx}+(3y-7x+7)=0$

iii) $(2x+y+1)\,dx+(4x+2y-1)\,dy=0$

iv) $(x+y)\,dx+(3x+3y-4)\,dy=0$.

इकाई 6 में, हमने एक दिए हुए फलन के संपूर्ण अवकल को परिभाषित किया था। अगले भाग में, हम इसका प्रयोग यथातथ अवकल समीकरणों को परिभाषित करने तथा उनके हल प्राप्त करने में करेंगे।

7.4 यथातथ समीकरण

आइए एक बहुत ही सरल समीकरण $x\,dy + y\,dx = 0$ से प्रारंभ करें। आप जानते हैं कि यह समीकरण न केवल पृथक्करणीय और समघात है, अपितु यह x और y के गुणनफल के अवकल के तुल्य भी है। अर्थात् $y\,dx + x\,dy = d(xy) = 0$. इस समीकरण को समाकलित करने पर, हमें एक-प्राचल हल कुल $xy = c$ प्राप्त होता है। विलोमतः, इस एक-प्राचल हल कुल का संगत अवकल समीकरण $d(xy) = 0$ अर्थात्, $x\,dy + y\,dx = 0$ है।

व्यापक रूप में, यदि हम एक वक्र-कुल $h(x, y) = c$ पर विचार करें, तो इसके संपूर्ण अवकल के पदों में इसके अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$dh = 0$$

अर्थात्, $\dfrac{\partial h}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial h}{\partial y}\,dy = 0$

इसकी विपरीत स्थिति के लिए, आइए निम्न अवकल समीकरण से प्रारंभ करें :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (40)$$

यदि चरों x और y वाले एक ऐसे फलन y का अस्तित्व है कि

$$\frac{\partial h}{\partial x} = M(x, y) \text{ और } \frac{\partial h}{\partial y} = N(x, y) \text{ तो}$$

समीकरण (40) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy = 0 \text{ या } dh = 0\cdot$$

अर्थात्, $h =$ एक अचर, समीकरण (40) का एक हल निरूपित करता है।

तब, हम व्यंजक $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ को एक यथातथ अवकल (exact differential) कहते हैं तथा समीकरण (40) एक **यथातथ अवकल समीकरण** (exact differential equation) कहलाता है। उदाहरण के लिए समीकरण

$x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$ यथातथ है, क्योंकि हमें $d\left(\dfrac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3dx + x^3y^2dy$ प्राप्त होता है।

औपचारिक रूप से, हम निम्न परिभाषा देते हैं :

परिभाषा : xy-तल के क्षेत्र D में कोई व्यंजक $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ एक **यथातथ अवकल** होता है, यदि वह किसी फलन h के संपूर्ण अवकल के बराबर हो, अर्थात्, $dh = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ हो।

परिभाषा : समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ **यथातथ अवकल समीकरण** कहलाता है, यदि व्यंजक $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ एक यथातथ अवकल हो।

कभी-कभी, केवल देख कर ही यथातथता मालूम की जा सकती है तथा फलन h ज्ञात किया जा सकता है। उदाहरण के लिए निम्न समीकरणों पर विचार कीजिए :

$$3x^2 y^4 dx + 4x^3 y^3 dy = 0$$

तथा $$xe^{xy} dy + (ye^{xy} - 2x)\, dx = 0.$$

पहले समीकरण को सीधे ही $d(x^3 y^4) = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है तथा इसलिए $x^3 y^4 = c$ एक अचर, इसका व्यापक हल है। दूसरे समीकरण को वैकल्पिक रूप से $(xe^{xy} dy + ye^{xy} dx) - 2x\, dx = 0$ अर्थात्, $d(e^{xy} - x^2) = 0$ रूप में लिख सकते हैं। तब इसका व्यापक हल $e^{xy} - x^2 = c$ या $e^{xy} = x^2 + c$ होगा, जहाँ c एक अचर है।

परंतु, कुछ सरल स्थितियों के अतिरिक्त, ''देखने मात्र से ही हल'' की तकनीक कार्य नहीं करती। इसी कारण, हम निम्न प्रश्न का उत्तर जानना चाहते हैं : कब ऐसे फलन h का अस्तित्व होता है जिससे कि समीकरण (40) यथातथ हो जाए? इस प्रश्न का उत्तर निम्नलिखित प्रमेय द्वारा प्राप्त होता है :

प्रमेय 1: मान लीजिए M और N चरों x और y के संतत फलन हैं, जिनके क्षेत्र $D: a < x < b, c < y < d$ में संतत प्रथम कोटि आंशिक अवकलज हैं। तब,

$$M(x, y)dx + N(x, y)\, dy$$

के यथातथ अवकल होने के लिए, **आवश्यक** और **पर्याप्त** प्रतिबंध है कि D के प्रत्येक बिंन्दु पर

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y). \tag{41}$$

अब हम प्रमेय 1 की उपपत्ति देते हैं।

उपपत्ति: प्रतिबंध आवश्यक है :

मान लीजिए कि व्यंजक

$$M(x, y)dx + N(x, y)\, dy$$

यथातथ है। तब, चरों x और y के एक फलन h का अस्तित्व होता है, जिससे कि $dh = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$.

परंतु $$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial h}{\partial x}\, dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)\, dy.$$

इसलिए, आवश्यक रूप से,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = M(x, y) \text{ और } \frac{\partial h}{\partial y} = N(x, y) \tag{42}$$

क्योंकि M और N के संतत प्रथम कोटि आंशिक अवकलज हैं तथा $M = \frac{\partial h}{\partial x}$ और $N = \frac{\partial h}{\partial y}$ इसलिए h के संतत द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज हैं, जो $\frac{\partial^2 h}{\partial y\, \partial x}$ और $\frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y}$ हैं।

अब,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \tag{43}$$

तथा
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{44}$$

क्योंकि $\frac{\partial^2 h}{\partial y\, \partial x}$ और $\frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y}$ संतत हैं, इसलिए $\frac{\partial^2 h}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y}$ (देखिए खंड 1 की इकाई 4)

अतः, समीकरण (43) और (44) से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$$

प्रतिबंध पर्याप्त है : प्रमेय की पर्याप्तता के लिए यह दर्शाना होगा कि प्रतिबंध (41) के लागू रहते एक ऐसे फलन h का अस्तित्व है, जिसके लिए $\frac{\partial h}{\partial x} = M(x, y)$ और $\frac{\partial h}{\partial y} = N(x, y)$.

आइए निम्न कल्पना से प्रारंभ करें कि :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{45}$$

तब फलन h का अस्तित्व यह दर्शाने के तुल्य हो जाता है कि $M(x, y)dx + N(x, y)\,dy$ एक यथातथ अवकल है।

मान लीजिए कि $\int M(x, y)\, dx = h(x, y)$. तब, $\frac{\partial h}{\partial x} = M(x, y)$

तथा $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}$

$= \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ (प्रतिबंध (45) के प्रयोग से)

$$\therefore \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \tag{46}$$

x के सापेक्ष, समीकरण (46) को समाकलित करने पर, y को स्थिर (अचर) रखते हुए, हमें प्राप्त होता है :

$$N(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y} + \phi(y),$$

जहाँ समाकलन अचर ϕ केवल y का फलन है। इस प्रकार,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \phi(y)\right)dy$$

$$= d\left[h(x, y) + \int_0^y \phi\ (t)dt\right]$$

जिससे स्थापित होता है कि $M(x,y)\ dx + N(x, y)\,dy$ एक यथातथ अवकल है। इस प्रकार प्रमेय 1 की उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

—■—

अब हम प्रमेय को स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 9: अवकल समीकरण $\sin y + x\cos y\, y' = 0$ को हल कीजिए।

हल : दी गयी स्थिति में, $N(x, y) = x\cos y$ तथा $M(x, y) = \sin y$. साथ ही,

$\dfrac{\partial}{\partial x}N(x, y) = \cos y = \dfrac{\partial}{\partial y}M(x, y)$, जिससे पता चलता है कि दिया गया समीकरण एक यथातथ समीकरण है। अतः फलन h का अस्तित्व है जिसके लिए $\dfrac{\partial h}{\partial x} = M(x, y)$ और $\dfrac{\partial h}{\partial y} = N(x, y)$. इस प्रकार हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sin y \tag{47}$$

तथा

$$\frac{\partial h}{\partial y} = x\cos y \tag{48}$$

y को एक अचर मानते हुए, समीकरण (47) को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$h(x, y) = x\sin y + \phi(y) \tag{49}$$

जहाँ $\phi(y)$ समाकलन अचर है। समीकरण (49) को y के सापेक्ष आंशिक रूप से अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial}{\partial y}h(x, y) = x\cos y + \phi'(y) \tag{50}$$

समीकरण (48) और (50) से, हमें प्राप्त होता है :

$$x\cos y = x\cos y + \phi'(y)$$

जो यह दर्शाता है कि $\phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) =$ अचर $= c_1$ (मान लीजिए) (51)

समीकरण (49) से तब हम लिख सकते हैं : $h(x, y) = x\sin y + c_1$

अतः, अभीष्ट हल $x\sin y + c_1 = 0$ है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण का हल केवल $h(x, y)$ नहीं है। यह $h(x, y) = c$ या $h(x, y) = 0$ है, यदि $\phi'(y)$ के समाकलन में अचर पहले से ही प्रयोग किया जा चुका है, जैसा कि समीकरण (51) में है।

***

उदाहरण 10 : $e^x \sin y + e^x \cos y\ y' + 2x = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण की तुलना समीकरण (40) से करने पर, हमें $N(x, y) = e^x \cos y$ और $M(x, y) = e^x \sin y + 2x$ प्राप्त होता है। अतः,

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x, y) = e^x \cos y$$

तथा $$\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial}{\partial x}N(x, y)$$

अतः, दिया गया समीकरण यथातथ है तथा किसी फलन h के लिए इसे, $dh(x, y) = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$\frac{\partial}{\partial x}h(x, y) = e^x \sin y + 2x \tag{52}$$

तथा $$\frac{\partial}{\partial y}h(x, y) = e^x \cos y. \tag{53}$$

समीकरण (52) को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$h(x, y) = e^x \sin y + x^2 + \phi(y) \tag{54}$$

जहाँ समाकलन अचर ϕ केवल y का फलन है।

समीकरण (53) और (54) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial}{\partial y}h(x, y) = e^x \cos y + \phi'(y) = e^x \cos y$$

अतः, हमें $\phi'(y)=0$ या $\phi(y)=c_1$ प्राप्त होता है, जहाँ c_1 एक अचर है। इसलिए, समीकरण (54) से हमें अभीष्ट हल

$h(x, y)=e^x \sin y + x^2 + c_1 = 0$ प्राप्त होता है।

***

आप यहाँ **देख सकते** हैं कि उदाहरण 9 को चर पृथक्करण विधि से भी हल किया जा सकता था। परंतु उदाहरण 10 में चरों का पृथक्कीकरण नहीं किया जा सकता है।

प्रमेय 1 तथा उदाहरण (9) और (10) के आधार पर, हम यह कह सकते हैं कि यथातथ अवकल समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ को हल करने में निम्नलिखित चरण लागू करने होते हैं :

चरण 1: y को एक अचर मानते हुए, $M(x, y)$ को x के सापेक्ष समाकलित कीजिए।

चरण 2: $N(x, y)$ के उन पदों को y के सापेक्ष समाकलित कीजिए जिनमें x नहीं है।

चरण 3: चरण 1 और 2 से प्राप्त व्यंजकों के योग को एक अचर के बराबर मान लेने से प्राप्त समीकरण ही अभीष्ट हल है।

अब, हम इन विभिन्न चरणों को एक अन्य उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 11: समीकरण $(x^2-4xy-2y^2)\,dx + (y^2-4xy-2x^2)\,dy = 0$ को हल कीजिए। (55)

हल : यहाँ, $N(x, y) = y^2-4xy-2x^2$ और $M(x, y) = x^2-4xy-2y^2$.

$$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -4y-4x \text{ और } \frac{\partial M}{\partial y} = -4x-4y$$

$$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$ अतः समीकरण (55) एक यथातथ समीकरण है।

चरण 1: y को अचर मानते हुए, $M(x, y)$ को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\int (x^2-4xy-2y^2)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2$$

चरण 2: हम $N(x, y)$ में उन पदों को y के सापेक्ष समाकलित करते हैं, जिनमें x नहीं है। ऐसा केवल एक ही पद y^2 है।

$$\therefore \quad \int y^2 dy = \frac{y^3}{3}.$$

चरण 3: चरण 1 और 2 से प्राप्त व्यंजकों के योग को एक अचर के बराबर रखने पर प्राप्त समीकरण ही अभीष्ट हल है, अर्थात् हल है :

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2 + \frac{y^3}{3} = c_1$$

या $x^3 - 6x^2y - 6xy^2 + y^3 = c$, जहाँ c और c_1 अचर हैं।

***

ध्यान दीजिए की समीकरण (55) एक समघात अवकल समीकरण है और इसलिए इसे प्रतिस्थापन $v = y/x$ से भी हल किया जा सकता था। साथ ही, इस ओर भी ध्यान दीजिए कि एक दिए गए समीकरण की यथातथता की जाँच करना तथा उसका हल ज्ञात करने की सामान्य प्रक्रिया को कभी-कभी सरल बनाया जा सकता है। हम $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ के उन पदों को चुन सकते हैं जो स्पष्ट रूप से एक यथातथ अवकल बनाते हैं अथवा $f(u)\, du$ का रूप ले सकते हैं। इसके बाद शेष व्यंजक, जो दिए गए व्यंजक से कम जटिल होगा, की जाँच की जा सकती है तथा उसे समाकलित किया जा सकता है। इस प्रक्रिया को निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है :

उदाहरण 12: $xdx + ydy + \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$ को हल कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि दिए हुए समीकरण के बाएँ पक्ष के प्रथम दो पद यथातथ अवकल हैं और इसलिए इन्हें छूने की आवश्यकता नहीं है। अंतिम पद के अंश और हर को x^2 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$xdx + ydy + \frac{d(y/x)}{1 + (y/x)^2} = 0$$

अब ऊपर प्राप्त समीकरण का प्रत्येक पद यथातथ अवकल है। समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \tan^{-1}\frac{y}{x} = c$$

जो अभीष्ट हल है जहाँ c एक अचर है।

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E6) दिखाइए कि निम्न समीकरण यथातथ हैं और फिर इन्हें हल कीजिए :

i) $y\cos x + 2x\, e^y + (\sin x + x^2 e^y + 2)y' = 0$

ii) $y' = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$ (a, b, c, d दिए हुए वास्तविक अचर हैं)

iii) $(6x + y/x) + (\ln x + y)\ y' = 0,\ x \geq 1$

iv) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

E7) k के वे मान निर्धारित कीजिए जिनके लिए नीचे दिए गए समीकरण यथातथ हैं तथा k के इन मानों के लिए, हल ज्ञात कीजिए।

i) $x + kyy' = 0\ (k \neq 0)$

ii) $y + kxy' = 0\ (k \neq 0)$

iii) $(2ye^{2xy} + 2x) + k\ x\ e^{2xy} y' = 0$

व्यावहारिक रूप में, $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ के रूप के अवकल समीकरण बहुत कम ही यथातथ होते हैं, क्योंकि प्रमेय 1 के प्रतिबंध के अनुसार फलन M और N में एक संतुलन की आवश्यकता होती है। परंतु इन्हें प्रायः एक उपयुक्त फलन $F \neq 0$ से गुणा करके यथातथ समीकरण में रूपांतरित किया जा सकता है। इस Qy u d ks**समाकलन गुणक** (integrating factor) कहते हैं। अब, जो प्रश्न हमें पूछना चाहिए, वह है कि यदि

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

यथातथ नहीं है, तो फलन $F \neq 0$ किस प्रकार ज्ञात किया जाए जिससे कि

$$F[N\ dy + M\ dx] = 0$$

यथातथ हो जाए? अगले भाग में, हम इस प्रश्न का उत्तर देंगे।

7.5 समाकलन गुणक

आइए एक अति सरल समीकरण से प्रारंभ करें, जो निम्न है :

$$y' + y = 0 \tag{56}$$

इस स्थिति में, $N(x, y) = 1$ तथा $M(x, y) = y$. यहाँ $\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = 0$ तथा $\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = 1$ और इसी कारण दिया गया समीकरण यथातथ नहीं है। आइए समीकरण (56) को e^x से गुणा करें। इससे निम्न प्राप्त होता है :

$$e^x y' + e^x y = 0 \tag{57}$$

अब आप जाँच कर सकते हैं कि समीकरण (57) एक यथातथ समीकरण है। इस प्रकार, समीकरण (56) यथातथ नहीं है, परंतु जब हम समीकरण (56) को e^x से गुणा करते हैं तो परिणामी समीकरण एक यथातथ समीकरण बन जाता है। यहाँ e^x को समीकरण (56) का **समाकलन गुणक** कहा जाता है। हमने इस **समाकलन गुणक** e^x के बारे में कैसे सोचा? यह केवल अनुमान और जाँच नहीं है। दिए हुए अवकल

समीकरण के समाकलन गुणक ज्ञात करने की विधियाँ हैं, जिनकी चर्चा हम शीघ्र ही करने जा रहे हैं।

अब हम निम्न परिभाषा देते हैं :

परिभाषा : एक शून्येतर फलन, जिससे एक अ-यथातथ अवकल समीकरण को, गुणा करने पर समीकरण यथातथ हो जाता हो, उस अवकल समीकरण का समाकलन गुणक कहलाता है।

किसी अवकल समीकरण को हल करने के लिए समाकलन गुणक से परिचय सर्वप्रथम एक स्विस गणितज्ञ फेटियो ड् डवीलर ने 1687 में कराया। यह आवश्यक नहीं है कि एक दिए हुए समीकरण के लिए केवल एक ही समाकलन गुणक हो। उदाहरण के लिए निम्न समीकरण पर विचार कीजिए :

$$ydx - xdy = 0, \ x \neq 0, \ y \neq 0 \tag{58}$$

आप जाँच कर सकते हैं कि समीकरण (58) यथातथ नहीं है, परंतु $\frac{1}{y^2}$ से गुणा करने पर यह $\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$ बन जाता है, जो यथातथ है। इसे अब $d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है तथा इस प्रकार इसका हल $\frac{x}{y} = c$ है, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

अब यदि समीकरण (58) को $\frac{1}{xy}$ से गुणा करते हैं, तब यह $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$ हो जाता है, जो पुनः यथातथ है तथा इसका हल $\ln|x| - \ln|y| = c$ है।

आप यह **देख सकते** हैं कि इस हल को पहले प्राप्त किए हल में रूपांतरित किया जा सकता है।

इसके अतिरिक्त समीकरण (58) को $\frac{1}{x^2}$ से गुणा करने पर यह एक यथातथ समीकरण $\frac{y}{x^2}dx - \frac{dy}{x} = 0$ अर्थात्, $-d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ में बदल जाता है, जिसका हल $-\frac{y}{x} = c$ है।

इस प्रकार, हमने देखा कि समीकरण (58) के लिए, कुछ समाकलन गुणक $\frac{1}{\mathrm{y}^2}, \frac{1}{\mathrm{xy}}$ और $\frac{1}{\mathrm{x}^2}$ हैं।

अब प्रश्न उठता है : क्या यह स्थिति केवल समीकरण (58) के साथ ही है या सामान्यतः $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ के रूप के किसी भी समीकरण के अनंततः अनेक समाकलन गुणक हो सकते हैं?

इस प्रश्न का उत्तर प्रमेय 2 में दिया गया है। इस प्रमेय पर चर्चा करने से पहले,

आपके लिए एक प्रश्न है :

E8) निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक के लिए, यह जाँच कीजिए कि क्या फलन F जिसका (x, y) पर मान अवकल समीकरण के साथ दिया गया है, समीकरण का समाकलन गुणक है :

i) $6xy\, dx + (4y + 9x^2)\, dy = 0;\ F(x, y) = y^2$

ii) $-y^2 dx + (x^2 + xy)\, dy = 0;\ F(x, y) = \dfrac{1}{xy},\ x \neq 0,\ y \neq 0$

iii) $(-xy \sin x + 2y \cos x)\, dx + 2x \cos x\, dy = 0;\ F(x, y) = xy$

आइए अब प्रमेय 2 को लें।

प्रमेय 2 : समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ के समाकलन गुणकों की संख्या अनंत है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि दिए हुए समीकरण का एक समाकलन गुणक $g(x, y)$ है। तब, परिभाषा के अनुसार

$$g(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = 0 \qquad (59)$$

एक यथातथ अवकल समीकरण है।

अतः, एक ऐसे फलन h का अस्तित्व है जिसके लिए

$dh = g(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy]$ हो और तब $h(x, y) =$ अचर, दिए हुए समीकरण का एक हल हो।

मान लीजिए कि f, $h(x, y)$ का एक स्वेच्छ फलन है (क्योंकि h स्वयं एक (x, y)) का फलन है इसलिए f भी x और y का ही फलन होगा।) तब,

$$g(x, y).f(h)[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = f(h)\, dh = d\left[\int_0^h f(t)dt\right] \qquad (60)$$

क्योंकि समीकरण (60) के दाएँ पक्ष का पद यथातथ अवकल है, इसलिए बाएँ पक्ष का पद भी यथातथ अवकल होगा। इसलिए, $g(x, y).f(h)$ दिए हुए अवकल समीकरण का एक समाकलन गुणक है।

क्योंकि f, h का एक स्वेच्छ फलन है, अतः समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ के समाकलन गुणकों की संख्या अनंत है।

—■—

यहाँ यह **टिप्पणी** की जा सकती है कि ऊपर दिया गया तथ्य एक दिए हुए समीकरण के समाकलन गुणक को ज्ञात करने में कोई विशेष सहायता नहीं करता। साधारणतः एक दिए हुए समीकरण का समाकलन गुणक ज्ञात करना उतना ही कठिन होता है जितना की समीकरण को हल करना। अतः, यद्यपि सैद्धांतिक रूप में अवकल समीकरणों को हल करने में समाकलन गुणक शाक्तिशाली साधन है, परंतु

प्रायः व्यावहारिक रूप में इन्हें केवल विशेष स्थितियों में ही ज्ञात किया जा सकता है। समाकलन गुणक ज्ञात करने के कुछ नियम भी हैं। हम इन नियमों पर एक-एक करके चर्चा करेंगे।

समाकलन गुणक प्राप्त करने के नियम

नियम I : निरीक्षण द्वारा समाकलन गुणक प्राप्त करना : कभी-कभी अवकल समीकरण के समाकलन गुणक एक दृष्टि में केवल देखकर ही ज्ञात हो जाते हैं, जैसा कि ऊपर समीकरण (58) की स्थिति में था। हम इस संदर्भ में नीचे कुछ और उदाहरण दे रहे हैं :

उदाहरण 13: समीकरण $(1+xy)y\,dx+(1-xy)x\,dy=0,\ x>0,\ y>0$ को हल कीजिए। (61)

हल : समीकरण (61) में पदों को व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$ydx+xdy+xy^2dx-x^2ydy=0$$

$$\Rightarrow \quad d(xy)+xy^2dx-x^2ydy=0 \tag{62}$$

समीकरण (62) को देख कर, तुरंत यह प्रेक्षण होता है कि समाकलन गुणक $\frac{1}{x^2y^2}$ का प्रयोग करके समीकरण को यथातथ बनाया जा सकता है। हम

समीकरण (62) को $\frac{1}{x^2y^2}$ से गुणा करके समीकरण

$$\frac{d(xy)}{x^2y^2}+\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$$

प्राप्त करते हैं, जो समाकलनीय है। इसे समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$-\frac{1}{xy}+\ln\ x-\ln\ y=\ln\ c,$$

या, $y=cxe^{-1/xy}$ (जहाँ c एक अचर है) जो अभीष्ट हल है।

***

उदाहरण 14: समीकरण $(x^4e^x-2my^2x)dx+2mx^2y\,dy=0,\ x>0,\ y>0$ को हल कीजिए।

हल : हम दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x^4e^xdx+2m(x^2ydy-xy^2dx)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^4e^xdx+2mx^3y\,d\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

x^4 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$e^xdx+2m\,\frac{y}{x}\,d\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow d\left[e^x + m\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = 0,$$ जो एक यथातथ अवकल समीकरण है।

इस प्रकार, यहाँ $\frac{1}{x^4}$ ने समाकलन गुणक का काम किया है।

तब, अभीष्ट हल $e^x + m\left(\frac{y}{x}\right)^2 = c$ प्राप्त हो जाता है, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

* * *

यहाँ हम यह बताना चाहेंगे कि केवल निरीक्षण द्वारा समाकलन गुणक ज्ञात करना एक कौशल है, जो केवल अभ्यास से विकसित हो सकता है।

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करते समय, केवल निरीक्षण द्वारा समाकलन गुणक ज्ञात करने के अपने कौशल की जाँच कर सकते हैं।

E9) निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y(2yx + e^x)dx - e^x dy = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

ii) $ydx - xdy + \ln x\ dx = 0\ \forall\, x,\ y > 0$

iii) $(xy - 2y^2)dx - (x^2 - 3xy)\ dy = 0\ \forall\, x,\ y > 0.$

अब, हम वह नियम दे रहे हैं, जो समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ के लिए प्रयोग होता है, केवल तब जब यह समघात हो।

नियम II: समघात समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)\ dy = 0$ के लिए यदि $Mx + Ny \neq 0$, तब $\frac{1}{Mx + Ny}$ एक समाकलन गुणक होता है।

उपपत्ति : समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ लीजिए।

अब $$Ndy + Mdx = \frac{1}{2}\left[(Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + (Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right]$$

$$\therefore\ \frac{Ndy + Mdx}{Ny + Mx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + \frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right]$$

क्योंकि दिया हुआ समीकरण समघात है, इसलिए फलन M और N समान चरों x और y में घात वाले हैं तथा इस कारण $\frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}$ को $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$, के एक फलन, मान लीजिए $f\left(\frac{x}{y}\right)$, के रूप में लिखा जा सकता है।

$$\therefore\ \frac{Ndy + Mdx}{Ny + Mx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[d\,(\ln|xy|) + f\,(e^{\ln|x/y|})\ d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[d(\ln|xy|) + dF\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)\right],\ \text{जहाँ}\ dF\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right) = f(e^{\ln|x/y|})\ d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$$

$$= d\left[\frac{1}{2}\ln|xy| + \frac{1}{2}F\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)\right] \tag{63}$$

क्योंकि समीकरण (63) का दायाँ पक्ष एक यथातथ अवकल है, इसलिए इससे यह पता चलता है कि $\frac{1}{Ny+Mx}$ समघात समीकरण

$M(x,\,y)dx + N(x,\,y)\,dy = 0$ का एक समाकलन गुणक है।

***

इस नियम को स्पष्ट करने के लिए अब हम, कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 15: समीकरण $(x^2y - 2xy^2)\,dx - (x^3 - 3x^2y)\,dy = 0\ \forall\ x,\,y > 0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ दिया हुआ समीकरण समघात है, जिसमें

$N(x,\,y) = -x^3 + 3x^2y$ और $M(x,y) = x^2y - 2xy^2$.

$\therefore\ Mx + Ny = x(x^2y - 2xy^2) + y(-x^3 + 3x^2y) = x^2y^2 \neq 0$.

$\therefore\ \frac{1}{x^2y^2}$ एक समाकलन गुणक है।

दिए हुए अवकल समीकरण को $\frac{1}{x^2y^2}$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right)dy = 0,$$

या $$\left(\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}dy\right) + 3\frac{dy}{y} - 2\frac{dx}{x} = 0,$$

या $$d\left(\frac{x}{y}\right) + d\,(3\ln y - 2\ln x) = 0.$$

अतः इसका हल है :

$$\frac{x}{y} + 3\ln y - 2\ln x = c_1,$$

अर्थात्, $y^3 = cx^2e^{-x/y}$, जहाँ c_1 और c अचर हैं।

***

नोट: यदि $Mx + Ny = 0$ हो, तो $\frac{M}{N} = -\frac{y}{x}$ होगा। तब दिया हुआ समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ के रूप में बदल जाता है, जिसका हल सीधे $x = cy$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 16: समीकरण $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx},\ x > 0,\ y > 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को $y^2 dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह एक समघात समीकरण है, जिसमें $N(x, y) = x^2 - xy^2$ और $M(x, y) = y^2$ है।

$\therefore\ Mx + Ny = xy^2 + yx^2 - xy^2 = yx^2 \neq 0$.

$\therefore\ \frac{1}{yx^2}$ एक समाकलन गुणक है।

दिए हुए समीकरण को $\frac{1}{yx^2}$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{y}{x^2}\,dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

अब $M(x, y) = \frac{y}{x^2},\ N(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ तथा $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

अतः समीकरण यथातथ है।

चरण 1: y को एक अचर मानते हुए, x के सापेक्ष $M(x, y)$ को समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\int \frac{y}{x^2}\,dx = -\frac{y}{x}.$$

चरण 2: y के सापेक्ष $N(x, y)$ के उन पदों को समाकलित करने पर, जिनमें x नहीं है, हमें प्राप्त होता है :

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \ln\ y$$

चरण 3: अभीष्ट हल है :

$$-\frac{y}{x} + \ln\ y = c$$

या $\frac{y}{x} = \ln\,(c_1 / y)$, जहाँ c और c_1 अचर हैं।

* * *

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E10) निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(x^4 + y^4)\, dx - xy^3\, dy = 0,\ x,\ y > 0$.

ii) $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0,\ \ x,\ y > 0$.

आइए समाकलन गुणक ज्ञात करने के एक और नियम पर विचार करें।

नियम III: जब $Mx - Ny \neq 0$ हो तथा अवकल समीकरण $N(x, y)\,dy + M(x, y)dx = 0$ को $y\,f_1(xy)dx + x\,f_2(xy)\,dy = 0$ के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ $f_1(xy)$ और $f_2(xy)$, xy, के फलन हैं, तब $\dfrac{1}{Mx - Ny}$ एक समाकलन गुणक होता है।

उपपत्ति : यदि समीकरण $M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$ को $y\,f_1(x\,y)\,d\,x + x\,f_2(x\,y)\ d\,y = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है, तो स्पष्ट रूप से

$$\frac{N}{x\,f_2(x\,y)} = \frac{M}{y\,f_1(x\,y)} = \lambda,$$ (मान लीजिए) होगा, जहाँ

$x\,f_2\ (x\,y) \neq 0$ और $y\,f_1\ (x\,y) \neq 0$.

$\therefore\ \ N = \lambda x\,f_2(x\,y)$ और $M = \lambda y\,f_1\ \ (x\,y)$.

साथ ही, $$Ndy + Mdx = \frac{1}{2}\left[(Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + (Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right]$$

$$\therefore\ \ \frac{Ndy + Mdx}{Mx - Ny} = \frac{1}{2}\left[\frac{Mx + Ny}{Mx - Ny}\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2}\, d(\ln|xy|) + d\left(\left|\ln\frac{x}{y}\right|\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(xy)\ d(\ln|xy|) + d\left(\left|\ln\frac{x}{y}\right|\right)\right]$$ जहाँ, $f(xy) = \dfrac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2}$.

$$= \frac{1}{2}\left[d\,F(\ln|xy|) + d\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)\right]$$

$$= d\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{1}{2}\ F(\ln|xy|)\right]$$

जो एक यथातथ अवकल है। जहाँ, $dF(\ln|xy|) = f(xy)\ d(\ln|xy|)$.

अतः, $\dfrac{1}{Mx-Ny}$ एक समाकलन गुणक है।

***

अब हम इस नियम को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं :

उदाहरण 17: समीकरण $y(xy+2x^2y^2)\,dx + x(xy - x^2y^2)\,dy = 0, \forall\, x, y > 0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $N = x(xy - x^2y^2)$ तथा $M = y(xy+2x^2y^2)$.

$$\therefore \quad Mx - Ny = xy[xy + x^2y^2 - xy + 2x^2y^2]$$

$$= 3x^3y^3 \neq 0$$

$\therefore \quad \dfrac{1}{3x^3y^3}$ एक समाकलन गुणक है।

दिए हुए समीकरण को $\dfrac{1}{3x^3y^3}$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{3x^3y^2}(xy+2x^2y^2)\,dx + \frac{1}{3x^2y^3}(xy - x^2y^2)\,dy = 0$$

या $$\frac{dx}{3x^2y} + \frac{2dx}{3x} + \frac{dy}{3xy^2} - \frac{dy}{3y} = 0$$

या $$\left[\frac{dx}{3x^2y} + \frac{dy}{3xy^2}\right] + \frac{2}{3}\,\frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\,\frac{dy}{y} = 0$$

या $$d\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{xy} + \frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln y\right) = 0$$

अतः इसका हल है :

$-\dfrac{1}{3xy} + \dfrac{2}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\ln y = c_1$ जहाँ, c_1 एक अचर है।

या $-\dfrac{1}{xy} + \ln x^2 - \ln y = 3c_1 = c$ जहाँ, c एक स्वेच्छ अचर है।

या $\ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = c + \dfrac{1}{xy}$.

★★★

नोट : यदि $Mx - Ny = 0$, अर्थात् $\dfrac{M}{N} = \dfrac{y}{x}$ तो दिया हुआ समीकरण

$Mdx + Ndy$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ रूप का हो जाएगा जिसका हल $xy = c$ होगा।

उदाहरण 18: समीकरण

$(xy\sin xy + \cos xy)\,y\,dx + (xy\sin xy - \cos xy)\,x\,dy = 0,\ x > 0,\ y > 0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $N(x, y) = (xy\sin xy - \cos xy)x$ तथा

$M(x, y) = (xy\sin xy + \cos xy)y$.

$$\therefore \quad Mx - Ny = xy[xy\sin xy + \cos xy - xy\sin xy + \cos xy]$$

$$= 2xy\cos xy \neq 0$$

$\therefore \quad \dfrac{1}{2xy\cos xy}$ एक समाकलन गुणक है।

दिए हुए समीकरण के दोनों पक्षों को $\dfrac{1}{2xy\cos xy}$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{2}\left(y\tan xy + \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{2}\left(x\tan xy - \frac{1}{y}\right) dy = 0$$

या $$\frac{1}{2}(y\tan xy\ dx + x\tan xy\ dy) + \frac{1}{2x}dx - \frac{1}{2y}dy = 0$$

या $$\frac{1}{2}d\ [\ln\sec\ (xy)] + \frac{1}{2}\left[\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right] = 0$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम पाते हैं :

$$\ln\sec\ (xy) + \ln x - \ln y = \ln c$$

या $$\ln\left[\frac{x}{y}\sec(xy)\right] = \ln c$$

या $\dfrac{x}{y}\sec xy = c$, जो अभीष्ट हल है जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

* * *

इससे पहले ही हम अगले नियम पर जाएँ, आपके लिए यह प्रश्न हैं :

E11) निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y(x^2y^2 + 2)\ dx + x(2 - 2x^2y^2)\ dy = 0,\ x > 0,\ y > 0$.

ii) $(x^2y^2 + xy + 1)y\ dx + (x^2y^2 - xy + 1)x\ dy = 0,\ x > 0,\ y > 0$.

अब हम एक दिए हुए अवकल समीकरण का समाकलन गुणक ज्ञात करने के लिए एक अन्य नियम दे रहे हैं :

नियम IV : जब $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ केवल x का एक फलन, मान लीजिए $f(x)$, हो तब समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ का एक समाकलन गुणक $e^{\int f(x)\,dx}$ होता है।

उपपत्ति : समीकरण $e^{\int f(x)\,dx}(Mdx + Ndy) = 0$ लीजिए। (64)

मान लीजिए कि $r = M e^{\int f(x) dx}$ और $s = N e^{\int f(x) dx}$.

तब, समीकरण (64) का रूप $r\,dx + s\,dy = 0$ हो जाता है।

अब, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\partial M}{\partial y} e^{\int f(x)\,dx}$.

तथा $\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial x} e^{\int f(x)\,dx} + N e^{\int f(x)\,dx} . f(x)$

$$= e^{\int f(x)\,dx}\left[\frac{\partial N}{\partial x} + N\ f(x)\right]$$

$$= e^{\int f(x)\,dx}\left[\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] \left[\text{ क्योंकि, } \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)\right]$$

$$= \frac{\partial M}{\partial y} e^{\int f(x)\,dx}$$

$$= \frac{\partial r}{\partial y}$$

अतः, $\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial y}$, जो दर्शाता है कि समीकरण $r\ dx + s\ dy = 0$, अर्थात्,

$e^{\int f(x)\,dx}(Mdx + Ndy) = 0$, एक यथातथ समीकरण है।

इसलिए, $e^{\int f(x)\,dx}$ समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ का एक समाकलन गुणक है।

—■—

हम इस नियम को एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करते हैं :

उदाहरण 19 : समीकरण $(x^2 + y^2)\,dx - 2xydy = 0, x > 0, y > 0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $N = -2xy,\ M = x^2 + y^2$.

$\therefore\ \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$ तथा $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -2y$, इस प्रकार $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

यहाँ $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{-2xy}(2y + 2y) = -\dfrac{2}{x} = f(x)$, जो केवल x का एक फलन है।

$\therefore$ समाकलन गुणक $= e^{\int -\frac{2dx}{x}} = e^{-2\ln|x|} = \dfrac{1}{x^2}$

दिए हुए समीकरण को $\dfrac{1}{x^2}$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{x^2}(x^2 + y^2)\ dx - \frac{2y}{x} dy = 0,$$

अर्थात्, $dx + \dfrac{y^2}{x^2}\ dx - \dfrac{2y}{x} dy = 0$.

अर्थात्, $dx + d\left(-\frac{y^2}{x}\right) = 0$ (65)

समीकरण (65) को समाकलित करने पर, अभीष्ट हल $x - \frac{y^2}{x} = c$ (एक अचर) प्राप्त होता है।

* * *

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E12) $x > 0, y > 0$ के लिए निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए।

i) $\left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2\right)dx + \frac{1}{4}(x + xy^2)dy = 0$.

ii) $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$.

नियम V: जब $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ केवल y का एक फलन, मान लीजिए $f(y)$ हो, तब अवकल समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ का एक समाकलन गुणक $e^{-\int f(y)\,dy}$ होता है।

इस नियम की उपपत्ति नियम IV की उपपत्ति की तरह ही है तथा हम इसे आपके अभ्यास के लिए छोड़ रहे हैं।

E13) ऊपर दिए गए नियम V को सिद्ध कीजिए।

यहाँ हम नियम V के प्रयोग को निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कर रहे हैं :

उदाहरण 20 : समीकरण $(3x^2y^4 + 2xy)\,dx + (2x^3y^3 - x^2)\,dy = 0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $N = 2x^3y^3 - x^2$ तथा $M = 3x^2y^4 + 2xy$.

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 12x^2y^3 + 2x \text{ तथा } \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y^3 - 2x$$

यहाँ, $$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{3x^2y^4 + 2xy}(12x^2y^3 + 2x - 6x^2y^3 + 2x)$$

$$= \frac{2(3x^2y^3 + 2x)}{y(3x^2y^3 + 2x)} = \frac{2}{y},$$ जो केवल y का एक फलन है।

अतः, समाकलन गुणक $= e^{\int\left(\frac{-2}{y}\right)dy} = e^{-2\ln|y|} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$.

दिए हुए समीकरण को समाकलन गुणक y^{-2} से गुणा करने तथा पदों को व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(3x^2y^2dx + 2x^3ydy) + \left(\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy\right) = 0$$

अर्थात्, $d(x^3y^2)+d\left(\frac{x^2}{y}\right)=0$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम पाते हैं :

$x^3y^2+\frac{x^2}{y}=c$, जहाँ c समाकलन अचर है।

अतः, $x^3y^3+x^2=cy$, जो अभीष्ट हल है।

* * *

उदाहरण 21: समीकरण
$(xy^2-x^2)dx+(3x^2y^2+x^2y-2x^3+y^2)dy=0,\ x\neq 0,\ y\neq 0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $M(x,\ y)=xy^2-x^2, N(x,\ y)=3x^2y^2+x^2y-2x^3+y^2$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy$, और $\frac{\partial N}{\partial x}=6xy^2+2xy-6x^2$.

$$\therefore\ \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{xy^2-x^2}(6xy^2+2xy-6x^2-2xy)=\frac{-6(xy^2-x^2)}{xy^2-x^2}=-6$$

$\therefore$ समाकलन गुणक $=e^{\int 6dy}=e^{6y}$

दिए हुए समीकरण को e^{6y} से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(xy^2-x^2)e^{6y}dx+(3x^2y^2+x^2y-2x^3+y^2)e^{6y}\ dy=0$$

जो एक यथातथ समीकरण है।

चरण 1 : y को अचर मानते हुए, $M(x,\ y)$ को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\int(xy^2-x^2)e^{6y}dx=\left(\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{x^3}{3}\right)e^{6y}.$$

चरण 2 : y के सापेक्ष $N(x,\ y)$ के उन पदों को समाकलित करने पर, जिनमें x नहीं है, हम प्राप्त करते हैं :

$$\int y^2e^{6y}dy=\frac{e^{6y}}{6}\left(y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{18}\right).$$

चरण 3 : अभीष्ट हल है :

$$e^{6y}\left[\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6}\left(y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{18}\right)\right]=c$$, एक अचर।

***

और अब आपके लिए एक प्रश्न :

E14) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\, dy = 0,\ x > 0,\ y > 0$.

ii) $(xy^3 + y)dx + 2(x^2y^2 + x + y^4)dy = 0,\ x > 0,\ y > 0$.

अंत में, अवकल एक समीकरणों के समाकलन गुणक ज्ञात करने के लिए, निम्न नियम पर विचार कीजिए :

नियम VI: यदि किसी अवकल समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ को $x^{\alpha}y^{\beta}(mydx + nxdy) = 0$ के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ α, β, m और n अचर है; तो $x^{km-1-\alpha}.\ y^{kn-1-\beta}$ एक समाकलन गुणक होता है, जहाँ k कोई भी अचर मान ले सकता है।

उपपत्ति : दिए हुए समीकरण को $x^{km-1-\alpha}.\ y^{kn-1-\beta}$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^{km-1}y^{kn-1}(mydx + nxdy) = 0,$$

या $\quad km\, x^{km-1}y^{kn}dx + kn\, x^{km}y^{kn-1}dy = 0$, जहाँ k एक अचर है।

या $\quad d(x^{km}y^{kn}) = 0$, जो एक यथातथ अवकल समीकरण है।

अतः, $\quad x^{kn-1-\alpha}y^{kn-1-\beta}$ अवकल समीकरण का एक समाकलन गुणक है।

ध्यान दीजिए कि यदि दिया हुआ अवकल समीकरण

$x^{\alpha}y^{\beta}(my\,dx + nx\,dy) + x^{\alpha_1}y^{\beta_1}(m_1y\,dx + n_1x\,dy) = 0$ के रूप का हो, जहाँ $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, m, n, m_1$ और n_1 अचर हैं, तब भी समाकलन गुणक ज्ञात किया जा सकता है।

नियम VI के अनुसार $x^{km-1-\alpha},\ y^{kn-1-\beta}$ प्रथम पद को यथातथ बनाएगा जबकि $x^{k_1m_1-1-\alpha_1},\ y^{k_1n_1-1-\beta_1}$ द्वितीय पद को जहाँ k और k_1 अचर हैं।

ये दोनों गुणक अभिन्न (identical) होंगे, यदि

$$km - 1 - \alpha = k_1m_1 - 1 - \alpha_1$$

और $\quad kn - 1 - \beta = k_1n_1 - 1 - \beta_1.$

इन दोनों बीजीय समीकरणों को संतुष्ट करने वाले k और k_1 के मान ज्ञात किए जा सकते हैं। तब, इनमें से प्रत्येक गुणक दिए हुए समीकरण का समाकलन गुणक होगा। इस नियम को स्पष्ट करने के लिए अब, हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

—■—

उदाहरण 22: समीकरण $(y^3 - 2yx^2)\, dx + (2xy^2 - x^3)\, dy = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण के पदों को व्यवस्थित करके, हम लिख सकते हैं :

$$y^2(ydx+2xdy)-x^2(2ydx+xdy)=0 \tag{66}$$

प्रथम पद के लिए, $\alpha=0, \beta=2, m=1$ और $n=2$ अतः इसका समाकलन गुणक $x^{k-1}y^{2k-1-2}$ है।

द्वितीय पद के लिए, $\alpha_1=2, \beta_1=0, m_1=2, n_1=1$ अतः द्वितीय पद का समाकलन गुणक, $x^{2k_1-1-2}y^{k_1-1}$ है।

ये दोनों समाकलन गुणक अभिन्न (identical) होंगे, यदि

और
$$\left.\begin{array}{r} k-1=2k_1-1-2 \\ 2k-1-2=k_1-1 \end{array}\right\} \tag{67}$$

k और k_1 के लिए, समीकरण-निकाय (67) को हल करने पर, हम $k=2$ और $k_1=2$ प्राप्त करते हैं और इसी कारण समीकरण (66) का समाकलन गुणक दोनों मानों के लिए एक ही है, अर्थात्, xy है। समीकरण (66) को xy से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$xy^3(ydx+2xdy)-x^3y(2ydx+xdy)=0$$

$$\Rightarrow\ (xy^4dx+2x^2y^3dy)-(2x^3y^2dx+x^4ydy)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}(2xy^4dx+4x^2y^3dy)-\frac{1}{2}(4x^3y^2dx+2x^4y^4dy)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}d(x^2y^4)-\frac{1}{2}d(x^4y^2)=0 \tag{68}$$

समीकरण (68) को समाकलित करने पर, हमें अभीष्ट हल निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{x^2y^4-x^4y^1}{2}=c_1 \quad \text{(एक अचर)}$$

या $\quad x^2y^2(y^2-x^2)=2c_1=c \quad$ (एक अचर)

***

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 22 का अवकल समीकरण एक समघात अवकल समीकरण है, जहाँ $Mx+Ny\neq 0$. इसलिए इस समीकरण में नियम II का प्रयोग भी किया जा सकता है।

उदाहरण 23: समीकरण $(2y\,dx+3x\,dy)+2xy(3y\ dx+4x\ dy)=0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को पुनः निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(2y\ dx+3x\ dy)+xy(6y\ dx+8x\ dy)=0$$

प्रथम पद के लिए $a=0, \beta=0, m=2, n=3$ और $n=3$ है और इसलिए समाकलन गुणक $x^{2k-1}y^{3k-1}$ है।

द्वितीय पद के लिए,

$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1, m_1 = 6, n_1 = 8$ तथा समाकलन गुणक $x^{6k_1-1}\, y^{8k_1-2}$ है।

दोनों समाकलन गुणक अभिन्न होंगे, यदि

और
$$\left.\begin{aligned} 2k-1 &= 6k_1-2 \\ 3k-1 &= 8k_1-2 \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

समीकरण निकाय (69) को k और k_1 के लिए, हल करने पर, $k=1$ और $k_1 = 1/2$ प्राप्त होता है। इसलिए, दिए हुए समीकरण का समाकलन गुणक xy^2 है। इस समीकरण को xy^2 से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$xy^2(2y\,dx + 3x\,dy) + 2x^2y^3(3y\,dx + 4x\,dy) = 0$$

या
$$(2xy^3 + 6x^2y^4)dx + (3x^2y^2 + 8x^3y^3)dy = 0 \tag{70}$$

अब, आप सरलता से जाँच कर सकते हैं कि समीकरण (70) एक यथातथ समीकरण है, अर्थात्, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, जहाँ

$M(x, y) = 2xy^3 + 6x^2y^4$ तथा $N(x, y) = 3x^2y^2 + 8x^3y^3$.

चरण 1: y को एक अचर मानते हुए, x के सापेक्ष $M(x, y)$ को समाकलित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\int (2xy^3 + 6x^2y^4)\,dx = x^2y^3 + 2x^3y^4$$

चरण 2: $N(x, y)$ में ऐसा कोई पद नहीं है, जिसमें x नहीं है।

चरण 3: अभीष्ट हल है :

$x^2y^3 + 2x^3y^4 = c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

***

दी हुई समस्या में किस नियम का प्रयोग किया जाना है यह केवल विभिन्न प्रकार की अनेक समस्याएँ हल करने के बाद ही समझ में आएगा।

निम्न प्रश्नों को हल करते समय आप कुछ अभ्यास कर सकेंगे तथा अभी तक आपने जो सीखा है, उसकी जाँच भी कर सकेंगे :

E15) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0,\ x > 0,\ y > 0$

ii) $x^2y\,dx - (x^3 + y^3)\,dy = 0$

iii) $(y^4 + 2y)\,dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)\,dy = 0\ \forall\ x, y > 0$

iv) $(y^2 + 2x^2y)\,dy + (2x^3 - xy)\,dy = 0$

v) $(2x^2y - 3y^4)\,dx + (3x^3 + 2xy^3)\,dy = 0$

E16) निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(x+y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$, a एक अचर है।

ii) $\dfrac{x+y-a}{x+y-b} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+a}{x+y+b}$, a और b अचर हैं।

iii) $1+\left(\dfrac{x}{y} - \sin y\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

iv) $(3y^2 + 2xy) = (2xy + x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0 \;\; \forall x > 0,\; y > 0$.

v) $y + y^2 + \left(2xy + \dfrac{y}{1+y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0,\; x > 0,\; y > 0$

vi) $2x^2y^3 + 3x(1+y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0,\; x > 0,\; y > 0$

vii) $(x+y-1)\,dy - (x-y-3)\,dx = 0$

अभी तक हमने इस इकाई में जो कुछ अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, हम इसे यहीं समाप्त करते हैं।

7.6 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ **पृथक्करणीय समीकरण या चर-पृथक्करणीय वाला समीकरण** कहलाता है, यदि $f(x, y) = M(x)\,N(y)$.

   पृथक्करणीय समीकरण को हल करने के लिए, हम इसे किसी $N(y)$ और $M(x)$ के लिए,

   $$N(y)\frac{dy}{dx} + M(x) = 0$$

   के रूप में लिख सकते हैं, जिसे समाकलित करने पर अभीष्ट हल प्राप्त हो जाता है।

2. फलन h घात n का एक **समघात फलन** कहलाता है, जहाँ n एक वास्तविक संख्या है, यदि हम सभी x, y और $\lambda > 0$ के लिए, $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x, y)$ लिख सकते हों।

3. अवकल समीकरण

   $$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

समघात अवकल समीकरण कहलाता है, यदि f घात शून्य का एक समघात फलन हो।

4. समघात अवकल समीकरण प्रतिस्थापन $y = vx$ द्वारा पृथक्करणीय समीकरण में समानीत हो जाता है, जहाँ v, x का कोई फलन है।

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ जहाँ a, b, c, a', b', c' अचर हैं तथा $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ के रूप के समीकरण को प्रतिस्थापन $x = X+h, y = Y+k$, द्वारा समघात समीकरण में बदला जा सकता है, जहाँ h और k ऐसे हैं कि $ah+bk+c=0$ और $a'h+b'k+c'=0$.

   यदि $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{1}{m}$ (मान लीजिए), तो प्रतिस्थापन $ax+by=v$ द्वारा समीकरण को पृथक्करणीय समीकरण में बदला जा सकता है।

6. एक यथातथ अवकल समीकरण एक यथातथ अवकल को शून्य के बराबर रखकर प्राप्त किया जाता है।

7. अवकल समीकरण

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

   यथातथ होता है, यदि और केवल यदि

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x, y) \text{ बशर्ते}$$

   $M, N, \frac{\partial N}{\partial x}$ और $\frac{\partial M}{\partial y}$ चरों x और y के संतत फलन हों।

8. एक शून्येतर फलन, जिससे एक अ-यथातथ अवकल समीकरण को गुणा करने पर, समीकरण यथातथ हो जाता है, वह समीकरण का **समाकलन गुणक** कहलाता है।

9. समीकरण $M(x,y)dx + N(x, y)dy = 0$ के समाकलन गुणकों की संख्या अनंत होती है।

10. समघात समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, के लिए, यदि

    $Mx + Ny \neq 0$, तो $\frac{1}{Mx+Ny}$ उसका एक समाकलन गुणक होता है।

11. यदि अवकल समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ को $yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$, के रूप में लिखा जा सकता हो, तो $\frac{1}{Mx-Ny}$ समीकरण का एक समाकलन गुणक होता है, बशर्ते $Mx - Ny \neq 0$.

12. जब $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ केवल x का एक फलन, मान लीजिए $f(x)$ हो, तब $e^{\int f(x)\,dx}$ समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ का एक समाकलन गुणक होता है।

13. जब $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ केवल y का एक फलन, मान लीजिए $f(y)$ हो तब $e^{-\int f(y)\,dy}$ समीकरण $Mdx+Ndy=0$ का एक समाकलन गुणक होता है।

14. यदि अवकल समीकरण वास्तविक अचरों α, β, m, n के लिए, $x^{\alpha} y^{\beta}(my\ dx + nx\ dy) = 0$ के रूप का हो, तो समीकरण का एक समाकलन गुणक, $x^{km-1-\alpha}\ y^{kn-1-\beta}$ होता है, जहाँ k कोई भी अचर मान ले सकता है।

7.7 हल / उत्तर

E1) i) $(1-x)dy-(1+y)dx=0$

$$\Rightarrow\ dy-(x\ dy+y\ dx)-dx=0$$

$$\Rightarrow\ dy-d(xy)-dx=0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y-xy-x=c, \text{ या } y=\frac{c+x}{1-x},\ x\neq 1$$

ii) $\sin^{-1} y+\sin^{-1} x=c$

iii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dx}{a+x}=\frac{dy}{y-ay^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dx}{a+x}=\left(\frac{1}{y}+\frac{a}{1-ay}\right)dy$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y=c(a+x)\,(1-ay)$$

iv) $\tan y=c\ (1-e^{x})^{3}$

v) $e^{y}=e^{x}+\frac{x^{3}}{3}+c$

E2) i) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{2y}{1+y^2}\,\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}=0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$\ln\ (1+y^2) - \ln\ x = \ln\ c$, क्योंकि $x > 0$.

या $\dfrac{1+y^2}{x} = c$ दिया गया है $y(2) = 3$

अतः हम प्राप्त करते हैं कि $c = 5$ और इसलिए $\dfrac{1+y^2}{x} = 5$.

ii) $y = y_0 e^{-2x^2}$

iii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$e^{-y} dy = xe^{-x^2}\, dx$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$e^{-y} = \frac{e^{-x^2}}{2} + c$$

आदि प्रतिबंध का प्रयोग करके, हम $c = \dfrac{1}{2}$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, $e^{-y} = \dfrac{e^{-x^2}+1}{2}$

या $e^{y} = \dfrac{2}{1+e^{-x^2}}$

या $y = \ln\left|\dfrac{2}{1+e^{-x^2}}\right|$

iv) $y^2 - y_0^2 = 2g\,(x - x_0)$

E3) i) $y = cx$

ii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+(y/x)}{3+2(y/x)}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण में, $(y/x) = v$, प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{2+v}{3+2v}$$

$$\Rightarrow\ x\frac{dv}{dx} = \frac{2(1-v-v^2)}{3+2v}$$

$$\Rightarrow\ \frac{(3+2v)}{1-v-v^2}\,dv = 2\,\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+2v}{1-v-v^2}dv + \frac{2}{1-v-v^2}dv = \frac{2}{x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+2v}{1-v-v^2}dv - \frac{2dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{2}{x}dx$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम पाते हैं :

$$-\ln|1-v-v^2| - \frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{v+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{v+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| = 2\ln|x| + \ln c$$

ऊपर समीकरण में $v = y/x$ प्रतिस्थापित करने पर तथा सरल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(y^2+xy-x^2).\left[\frac{2y+(1+\sqrt{5})x}{2y+(1-\sqrt{5})x}\right]^{\frac{2}{\sqrt{5}}} = c$$

iii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x)\sin(y/x)-1}{\sin(y/x)}$$

$(y/x) = v$ रखने तथा ऊपर (ii) की तरह ही हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln|x| = \cos(y/x) + c$$

iv) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = (y/x)\,[\ln(y/x)+1]$$

$(y/x) = v$ प्रतिस्थापित करने पर समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\frac{dv}{v\ln v} = \frac{dx}{x}$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln v = cx$$

$v = y/x$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें निम्न हल प्राप्त होता है :

$$y = xe^{cx}$$

v) $cx = \exp\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

E4) i) समीकरण को x^2 से भाग देने पर, यह निम्न रूप में बदल जाता है :

$$2\frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$y/x = v$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2x\frac{dv}{dx} = v + v^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{dv}{v^2+v} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv = \frac{dx}{x}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम $\left(\frac{v}{v+1}\right)^2 = cx$ प्राप्त करते हैं, जिसमें $v = y/x$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें $y^2 = cx(y+x)^2$ प्राप्त होता है।

आदि प्रतिबंध $x = 1$ पर $y = -2$ का प्रयोग करने पर, हमें $c = 4$ प्राप्त होता है तथा इसलिए अभीष्ट हल $y^2 = 4x(y+x)^2$ है।

ii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$[1 + (y/x)e^{(y/x)}] - e^{(y/x)}\frac{dy}{dx} = 0$$

$(y/x) = v$ रखने पर, चर पृथक्करणीय हो जाते हैं। परिणामी समीकरण को समाकलित करने तथा आदि प्रतिबंध $x = 1$ पर $y = 0$ का प्रयोग करके समाकलन अचर निकालने के बाद, हमें प्राप्त होता है: $\ln|x| = e^{(y/x)} - 1$.

iii) $4x \ln|(y/x)| + x \ln|x| + y - x = 0$.

iv) दिए हुए समीकरण को y^2 से भाग देने तथा $\frac{x}{y} = v$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$v + y\frac{dv}{dy} + (1 + v + v^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + \frac{dv}{(1+v)^2} = 0$$

समाकलन करने तथा $v = x/y$ प्रतिस्थापित करने के बाद, हमें प्राप्त होता है :

$$\ln|y| - \frac{x}{x+y} = c$$

आदि प्रतिबंध $y(0) = 1$ का प्रयोग करने पर, हमें $c = 0$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, $(x+y)\ln|y| - x = 0$.

E5) i) दिए हुए समीकरण की समीकरण (29) से तुलना करने पर, यह जाँच की जा सकती है कि इस स्थिति में, $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$. इस प्रकार, $x = X + h$ और $y = Y + k$ रखने पर, यह समीकरण एक समघात समीकरण $\frac{dY}{dX} = \frac{2Y - X}{Y - 3X}$ में बदल जाता है, जहाँ समीकरण $2k - h = 4$ और $k - 3h = -3$ को संतुष्ट करने वाले h और k के मान $h = 2$ और $k = 3$ प्राप्त होते हैं।

$Y = vX$ प्रतिस्थापित करने पर, ऊपर प्राप्त समघात समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\frac{v-3}{v^2 - 5v + 1} dv = -\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{2v-5-1}{v^2-5v+1}\right] dv = -2\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{2v-5}{v^2-5v+1} dv - \frac{dv}{\left(v - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2} = -2\frac{dX}{X}$$

ऊपर दिए समीकरण को समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\ln(v^2 - 5v + 1) - \frac{1}{\sqrt{21}} \ln\left|\frac{v - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}}{v - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}}\right| = -2\ln|X| + \ln|c|$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}}{v - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{21}}} = c(v^2 - 5v + 1)X^2$$

ऊपर दिए समीकरण में, $v = \frac{Y}{X} = \frac{y-3}{x-2}$ प्रतिस्थापित करने पर तथा फिर सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left[\frac{2y - (5 + \sqrt{21})x + 2(2 + \sqrt{21})}{2y - (5 - \sqrt{21})x + 2(2 - \sqrt{21})}\right]^{1/\sqrt{21}}$$

$$= c(y^2 - 5xy + x^2 + 11x + 4y - 17).$$

ii) प्रतिस्थापन $x = X + 1$, $y = Y$ दिए हुए समीकरण को निम्न समघात रूप में बदल देता है :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{7X-3Y}{7Y-3X}$$

इसमें $Y = vX$ प्रतिस्थापित करने पर, यह निम्न चर-पृथक्करणीय रूप में बदल जाता है :

$$\frac{7v-3}{7(1-v^2)}dv = \frac{dX}{X}$$

समाकलन से प्राप्त होता है :

$$(1-v^2)\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{3/7} X^2 = c_1$$

इसमें $v = \frac{Y}{X} = \frac{y}{x-1}$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(x-1-y)\ (x-1+y)\left(\frac{x-1+y}{x-1-y}\right)^{3/7} = c_1$$

या $(y-x+1)^2\ (y+x-1)^5 = c$.

iii) प्रतिस्थापन $2x+y=v$ दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में बदल देता है :

$$\frac{dv}{dx} - 2 = -\frac{v+1}{2v-1}$$

या $\frac{dv}{dx} = \frac{4v-2-v-1}{2v-1} = \frac{3v-3}{2v-1}$

या $\frac{2v-1}{v-1}\frac{dv}{dx} = 3$ या $\left(2+\frac{1}{v-1}\right)\frac{dv}{dx} = 3$

इसे समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$2v + \ln|v-1| = 3x + \ln c$

या $\ln\frac{|v-1|}{c} = (3x-2v)$

या $|v-1| = c\ e^{3x-2v}$

या $|(2x+y-1)|\, e^{2y+x} = c$ ($v = 2x+y$ रखने पर)

iv) $(x+3y) + 2\ln|(2-x-y)| = c$ (संकेत : $x+y=v$ रखिए)

E6) i) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$(y\cos x + \sin x.y') + 2xe^y + x^2e^y.y' + 2y' = 0$

या $\frac{d}{dx}(y\sin x) + \frac{d}{dx}(x^2e^y) + \frac{d}{dx}(2y) = 0$

या $\frac{d}{dx}(y\sin x + x^2e^y + 2y) = 0$

अतः, दिया हुआ समीकरण यथातथ है। समाकलित करने पर, इसके हल को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$y\sin x + x^2e^y + 2y = c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

ii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(bx+cy)\frac{dy}{dx} + (ax+by) = 0$$

आप जाँच कर सकते हैं कि यह समीकरण यथातथ है। इसका हल है :

$bxy + c\frac{y^2}{2} + a\frac{x^2}{2} = c_1$, जहाँ c_1 एक स्वेच्छ अचर है।

iii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$6x + \left(\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}\right) + y\frac{dy}{dx} = 0$$

या $\frac{d}{dx}\left(3x^2 + y\ln x + \frac{1}{2}y^2\right) = 0$

इस प्रकार, यह समीकरण यथातथ है तथा इसका अभीष्ट हल एक अस्पष्ट समीकरण $3x^2 + y\ln x + \frac{1}{2}y^2 = c$ से प्राप्त होता है।

iv) आप सरलता से जाँच कर सकते हैं कि दिया हुआ समीकरण यथातथ है। इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + ye^y dy + \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0$$

इसे समाकलित करने पर, निम्न हल प्राप्त होता है :

$$\ln x - \frac{1}{x} + e^y(y-1) + \tan^{-1} y/x = c$$

E7) i) यहाँ $N(x, y) = ky, M(x, y) = x$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0, \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

अतः, दिया हुआ समीकरण $k(\neq 0)$ के सभी मानों के लिए यथातथ है। अभीष्ट हल निम्न से प्राप्त है :

$$x^2 + ky^2 = c, \quad k \neq 0.$$

ii) यहाँ, $N(x, y) = kx, M(x, y) = y$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = k, \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

दिए हुए समीकरण के यथातथ होने के लिए, हमें $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ प्राप्त होना चाहिए। इसके लिए $k = 1$ होना चाहिए। $k = 1$ के लिए दिया हुआ समीकरण $y + xy' = 0$ बन जाता है।

या $\frac{d}{dx}(xy) = 0$

इसलिए, $k = 1$ के लिए, इसके हल को $xy = c$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

iii) $k = 2, e^{2xy} + x^2 = c$

E8) i) यदि $F(x, y) = y^2$ एक समाकलन गुणक है, तो $y^2[6xydx + (4y + 9x^2)dy] = 0$ को एक यथातथ समीकरण होना चाहिए। यहाँ

$$N(x, y) = 4y^3 + 9x^2y^2 \text{ और } M(x, y) = 6xy^3.$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 18xy^2 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

इस प्रकार $F(x, y) = y^2$ एक समाकलन गुणक है।

ii) $F(x, y)[-y^2dx + (x^2 + xy)dy] = 0$

$$\Rightarrow N(x, y) = \frac{x}{y} + 1, M(x, y) = \frac{-y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y} \text{ और } \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x}.$$

$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y}$ तथा $F(x, y)$ दिए हुए समीकरण का समाकलन गुणक नहीं है।

iii) $F(x, y) = xy$ दिए हुए समीकरण का एक समाकलन गुणक है।

E9) i) समाकलन गुणक $= \frac{1}{y^2}$; हल $x^2 + \frac{1}{y}e^x = c$ है।

ii) समाकलन गुणक $= \frac{1}{x^2}$; हल $y + \ln x + cx + 1 = 0$ है।

iii) समाकलन गुणक $= \frac{1}{xy^2}$; हल $\frac{x}{y} + \ln\left(\frac{y^3}{x^2}\right) = c$ है।

E10) i) यहाँ $M(x, y) = -xy^3$, $N(x, y) = x^4 + y^4$

$Mx + Ny = x^5 \neq 0$ है।

$\therefore \frac{1}{x^5}$ एक समाकलन गुणक है।

दिए हुए समीकरण को $\frac{1}{x^5}$ से गुणा करके तथा सरल करके निम्न रूप में रखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^4}{xy^3}$$

$y = vx$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v^3 dv = \frac{dx}{x}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{v^4}{4} = \ln|x| + c$$

$\Rightarrow \quad y^4 = 4x^4 \ln|x| + 4cx^4$ (v को y/x से प्रतिस्थापित करने पर)

जो अभीष्ट हल है।

ii) $M(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$, $N(x, y) = -x^2$

$Mx + Ny = x(x+y)^2 \neq 0$.

$\frac{1}{x(x+y)^2}$ एक समाकलन गुणक है।

दिए हुए समीकरण को समाकलन गुणक से गुणा करने पर, यह निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{(x+y)^2}\right) dx - \frac{x}{(x+y)^2} dy = 0$$

ऊपर समीकरण को समाकलित करके, अभीष्ट हल निम्न प्राप्त होता है:

$$\ln|x| - \frac{y}{x+y} = c$$

E11) i) यहाँ $N(x, y) = 2x - 2x^3y^2$, $M(x, y) = x^2y^3 + 2y$

$Mx - Ny = 3x^3y^3 \neq 0$.

$\therefore$ समाकलन गुणक $= \frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{3x^3y^3}$.

दिए हुए समीकरण को समाकलन गुणक से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{3x}+\frac{2}{3}\left(\frac{dx}{x^3y^2}+\frac{dy}{x^2y^3}\right)-\frac{2}{3y}dy=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{dx}{x}-d\left(\frac{1}{x^2y^2}\right)-\frac{2}{y}dy=0$$

$$\Rightarrow\ \ln|x|-\frac{1}{x^2y^2}-2\ln|y|=\ln c \text{ या, } \ln\frac{x}{cy^2}=\frac{1}{x^2y^2}$$

या $x=cy^2e^{1/x^2y^2}$ अभीष्ट हल है।

ii) $M(x, y)=(x^2y^2+2y+1)y,\ N(x, y)=(x^2y^2-xy+1)x$

$Mx-Ny=2x^2y^2\neq 0$.

$\therefore$ समाकलन गुणक $=\dfrac{1}{2x^2y^2}$

दिए हुए समीकरण को इस गुणक से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(y\,dx+x\,dy)+\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)+\left(\frac{1}{x^2y}dx+\frac{1}{xy^2}dy\right)=0$$

या $\quad d(xy)+\dfrac{dx}{x}-\dfrac{dy}{y}+\dfrac{d(xy)}{x^2y^2}=0$

समाकलित करने पर, हम $xy+\ln x-\ln y-1/xy=c$ (एक अचर) प्राप्त करते हैं, जो अभीष्ट हल है।

E12) i) $M(x, y)=y+\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{x^2}{2},\ N(x,y)=\dfrac{x+xy^2}{4}$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{3}{x}$$

इस प्रकार, $e^{\int\frac{3}{x}dx}=e^{3\ln x}=x^3$ एक समाकलन गुणक है।

दिए हुए समीकरण को x^3 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2x^5dx+(x^4dy+4x^3y\,dx)+\frac{1}{3}(x^4 3y^2dy+4x^3y^3dx)=0$$

या $\quad 2x^5dx+d(x^4y)+\dfrac{1}{3}d(x^4y^3)=0$

समाकलित करने पर, अभीष्ट हल

$x^6+3x^4y+x^4y^3=c$ है।

ii) समाकलन गुणक $=x$, है। अतः हल $4x^3+3x^4+6x^2y^2=c$ है।

E13) समीकरण $e^{-\int f(y)\,dy}[Mdx + Ndy] = 0$ पर विचार कीजिए।

मान लीजिए कि $r = Me^{-\int f(y)\,dy}$ और $s = Ne^{-\int f(y)\,dy}$

तब, $\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} e^{-\int f(y)dy}$

तथा $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} e^{-\int f(y)dy} - Me^{-\int f(y)dy} f(y)$

$$= e^{-\int f(y)dy}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - Mf(y)\right]$$

$$= e^{-\int f(y)dy}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}\right]\left[\text{क्योंकि } \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(y)\right]$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} e^{-\int f(y)dy} = \frac{\partial s}{\partial x}$$

अतः, समीकरण $r\,dx + s\,dy = 0$ यथातथ है जो अभीष्ट परिणाम है।

E14) i) समाकलन गुणक $= \frac{1}{y^4}$; हल $x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$ है।

ii) $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{kdy} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}$.

समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y$.

दिए हुए समीकरण को y से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$(xy^4 + y^2)dx + 2(x^2y^3 + xy + y^5)dy = 0$ जो एक

यथातथ समीकरण है।

समाकलित करने पर, अभीष्ट हल $3x^2y^4 + 6xy^2 + 2y^6 = c$ है।

E15) i) यहाँ $N = 2y, M = x^2 + y^2 + 2x$

$\therefore \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2y}(2y - 0) = 1 = f(x)$, मान लीजिए।

$\therefore$ समाकलन गुणक $= e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int dx} = e^x$ (नियम IV के प्रयोग से)

हल $e^x(x^2 + y^2) = c$ है।

ii) नियम II का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$y = c\, e^{x^3/3y^3}$.

iii) यहाँ, $M = y^4 + 2y; N = xy^3 + 2y^4 - 4x$

$$\therefore \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{y^2+2y}(4y^3 + 2 - y^3 + 4) = \frac{3y^3+6}{y(y^3+2)} = \frac{3}{y}$$

नियम V के प्रयोग से, समाकलन गुणक $= e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3\ln|y|} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$

दिए हुए समीकरण को $\frac{1}{y^3}$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left(y + \frac{2}{y^2}\right) + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

या $$\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y^3}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

या $$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{y^2}\right) = 0$$

अतः हल है : $xy + y^2 + \frac{2x}{y^2} = c$

iv) $x^{-5/2}y^{-1/2}$, एक समाकलन गुणक है; हल है :

$6\sqrt{xy} - x^{-3/2}y^{3/2} = c$ (संकेत : नियम VI का प्रयोग कीजिए)

v) $x^{-\frac{49}{13}}y^{-\frac{28}{13}}$, एक समाकलन गुणक है; हल है :

$5\left[\frac{y^2}{x^3}\right]^{12/13} - 12[(x^2y^3)^{-5/13}] = c$ (संकेत : नियम VI का प्रयोग कीजिए)

E16) i) दिया हुआ समीकरण $(x+y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$ है

$x + y = v$ रखने पर, दिया हुआ समीकरण निम्न रूप से बदल जाता है :

$$v^2\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = a^2$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{a^2}{a^2+v^2}\right)\frac{dv}{dx} = 1$$

समाकलित करने पर, हम

$v - \frac{a^2}{a} \tan^{-1} \frac{v}{a} = x + c$ प्राप्त करते हैं।

या $(x+y) - a \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right) = x + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

ii) $x + y = v$ रखिए, तब

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2(v^2 - ab)}{(v-a)(v+b)}$$

समाकलित करने पर,

$$v + \frac{b-a}{2} \ln (v^2 - ab) = 2x + c$$

या, $(b-a) \ln \{(x+y)^2 - ab\} = 2(x-y) + c$

iii) निरीक्षण द्वारा समाकलन गुणक $= y$ दिए हुए समीकरण को समाकलन गुणक से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$y + x\frac{dy}{dx} - y \sin y \frac{dy}{dx} = 0$$

या $$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y \cos y - \sin y) = 0$$

समाकलित करने पर, हल है :

$$xy + y \cos y - \sin y = c$$

iv) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 + 2xy}{2xy + x^2} = \frac{3(y/x)^2 + 2(y/x)}{2(y/x) + 1}$$

$y = vx$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 + 2v}{2v + 1}$$

या $$\frac{2v+1}{v(v+1)} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

या $$\left(\frac{1}{v+1} + \frac{1}{v}\right) \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$\ln (v+1) + \ln v = \ln x + \ln c$, c एक स्वेच्छ अचर है तथा $v > 0$ है, क्योंकि $x > 0,\ y > 0$.

$\therefore \quad v(v+1) = cx$

या $\quad y(y+x) = cx^3$.

v) यहाँ, $N = 2xy + \dfrac{y}{1+y}, M = y + y^2$.

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{y+y^2}(1+2y-2y) = \frac{1}{y+y^2},$$

जो केवल y का ही फलन है।

नियम V से, समाकलन गुणक $= e^{-\int \frac{1}{y(y+1)}dy} = e^{\int\left(\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y}\right)dy} = \dfrac{y+1}{y}$

दिए हुए समीकरण को समाकलन गुणक $= \dfrac{y+1}{y}$, से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(y+1)^2 + [(2x)\ (y+1)+1]\ \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[x(y+1)^2] + \frac{d}{dx}(y) = 0$$

अतः, हल है : $x(y+1)^2 + y = c$.

vi) समाकलन गुणक $= \dfrac{1}{xy^3}$; हल है : $x^2 - \dfrac{9}{y^2} + 3\ln|y| = c$

वैकल्पिकतः समीकरण चर पृथक्करणीय है।

vii) $(y+1)^2 + 2(y+1)\,(x-2) - (x-2)^2 = c$.

(संकेत : $x = X+2$, और $y = Y-1$ लीजिए।)

—×—

इकाई 8

रैखिक अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

इकाई 7 में, हमने कुछ प्रथम कोटि प्रथम घात अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों की चर्चा की थी। हमने मुख्यतः निम्न प्रकार के समीकरणों को हल किया था :

i) ऐसे अवकल समीकरण जिन्हें सीधे समाकलित किया जा सकता हो, अर्थात् पृथक्करणीय तथा यथातथ अवकल समीकरण,

ii) वे समीकरण जिनका सीधे समाकलन करना संभव नहीं हो, परंतु जिन्हें ऊपर दिए रूपों में समानीत किया जा सकता हो। इनमें समघात समीकरण, समघात रूप में समानीत किए जाने वाले समीकरण तथा ऐसे समीकरण जो एक समाकलन गुणक से गुणा करने पर यथातथ बन जाएँ सम्मिलित हैं।

इस इकाई में, हम अपना ध्यान एक अन्य महत्वपूर्ण प्रकार के प्रथम कोटि प्रथम घात अवकल समीकरण पर केन्द्रित करेंगे, जिन्हें **रैखिक अवकल समीकरण** (linear differential equations) कहा जाता है। इनमें उच्चतम कोटि का अवकलज निम्न कोटि के अवकलजों का एक रैखिक फलन होता है। ये समीकरण वृहत क्षेत्रों में अपने अनुप्रयोगों के कारण महत्वपूर्ण हैं। उदाहरण के लिए, इकाई 6 के भाग 6.5 में हमनें जिन भौतिक स्थितियों पर विचार किया था वे सभी रैखिक अवकल समीकरणों द्वारा

सूत्रित हैं। इस इकाई के भाग 8.5 में, हम उन्हें तथा रैखिक अवकल समीकरणों द्वारा निर्धारित कुछ और भौतिक समस्याओं को हल करेंगे।

भाग 8.2 में हम रैखिक अवकल समीकरण का वर्गीकरण समघात और असमघात समीकरणों में करेंगे और असमघात रैखिक अवकल समीकरणों के विशेष समाकल प्राप्त करने की विधियों पर चर्चा भाग 8.3 में करेंगे। किसी रैखिक अवकल समीकरण को समाकलित करने की समस्या को 1692 में लाइबनिज़ ने क्षेत्रकलन की समस्या में समानीत किया। दिसम्बर 1695 में, जेम्स बर्नोली ने प्रथम कोटि वाले एक अरैखिक अवकल समीकरण का हल प्रस्तुत किया जिसे अब बर्नोली समीकरण के रूप में जाना जाता है। 1696 में, लाइबनिज़ ने इस ओर ध्यान दिलाया कि बर्नोली समीकरण के आश्रित चर में परिवर्तन करके उसे एक रैखिक अवकल समीकरण के रूप में समानीत किया जा सकता है। इस इकाई के भाग 8.4 में हम इस समीकरण पर चर्चा करेंगे तथा साथ ही कुछ अन्य समीकरणों जो प्रथम कोटि या प्रथम घात के तो नहीं हैं, परंतु जिन्हें रैखिक अवकल समीकरण में समानीत किया जा सकता है, पर भी चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- ❖ रैखिक अवकल समीकरण की पहचान कर सकेंगे;
- ❖ समघात और असमघात रैखिक अवकल समीकरणों में अंतर बता सकेंगे;
- ❖ रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक हल प्राप्त कर सकेंगे;
- ❖ अनिर्धारित गुणांक और प्राचल विचरण विधियों से रैखिक अवकल समीकरण का विशेष समाकल प्राप्त कर सकेंगे;
- ❖ बर्नोली समीकरण का हल प्राप्त कर सकेंगे; और
- ❖ कुछ भौतिक स्थितियों के लिए निर्देशित रैखिक समीकरणों के हल प्राप्त कर सकेंगे।

8.2 प्रथम कोटि अवकल समीकरण का वर्गीकरण

आपको याद होगा कि इकाई 6 में, हमने प्रथम कोटि अवकल समीकरण के व्यापक रूप को

$$g\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$$

द्वारा परिभाषित किया था और यदि समीकरण प्रथम घात का हो, तो इसे

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। साथ ही, आप यह भी याद कर सकते हैं कि अवकल समीकरण **रैखिक** होता है, यदि आश्रित चर और उसके सभी अवकलज केवल प्रथम घात में हों तथा साथ ही समीकरण में कोई भी पद अवकलजों के गुणनफल या किसी अवकलज और आश्रित चर के गुणनफल के रूप में न हो। यदि कोई अवकल समीकरण रैखिक नहीं हो, तो हम उसे **अरैखिक** कहते हैं।

उदाहरण के लिए समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^3$ और $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=x\sin x$ रैखिक

अवकल समीकरण हैं। परंतु समीकरण $y\frac{dy}{dx}+x^2=10$ और $\frac{dy}{dx}+y^2=x^2$ अरैखिक समीकरण हैं। इसका कारण पहले समीकरण में पद $y\frac{dy}{dx}$ तथा दूसरे समीकरण में पद y^2 की उपस्थिति है।

इसी के अनुसार, यदि ऊपर दिए समीकरण में फलन $f(x, y)$ रैखिक है, तो यह प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण होगा। प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण को

$$p(x)\frac{dy}{dx}=q(x)y+r(x), \quad p(x)\neq 0 \tag{1}$$

के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ p, q, r किसी अंतराल $I \subseteq \boldsymbol{R}$ में संतत वास्तविक मान फलन हैं। यदि $r(x)$ सर्वसम रूप में शून्य हो, तो समीकरण (1) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$p(x)\frac{dy}{dx}=q(x)y \tag{2}$$

समीकरण (2) प्रथम कोटि रैखिक **समघात** अवकल समीकरण कहलाता है।

जब $r(x)$ शून्य नहीं हो, तो समीकरण (1) प्रथम कोटि असमघात **(non-homogeneous)** या **अनूसमघात (inhomogeneous)** रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है।

> आप देख सकते हैं कि यहाँ प्रयोग किए गए शब्द समघात का अर्थ इकाई 7 के भाग 7.3 में प्रयोग किए गए अर्थ से बहुत भिन्न है।

समीकरण $\frac{dy}{dx}=y$ एक रैखिक समघात समीकरण है। यहाँ, $p(x)=1$ और $q(x)=1$ है। इसी प्रकार, $\frac{dy}{dx}=0, \frac{dy}{dx}=e^x y$ भी रैखिक समघात समीकरण है।

परंतु समीकरण $\frac{dy}{dx}=e^x y+x$ एक रैखिक असमघात समीकरण है, जिसमें $p(x)=1, q(x)=e^x$ और $r(x)=x$ है।

अब, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=x(y^2+1)$ पर विचार कीजिए। यह पद y^2 की उपस्थिति के कारण एक अरैखिक समीकरण है इसी प्रकार, समीकरण $\frac{dy}{dx}=e^y x+x^2$ और $\frac{dy}{dx}=\cos y$ अरैखिक हैं, क्योंकि इनमें e^y और $\cos y$ जैसे पद उपस्थित हैं। (जिनमें से प्रत्येक को y के घातों में एक अपरिमित श्रेणी के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।)

अब आप निम्न प्रश्न हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E1) निम्न समीकरण में से, वर्गीकृत कीजिए कि कौन से समीकरण रैखिक हैं तथा कौन से अरैखिक। साथ ही, प्रत्येक समीकरण में आश्रित चर भी बताइए।

i) $\frac{dy}{dx}-y=xy^2$

ii) $\alpha(x)\dfrac{dy}{dx}+\beta(x)y=\gamma(x)y$

iii) $\dfrac{di}{dt}-6i=10\sin 2t$

iv) $y^2\dfrac{dx}{dy}=x\cos y$

v) $ydx+(xy+x-3y^2)\,dy=0$

vi) $(2s-e^{2t})\,ds=2(se^{2t}-\cos 2t)\,dt$

रैखिक अवकल समीकरणों को समघात और असमघात समीकरणों में वर्गीकृत करने का महत्व आपको तब समझ आएगा जब खंड 3 की इकाई 10 के भाग 10.3 में हम समघात/असमघात रैखिक अवकल समीकरणों के हलों के कुछ गुणधर्मों पर चर्चा करेंगे। आइए अब हम रैखिक असमघात समीकरण (1) के व्यापक हल के बारे में चर्चा करें।

8.3 रैखिक असमघात समीकरण का व्यापक हल

आइए एक उदाहरण लेकर प्रारंभ करें।

उदाहरण 1 : निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx}+y=x+1,\ x>0 \tag{3}$$

हल : आप देख सकते हैं कि रैखिक असमघात समीकरण (3) न तो चर-पृथक्करणीय रूप में है और न ही एक यथातथ समीकरण के रूप में है। आइए अब देखें कि क्या हम एक ऐसा समाकलन गुणक ज्ञात कर सकते हैं जो इस समीकरण को एक यथातथ अवकल समीकरण बना दे।

समीकरण (3) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$dy+(y-x-1)dx=0 \tag{4}$$

यदि $\mu(x)$ समीकरण (4) का एक समाकलन गुणक है, तो समीकरण

$$\mu(x)dy+\mu(x)\,(y-x-1)dx=0 \tag{5}$$

एक यथातथ अवकल समीकरण होगा। समीकरण (5) एक यथातथ अवकल समीकरण होगा, यदि

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x))=\frac{\partial}{\partial y}\{\mu(x)\,(y-x-1)\}.$$

या $$\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\mu(x)$$

या $$\frac{d\mu}{dx}=\mu$$

यह एक पृथक्करणीय समीकरण है तथा इसे हल करके हम दिए हुए समीकरण (3) का समाकलन गुणक μ निर्धारित कर सकते हैं। यहाँ

$\ln|\mu| = x$, अर्थात् $\mu = e^x$ है।

समीकरण (3) को समाकलन गुणक से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$e^x\left(\frac{dy}{dx}+y\right)=(x+1)e^x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^x)=(x+1)e^x.$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$ye^x = \int(x+1)e^x dx + C$, जहाँ C एक अचर है।

$$\therefore \; y = e^{-x}\int(x+1)e^x dx + Ce^{-x}$$

$$= e^{-x}(xe^x - e^x + e^x) + Ce^{-x}$$

$$= x + Ce^{-x}$$

जो समीकरण (3) का अभीष्ट व्यापक हल है।

***

आइए अब देखें कि यह विधि किस प्रकार व्यापक असमघात रैखिक अवकल समीकरण (1) का हल ज्ञात करने में प्रयोग की जा सकती है।

समीकरण (1) को $p(x)$ से भाग देकर, इसे निम्न रूप में रखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x) \qquad (6)$$

जहाँ P और Q केवल x के फलन हैं।

आगे की चर्चा में, हम यह मान कर चलेंगे कि समीकरण (6) का एक हल है। हम समीकरण (6) का हल एक ऐसे अंतराल $I \subseteq \boldsymbol{R}$ में प्राप्त करने का प्रयास करेंगे, जिसमें P और Q संतत हों। आप जानते हैं कि व्यापक रूप में, समीकरण (6) यथातथ नहीं भी हो सकता। परंतु हम यह दर्शाएँगे कि हम सदैव एक समाकलन गुणक ऐसा ज्ञात कर सकते हैं, जो इस समीकरण को यथातथ बना देता है और यह रैखिक समीकरणों का एक उपयोगी गुणधर्म है।

आइए समीकरण (6) को अवकल रूप में लिखें :

$$dy + [P(x)y - Q(x)]\,dx = 0. \qquad (7)$$

यदि समीकरण (7) का एक समाकलन गुणक $\mu(x)$ है, तो समीकरण

$$\mu(x)dy + \mu(x)\,[P(x)y - Q(x)]\,dx = 0 \qquad (8)$$

एक यथातथ अवकल समीकरण होगा। इकाई 7 के प्रमेय 1 से, हम जानते हैं कि समीकरण (8) एक यथातथ अवकल होगा, यदि

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)] = \frac{\partial}{\partial y}\{\mu(x)\,[P(x)y - Q(x)]\} \qquad (9)$$

या $$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \mu(x)\,P(x) \qquad \left[\because \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)Q(x) = 0\right]$$

या $$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x)$$

यह एक पृथक्करणीय समीकरण है, जिससे हम $\mu(x)$ ज्ञात कर सकते हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)\,dx$$

या $$\ln|\mu| = \int P(x)\,dx$$

इस प्रकार, समीकरण (7) का एक समाकलन गुणक निम्न से प्राप्त होता है :

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad (10)$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण (10) में, हमें समाकलन अचर का प्रयोग करने की आवश्यकता नहीं है। इसका कारण यह है कि समीकरण (8) पर एक अचर गुणज का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

आप यह भी देख सकते हैं कि जब $Q(x) = 0$, तब भी समीकरण (8) एक यथातथ अवकल समीकरण रहता है। वास्तव में $\mu(x)$ ज्ञात करने में, $Q(x)$ की कोई भूमिका नहीं होती, क्योंकि समीकरण (9) से स्पष्ट हैं कि $\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\,Q(x) = 0$. इस प्रकार,

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}\,[P(x)y - Q(x)]\,dx \text{ और}$$

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}\,P(x)\,y\,dx$$

दोनों ही यथातथ अवकल हैं। अब हम समीकरण (6) को प्राप्त समाकलन गुणक से गुणा करके उसे निम्न रूप में लिखते हैं :

$$e^{\int P\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = Qe^{\int P\,dx}$$

इसे निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P\,dx}\right) = Qe^{\int P\,dx}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$ye^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P\,dx}dx + \alpha, \text{ जहाँ } \alpha \text{ समाकलन अचर है।}$$

या $$y = e^{-\int P\,dx}\int Qe^{\int P\,dx}dx + \alpha e^{-\int P\,dx} \qquad (11)$$

क्योंकि y समीकरण (6) के किसी भी हल को निरूपित करता है, इसलिए हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि समीकरण (6) का प्रत्येक हल समीकरण (11) के दाएँ पक्ष के व्यंजक में सम्मिलित है। समीकरण (11) समीकरण (6) का **व्यापक हल** है तथा इसे समीकरण (6) के रूप के समीकरणों के हलों को प्राप्त करने के लिए, एक सूत्र के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। हम आपको सलाह देते हैं कि सूत्र (11) को रट कर रैखिक समीकरणों को हल करने के लिए इसका प्रयोग करने के बजाए उस प्रक्रिया का प्रयोग कीजिए जिससे समीकरण (11) व्युत्पन्न होता है :

$e^{\int P dx}$ **से गुणा कीजिए** तथा **समाकलित कीजिए।**

ध्यान दीजिए कि समीकरण (11) द्वारा प्राप्त हल को ज्ञात करने के लिए, दो समाकलनों की आवश्यकता होती है, **एक** समीकरण (10) से $\mu(x)$ **प्राप्त करने के लिए** तथा **दूसरा** समीकरण (11) से y **प्राप्त करने के लिए।**

समीकरण (10) से समाकलन गुणक $\mu(x)$ परिकलित करते समय सावधानी रखनी चाहिए। आपको यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि अवकल समीकरण यथातथ रूप से समीकरण (6) के रूप का ही है। विशेष रूप से यह कि $\frac{dy}{dx}$ का गुणांक एक होना चाहिए अन्यथा, $\mu(x)$ परिकलित करने के लिए प्रयोग किया गया $P(x)$ गलत होगा।

ज्यामितीय रूप से, समीकरण (11) एक अपरिमित वक्र-कुल है जहाँ α के प्रत्येक मान के लिए एक वक्र प्राप्त होता है। ये **वक्र समाकल वक्र (integral curves)** कहलाते हैं। एक विशेष बिंदु (x_0, y_0), जिससे होकर हल का आलेख जाना चाहिए, पर आदि प्रतिबंध का प्रयोग करके समाकल वक्रों के कुल का एक विशेष सदस्य प्राप्त किया जाता है।

रैखिक समघात समीकरण की स्थिति में, समीकरण (11) में $Q=0$ रख कर **व्यापक हल** प्राप्त किया जा सकता है, जो निम्न है :

$$y = \alpha\, e^{-\int P\,dx} \tag{12}$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण (11) के दाएँ पक्ष का प्रथम पद समीकरण (6) के असमघात पद Q के कारण है। इसे समीकरण (6) का एक विशेष **समाकल (particular integral) (P.I)** कहा जाता है।

इस प्रकार, समीकरण (11) से हम प्राप्त करते हैं :

$$y = \boldsymbol{P.I} + \alpha e^{-\int P dx} \tag{13}$$

जहाँ $$\boldsymbol{P.I} = e^{-\int P\,dx} \int Q e^{\int P\,dx} dx. \tag{14}$$

एक विशेष समाकल में कोई स्वेच्छ अचर सम्मिलित नहीं होता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं तथा ऊपर चर्चा की गई विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 2: समीकरण $x\frac{dy}{dx} - ay = x+1$ को हल कीजिए, जहाँ a एक धनात्मक अचर है तथा $x>0$.

हल : स्पष्टतः, दिया हुआ समीकरण रैखिक है तथा इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{a}{x} y = \frac{x+1}{x} \tag{15}$$

$\therefore$ समाकलन गुणक $= e^{\int (-a/x)\, dx} = e^{-a \ln x} = e^{\ln x^{-a}} = \frac{1}{x^a}$.

समीकरण (15) को $\frac{1}{x^a}$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{x^a} \frac{dy}{dx} - \frac{a}{x^{a+1}} y = \frac{x+1}{x^{a+1}}$$

अर्थात्, $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^a}\right) = \frac{x+1}{x^{a+1}}$

ऊपर प्राप्त समीकरण को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{y}{x^a} = \int \frac{x+1}{x^{a+1}}\, dx + c \text{ } (c \text{ एक अचर है})$$

$$= \frac{x^{-a+1}}{-a+1} + \frac{x^{-a}}{-a} + c$$

इस प्रकार, $y = \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a} + cx^a$ अभीष्ट हल है।

***

आइए एक अन्य उदाहरण लें जिसमें x और y की भूमिकाएँ परस्पर बदल दी गई हैं।

उदाहरण 3: समीकरण $y \ln y \frac{dx}{dy} + x - \ln y = 0,\ x > 0,\ y > 0$ को हल कीजिए।

हल : यह समीकरण x और $\frac{dx}{dy}$ में प्रथम घात का है। इसलिए, यह स्वतंत्र चर y और आश्रित चर x के लिए एक रैखिक समीकरण है।

इस समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y \ln y} = \frac{1}{y} \tag{16}$$

$\therefore$ समाकलन गुणक $= e^{\int 1/(y \ln y)\, dy} = e^{\int \frac{1/y}{\ln y} dy} = e^{\ln (\ln y)} = \ln y$,

समीकरण (16) को $\ln y$ से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln y \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y} x = \frac{1}{y} \ln y$$

अर्थात्, $\frac{d}{dy}(x\ln y) = \frac{1}{y}\ln y$

ऊपर प्राप्त समीकरण को y के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x\ln y = \int \frac{1}{y}\ln y \, dy + c$$

$$= \frac{(\ln y)^2}{2} + c, \; c \text{ एक अचर है।}$$

अर्थात्, $2x\ln y = (\ln y)^2 + c_1$, अभीष्ट हल है, जहाँ $c_1 = 2c$.

***

आइए एक अन्य उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 4: समीकरण $ydx + (3x - xy + 2)\,dy = 0,\; x \neq 0,\; y \neq 0$ को हल कीजिए।

हल : क्योंकि यहाँ गुणनफल $y\,dy$ आ रहा है, इसलिए यह समीकरण आश्रित चर y में रैखिक नही है। परंतु, यदि हम y को स्वतंत्र चर और x को आश्रित चर मानें, तो यह समीकरण रैखिक है। इसलिए हम पदों को निम्न रूप में व्यवस्थित करते हैं :

$$y\,dx + (3 - y)\,x\,dy = -2\,dy$$

तथा इसे निम्न मानक रूप में लिखते हैं :

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{3}{y} - 1\right)x = -\frac{2}{y}, \; y \neq 0. \tag{17}$$

अब, $\int \left(\frac{3}{y} - 1\right)dy = 3\ln|y| - y$ जिससे समीकरण (17) का समाकलन गुणक निम्न है :

$$e^{(3\ln|y| - y)} = e^{-y}e^{3\ln|y|}$$

$$= e^{\ln|y|^3}e^{-y}$$

$$= |y|^3 e^{-y}$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि दिए हुए समीकरण का $y > 0$ के लिए, समाकलन गुणक y^3e^{-y} है तथा $y < 0$ के लिए, समाकलन गुणक $-y^3e^{-y}$ है। प्रत्येक स्थिति में, हम एक यथातथ अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं, जो निम्न है :

$$y^3e^{-y}dx + y^2(3 - y)e^{-y}x\,dy = -2y^2e^{-y}dy,$$

अर्थात्, $d(xy^3e^{-y}) = -2y^2e^{-y}dy$

ऊपर दिए समीकरण को y के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$xy^3e^{-y} = -2\int y^2e^{-y}\,dy$$

$$= 2y^2e^{-y} - 4\int e^{-y}y\,dy \text{ (खंडशः समाकलन द्वारा)}$$

$$= 2y^2e^{-y} + 4ye^{-y} + 4e^{-y} + c.$$

इस प्रकार, हम अभीष्ट हल को $xy^3 = 2y^3 + 4y + 4 + ce^y$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

***

अब, आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E2) निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$

ii) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = \sin x,\ x \neq 0$

iii) $\sec x \dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$

iv) $(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$

v) $(2x - 10y^3)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

vi) $\dfrac{dy}{dx} - 2x|y| = 1$

E3) निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y' = y + \dfrac{e^x}{x}, \quad x \in [1, \infty[$

ii) $y' = y + x + x^3 + x^5$

iii) $y' = y + x\sin x\, e^x + x^5$

iv) $y' + 3y = |x|,\ y(0) = 1$

हम देख चुके हैं कि समीकरण (11) द्वारा प्राप्त रैखिक असमघात अवकल समीकरण (6) के व्यापक हल में समाकल सम्मिलित है। कभी-कभी, इन समाकलों के मान ज्ञात फलनों के पदों में निकालना असंभव हो जाता है, जो आपने प्रश्न 2 vi) को हल करते समय अनुभव किया होगा। साथ ही, समीकरण (6) के विशेष समाकल $e^{-\int P\,dx}\int Q(x)e^{\int P\,dx}\,dx$ का मान निकालने में जटिलता $Q(x)$ के रूप पर निर्भर करेगी। यह मान निकालना कभी-कभी एक अति कठिन कार्य बन जाता है। परंतु, कुछ स्थितियों में, बिना कठिन समाकलन के, विशेष समाकल ज्ञात करने की विधियाँ उपलब्ध हैं। अब हम समीकरण (6) के विशेष समाकल ज्ञात करने की इन विधियों की संक्षेप में चर्चा करेंगे। क्योंकि ये विधियाँ उच्चतर कोटि अवकल समीकरणों के लिए अधिक उपयोगी हैं, इसलिए इनकी विस्तार से चर्चा हम खंड 3 में करेंगे।

8.3.1 अनिर्धारित गुणांक विधि

अनिर्धारित गुणांक विधि का समीकरण (6), अर्थात्

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$$

के लिए प्रयोग तब किया जा सकता है, जब $P(x)$ एक अचर हो तथा $Q(x)$ निम्न में से किसी एक रूप का हो :

i) एक चरघातांकीय फलन।

ii) x में एक बहुपद।

iii) $\cos \beta x$ या $\sin \beta x$ के रूप का, जहाँ β एक अचर है।

iv) ऊपर दिए i), ii) और iii) का एक रैखिक संयोजन।

इस विधि से हल प्राप्त करने की सामान्य प्रक्रिया में स्वेच्छ या अज्ञात अचरों को सम्मिलित करने वाले एक विशेष हल की परिकल्पना कर ली जाती है। फिर इस परिकलित व्यंजक को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित किया जाता है तथा उस समीकरण को संतुष्ट करने वाले अचर ज्ञात किए जाते हैं।

हम जानते हैं कि $e^{\alpha x}$ (α अचर), x^r ($r > 0$ एक पूर्णांक), $\sin \beta x$ या $\cos \beta x$ (β अचर) जैसे फलनों को समाकलित अथवा अवकलित करने पर हम पुनः एक चरघांताकीय फलन, एक बहुपद या एक ऐसा फलन जो साइन या कोसाइन फलनों का एक रैखिक संयोजन है, प्राप्त करते हैं। अतः, समीकरण (6) में यदि असमघात पद $Q(x)$ ऊपर दिए i)-iv) में से किसी भी रूप का है, तो हम उसी के अनुसार i)-iv) के पदों के एक उपयुक्त संयोजन के रूप में एक विशेष समाकल का चुनाव कर सकते हैं।

अब हम $Q(x)$ के रूपों के अनुसार विभिन्न स्थितियों पर विचार करते हैं।

स्थिति I: $Q(x) = k\, e^{mx}$, k और m वास्तविक संख्याएँ हैं।

इस स्थिति में, यदि हम $P(x) = a$ (एक अचर) लें, तो समीकरण (6) निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$\frac{dy}{dx} + ay = ke^{mx} \tag{18}$$

क्योंकि $Q(x)$ एक चरघातांकीय फलन है, इसलिए हम समीकरण (18) का एक विशेष हल $y_p(x)$ भी चरघातांकीय रूप $y_p(x) = re^{mx}$ में परिकलित करते हैं, जहाँ r एक अचर है, जिसे ज्ञात किया जाना है।

अब यदि $y_p(x)$ समीकरण (18) का एक हल है, तो इसे समीकरण को संतुष्ट अवश्य करना चाहिए। इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं :

$$rm\, e^{mx} + ar\, e^{mx} = ke^{mx}$$

या $$r = \frac{k}{a+m}, \text{ यदि } m \neq -a$$

अतः, $y_p(x) = \frac{k}{a+m} e^{mx}$, यदि $m \neq -a$.

यदि $m + a = 0$, अर्थात् $m = -a$ तो, आप यह जाँच कर सकते हैं कि $y_p(x) = kx e^{mx}$ समीकरण (18) को संतुष्ट करता है। इस प्रकार, हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं :

यदि a, k और m वास्तविक अचर है, तो समीकरण $\frac{dy}{dx} + ay = k e^{mx}$ का एक विशेष हल निम्न से प्राप्त होता है :

$$y_p(x) = \begin{cases} \frac{k}{(a+m)} e^{mx}, \text{ यदि } m \neq -a \\ kxe^{mx} \quad , \text{ यदि } m = -a \end{cases}$$

हम इस स्थिति को नीचे दिए उदाहरण द्वारा स्पष्ट करते हैं :

उदाहरण 5: $y' - y = 2e^x$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण की समीकरण (18) से तुलना करने पर, हम ज्ञात करते हैं कि $a = -1, k = 2$, और $m = 1$

साथ ही, $m + a = -1 + 1 = 0 \Rightarrow m = -a$

$\therefore$ ऊपर प्राप्त परिणामों द्वारा, एक विशेष समाकल (P.I) $2xe^x$ है।

साथ ही, समीकरण (10) का प्रयोग करने पर,

समाकलन गुणक $= e^{\int P\,dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}. (\because P = -1)$

अतः, संबंध (13) का प्रयोग करते हुए अभीष्ट हल है

$$y = P.I + ce^x,$$

अर्थात्, $y = 2xe^x + c\, e^x$, जहाँ c एक अचर है।

***

उदाहरण 6: समीकरण $y' + 4y = 2e^{2x}$, $y(0) = 1$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण की समीकरण (18) से तुलना करने पर, हम $a = 4, k = 2, m = 2$ प्राप्त करते हैं।

अतः, एक विशेष समाकल $y_p(x) = \frac{k}{a+m} e^{2x} = \frac{1}{3} e^{2x}$.

साथ ही, समीकरण (10) का प्रयोग करने पर,

$$\text{समाकलन गुणक} = e^{\int 4\,dx} = e^{4x} \; (\because P = 4)$$

संबंध (13) का प्रयोग करने पर व्यापक हल है :

$y=\frac{1}{3}e^{2x}+ce^{-4x}$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

दिए हुए आदि प्रतिबंध $y(0)=1$ का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$1=\frac{1}{3}+c \text{ या } c=\frac{2}{3}.$$

इस प्रकार, $y=\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{2}{3}e^{-4x}$ अभीष्ट हल है।

***

अब आप निम्न प्रश्न हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E4) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए जहाँ b एक अचर है :

i) $\frac{dy}{dx}+y=2be^{x}$

ii) $2\frac{dy}{dx}-6y=be^{3x}$

आइए अब उस स्थिति पर विचार करें, जब $Q(x)$ एक बहुपद है।

स्थिति II: $Q(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, जहाँ a_i's वास्तविक संख्याएँ हैं, अर्थात् $Q(x)$ घात n का एक बहुपद है। इस स्थिति में, $P(a)=a$ (a एक अचर) के लिए, समीकरण (6) निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$\frac{dy}{dx}+ay=\sum_{i=0}^{n} a_i . x^i \tag{19}$$

यदि समीकरण (19) में $a=0$ तो एक विशेष हल

$y_p(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+1}x^{i+1}$ होगा, जो सीधे समाकलन से प्राप्त हो जाता है।

यदि समीकरण (19) में $a\neq 0$ तो हम एक विशेष हल $y_p(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ के रूप में

परिकल्पित करते हैं (इस स्थिति में $Q(x)$ बहुपद है) तथा वास्तविक संख्याएँ

$b_0, b_1, \ldots, b_n$ इस प्रकार प्राप्त करते हैं, ताकि विशेष हल $y_p(x)$ समीकरण (19) को संतुष्ट करे। समीकरण (19) में $y_p(x)$ के इस मान को प्रतिस्थापित करने पर, जहाँ y को $y_p(x)$ लेना है, हम प्राप्त करते हैं :

$$\sum_{i=1}^{n} i\, b_i x^{i-1}+\sum_{i=0}^{n} a\, b_i\, x^i=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ (a\neq 0) \tag{20}$$

समीकरण (20) के दोनों पक्षों में, x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left.\begin{array}{l} x^i \text{ का गुणांक}: (i+1)b_{i+1} + ab_i = a_i \;\; for \; i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \\ x^n \text{ का गुणांक}: ab_n = a_n \end{array}\right\} \quad (21)$$

क्योंकि $Q(x)$ घात n का एक बहुपद है, इसलिए हमें $a_n \neq 0$ प्राप्त है तथा $b_0, b_1, \ldots, b_n$ के लिए हम समीकरण (21) को हल कर सकते हैं। समीकरण (21) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$b_n = a_n / a$$

$$b_{n-1} = \left(a_{n-1} - \frac{na_n}{a}\right)\frac{1}{a}$$

$$b_{n-2} = a_{n-2} - \frac{n-1}{a}\left(a_{n-1} - \frac{n}{a}\,a_n\right)\frac{1}{a}, \text{ आदि-आदि।}$$

एक बार $b_0, b_1, b_2, \ldots$ प्राप्त हो जाने पर, $y_p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ समीकरण (19) का एक विशेष हल होगा।

हम इस विधि को उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 7: $\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + 3$ का एक विशेष हल ज्ञात कीजिए।

हल : इस स्थिति में $Q(x)$ घात 2 का एक बहुपद है। इसलिए, हम निम्न रूप का एक विशेष हल परिकल्पित करते हैं :

$$y_p(x) = \sum_{i=0}^{2} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

दिए हुए समीकरण में $y_p(x)$ को प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(b_1 + 2b_2 x) + 2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = 2x^2 + 3 \quad (22)$$

समीकरणों (22) के दोनों पक्षों में x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$\boldsymbol{x^2}$ **का गुणांक** : $2b_2 = 2$ or $b_2 = 1$

$\boldsymbol{x}$ **का गुणांक** : $2b_2 + 2b_1 = 0$ or $b_1 = -1$

$\boldsymbol{x^0}$ **का गुणांक** : $b_1 + 2b_0 = 3$ or $b_0 = 2$

अतः, अभीष्ट विशेष हल $y_p(x) = x^2 - x + 2$ है।

* * *

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 8: समीकरण $y' - 4y = x^3 + 2x^2 - 3$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $Q(x)$ घात 3 का एक बहुपद है। इसलिए, हम निम्न रूप का एक विशेष हल परिकल्पित करते हैं :

$$y_p(x) = \sum_{i=0}^{3} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

दिए हुए समीकरण में y' और y को क्रमशः $y'_p(x)$ और $y_p(x)$ से प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2) - 4(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) = x^3 + 2x^2 - 3$$

x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

x^3 का गुणांक : $-4b_3 = 1$ या $b_3 = \frac{-1}{4}$

x^2 का गुणांक : $3b_3 - 4b_2 = 2$ या $b_2 = \frac{-11}{16}$

x का गुणांक : $2b_2 - 4b_1 = 0$ या $b_1 = \frac{-11}{32}$

x^0 का गुणांक : $b_1 - 4b_0 = -3$ या $b_0 = \frac{85}{128}$

अतः, एक विशेष हल है :

$$y_p(x) = \frac{85}{128} - \frac{11}{32}x - \frac{11}{16}x^2 - \frac{1}{4}x^3 .$$

साथ ही, समाकलन गुणक $= e^{-\int 4dx} = e^{-4x}$.

इसलिए, अभीष्ट हल $y = y_p(x) + c\, e^{4x}$ है, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।
आप यहाँ यह देख सकते हैं कि यद्यपि यह विधि प्रयोग करने में सरल और सीधी-सीधी है, परंतु कई बार परिकलन काफी थकाऊ हो सकते हैं।

और अब आपके हल करने के लिए एक प्रश्न

E5) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $\frac{dy}{dx} = y + x^2$

ii) $\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^2$

अब हम उस स्थिति पर विचार करते हैं, जब $Q(x)$ एक त्रिकोणमितीय फलन है।

स्थिति III: $Q(x) = \sin\beta x$ या $\cos\beta x$ या $a\sin\beta x + b\cos\beta x$,

जहाँ β, a और b वास्तविक अचर हैं।

इन सभी स्थितियों में, हम $c\sin\beta x + d\cos\beta x$ के रूप का एक विशेष हल परिकल्पित करते हैं, जहाँ c और d ज्ञात किए जाने वाले अचर हैं।

इस हल को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करके तथा समीकरण के दोनो पक्षों में $\sin \beta x$ और $\cos \beta x$ के गुणांकों की तुलना करके, हम अचर c और d ज्ञात करते हैं।

आइए इस स्थिति को एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें।

उदाहरण 9 : समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = \cos 3x$ का एक विशेष हल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $Q(x) = \cos 3x$. अतः दिए हुए अवकल समीकरण का कोई भी विशेष हल $\sin 3x$ और $\cos 3x$ का एक संयोजन होना चाहिए। मान लीजिए कि एक विशेष हल $y_p(x) = c\cos 3x + d\sin 3x$ के रूप का है।

दिए हुए समीकरण में, $y_p(x)$ के इस मान को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(-3c\sin 3x + 3d\cos 3x) + (c\cos 3x + d\sin 3x) = \cos 3x \tag{23}$$

समीकरण (23) के दोनों पक्षों में, $\cos 3x$ और $\sin 3x$ के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$c + 3d = 1 \text{ और } d - 3c = 0$$

या, $$c = \frac{1}{10} \text{ और } d = \frac{3}{10}.$$

अतः, एक विशेष हल $y_p(x) = \frac{1}{10}(3\sin 3x + \cos 3x)$.

***

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेते हैं, जो ऊपर चर्चित की गई तीनों स्थितियों का संयोजन है।

उदाहरण 10 : अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x + x + \sin x,\ x > 0,\ y > 0 \tag{24}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x)$, जहाँ $Q_1(x) = e^x$, $Q_2(x) = x$ तथा $Q_3(x) = \sin x$.

समीकरण (24) के दाएँ पक्ष को तोड़ कर, हम निम्न तीन समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x \tag{25}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = x \tag{26}$$

तथा

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x \tag{27}$$

यदि y_1, y_2, y_3 क्रमशः समीकरण (25), (26) और (27), के विशेष हल हैं, तो $y_p = y_1 + y_2 + y_3$ दिए हुए समीकरण (24) का एक विशेष हल होगा। पहले समीकरण (25) पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि इसका विशेष हल $y_1 = re^x$ है, जहाँ r एक ज्ञात किए जाने वाला अचर है।

इसे समीकरण (25) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$re^x + re^x = e^x \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{1}{2}e^x \tag{28}$$

समीकरण (26) के लिए, हम इसका विशेष हल $y_2 = a_1x + a_0$ के रूप का लेते है तथा अचरों a_0 और a_1 के मान प्राप्त करते हैं।

इसे समीकरण (26) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$a_1 + a_1x + a_0 = x \tag{29}$$

समीकरण (29) के दोनों पक्षों में x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 &= 0 \\ a_1 &= 1, \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_0 = -1,\ a_1 = 1$$

अतः, $y_2 = x - 1$. (30)

समीकरण (27) की स्थिति में, हम विशेष हल $y_3 = c\sin x + d\cos x$ परिकल्पित करते हैं। इसे समीकरण (27) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$c\cos x - d\sin x + c\sin x + d\cos x = \sin x \tag{31}$$

समीकरण (31) के दोनों पक्षों में $\sin x$ और $\cos x$ के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left.\begin{aligned} c - d &= 1 \\ c + d &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \text{ और } d = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y_3 = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) \tag{32}$$

अतः, समीकरणों (28), (30) और (32) से समीकरण (24) का एक विशेष हल

$y_p(x) = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{2}e^x + x - 1 + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ प्राप्त हो जाता है।

समीकरण (24) के समघात भाग, अर्थात् $\frac{dy}{dx} + y = 0$ का हल निम्न से प्राप्त है :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+1=0,\ y>0.$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम किसी अचर α के लिए प्राप्त करते हैं :

$$\ln\ y + x = \ln \alpha \text{ अर्थात् } \frac{y}{\alpha} = e^{-x}$$

$$\text{या } y = \alpha\, e^{-x}$$

अतः, समीकरण (24) का व्यापक हल निम्न से प्राप्त है :

$$y = \alpha\, e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} + x - 1 + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

***

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 10 में समघात समीकरण का हल समाकलन गुणक ज्ञात करके भी प्राप्त किया जा सकता था, जैसा कि हम अन्य उदाहरणों में कर चुके हैं।

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E6) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $\frac{dy}{dx} - y = 6\cos 2x$

ii) $\frac{dy}{dx} + 3y = x^2 + 3e^{2x} + 4\sin x$.

इस प्रकार आप देख चुके हैं कि असमघात रैखिक अवकल समीकरण (6) का अनिर्धारित गुणांक विधि द्वारा एक विशेष हल ज्ञात करने में कुछ परिसीमाएं हैं। यह विधि समीकरण (6) के रूप के अवकल समीकरणों के कुछ ही वर्गों के लिए प्रयोग की जा सकती है, जबकि $P(x)$ एक अचर हो तथा $Q(x)$ का रूप $e^{\alpha x}, x^r, \sin\beta x$ या $\cos\beta x$ में से किसी भी रूप या इनके संयोजन के रूप में हो। अब हम एक ऐसी विधि का अध्ययन करेंगे, जिसमें ऐसी कोई परिसीमा नहीं है। इस विधि का श्रेय जोसफ ल्यूइस लंग्राज (1736-1813) को जाता है तथा यह प्राचल विचरण विधि (method of variation of parameters) कहलाती है।

8.3.2 प्राचल विचरण विधि

असमघात रैखिक समीकरण (6), अर्थात्

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\ y(x) = Q(x)$$

पर विचार कीजिए, जहाँ P, Q चर, x के फलन हैं। ऊपर दिए रैखिक समीकरण के संगत समघात समीकरण निम्न है :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\ y(x) = 0$$

साथ ही, समीकरण (12) से हम जानते हैं कि इस समघात समीकरण का हल $y_h(x)$ निम्न होता है :

$$y_h(x) = \alpha\, e^{-\int P(x)\,dx}, \text{ जहाँ } \alpha \text{ एक अचर है।} \tag{33}$$

प्राचल विचरण विधि के अनुसार समीकरण (33) में अचर α को x के एक फलन से प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। अर्थात्, हम x के साथ α का विचरण करते हैं तथा परिकल्पित करते हैं कि परिणामी फलन

$$y(x) = \alpha(x) e^{-\int P(x)\,dx} \tag{34}$$

पुनः समीकरण (6) का एक हल है। अर्थात्, हम $\alpha(x)$ ज्ञात करने का प्रयास करते हैं ताकि समीकरण (34) द्वारा प्राप्त y समीकरण (6) को संतुष्ट करें। दूसरे शब्दों में, हम $\alpha(x)$ पर एक आवश्यक प्रतिबंध ज्ञात करते हैं ताकि संबंध (34) द्वारा परिभाषित y समीकरण (6) को संतुष्ट करें।

समीकरण (6) और (34) को एक साथ संयोजित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}\left[\alpha(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}\right] + P(x)\left[\alpha(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}\right] = Q(x)$$

अर्थात्, $\alpha(x)\left[-P(x) e^{-\int P(x)\,dx}\right] + \alpha'(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x)\ \alpha(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$,

अर्थात्, $\alpha'(x) = Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}$

x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\alpha(x) = \beta + \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx \tag{35}$$

जहाँ β समाकलन अचर है।

समीकरण (35) से $\alpha(x)$ के मान को समीकरण (34) में रखने पर, समीकरण (6) के हल को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$y(x) = \beta\, e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)\ e^{\int P(x)dx}\ dx$$

यहाँ आप यह **देख सकते** हैं कि ऊपर प्राप्त हल वही है जो समीकरण (11) से हम पहले ही प्राप्त कर चुके हैं। साथ ही, प्राचल विचरण विधि न तो किसी समाकलन/हल को सरल करती है और न ही प्रथम कोटि प्रथम घात अवकल समीकरण के हल का कोई अन्य रूप प्रदान करती है। यह व्यापक हल तक पहुँचने की केवल एक वैकल्पिक विधि प्रदान करती है। परंतु, जैसा कि हम खंड 3 में बाद में देखेंगे, यह विधि उच्चतर कोटि के समीकरण हल करने में बहुत शक्तिशाली सिद्ध होती है।

आइए इस विधि को स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 11: समीकरण $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$$

ऊपर प्राप्त समीकरण के संगत समघात समीकरण है।

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = 0$$

तथा इसका हल निम्न से प्राप्त है :

$$y_h(x) = \alpha e^{-\int -\frac{4}{x}dx} = \alpha e^{\int \frac{4}{x}dx} = \alpha e^{4\ell n\, x} = \alpha x^4$$

मान लीजिए कि $y(x) = \alpha(x)x^4$ दिए हुए असमघात समीकरण का हल है। तब, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)x^4) - \frac{4}{x}(\alpha(x)x^4) = x^5 e^x$$

$$\Rightarrow \quad \alpha' x^4 + 4\alpha x^3 - 4\alpha x^3 = x^5 e^x$$

$$\Rightarrow \quad \alpha' = xe^x$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \int xe^x dx$$

खंडशः समाकलन से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\alpha(x) = xe^x - \int e^x dx + c$$

$$= xe^x - e^x + c,\ c \text{ समाकलन अचर है।}$$

$y(x) = \alpha(x)x^4$ में $\alpha(x)$ के मान को रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y(x) = (xe^x - e^x + c)x^4$$

$$= x^5e^x - x^4e^x + cx^4, \text{ जो अभीष्ट हल है।}$$

***

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E7) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y' - 2y = \sin \pi x + \cos \pi x,\ y(1) = 1$

ii) $y' - y = \cos 2x + e^x + e^{2x} + x$

iii) $y' - 3y = x^2 - \cos 3x + 2$

iv) $y' + y = -x - x^2,\ y(0) = 0$

v) $y' - y = e^x,\ y(0) = -3$.

अगले भाग में, हम ऐसे समीकरण लेंगे जो रैखिक नहीं है, परंतु उन्हें चरों के

उपयुक्त रूपांतरणों द्वारा रैखिक रूप में समानीत किया जा सकता है।

8.4 रैखिक समीकरणों में समानेय समीकरण

आइए

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + P(x)\, f(y) = Q(x) \tag{36}$$

के रूप का अवकल समीकरण लीजिए जहाँ $f'(y)$, $f(y)$ का अवकल गुणांक है। आप यह देख सकते हैं कि समीकरण (36) एक अरैखिक समीकरण है। इस प्रथम कोटि के अरैखिक अवकल समीकरण (36) की एक रोचक विशेषता यह है कि इसमें $v = f(y)$ रख कर इसे रैखिक समीकरण के रूप में समानीत किया जा सकता है। इस प्रतिस्थापन को समीकरण (36) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x), \left(\because \frac{dv}{dx} = f'(y)\, \frac{dy}{dx}\right),$$

जो आश्रित चर v और स्वतंत्र चर x में एक रैखिक समीकरण है।

उदाहरण के लिए, निम्न अरैखिक अवकल समीकरण पर विचार कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = xy^2,\ x > 0,\ y > 0 \tag{37}$$

समीकरण (37) को y^2 से भाग देने पर, इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{y^2}\, \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\, \frac{1}{y} = x \tag{38}$$

समीकरण (38) में $\frac{1}{y} = v$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = x \ \left(\because -\ \frac{1}{y^2}\, \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}\right)$$

या $$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = -x \tag{39}$$

समीकरण (39) आश्रित चर v स्वतंत्र चर x के लिए एक रैखिक समीकरण है। इसे भाग 8.3 में चर्चा की गई विधि से हल किया जा सकता है। हमें प्राप्त है :

समाकलन गुणक $= e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|} = x^{-1}$

अतः, $\frac{d}{dx}(x^{-1}v) = -1$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$x^{-1}v = -x + c$ या $v = -x^2 + cx$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

क्योंकि $v = y^{-1}$ इसलिए हम प्राप्त करते हैं :

$$y = \frac{1}{-x^2 + cx},$$ जो समीकरण (37) का व्यापक हल है।

समीकरण (37) एक बहुत महत्वपूर्ण और प्रसिद्ध समीकरण का एक उदाहरण है, जिसे जेम्स बर्नोली के नाम से **बर्नोली समीकरण** (Bernoulli's Equation) कहा जाता है। बर्नोली ने इसका हल ज्ञात करने के लिए, इसे 1695 में अध्ययन किया था। इस समीकरण का व्यापक रूप निम्न है :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n \qquad (40)$$

जहाँ P और Q केवल x के फलन हैं तथा n कोई वास्तविक संख्या है, जो शून्य या एक के बराबर नहीं है। $n=0$ और $n=1$ के लिए, समीकरण (40) रैखिक है तथा इसे भाग 8.3 में चर्चा की गई विधि से हल किया जा सकता है।

$y \neq 0$ के लिए, समीकरण (40) को y^n से भाग देने पर प्राप्त करते हैं :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P\; y^{1-n} = Q. \qquad (41)$$

1696 में, लाइबनिज़ ने यह बताया कि y^{1-n} को नया आश्रित चर मान कर समीकरण (41) को एक रैखिक समीकरण में समानीत किया जा सकता है।

$v = y^{1-n}$ रखने पर, समीकरण (41) का रूप निम्न हो जाता है :

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dv}{dx} + P\, v = Q, \quad \left(\because \frac{dv}{dx} = (1-n)\, y^{-n}\frac{dy}{dx}\right) \qquad (42)$$

जो v और x में एक रैखिक अवकल समीकरण है। समीकरण (42) को अब ज्ञात विधियों से हल किया जा सकता है।

ध्यान दीजिए कि जब $n=0$ है, तब समीकरण (40) एक रैखिक असमघात समीकरण है तथा जब $n=1$ है, तब समीकरण (40) एक रैखिक समघात समीकरण है।

ऊपर दी गयी विधि को स्पष्ट करने के लिए, आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 12: समीकरण $\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1+x} = (1+x)\, e^x \sec y,\; x>0, y>0$ को हल कीजिए। (43)

हल : समीकरण (43) को $\sec y$ से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\cos y\,\frac{dy}{dx} - \frac{\sin y}{1+x} = (1+x)\, e^x \qquad (44)$$

यदि हम समीकरण (44) में $\sin y = f(y)$ रखें, तो $f'(y) = \cos y$ और इसलिए समीकरण (44) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$f'(y)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1+x}f(y)=(1+x)\,e^x$$

जो समीकरण (36) के प्रकार का है। इसे रैखिक रूप में बदलने के लिए,

हम $v=f(y)$ रखते हैं तथा प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{1+x}\,v=(1+x)e^x \qquad (45)$$

यह एक रैखिक समीकरण है जिसका समाकलन गुणक

$$=e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}=e^{-\ln(1+x)}=\frac{1}{1+x}.$$

समीकरण (45) को समाकलन गुणक से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}\left(v\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1+x}(1+x)\,e^x=e^x$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$v\frac{1}{1+x}=e^x+c,\ c \text{ एक अचर है।}$$

अर्थात्, $v=(1+x)e^x+c(1+x)$

v के स्थान पर $\sin y$ रखने पर, समीकरण (43) का अभीष्ट हल निम्न है

$$\sin y=(1+x)\,e^x+c\,(1+x).$$

* * *

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 13: समीकरण $y(axy+e^x)\,dx-e^x\ dy=0,\ x>0,\ y>0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है :

$$e^x\frac{dy}{dx}=e^xy+axy^2$$

अर्थात्, $$\frac{dy}{dx}-y=axe^{-x}y^2 \qquad (46)$$

यह $n=2$ के लिए एक बर्नोली समीकरण है।

इसे हल करने के लिए, मान लीजिए कि $y^{1-2}=v$, अर्थात्, $v=\dfrac{1}{y}$ तब,

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=-v^2\frac{dy}{dx}$$

इसके परिणामस्वरूप समीकरण (46) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$-\frac{dv}{dx} - v = axe^{-x}$$

अर्थात्, $\frac{dv}{dx} + v = -axe^{-x}$ (47)

समाकलन गुणक $= e^{\int 1.dx} = e^{x}$ के लिए यह एक रैखिक समीकरण है।

समीकरण (47) के दोनों पक्षों को समाकलन गुणक से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}(ve^{x}) = -ax$$

x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$ve^{x} = -\int ax\, dx + c$$

$$= -\frac{ax^2}{2} + c, c \text{ एक अचर है।}$$

v के स्थान पर $\left(\frac{1}{y}\right)$ रखने पर, अभीष्ट हल $y = e^{x}\left(c - \frac{ax^2}{2}\right)^{-1}$ के रूप में प्राप्त हो जाता है।

* * *

टिप्पणी : द्वितीय या उच्चतर कोटि के ऐसे अनेक रैखिक समीकरण हैं; जिन्हें चरों के रूपांतरण करके रैखिक प्रथम कोटि समीकरणों में बदल कर सरलता से हल किया जा सकता है। हम ऐसे समीकरणों को खंड 3 में द्वितीय कोटि के समीकरणों की चर्चा करते समय लेंगे।

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E8) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad x > 0$

ii) $xy(x^2y^2 - 1)dx = dy$

iii) $3e^x \tan y + (1 - e^x)\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 0$

E9) निम्न समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए :

i) $dy = x(x^2 \cos^2 y - \sin 2y)dx$

ii) $\frac{dy}{dx} + y = e^x y^3$

iii) $2x\frac{dy}{dx} + y(6y^2 - x - 1) = 0, \quad x > 0$

आपको याद होगा कि इकाई 6 में हमने कुछ भौतिक स्थितियों की चर्चा की जिन्हें गणितीय पदों में रूपांतरित करके रैखिक अवकल समीकरणों के पदों में व्यक्त किया गया था। अगले भाग में, हम उन समस्याओं के हल ज्ञात करेंगे तथा रैखिक अवकल

समीकरणों के कुछ और भौतिक अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे।

8.5 रैखिक अवकल समीकरणों के अनुप्रयोग

आइए इकाई 6 में चर्चित किए गए जनसंख्या निदर्श पर विचार करें।

I. जनसंख्या निदर्श

आपको याद होगा कि इस जनसंख्या समस्या का अध्ययन करते समय हम निम्न आदि मान समस्या पर पहुँच गए थे (इकाई 6 के समीकरण (46) और (47) देखिए] :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}N(t)=k\ N(t)\\ N(t_0)=N_0\end{array}\right\} \qquad (48)$$

क्योंकि k एक अचर है, इसलिए (48) में दिया गया अवकल समीकरण कोटि एक का रैखिक अवकल समीकरण है। भाग 8.3 में चर्चा की गई विधि द्वारा इसका हल निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$N(t)=N(t_0)\exp[k(t-t_0)]. \qquad (49)$$

समीकरण (49) में, हम सामान्यतः यह मान लेते हैं कि किसी समय t_0 पर जनसंख्या $N(t_0)$ ज्ञात है। यदि k ज्ञात हो, तो समीकरण (48) में दिए आदि प्रतिबंध का प्रयोग करते हुए हम हल ज्ञात कर सकते हैं। किसी विशेष स्थिति में, हम वास्तव में k का यथातथ मान (जो वृद्धि दर देता है) ज्ञात कर सकते हैं, यदि हमें $t_1(t_1 \neq t_0)$ पर N का मान ज्ञात हो। अब हम इस प्रक्रिया को स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 14: यह मान लिया जाए कि किसी स्पीशीज की वृद्धि-दर समय t पर, उपस्थित मात्रा $N(t)$ के समानुपाती है, तो $N(t)$ का मान ज्ञात कीजिए। जबकि, $N(0)=100$ तथा समय $t=1$ पर स्पीशीज़ की संख्या बढ़कर 200 हो जाती है।

हल : इस स्थिति में, $t_0=0$, और $N(0)=100$. समस्या का हल निम्न से प्राप्त है :

$$N(t)=100\ \exp(kt),\ t\geq 0,\ k>0$$

हम k का मान अतिरिक्त प्रतिबंध $N(1)=200$ ($N(1)=$ समय $t=1$ पर जनसंख्या का माप) से ज्ञात करते हैं।

इस प्रकार, $200=100\ \exp(k)\Rightarrow k=\ln 2$

अतः, हल है :

$$N(t)=100\ \exp(t\ln 2)=100\ \exp(\ln 2^t)$$

या $\quad N(t)=(100)\,2^t$, जिससे किसी समय t पर स्पीशीज़ का माप प्राप्त हो जाता है।

***

उदाहरण 15: खमीर (yeast) के संवर्धन (culture) में, सक्रिय खमीर की मात्रा A की वृद्धि-दर उसमें उपस्थित मात्रा के समानुपाती है। यदि प्रारंभिक मात्रा A_0 दो घंटों में दुगुनी हो जाती है, तो प्रारंभिक मात्रा का तिगुना होने में कितना समय लगेगा?

हल : खमीर की वृद्धि को नियंत्रित करने वाला समीकरण

$A(t) = A_0 e^{kt}$ है, जहाँ अचर $k > 0$ है।

यह दिया गया है कि जब $t = 2$, तब $A = 2A_0$. इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं $2A_0 = A_0 e^{2k} \Rightarrow 2 = e^{2k}$. इसलिए, किसी समय t पर, हमें प्राप्त है :

$$A(t) = A_0 (2)^{t/2}$$

वह समय t जब $A = 3A_0$ ज्ञात करने के लिए ऊपर दिए समीकरण से हम $3A_0 = A_0 (2)^{t/2}$ प्राप्त करते हैं।

$$\Rightarrow \; 3 = (2)^{t/2} \text{ or } \ln 3 = \frac{t}{2} \ln 2$$

$$\Rightarrow \; t = \frac{2 \ln 3}{\ln 2} \approx 3.17 \text{ घंटे}$$

अतः, खमीर की मात्रा को अपनी प्रारंभिक मात्रा से तीन गुना होने में लगभग 3 घंटे, 10 मी. और 12 सें. लगेंगे।

***

अब आप समस्याओं में दिए आंकड़ों का प्रयोग करते हुए निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E10) प्रारंभ में, किसी संवर्धन में बैक्टीरिया की संख्या N_0 है। $t = 1$ घंटे पर, बैक्टीरिया की संख्या $\left(\frac{3}{2}\right) N_0$ मापी जाती है। यदि वृद्धि दर बैक्टीरिया की उपस्थित संख्या के समानुपाती है, तो बैक्टीरिया की संख्या को तिगुना होने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए।

E11) किसी शहर की जनसंख्या में वृद्धि दर किसी समय पर उपस्थित जनसंख्या के समानुपाती है। यदि प्रारंभिक जनसंख्या 500 में 10 वर्षों में 15% की वृद्धि हो जाती है, तो 30 वर्षों बाद जनसंख्या कितनी होगी?

आइए रैखिक अवकल समीकरणों के एक अन्य अनुप्रयोग रेडियो ऐक्टिव पदार्थ के क्षय की समस्या पर चर्चा करें।

II. रेडियो ऐक्टिव क्षय

इकाई 6 में, (समीकरण (52) को देखिए) हमने देखा था कि एक दिए हुए रेडियो ऐक्टिव पदार्थ के क्षय को नियंत्रित करने वाला समीकरण निम्न से प्राप्त है :

$$y'(t) = k\ y(t) \tag{50}$$

किसी पदार्थ के प्रारंभिक द्रव्यमान को उसका आधा होने में लगने वाला समय उस पदार्थ का अर्ध-जीवन (half-life) कहलाता है।

जहाँ $y(t)$ किसी समय t पर रेडियो ऐक्टिव पदार्थ का द्रव्यमान है तथा $k < 0$ एक वास्तविक अचर है। समीकरण (50) को उस रेडियो ऐक्टिव पदार्थ का अर्ध जीवन ज्ञात करने में प्रयोग किया जा सकता है।

निम्न उदाहरण से निदर्श का अनुप्रयोग स्पष्ट हो जाएगा।

उदाहरण 16: किसी रेडियो ऐक्टिव पदार्थ का द्रव्यमान 50 ग्राम था। 30 वर्षों के बाद द्रव्यमान 40 ग्राम पाया गया। इस पदार्थ का अर्ध-जीवन ज्ञात कीजिए।

हल : पदार्थ का द्रव्यमान $y(t)$ निम्न को संतुष्ट करता है :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\, y(t) = k\ y(t) \\ y(0) = 50 \text{ ग्राम} \\ y(30) = 40 \text{ ग्राम} \end{array}\right] \qquad (51)$$

जहाँ $k < 0$ एक वास्तविक अचर है।

समीकरण (51) के पहले दो समीकरणों के हल को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$y(t) = 50\ \exp(k\,t)$$

समीकरण (51) के तीसरे समीकरण के प्रयोग से, हम लिख सकते हैं :

$$y(30) = 40 = 50 \exp\,(30k),$$

या $\exp\,(30k) = 4/5$,

अर्थात्, $k = \dfrac{1}{30} \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$

इस प्रकार, द्रव्यमान $y\,(t)$ निम्न को संतुष्ट करता है :

$$y(t) = 50\ \exp\left(\frac{t}{30}\ \ln\frac{4}{5}\right). \qquad (52)$$

मान लीजिए कि इसका अर्ध-जीवन t_1 है। अर्थात्, समय t_1 के बाद द्रव्यमान $\dfrac{50}{2} = 25$ ग्राम रह जाता है।

तब $\quad y(t_1) = 25 \qquad (53)$

हमें t_1 ज्ञात करना है। समीकरण (52) में प्रतिबंध (53) का प्रयोग करने पर, हम

$25 = 50\ \exp\left(\dfrac{t_1}{30} \ln\ \dfrac{4}{5}\right)$ प्राप्त करते हैं।

या $t_1\ \ln\ (4/5) = 30 \ln\ (1/2)$

अर्थात्, $t_1 = 30\ (\ln\ (1/2))/\ln\ (4/5) = \dfrac{30 \times \ln(0.5)}{\ln(0.8)} = \dfrac{-20.7944}{-0.22314} \approx 93$ वर्ष (54)

इसलिए, लगभग 93 वर्ष बाद पदार्थ का द्रव्यमान 25 ग्राम अर्थात्, प्रारंभिक द्रव्यमान का आधा हो जाएगा।

* * *

उदाहरण 17: यह ज्ञात किया गया है कि 0.5% रेडियम 12 वर्षों में लुप्त हो जाता है। रेडियो ऐक्टिव क्षय के नियम का प्रयोग करते हुए, ज्ञात कीजिए (i) 1000 वर्षों में कितने प्रतिशत रेडियम लुप्त हो जाएगा? (ii) रेडियम का अर्ध-जीवन क्या है?

हल: मान लीजिए कि t वर्ष बाद, उपस्थित रेडियम की मात्रा (ग्राम में) A है। इसलिए, रेडियो ऐक्टिव क्षय के नियम अनुसार,

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

जहाँ $k < 0$, क्योंकि रेडियम की मात्रा कम हो रही है। यदि हम यह मान लें कि प्रारंभ में रेडियम की उपस्थित मात्रा (ग्राम में) A_0 है, तो A_0 का 0.5%, अर्थात्, $0.005 A_0$ ग्राम 12 वर्षों में लुप्त हो जाता है और इसीलिए शेष मात्रा $0.995 A_0$ ग्राम रह जाती है। इस प्रकार, हमें निम्न आदि प्रतिबंध प्राप्त है :

$A = A_0$ ग्राम, समय $t = 0$ पर

तथा $A = 0.995 A_0$ ग्राम, $t = 12$ (वर्ष) पर

इन प्रतिबंधों के अंतर्गत, ऊपर प्राप्त समीकरण को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$A = A_0 e^{kt}$$

$t = 12$ पर, $A = 0.995 A_0$ के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं :

$0.995 A_0 = A_0 e^{12k}$ या $e^{12k} = 0.955$

या $12k = \ln(0.995) \approx -0.005$

इस प्रकार $$k = \frac{-0.005}{12} \approx -0.0004$$

तथा $$A = A_0 e^{-0.0004t}$$

i) जब $t = 1000$, $A = A_0 e^{-0.4} \approx 0.670 A_0$.

इस प्रकार, 1000 वर्षों बाद, लगभग $0.670 A_0$ ग्राम रेडियम उपस्थित है। इसलिए, लुप्त हुई मात्रा $A_0 - 0.670\ A_0 = 0.33 A_0$ ग्राम, अर्थात् लगभग 33% मात्रा लुप्त हो जाएगी।

ii) जब $A = \frac{A_0}{2}$ तब, हमें प्राप्त है : $\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-0.0004t}$,

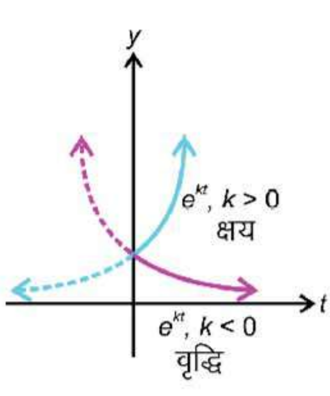
या $e^{0.0004t} = 2$ या $0.0004t = \ln 2 = 0.693147$

या $t = \frac{\ln 2}{0.0004} \approx 1732.87$ वर्ष

इस प्रकार, रेडियम का अर्ध-जीवन लगभग 1733 वर्ष है।

***

चित्र 1 यह दर्शाता है कि समय t में वृद्धि होने पर चरघातांकीय फलन e^{kt} में $k < 0$ के लिए वृद्धि होती है तथा $k > 0$ के लिए इसमें कमी आती है। इस प्रकार, जनसंख्या वृद्धि की समस्याएँ जैसेकि बैक्टीरिया, स्पीशीज़, इत्यादि में वृद्धि की समस्याएँ k के धनात्मक मान से वर्णित होती हैं, जबकि क्षय से संबंद्धित समस्याओं में k का मान ऋणात्मक होता है।



चित्र 1

आइए अब हम एक गर्म पिंड के तापमान विचरण पर विचार करें।

III. न्यूटन का शीतलन नियम

किसी अचर तापमान T_0 वाले परिवेश में रखे एक गर्म पिंड के तापमान के बारे में, इकाई (6) में चर्चा की जा चुकी है। पिंड के तापमान T को नियंत्रित करने वाला समीकरण निम्न है :

$$T'(t) = k(T(t) - T_0), \text{ जहाँ अचर } k < 0. \tag{55}$$

(इकाई (6) का समीकरण (51) देखिए)।

अब हम इस स्थिति को स्पष्ट करने के लिए, एक उदाहरण पर विचार करते हैं।

उदाहरण 18: तापमान 100°C वाली एक छड़ को तापमान 20°C के परिवेश में रखा गया है। यदि 10 मिनट के बाद इस छड़ का तापमान 80°C हो गया हो, तो छड़ का तापमान $T(t)$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें निम्नलिखित समीकरण को हल करना है।

$$\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - 20), T(0) = 100 \text{ और } T(10) = 80 \tag{56}$$

मान लीजिए $y(t) = T(t) - 20$ तब, $y'(t) = T'(t)$ तथा समीकरण (56) यह हो जाता है :

$$\frac{d}{dt}y(t) = k\ y(t) \tag{57}$$

समीकरण (56) एक रैखिक समघात समीकरण नहीं है, जब कि समीकरण (57) रैखिक समघात समीकरण है (इससे इस बात का पता चल जाता है कि y का प्रयोग क्यों किया गया है।) समीकरण (57) के साथ, निम्न दो प्रतिबंध भी हमें प्राप्त हैं :

$$\begin{aligned} &\text{i)}\quad y(0) = T(0) - 20 = 100 - 20 = 80^\circ\text{C} \\ &\text{ii)}\quad y(10) = T(10) - 20 = 80 - 20 = 60^\circ\text{C} \end{aligned} \tag{58}$$

प्रतिबंध 58(i) के साथ, समीकरण (57) का हल है :

$$y(t) = 80\ \exp(kt).$$

y के इस मान तथा प्रतिबंध 58(ii) के साथ, हम प्राप्त करते हैं :

$$y(10) = 60 = 80\ \exp\ (k.10)$$

या $$k = \frac{1}{10}\ln(6/8) = \frac{1}{10}\ln\ (3/4)$$

इसलिए, y का मान निम्न से प्राप्त होता है :

$$y(t) = 80 \exp\left(\frac{t}{10}\ln\ (0.75)\right)$$

तथा छड़ का तापमान T निम्न से प्राप्त है :

$$T(t) = 80\ \exp\left(\frac{t}{10}\ln(0.75)\right) + 20$$

* * *

न्यूटन के शीतलन नियम के एक अन्य अनुप्रयोग के रूप में, हम किसी मनुष्य की मृत्यु के समय का निर्धारण करने का एक उदाहरण लेते हैं। एक शव के दो विभिन्न समयों पर लिए गए तापमान से समीकरण (55) में अचर k का आकलित मान प्राप्त होता है तथा फिर हम वह समय ज्ञात करते हैं कि जिस पर T जीवित व्यक्ति के तापमान के बराबर होता है। किसी मनुष्य के शरीर का सामान्य तापमान $98.6^\circ F$ माना जाता है।

इसे और अच्छी तरह से समझने के लिए, आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 19: हत्या के शिकार एक व्यक्ति का शव एक अचर तापमान $70^\circ F$ वाले कमरे में 11.00 p.m. पर प्राप्त किया गया। डाक्टर ने इस शव का 11.30 p.m. बजे तापमान लिया, जो $94.6^\circ F$ था। उसने एक घंटे बाद पुनः तापमान लिया, जो $93.4^\circ F$ था। मृत्यु के समय का आकलन कीजिए।

हल : इस स्थिति को नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण है :

$$\frac{d(T(t))}{dt} = k(T - T_0) \tag{59}$$

तथा प्रतिबंध निम्न है :

$$T_0 = 70,\ T(0) = 94.6 \text{ और } T(1) = 93.4 \tag{60}$$

समीकरण (59) का हल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$T(t) = T_0 + ce^{kt}, \text{ जहाँ } c \text{ एक अचर है।} \tag{61}$$

समीकरण (60) में दिए प्रतिबंधों को समीकरण (61) में प्रयोग करने पर, हम

$$c = 24.6$$

और $$k = \ln\left(\frac{23.4}{24.6}\right) = -0.05 \text{ प्राप्त करते हैं।}$$

c और k के ऊपर प्राप्त मानों के लिए, समीकरण (61) से प्राप्त होता है :

$$T(t) = 70 + 24.6e^{-0.05\,t} \tag{62}$$

अब हमें समीकरण (62) से t का वह मान निकालना है, जब $T = 98.6$. सरलीकरण के बाद, हम प्राप्त करते हैं :

$$t = -3.0132055 \text{ घंटे}$$

अतः मृत्यु का आकलित समय है 11.30 - 3.0 = 8.30 p.m. (लगभग).

***

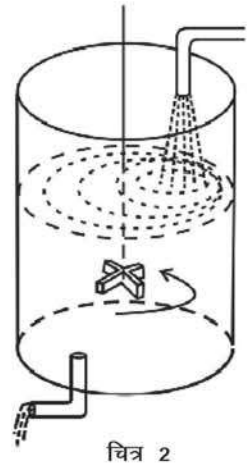
अब, आपके लिए निम्न प्रश्न हैं :

E12) मान लीजिए कि एक थर्मामीटर, जिसकी रीडिंग एक घर के अंदर $70^\circ F$ है, को बाहर रख दिया जाता है, जहाँ वायु का तापमान $10^\circ F$ है। तीन मिनट के बाद, यह पता चलता है कि थर्मामीटर की रीडिंग $25^\circ F$ है। समय t पर थर्मामीटर की रीडिंग $T(t)$ ज्ञात कीजिए।

E13) प्रारंभ में रेडियो ऐक्टिव पदार्थ 100 ग्राम उपस्थित था। 6 वर्षों के बाद द्रव्यमान में 3% की कमी हो गई। यदि क्षय की दर किसी समय उपस्थित पदार्थ की मात्रा के समानुपाती है, तो रेडियो ऐक्टिव पदार्थ का अर्ध-जीवन ज्ञात कीजिए।

अब हम दो तरल पदार्थों के मिश्रण की समस्या को लेते हैं।

IV. मिश्रण समस्या



चित्र 2

दो तरल पदार्थों के मिश्रण से कभी-कभी रैखिक प्रथम कोटि अवकल समीकरण प्राप्त हो जाता है। हम ऐसी समस्याओं के सूत्रीकरण को एक उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करते हैं, जिसमें हम विभिन्न सांध्रता वाले नमक के दो घोलों के एक मिश्रण पर विचार करेंगे।

उदाहरण 20: एक टंकी जिसमें 300 लीटर पानी है, में 50 ग्राम नमक घुला हुआ है। इस टंकी में एक नमक का घोल 3 लीटर प्रति मिनट की दर से पंप के द्वारा डाला जा रहा है तथा अच्छी प्रकार से मिलाए गए विलयन को फिर उसी दर से पंप के द्वारा बाहर निकाला जा रहा है (देखिए चित्र 2)। यदि अंदर जाने वाले घोल की सांध्रता 2 ग्राम प्रति लीटर है, तो टंकी के अंदर किसी भी समय पर नमक की मात्रा ज्ञात कीजिए। टंकी में कितना नमक उपस्थित है (i) 50 मिनट बाद ? (ii) एक लंबे समय बाद?

हल : मान लीजिए कि किसी समय t पर टंकी में नमक की मात्रा (ग्राम में) $P(t)$ है। $P(t)$ की परिवर्तन दर $\frac{dP}{dt}$ है तथा

$$\frac{dP}{dt} = (\text{नमक के अंदर आने की दर}) - (\text{नमक के बाहर जाने की दर})$$

$$= R_1 - R_2 \qquad (63)$$

समीकरण (63) संततता (continuity) का समीकरण कहलाता है। इसके अनुसार द्रव्यमान P संरक्षित होता है अर्थात्, इस प्रक्रिया में, न तो P रचित होता है और न ही P का क्षय होता है। अब, टंकी में नमक के अंदर जाने की दर R_1 (ग्राम/प्रति मिनट में) निम्न है :

$$R_1 = (3\,\text{लीटर}/\text{मिनट}).\ (2\ \text{ग्राम}/\text{लीटर}) = 6\ \text{ग्राम}/\text{मिनट}$$

जबकि टंकी से नमक के बाहर निकलने की दर R_2 निम्न है :

$$R_2 = (3\ \text{लीटर}/\text{मिनट}).\ \left(\frac{P}{300}\text{ग्राम}/\text{लीटर}\right) = \frac{P}{100}\ \text{ग्राम}/\text{मिनट}$$

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए समीकरण में, समय t पर टंकी में नमक की सांध्रता $\frac{P}{300}$ है। समीकरण (63) में, R_1 और R_2 के ऊपर दिए मानों को प्रतिस्थापित करने पर हम नियंत्रण समीकरण निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dP}{dt} = 6 - \frac{P}{100}, \qquad (64)$$

जहाँ आदि प्रतिबंध $P(0) = 50$ है।

समीकरण (64) एक रैखिक समीकरण है, जिसका समाकलन गुणक $e^{t/100}$ है। इस प्रकार, हम समीकरण (64) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{d}{dt}[P e^{t/100}] = 6e^{t/100}$$

अतः $P(t) = 600 + ce^{-t/100}$, जहाँ c समाकलन अचर है।

आदि प्रतिबंध $P(0) = 50$ से $c = -550$ प्राप्त होता है तथा इस प्रकार

$$P(t) = 600 - 550\, e^{-t/100} \tag{65}$$

समीकरण (65) में, $t = 50$ प्रतिस्थापित करने पर, हम $P(50) = 266.41$ ग्राम प्राप्त करते हैं। साथ ही, समीकरण (65) में, जब $t \to \infty$, तब $P(t) \to 600$ ग्राम, जो घोल में एक लंबे समय बाद नमक की अपेक्षित मात्रा है।

***

उदाहरण 20 में, हमने माना है कि घोल के अंदर जाने की दर वही थी जो घोल के बाहर आने की दर थी। परंतु ऐसी स्थिति होना सदैव संभव नहीं है। घोल टंकी के अंदर, बाहर निकालने की तुलना में तीव्र या धीमी दर से भेजा जा सकता है। निम्न प्रश्न को करते समय, ऐसी समस्या के सूत्रीकरण का कार्य हम आपके लिए छोड़ रहे हैं।

E14) किसी टंकी में 100 लीटर शुद्ध पानी है। इस टंकी में, 2 लीटर नमक का घोल, जिसके प्रत्येक लीटर में 1 ग्राम नमक है, प्रति मिनट अंदर प्रवाह कर रहा है। इस मिश्रण को मिलाते हुए एक समान रखा जाता है तथा 1 लीटर प्रति मिनट की दर से इस घोल को टंकी से बाहर भेजा जा रहा है। टंकी में नमक की मात्रा ज्ञात कीजिए, जब इसमें 150 लीटर घोल हो।

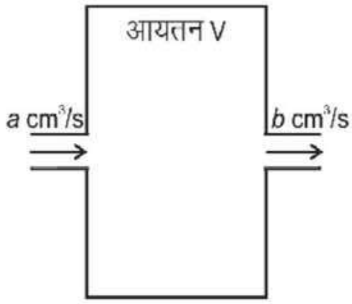
ऊपर दिए अनुप्रयोग के एक प्राकृतिक विस्तार के रूप में, अब हम अवशोषण (absorption) समस्या लेते हैं।

V. अंगों या कोशिकाओं में दवाइयों का अवशोषण

जैविकी समस्याओं का गणितीय रूप से अध्ययन करने के लिए, यह अधिकतर सुविधाजनक होता है कि एक शरीर (जैसे मानव, पशु या पौधा) पर व्यक्तिगत अंगों (जैसे पेट, पेंक्रीस (pancreas) यकृत या गुर्दा) के संग्रह के रूप में विचार किया जाए, जो विभाग (compartments) कहलाते हैं। एक ऐसी समस्या कोशिकाओं (cells) या अंगों (organs) द्वारा रसायनों जैसे की दवाइयों के अवशोषण को ज्ञात करना है। इसका औषधि विज्ञान के क्षेत्र में व्यावहारिक अनुप्रयोग हैं। ऐसी समस्याओं के सरलतम रूप केवल एक ही विभाग से संबद्धित होते हैं। अब हम एक उदाहरण की सहायता से इस प्रकार की समस्या के सूत्रीकरण को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 21: एक द्रव आयतन $V\,cm^3$ के एक अंग में एक दवाई $a\,cm^3/s$ की दर से पहुँचा रहा है तथा $b\,cm^3/s$ की दर से बाहर निकाल रहा है। अंदर आने वाले द्रव्य में दवाई की सांध्रता $c\ g/cm^3$ है। किसी भी समय t पर उस अंग में दवाई की सांध्रता ज्ञात कीजिए।

हल : द्रव अंदर लाने वाली नलिकाओं (inlet) और बाहर भेजने वाली नलिकाओं (outlet) के साथ आयतन V वाले एक विभाग पर विचार कीजिए, जैसा कि चित्र 3 में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि किसी समय t पर अंग में दवाई की सांध्रता $y(t)$ है।



चित्र 3

तब, उस अंग में किसी समय t पर दवाई की मात्रा निम्न है :

$$(Vcm^3)\,(y\,g/cm^3) = Vy\;g \tag{66}$$

अंग में किसी समय t पर अंदर जाने वाली दवाई की मात्रा है

$$(a\,cm^3/s)\,(c\,g/cm^3) = ac\;g/s \tag{67}$$

तथा अंग में से बाहर जाने वाली दवाई की मात्रा निम्न है :

$$(b\,cm^3/s)\,(y\,g\,/\,cm^3) = by\;g/s \tag{68}$$

समीकरणों (66) - (68) से, दी हुई समस्या को नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निम्न है :

$$\frac{d}{dt}(yV) = ac - by \tag{69}$$

तथा आदि प्रतिबंध $t = 0$ पर $y = y_0$ (मान लीजिए)।

समीकरण (69) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{b}{V}y = \frac{ac}{V}$$

जो एक रैखिक समीकरण है जिसका समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{b}{V}dt} = e^{\frac{b}{V}t}$.

$$\therefore \quad ye^{\frac{b}{V}t} = \int \frac{ac}{V}e^{\frac{b}{V}t} + A$$

$$= \frac{ac}{b}e^{\frac{b}{V}t} + A$$

या
$$y = \frac{ac}{b} + Ae^{-\frac{bt}{V}} \tag{70}$$

जहाँ A समाकलन अचर है।

आदि प्रतिबंध $t = 0$ पर $y = y_0$ के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं :

$$A = y_0 - \frac{ac}{b}$$

A के मान को समीकरण (70) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y(t) = \frac{ac}{b} + \left(y_0 - \frac{ac}{b}\right)e^{-\frac{bt}{V}} \tag{71}$$

जिससे किसी भी समय t पर उस अंग में दवाई की सांध्रता प्राप्त हो जाती है।

***

निम्न प्रश्न द्वारा आप अपनी समझ की जाँच कर सकते हैं।

E15) एक द्रव्य आयतन $500cm^3$ के एक अंग में एक दवाई $10cm^3/s$ की दर से पहुँचा रहा है तथा उसी दर से बाहर निकाल रहा है। अंदर आते द्रव में दवाई की सांध्रता 0.08 g/cm^3 है। यह कल्पना करते हुए कि अंग में प्रारंभ में दवाई उपस्थित नहीं थी, निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

i) 30s और 120s बाद अंग में दवाई की सांध्रता

ii) स्थिर-दशा (steady-state) सांध्रता

iii) अंग में दवाई की सांध्रता 0.04 g/cm^3 और 0.06 g/cm^3 होने में कितना समय लगेगा?

इस इकाई में, हमने जो कुछ अध्ययन किया है, उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, इस इकाई को हम यहीं समाप्त कर रहे हैं।

8.6 सारांश

इस इकाई में, हमनें निम्न बिंदुओं पर अध्ययन किया है :

1. प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक रूप निम्न होता है :

   $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$, जहाँ P और Q किसी अंतराल $I \subseteq \boldsymbol{R}$ पर संतत वास्तविक मान फलन हैं।

   जब $Q(x) = 0$ हो, तब इसे कोटि एक वाला **समघात रैखिक अवकल समीकरण** कहा जाता है।

   जब $Q(x) \neq 0$ हो, तब इसे कोटि एक वाला **असमघात रैखिक अवकल** समीकरण कहा जाता है।

   इस समीकरण के लिए, समाकलन गुणक, $e^{\int P(x)dx}$ है तथा **व्यापक हल**

   $y = e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx + c\, e^{-\int P(x)\,dx}$ से प्राप्त होता है।

   यहाँ, $e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}$ समीकरण का एक **विशेष हल** है।

2. यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ में $P(x)$ एक अचर है तथा $Q(x)$ का रूप $e^{\alpha x}$ (α अचर), x^r ($r > 0$, एक पूर्णांक), $\sin \beta x$ या $\cos \beta x$ (β अचर) में से कोई एक या इन फलनों का एक रैखिक संयोजन है, तो इस समीकरण का विशेष हल ज्ञात करने के लिए अनिर्धारित गुणांक विधि का अनुप्रयोग किया जा सकता है। $Q(x)$ के विभिन्न रूपों के लिए विशेष समाकल नीचे तालिका में दिए गए हैं :

$P(x)$	$Q(x)$	विशेष हल
a (अचर)	e^{mx} (m अचर)	$\begin{cases} \dfrac{e^{mx}}{m+a}, \text{ यदि } m \neq -a \\ xe^{mx}, \text{ यदि } m = -a \end{cases}$
a (अचर)	$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ($i > 0$ एक पूर्णांक)	$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \dfrac{a_i}{i+1} x^{i+1}, \text{ यदि } a = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, \text{ यदि } a \neq 0 \end{cases}$ जबकि $b_n = \dfrac{a_n}{a}, b_{n-1} = \dfrac{1}{a}\left(a_{n-1} - \dfrac{na_n}{a}\right),$ $b_{n-2} = \dfrac{1}{a}\left[a_{n-2} - \dfrac{n-1}{a}\left(a_{n-2} - \dfrac{n}{a}\right)\right]$ इत्यादि।
a (अचर)	$\sin \beta x$ या $\cos \beta x$ या $A \sin \beta x + B \cos \beta x$ (β, A, B अचर हैं)	$\sin \beta x$ और $\cos \beta x$ का एक रैखिक संयोजन

3. **प्राचल विचरण विधि** असमघात रैखिक अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ का हल प्राप्त करने के लिए एक वैकल्पिक विधि प्रदान करती है।

4. i) **बर्नोली समीकरण**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\,y^n,$$

जहाँ P और Q केवल x के फलन हैं तथा n न तो शून्य है और न ही एक है। प्रतिस्थापन $v = y^{1-n}$ द्वारा यह एक रैखिक समीकरण में बदल जाता है।

ii) $f'(y)\dfrac{dy}{dx} + P(x)\, f(y) = Q(x)$ के प्रकार के समीकरण प्रतिस्थापन $f(y) = v$ द्वारा रैखिक समीकरण में बदल जाते हैं।

5. जन संख्या निदर्श, रेडियो ऐक्टिव क्षय, न्यूटन शीतलन नियम, मिश्रण समस्या तथा अंगों में दवाइयों का अवशोषण जैसी भौतिक समस्याओं को नियंत्रित करने वाले अवकल समीकरण हल किए गए हैं।

8.7 हल/उत्तर

E1) i) अरैखिक; y

ii) रैखिक; y

iii) रैखिक; i

iv) रैखिक; x

v) रैखिक; x, अरैखिक; y

vi) अरैखिक; s, अरैखिक; t

E2) i) दिए गए अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1} y = \frac{4x^2}{x^2+1} \quad (72)$$

समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{\ln (x^2+1)} = x^2 + 1$

समीकरण (72) को (x^2+1) से गुणा करने पर तथा पदों को व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx} [y(x^2+1)] = 4x^2$$

x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$3y(x^2+1) = 4x^3 + c$, c एक अचर है तथा यही अभीष्ट हल है।

ii) समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln |x|} = x^2$

दिए गए समीकरण को x^2 से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}(yx^2) = x^2 \sin x$$

x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$yx^2 = c - x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$, जो अचर c के साथ अभीष्ट हल है।

iii) दिए गए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} + \cos x \, y = \sin x \cos x$$

समाकलन गुणक $= e^{\int \cos x \, dx} = e^{\sin x}$

$$\therefore \; ye^{\sin x} = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx + c$$

$$= \int te^t dt + c \; (\sin x = t \text{ रखने पर})$$

$$= te^t - e^t + c$$

$$= \sin x \, e^{\sin x} - e^{\sin x} + c$$

$\Rightarrow \; y = c \, e^{-\sin x} + (\sin x - 1)$, जहाँ c एक अचर है।

iv) दिए गए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{1+y^2}x=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \qquad (73)$$

यह आश्रित चर x के लिए एक रैखिक समीकरण है, जिसके समाकलन गुणक को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

समाकलन गुणक $=e^{\int\frac{1}{1+y^2}dy}=e^{\tan^{-1}y}$

समीकरण (73) को $e^{\tan^{-1}y}$ से गुणा करके y के सापेक्ष समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x\,e^{\tan^{-1}y}=c+\int\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}e^{\tan^{-1}y}\,dy, \text{ } c \text{ एक अचर है}$$

$$=c+\int te^t dt \text{ } (\tan^{-1}y=t \text{ रखिए, जिससे } \frac{1}{1+y^2}dy=dt)$$

$$=c+te^t-\int e^t\,dt$$

$$=c+(\tan^{-1}y)\,e^{\tan^{-1}y}-e^{\tan^{-1}y} \text{ } (t \text{ पुनः रखने पर})$$

या $x=c\,e^{-\tan^{-1}y}-1+\tan^{-1}y$, जो अभीष्ट हल है।

v) $x=2y^3+cy^{-2}$ (**संकेत:** x को आश्रित चर और y को स्वतंत्र चर मानिए).

vi) दिया हुआ समीकरण रैखिक है।

$y\ge 0$ के लिए, दिया हुआ समीकरण $y'-2xy=1$.

इसका समाकलन गुणक $=e^{\int -2x\,dx}=e^{-x^2}$

दिए हुए समीकरण को समाकलन गुणक से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$ye^{-x^2}=\int e^{-x^2}dx+c$$

क्योंकि $\int e^{-x^2}dx$ का ज्ञात फलनों के पदों में मान नहीं निकाला जा सकता है, इसलिए $y=e^{x^2}\int e^{-x^2}dx+c\,e^{x^2}$ ही दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है।

$y<0$ के लिए, दिया हुआ समीकरण $y'+2xy=1$ है तथा इसका व्यापक हल $y=e^{-x^2}\int e^{x^2}dx+ce^{-x^2}$.

E3) i) $y=ce^x+e^x \ln x$, $x\ge 1$ के लिए

ii) $y=ce^x-x^5-5x^4-21x^3-63x^2-127x-127$.

iii) $y=ce^x+e^x[-x\cos x+\sin x]$

$$-x^5-5x^4-20x^3-60x^2-120x-120.$$

iv) समाकलन गुणक $=e^{3x}$

$\therefore\ ye^{3x} = \int |x|\, e^{3x} dx + c$.

यदि $x \le 0$ तो

$ye^{3x} = c - \int x\, e^{3x}\, dx$ ($|x| = -x$, $x \le 0$ के लिए)

$= c - x\dfrac{e^{3x}}{3} + \int \dfrac{e^{3x}}{3}\, dx$ (खंडशः समाकलन द्वारा)

$= c - \dfrac{x}{3}e^{3x} + \dfrac{1}{9}\, e^{3x}$

$\because\ x = 0$ पर $y = 1$ है, इसलिए

$\therefore\ 1 = c - 0 + \dfrac{1}{9}$, अर्थात्, $c = \dfrac{8}{9}$

इस प्रकार $x \le 0$ के लिए, $ye^{3x} = \dfrac{8}{9} - \dfrac{1}{3} x e^{3x} + \dfrac{1}{9} e^{3x}$.

यदि $x > 0$, तो $ye^{3x} = c + \int xe^{3x} dx = c + \dfrac{x}{3}e^{3x} - \dfrac{1}{9}e^{3x}$

$y(0) = 1$ का प्रयोग करने पर, हम $c = \dfrac{10}{9}$ प्राप्त करते हैं।

$\therefore\ x > 0$ के लिए, $ye^{3x} = \dfrac{10}{9} + \dfrac{x}{3}\, e^{3x} - \dfrac{1}{9}e^{3x}$ अभीष्ट हल है।

E4) i) दिए हुए समीकरण की समीकरण (18) से तुलना करने पर,

$a = 1,\ k = 2b,\ m = 1$

साथ ही, $m + a = 1 + 1 = 2 \ne 0$.

$$\therefore\ y_p(x) = \frac{k}{a+m}\, e^{mx} = \frac{2b}{1+1} e^{1.x} = be^{x}$$

इस स्थिति में, समाकलन गुणक $= e^{\int P\,dx} = e^{\int dx} = e^{x}$ $(\because P = 1)$

$\therefore\ y = y_p(x) + ce^{-x}$ स्वेच्छ अचर c के लिए

अर्थात्, $y = be^{x} + ce^{-x}$, अभीष्ट हल है।

ii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} - 3y = \frac{b}{2}e^{3x}$$

यहाँ, $a = -3,\ k = \dfrac{b}{2},\ m = 3$

$\therefore\ m = -a$

दिए हुए समीकरण का एक विशेष हल $y_p(x) = \dfrac{b}{2} xe^{3x}$.

समाकलन गुणक $= e^{-\int 3dx} = e^{-3x}$

अतः अभीष्ट हल $y = \dfrac{b}{2} xe^{3x} + c\, e^{3x}$.

E5) i) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} - y = x^2$$

$y_p(x) = \sum_{i=0}^{2} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ के रूप का एक विशेष हल लीजिए।

दिए हुए समीकरण में, $y_p(x)$ को प्रतिस्थापित करने, दोनों पक्षों में x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने तथा हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$y_p(x) = -2 - 2x - x^2$$

इस स्थिति में, समाकलन गुणक $= e^{-\int 1.\, dx} = e^{-x}$

$\therefore\ y = y_p(x) + ce^x$ व्यापक हल है।

अर्थात्, $y = ce^x - 2 - 2x - x^2$.

ii) $y_p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ लीजिए।
दिए हुए समीकरण में $y_p(x)$ और $y_p'(x)$ प्रतिस्थापित करने तथा x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$b_0 = \frac{-5}{4},\ b_1 = \frac{-3}{2},\ b_2 = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore\ y_p(x) = -\frac{5}{4} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2$$

समाकलन गुणक $= e^{-\int 2\, dx} = e^{-2x}$
अभीष्ट हल $y = y_p(x) + c\, e^{2x}$ (c एक अचर) है।

E6) i) एक विशेष हल $y_p(x) = c\sin 2x + d\cos 2x$ लीजिए।
दिए हुए समीकरण में $y_p(x)$ के इस मान को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(2c\cos 2x - 2d\sin 2x) - (c\sin 2x + d\cos 2x) = 6\cos 2x$$

$\sin 2x$ और $\cos 2x$ के गुणांकों को बराबर रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\left.\begin{array}{r} -2d - c = 0 \\ 2c - d = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \frac{12}{5} \text{ और } d = -\frac{6}{5}$$

$$\therefore\ y_p(x) = \frac{6}{5}(2\sin 2x - \cos 2x).$$

इस स्थिति में समाकलन गुणक $= e^{-\int dx} = e^{-x}$

$\therefore\ y = \alpha e^x + y_p(x)$, व्यापक हल है।

अर्थात्, $y = \alpha e^x + \frac{6}{5}(2\sin 2x - \cos 2x)$.

ii) दिए हुए समीकरण का विशेष हल है :

$$y_p(x) = \frac{1}{27}(2 - x + 9x^2) + \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}(3\sin x - \cos x)$$

दिए हुए समीकरण के समघात भाग, अर्थात्

$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ का हल $y = ce^{-3x}$.

अतः $y = ce^{-3x} + \frac{1}{27}(2 - 2x + 9x^2) + \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}(3\sin x - \cos x)$ व्यापक हल है।

E7) i) एक विशेष हल $y_p(x) = c\cos(\pi x) + d\sin(\pi x)$ लीजिए। दिए हुए समीकरण में $y_p(x)$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$-c\pi\sin(\pi x) + d\pi\cos(\pi x) - 2c\cos(\pi x) - 2d\sin(\pi x) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x)$$

$\sin(\pi x)$ and $\cos(\pi x)$, के गुणांकों को बराबर रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\left.\begin{aligned} -c\pi - 2d &= 1 \\ d\pi - 2c &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = -\left(\frac{\pi + 2}{\pi^2 + 4}\right) \text{ और } d = \frac{\pi - 2}{\pi^2 + 4}$$

अतः $y(x) = \alpha e^{2x} - \frac{1}{\pi^2 + 4}[(\pi + 2)\cos(\pi x) - (\pi - 2)\sin\pi x]$ व्यापक हल है :

अब, $y(1) = 1$ से प्राप्त होता है :

$$1 = \alpha e^2 - \frac{1}{\pi^2 + 4}[(\pi + 2)\cos\pi - (\pi - 2)\sin\pi] = \alpha e^2 + \frac{1}{\pi^2 + 4}(\pi + 2)$$

अर्थात्, $\alpha = \left[1 - \frac{\pi + 2}{\pi^2 + 4}\right]e^{-2} = \frac{(\pi^2 - \pi + 2)}{\pi^2 + 4}e^{-2}$

$\therefore$ अभीष्ट हल है :

$$y(x) = \left(\frac{\pi^2 - \pi + 2}{\pi^2 + 4}\right)e^{2x-2} - \frac{1}{\pi^2 + 4}[(\pi + 2)\cos(\pi x) - (\pi - 2)\sin(\pi x)]$$

i) दर्शाइए कि $y' - y = \cos 2x$, $y' - y = e^x$, $y' - y = e^{2x}$ और $y' - y = x$ के विशेष हल क्रमशः, $\frac{1}{5}(2\sin 2x - \cos 2x)$, xe^x, e^{2x} और $(-x - 1)$ हैं। अभीष्ट व्यापक हल निम्न से प्राप्त हो जाता है :

$$y(x) = ce^x + \frac{1}{5}(2\sin 2x - \cos 2x) + xe^x + e^{2x} - x - 1.$$

iii) $y(x) = ce^{3x} + \frac{1}{6}(\sin 3x - \cos 3x) + \frac{1}{27}(2 + 6x + 9x^2) - \frac{2}{3}$.

iv) व्यापक हल $y(x) = ce^{-x} + x - x^2 - 1$.

अब, $y(0) = 0$, $\therefore 0 = c + 0 - 0 - 1 \Rightarrow c = 1$

अभीष्ट हल $y(x) = e^{-x} - x^2 + x - 1$.

v) व्यापक हल $y(x) = ce^x + xe^x$ है।

अब, $y(0) = -3 \Rightarrow -3 = c$ या $c = -3$

$\therefore$ अभीष्ट हल $y(x) = (x-3)e^x$.

E8) i) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$e^{-y}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}e^{-y} = \frac{1}{x^2}$$

इसमें $v = e^{-y}$ प्रतिस्थापित करने पर, ऊपर दिया समीकरण निम्न हो जाता है : $\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = \frac{-1}{x^2}$. इसे v के लिए हल करके तथा फिर v के स्थान पर e^{-y} रखने पर हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$e^{-y} = cx + \frac{1}{2x}$, जो अभीष्ट हल है।

ii) दिए हुए समीकरण को $y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3$ के रूप में लिखा जा सकता है।

इसमें $v = y^{-2}$ प्रतिस्थापित करने पर, समीकरण एक रैखिक समीकरण $\frac{dv}{dx} - 2xv = -2x^3$ में बदल जाता है, जिसका हल $v = ce^{x^2} + x^2 + 1$ है।

अतः, $\frac{1}{y^2} = ce^{x^2} + x^2 + 1$ अभीष्ट हल है।

iii) दिए हुए समीकरण को $\sec^2 y\frac{dy}{dx} + \frac{3e^x}{1-e^x}\tan y = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

मान लीजिए कि $v = \tan y$ है। तब, $\frac{dv}{dx} = \sec^2 y\frac{dy}{dx}$.

अतः, $\frac{dv}{dx} + \frac{3e^x}{1-e^x}v = 0$ जो एक रैखिक समीकरण है।

अभीष्ट हल $\tan y = c(1-e^x)^3$.

E9) i) दिए हुए समीकरण को $\sec^2 y\frac{dy}{dx} + 2x\tan y = x^3$ के रूप में लिखा जा सकता है। $v = \tan\, y$ प्रतिस्थापित करने पर निम्न प्राप्त होता है :

$\frac{dv}{dx} + 2xv = x^3$, जिसका समाकलन गुणक $= e^{x^2}$.

ऊपर प्राप्त समीकरण को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2-1)$$

अतः, अभीष्ट हल $\tan y = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2-1)$ है।

ii) $\frac{1}{y^2} = ce^{2x} + 2e^x$

iii) दिए हुए समीकरण को y^3 से भाग देने पर तथा उसमें $v = y^{-2}$ प्रतिस्थापित करने पर निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{dv}{dx} + \frac{(x+1)}{x} v = \frac{6}{x}$$

हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v = \frac{6}{x} + \frac{c}{x} e^{-x}.$$

इस प्रकार, अभीष्ट हल $\frac{1}{y^2} = \frac{6}{x} + \frac{c}{x} e^{-x}$ है।

E10) यहाँ, हमें निम्न अवकल समीकरण को हल करना है :

$$\frac{dN}{dt} = kN \qquad (74)$$

तथा प्रतिबंध है $N(0) = N_0$ और $N(1) = \left(\frac{3}{2}\right) N_0$

समीकरण (74) से, हम $N(t) = ce^{kt}$ प्राप्त करते हैं, जहाँ c समाकलन अचर है।

$t = 0$ पर, $N(0) = N_0$. इससे निष्कर्ष निकलता है कि $N_0 = ce^0 = c$

जिससे $N(t) = N_0 e^{kt}$ प्राप्त होता है।

$t = 1$ पर, $N(1) = \frac{3}{2} N_0$, जिससे

$\frac{3}{2} N_0 = N_0 e^k$ या $e^k = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow k = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$,

इस प्रकार, $N(t) = N_0 e^{t \ln(3/2)}$.

वह समय ज्ञात करने के लिए, जब बैक्टीरिया तिगुने हो जाते हैं, हम t के लिए $3N_0 = N_0 e^{t \ln(3/2)}$ को हल करते हैं, जिससे प्राप्त होता है :

$3 = e^{t \ln(3/2)}$ या $t \ln(3/2) = \ln 3$

$\Rightarrow t = \frac{\ln 3}{\ln(3/2)} \approx 2.71$ घंटे

E11) यहाँ हमें अवकल समीकरण $\frac{dN}{dt} = kN$, $N(0) = 500$ और $N(10) = 500 + 75$ (500 का 15%) को हल करना है तथा $N(30)$. का मान ज्ञात करना है। दिए हुए प्रतिबंध के अंतर्गत, दिए हुए समीकरण को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$N(t) = 500e^{kt}$ and $k = \frac{1}{10} \ln(1.15)$

इससे $N(30) = 500(1.15)^3 = 760$ (लगभग) प्राप्त होता है।

E12) $T(t)$ समय t (मिनटों में) पर थर्मामीटर का तापमान निरूपित करता है। हमें दिया है कि $t=0$ पर $T=70$ तथा $t=3$ पर $T=25$. क्योंकि थर्मामीटर को घर के बाहर रखा गया है, जहाँ तापमान 10°F है, इसलिए $T(t)$ समीकरण $\frac{d}{dt}T(t)\ \alpha\ (T-10)$ को संतुष्ट करता है।

क्योंकि थर्मामीटर का तापमान कम हो रहा है, इसलिए आनुपातिकता स्थिरांक $(-k)$ लेना सुविधाजनक है। इस प्रकार T को अवकल समीकरण

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-10) \tag{75}$$

से निर्धारित किया जाना है, जबकि प्रतिबंध है

$t=0$ पर $T=70$ तथा $t=3$ पर $T=25$.

समीकरण (75) से हम प्राप्त करते हैं :

$$T(t)=10+ce^{-kt}. \tag{77}$$

तब प्रतिबंध (76) से प्राप्त होता है : $70=10+c$ या $c=60$, जिससे

$T(t)=10+60e^{-kt}$

प्रतिबंध (77) से हमें प्राप्त होता है :

$25=10+60e^{-3k}$

$\Rightarrow e^{-3k}=\frac{1}{4}$ या, $k=\frac{1}{3}\ln 4$

अतः तापमान $T(t)$ निम्न प्राप्त होता है :

$$T(t)=10+60\exp\left(\frac{-1}{3}t\ln 4\right).$$

E13) समय t (वर्ष में) पदार्थ का द्रव्यमान $y(t)$ समीकरण $\frac{dy}{dt}=ky(t),\ y(0)=100$ ग्राम और $y(6)=97$ ग्राम को संतुष्ट करता है। ऊपर प्राप्त समीकरण को दिए हुए प्रतिबंधों के अंतर्गत हल करने पर, हमें

$y(t)=100e^{kt}$ प्राप्त होता है, जहाँ $k=\frac{1}{6}\ln(0.97)=-0.005076535$. यदि t_1 उस पदार्थ का अर्ध-जीवन है, तो $y(t_1)=50$ ग्राम।

इससे $50=100e^{kt_1}$ या, $t_1=\frac{\ln 2}{0.005076535}\approx 136.5$ वर्ष प्राप्त होता है।

E14) यदि टंकी में नमक की मात्रा (ग्राम में) $P(t)$ है तो

$\frac{dP}{dt}=$ (नमक के अंदर जाने की दर) – (नमक के बाहर आने की दर)

$=R_1-R_2$.

R_1, टंकी में नमक के अंदर जाने की दर (ग्राम / मिनट) है

$R_1=(2$ लीटर / मिनट$).\ (1$ ग्राम / मिनट$)=2$ ग्राम / मिनट।

क्योंकि मिश्रण 1 लीटर/मिनट की कम दर से बाहर आ रहा है, इसलिए मिश्रण $(2-1)$ लीटर/मिनट $=1$ लीटर/मिनट की दर से जमा हो रहा है। t मिनटों बाद, टंकी में $(100+t)$ लीटर नमक का घोल है। तब, नमक के बाहर आने की दर निम्न है :

$$R_2 = (1\,\text{लीटर / मिनट}).\left(\frac{P}{100+t}\,\text{ग्राम / लीटर}\right) = \frac{P}{100+t}\,\text{ग्राम / मिनट}$$

अतः, $\frac{dP}{dt} = 2 - \frac{P}{100+t}$ या, $\frac{dP}{dt} + \frac{P}{100+t} = 2$.

समाकलन गुणन $= e^{\int \frac{1}{100+t}dt} = e^{\ln(100+t)} = 100+t$.

$\therefore\ P(t)\,(100+t) = \int 2(100+t)\,dt + c$

$= 200t + t^2 + c$

$t=0$ पर $P=0$ से $c=0$ प्राप्त होता है, जिससे $P(t) = \frac{200t+t^2}{100+t}$

अब, यदि समय t पर द्रव का आयतन V है, तो $V = 100+t$.

$\therefore$ जब $V=150$ लीटर है, तब $t = 150-100 = 50$ मिनट तथा नमक की मात्रा $P(t) = \frac{200\times 50 + (50)^2}{150} = 83.3$ ग्राम (लगभग)।

E15) समीकरण (79) से तुलना करने पर हमें प्राप्त है :

$a = b = 10cm^3/s,\ V = 500cm^3,\ c = 0.08g/cm^3,\ y_0 = 0$.

तब, किसी समय t पर अंग में दवाई की सांध्रता $y(t)$ निम्न है :

$y(t) = 0.08(1-e^{-t/50})$

i) जब $t=30,\ y(t) = 0.08(1-e^{-0.6}) = 0.036g/cm^3$ (लगभग)

जब $t=120,\ y(t) = 0.08(1-e^{-2.4}) = 0.073g/cm^3$ (लगभग)

ii) जब $t\to\infty$, $y(t)$ का दूसरा पद शून्य की ओर अग्रसर होता है। इसे **क्षणिक पद (transient term)** कहा जाता है; शेष पद हल का **स्थिर-दशा (steady-state)** भाग कहलाता है। इस प्रकार, स्थिर दशा सांध्रता $y(t) = 0.08$ है।

iii) जब $y(t) = 0.04$ है, तब $1-e^{-t/50} = \frac{0.04}{0.08} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ e^{-t/50} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

या, $t = 50\ln 2 \approx 34.7$ सैकंड।

इसी प्रकार, जब $y(t) = 0.06,\ t = 100\ln 2 \approx 69.3$ सैकंड।

– x –

इकाई 9

एक से बड़ी घात वाले प्रथम कोटि अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

9.1 प्रस्तावना

इकाई 6 में, हमनें आपका परिचय अवकल समीकरणों की आधारभूत संकल्पनाओं से करवाया था तथा अवकल समीकरणों के विभिन्न प्रकार के हलों की चर्चा की थी। इकाई 7 और इकाई 8 में, हमनें आपको प्रथम कोटि और प्रथम घात वाले विभिन्न प्रकार के अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां बतायीं। इस इकाई में, हम उन अवकल समीकरणों पर विचार करेंगे, जो प्रथम कोटि वाले हैं पर उनकी घात एक से बड़ी है।

यदि हम $\frac{dy}{dx}$ को p से व्यक्त करें, तो प्रथम कोटि और nवीं घात वाले अवकल समीकरण का व्यापक रूप निम्न होता है :

$$p^n + P_1 p^{n-1} + P_2 p^{n-2} + \cdots + P_{n-1} p + P_n = 0 \qquad (1)$$

जहाँ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ चरों x और y के फलन हैं।

समीकरण (1) को उसके अति व्यापक रूप में हल करना कठिन है। इसी कारण, इस इकाई में, हम रूप (1) के केवल उन्हीं समीकरणों पर विचार करेंगे जिन्हें सरलता से हल किया जा सकता है तथा ऐसे समीकरणों को हल करने की विधियों की चर्चा करेंगे। समीकरण (1) के रूप के वे समीकरण जिन्हें वास्तविक गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों में वियोजित किया जा सकता है पर चर्चा हम भाग 9.2 में करेंगे व समीकरण जिनके गुणनखंड नहीं किए जा सकते पर चर्चा हम भाग 9.3 में करेंगे।

अंग्रेज गणितज्ञ और वैज्ञानिक आइज़क न्यूटन (1642-1727) ही वह पहले व्यक्ति थे जिन्होंने 1671 के आस पास लिखे और 1736 में प्रकाशित "Methodus Fluxionum et serierum infinitarum", में प्रथम कोटि वाले अवकल समीकरणों को [जिन्हें उस समय (fluxional) समीकरणों के नाम से जाना जाता था] वर्गीकृत किया। इतालवी गणितज्ञ और दार्शनिक काउन्ट जैकोपो रिकेटी (1676-1754) ने मुख्यतः न्यूटन के विचारों को इटली में प्रस्तुत किया। रिकेटी ने ही अवकल समीकरणों के सिद्धांत को और आगे बढ़ाने में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाई। सन् 1712 में, उन्होंने y में द्वितीय कोटि वाले समीकरण को p में प्रथम कोटि वाले समीकरण में समानीत किया। सन् 1723 में उन्होंने प्रदर्शित किया कि कुछ प्रतिबंधित परिकल्पनाओं के अंतर्गत एक विशेष समीकरण जिसके साथ रिकेटी का नाम जोड़ा गया था को हल किया जा सकता है।

बाद में, फ्रांसीसी गणितज्ञ अलेक्सिस कलाडे क्लेरों (1713-1765) ने अवकल समीकरणों को हल करने के लिए इनका अवकलन करने की धारणा को प्रस्तुत किया। उन्होंने इस विधि को उस समीकरण के लिए प्रयोग किया जो अब उनके नाम से जानी जाती है तथा इसे 1734 में प्रकाशित किया। वे ही पहले ऐसे व्यक्ति थे जिन्होंने अवकल समीकरणों के विचित्र हलों की खोज की। अपने समय काल के अनेक गणितज्ञों की ही तरह क्लेरों भी एक भौतिकविद् तथा खगोलशास्त्री थे। इस इकाई के भाग 9.3 में, हम रिकेटी और क्लेरों द्वारा प्रस्तुत समीकरणों की भी चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- उन अवकल समीकरणों के हल ज्ञात कर सकेंगे जिन्हें वास्तविक गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों में वियोजित किया जा सकता है;
- y, x या p के लिए हल किए जा सकने वाले अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कर सकेंगे;
- उन अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कर सकेंगे जिनमें x या y उपस्थित न हों;
- उन अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कर सकेंगे जो x और y में समघात हों;
- क्लेरों समीकरण की पहचान करके उसका हल प्राप्त कर सकेंगे; और
- रिकेटी समीकरण की पहचान करके उसका हल प्राप्त कर सकेंगे।

9.2 समीकरण जिनके गुणनखंड किए जा सकते हैं

आइए प्रथम कोटि और nवीं घात वाले अवकल समीकरण के व्यापक रूप पर विचार करें, जो समीकरण (1) द्वारा प्राप्त है :

$$p^n + P_1 p^{n-1} + P_2 p^{n-2} + \cdots + P_{n-1} p + P_n = 0,$$

जहाँ $p=\frac{dy}{dx}$ तथा $P_1, P_2, \ldots, P_n$, चरों x और y के फलन हैं। इस समीकरण को $f(x, y, p)=0$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

इस समीकरण के लिए, दो संभावनाएँ हो सकती हैं :

i) समीकरण (1) के बाएँ पक्ष को वास्तविक गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों में वियोजित (resolve) किया जा सकता है।

ii) समीकरण (1) के बाएँ पक्ष के गुणनखंड नहीं किए जा सकते हों।

इस भाग में, हम पहली संभावना को लेंगे तथा दूसरी संभावना पर चर्चा अगले भाग में करेंगे। हम समीकरण (1) का एक ऐसा उदाहरण लेकर प्रारंभ करेंगे जिसको वास्तविक गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों में वियोजित किया जा सकता है।

उदाहरण 1: समीकरण $p^2+px+py+xy=0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को रैखिक गुणनखंडों में वियोजित किया जा सकता है तथा निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(p+x)(p+y)=0$$

अर्थात्, या तो $p+x=0$ या $p+y=0$.

दूसरे शब्दों में, $\frac{dy}{dx}+x=0$ या $\frac{dy}{dx}+y=0$.

ऊपर प्राप्त समीकरण रैखिक प्रथम कोटि समीकरण हैं। इनके हलों को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$2y=-x^2+c_1 \text{ और } \ln|y|=-x+c_2, \text{ जहाँ}$$

c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं। हम मान लेते हैं कि $c_1=c_2=c$ और इस प्रकार दिए हुए समीकरण का व्यापक हल निम्न है:

$$(2y+x^2-c)\,(x+\ln|y|-c)=0.$$

***

व्यापक रूप में जब समीकरण (1) को वास्तविक गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों में वियोजित किया जा सकता है, तब इसे निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$(p-R_1)\,(p-R_2)\ldots(p-R_n)=0 \qquad (2)$$

जहाँ $R_1, R_2, \ldots, R_n$, चरों x और y के फलन हैं।

समीकरण (1) p के उस मान के लिए संतुष्ट होगा, जो समीकरण (2) के किसी भी गुणनखंड को शून्य के बराबर कर देता है। अतः, समीकरण (2) का हल प्राप्त करने के लिए, हम समीकरण (2) के प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर रखते हैं। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

$$p-R_1=0,\; p-R_2=0, \ldots,\; p-R_n=0 \qquad (3)$$

ये प्रथम कोटि और प्रथम घात के n समीकरण हैं। इकाई 7 और इकाई 8 में दी गयी विधियों का प्रयोग करते हुए, हम ऊपर प्राप्त प्रथम कोटि और प्रथम घात के n

समीकरणों के हल प्राप्त कर सकते हैं ।

आइए मान लें कि समीकरण (3) के अभीष्ट हल निम्न हैं :

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,\ y,\ c_1)=0 \\ f_2(x,\ y,\ c_2)=0 \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \ \vdots \\ f_n(x,\ y, c_n)=0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

जहाँ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ समाकलनक अचर हैं।

क्योंकि $c_1, c_2, \ldots, c_n$ अनंत अनेक मान ग्रहण कर सकते हैं, इसलिए यहाँ व्यापकता में कोई हानि नहीं होगी, यदि हम

$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$ (मान लीजिए) लें।

इस स्थिति में, समीकरण (4) द्वारा प्राप्त n हल निम्न रूप में लिखे जा सकते हैं :

$$\begin{array}{l} f_1(x,\ y,\ c)=0 \\ f_2(x, y,\ c)=0 \\ f_3(x,\ y, c)=0 \\ \cdots\ \ \cdots\ \ \ \ \ \cdots \\ \cdots\ \ \cdots\ \ \ \ \ \cdots \\ f_n(x,\ y,\ c)=0 \end{array}$$

इन n हलों को अलग-अलग लिखा जा सकता अथवा एक ही समीकरण में, निम्न प्रकार संयोजित किया जा सकता है :

$$f_1(x, y, c) f_2(x, y, c) \ldots f_n(x, y, c) = 0$$

समीकरण (4) में सभी $c_1, c_2, \ldots, c_n$ को बराबर लेने का कारण यह है कि समीकरण (2) एक प्रथम कोटि समीकरण है और इसलिए इसमें केवल एक ही स्वेच्छ अचर आविष्ट कर सकता है।

ऊपर चर्चा की गयी विधि को समझने के लिए, एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 2: समीकरण $p^3(x+2y)+3p^2(x+y)+(y+2x)\ p=0$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण निम्न के समतुल्य है :

$$p\,[p^2(x+2y)+3p(x+y)+(y+2x)]=0$$

$$\Rightarrow\ \ p\,[p^2(x+2y)+p\{(y+2x)+(x+2y)\}+(y+2x)]=0$$

$$\Rightarrow\ \ p\,[p^2(x+2y)+p(x+2y)+p(y+2x)+(y+2x)]=0$$

$$\Rightarrow\ \ p\,[p(p+1)\ (x+2y)+(p+1)(y+2x)]=0$$

$$\Rightarrow\ \ p(p+1)\ [(x+2y)\ p+(y+2x)]=0$$

अत :

$$p=0,\ p+1=0,\ (x+2y)\ p+(y+2x)=0$$

अब, $p=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=0$, जिसका हल $y=c$ है। (5)

इसी प्रकार, $p+1=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+1=0$ या, $dy+dx=0$

जिसका हल $y+x=c$ है। (6)

साथ ही, $(x+2y)p+(y+2x)=0$

$$\Rightarrow \quad (x+2y)dy+(y+2x)\,dx=0$$

$$\Rightarrow \quad d(xy+x^2+y^2)=0,$$

जिसका हल $xy+x^2+y^2=c$ है। (7)

अतः समीकरणों (5), (6) और (7) से, दिए गए समीकरण का व्यापक हल निम्न है

$$(y-c)(y+x-c)\,(xy+x^2+y^2-c)=0$$

***

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E1) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $p^2y+p(x-y)-x=0$

ii) $p^2-5p+6=0$

iii) $4y^2p^2+2pxy(3x+1)+3x^3=0$

iv) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=ax^4$

v) $x+yp^2=p(1+xy)$

जैसा कि आप बीजगणित से जानते हैं; यह आवश्यक नहीं कि **R** के प्रत्येक समीकरण के सभी मूल भी **R** में हों। अब हम रूप (1) के उन समीकरणों को लेते हैं जिन्हें वास्तविक गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों में वियोजित नहीं किया जा सकता है।

9.3 समीकरण जिनके गुणनखंड नहीं किए जा सकते

आइए समीकरण (1) के निम्न रूप पर विचार करें :

$$f(x,y,p)=0 \tag{8}$$

क्योंकि समीकरण (8) के गुणनखंड नहीं किए जा सकते, इसलिए अपने सबसे अधिक व्यापक रूप में, इसे हल नहीं किया जा सकता। हम यहाँ (8) के प्रकार के केवल उन्हीं समीकरणों की चर्चा करेंगे जिनमें निम्न में से एक या अधिक गुण विद्यमान हों:

i) इसे y के लिए हल किया जा सकता हो।

ii) इसे x के लिए हल किया जा सकता हो।

iii) इसे p के लिए हल किया जा सकता हो।

iv) इसमें या तो y आविष्ट नहीं करता हो या इसमें x आविष्ट नहीं करता हो। अर्थात्, अवकल समीकरण में या तो x या y अनुपस्थित हो।

v) यह x और y में समघात हो।

vi) यह x और y में प्रथम घात वाला हो।

vii) यह रिकेटी समीकरण हो।

अब हम इन स्थितियों पर एक-एक करके चर्चा करेंगे।

9.3.1 y के लिए हल किए जाने वाले समीकरण

निम्न समीकरण पर विचार कीजिए :

$$xp^2 - yp - y = 0 \tag{9}$$

हम समीकरण (9) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$y(p+1) = xp^2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{xp^2}{p+1}$$

अर्थात्, समीकरण (9) को y के लिए x और p के पदों में हल किया जा सकता है।

इसी प्रकार, जब समीकरण (8), अर्थात् $f(x, y, p) = 0$ को y के लिए हल किया जा सकता हो तब इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y = F(x, p) \tag{10}$$

समीकरण (10) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है :

$$p = \phi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) \tag{11}$$

समीकरण (11) दो चरों x और p में है; जिसे हम संभवतः हल कर सकते हैं और, किसी अचर c के लिए, निम्न प्रकार का संबंध प्राप्त कर सकते हैं :

$$\psi\ (x, p, c) = 0 \tag{12}$$

अब यदि समीकरणों (9) और (12) से, हम p को विलुप्त (Eliminate) करें, तो हमें x, y और c में एक संबंध प्राप्त होगा जिससे अभीष्ट हल प्राप्त होता है। उस स्थिति में, जब समीकरण (9) और (12) से p को विलुप्त करना संभव नहीं हो, तब हम x और y के मान p के पदों में प्राप्त करते है, और तब इन्हें एक साथ लेने पर अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इस विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 3 : समीकरण $p^2 - py + x = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को y के लिए हल करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$y = p + \frac{x}{p}\cdot \tag{13}$$

समीकरण (13) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p=\frac{dp}{dx}+\frac{1}{p}+x\left(-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx},$$

अर्थात्, $\left(p-\frac{1}{p}\right)\frac{dx}{dp}+\frac{1}{p^2}\,x=1$ (14)

यदि हम p को स्वतंत्र चर और x को आश्रित चर मानें, तो समीकरण (14) प्रथम कोटि का एक रैखिक समीकरण है। हम समीकरण (14) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{dx}{dp}+\frac{1}{p(p-1)\,(p+1)}\,x=\frac{p}{p^2-1} \tag{15}$$

समीकरण (15) के लिए, $e^{\int\frac{1}{p(p^2-1)}dp}$ एक समाकलन गुणक है।

अब, $e^{\int\frac{1}{p(p^2-1)}dp}=e^{\int\left[\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{2(p+1)}-\frac{1}{p}\right]dp}$

$$=e^{\ln\frac{(p^2-1)^{1/2}}{p}}=\frac{(p^2-1)^{1/2}}{p}$$

इस प्रकार, समीकरण (15) का हल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$x\,\frac{(p^2-1)^{1/2}}{p}=\int\frac{p}{p^2-1}\,\frac{(p^2-1)^{1/2}}{p}dp=\int\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}dp=\mathrm{c}+\cosh^{-1}p,$$

अर्थात्, $x=p(c+\cosh^{-1}p)(p^2-1)^{-1/2}$ (16)

आप यह **देख सकते** हैं कि समीकरण (13) और (16) से p को विलुप्त करना इतना सरल कार्य नहीं है। परंतु समीकरण (16) से समीकरण (13) में x का मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y=p+(c+\cosh^{-1}p)\,(p^2-1)^{-1/2}. \tag{17}$$

समीकरण (16) और (17), p के पदों में x और y के लिए दो समीकरण हैं। इन दोनों समीकरणों को एक साथ लेने पर दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल प्राप्त होता है।

* * *

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : समीकरण $y=\sin p-p\cos p$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को y के लिए हल करने की आवश्यकता नहीं है। समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\sin p\,dp=dx \tag{18}$$

समीकरण (18), को समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$\cos p=c-x$, c एक अचर है। (19)

अब दिए हुए समीकरण और समीकरण (19) के बीच से हमें p को विलुप्त करना है।

दिए हुए समीकरण से हमें प्राप्त है :

$$p\cos p = \sin p - y$$

या $$p = \frac{\sqrt{1-\cos^2 p} - y}{\cos p}.$$

ऊपर दिए समीकरण में, समीकरण (19) का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$p = \frac{\sqrt{1-(c-x)^2} - y}{c-x}$$

इस प्रकार,, $c - x = \cos\left(\dfrac{\sqrt{1-(c-x)^2} - y}{c-x}\right)$ जो अभीष्ट व्यापक हल है।

***

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेते हैं, जिसमें हम दिए हुए समीकरण का एक विचित्र (singular) हल भी प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 5 : समीकरण $y = 2px + p^4x^2$, $x > 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण

$$y = 2px + p^4x^2 \tag{20}$$

को y के लिए हल करने की आवश्यकता नहीं है।

इसे x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2xp^4 + 4x^2p^3\ \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad p(1+2xp^3) + 2x\frac{dp}{dx}\ (1+2xp^3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1+2xp^3)\left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right) = 0 \tag{21}$$

समीकरण (21) तभी लागू होगा जब गुणनखंडों $(1+2xp^3)$ और $\left(p+2x\dfrac{dp}{dx}\right)$ में से एक शून्य हो।

पहले गुणनखंड $p + 2x\dfrac{dp}{dx} = 0$ पर विचार कीजिए।

$$\Rightarrow \frac{2dp}{pdx} + \frac{1}{x} = 0$$

इस समीकरण को x के सापेक्ष समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2\ln|p| + \ln|x| = \text{अचर}$$

$$\Rightarrow \quad p^2x = c, (c \text{ एक स्वेच्छ अचर है})$$

या $\quad p = \sqrt{\dfrac{c}{x}}$

p के इस मान को समीकरण (20) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$y = 2\sqrt{cx} + c^2$$

जो समीकरण (20) का अभीष्ट व्यापक हल है।

यदि हम समीकरण (21) में, गुणनखंड $1 + 2xp^3 = 0$ पर विचार करें, तो इस गुणनखंड और दिए हुए समीकरण (20) से p को विलुप्त करने पर, हम एक अन्य हल प्राप्त करते हैं। इस हल में कोई स्वेच्छ अचर नहीं होगा तथा यह दिए हुए समीकरण का एक विचित्र हल होगा।

***

अब क्यों न आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास करें?

E2) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y = x + a \tan^{-1} p$

ii) $x = y + a \ln p,\ p > 0$

iii) $p^3 + p = e^y$

iv) $y = p \tan p + \ln \cos p$

v) $y = 2px + \tan^{-1}(xp^2)$

अब हम वह स्थिति लेते हैं, जब समीकरण (8) को x के लिए हल किया जा सकता हो।

9.3.2 x के लिए हल किए जाने वाले समीकरण

निम्न रूप के एक समीकरण पर विचार कीजिए :

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \tag{22}$$

आप देख सकते हैं कि समीकरण (22) को y के लिए हल करना कठिन है, जबकि इसे x के लिए y और p के फलन के रूप में हल करना तथा निम्न रूप में लिखना सरल है :

$$x = \frac{p^3 + 8y^2}{4yp}$$

व्यापक रूप में, x के लिए हल किए जा सकने वाले समीकरण (8) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$x = g(y, p) \tag{23}$$

और तब इसे y के सापेक्ष अवकलित करके निम्न प्रकार का समीकरण प्राप्त किया जा सकता है :

$$\frac{1}{p} = \phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$$

इस समीकरण को हल करके, p और y में एक संबंध निम्न रूप में प्राप्त किया जा सकता है :

$$F(y, p, c) = 0 \tag{24}$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

यदि समीकरण (23) और (24) से p को विलुप्त करना संभव हो तो, विलोपन के बाद, हमें अभीष्ट व्यापक हल प्राप्त हो जाता है। अन्यथा, x और y को p के पदों में व्यक्त किया जा सकता है जिससे व्यापक हल प्राप्त हो जाता है।

आप **देख सकते** हैं कि जब समीकरण (8) को y के लिए हल किया जा सकता है, तब हम इसे x के सापेक्ष अवकलित करते हैं और जब इसे x के लिए हल किया जा सकता है, तब हम इसे y के सापेक्ष अवकलित करते हैं।

ऊपर की गयी चर्चा की बेहतर समझ के लिए, आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 6: समीकरण $p = \tan\left(x - \dfrac{p}{1+p^2}\right)$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x = \tan^{-1} p + \frac{p}{1+p^2}. \tag{25}$$

समीकरण (25) को y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1+p^2}\frac{dp}{dy} + \frac{(1+p^2) - p(2p)}{(1+p^2)^2}\frac{dp}{dy}$$

$$= \frac{1+p^2+1+p^2-2p^2}{(1+p^2)^2}\frac{dp}{dy}$$

$$= \frac{2}{(1+p^2)^2}\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{2p}{(1+p^2)^2}\,dp \tag{26}$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण (26) चर पृथक्करणीय रूप में है। इसे समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = c - \frac{1}{1+p^2}, \ c \text{ एक अचर है।} \tag{27}$$

समीकरण (25) और (27) के बीच से p को विलुप्त करना संभव नहीं है। अतः समीकरण (25) और (27) से दिए हुए समीकरण का p के पदों में व्यापक हल प्राप्त हो जाता है।

***

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 7: समीकरण $p^2 y + 2px = y$ को $\forall\, x, y,\ p > 0$ के लिए हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x = \frac{y}{2p} - \frac{py}{2} \tag{28}$$

समीकरण (28) को y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{y}{2}\left(-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}-\frac{p}{2}-\frac{y}{2}\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2p}+\frac{p}{2}+\frac{y}{2}\frac{dp}{dy}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1+p^2}{2p}+\frac{y}{2}\left(\frac{1+p^2}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1+p^2}{2p}\left(1+\frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right)=0 \qquad (29)$$

समीकरण (29) में, या तो $\frac{1+p^2}{2p}=0$ या, $1+\frac{y}{p}\frac{dp}{dy}=0$ होगा।

यदि पहला गुणनखंड शून्य के बराबर है, तो $p^2=-1$ है, जिससे समस्या का कोई वास्तविक हल प्राप्त नहीं होता।

दी हुई समस्या का वास्तविक हल प्राप्त होता है, जब

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{p}\frac{dp}{dy}=0.$$

यहाँ चर पृथक्करणीय हैं। समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln y+\ln p=\ln c$$

$$\Rightarrow py=c$$

अर्थात्, $p=\frac{c}{y}$ (30)

समीकरण (28) और (30) से p को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$x=\frac{y^2}{2c}-\frac{c}{y}\frac{y}{2}$$

या $x=\frac{y^2}{2c}-\frac{c}{2}$, जो अभीष्ट व्यापक हल है।

***

ध्यान दीजिए कि आप उदाहरण 7 को $y=\frac{2px}{1-p^2}$ लेकर तथा फिर भाग 9.3.1 की तरह ही प्रक्रिया करते हुए भी हल कर सकते हैं।

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E3) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $p^2-py+x=0$

ii) $x=y+a\ln p,\ p>0$

iii) $x = y + p^2$

iv) $y^2 \ln y = xyp + p^2,\ x > 0, y > 0$

v) $y = 2px + y^{n-1}p^n$

जैसे-जैसे हम आगे बढ़ते हैं, आप **ध्यान** दे सकते हैं कि हमें **p के लिए हल किए जा सकने वाले समीकरण** की स्थिति पर अलग से चर्चा करने की आवश्यकता नहीं है। इस स्थिति में समीकरण (1) और अंतः समीकरण (8) जो p में nवीं घात के हैं, व्यापक रूप में, p में प्रथम घात के n समीकरणों के रूप में बदले जा सकते हैं, जैसा कि समीकरण (3) में दिया गया है। p में इन प्रथम घात के समीकरणों को हल करने की विधि पर चर्चा पहले ही भाग 9.2 में की जा चुकी है। इस प्रकार, हम अगली स्थिति लेते हैं, जब समीकरण (8) में या तो स्वतंत्र चर x या आश्रित चर y स्पष्ट रूप से आविष्ट नहीं है।

9.3.3 समीकरण जिनमें स्वतंत्र चर या आश्रित चर नहीं है

हम दोनों स्थितियों पर अलग-अलग से विचार करेंगे।

स्थिति I: समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर नहीं है :

जब समीकरण (8) में स्वतंत्र चर स्पष्ट रूप से नहीं हो, तो इस समीकरण का रूप निम्न होता है :

$$f(y, p) = 0 \tag{31}$$

उदाहरण के लिए, समीकरण $y - \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} = 0$ पर विचार कीजिए।

इस समीकरण में, x स्पष्ट रूप से आविष्ट नहीं है। साथ ही, इसे y के लिए, तुरंत हल किया जा सकता है, क्योंकि इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \tag{32}$$

समीकरण (32) को अब भाग 9.3.1 में चर्चा की गई विधि द्वारा हल किया जा सकता है। और यदि समीकरण (31) को p के लिए हल किया जा सकता है, तो हम इसे निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$p = \frac{dy}{dx} = \phi(y) \tag{33}$$

तब, समीकरण (33) का समाकल समीकरण (31) का अभीष्ट हल होगा। अधिक स्पष्टता के लिए आइए निम्न उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 8: समीकरण $y = 2p + 3p^2$ को हल कीजिए।

हल : हमें प्राप्त है :

$$y = 2p + 3p^2 \tag{34}$$

जो पहले ही $y = F(p)$ के रूप में है। भाग 9.3.1 में चर्चा की गई विधि को अपनाते हुए, हम समीकरण (34) को x के सापेक्ष अवकलित करते हैं, जिससे हमें प्राप्त होता है :

$$p = 2\frac{dp}{dx} + 6p\frac{dp}{dx}$$

या $$\frac{p}{2+6p} = \frac{dp}{dx}$$

यहाँ चर पृथक्करणीय है तथा हमें प्राप्त होता है :

$$dx = \left(\frac{2}{p} + 6\right) dp$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = 6p + 2\ln|p| + c \qquad (35)$$

c एक स्वेच्छ अचर है। क्योंकि समीकरण (34) और (35) में से p को विलुप्त करना संभव नहीं है, इसलिए इन दोनों समीकरणों से p के पदों में समीकरण (34) का व्यापक अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

***

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 9: समीकरण $y^2 = a^2(1+p^2)$ को हल कीजिए। (36)

हल : दिया हुआ समीकरण केवल y और p में ही एक समीकरण है।

इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$p^2 = \frac{y^2}{a^2} - 1$$

p के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$$

$\therefore$ या तो $p = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$ या, $y = -\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$.

अब $p = \sqrt{-1 + \frac{y^2}{a^2}}$ से प्राप्त होता है :

$$\frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}}\, dy = dx$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$a \ln\left|\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}\right| = x + c$$, c एक स्वेच्छ अचर है।

इसी प्रकार, $p = -\sqrt{-1 + \frac{y^2}{a^2}}$ के समाकलन से प्राप्त होता है :

$$a \ln \left| \frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a} \right| = -x + c$$

अतः, समीकरण (36) का व्यापक हल है :

$$\left[a \ln \left| \frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a} \right| - x - c \right] \left[a \ln \left| \frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a} \right| + x - c \right] = 0$$

***

ध्यान दीजिए कि हमनें समीकरण (36) को p के लिए हल किया और फिर समाकलित किया। आप इसे y के लिए हल करके भी समाकलित कर सकते हैं।

आगे हम वे समीकरण ले रहे हैं जिनमें आश्रित चर नहीं है।

स्थिति II : समीकरण जिनमें आश्रित चर नहीं है

इस स्थिति में, समीकरण (8) का रूप निम्न होता है :

$$g(x, p) = 0 \tag{37}$$

स्थिति I की ही तरह, समीकरण (37) को भी या तो p के लिए हल किया जा सकता है या x के लिए। यदि यह p के लिए हल हो जाता है, तो इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$p = \psi(x)$$

जिसे समाकलन करने पर, समीकरण (37) का हल प्राप्त हो जाता है।

यदि समीकरण (37) चर x के लिए हल हो सकता है, तो यह भाग 9.3.2 में चर्चा की गई स्थिति के संगत है तथा इसे पहले y के सापेक्ष अवकलित करके तथा फिर परिणामी समीकरण को समाकलित करके हल किया जा सकता है।

इस विधि को स्पष्ट करने के लिए, हम नीचे कुछ उदाहरण लेते हैं :

उदाहरण 10: समीकरण $x(1+p^2)=1$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x = \frac{1}{1+p^2} \tag{38}$$

समीकरण (38) को y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{p} = \frac{-2p}{(1+p^2)^2} \frac{dp}{dy}$$

अर्थात्, $$dy = \frac{-2p^2}{(1+p^2)^2}\, dp$$

अर्थात्, $$dy = 2\left[\frac{-1}{1+p^2} + \frac{1}{(1+p^2)^2} \right] dp$$

यहाँ, चर पृथक्करणीय है। समाकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = -2\tan^{-1} p + 2\int \frac{dp}{(1+p^2)^2} + c, \text{ (} c \text{ एक अचर है)}$$

अब, $2\int \frac{dp}{(1+p^2)^2} = 2\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\, d\theta$ ($p = \tan\theta$ रखने पर)

$$= \int (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= (\theta + \sin\theta\cos\theta)$$

$$= \tan^{-1} p + \frac{p}{p^2+1}$$

$$\therefore\ y = -\tan^{-1} p + \frac{p}{p^2+1} + c \qquad (39)$$

समीकरण (38) और (39) से p के पदों में अभीष्ट व्यापक हल प्राप्त हो जाता है।

***

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 10 की समस्या को पहले p के लिए हल करके तथा फिर उसे समाकलित करके भी हल किया जा सकता था।

उदाहरण 11: समीकरण $p^2 - 2xp + 1 = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को p के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

$\therefore$ या तो $p = x + \sqrt{x^2-1}$ या, $p = x - \sqrt{x^2-1}$

अब $p = x + \sqrt{x^2-1}$ को समाकलित करने पर, प्राप्त होता है :

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + c, \ c \text{ एक स्वेच्छ अचर है।}$$

इसी प्रकार, $p = x - \sqrt{x^2-1}$ से प्राप्त होता है :

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + c$$

अतः दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$[x^2 + x\sqrt{x^2-1} - \ln|x+\sqrt{x^2-1}| - 2y + c_1]$$

$$[x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln|x+\sqrt{x^2-1}| - 2y + c_1] = 0$$

जहाँ $c_1 = 2c$ एक स्वेच्छ अचर है।

***

अब आपके लिए कुछ प्रश्न हैं।

E4) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $p^2 - 4 = 0$

ii) $\sin\ (p) = 0$

iii) $p^2 + 4p - x^2 = 0,\ x > 0$

E5) निम्न अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कीजिए:

i) $\exp[p + (1 + x^2)] = 1$

ii) $p^2 - (3x + 2y)p + 6xy = 0$

iii) $xy^2(p + 2) = 2py^3 + x^3$

अब हम उस स्थिति की चर्चा करते हैं जब समीकरण (8) चरों x और y में समघात हो सकता है।

9.3.4 x और y में समघात समीकरण

जब समीकरण (8) चरों x और y में समघात होता है, तो इसे निम्न रूप में, व्यक्त किया जा सकता है :

$$\phi\left(p, \frac{y}{x}\right) = 0,\ x > 0 \tag{40}$$

समीकरण (40) को दो विधियों से हल कर सकते हैं। यदि समीकरण (40), p के लिए हल किया जा सकता है, तो इसे निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$p = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{41}$$

इकाई 7 के अपने ज्ञान से हम पहले ही जानते हैं कि समीकरण (41) के प्रकार के समीकरणों को प्रतिस्थापन $y = vx$ का प्रयोग करके हल किया जा सकता है।

दूसरी संभावना है कि जब समीकरण (40) को y/x के लिए हल किया जा सकता है, तब इसे निम्न रूप में रखा जा सकता है:

$$\frac{y}{x} = \psi(p) \text{ या, } y = x\psi(p)$$

इस स्थिति में, हम भाग 9.3.1 में दी गयी विधि का प्रयोग कर सकते हैं। समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \psi(p) + x\psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{\psi'(p)\ dp}{p - \psi(p)} \tag{42}$$

समीकरण (42) चर पृथक्करणीय रूप में है। समाकलित करने पर, इससे प्राप्त होता है :

$$\ln|x| = c + \int \frac{\psi'(p)}{p-\psi(p)}\,dp$$

$$= c + \phi(p), \text{ मान लीजिए}$$

इस समीकरण तथा समीकरण $y = x\psi(p)$ के बीच से p को विलुप्त करने पर, हम अभीष्ट हल प्राप्त करते हैं। यदि p को विलुप्त करना संभव नहीं हो, तो हल को p के पदों में लिखा जा सकता है।

इस विधि को समझने के लिए, हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 12: समीकरण $y^2 + xyp - x^2p^2 = 0 \; \forall \; x, y, p > 0$ को हल कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण x और y में समघात है तथा इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$p^2 - \left(\frac{y}{x}\right)p - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \tag{43}$$

समीकरण (43) को p के लिए, हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \frac{(y/x) \pm \sqrt{(y/x)^2 + 4(y/x)^2}}{2} = (y/x)\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$$

अर्थात्, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ और $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

ऊपर प्राप्त समीकरणों को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$y = cx^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ और $y = cx^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

अतः, समीकरण (43) के व्यापक हल को निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$[y - cx^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}]\,[y - cx^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}] = 0$$

***

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E6) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y = yp^2 + 2px.\; x > 0$

ii) $x^2p^2 + 4xyp - 8y^2 = 0,\; x > 0, y > 0$

आगे हम उस स्थिति पर चर्चा करेंगे जब समीकरण (8), x और y में प्रथम घात वाला हो।

9.3.5 x और y में प्रथम घात वाले समीकरण – क्लेरों समीकरण

जब समीकरण (8) चरों x और y में प्रथम घात का हो, तब इसे x और y दोनों के लिए हल किया जा सकता है तथा निम्न में से किसी भी रूप में रखा जा सकता है :

$$y = xf_1(p) + f_2(p) \tag{44}$$

या, $x = yg_1(p) + g_2(p)$ (45)

समीकरण (44) और (45) के प्रकार के समीकरणों को हल करने के लिए, हम क्रमशः भाग 9.3.1 और 9.3.2 में चर्चा की गई विधियों का प्रयोग कर सकते हैं।

परंतु, यदि समीकरण (44) में, $f_1(p) = p$ हो, तो हमें एक विशेष समीकरण प्राप्त होता है, जिसे **क्लेरों समीकरण (Clairaut's Equation)** कहा जाता है, जिसका जिकर हम भाग 9.1 में कर चुके हैं।

क्लेरों समीकरण निम्न रूप का होता है :

$$y = px + f(p) \tag{46}$$

समीकरण (46) में, $f(p)$ चर p का एक ज्ञात फलन है जिसमें स्पष्ट रूप से न तो x आविष्ट है और न ही y तथा $f(p)$ के रूप पर निर्भर करते हुए, समीकरण (46) रैखिक अथवा अरैखिक हो सकता है। उदाहरण के लिए, $y = px + p^2$ तथा $y = xp + e^p$ अरैखिक क्लेरों समीकरणों के उदाहरण हैं, जबकि $y = xp + p$ एक रैखिक क्लेरों समीकरण है। आप ध्यान दे सकते हैं कि समीकरण $y = xy + p^2$ और $y = xp + yp^2$ क्लेरों रूप के नहीं हैं।

समीकरण (46) को हल करने के लिए, हम भाग 9.3.1 में चर्चा की गई विधि का प्रयोग करते हैं तथा x के सापेक्ष अवकलित करके निम्न प्राप्त करते हैं:

$$p = p + \frac{dp}{dx}x + f'(p)\frac{dp}{dx} \tag{47}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0.$$

अब, या तो $\frac{dp}{dx} = 0$ (48)

या $x + f'(p) = 0$ (49)

समीकरण (48) का हल $p = c$ है, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है। इससे समीकरण (46) का व्यापक हल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$y = cx + f(c) \tag{50}$$

आप **ध्यान दे सकते** हैं कि समीकरण (50) सरल रेखाओं के एक कुल का समीकरण है।

अब, समीकरण (49) पर विचार कीजिए। क्योंकि $f(p)$ और $f'(p)$ चर p के ज्ञात फलन हैं, इसलिए समीकरण (49) और (46) से प्राचल समीकरणों का एक समुच्चय प्राप्त होता हैं, जिनमें x और y प्राचल p के पदों में प्राप्त हैं।

यदि समीकरणों (46) और (49) में से p को विलुप्त करना संभव हो तथा परिणामी समीकरण, समीकरण (46) को संतुष्ट करता हो, तो हमें समीकरण (46) का एक अन्य हल प्राप्त होता है, जिसमें कोई स्वेच्छ अचर नहीं होता, तथा यह समीकरण, (46) का एक विचित्र हल होता है।

ऊपर हमने जो भी चर्चा की है उसको समझने में निम्न उदाहरण आपकी सहायता करेगा।

उदाहरण 13 : समीकरण $p^2+4xp-4y=0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को पुनः निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y = px + \frac{1}{4}p^2 \tag{51}$$

जो क्लेरों रूप में है। समीकरण (51) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$p = p + \frac{dp}{dx}x + \frac{p}{2}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx}\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$$

इस प्रकार, या तो $\frac{dp}{dx}=0$, जिससे $p=c$ (एक अचर) प्राप्त होता है (52)

या $\quad x+\frac{p}{2}=0$ (53)

समीकरण (51) और (52) से, हम प्राप्त करते हैं :

$y = cx + \frac{c^2}{4}$, जो समीकरण (51) का व्यापक हल है।

समीकरण (51) और (53) से p को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = x(-2x) + \frac{1}{4}(-2x)^2$$

अर्थात्, $\mathrm{y(x)} = -\mathrm{x}^2$, जिसमें कोई स्वेच्छ अचर नहीं है। क्योंकि y का यह मान समीकरण (51) को संतुष्ट करता है, इसलिए यह समीकरण (51) का एक विचित्र हल है।

***

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 14: समीकरण $y = xp + \sqrt{a^2p^2+b^2}$ को हल कीजिए, जहाँ a और b धनात्मक अचर हैं।

हल : दिए हुए समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left[x + \frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2+b^2}}\right]\frac{dp}{dx}=0$$

यदि $\frac{dp}{dx}=0$, तो $p=c$ (अचर), निम्न व्यापक हल देता है :

$$y = cx + \sqrt{a^2c^2+b^2}$$

यदि $x + \frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2+b^2}} = 0$ है, तो सरलीकरण के बाद हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

p के प्राप्त मान को दिए हुए समीकरण में प्रयोग करने पर, एक विचित्र हल $y^2a^2(a^2 - x^2) = b^2(x^2 + a^2)^2$ प्राप्त होता है।

***

अब हम एक ऐसी स्थिति को स्पष्ट करेंगे, जहाँ दिया हुआ समीकरण क्लेरों रूप का नहीं है, परंतु इसे चरों के उपयुक्त रूपांतरण द्वारा क्लेरों रूप में बदला जा सकता है।

उदाहरण 15: समीकरण $xyp^2 - (x^2 + y^2 + 1)p + xy = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण क्लेरों रूप का नहीं है।

मान लीजिए कि $x^2 = U$ और $y^2 = V$

$$\therefore \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dV} \cdot \frac{dV}{dU} \cdot \frac{dU}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{V}} \frac{dV}{dU} \cdot 2\sqrt{U} = \sqrt{\frac{U}{V}} \cdot \frac{dV}{dU}$$

$\therefore$ दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है :

$$U\left(\frac{dV}{dU}\right)^2 - (U + V - 1)\frac{dV}{dU} + V = 0$$

या $$V = UP + \frac{P}{P-1} \text{ जहां } P = \frac{dV}{dU} \qquad (54)$$

समीकरण (54) क्लेरों रूप का है। U के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$P = P + U\frac{dP}{dU} - \frac{1}{(P-1)^2}\frac{dP}{dU}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dU}\left[U - \frac{1}{(P-1)^2}\right] = 0$$

यदि $\frac{dP}{dU} = 0$, तो $P = c$ (एक अचर) समीकरण (54) का निम्न हल देता है :

$$V = cU + \frac{c}{c-1}.$$

इस प्रकार, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल निम्न है :

$$y^2 = cx^2 + \frac{c}{c-1}.$$

यदि $U - \frac{1}{(P-1)^2} = 0$, तो $P = 1 + \frac{1}{\sqrt{U}}$. P के इस मान को समीकरण (54) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$V = 1 + U + 2\sqrt{U}$$

$\Rightarrow \quad y^2 = 1 + x^2 + 2x = (1+x)^2$, जो दिए हुए समीकरण का एक विचित्र हल है।

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E7) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y = xp + \dfrac{a}{p}$ ($a \neq 0$, एक अचर है।)

ii) $y = xp + p^2$

iii) $y = xp + p - p^2$

E8) समीकरण $e^{4x}(p-1) + e^{2y}p^2 = 0$ को हल कीजिए।

E9) समीकरण $y = x^4p^2 - px$ को हल कीजिए।

E10) समीकरण $xy(y - px) = x + py$ को हल कीजिए।

अंत में, हम एक अन्य अरैखिक समीकरण पर चर्चा करेंगे जो रिकेटी समीकरण कहलाता है, जिसके बारे में हमने भाग 9.1 में बताया था।

9.3.6 रिकेटी समीकरण

प्रारंभिक रूप में यह नाम प्रथम कोटि के निम्न अवकल समीकरण को दिया गया था :

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m \tag{55}$$

जहाँ b, c और m अचर हैं। इसे **विशेष रिकेटी समीकरण** (Special Riccati Equation) के नाम से जाना जाता है। समीकरण (55) को परिमित पदों में तभी हल किया जा सकता है, यदि $m = -2$ हो या यह किसी पूर्णांक k के लिए यह $\dfrac{-4k}{(2k+1)}$ के रूप का हो। रिकेटी ने इस समीकरण की विशेष स्थितियों में बिना कोई हल दिए केवल चर्चा की है। आजकल रिकेटी समीकरण को निम्न समीकरण के रूप में जाना जाता है :

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 \tag{56}$$

जो प्रथम कोटि के अवकल समीकरण $y' = a(x) + b(x)y$ का एक स्वाभाविक विस्तार है।

यहाँ a, b और c अंतराल I ($\mathbf{R}$ का) पर x के दिए हुए फलन हैं। समीकरण $y' = 1 + xy + e^x y^2$ और $y' = x + x^2 y + \sin(x) y^2$ रिकेटी समीकरणों के उदाहरण है, जबकि $y' = 1 + y + y^3$, और $y' = 1 + y + y^4$ रिकेटी समीकरण नहीं हैं।

सामान्यतः, समीकरण (56) को प्रारंभिक विधियों से हल नहीं किया जा सकता। परंतु, यदि समीकरण (56) के एक विशेष हल का हमें ज्ञान हो तो इसका व्यापक हल प्राप्त

किया जा सकता है। यह निम्न प्रकार से किया जाता है: मान लीजिए कि समीकरण (56) का एक विशेष हल y_1 है। तब, हम एक ऐसा फलन v प्राप्त करते हैं ताकि संबंध

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \tag{57}$$

द्वारा परिभाषित y समीकरण (56) का एक हल हो।

समीकरण (57) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y' = y_1' + v'\left(-\frac{1}{v^2}\right)$$

क्योंकि y और y_1 समीकरण (56) को संतुष्ट करते हैं, इसलिए हमें प्राप्त है :

$$y_1' = a(x) + b(x)y_1 + c(x)y_1^2$$

तथा $\quad y_1' - \frac{v'}{v^2} = a(x) + b(x)y + c(x)\ y^2$

दूसरे समीकरण को पहले समीकरण में से घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v'\left(\frac{1}{v^2}\right) = b(x)\ (y_1 - y) + c(x)\ (y_1^2 - y^2)$$

या, $$v' = b(x)v^2(y_1 - y) + c(x)\ v^2(y_1 - y)\ (y_1 + y) \tag{58}$$

समीकरण (57) से, हमें प्राप्त है :

$$(y - y_1)v = 1 \text{ या } (y_1 - y)v = -1. \tag{59}$$

इस प्रकार, हम लिख सकते हैं :

$(y_1 + y)\ v = (2y_1 + y - y_1)\ v = 2y_1v + (y - y_1)v = 2y_1v + 1$ (समीकरण (59) के प्रयोग से)

साथ ही, $(y_1^2 - y^2)\ v^2 = (y_1 - y)\ v(y_1 + y)\ v$

$$= (-1)(2y_1v + 1) = -1 - 2y_1v \tag{60}$$

समीकरण (60) और (59) से प्राप्त मानों का समीकरण (58) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$v' = -[b(x) + 2c(x)y_1]v - c(x) \tag{61}$$

जो फलन v प्राप्त करने के लिए, एक रैखिक (असमघात) समीकरण है। समीकरण (61) का व्यापक हल प्राप्त किया जा सकता है तथा इस व्यापक हल को समीकरण (57) में प्रतिस्थापित करने पर अभीष्ट हल प्राप्त हो जाता है।

आइए ऊपर दिए सिद्धांत को समझने के लिए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 16: समीकरण $y' = -y + x^2y^2$ को हल कीजिए।

हल : इस समीकरण की समीकरण (56) से तुलना करने पर, पाते हैं कि इस स्थिति में $a = 0, b = -1$ और $c = x^2$ दिया हुआ समीकरण एक रिकेटी समीकरण है,

जिसका एक विशेष हल $y_1 = 0$ है। व्यापक हल y प्राप्त करने के लिए, हम

$$y = y_1 + \frac{1}{v} = 0 + \frac{1}{v} = \frac{1}{v}$$

लेते हैं तथा फलन v ज्ञात करते हैं।

समीकरण (61) में, b और c के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dv}{dx} = v - x^2 \qquad (62)$$

समीकरण (62) एक रैखिक प्रथम कोटि समीकरण है, जिसका समाकलन गुणक $= e^{\int -1 dx} = e^{-x}$. तब, समीकरण (62) का व्यापक हल निम्न से प्राप्त हो जाता है।

$$v = -e^x \int e^{-x} x^2 \, dx + Ae^x$$

$$= (x^2 + 2x + 2) + Ae^x$$

तथा दिए हुए समीकरण का व्यापक हल y निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$y = \frac{1}{Ae^x + x^2 + 2x + 2}$$

जहाँ A समाकलन अचर है।

***

आइए एक और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 17: समीकरण $y' = -1 - x^2 + y^2$ को हल कीजिए।

हल : देख कर ही हम यह कह सकते हैं कि $y_1(x) = -x$ दिए हुए रिकेटी समीकरण का एक हल है। दिए हुए समीकरण की समीकरण (56) से, तुलना करने पर, हम $a = -1 - x^2$, $b = 0$ और $c = 1$ प्राप्त करते हैं।

अब, हम एक ऐसा फलन v प्राप्त करना चाहते हैं जिससे कि $y = y_1 + \frac{1}{v} = -x + \frac{1}{v}$.

इस स्थिति में, समीकरण (61) निम्न रूप का है :

$$v' = 2xv - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - 2xv = -1$$

इस समीकरण का समाकलन गुणक e^{-x^2} है। अतः

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2} v] = -e^{-x^2}.$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$e^{-x^2} v = -\int e^{-x^2} dx + c$$

या $\quad v = e^{x^2} [-\int e^{-x^2} dx + c]$

जहाँ, c एक स्वेच्छ अचर है। इस प्रकार, अभीष्ट व्यापक हल है :

$$y(x) = -x + \frac{e^{-x^2}}{-\int e^{-x^2} dx + c}.$$

ध्यान दीजिए कि समाकल $\int e^{-x^2}dx$ का मान प्रारंभिक फलनों के पदों में नहीं निकाला जा सकता है। परंतु यदि आदि प्रतिबंध निर्दिष्ट हों, तो $\int_{x_0}^{x} e^{-t^2}dt$ के रूप के समाकल का उपयोग किया जा सकता है।

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E11) बताइए कि निम्न में से कौन से रिकेटी समीकरण हैं, कौन से क्लेरों समीकरण हैं और कौन से इनमें से कोई भी नहीं हैं। अपने उत्तर के कारण दीजिए।

i) $y = 2xp + y^2 p^3$

ii) $y' = e^x + e^y + y^2$

iii) $y' = (1+\sin 2x) + \dfrac{2}{1+x^2}y + e^x y^2$

iv) $y = 3px + 6y^2 p^2$

v) $y' = \sin x + \sin y$.

E12) एक विशेष हल $y_1(x)$ दिए जाने पर, निम्न रिकेटी समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

i) $y' = 1 - xy + y^2 \quad (y_1(x) = x)$

ii) $y' = 2 + 2x + x^2 - y^2 \quad (y_1(x) = 1 + x)$

iii) $y' = 2x - x^2 - x^4 + y + y^2 \quad (y_1(x) = x^2)$

E13) दिए हुए समीकरण $y = \dfrac{cg(x)+G(x)}{cf(x)+F(x)}$ में से स्वेच्छ अचर c विलुप्त करके निम्न रिकेटी समीकरण प्राप्त कीजिए :

$$(gF - Gf)y' = (gG' - g'G) + (Gf' - G'f - gF' + g'F)y + (fF' - f'F)y^2$$

E14) दिखाइए कि जब $m = 0$ है, तब रिकेटी समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m$$

को परिमित पदों में समाकलित किया जा सकता है।

इस इकाई में, हमने जो अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, हम इसे यहीं समाप्त करते हैं।

9.4 सारांश

इस इकाई में, हमनें निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. प्रथम कोटि और nवीं घात का व्यापक अवकल समीकरण नीचे दिए समीकरण (1) के रूप में लिखा जा सकता है :

$$p^n + P_1 p^{n-1} + P_2 p^{n-2} + \cdots + P_{n-1} p + P_n = 0 \tag{1}$$

जहाँ, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ चरों x और y के फलन हैं तथा $p = \frac{dy}{dx}$

2. यदि समीकरण (1) को वास्तविक रैखिक गुणनखंडों में वियोजित किया जा सकता हो तो $R_1, R_2, \ldots, R_n$ के लिए, जो x और y के फलन हैं; यह समीकरण $(p-R_1)(p-R_2)\ldots(p-R_n)=0$ का रूप ले लेता है।

   यदि $f_1(x, y, c)=0, f_2(x, y, c)=0, \ldots, f_n(x, y, c)=0$ क्रमशः $p-R_1=0, p-R_2=0, \ldots, p-R_n=0$ के हल हों तो $f_1(x, y, c)\, f_2(x, y, c) \ldots f_n(x, y, c)=0$ समीकरण (1) का व्यापक हल होता है।

3. यदि समीकरण (1) को वास्तविक रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित नहीं किया जा सकता हो, तो

   i) यह y के लिए हल होने वाला कहा जाता है, यदि हम इसे निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हों:

      $y = F(x, p)$ (समीकरण (10) देखिए).

      इसे हल करने के लिए, इसे x के सापेक्ष अवकलित कीजिए तथा यह संभव हो सकता है कि परिणामी अवकल समीकरण को x और p के लिए हल किया जा सकता हो। परिणामी अवकल समीकरण के हल और ऊपर प्राप्त समीकरण से p को विलुप्त करने पर अभीष्ट व्यापक हल प्राप्त हो जाता है।

   ii) यह x के लिए हल होने वाला कहा जाता है, यदि हम इसे निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हों:

      $x = g(y, p)$ (देखिए समीकरण (23)).

      इसे हल करने के लिए, इसे y के सापेक्ष अवकलित कीजिए तथा यह संभव हो सकता है कि परिणामी अवकल समीकरण को y और p के लिए हल किया जा सकता हो। परिणामी अवकल समीकरण के हल और ऊपर दिए समीकरण से p को विलुप्त करने पर व्यापक अभीष्ट हल प्राप्त हो जाता है।

4. यदि समीकरण (1) में स्वतंत्र चर या आश्रित चर स्पष्ट रूप से न हो तथा इसे निम्न रूप में रखा जा सकता हो :

   $f(y, p) = 0$ (देखिए समीकरण (31))

   या, $g(x, p) = 0$ (देखिए समीकरण (37))

   तब या तो इसे वास्तविक रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित करना संभव होगा या यह y या x के लिए हल किया जा सकता होगा, जैसी भी स्थिति हो।

5. यदि समीकरण (1) चरों x और y में समघात हो तो या तो प्रतिस्थापन $y = vx$ इसे पृथक्करणीय समीकरण में बदल सकता है या इसे $y = x\psi(p)$ के रूप में लिखा जा सकता है, जो y/x के लिए हल किया जा सकता है।

6. क्लेरों समीकरण एक प्रथम कोटि और किसी भी घात का समीकरण होता है, यदि इसे निम्न रूप में रखा जा सकता हो :

$$y = xp + f(p) \quad \text{[देखिए समीकरण (46)]}$$

यह समीकरण y के लिए हल किया जा सकता है तथा इसका हल है :

$$y = cx + f(c).$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

7. रिकेटी समीकरण निम्न रूप का एक समीकरण है :

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 \quad \text{(देखिए समीकरण (56))}$$

जहाँ a, b और c, $\mathbf{R}$ के अंतराल I पर x के दिए गए फलन हैं।

समीकरण (56) का व्यापक हल प्राप्त किया जा सकता है, यदि हमें समीकरण (56) का एक विशेष हल y_1 ज्ञात हो। तब, हम संबंध $y = y_1 + \frac{1}{v}$, (देखिए समीकरण (57)) से परिभाषित फलन v प्राप्त करते हैं, जिससे कि y समीकरण (57) का एक हल हो।

9.5 हल / उत्तर

E1) i) $(y - x - c)\,(x^2 + y^2 - c) = 0$

ii) $(y - 3x - c)\,(y - 2x - c) = 0$

iii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\left(p + \frac{x}{2y}\right)\left(p + \frac{3}{2}\frac{x^2}{y}\right) = 0$$

समाकलित करने पर, हम निम्न रूप में अभीष्ट हल प्राप्त करते हैं :

$$(y^2 + x^3 - c)\left(y^2 + \frac{x^2}{2} - c\right) = 0$$

iv) दिया हुआ समीकरण है :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = ax^4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a^{1/3}x^{4/3}$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$c + y = a^{1/3}\frac{x^{7/3}}{7/3}$$

$$\Rightarrow \quad 7(y+c) = a^{1/3} 3x^{7/3}$$

$$\Rightarrow \quad 7^3(y+c)^3 = a.\, 27a\,x^7 \Rightarrow 343(y+c)^3 = 27ax^7$$

v) $\left(p - \dfrac{1}{y}\right)(p - x) = 0$

$(y^2 - 2x - c)\,(2y - x^2 - c) = 0$.

E2) i) दिया हुआ समीकरण है :

$$y = x + a\tan^{-1} p \tag{63}$$

समीकरण (63) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$p = 1 + \frac{a}{1+p^2} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{a}{(p-1)(1+p^2)}\, dp$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{p^2+1}\right] dp$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = \frac{a}{2}\left[\ln(p-1) - \frac{1}{2}\ln(p^2+1)\right] + c$$

$$= \frac{a}{2}\ln\left(\frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}\right) + c \tag{64}$$

समीकरण (64) से x का मान समीकरण (63) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = \frac{a}{2}\ln\left(\frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}\right) + a\tan^{-1} p + c \tag{65}$$

समीकरण (64) और (65) से हमें p के पदों में अभीष्ट हल प्राप्त हो जाता है।

ii) $x = -a\ln\left(\dfrac{p-1}{p}\right) + c$ और

$y = c - a\ln(p-1)$

मिल कर अभीष्ट हल देते हैं।

iii) दिया हुआ समीकरण है :

$p^3 + p = e^y$

दोनों पक्षों का लघुगणक (logrithm) लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = \ln p + \ln(p^2+1) \tag{66}$$

समीकरण (66) को x के सापेक्ष अवकलित करने तथा सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dx = \left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}\right) dp \tag{67}$$

समीकरण (67) को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = -\frac{1}{p} + 2\tan^{-1} p + c \tag{68}$$

समीकरण (66) और (68) से अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

iv) $y = p\tan p + \ln\cos p$ और

$x = \tan p + c$ से अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

v) दिया हुआ समीकरण है :

$$y = 2px + \tan^{-1}(xp^2) \tag{69}$$

समीकरण (69) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{1+x^2p^4}\left(p^2 + 2xp\frac{dp}{dx}\right)$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$-p(1+x^2p^4+p)dx = 2x(1+x^2p^4+p)\,dp$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{2dp}{p} = 0$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$xp^2 = c \text{ (एक अचर)} \tag{70}$$

समीकरणों (69) और (70) से अभीष्ट हल है :

$$y = 2c\sqrt{x} + \tan^{-1}(c)$$

E3) i) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x = py - p^2 \tag{71}$$

समीकरण (71) को y के सापेक्ष अवकलित करने और सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1-p^2}\; y = -\frac{2p^2}{1-p^2} \tag{72}$$

समीकरण (72) एक रैखिक समीकरण है जिसका y एक आश्रित चर है।

समाकलन गुणक $= e^{-\int\frac{p}{1-p^2}dp} = e^{\frac{1}{2}\ln(1-p^2)} = \sqrt{1-p^2}$

समीकरण (72) को $\sqrt{1-p^2}$ से गुणा करने पर तथा समाकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y\sqrt{1-p^2} = -\int \frac{2p^2}{\sqrt{1-p^2}}\, dp + c \tag{73}$$

अब, $\int \frac{2p^2}{\sqrt{1-p^2}}\, dp = \sin^{-1} p - p\sqrt{1-p^2}$ ($p = \sin\theta$ रखने पर) (74)

समीकरणों (73) और (74) से, हमें प्राप्त होता है :

$$y = -\frac{\sin^{-1} p}{\sqrt{1-p^2}} + p + \frac{c}{\sqrt{1-p^2}} \tag{75}$$

इस प्रकार, समीकरण (71) और (75) से प्राप्त x और y से अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

ii) $x = c - a \ln(1-p) + a \ln p$ और

$y = -a \ln(1-p) + c$

से अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

iii) $y = c - [p^2 + 2p + 2\ln(p-1)]$ और

$x = c - [2p + 2\ln(p-1)]$

से अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

iv) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x = \frac{y \ln y}{p} - \frac{p}{y}$$

ऊपर दिए समीकरण को y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\ln y}{p} + \frac{p}{y^2} - \left(\frac{y\ln y}{p^2} + \frac{1}{y}\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p}{y} - \frac{dp}{dy}\right)\left(\frac{y\ln y}{p^2} + \frac{1}{y}\right) = 0$$

$\therefore$ या तो $\frac{y\ln y}{p^2} + \frac{1}{y} = 0$ या $\frac{p}{y} - \frac{dp}{dy} = 0$

यदि $\frac{y\ln y}{p^2} + \frac{1}{y} = 0$ है, तब इसमें तथा दिए हुए समीकरण के बीच से p को विलुप्त करने पर, हमें एक विचित्र हल प्राप्त होता है।

और यदि, $\frac{p}{y}-\frac{dp}{dy}=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dy}{y} \Rightarrow p=cy$, जहाँ c एक अचर है

तब दिए हुए समीकरण में $p=c\,y$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$\ln y = cx + c^2$, जो अभीष्ट हल है।

v) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x=\frac{y}{2p}-\frac{y^{n-1}}{2}p^{n-1}$$

ऊपर दिए समीकरण को y के सापेक्ष अवकलित करने तथा सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dp}{p}+\frac{dy}{y}=0$$

$$\Rightarrow \quad py=c$$

अभीष्ट हल $y^2=2cx+c^n$ है।

E4) i) दिया हुआ समीकरण निम्न है :

$$p^2-4=0 \tag{76}$$

$$\Rightarrow \quad p=\pm 2$$

अब $p=2$ समाकलन करने पर $y=2x+c$ देता है

तथा $p=-2$ समाकलन करने पर $y=-2x+c$ देता है।

इस प्रकार, अभीष्ट हल $(y-2x-c)(y+2x-c)=0$ है।

ii) दिया हुआ समीकरण निम्न है :

$\sin p = 0$

हम जानते हैं कि $\sin x = 0$ यदि और केवल यदि

$x=\pm n\pi,\ n=0,1,2,3,\ldots.$

इस प्रकार, दिए हुए समीकरण का हल p निम्न है :

$p=\pm n\pi,\ n=0,1,2,3,\ldots.$

$\Rightarrow \quad y(x)=n\pi x+c_n$ या, $y(x)=-n\pi x+c_n$ दिए हुए समीकरण के हल हैं, जहाँ $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ के लिए, c_n अचर हैं।

iii) $$y(x)=-2x+\frac{1}{2}\left[x\sqrt{4+x^2}+4\ln\left|\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right|\right]+c$$

और $$y(x)=-2x-\frac{1}{2}\left[x\sqrt{4+x^2}+4\ln\left|\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right|\right]+c$$

दिए हुए समीकरण के हल हैं, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

E5) i) हम जानते हैं कि चरघातांकीय फलन e^x का मान एक के बराबर केवल $x=0$ पर ही होता है। अतः, दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$e^{[p+(1+x^2)]} = 1 = e^o$$

$$\Rightarrow \quad p = -1 - x^2.$$

समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$y = -x - \dfrac{x^3}{3} + c$, जो अभीष्ट हल है, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

ii) $p^2 - (3x+2y)\,p + 6xy = 0$

$\Rightarrow \quad p = 3x$ या, $p = 2y$

इस प्रकार हल है :

$$(2y - 3x^2 - 2c)\,(y - e^{2x}c) = 0.$$

iii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(yp - x)\,[xyp + (x^2 - 2y^2)] = 0$$

यदि $yp - x = 0$, तो समाकलन से प्राप्त होता है :

$$y^2 - x^2 = c$$

यदि $xyp + x^2 - 2y^2 = 0$ है, तो

$p = \dfrac{-x^2 + 2y^2}{xy}$, जो एक समघात समीकरण है।

ऊपर प्राप्त समीकरण को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^2 = cx^4 + x^2$$

इस प्रकार, अभीष्ट हल है :

$$(y^2 - x^2 - c)\,(y^2 - cx^4 - x^2) = 0.$$

E6) i) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y = \frac{2px}{1-p^2} \qquad (77)$$

समीकरण (77) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{2dp}{p(1-p^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2}{p} + \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1+p}\right) dp + \frac{dx}{x} = 0$$ (आंशिक भिन्नों द्वारा)

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = c\frac{(1-p^2)}{p^2}. \tag{78}$$

समीकरणों (77) और (78) से p को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$y^2 = 4x\,c + 4c^2$ जो अभीष्ट हल है।

ii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$8(y/x)^2 - 4(y/x)p - p^2 = 0$$

(y/x) के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{y}{x} = \frac{4p \pm \sqrt{16p^2 + 32p^2}}{2} = (2 \pm 2\sqrt{3})\,p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{1}{(2 \pm 2\sqrt{3})} \cdot \frac{dx}{x}$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$\ln y = \dfrac{1}{2(1+\sqrt{3})}\ln x + \ln c$ और $\ln y = \dfrac{1}{2(1-\sqrt{3})}\ln x + \ln c$

या, $y = cx^{\frac{1}{2(1+\sqrt{3})}}$ और $y = cx^{\frac{1}{2(1-\sqrt{3})}}$

अतः व्यापक हल है।

$$\left[y - c\,x^{\frac{1}{2(1+\sqrt{3})}}\right]\left[y - cx^{\frac{1}{2(1-\sqrt{3})}}\right] = 0\cdot$$

E7) i) दिया हुआ समीकरण निम्न है :

$$y = xp + \frac{a}{p}, \quad a \neq 0 \tag{79}$$

यह क्लेरों रूप में है।

समीकरण (79) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = x\frac{dp}{dx} + p - \frac{a}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{a}{p^2} = 0 \tag{80}$$

$$\text{या} \quad \frac{dp}{dx} = 0 \tag{81}$$

समीकरण (81) से, $p = c$ प्राप्त होता है, जिससे दिए हुए समीकरण का

एक हल $y = cx + \frac{a}{c}$ है, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

समीकरण (80) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = a / p^2 \tag{82}$$

समीकरणों (79) और (82) से p को विलुप्त करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$y^2 = 4ax,$$

जो दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है तथा उसका विचित्र हल है।

ii) $y = cx + c^2$ व्यापक हल है, तथा

$y = -x^2 / 4$ एक विचित्र हल है।

iii) $y = cx + c - c^2$ व्यापक हल है तथा

$y = \left[\frac{x}{2}(x+1) + \left(\frac{x+1}{2}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]$ एक विचित्र हल है।

E8) $e^{2x} = U$ और $e^{2y} = V$ रखिए।

$$\therefore\ p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dV} \cdot \frac{dV}{dU} \cdot \frac{dU}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2y} \frac{dV}{dU} .\ 2e^{2x}$$

$$= \frac{U}{V} \frac{dV}{dU}$$

दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है :

$$U^2\left(\frac{U}{V}\frac{dV}{dU} - 1\right) + V\ \frac{U^2}{V^2}\left(\frac{dV}{dU}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow\ V = UP + P^2\ \left(\frac{dV}{dU} = P \text{ रखने पर}\right) \tag{83}$$

जो क्लेरों रूप का है।

समीकरण (83) को U के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$P = P + U\frac{dP}{dU} + 2p\frac{dP}{dU}$$

$$\Rightarrow\ (U + 2P)\frac{dP}{dU} = 0$$

$\Rightarrow$ या तो $U + 2P = 0$ या, $\frac{dP}{dU} = 0$.

$\frac{dP}{dU}=0$ से $P=c$ प्राप्त होता है तथा समीकरण (83) का हल $V=Uc+c^2$ है।

अर्थात्, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल $e^{2y}=c\,e^{2x}+c^2$ है।

यहाँ $U+2P=0$ से कोई अन्य हल प्राप्त नहीं होता।

E9) दिया हुआ समीकरण है :

$$y=x^4p^2-px \tag{84}$$

$x=\frac{1}{t}$ रखिए।

$$\therefore\ p=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=-t^2\frac{dy}{dt}$$

मान लीजिए कि $\frac{dy}{dt}=P$. तब $p=-t^2P$.

p के इस मान का उपयोग समीकरण (84) में करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y=\frac{1}{t^4}t^4P^2+t^2P\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow\ y=Pt+P^2$$

यह क्लेरों रूप में है, जिसका हल निम्न है :

$$y=ct+c^2$$

$\therefore$ समीकरण (84) का व्यापक हल है :

$$y=c/x+c^2.$$

E10) दिया हुआ समीकरण है :

$$xy(y-px)=x+py \tag{85}$$

$x^2=U$ और $y^2=V$ लीजिए।

$$\therefore\ p=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dV}\ \frac{dV}{dU}\ \frac{dU}{dx}=\sqrt{\frac{U}{V}}\ P\text{, जहाँ } P=\frac{dV}{dU}\text{ है।}$$

$\therefore$ समीकरण (85) निम्न रूप का हो जाता है।

$$\sqrt{UV}\left(\sqrt{V}-\sqrt{\frac{U}{V}}\ P\ \sqrt{U}\right)=\sqrt{U}+\sqrt{\frac{U}{V}}\ P\sqrt{V}$$

$$\Rightarrow\ V=UP+(1+P)$$

जो क्लेरों रूप का है और इसका हल है :

$$V=cU+(1+c).$$

$\therefore$ समीकरण (85) का हल

$y^2 = cx^2 + (1+c)$ है।

E11) i) क्लेरों (संकेत : $y^2 = v$ प्रतिस्थापित कीजिए।)

ii) दोनों में से कोई भी नहीं

iii) रिकेटी

iv) क्लेरों (संकेतः $y^3 = v$ प्रतिस्थापित कीजिए)

v) दोनों में से कोई भी नहीं

E12) i) दिया हुआ समीकरण है :

$$y' = 1 - xy + y^2 \quad (86)$$

मान लीजिए कि $y = x + \frac{1}{v}$ है ($y_1 = x$ दिया गया है)

$$\therefore \quad y' = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

तब, समीकरण (86) निम्न में बदल जाता है :

$$1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 1 - \left(x^2 + \frac{x}{v}\right) + x^2 + \frac{1}{v^2} + \frac{2x}{v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} + xv = -1 \quad (87)$$

समीकरण (87) एक रैखिक समीकरण है, जिसका समाकलन गुणक $= e^{\int x\,dx} = e^{x^2/2}$

तथा $v = c\,e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2}\int e^{x^2/2}\,dx$.

$\therefore$ अभीष्ट हल है :

$$y = x + 1/\left[c\,e^{x^2/2} - e^{x^2/2}\int e^{x^2/2}\,dx\right]$$

ii) $$y = 1 + x + \frac{1}{c\,e^{(2x+x^2)} + e^{(2x+x^2)}\int e^{-(2x+x^2)}\,dx}$$

iii) $$y = x^2 + \frac{e^{(x+\frac{2}{3}x^3)}}{c - \int e^{(x+\frac{2}{3}x^3)}\,dx}$$

E13) यहाँ, $y = \dfrac{cg(x) + G(x)}{cf(x) + F(x)}$

$$\Rightarrow \quad [cf(x) + F(x)]\,y = cg(x) + G(x) \quad (88)$$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$[cf(x)+F(x)]\,y'+(cf'+F')\,y=cg'+G' \tag{89}$$

समीकरण (88) से हम प्राप्त करते हैं:

$$c=[G(x)-yF(x)]/[f(x)y-g(x)] \tag{90}$$

$\therefore$ समीकरण (90) से समीकरण (89) में c का मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left[f(x)\frac{(G-Fy)}{(yf-g)}+F\right]y'+\left(f'\frac{(G-yF)}{yf-g}+F'\right)y=G'+g'\left(\frac{G-yF}{yf-g}\right)$$

$$\Rightarrow (fG-yfF+yfF-gF)\,y'$$

$$+(f'G-yf'F+F'yf-gF')\,y$$

$$=G'yf-G'g+g'G-yg'F$$

$$\Rightarrow (gF-fG)y'=(gG'-g'G)+(f'G-gF'-fG'+g'F)y+(fF'-f'F)y^2$$

जो अभीष्ट रिकेटी समीकरण है।

E14) जब $m=0$ तब दिया हुआ समीकरण निम्न हो जाता है :

$$\frac{dy}{dx}+b\,y^2=c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=c-by^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{c-by^2}\right)\frac{dy}{dx}=1 \tag{91}$$

यदि bc घनात्मक है, तो इसका हल है :

$yk=c(Ae^{2xk}-1)/(Ae^{2xk}+1)$, जहाँ $k=\sqrt{bc}$

यदि bc ऋणात्मक है, तो समीकरण (91) का हल है :

$yk=c\tan\,(A+kx)$, जहाँ $k=\sqrt{-bc}$.

यदि $b=0$, तो समीकरण (91) का हल $y=cx+A$.

यदि $c=0$, तो समीकरण (91) का हल $y(bx+A)=1$.

—×—

विविध प्रश्न

1. बताइए कि निम्न कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि संक्षिप्त उपपत्ति अथवा एक प्रतिउदाहरण देकर कीजिए।

   i) $x^2(dx)^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2(dy)^2 - z^2(dz)^2 = 0$ प्रथम कोटि द्वितीय घात का अवकल समीकरण है

   ii) समीकरण $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$ का समाकलन गुणक $(x+y)^{-2}$ है।

   iii) यदि $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ के रूप का अवकल समीकरण पृथक्करणीय हो, तो वह यथातथ भी होता है।

   iv) अवकल समीकरण $xy(y')^2 - (x^2 + y^2 + 1)y' + xy = 0$ क्लेरों रूप का है।

   v) यदि एक आदि मान समस्या $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ किसी प्राँत D पर हल के अस्तित्व तथा अद्वितीयता के प्रतिबंधों को संतुष्ट नहीं करती तो इसका D में कोई हल नहीं होता।

2. निम्न फलनों के लिए दिए हुए प्राँत D पर लिपशिट्ज प्रतिबंध के लिए जाँच कीजिए। साथ ही, जहाँ भी संभव हो, लिपशिट्ज अचर L भी ज्ञात कीजिए।

   i) $f(x, y) = |xy|,\ D: |x| \le a,\ |y| < \infty$

   ii) $f(x, y) = x^2|y|,\ D: |x| \le 1,\ |y| \le 1$

   iii) $f(x, y) = x - y,\ D: |x| \le a,\ |y| \le b$

   iv) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y}{x}, & x \ne 0, \quad D: |x| \le 1, |y| < \infty \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

   v) $f(x, y) = xy^2,\ D: a \le x \le b,\ -\infty < y < \infty$

3. निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

   i) $x\dfrac{dy}{dx} = y(\ln y - \ln x + 1),\ x > 0$

   ii) $y - x\dfrac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \dfrac{dy}{dx}\right)$, a एक अचर है तथा $x > 0,\ y > 0$

   iii) $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$

   iv) $(x^2y - 2xy^2)dx = (x^3 - 3x^2y)dy,\ x > 0,\ y > 0$

4. निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

   i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 3}{2x - 2y + 5}$

   ii) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^{-2}$

iii) $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$

iv) $2x(y+1)\,dx - y\,dy = 0$ जहाँ $y(0) = -2$.

v) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = x(1-x^2)^{1/2}$

5. निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(xy^2 - x^2)dx + (3x^2y^2 + x^2y - 2x^3 + y^2)\,dy = 0$

ii) $\frac{dy}{dx} = \cos x - y\sin x + y^2$

iii) $2x\frac{dy}{dx} + y(6y^2 - x - 1) = 0$

6. किसी देश की जनसंख्या उस देश में वर्तमान व्यक्तियों की संख्या की समानुपाती दर से बढ़ती है। यदि 2 वर्ष बाद जनसंख्या दुगुनी हो जाती है तथा 3 वर्षों में जनसंख्या 20, 000 हो जाती है, तो प्रारंभ में उस देश की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

7. मान लीजिए कि एक विद्यार्थी जो फ्लू वायरस से ग्रस्त है, एक कालेज के परिसर, जिसमें 1000 विद्यार्थी हैं, में वापस आता है। यह कल्पना कीजिए कि वायरस फैलने की दर संक्रमित हुए विद्यार्थियों की संख्या x तथा संक्रमित नहीं हुए विद्यार्थियों की संख्या के गुणनफल के समानुपाती है। 6 दिन बाद संक्रमित हुए विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए। यह दिया गया है कि $x(4) = 50$ तथा रोग फैलने के दौरान कोई विद्यार्थी परिसर नहीं छोड़ता है।

8. i) हल कीजिए: $p^2 + 2py\cot x = y^2,\ p = \frac{dy}{dx}$

ii) हल कीजिए : $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0,\ p = \frac{dy}{dx}$

iii) समीकरण $xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$ को क्लेरों रूप में बदलिए तथा फिर उसे हल कीजिए।

9. निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$

i) $y = -px + x^4p^2$

ii) $p^2(x^2 - a^2) - 2pxy + y^2 - b^2 = 0,$ a और b अचर है।

iii) $\sin px\cos y = \cos px\sin y + p$

10. निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)y - \frac{1}{2}y^2,\ y_1(x) = x + \frac{1}{x}$

ii) $x(1-x^3)\frac{dy}{dx} = x^2 + y - 2xy^2,\ y_1(x) = x^2$

iii) $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - ye^{x} + e^{-x}y^{2},\ y_1(x) = e^{x}$

11. i) वक्रों के निकाय $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a/x$ की लांबिक संछेदी ज्ञात कीजिए।

ii) समान अक्षीय (coaxial) वृत्तों $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ की लांबिक संछेदी ज्ञात कीजिए, जहाँ g एक प्राचल है।

iii) दर्शाइए कि संनाभि (confocal) और समान अक्षीय परवलयों $y^2 = 4a(x+a)$ का निकाय स्वयं लांबिक होता है।

12. तापमान 40°C वाले कमरे में, 10°C तापमान वाला पानी 5 मिनट बाद गर्म होकर 20°C के तापमान तक पहुंच जाता है। निम्न समय बाद पानी का तापमान ज्ञात कीजिए।

(i) 20 मिनट और (ii) 30 मिनट।

कितने समय बाद तापमान 25°C हो जाएगा?

13. किसी टंकी में 100 लीटर घोल है, जिसमें 10 kg. नमक घुला हुआ है। इस टंकी में 3 लीटर प्रति मिनट की दर से पानी प्रवेश कर रहा है तथा अच्छी प्रकार से मिलाए गए मिश्रण को 2 लीटर प्रति मिनट की दर से बाहर निकाला जा रहा है। एक घंटे के बाद टंकी में कितना नमक रहेगा? कितने समय बाद टंकी में 625 ग्राम नमक रह जाएगा?

14. मान लीजिए एक कमरा जिसमें 1200cm^3 हवा है, प्रारंभ में कार्बन मोनो आक्साइड से मुक्त है। समय $t = 0$ से प्रारंभ करते हुए, सिगरेट का धुँआ, जिसमें 4% कार्बन मोनो आक्साइड है, उस कमरे में 0.1cm^3/ मिनट की दर से छोड़ा जाता है तथा अच्छी प्रकार से घूमे गए मिश्रण को उसी दर से बाहर जाने दिया जाता है।

i) किसी समय $t > 0$ पर, कमरे में कार्बन मोनो आक्साइड की सांध्रता $x(t)$ के लिए एक व्यंजक ज्ञात कीजिए।

ii) सांध्रता 0.00012 ग्राम /cm^3 वाली कार्बन मोनो आक्साइड का विस्तृत संपर्क मानव शरीर के लिए हानिकारक है। वह समय T ज्ञात कीजिए जब कमरे की सांध्रता इस स्तर तक पहुँच जाएगी।

—×—

विविध प्रश्नों के हल/उत्तर

1. i) **असत्य :** यह प्रथम कोटि द्वतीय घात समीकरण है।

   ii) **सत्य :** $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2+2xy-x^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{-4xy}{(x+y)^3}$.

   iii) **सत्य :** यदि समीकरण $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ पृथक्करणीय है, तो हम इसे $M_1(x)+N_1(y)y'=0$ के रूप में लिख सकते हैं, जो यथातथ है, क्योंकि $\frac{\partial}{\partial y}(M_1(x))=\frac{\partial}{\partial x}(N_1(y))=0$.

   iv) **सत्य :** प्रतिस्थापन $x^2=u$, $y^2=v$ दिए हुए समीकरण को $v=uP+\frac{P}{P-1}$ में बदल देता है, जहाँ $P=\frac{dv}{du}$ तथा यह क्लेरों रूप में है।

   v) **असत्य :** क्योंकि IVP के अस्तित्व और अद्वितीयता के प्रतिबंध केवल पर्याप्त हैं आवश्यक नहीं। एक प्रति उदाहरण दीजिए।

2. i) $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=\left||xy_2|-|xy_1|\right|\le|x||y_2-y_1|\le a|y_2-y_1|, L=a$

   ii) $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|x^2|\left||y_1|-|y_2|\right|\le|x^2||y_1-y_2|\le|y_1-y_2|, L=1$

   iii) $|f(x, y_2)-f(x, y_1)|=|y_2-y_1|,\ L=1$

   iv) $|f(x, y)-f(x, 0)|=|x^{-1}\sin y|\le L|y|$ दिए हुए क्षेत्र में संभव नहीं है। अतः, लिपशिट्ज प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता।

   v) $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|x(y_2-y_1)(y_2+y_1)|\le L|y_2-y_1|$
   $a\le x\le b, -\infty<y<\infty$ के लिए संभव नहीं है। अंतः, लिपशिट्ज प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता।

3. i) $x\frac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x+1)$

   समीकरण समघात है। $y=vx$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

   $$\frac{dv}{v\ln v}=\frac{dx}{x}$$

   समाकलन करने पर, $\ln v=cx$ या, $v=e^{cx}$

   अतः, $y/x=e^{cx}$ अभीष्ट हल है।

ii) $$y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$$

या, $$\frac{dy}{y(1-ay)} = \frac{dx}{x+a}$$

या, $$\left(\frac{a}{1-ay} + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{dx}{x+a}$$

समाकलित करने पर, हमें $\frac{y}{1-ay} = c(x+a)$ प्राप्त होता है।

iii) $$\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$$

$x + y = v$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \sin v + \cos v$$

$$= 2\cos^2 v/2[1 + \tan v/2]$$

या, $$\frac{\frac{1}{2}\sec^2 v/2dv}{1+\tan v/2} = dx$$

समाकलित करने पर, $\ln(1 + \tan v/2) = x + c$

या, $$\ln\left(1 + \tan\frac{x+y}{2}\right) = x + c.$$

iv) $$(x^2 y - 2xy^2)dx = (x^3 - 3x^2 y)dy.$$

$y = vx$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1-3v}{v^2} dv = \frac{dx}{x}.$$

समाकलित और सरल करने पर,

$$x^2 = cy^3 e^{x/y}.$$

4. i) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+3}{2x-2y+5}$$

$x - y + 3 = v$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{2v-1}{v-1} dv = dx,$$

जिसे समाकलित करने पर प्राप्त होता है :

$$(x-2y) + \ln(x-y+2) = c.$$

ii) $\frac{dy}{dx}+y=y^{-2}$

$v=y^3$ प्रतिस्थापित करने पर, समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है :

$\frac{dv}{dx}+3v=3$

समाकलित और सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$y^3=1+ce^{-3x}$

iii) $y^{-4}=-x+\frac{1}{4}+ce^{-4x}$

iv) $x^2=y-\ln(1+y)+2$

v) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1-x^2}y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

समाकलन गुणक $=e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}=e^{-\ln(1-x^2)}=\frac{1}{1-x^2}$

अतः, $\frac{y}{1-x^2}=\int\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx+c$

या, $y=\sqrt{1-x^2}+c(1-x^2)\cdot$

5. i) दिए हुआ समीकरण यथातथ नहीं है, यहाँ

$M=(xy^2-x^2),\ N=(3x^2y^2+x^2y-2x^3+y^2)$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=6\frac{(xy^2-x^2)}{(xy^2-x^2)}=6\,.$$

$\therefore$ समाकलन गुणक $=e^{\int 6dy}=e^{6y}$

दिए हुए समीकरण को e^{6y} से गुणा कीजिए तथा निम्न प्राप्त करने के लिए समाकलित कीजिए :

$$e^{6y}\left[\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}\left(y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{18}\right)\right]=c$$

ii) दिया हुआ समीकरण $y'=\cos x-y\sin x+y^2$ एक रिकेटी समीकरण है। इसका एक हल $y_1=\sin x$ है।

मान लीजिए कि $y=\frac{1}{v}+\sin x$. तब $\frac{dv}{dx}+(\sin x)v=-1$

$e^{-\cos x}$ यहाँ समाकलन गुणक है तथा इसका हल

$$ve^{-\cos x} = c - \int e^{-\cos x} dx$$

क्योंकि $v = \dfrac{1}{y - \sin x}$, अतः $\dfrac{e^{-\cos x}}{y - \sin x} = c - \int e^{-\cos x} dx$.

iii) $2x\dfrac{dy}{dx} + y(6y^2 - x - 1) = 0$ बर्नोली प्रकार का है।

$y^{-2} = z$ प्रतिस्थापित करके $\dfrac{dz}{dx} + 2\dfrac{(x+1)}{2x}z = \dfrac{6}{x}$ प्राप्त कीजिए।

हल करने पर, $z = \dfrac{6}{x} + \dfrac{c}{x}e^{-x}$ या, $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{6}{x} + \dfrac{c}{x}e^{-x}$

6. मान लीजिए कि किसी समय t पर जनसंख्या $N(t)$ है। हमें $\dfrac{dN}{dt} = kN$ को हल करना है, जबकि $N(0) = N_0, N(2) = 2N_0$ तथा $N(3) = 20,000$ दिया हुआ है, जहाँ k आनुपातिकता अचर है।

हल करने पर, हम $N = N_0 e^{kt}$ प्राप्त करते हैं।

$t = 2$ पर, $N = 2N_0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

$t = 3$ पर, $N = 20,000 \Rightarrow N_0 = \dfrac{20000}{2^{3/2}} = \dfrac{10,000}{\sqrt{2}} = 7071$ (लगभग).

7. मान लीजिए कि संक्रमित हुए विद्यार्थियों की संख्या किसी समय t पर $x(t)$ है। नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निम्न है :

$\dfrac{dx}{dt} = kx(1000 - x)$ जहाँ $x(0) = 1, x(4) = 50$.

चर पृथक्करणीय विधि द्वारा हल करने तथा समाकलन अचर का मान निकालने पर,

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}$$

$x(4) = 50$ से $k = -\dfrac{1}{4000}\ln\dfrac{19}{999}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore\ x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000(k6)}}.$$

8. i) $p^2 + 2py\cot x = y^2$

$\Rightarrow\ p = -y\cot x \pm y\operatorname{cosec} x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{\sin x} y \text{ या, } \frac{dy}{dx} = -\frac{1+\cos x}{\sin x} y$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{\sin x} y$ को हल करने पर, हम $y = c\sec^2 x/2$ प्राप्त करते हैं।

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+\cos x}{\sin x} y$ को हल करने पर, हम $y = c\,\text{cosec}^2\, x/2$ प्राप्त करते हैं।

अतः, व्यापक हल है : $(y - c\sec^2 x/2)\,(y - c\,\text{cosec}^2 x/2) = 0$.

ii) $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$

x के लिए हल करने पर, $x = \frac{2y}{p} + \frac{p^2}{4y}$

y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left(1 - \frac{p^3}{4y^2}\right)\left(\frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy} - \frac{1}{p}\right) = 0$$

या तो $\left(1 - \frac{p^3}{4y^2}\right) = 0$ या $\left(\frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy} - \frac{1}{p}\right) = 0$

$\frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy} - \frac{1}{p} = 0$ से व्यापक हल $c(c-x)^2 = y$ प्राप्त होता है।

$1 - \frac{p^3}{4y^2} = 0$ से $p^3 = 4y^2$ प्राप्त होता है। इस समीकरण तथा दिए हुए समीकरण से p को विलुप्त करने पर विचित्र हल प्राप्त होता है।

iii) $xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$

$y - x = v$ और $x^2 = u$ के प्रयोग से, दिया हुआ समीकरण निम्न क्लेरों रूप में बदल जाता है :

$v = uP + \frac{1}{2P}$ जहाँ $P = \frac{dv}{du}$

व्यापक हल है : $v = uc + \frac{1}{2c}$

या $2c^2x^2 - 2c(y-x) + 1 = 0$

9. i) $y = -px + x^4p^2$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर निम्न प्राप्त होता है :

$$(2x^3p - 1)\left(x\frac{dp}{dx} + 2p\right) = 0$$

$x\dfrac{dp}{dx}+2p=0$ से $p=c/x^2$ प्राप्त होता है। दिए हुए समीकरण में p के इस मान को रखने पर, हमें व्यापक हल $y=-c/x+c^2$ प्राप्त होता है।

$(2x^3p-1)=0$ से हमें $p=1/2x^3$ प्राप्त होता है। इस समीकरण और दिए हुए समीकरण से p को विलुप्त करने पर, हमें एक विचित्र हल प्राप्त होता है।

ii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$(y-px)^2=a^2p^2+b^2$

या, $y=px\pm\sqrt{a^2p^2+b^2}$, जो क्लेरों रूप का है।

व्यापक हल $(y-cx)^2=a^2c^2+b^2$ है।

iii) $\sin px\cos y-\cos px\sin y=p$

$\Rightarrow\ \sin(px-y)=p$

$\therefore\ px-y=\sin^{-1}p$ या $y=px-\sin^{-1}p$, जो क्लेरों रूप का है।

$\therefore$ व्यापक हल $y=cx-\sin^{-1}c$ है।

10. i) $\dfrac{dy}{dx}=2+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y-\dfrac{1}{2}y^2$ एक रिकेटी समीकरण है।

मान लीजिए $y=y_1+\dfrac{1}{v}=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{v}$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

y और $\dfrac{dy}{dx}$ के इन मानों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}=2+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2v}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2}{v}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{v^2}\right]$$

जो सरल करने पर, निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\frac{dv}{dx}-\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2x}\right)v=\frac{1}{2}$$

समाकलन गुणक $=e^{-\int\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2x}\right)dx}=x^{-3/2}e^{-x^2/4}$

$$\therefore\ v x^{-3/2} e^{-x^2/4} = c + \frac{1}{2} \int x^{-3/2} e^{-x^2/4}\, dx$$

क्योंकि $v = \dfrac{x}{xy - x^2 - 1}$, इसलिए अभीष्ट व्यापक हल है :

$$\frac{x^{-1/2} e^{-x^2/4}}{xy - x^2 - 1} = c + \frac{1}{2} \int x^{-3/2} e^{-x^2/4} dx .$$

ii) $x(1-x^3)\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y - 2xy^2$

मान लीजिए कि $y = x^2 + \dfrac{1}{v}$, तब $y' = 2x - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$ है तथा दिया हुआ समीकरण निम्न रूप का हो जाता है :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{(1-4x^3)}{x(1-x^3)} v + \frac{2x}{x(1-x^3)}$$

इसका हल $v = \dfrac{x}{1-x^3} + \dfrac{c}{x(1-x^3)}$ है तथा अभीष्ट व्यापक हल

$\dfrac{x(1-x^3)}{y-x^2} = x^2 + c$ है, जहाँ c एक अचर है।

iii) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} - ye^x + e^{-x}y^2$

$y = e^x + \dfrac{1}{v}$ लेने पर, हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है :

$$\frac{dv}{dx} + (2 - e^x)v = -e^{-x}$$

इस समीकरण को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$v(e^{2x-e^x}) = -\int e^{-x} e^{2x-e^x} dx + c$$

तब, अभीष्ट व्यापक हल $y = \dfrac{e^x - (e^{2x-e^x})}{[c + \int e^{x-e^x} dx]}$ है।

11. i) वक्रों के दिए हुए निकाय का अवकल समीकरण निम्न है :

$$p^2 = a/x$$

ऊपर दिए समीकरण में p के स्थान पर $\left(-\dfrac{1}{p}\right)$ लिखने पर, हमें

लांबिक संछेदी का अवकल समीकरण $p^2 = \dfrac{x}{a}$ प्राप्त होता है

$\Rightarrow \quad p \pm \sqrt{\frac{x}{a}} = 0$ या, $\frac{dy}{dx} \pm \sqrt{\frac{x}{a}} = 0$

हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$3\sqrt{a}\,(c+y) = \pm 2x^{3/2},\ c \text{ एक अचर है।}$$

या, $9a(c+y)^2 = 4x^3$ ही अभीष्ट लांबिक संछेदी का निकाय है।

ii) $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$

ऊपर दिए समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x + y\frac{dy}{dx} + g = 0 \Rightarrow g = -(x+yp)$$

दिए हुए समीकरण में g का मान रखने पर, हमें समान अक्ष वाले वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण प्राप्त होता है, जो निम्न है :

$$x^2 + y^2 - 2x(x+yp) + c = 0$$

p के स्थान पर $\frac{-1}{p}$, लिखने पर, लांबिक संछेदी का अवकल समीकरण

$2xy\frac{dx}{dy} - x^2 = -c - y^2$ है,

$x^2 = v$ रखने पर समीकरण निम्न रूप में, बदल जाता है :

$\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = -\frac{c}{y} - y$, जो v और y में रैखिक है तथा इसका हल है :

$v = c - y^2 + c_1 y,\ c_1$ एक अचर है।

इस प्रकार, $x^2 + y^2 - c_1 y - c = 0$ ही लांबिक संछेदी का अभीष्ट कुल है।

iii) $y^2 = 4a(x+a)$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2yp = 4a \Rightarrow a = \frac{yp}{2}$$

दिए हुए कुल का अवकल समीकरण निम्न है :

$$y^2 = 2xpy + y^2p^2 \qquad \text{(i)}$$

ऊपर (i) में p के स्थान पर $\frac{-1}{p}$ रखने पर, लांबिक संछेदी के अभीष्ट कुल का अवकल समीकरण है :

$$y^2 = 2xy\left(\frac{-1}{p}\right) + y^2\left(\frac{-1}{p}\right)^2$$

या, $y^2 = 2xyp + y^2 p^2$ (ii)

जो वही है जो (i) है तथा इसलिए परवलयों का दिया हुआ निकाय स्वयं लांबिक है।

12. मान लीजिए कि किसी समय t पर पानी का तापमान $T(t)$ है। तब, दी हुई स्थिति को नियंत्रित करने वाला समीकरण निम्न है :

$$\frac{dT}{dt} = k(T-40) \quad \text{(i)}$$

जहाँ $T(0) = 10$ और $T(5) = 20$ (ii)

समीकरण (i) को हल करने पर, हम $T(t) = 40 + Ce^{kt}$, C एक अचर है, प्राप्त करते हैं।

$T(0) = 10$ से $C = -30$ प्राप्त होता है तथा इस प्रकार $T(t) = 40 - 30e^{kt}$

$T(5) = 20 \Rightarrow 20 = 40 - 30e^{5k} \Rightarrow k = \frac{1}{5}\ln\frac{2}{3} = -0.08$ (लगभग)

$\therefore \ T(t) = 40 - 30e^{-0.08t}$

i) $T(20) = 40 - 30e^{-(0.08)20} = 40 - 30e^{-1.6} = 34^\circ\text{C}$ (लगभग)

ii) $T(30) = 40 - 30e^{-2.4} = 37^\circ\text{C}$ (लगभग)

जब $T = 25^\circ\text{C}$, तब t ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है :

$$25 = 40 - 30^{-0.08t} \Rightarrow -0.08t = \ln 1/2$$

$$\Rightarrow \ t = \frac{\ln 2}{0.08} = \frac{0.69}{0.08} = 8.6 \text{ min.}$$

13. मान लीजिए कि किसी समय t पर टंकी में नमक की मात्रा $P(t)$ है। तब,

$\frac{dP}{dt}$ = (नमक के अंदर जाने की दर) – (नमक के बाहर जाने की दर)

$= R_1 - R_2$.

जहाँ टंकी में नमक के अंदर जाने की दर R_1 है :

R_1 = (3 लीटर / मिनट) (0 ग्राम / लीटर) = 0 ग्राम / मिनट.

क्योंकि मिश्रण 1 लीटर / मिनट की धीमी दर से बाहर निकल रहा है, इसलिए मिश्रण $(2-1)$ लीटर / मिनट $=1$ लीटर / मिनट की दर से जमा हो रहा है। t मिनटों के बाद, टंकी में $100+t$ लीटर नमक होगा।

नमक बाहर निकालने की दर R_2 है :

$$R_2 = (2\text{ लीटर}/\text{मिनट}).\left(\frac{P}{100+t}\text{ ग्राम}/\text{लीटर}\right) = \frac{2P}{100+t}\text{ ग्राम}/\text{मिनट}$$

$$\therefore\ \frac{dP}{dt} = \frac{-2P}{100+t} \Rightarrow P = \frac{A}{(100+t)^2}$$

$$P(0) = 10 \Rightarrow A = 100000$$

$$\therefore\ P = \frac{100000}{(100+t)^2}$$

$t = 60$, पर, $P = \dfrac{100000}{(160)^2} = 3.9 \text{ kg}$

जब $P = \dfrac{625}{1000}\text{kg}$, तब $t = 300$ मिनट $= 5$ घंटे।

14. i) मान लीजिए कि किसी समय $t > 0$ पर कमरे में कार्बन मोनो आक्साइड की सांध्रता $x(t)$ है। तब, $x(t)$ निम्न से प्राप्त है :

$$x(t) = \frac{ac}{b} + \left(y_0 - \frac{ac}{b}\right)e^{-\frac{bt}{V}}$$ (समीकरण (78) को देखिए)

जहाँ $V = 1200\ \text{cm}^3, a = 0.1\ \text{cm}^3/\text{min} = b, c = .04\, g/\text{cm}^3$

$$\therefore\ x(t) = .04(1 - e^{-t/12000})$$

ii) जब $x(t) = 0.00012$ ग्राम/से.मी.^{3} तब

$$1 - e^{-t/12000} = \frac{3}{1000}$$

$$\Rightarrow\ e^{-t/12000} = 1 - \frac{3}{1000} = \frac{997}{1000}$$

$$\Rightarrow\ t = 12000 \ln\frac{1000}{997} \approx 36 \text{ मिनट}$$

इस प्रकार, 36 मिनट बाद कमरे में कार्बन मोनो आक्साइड की सांध्रता मानव शरीर के लिए हानिकारक हो जाएगी।

—×—

शब्दावली

अद्वितीयता	uniqueners
अनिर्धार्य	indeterminate
अनिर्धारित गुणांक	undetermined coefficients
अनुप्रयोग	applications
अवकल समीकरण	differential
असमघात	non-homogeneous
अस्तित्व	existence
आंशिक अवकलज	partialderivative
आंशिक अवकल समीकरण	partialdifferential equation
आंशिक भिन्न	partial fractions
आदि प्रतिबंध	initialcondition
आश्रित	dependent
कोटि	order
खंडशः समालन	integration by parts
गुणांक	coefficients
घात	degree
चर पृथक्करण	variabaleseparable
तुच्छ हल	travial solution
तुल्य	equivalent
निकाय	system
निदर्श	model
प्रतिस्थापन	substitution
प्राचल विचरण विधि	method of variation of parameters
प्राचलिक समीकरण	parametric equation
यथातथ	exact
रूपांतरण	transformation
रैखिक	linear
वक्र कुल	family of curves
विचित्र हल	singular solution
विलुप्त	eliminate
विशेष हल	particular solution

व्यापक हल	generalsolution
समघात	homogeneous
समाकलन गुणक	integratingfactor
समानीत	reduced
समानेय	reducible
सम्मिश्र हल	complex solution
सर्वसमिकाएं	identities
साधारण अवकलज	ordinary derivative
साधारण अवकल समीकरण	ordinary differentialequation
स्वतंत्र	independent
स्वेच्छ अचर	arbitrary constant