इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय
इंदिरा गांधी
राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-132
अवकल समीकरण

खंड

3
द्वितीय और उच्चतर कोटि साधारण अवकल समीकरण

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ
विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
शिव नाडर विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पुणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन.आई.एस.ई.आर., भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई.आई.एस.ई.आर.,
मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई.आई.टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य
विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू
डॉ. दीपिका
श्री पवन कुमार
प्रो. पूर्णिमा मित्तल
प्रो. परवीन सिंक्लेयर
प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. एस. वेंकटारमन

*पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. ओ.पी. भूटानी (सेवानिवृत्त)
आई.आई.टी., दिल्ली (संपादक)

प्रो. पूर्णिमा मित्तल
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयक : प्रो. पूर्णिमा मित्तल तथा प्रो. सुजाता वर्मा

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन.सी.ई.आर.टी.

प्रो. पूर्णिमा मित्तल
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

आभार: प्रो. परवीन सिंक्लेयर और डॉ. दीपिका को पांडुलिपि पर सुझाव के लिए।

खंड मुद्रण

श्री सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
विज्ञान विद्यापीठ, इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

नवम्बर, 2018

© *इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 2018*

ISBN : 978-93-88498-48-7

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस कार्य का कोई भी अंश इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना किसी भी रूप में मिमियोग्राफ (मुद्रण) अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय, मैदानगढ़ी, नई दिल्ली–110 068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in से प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. महेंद्र सिंह नाथावत, निदेशक (विज्ञान विद्यापीठ) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेजर कम्पोजिंग : राजश्री कम्प्यूटर्स, वी-166ए, भगवती विहार (नजदीक सेक्टर 2, द्वारका), उत्तम नगर, नई दिल्ली-110059

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली–110002

द्वितीय और उच्चतर कोटि साधारण अवकल समीकरण

खंड 2 में हमने प्रथम कोटि अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों पर चर्चा की है। परंतु हमारे वास्तविक जीवन में कुछ ऐसी स्थितियाँ होती हैं जिनके लिए हमें द्वितीय या उच्चतर कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की आवश्यकता होती है। एक सरल रेखा में कण की गति से संबंधित समस्या द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण से नियंत्रित होती है। इसी प्रकार लोलक (pendulum) की गति, कण के प्रणोदित कंपन (forced vibration) यांत्रिक दोलनों (mechanical oscillations) और विद्युत परिपथ (electric circuits) से संबंधित समस्याएं द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण से नियंत्रित होती हैं। समपरिमापी समस्या (isoperimetric problem) (अर्थात् दिए हुए परिमाप के उन वक्रों को मालूम करने की समस्या जो दिए हुए प्रतिबंधों के अधीन अधिकतम क्षेत्रफल घेरते हैं) एक तृतीय कोटि के अवकल समीकरण पर निर्भर करती है। इसी प्रकार संछेदियों से उन पर लगाए गए प्रतिबंधों के अनुसार उच्चतर कोटि के अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं। इस खंड में हम द्वितीय, तृतीय और उच्चतर कोटि के अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों पर चर्चा करेंगे।

अठारहवीं शताब्दी के शुरू में अनेक गणितज्ञों ने द्वितीय और तृतीय कोटि के अवकल समीकरणों को हल करने की अनेक विधियों का पता लगाया था। उदाहरण के लिए, 1712 में काउन्ट जैकोप रिकेटी, इटली के एक गणितज्ञ, ने संबंध $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ का प्रयोग करके द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण के व्यापक रूप, अर्थात् $f(y, y', y'') = 0$ को प्रथम कोटि के अवकल समीकरण में समानीत करने की विधि का पता लगाया था। 1728 में स्विजरलैंड के गणितज्ञ लियोनहार्ड आयलर ने एक विशेष वर्ग के द्वितीय कोटि समीकरणों को प्रथम कोटि समीकरणों में समानीत करने की समस्या प्रस्तुत की थी और उसे हल किया था। हालांकि स्वीस गणितज्ञ जॉन बर्नोली का यह कहना था कि वर्ष 1700 से पहले ही वह nवीं कोटि के व्यापक समीकरण पर अध्ययन कर चुके थे, पर किसी भी कोटि के व्यापक अवकल समीकरण को हल करने की विभिन्न विधियाँ 1734 में फ्रांसिसी गणितज्ञ क्लेरों ने और 1739 में ऑयलर ने प्रस्तुत करी थी। आइए अब हम यह देखें कि इस खंड में हमने शिक्षण सामग्री को किस प्रकार प्रस्तुत किया है।

इस खंड में चार इकाइयाँ हैं। इकाई 10 में, जो इस खंड की प्रथम इकाई है, हमने व्यापक रैखिक अवकल समीकरणों को अचर गुणांकों वाले समीकरणों और चर गुणांकों वाले समीकरणों में वर्गीकृत किया है और फिर इन समीकरणों को समघात समीकरणों और असमघात समीकरणों में वगीकृत किया है। हमने व्यापक असमघात रैखिक अवकल समीकरण के हल के अस्तित्व और अद्वियता के प्रतिबंधों, इन हलों के रैखिकतः परतंत्र या स्वतंत्र होने के प्रतिबंधों तथा हलों के प्राथमिक गुणधर्मों पर चर्चा की है। यहाँ हमने अचर गुणांकों वाले समघात रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों पर भी चर्चा की है।

इकाई 11 में हमने अचर गुणांक वाले असमघात रैखिक अवकल समीकरणों का विशेष समाकल मालूम करने के लिए अनिर्धारित गुणांक विधि पर चर्चा की है। हमने उन असमघात पदों की पहचान की है जिन पर यह विधि लागू की जा सकती है और फिर इस विधि को उन अवकल समीकरणों के विशेष समाकल मालूम करने के लिए लागू किया है।

इकाई 12 में हमने अचर और चर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरणों के हल मालूम करने के लिए प्राचल विचरण विधि, जो फ्रांसिसी गणितज्ञ जोसफ लुइस लग्रांज (1736-1813) ने प्रस्तुत की थी, पर चर्चा की है। फ्रांसिसी गणितज्ञ द' एलम्बर्ट की कोटि लघुकरण विधि व ऑयलर समीकरण को हल करने की विधि पर भी यहाँ चर्चा की गयी है।

इकाई 13 में हमने संकारकों (operators) की सहायता से विशेष समाकल मालूम करने का सिद्धांत विकसित किया है। विशेष रूप से हमने $f(D) = X$ के प्रकार के अचर गुणांकों वाले अवकल समीकरणों के विशेष समाकल मालूम करने के लिए अवकल संकारक विधि पर चर्चा की है, जहाँ $D = \dfrac{d}{dx}$ एक अवकल संकारक है, और जब $X = e^{ax},\ x^m,\ \sin(ax+b),\ e^{ax}v(x)$ और $x^m\ v(x)$ जहाँ a, b, α और m अचर हैं।

द्वितीय कोटि रैखिक असमघात अवकल समीकरणों के यांत्रिकी में कंपनों तथा विद्युत परिपथ के सिद्धांत में अनुप्रयोगों पर भी चर्चा की गयी है।

संकेत और प्रतीक

$D^n y$ जहाँ $D = \frac{d}{dx}$	:	x के सापेक्ष y का nवीं कोटि अवकलज
$f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2}$	:	D में n वीं कोटि बहुपद या nवीं कोटि रैखिक
$+ \cdots + a_{n-2} D^2 + a_{n-1} D + a_n$	:	अवकल संकारक
$W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$	:	n फलनों $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ का रांसकियन
C.F.	:	पूरक फलन
P.I.	:	विशेष समाकल
l.h.s.	:	बायाँ पक्ष
r.h.s.	:	दायाँ पक्ष
kg.	:	किलोग्राम
m.	:	मीटर
sec.	:	सेकंड
cm.	:	सेंटिमीटर
E	:	विद्युत वाहक बल
R	:	प्रतिरोध
L	:	प्रेरकत्व
C	:	धारिता
q	:	आवेश
i	:	धारा

ग्रीक वर्णमाला

σ	सिग्मा
ζ	ज़ीटा
ε	एप्सिलॉन
τ	टाओ
π	पाई
ω	ओमेगा
δ	डेल्टा
ξ	ज़ाई

इकाई 10

उच्चतर कोटि रैखिक अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

10.1 प्रस्तावना

खंड 2 में हमने साधारण अवकल समीकरणों से संबंधित आधारभूत संकल्पनाओं को परिभाषित किया था तथा प्रथम कोटि के साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों की चर्चा की थी। हमने कुछ ऐसी भौतिक समस्याओं को सूत्रित किया और हल किया जो प्रथम कोटि के रैखिक साधारण अवकल समीकरणों से नियंत्रित होती थीं। वहाँ विकसित की गई विधियों में मुख्यतः समाकलन की तकनीकों के कौशल की आवश्यकता थी तथा समीकरणों को परिचित प्रारंभिक फलनों के पदों में, हल कर लिया गया था। परंतु, ऐसी स्थिति सदैव नहीं भी हो सकती। जैसा कि इस खंड की प्रस्तावना में बताया गया था, अनेक भौतिक या जैविक परिघटनाओं को नियंत्रित करने वाले अवकल समीकरण प्रथम कोटि के होना आवश्यक नहीं है। वे उच्चतर कोटि के रैखिक अथवा अरैखिक समीकरण हो सकते हैं या उनके अचर अथवा चर गुणांक हो सकते हैं।

इस इकाई के भाग 10.2 में, हम nवीं कोटि के व्यापक रैखिक अवकल समीकरण को निम्न दो वर्गों में वर्गीकृत करेंगे :

i) समघात और असमघात

ii) अचर गुणांकों और चर गुणांकों वाले समीकरण।

यहाँ, हम मुख्यतः **अचर गुणांकों वाले दो या अधिक कोटि के रैखिक समघात अवकल समीकरणों** के संपूर्ण हल ज्ञात करने की विधियों तक ही सीमित रहेंगे। असमघात समीकरणों पर आगे आने वाली इकाइयों में विचार किया जाएगा। सामान्यतः, समीकरणों जिनके गुणांक अचर न हों परंतु चर हों, को हल करना अति कठिन होता है। हम ऐसे समीकरणों को हल करने की विधियों पर चर्चा इस पाठ्यक्रम में नहीं करेंगे। परंतु, चर गुणांकों वाले एक व्यापक रैखिक अवकल समीकरण के लिए भाग 10.3 में, हम उन प्रतिबंधों को बताएँगे जिनके अधीन उसका एक अद्वितीय हल ज्ञात किया जा सकता है।

यहां हम रैखिक अवकल समीकरण के हल के कुछ गुणधर्मों पर भी चर्चा करेंगे और उसके व्यापक/पूर्ण समाकल परिभाषित करेंगे। अचर गुणांकों वाले रैखिक समघात अवकल समीकरण का पूरक फलन ज्ञात करने की विधि पर चर्चा हम भाग 10.4 में करेंगे। इकाई के अंत में हमने एक परिशेषिका में आव्यूह और सारणिक की संकल्पनाओं की संक्षिप्त समीक्षा की है जो आपको भाग 10.3 में, रैखिक अवकल समीकरणों के अध्ययन में सहायक होगी।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- ❖ अचर और चर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरणों की पहचान कर सकेंगे;
- ❖ समघात और असमघात रैखिक अवकल समीकरणों की पहचान कर सकेंगे;
- ❖ उन प्रतिबंधों को बता सकेंगे जिनके अधीन किसी रैखिक अवकल समीकरण के एक अद्वितीय हल का अस्तित्व होता है;
- ❖ एक दिए हुए अवकल समीकरण का पूर्ण समाकल लिख सकेंगे, जबकि उसके विभिन्न स्वतंत्र समाकल ज्ञात हों;
- ❖ असमघात समीकरणों के हलों को पूरक फलन और विशेष समाकल के रूप में वर्गीकृत कर सकेंगे; और
- ❖ अचर गुणांकों वाले समघात रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक हल प्राप्त कर सकेंगे।

10.2 व्यापक रैखिक अवकल समीकरण

आइए समीकरणों

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

और

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}-y=x+2$$

पर विचार करते हुए, अपनी चर्चा को प्रारंभ करें। इन दोनों समीकरणों में क्या अंतर है?

आप जानते हैं कि ये दोनों समीकरण अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि के रैखिक समीकरण हैं। अंतर केवल यह है कि दूसरे समीकरण के दाएँ पक्ष में पद $x+2$ है,

जो x के एक फलन और एक अचर पद का योग है। ऐसा पद, जिसे असमघात पद कहते हैं; समीकरण को असमघात बना देता है। अब,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+3y=x^2+x+1$$

के रूप के समीकरण पर विचार कीजिए, जहाँ गुणांक x के फलन हैं। ध्यान दीजिए कि यह चर गुणांकों वाला द्वितीय कोटि का एक असमघात रैखिक अवकल समीकरण है।

अति व्यापक रैखिक अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)\ y=b(x) \qquad (1)$$

गुणांक $a_0, a_1, \ldots, a_n$ और b अंतराल $\alpha < x < \beta$ में संतत हैं। यदि $a_0(x) \neq 0$, तो यह अवकल समीकरण nवीं कोटि का है। समीकरण (1) **चर गुणांकों वाला nवीं कोटि का एक रैखिक अवकल समीकरण है।**

यदि सभी गुणांक $a_0, a_1, \ldots, a_n$ अचर हों, अर्थात् ये x पर आश्रित नहीं हों, तो समीकरण (1) को **अचर गुणांकों वाला nवीं कोटि का एक रैखिक अवकल समीकरण** कहा जाएगा।

साथ ही, जब $b(x)=0\ \forall\ x$ तब समीकरण (1) को **समघात** (homogeneous) रैखिक अवकल समीकरण के रूप में वर्गीकृत किया जाता है।

परंतु यदि $b(x)\neq 0$ और यह एक अचर या x का एक फलन है, तो समीकरण (1) को **असमघात रैखिक** अवकल समीकरण कहा जाता है। पद $b(x)$ समीकरण (1) का असमघात पद है। असमघात समीकरण (1) का अध्ययन करने के लिए, यह आवश्यक है कि समीकरण में $b(x)$ को 0 प्रतिस्थापित करने के बाद प्राप्त समघात समीकरण पर भी साथ ही में विचार किया जाए। यह समीकरण (1) से जुड़ा हुआ **समानीत समीकरण** (reduced equation) कहलाता है।

उदाहरण के लिए समीकरण

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+6y=0$$

अचर गुणांकों वाला तृतीय कोटि रैखिक समघात अवकल समीकरण है। समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4}+4\frac{d^3y}{dx^3}+3y=x^2+1$ अचर गुणांकों वाला चतुर्थ कोटि रैखिक असमघात समीकरण है। इसका संगत समानीत समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4}+4\frac{d^3y}{dx^3}+3y=0$ है।

समीकरण $x^3\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+xy=2$ चर गुणांकों वाला द्वितीय कोटि असमघात रैखिक अवकल समीकरण है।

आपने अवश्य ही इस ओर **ध्यान दिया होगा** कि यहाँ जिस संदर्भ में शब्द समघात का प्रयोग किया गया है वह खंड 2 की इकाई 6 के भाग 6.3 में प्रयोग किए गए संदर्भ से पूर्णतया भिन्न है।

अब, आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E1) नीचे दिए अवकल समीकरणों को समघात और असमघात समीकरणों में वर्गीकृत कीजिए तथा असमघात समीकरणों के संगत समानीत समीकरण लिखिए :

i) $y''' + xy'' + x^2 y' + x^3 y = \ln x$

ii) $y''' + 2y'' - y' = 2y$

iii) $(1-x)y'' + xy' = y + (1-x)^2$.

अपने रैखिक बीजगणित के ज्ञान से, आप संभवतः एक अंतराल पर फलनों के एक समुच्चय की रैखिक परतंत्रता (linear dependence) और स्वतंत्रता (independence) से परिचित होंगे। इससे पहले कि हम आगे बढ़ें, आइए इन दोनों संकल्पनाओं को दोहरा लें, जो रैखिक अवकल समीकरणों के अध्ययन के लिए मौलिक हैं।

फलनों की रैखिक परतंत्रता और स्वतंत्रता

आइए किसी अंतराल I पर तीन फलन $y_1(x) = 2e^{3x}$, $y_2(x) = 5e^{3x}$ और $y_3(x) = e^{-4x}$ पर विचार करें। इन फलनों के लिए, हम सदैव अचर c_1, c_2 और c_3 (सभी शून्य नहीं) ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = 0$. उदाहरण के लिए हम $c_1 = -5,\ c_2 = 2,$ और $c_3 = 0$ ले सकते हैं। ऐसे फलन y_1, y_2 और y_3 अंतराल I पर रैखिकतः परतंत्र कहलाते हैं। जबकि किसी अंतराल I पर, फलनों e^x और xe^x के लिए, $c_1 e^x + c_2 xe^x = 0$, यदि और केवल यदि $c_1 = 0, c_2 = 0$, ऐसे फलन e^x और xe^x अंतराल I पर रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं।

अतः हम निम्नलिखित दो परिभाषाएँ देते हैं :

परिभाषा : फलनों $y_1, y_2, \ldots, y_n$ का एक समुच्चय किसी अंतराल I पर **रैखिकतः परतंत्र** (linearly dependent) कहा जाता है, यदि वास्तविक संख्याओं $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (सभी शून्य नहीं) का अस्तित्व हो जिससे इस अंतराल में प्रत्येक x के लिए,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0.$$

परिभाषा : फलनों $y_1, y_2, \ldots, y_n$ का एक समुच्चय किसी अंतराल I पर **रैखिकतः स्वतंत्र** (linearly independent) कहा जाता है, यदि वह उस अंतराल पर रैखिकतः परतंत्र न हो।

दूसरे शब्दों में, फलनों का एक समुच्चय किसी अंतराल पर रैखिकतः स्वतंत्र होता है, यदि उस अंतराल के प्रत्येक x के लिए, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$ को संतुष्ट करने वाली वास्तविक संख्याएं केवल $c_1, c_2, \ldots, c_n = 0$ हों।

आइए इन परिभाषाओं को दो फलन y_1 और y_2 की स्थिति के लिए समझें। यदि किसी अंतराल पर ये फलन रैखिकतः परतंत्र हैं, तो वास्तविक संख्याओं c_1 और c_2, (दोनों शून्य नहीं) का अस्तित्व है ताकि उस अंतराल में प्रत्येक x के लिए,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0.$$

यदि $c_1 \neq 0$, तो इससे निष्कर्ष निकलता है कि,

$$y_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} y_2(x).$$

अर्थात्, **यदि दो फलन रैखिकतः परतंत्र हों, तो एक फलन दूसरे फलन का एक अचर गुणज (multiple) होता है।** विलोमतः, यदि किसी अचर c_2 के लिए $y_1(x) = c_2 y_2(x)$ हो, तो दिए हुए अंतराल पर प्रत्येक x के लिए, $(-1)y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ होगा। अतः, यदि फलन रैखिकतः परतंत्र हैं, तो दो अचरों में से कम से कम एक अचर (जैसे $c_1 = -1$) शून्य नहीं होगा। इस प्रकार, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **किसी अंतराल I पर दो फलन रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं; जब इस अंतराल पर कोई भी फलन दूसरे फलन का अचर गुणज न हो।**

फलन $y_1(x) = \sin 2x$ और $y_2(x) = \sin x \cos x$ अंतराल $]-\infty, \infty[$ पर रैखिकतः परतंत्र हैं, क्योंकि $c_1 = \dfrac{1}{2}$ और $c_2 = -1$ लेने पर प्रत्येक वास्तविक x के लिए $c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$ संतुष्ट हो जाता है। साथ ही हम देख सकते हैं कि $y_1(x) = 2y_2(x)$.

आइए, हम निम्न उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1: जाँच कीजिए कि अंतराल $]-\pi/2, \pi/2[$ पर फलन $\cos^2 x, \sin^2 x, \sec^2 x$ और $\tan^2 x$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं या रैखिकतः परतंत्र।

हल : आइए $c_1 \cos^2 x + c_2 \sin^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$ लें। तब

$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$ और $c_4 = 1$ लेने पर,

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \sin^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$$

अंतराल $-\pi/2 < x < \pi/2$ के लिए संतुष्ट हो जाता है। इस प्रकार, दिए हुए फलन रैखिकतः परतंत्र हैं।

***

उदाहरण 2: दिखाइए कि किसी भी अंतराल पर फलन e^x और e^{2x} रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

हल : आइए कल्पना करें कि किसी अंतराल में सभी x के लिए, $c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0$. तब, हमें यह दिखाना चाहिए कि $c_1 = c_2 = 0$ हैं।

मान लीजिए कि इस अंतराल में x_0 और x_1 दो भिन्न बिंदु हैं। तब, हम समीकरणों का निम्न समघात निकाय प्राप्त करते हैं :

$$c_1 e^{x_0} + c_2 e^{2x_0} = 0$$

$$c_1 e^{x_1} + c_2 e^{2x_1} = 0$$

इसके गुणांकों का सारणिक है :

$$\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{2x_0} \\ e^{x_1} & e^{2x_1} \end{vmatrix} = e^{x_0} e^{2x_1} - e^{x_1} e^{2x_0} = e^{x_0} e^{x_1} (e^{x_1} - e^{x_0}) \neq 0 \text{ है, क्योंकि } x_1 \neq x_0.$$

आप रैखिक बीजगणित के अपने ज्ञान से यह जानते हैं कि यदि गुणांकों का सारणिक $\neq 0$. तो अंतराल में समघात निकाय का एक मात्र हल तुच्छ हल (trivial solution) होता है, अर्थात्, हमें $c_1 = c_2 = 0$ प्राप्त होना चाहिए। (इकाई के अंत में परिशेषिका देखिए)। अतः, किसी भी अंतराल पर e^x और e^{2x} रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

***

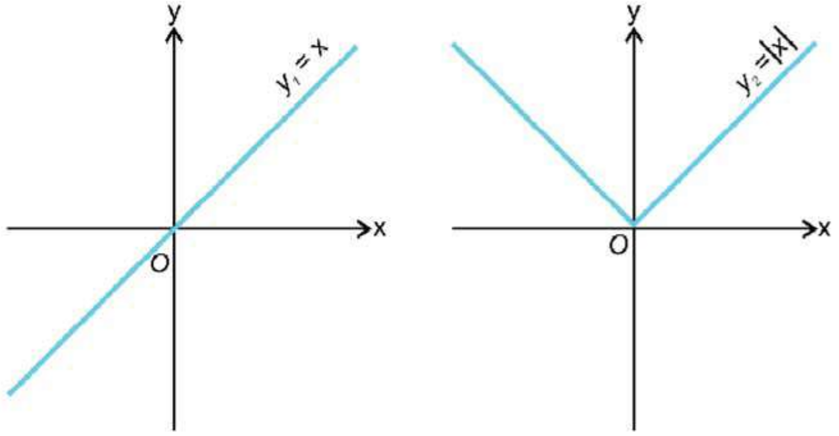
रैखिक परतंत्रता या रैखिक स्वतंत्रता पर विचार करते समय, वह अंतराल महत्त्वपूर्ण होता है जिस पर फलन परिभाषित हैं। अब हम इसे एक उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 3: दिखाइए कि फलन $y_1(x) = x$ और $y_2(x) = |x|$

i) अंतराल $]-\infty, \infty[$ पर रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

ii) अंतराल $]0, \infty[$ पर रैखिकतः परतंत्र हैं।

हल : (i) चित्र 1 से यह स्पष्ट है कि अंतराल $]-\infty, \infty[$ में कोई भी फलन दूसरे फलन का एक अचर गुणज नहीं है।



चित्र 1

इस प्रकार, प्रत्येक वास्तविक x के लिए $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$, अर्थात् $c_1 x + c_2 |x| = 0$ होने के लिए, $c_1 = 0$ और $c_2 = 0$ होना आवश्यक है।

ii) अंतराल $]0, \infty[$ में $y_1(x) = x$ और $y_2(x) = |x|$ के लिए,

$c_1 x + c_2 |x| = 0$

$\Rightarrow$ $c_1 x + c_2 x = 0$ क्योंकि $0 < x < \infty$ के लिए $|x| = x$.

$\Rightarrow$ $(c_1 + c_2)x = 0$. जो c_1 और c_2 के किसी भी शून्येतर मान के लिए संतुष्ट हो जाता है जहां $c_1 = -c_2$ हो।

इस प्रकार, अंतराल $]0, \infty[$ पर $y_1(x)$ और $y_2(x)$ रैखिकतः परतंत्र हैं।

***

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E2) जाँच कीजिए कि दिए हुए अंतराल पर फलनों का समुच्चय $\{y_1, y_2\}$ रैखिकतः परतंत्र है या स्वतंत्र :

i) $y_1 = e^x$ और $y_2 = e^{-x}$, $-\infty < x < \infty$ पर

ii) $y_1 = 2\cos 3x$ और $y_2 = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, $-\infty < x < \infty$ पर

iii) $y_1 = e^x$ और $y_2 = xe^x$, $-\infty < x < \infty$ पर।

फलनों के एक समुच्चय की रैखिक परतंत्रता या स्वतंत्रता की जाँच के लिए ऊपर दी गई विधि कुछ जटिल प्रतीत होती है। अब हम एक प्रमेय दे रहे हैं जो किसी अंतराल पर n फलनों के एक समुच्चय की रैखिक स्वतंत्रता की जाँच के लिए एक **पर्याप्त प्रतिबंध** प्रदान करता है।

प्रमेय 1: मान लीजिए कि किसी अंतराल **I** पर n फलन $y_1, y_2, \ldots, y_n$ हैं, जिनके न्यूनतम $(n-1)$ वीं कोटि के अवकलज हैं। यदि सारणिक

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

अंतराल **I** के एक भी बिंदु पर शून्येतर है, तो **I** पर फलन $y_1, \ldots, y_n$ रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं।

उपपत्ति: सरलता के लिए, हम $n=2$ की स्थिति पर विचार करते हैं तथा इस प्रमेय को अंतर्विरोध द्वारा सिद्ध करते हैं। आइए यह कल्पना करें कि अंतराल I में किसी x_0 के लिए, $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ है तथा इस अंतराल में y_1 और y_2 रैखिकतः परतंत्र हैं। अब क्योंकि y_1 और y_2 रैखिकतः परतंत्र है, इसलिए अचर c_1 और c_2 (दोनों शून्य नहीं) का अस्तित्व है, जिससे कि **I** में प्रत्येक x के लिए, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$. इस व्यंजक तथा इसके अवकलज के मान x_0 पर निकालने पर, हम रैखिक समीकरणों का निम्न निकाय प्राप्त करते हैं :

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \qquad (2)$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0$$

y_1 और y_2 की रैखिक परतंत्रता का अर्थ है कि निकाय (2) का c_1 और c_2 के लिए अतुच्छ (non-trivial) हल है। अतः, I में प्रत्येक x_0 के लिए

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0 .$$

परंतु यह हमारी कल्पना $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ का एक अंतर्विरोध है। इसलिए, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि y_1 और y_2 रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

हमने परिणाम को $n=2$ के लिए सिद्ध किया है। इसी प्रकार की विधि को अपनाते हुए, इस परिणाम को n फलनों $y_1, y_2, \ldots, y_n$ के लिए सिद्ध किया जा सकता है। परंतु यहां हम इस पर चर्चा नहीं करेंगे।

—■—

इस प्रमेय के परिणामस्वरूप, हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं, जो प्रमेय 1 का प्रतिधनात्मक (contrapositive) है :

उपप्रमेय 1: यदि फलनों $y_1, y_2, \ldots, y_n$ के कम से कम $(n-1)$वीं कोटि तक के अवकलज हैं तथा ये फलन अंतराल I पर रैखिकतः परतंत्र हैं, तो I में प्रत्येक x के लिए

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = 0.$$

प्रमेय 1 में, सारणिक $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ फलनों का **रांसकियन** (Wronskian) कहलाता है, जिसे पोलैंडवासी गणितज्ञ जोसफ मरिया होयेन रांसकी (1778-1853) के नाम पर रखा गया है।

उदाहरण के तौर पर, फलन $y_1(x) = \sin^2 x$ और $y_2(x) = 1 - \cos 2x$, अंतराल $]-\infty, \infty[$ पर रैखिकतः परतंत्र हैं, क्योंकि यदि हम $c_1 = -2$ और $c_2 = 1$ चुनें, तो सभी x के लिए, $c_1 \sin^2 x + c_2(1 - \cos 2x) = 0$ संतुष्ट हो जाता है। उपर प्राप्त परिणाम के अनुसार प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए, $W(\sin^2 x, 1 - \cos 2x) = 0$. क्योंकि

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1-\cos 2x \\ 2\sin x \cos x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = 2\sin^2 x \sin 2x - 2\sin x \cos x + 2\sin x \cos x \cos 2x$$

$$= \sin 2x\, [2\sin^2 x - 1 + \cos 2x]$$

$$= \sin 2x\, [2\sin^2 x - 1 + \cos^2 x - \sin^2 x]$$

$$= \sin 2x\, [\sin^2 x + \cos^2 x - 1]$$

$$= 0$$

आइए उदाहरण 2 में लिए गए दो फलनों $f(x) = e^x$ और $g(x) = e^{2x}$ पर प्रमेय 1 का अनुप्रयोग करें। किसी भी बिंदु x_0 के लिए, इन दो फलनों का रांसकियन हमें निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$W(f, g)(x_0) = \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{2x_0} \\ e^{x_0} & 2e^{2x_0} \end{vmatrix} = e^{3x_0} \neq 0.$$

इस प्रकार, प्रमेय 1 के अनुसार प्रत्येक अंतराल पर फलन e^x और e^{2x} रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

उदाहरण 3 में, हमने देखा था कि $]-\infty, \infty[$ पर $y_1(x) = x$ और $y_2(x) = |x|$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं। परंतु, इस स्थिति में, हम रांसकियन अभिकलित नहीं कर सकते, क्योंकि $x = 0$ पर y_2 अवकलनीय नहीं है।

याद रखिए कि प्रमेय 1 में अंतराल के किसी एक बिंदु पर रांसकियन के लोपन नहीं होने वाला प्रतिबंध केवल एक **पर्याप्त प्रतिबंध** ही होता है। अर्थात्, यदि किसी अंतराल में प्रत्येक x के लिए $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ है, तो यह आवश्यक नहीं है कि उस अंतराल पर फलन $y_1, y_2, \ldots, y_n$ रैखिकतः परतंत्र हों। किसी अंतराल में कुछ फलन रैखिकतः स्वतंत्र हो सकते हैं तथा फिर भी उस अंतराल के किसी बिंदु पर उनका रांसकियन शून्य हो सकता है। क्या आप ऐसे फलनों का एक उदाहरण सोच सकते हैं? अगले प्रश्न में, हम आपसे ऐसा करने के लिए कह रहे हैं।

E3) यह दिखाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि किसी अंतराल पर फलनों का एक समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र हो सकता है परंतु फिर भी उस अंतराल के किसी बिंदु पर उस समुच्चय का रांसकियन शून्य हो।

E4) निम्न समस्याओं में, जाँच कीजिए कि दिए हुए फलन साथ में दिए अंतराल पर रैखिकतः स्वतंत्र है अथवा परतंत्र।

i) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = 4x - 3x^2;\ ]-\infty, \infty[$.

ii) $f_1(x) = 5,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = \sin^2 x;\ ]-\infty, \infty[$.

iii) $f_1(x) = x^{1/2},\ f_2(x) = x^2;\ ]0, \infty[$.

iv) $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \operatorname{cosec} x;\ ]0, \pi[$.

E5) i) ध्यान दीजिए कि $f_1(x) = 2$ और $f_2(x) = e^x$ द्वारा परिभाषित फलन f_1 और f_2 के लिए,

$$1.f_1(0) - 2.f_2(0) = 0.$$

क्या इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $x = 0$ को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी अंतराल पर f_1 और f_2 रैखिकतः परतंत्र है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

ii) अंतराल $]-\infty, \infty[$ के किसी बिंदु x पर दो फलनों का रांसकियन $W(x) = x^2 \sin x$ है। क्या ये फलन रैखिकतः स्वतंत्र हैं या रैखिकतः परतंत्र? क्यों?

अगले भाग में, हम उन प्रतिबंधों का अध्ययन करेंगे जिनके अधीन रैखिक अवकल समीकरण (1) के हल का अस्तित्व है तथा यह अद्वितीय है। यहाँ हम समीकरण के हल के प्रारंभिक गुणधर्मों (गुणों) की चर्चा करेंगे।

10.3 रैखिक अवकल समीकरण के हल

आपको याद होगा कि खंड 2 की इकाई 6 में, हमने आपको प्रथम कोटि की आदि-मान समस्या (IVP) से परिचित कराया था। एक IVP में, हम एक दिए हुए अवकल समीकरण का ऐसा हल प्राप्त करने का प्रयास करते हैं, जो स्वतंत्र चर के एक ही मान पर कुछ प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। प्रथम कोटि की IVP,

> संदर्भ के अनुसार, I अंतरालों $]a, b[\ ]0, \infty[$, $]-\infty, \infty[$, इत्यादि को निरूपित कर सकता है।

$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ के लिए, जहाँ x_0 किसी अंतराल I में एक संख्या है तथा y_0 एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है, हम अंतराल I पर इस समीकरण का वह हल प्राप्त करने का प्रयास करते हैं, जिसका ग्राफ (x_0, y_0) से होकर जाता है।

एक रैखिक द्वितीय कोटि समीकरण के लिए, आदि-मान समस्या

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\ y = b(x)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$$

के हल की व्याख्या ज्यामितीय रूप में I पर परिभाषित ऐसे फलन से की जा सकती है जिसका ग्राफ बिंदु (x_0, y_0) से होकर जाता है और वक्र की प्रवणता इस बिंदु पर y_1 है।

इसी प्रकार, एक nवीं कोटि IVP के लिए, हमें किसी अंतराल I पर, समीकरण (1) का ऐसा हल ज्ञात करना होता है जो किसी बिंदु $x_0 \in \mathrm{I}$ पर प्रतिबंधों

$$y(x_0) = y_0, \, y'(x_0) = y_1, \, \ldots, \, y^{(n-1)}\,(x_0) = y_{n-1} \tag{3}$$

को संतुष्ट करे, जहाँ $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ दी हुई वास्तविक संख्याएँ हैं। समीकरण (3) में दिए गए मान **आदि प्रतिबंध** (initial conditions) हैं।

E6) अंतराल $]-\infty, \infty[$ में IVP, $y'' - y = 0, \, y(0) = 2, \, y'(0) = -1$ के हल को परिभाषित करने वाले फलन की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

यहाँ आप इस पर **ध्यान दें** कि समीकरण (1) का सदैव एक हल होना आवश्यक नहीं है। साथ ही, यदि हल का अस्तित्व है भी, तो इसका अद्वितीय होना आवश्यक नहीं है। अब हम उन प्रतिबंधों का अध्ययन करेंगे जिनके अधीन समीकरण (1) का हल, यदि इसका अस्तित्व है, तो वह अद्वितीय होगा।

10.3.1 अद्वितीय हल के अस्तित्व के प्रतिबंध

आइए, उस प्रमेय पर विचार करें जो ऐसे प्रतिबंध प्रदान करता है, जिनके पूर्ण होने पर समीकरण (1) के हल का अस्तित्व और अद्वितीयता निश्चित हो जाती है।

प्रमेय 2: nवीं कोटि की IVP

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

$$y(x_0) = y_0, \, y'(x_0) = y_1, \, \ldots, \, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

पर विचार कीजिए, जहाँ x_0 किसी अंतराल I में कोई बिंदु है तथा $y_0, y_1, \cdots, y_n$ दी हुई वास्तविक संख्याएँ हैं। यदि अंतराल I में $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ और b संतत है और अंतराल में प्रत्येक x के लिए, $a_0(x) \neq 0$ तो इस अंतराल में IVP के हल $y(x)$ का **अस्तित्व** होता है तथा यह **अद्वितीय** होता है।

—■—

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि यह प्रमेय तीन बातें बताता है :

1. आदि-मान समस्या का एक हल **है,** अर्थात् हल का **अस्तित्व** है।
2. आदि-मान समस्या का **केवल** एक हल है, अर्थात् यह हल **अद्वितीय** है।
3. **अंतराल I** में हल कम से कम n बार अवकलनीय फलन है, जहाँ गुणांक संतत हैं।

हम यहाँ इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे, क्योंकि इसकी उपपत्ति वर्तमान पाठ्यक्रम से बाहर है, परंतु हम इसे कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट अवश्य करेंगे।

इसके अतिरिक्त यदि फलन $a_0, a_1, \ldots, a_n$ अचर हों, तो इनके संगत समीकरणों के हल हम भाग 10.4 में देंगे, जब $b(x) = 0$. जब $b(x) \neq 0$ तब हलों की चर्चा हम इकाई 11, 12 और 13 में करेंगे।

आइए निम्न उदाहरणों पर विचार करें :

उदाहरण 4 : दिखाइए कि शून्य को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी अंतराल में फलन $y(x) = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$

आदि-मान समस्या

$$y'' - 4y = 12x$$

$$y(0) = 4,\ y'(0) = 1$$

का एक अद्वितीय हल है।

हल : क्योंकि $y(x) = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$

अतः $y' = 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3$ और $y'' = 12e^{2x} + 4e^{-2x}$.

अब $y'' - 4y = 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 4(3e^{2x} + e^{-2x} - 3x)$

$$= 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 12e^{2x} - 4e^{-2x} + 12x$$

$$= 12x$$

अतः, $y(x) = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है।

साथ ही, $y(0) = 3e^{2.0} + e^{-2.0} - 3.0 = 4$

$$y'(0) = 6e^{2.0} - 2e^{-2.0} - 3 = 1$$

जो यह दिखाता है कि $y(x)$ दिए हुए आदि प्रतिबंधों को भी संतुष्ट करता है।

इस प्रकार, $y(x) = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ दी हुई आदि-मान समस्या का एक हल है। साथ ही, दिया हुआ अवकल समीकरण रैखिक है तथा इसके सभी गुणांक अचर फलन हैं और इसी कारण $x = 0$ को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी अंतराल में संतत हैं। इसके अतिरिक्त, $x = 0$ को अंतर्विष्ट करने वाले किसी भी अंतराल में $a_0(x) = 1 \neq 0$. प्रमेय 2 से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि फलन y दी हुई आदि-मान समस्या का एक अद्वितीय हल है।

***

याद रखिए कि प्रमेय 2 में दोनों आवश्यकताएँ, अर्थात् $a_i, i = 0, 1, \ldots 2, \ldots, n$ और b का संतत होना तथा किसी अंतराल मान लीजिए I में प्रत्येक x के लिए, $a_0(x) \neq 0$ होना महत्वपूर्ण हैं। विशेष रूप से, यदि अंतराल के किसी x के लिए $a_0(x) = 0$. तो रैखिक आदि-मान समस्या के हल का अद्वितीय होना आवश्यक नहीं है। यह भी हो सकता है कि उसका अस्तित्व ही नहीं हो।

अब हम इस बात को एक उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 5 : अचर c के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए अंतराल $]-\infty, \infty[$ में फलन

$$y(x) = cx^2 + x + 3$$

आदि-मान समस्या

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6,$$

$$y(0) = 3,\ y'(0) = 1$$

का एक हल हो। क्या इस समस्या का एक अद्वितीय हल है?

हल : क्योंकि $y' = 2cx + 1$ और $y'' = 2c$ है, अतः

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2(2c) - 2x(2cx+1) + 2(cx^2 + x + 3)$$

$$= 2cx^2 - 4cx^2 - 2x + 2cx^2 + 2x + 6$$

$$= 6$$

साथ ही, $y(0) = c.(0)^2 + 0 + 3 = 3$

और $y'(0) = 2c.0 + 1 = 1$

इस प्रकार, c के **सभी वास्तविक मानों के लिए**, $y = cx^2 + x + 3$ दिए हुए अंतराल में दी हुई समस्या का एक हल है, जिसका तात्पर्य यह हुआ कि इस समस्या के अनेक हल हैं या फिर दूसरे शब्दों में इस समस्या का एक अद्वितीय हल नहीं है। यहां आप **देख सकते हैं** कि दिया हुआ समीकरण रैखिक है तथा इसके सभी गुणांक बहुपद होने के कारण सर्वत्र (सभी स्थानों पर) संतत है। परंतु y'' का गुणांक, अर्थात् $a_0(x) = x^2$, $x = 0$ पर शून्य हो जाता है।

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E7) क्या फलन $y = \frac{1}{4}\sin 4x$ आदि-मान समस्या

$$y'' + 16y = 0$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

का एक अद्वितीय हल है?

E8) वह बड़े से बड़ा अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें निम्न आदि-मान समस्या के हल का अस्तित्व हो :

$$(x^2 - 3x)y'' + xy' - (x+3)y = 0$$

$$y(1) = 2,\ y'(1) = 1$$

---

nवीं कोटि के व्यापक असमघात रैखिक अवकल समीकरण (1) के अद्वितीय हल के अस्तित्व के प्रतिबंधों की चर्चा करने के बाद, अब हम असमघात समीकरण (1) तथा उसके संगत समघात समीकरण के हलों के गुणधर्मों पर चर्चा करेंगे।

10.3.2 रैखिक अवकल समीकरण के हल के गुणधर्म

सर्वप्रथम, हम समघात समीकरण के हलों के गुणधर्मों की चर्चा करेंगे। nवीं कोटि के व्यापक **समघात** रैखिक अवकल समीकरण पर विचार कीजिए, जो निम्न से प्राप्त है :

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)\ y=0 \qquad (4)$$

हम इन गुणधर्मों को प्रारंभिक प्रमेयों के रूप में देंगे जो nवीं कोटि के समीकरण (4) के लिए सत्य हैं। परंतु सरलता के लिए, हम इन गुणधर्मों को $n=2$ की स्थिति, अर्थात्, द्वितीय कोटि के समघात रैखिक समीकरणों के लिए ही सिद्ध करेंगे।

हम निम्न उदाहरण लेकर प्रारंभ करते हैं :

उदाहरण 6: दिखाइए कि यदि $y_1=x^2$और $y_2=x^2\ln x$ अंतराल $]\,0,\infty\,[$ में समीकरण $x^3y'''-2xy'+4y=0$ के दो हल हैं, तो स्वेच्छ अचरों c_1 और c_2 के लिए, $y=c_1x^2+c_2x^2\ \ln x$ भी दिए हुए अंतराल पर उस समीकरण का हल होगा।

हल : यदि $y=c_1x^2+c_2x^2\ \ln x$ दिए हुए समीकरण का एक हल है, तो यह उस समीकरण को अवश्य ही संतुष्ट करेगा। आइए इसकी जाँच करें कि क्या यह सत्य है।

हमें प्राप्त हैं :

$$y'=2c_1x+2c_2x\ \ln x+c_2x^2\,.\,\frac{1}{x}=2c_1x+2c_2x\ln x+c_2x$$

$$y''=2c_1+2c_2\ln x+2c_2x\ .\ \frac{1}{x}+c_2=2c_1+2c_2\ln x+3c_2$$

$$y'''=\frac{2c_2}{x}$$

दिए हुए समीकरण में, y, y', y''' के ऊपर प्राप्त मानों को रखने पर, हम पाते हैं:

$$x^3y'''-2xy'+4y=x^3\left(\frac{2c_2}{x}\right)-2x(2c_1x+2c_2x\ \ln x+c_2x)+4c_1x^2+4c_2x^2\ \ln x$$

$$=2c_2x^2-4c_1x^2-4c_2x^2\ \ln x-2c_2x^2+4c_1x^2+4c_2x^2\ \ln x$$

$$=0$$

इस प्रकार, $y=c_1x^2+c_2x^2\ \ln x$ दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है तथा इसी कारण दिए हुए अंतराल पर उस समीकरण का एक हल है।

***

उदाहरण 6 में दर्शाया गया परिणाम व्यापक रूप में समीकरण (4) के लिए सत्य है तथा यह निम्न रूप में प्राप्त है :

प्रमेय 3 : यदि $y_1, y_2, \ldots, y_n$ अंतराल I में अवकल समीकरण (4) के हल हैं, तो उनका रैखिक संयोजन (linear combination) $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ भी I पर समीकरण (4) का एक हल होता है, जहाँ c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ स्वेच्छ अचर हैं।

उपपत्ति : आइए इस प्रमेय को $n = 2$ के लिए, अर्थात् द्वितीय कोटि समीकरण

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{5}$$

के लिए सिद्ध करें, जिसके दो हल y_1 और y_2 हैं।

क्योंकि y_1 और y_2 समीकरण (5) के दो हल हैं इसलिए

$$a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0 \tag{6}$$

तथा

$$a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0. \tag{7}$$

हम जानते हैं कि

$$(c_1y_1 + c_2y_2)' = (c_1y_1)' + (c_2y_2)'$$
$$= c_1y_1' + c_2y_2'$$

इसी प्रकार, $(c_1y_1 + c_2y_2)'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$.

यदि हम $y = c_1y_1 + c_2y_2$ परिभाषित करें, तो

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$$

$$= a_0(x)\,[c_1y_1'' + c_2y_2''] + a_1(x)[c_1y_1' + c_2y_2'] + a_2(x)[c_1y_1 + c_2y_2]$$

$$= c_1[a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1] + c_2[a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2]$$

$$= c_1.0 + c_2.0 \qquad \text{[समीकरणों (6) और (7) के प्रयोग से]}$$

$$= 0$$

अर्थात्, y भी समीकरण (5) को संतुष्ट करता है।

अतः, यदि y_1 और y_2 समीकरण (5) के हल हैं, तो $y = c_1y_1 + c_2y_2$ भी समीकरण (5) का एक हल होगा।

– ■ –

प्रमेय 3 को **अध्यारोपण नियम** (superposition principle) कहा जाता है।

प्रमेय 3 की एक विशेष स्थिति तब प्रकट होती है जब या तो c_1 या c_2 शून्य हो। हम इस परिणाम को निम्न उपप्रमेय द्वारा दे रहे हैं :

उपप्रमेय 2: किसी अंतराल I पर समीकरण (4) के एक हल $y_1(x)$ का अचर गुणज $y = c_1y_1(x)$ भी, अचर c_1 के विभिन्न मानों के लिए, I पर उसका हल होता है।

उपप्रमेय 2 की उपपत्ति अति सरल है। हम इसे स्वयं आपके करने के लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E9)। उदाहरण के रूप में, फलन $y = x^2$ पर विचार कीजिए। यह अंतराल $]0, \infty[$ में समघात रैखिक समीकरण $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ का एक हल है। अतः, $y = cx^2$ भी c के विभिन्न मानों के लिए, दिए हुए समीकरण का एक हल होना चाहिए। आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि दिए हुए अंतराल पर, $y = 3x^2,\ y = ex^2,\ y = 0, \ldots$ सभी समीकरण के हल हैं।

आइए प्रमेय 3 को स्पष्ट करने के लिए एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 7: दिखाइए कि अवकल समीकरण $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ के लिए, अंतराल $]-\infty, \infty[$ में फलनों $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}$ और $y_3 = e^{3x}$ के लिए प्रमेय 3 सत्य है।

हल : आप इस बात की सरलता से जाँच कर सकते हैं कि सभी फलन e^x, e^{2x} और e^{3x} दिए हुए समघात समीकरण को $]-\infty, \infty[$ में संतुष्ट करते हैं। प्रमेय 3 द्वारा, फलन $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ को भी, स्वेच्छ अचरों, c_1, c_2 और c_3 के लिए, दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करना चाहिए।

अब $\quad y' = c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x}$

$$y'' = c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x}$$

$$y''' = c_1e^x + 8c_2e^{2x} + 27c_3e^{3x}$$

दिए हुए समीकरण में, y, y', y'' और y''' के ऊपर प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\begin{aligned}
&y''' - 6y'' + 11y' - 6y \\
&\quad = c_1e^x + 8c_2e^{2x} + 27c_3e^{3x} - 6(c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x}) \\
&\quad + 11(c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x}) - 6(c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ भी $]-\infty, \infty[$ में दिए हुए समीकरण का एक हल है। अतः, दी हुई समस्या के लिए प्रमेय 3 सत्य है।

***

क्या आपने ध्यान दिया कि **एक समघात रैखिक अवकल समीकरण का सदैव एक तुच्छ हल** $y = 0$ होता है? यदि नहीं, तो आप इसकी जाँच उदाहरण 6 और 7 के लिए कर सकते हैं।

प्रमेय 3 और उपप्रमेय 2 वे गुणधर्म निरूपित करते हैं, जो व्यापक रूप में, अरैखिक अवकल समीकरणों में नहीं होते। यह बात आपको निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने के बाद अधिक स्पष्ट हो जाएगी।

E9) समीकरण (5) के लिए, उपप्रमेय 1 को सिद्ध कीजिए।

E10) जाँच कीजिए कि $y = 1/x$ अरैखिक अवकल समीकरण $y'' = 2y^3$ का अंतराल $]\,0, \infty\,[$ में एक हल है, परंतु इसका एक अचर गुणज $y = c/x$ दो स्थितियों $c = 0$, और $c = \pm 1$ को छोड़कर इस समीकरण का हल नहीं है।

E11) जाँच कीजिए कि फलन $y_1 = 1$ और $y_2 = \ln x$ अंतराल $]\,0, \infty\,[$ पर अरैखिक अवकल समीकरण $y'' + (y')^2 = 0$ के हल हैं। साथ ही, जाँच कीजिए कि स्वेच्छ अचरों c_1 और c_2 के लिए, $c_1 y_1 + c_2 y_2$ इस समीकरण का एक हल है या नहीं।

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, ऐसे फलन होते हैं जो किसी अंतराल पर रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं और फिर भी उनका रांसकियन शून्य होता है (E3) को देखिए)। अब हम आपको एक ऐसा प्रमेय बताएंगे जो प्रमेय 1 का एक प्रबल विवरण (version) है तथा जो यह दृढ़ता से बताता है कि यदि संबंधित फलन किसी समघात रैखिक समीकरण के हल हों तो, इस प्रकार की स्थिति उत्पन्न नहीं होती।

आप यह देख सकते हैं कि उदाहरण 7 में, फलन $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{3x}$ रैखिक समघात समीकरण $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ के हल हैं तथा ये $]-\infty, \infty[$ पर रैखिकतः स्वतंत्र हैं। किसी शून्येतर (non-zero) c_1, c_2 और c_3 के लिए, अंतराल $-\infty < x < \infty$ में $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0$ केवल तभी है जब $c_1 = 0, c_2 = 0$ और $c_3 = 0$. साथ ही, इन फलनों के लिए $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$, क्योंकि हमें प्राप्त है :

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$= e^x(18e^{5x} - 12e^{5x}) - e^{2x}(9e^{4x} - 3e^{4x})$$

$$+ e^{3x}(4e^{3x} - 2e^{3x})$$

$$= 6e^{6x} - 6e^{6x} + 2e^{6x} = 2e^{6x} \neq 0,\ -\infty < x < \infty \text{ के लिए।}$$

ऊपर प्राप्त परिणाम व्यापक रूप में भी सत्य है। अब हम दिखाएँगे कि यदि दिए गए फलन रैखिक समघात समीकरण के हल हैं, तो ऐसे फलनों/हलों के समुच्चय के रांसकियन का अंतराल I पर शून्य नहीं होना I पर इन फलनों की रैखिक स्वतंत्रता के लिए **आवश्यक** और **पर्याप्त** दोनों है।

आइए निम्नलिखित प्रमेय पर विचार करें :

प्रमेय 4 : मान लीजिए कि $y_1, y_2, \ldots, y_n$ अंतराल I पर nवीं कोटि समघात रैखिक अवकल समीकरण (4) के हल हैं। तब, हलों का यह समुच्चय I पर रैखिकतः स्वतंत्र होता है, यदि **और केवल यदि** इस अंतराल में प्रत्येक x के लिए, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$

उपपत्ति : हम प्रमेय 4 को $n = 2$ की स्थिति में समीकरण (5) के लिए सिद्ध करेंगे।

इस उपपत्ति का पहला भाग, अर्थात् यदि I में प्रत्येक x के लिए $W(y_1, y_2) \neq 0$ है, तो y_1 और y_2 रैखिकतः स्वतंत्र हैं, प्रमेय 1 से तुरंत प्राप्त हो जाता है। अब हमें यह दिखाने की आवश्यकता है कि यदि समीकरण (5) के दो हल y_1 और y_2 अंतराल I पर रैखिकतः स्वतंत्र हैं, तो I में प्रत्येक x के लिए $W(y_1, y_2) \neq 0$ है। हम इसे अंतर्विरोध द्वारा सिद्ध करेंगे।

मान लीजिए कि y_1 और y_2 रैखिकतः स्वतंत्र हैं तथा I में कोई अचर x_0 है, जिसके लिए $W\,(y_1, y_2)\,(x_0) = 0$.

क्योंकि $W\,(y_1, y_2)\,(x_0) = 0$. इसलिए समीकरण-निकाय

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \tag{8}$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0$$

का c_1 और c_2 के लिए एक अतुच्छ हल होगा (इकाई के अंत में परिशेषिका देखिए)। c_1 और c_2 के इन मानों का प्रयोग करते हुए, आइए $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ परिभाषित करें। तब, y भी समीकरण (5) का एक हल है तथा समीकरण (8) द्वारा y आदि प्रतिबंधों

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0 \tag{9}$$

को भी संतुष्ट करता है।

परंतु हम यह भी जानते हैं कि I में सर्वसम रूप से शून्य फलन $f(x)=0$, सभी x के लिए अवकल समीकरण तथा आदि प्रतिबंधों (9) दोनों को संतुष्ट करता है। इस प्रकार, प्रमेय 2 की अद्वितीयता द्वारा, f ही एक मात्र हल है, अर्थात् $y = f$.

दूसरे शब्दों में, अचरों c_1 और c_2 के लिए (दोनों शून्य नहीं), I में प्रत्येक x के लिए, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$. यह इस कल्पना का अंतर्विरोध करता है कि y_1 और y_2 उस अंतराल पर रैखिकतः स्वतंत्र हैं। इससे प्रमेय का दूसरा भाग सिद्ध हो जाता है।

– ■ –

ऊपर की गयी चर्चा से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि जब किसी अंतराल I में y_1 और y_2 समीकरण (5) के दो हल हों, तब उस अंतराल में y_1 और y_2 का रांसकियन या तो सर्वसम रूप से शून्य होगा या कभी शून्य नहीं होगा।

शून्येतर रांसकियन वाले समीकरण (5) के हलों y_1 और y_2 के लिए यह कहा जाता है कि ये समीकरण (5) के हलों का एक मूलभूत समुच्चय (fundamental set of solutions) बनाते हैं। अधिक व्यापक रूप में, हम निम्न परिभाषा देते हैं :

परिभाषा : किसी अंतराल I पर n वीं कोटि समघात रैखिक अवकल समीकरण (4) के n रैखिकतः स्वतंत्र हलों $y_1, y_2, \ldots, y_n$ के एक समुच्चय को I पर उस अवकल समीकरण के **हलों का एक मूलभूत समुच्चय** कहा जाता है।

उदाहरण 7 में, फलन y_1, y_2 और y_3 अंतराल $]-\infty, \infty[$ में दिए हुए समीकरण के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं, क्योंकि $-\infty < x < \infty$ के लिए

$W(y_1, y_2, y_3) = 2e^{6x} \neq 0$. इसी प्रकार, उदाहरण 6 में, फलन x^2 और $x^2 \ln x$ दिए हुए समीकरण के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं, क्योंकि $]0, \infty[$ में $W(x^2, x^2 \ln x) = x^3 \neq 0$.

एक अन्य उदाहरण के रूप में, निम्न समीकरण पर विचार कीजिए :

$$y'' - 4y = 0, \ -\infty < x < \infty \tag{10}$$

आप सरलता से, जाँच कर सकते हैं कि $y_1(x) = e^{2x}$ और $y_2(x) = e^{-2x}$ दोनों ही $]-\infty, \infty[$ में समीकरण (10) के हल हैं तथा इस प्रकार रैखिक संयोजन

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \tag{11}$$

भी, स्वेच्छ c_1 और c_2 के लिए, उस अंतराल में समीकरण (10) का एक हल है। साथ ही, क्योंकि $W(y_1, y_2)(x) = -4 \neq 0$, इसलिए x के प्रत्येक मान के लिए, y_1 और y_2 समीकरण (10) के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। आगे, इस बात की भी जाँच की जा सकती है कि इस अंतराल में समीकरण (10) का एक अन्य हल $y = 4\cosh 2x + 3e^{2x}$ है।

हमें $y' = 8\sinh 2x + 6e^{2x}$ और $y'' = 16\cosh 2x + 12e^{2x}$ प्राप्त हैं तथा इस प्रकार $y'' - 4y = 16\cosh 2x + 12e^{2x} - 4(4\cosh 2x + 3e^{2x}) = 0$.

यहाँ इस ओर ध्यान देना रोचक है कि समीकरण (10) के हल $y = 4\cosh 2x + 3e^{2x}$ को हल (11) में c_1 और c_2 के उपयुक्त मान लेकर प्राप्त किया जा सकता है।

यहाँ $c_1 = 5$ और $c_2 = 2$, के लिए, हम समीकरण (11) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\begin{aligned} y &= 5e^{2x} + 2e^{-2x} \\ &= 2e^{2x} + 2e^{-2x} + 3e^{2x} \\ &= 4\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) + 3e^{2x} \\ &= 4\cosh 2x + 3e^{2x}. \end{aligned}$$

इससे हमें वह गुणधर्म प्राप्त होता है जो समीकरण (4) के किसी भी हल को उसके हलों के मूलभूत समुच्चय से संबंधित करता है।

प्रमेय 5: मान लीजिए कि $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ किसी अंतराल I पर nवीं कोटि समघात रैखिक अवकल समीकरण (4) के हलों का मूलभूत समुच्चय है। तब, समीकरण (4) के किसी भी हल $Y(x)$ के लिए ऐसे अचर $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ज्ञात किए जा सकते हैं जिनके लिए

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

उपपत्ति : पहले की तरह, आइए इसे $n=2$ के लिए सिद्ध करें। $n=2$ की स्थिति के संगत समीकरण (5) अर्थात् , $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ पर विचार कीजिए।

मान लीजिए कि अंतराल I पर, y_1 और y_2 इस समीकरण के हलों का मूलभूत समुच्चय बनाते हैं।

मान लीजिए कि $Y(x)$ अंतराल I पर इस समीकरण का कोई अन्य हल है। हलों का मूलभूत समुच्चय होने के कारण, y_1 और y_2 रैखिकतः स्वतंत्र हैं तथा प्रमेय 4 के अनुसार, I मे प्रत्येक x के लिए $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$. मान लीजिए कि इस अंतराल में x_0 कोई ऐसा बिंदु है जिसके लिए $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ तथा $Y(x_0)$ और $Y'(x_0)$ के निम्न मान प्राप्त हैं :

$$Y(x_0)=k_1, Y'(x_0)=k_2$$

अब असमघात समीकरणों के निम्न समीकरण-निकाय पर विचार कीजिए :

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=k_1$$

$$c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=k_2,$$

यहाँ अचरों c_1 और c_2 को अद्वितीय रूप से तभी निर्धारित किया जा सकता है, जब कि गुणांक आव्यूह (coefficient matrix) का सारणिक शून्येतर हो (इकाई के अंत में परिशेषिका देखिए)। अर्थात्,

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$ हो, जो सत्य है, क्योंकि

यह सारणिक रांसकियन $W(y_1, y_2)(x_0)$ है, जिसे शून्येतर मान लिया गया है। इस प्रकार, यदि हम फलन $F(x)$ को

$$F(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

द्वारा परिभाषित करें, तो हम पाते हैं कि :

i) $F(x)$ अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है, क्योंकि यह दो ज्ञात हलों y_1 और y_2 का अध्यारोपण है।

ii) $F(x)$ आदि प्रतिबंधों

$$F(x_0)=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=k_1$$

$$F'(x_0)=c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=k_2$$ को संतुष्ट करता है।

iii) हमारी कल्पना के अनुसार, $Y(x)$ भी उसी रैखिक समीकरण तथा उन्हीं आदि प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है।

क्योंकि रैखिक आदि-मान समस्या का हल अद्वितीय होता है (प्रमेय 2 को देखिए), इसलिए हम $Y(x)=F(x)$, अथवा

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

प्राप्त करते हैं, जिससे उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

– ■ –

इस प्रकार, हम प्रमेय 5 से यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि समीकरण (5) का कोई भी हल उस समीकरण के हलों के मूलभूत समुच्चय में फलनों के रैखिक संयोजन से प्राप्त हो जाता है। द्वितीय कोटि के समीकरण (5) का हल $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, जिसमें दो स्वेच्छ अचर c_1 और c_2 आविष्ट हैं, इसका व्यापक हल या पूर्ण समाकल कहलाता है। समीकरण (5) के रूप के द्वितीय कोटि समीकरण का व्यापक हल या फिर सभी हल ज्ञात करने के लिए हमें दिए हुए समीकरण के केवल दो हल जिनका रांसकियन शून्येतर को, ज्ञात करने की आवश्यकता होती हैं।

अब हम निम्न परिभाषा देते हैं :

परिभाषा: मान लीजिए कि $y_1, y_2, \ldots, y_n$ अंतराल I पर समघात रैखिक nवीं कोटि के अवकल समीकरण (4) के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। तब, $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$, जहाँ c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ स्वेच्छ अचर हैं, I पर उस समीकरण का **व्यापक हल** अथवा **पूर्ण समाकल** परिभाषित करता है।

उदाहरण के लिए, द्वितीय कोटि समीकरण $y'' - y' - 12y = 0$ के $]-\infty, \infty[$ में दो हल $y_1 = e^{4x}$ और $y_2 = e^{-3x}$ हैं।

क्योंकि x के प्रत्येक मान के लिए,

$$W(e^{4x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{4x} & e^{-3x} \\ 4e^{4x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = (-3e^{x} - 4e^{x}) = -7e^{x} \neq 0,$$

इसलिए y_1 और y_2 अंतराल $]-\infty, \infty[$ में हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। इस अंतराल पर अवकल समीकरण का व्यापक हल $y = c_1\, e^{4x} + c_2\, e^{-3x}$ है।

आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 8: दिखाइए कि $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = x$, और $y_4(x) = 1$ अंतराल $-\infty < x < \infty$ में समीकरण $y^{IV} + y'' = 0$ के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं।

साथ ही समीकरण का व्यापक हल भी लिखिए।

हल : $y_1(x) = \sin x$ लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_1'(x) = \cos x,\ y_1''(x) = -\sin x,\ y_1'''(x) = -\cos x,\ y_1^{\text{IV}}(x) = \sin x.$$

इन मानों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^{IV} + y'' = \sin x - \sin x = 0$$

इस प्रकार, $y_1(x)$ दिए हुए समीकरण का एक हल है।

इसी प्रकार, आप जाँच कर सकते हैं कि $y_2(x)$, $y_3(x)$ और $y_4(x)$ भी दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं तथा इसीलिए उसके हल हैं।

हलों $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ और $y_4(x)$ की रैखिक स्वतंत्रता की जाँच के लिए, निम्न पर विचार कीजिए :

$$W(\sin x, \cos x, x, 1) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & x & 1 \\ \cos x & -\sin x & 1 & 0 \\ -\sin x & -\cos x & 0 & 0 \\ -\cos x & \sin x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sin x.0 - \cos x.0 + x.0 - 1(-\sin^2 x - \cos^2 x)$$
$$= 1 \neq 0 \ \forall x \in]-\infty, \infty[$$

इस प्रकार, $]-\infty, \infty[$ पर y_1, y_2, y_3 और y_4 हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। इस अंतराल पर, अवकल समीकरण का व्यापक हल निम्न होगा :

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x + c_4 .$$

***

उदाहरण 9 : दिखाइए कि $y_1 = e^{3x}$ और $y_2 = e^{-3x}$ अंतराल $-\infty < x < \infty$ में समीकरण $y'' - 9y = 0$ के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। साथ ही, दिए हुए समीकरण के हल $y = 4\sinh 3x - 5e^{-3x}$ के लिए प्रमेय 5 की जाँच कीजिए।

हल : हमें प्राप्त हैं : $y_1' = 3e^{3x}$, $y_1'' = 9e^{3x}$

$\therefore \quad y_1'' - 9y_1 = 9e^{3x} - 9e^{3x} = 0.$

इस प्रकार y_1, दिए हुए समीकरण का एक हल है। इसी प्रकार,

$$y_2'' - 9y_2 = 9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0,$$

साथ ही, $W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$

अतः $]\infty, \infty[$ में, x के प्रत्येक मान के लिए, y_1 और y_2 हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। दिए हुए समीकरण का इस अंतराल में व्यापक हल $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ है, जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं।

अब, $y = 4\sinh 3x - 5e^{-3x}$ पर विचार कीजिए।

$y'' - 9y = 36\sinh 3x - 45e^{-3x} - 9(4\sinh 3x - 5e^{-3x}) = 0$

इस प्रकार y भी दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है। व्यापक हल में, $c_1 = 2$ और $c_2 = -7$ लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y = 2e^{3x} - 7e^{-3x}$$
$$= 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x}$$

$$= 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x} = 4\sinh 3x - 5e^{-3x}$$

इस प्रकार, समीकरण के हल $y = 4\sinh 3x - 5e^{-3x}$ के लिए प्रमेय 5 सत्य सिद्ध होता है।

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E12) दिखाइए कि $y_1(x) = x^{1/2}$ और $y_2(x) = x^{-1}$ समीकरण $2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ x > 0$ के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। साथ ही, इस समीकरण का व्यापक हल भी लिखिए।

E13) दिखाइए कि फलन $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ और $y_3(x) = e^{3x}$ समीकरण $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0,\ -\infty < x < \infty$ के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। साथ ही, इस समीकरण का व्यापक हल भी लिखिए।

E14) दिखाइए कि $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ किसी भी अंतराल पर $y'' + y = 0$ का व्यापक हल है। एक विशेष हल ज्ञात कीजिए, जिसके लिए $y(0) = 2$ और $y'(0) = 3$.

अभी तक, हमने समघात रैखिक समीकरणों के हलों से संबंधित गुणधर्मों की चर्चा की है। अब हम अपना ध्यान समीकरण **(1) के रूप के असमघात रैखिक समीकरणों** की ओर आकर्षित करते हैं।

निम्न असमघात समीकरण पर विचार कीजिए :

$$y'' - 9y = 3x^2 \qquad (12)$$

फलन $y_p(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}$ असमघात समीकरण (12) को संतुष्ट करता है, क्योंकि

हमें प्राप्त है : $y_p' = -\frac{2x}{3}$, $y_p'' = -\frac{2}{3}$ तथा

$$y_p'' - 9y_p = -\frac{2}{3} - 9\left(-\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right) = -\frac{2}{3} + 3x^2 + \frac{2}{3} = 3x^2.$$

इस प्रकार, y_p असमघात समीकरण (12) का एक हल है।

साथ ही, उदाहरण 9 से, हम जानते हैं कि संगत समघात समीकरण $y'' - 9y = 0$ का व्यापक हल $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ है, जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

अब आप इस बात की जाँच कर सकते हैं कि $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} - \frac{x^2}{3} - \frac{2}{7}$, जो असमघात समीकरण के हल तथा इसके संगत समघात समीकरण के हल का योग है, समीकरण (12) का एक हल है। हमें प्राप्त होता है :

$$y'' - 9y = 9c_1e^{3x} + 9c_2e^{-3x} - \frac{2}{3} - 9\left(c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} - \frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right)$$

$$= 3x^2 \cdot$$

इस प्रकार, $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + y_p(x)$ समीकरण (12) को संतुष्ट करता है।

यह उदाहरण हमें निम्न प्रमेय की ओर ले जाता है, जो nवीं कोटि के असमघात रैखिक समीकरण (1) के व्यापक हल को परिभाषित करता है।

प्रमेय 6: यदि $y_p(x)$ किसी अंतराल I पर असमघात रैखिक अवकल समीकरण (1) का कोई हल है तथा इसी अंतराल पर यदि $y_1, y_2, \ldots, y_n$ संगत समघात रैखिक अवकल समीकरण (4) के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं, तो

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

भी अचर $c_1, c_2, \ldots, c_n$ के लिए अंतराल I पर असमघात समीकरण (1) का एक हल होता है।

***

इस प्रमेय की उपपत्ति सरल है तथा इसे करने के लिए हम स्वयं आप पर छोड़ रहे हैं।

E15) द्वितीय कोटि समीकरण, अर्थात् $n = 2$ की स्थिति के लिए, प्रमेय 6 को सिद्ध कीजिए।

ऊपर की गई चर्चा व उदाहरण 9 को ध्यान में रख कर अब हम कह सकते हैं कि

$$y = 4\sinh 3x - 5e^{-3x} - \frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}$$

समीकरण (12) का एक अन्य हल है। उदाहरण 9 की विधि को दोहराते हुए इस हल को समीकरण (12) के हल $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + y_p(x)$, जहाँ $y_p(x) = \frac{-x^2}{3} - \frac{2}{27}$ से अचरों c_1 और c_2 के उपयुक्त मान लेकर प्राप्त किया जा सकता है। इस स्थिति में, $c_1 = 2$ और $c_2 = -7$ लेने पर हमारा उद्देश्य पूरा हो जाता है।

इस प्रकार, हम असमघात अवकल समीकरणों के लिए, प्रमेय 5 के निम्न तुल्य प्रमेय पर विचार कर सकते हैं :

प्रमेय 7 : मान लीजिए कि y_p किसी अंतराल I में nवीं कोटि के असमघात रैखिक अवकल समीकरण (1) का एक दिया हुआ हल है तथा $y_1, y_2, \ldots, y_n$ इसी अंतराल में संगत समघात समीकरण (4) के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। तब, I में समीकरण (1) के किसी हल $Y(x)$ के लिए अचरों $c_1, c_2, \ldots, c_n$ को ज्ञात किया जा सकता है ताकि

$$Y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x).$$

उपपत्ति: हम इसे $n=2$ की स्थिति के लिए सिद्ध करते हैं। मान लीजिए कि Y और y_p द्वितीय कोटि असमघात समीकरण

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{13}$$

के हल हैं तथा y_1 और y_2 समीकरण (13) के संगत समघात समीकरण के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। मान लीजिए कि $u(x)$ एक फलन है और $u(x) = Y(x) - y_p(x)$. तब,

$$a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u$$

$$= a_2(x)[Y'' - y_p''] + a_1(x)[Y' - y_p'] + a_0(x)[Y - y_p]$$

$$= a_2(x)Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y - [a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p]$$

$$= b(x) - b(x) = 0$$

अतः, $u(x)$ समीकरण (13) के संगत समघात समीकरण का एक हल है। प्रमेय 5 से, हम लिख सकते हैं :

$u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं।

$$\therefore\ Y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

या, $\qquad Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$

जो उपपत्ति को पूरा कर देता है।

– ■ –

ऊपर की गयी चर्चा के आधार पर, अब हम असमघात अवकल समीकरण (1) के व्यापक हल की निम्न परिभाषा दे सकते हैं :

परिभाषा : मान लीजिए कि $y_p(x)$ किसी अंतराल I पर nवीं कोटि के असमघात रैखिक अवकल समीकरण (1) का एक दिया हुआ हल है तथा मान लीजिए कि

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

संगत समघात समीकरण (4) का व्यापक हल है। तब, इसी अंतराल पर असमघात समीकरण (1) के **व्यापक हल** को निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

$$= \boldsymbol{y_c(x) + y_p(x)}.$$

ऊपर प्राप्त परिभाषा में, n स्वेच्छ अचरों को आविष्ट करने वाला रैखिक संयोजन

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

समीकरण (4) का व्यापक हल है तथा यह समीकरण (1) का **पूरक फलन** (complementary function) कहलाता है। समीकरण (1) का हल $y_p(x)$ जो स्वेच्छ प्राचलों (parameters) से मुक्त हैं, समीकरण (1) का एक **विशेष समाकल / हल** (particular integral/solution) कहलाता है।

इस प्रकार, असमघात समीकरण (1) का **पूर्ण हल / व्यापक हल y निम्न द्वारा प्राप्त है :**

y = पूरक फलन + कोई एक विशेष समाकल।

उदाहरण के लिए फलन, $y_p = x^3 - x$ अवकल समीकरण

$$x^2y'' + 2xy' - 8y = 4x^3 + 6x$$ का एक विशेष हल है,

क्योंकि $y_p' = 3x^2 - 1,\ y_p'' = 6x$ तथा

$$x^2y_p'' + 2xy_p' - 8y_p = x^2(6x) + 2x(3x^2 - 1) - 8(x^3 - x)$$

$$= 4x^3 + 6x.$$

इसी प्रकार, आप जाँच कर सकते हैं कि फलन

$$y_p = \frac{-11}{12} - \frac{1}{2}x$$

असमघात अवकल समीकरण $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x,\ -\infty < x < \infty$ का एक विशेष हल है।

इसके अतिरिक्त, E13) से आप यह जानते हैं कि अंतराल $]-\infty, \infty[$ में ऊपर दिए समीकरण के संगत समघात समीकरण का व्यापक हल है :

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}.$$

अतः, अंतराल $]-\infty, \infty[$ में दिए हुए असमघात समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x.$$

ऊपर की गयी चर्चा के बाद, एक स्वाभाविक प्रश्न जो आपके मन में उठ सकता है वह यह कि – समीकरण (1) का पूरक फलन तथा विशेष समाकल किस प्रकार ज्ञात किया जाए?

अगले भाग में, हम आपको अचर गुणांकों वाले रैखिक समीकरण के पूरक फलन $y_c(x)$ को ज्ञात करने की विधियों के बारे में बताएँगे तथा आगे आने वाली इकाइयों में विशेष हल ज्ञात करने की विभिन्न विधियों पर चर्चा करेंगे।

10.4 अचर गुणांकों वाले समघात रैखिक अवकल समीकरण

ऑयलर (1707-1783)

क्योंकि पूरक फलन की बात समघात समीकरण के हल के संदर्भ में लागू होती है, इसलिए हम अपनी चर्चा द्वितीय कोटि रैखिक समीकरण

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0,\ -\infty<x<\infty, \tag{14}$$

से प्रारंभ करते हैं, जहाँ गुणांक a, b और c वास्तविक अचर हैं।

समीकरण (14) को हल करने की विधि वर्ष 1739 में लियोनार्ड ऑयलर (1707-1783) ने प्रस्तुत की थी जो बेसल स्विट्जरलैंण्ड में पैदा हुए थे और जो अठारहवीं शताब्दी के एक सुप्रसिद्ध गणितज्ञ थे।

समीकरण (14) पर चर्चा करने से पहले, आइए एक सरल उदाहरण को देखें।

समीकरण $y''-y=0$ (15)

पर विचार कीजिए, जो समीकरण (14) के रूप का है जबकि $a=1, b=0$ और $c=-1$. यदि शब्दों में कहें तो समीकरण (15) में हमें ऐसे गुणधर्म वाले फलन y को ज्ञात करना है जिसका द्वितीय अवकलज स्वयं फलन के बराबर हो, अर्थात् $y''=y$, आप कैलकुलस के अपने ज्ञान से, इस गुणधर्म वाले कम से कम एक चिर-परिचित फलन, अर्थात् $y_1(x)=e^x$ के बारे में सोच सकते हैं, जो चरघातांकी फलन कहलाता है। आपके दिमाग में आने वाला दूसरा फलन $y_2(x)=e^{-x}$ हो सकता है। साथ ही, आप कह सकते हैं कि इन हलों के गुणज भी हल हैं। उदाहरण के लिए फलन $4e^x$ और $7e^{-x}$ भी समीकरण (15) को संतुष्ट करते हैं। इसी प्रकार, फलन $c_1y_1(x)=c_1e^x$ और $c_2y_2(x)=c_2e^{-x}$ अचरों c_1 और c_2 के सभी मानों के लिए, समीकरण (15) को संतुष्ट करते हैं। साथ ही, इनका रैखिक संयोजन, अर्थात्, $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$ भी समीकरण (15) का एक हल है।

आइए, अब वास्तविक स्वेच्छ अचर गुणांकों वाले अपने व्यापक द्वितीय कोटि के समीकरण (14) पर वापस से चर्चा करें। समीकरण (15) के अनुभव के आधार पर, हम कल्पना करते हैं कि $y=e^{mx}$ समीकरण (14) का एक हल है जहाँ m एक संख्या है। y और उसके अवकलजों के मानों को समीकरण (14) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(am^2+bm+c)e^{mx}=0 \tag{16}$$

क्योंकि x के वास्तविक मानों के लिए $e^{mx}\neq 0$, इसलिए समीकरण (16) संतुष्ट हो जाता है, यदि

$$am^2+bm+c=0 \tag{17}$$

समीकरण (17) अवकल समीकरण (14) का संगत **सहायक समीकरण** (auxillary equation) या **अभिलक्षणिक समीकरण** (characteristic equation) कहलाता है।

मान लीजिए कि m_1 और m_2 सहायक समीकरण (17) के दो मूल हैं। तब, निम्न तीन संभावनाएँ उत्पन्न होती हैं :

I) सहायक समीकरण के मूल **वास्तविक** और **भिन्न** हों।

II) सहायक समीकरण के मूल **वास्तविक** तो हो पंरतु **कुछ मूल समान हों।**

III) सहायक समीकरण के **सम्मिश्र मूल** (complex roots) हों।

अब हम इन तीनों संभावनाओं के लिए, एक-एक करके समीकरण (17) का हल ज्ञात करेंगे।

स्थिति I : सहायक समीकरण के वास्तविक और भिन्न मूल हैं :

मान लीजिए कि सहायक समीकरण (14) के मूल m_1 और m_2 वास्तविक और भिन्न हैं।

क्योंकि m_1 समीकरण (17) का एक मूल है, इसलिए अंतराल $]-\infty, \infty[$ पर $y_1 = e^{m_1 x}$ समीकरण (14) का एक हल है। इसी प्रकार, $y_2 = e^{m_2 x}$ समीकरण (14) का एक हल है। साथ ही, इस अंतराल पर $e^{m_1 x}$ और $e^{m_2 x}$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं, क्योंकि

$$W(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix}$$

$$= (m_2 - m_1)\, e^{(m_1+m_2)x} \neq 0, \quad m_1 \neq m_2 \text{ के लिए}$$

इस प्रकार, हल y_1 और y_2 अंतराल $]-\infty, \infty[$ पर समीकरण (14) का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं तथा इसके व्यापक हल को $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

n भिन्न और वास्तविक मूल $m_1, m_2, \ldots, m_n$ वाले nवीं कोटि के समीकरण का व्यापक हल

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \tag{18}$$

द्वारा प्राप्त हो जाता है, जहाँ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ स्वेच्छ अचर हैं।

अब हम विभिन्न कोटियों के अवकल समीकरणों के लिए इस स्थिति को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 10 : समीकरण $2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} - 12y = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण का सहायक समीकरण है :

$$2m^2 + 5m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2m-3)(m+4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 3/2, -4$$

ये मूल वास्तविक और भिन्न हैं।

अतः, दिए हुए अवकल समीकरण का पूर्ण हल है:

$y = c_1 e^{(3/2)x} + c_2 e^{-4x}$, जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

***

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 11 : समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - a^2 y = 0$ लीजिए, जहाँ a एक शून्येतर अचर हैं। दिखाइए कि $y = A\cosh ax + B\sinh ax$ दिए हुए समीकरण का पूर्ण हल है।

हल : दिए हुए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^2 - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-a)\,(m+a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = a, -a.$$

क्योंकि मूल वास्तविक और भिन्न हैं, इसलिए दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है:

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}.$$

अतिपरवलयिक फलनों (hyperbolic functions) की परिभाषा से हम जानते हैं कि

$$\cosh ax = \frac{1}{2}\,(e^{ax} + e^{-ax}) \tag{19}$$

और $$\sinh ax = \frac{1}{2}\,(e^{ax} - e^{-ax}) \tag{20}$$

संबंधों (19) और (20) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$e^{ax} = \cosh ax + \sinh ax$$

संबंध (19) में से (20) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$e^{-ax} = \cosh ax - \sinh ax$$

e^{ax} और e^{-ax} के इन व्यंजकों का प्रयोग करने पर, दिए हुए अवकल समीकरण के व्यापक हल को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$y = c_1(\cosh ax + \sinh ax) + c_2(\cosh ax - \sinh ax)$$

$$\Rightarrow \quad y = (c_1 + c_2)\cosh ax + (c_1 - c_2)\sinh ax$$

$$\Rightarrow \quad y = A\cosh ax + B\sinh ax,$$

जहाँ $A = c_1 + c_2$ और $B = c_1 - c_2$ दो स्वेच्छ अचर हैं।

***

आइए अब आदि-मान समस्याओं पर विचार करें।

उदाहरण 12 : समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$ को इन प्रतिबंधों के साथ हल कीजिए कि

जब $t=0$, तब $x=0$ और $\frac{dx}{dt}=3$ है।

हल : दिए हुए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^2-4=0$$

$$\Rightarrow \quad m=2,-2$$

अतः, अवकल समीकरण का व्यापक हल है :

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}.$$

अब, हम $t=0$ पर दिए हुए प्रतिबंधों का अनुप्रयोग करते हैं। हमें प्राप्त है :

$$\frac{dx}{dt}=2c_1e^{2t}-2c_2e^{-2t}$$

प्रतिबंध $x=0$ जब $t=0$ हमें

$$0=c_1+c_2$$

देता है तथा प्रतिबंध $\frac{dx}{dt}=3$ जहाँ $t=0$ हमें

$$3=2c_1-2c_2$$

देता है। c_1 और c_2 के लिए ऊपर प्राप्त दोनों समीकरणों से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$c_1=\frac{3}{4}$ और $c_2=-\frac{3}{4}$. अतः,

$$x=\frac{3}{4}(e^{2t}-e^{-2t}),$$

जिसे $x=\frac{3}{2}\sinh 2t$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

***

उदाहरण 13 : समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3}+13\frac{d^2y}{dx^2}+36\frac{dy}{dx}=0$ को प्रतिबंधों $x=0$ पर $y=0, \frac{dy}{dx}=1$ और $\frac{d^2y}{dx^2}=7$ के अधीन हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^3+13m^2+36m=0$$

$$\Rightarrow \quad m(m+4)\ (m+9) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 0, -4, -9\ .$$

अतः, अवकल समीकरण का व्यापक हल हैः

$$y = c_1 + c_2 e^{-4x} + c_3 e^{-9x}.$$

अब हम $x = 0$ पर दिए हुए प्रतिबंधों का अनुप्रयोग करके c_1, c_2 और c_3 के मान ज्ञात करते हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = -4c_2 e^{-4x} - 9c_3 e^{-9x} \text{ और}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 16c_2 e^{-4x} + 81c_3 e^{-9x}$$

प्रतिबंध $y = 0$, जब $x = 0$ से प्राप्त होता है

$$0 = c_1 + c_2 + c_3 \tag{21}$$

$x = 0$ पर $\dfrac{dy}{dx} = 1$ से प्राप्त होता है :

$$1 = -4c_2 - 9c_3 \tag{22}$$

$x = 0$ पर $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -7$ से प्राप्त होता है :

$$-7 = 16c_2 + 81c_3 \tag{23}$$

c_1, c_2 और c_3 के लिए, समीकरणों (21), (22) और (23) को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$c_1 = \frac{1}{6},\ c_2 = -\frac{1}{10} \text{ और } c_3 = -\frac{1}{15}\ .$$

इस प्रकार, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} e^{-4x} - \frac{1}{15} e^{-9x}.$$

***

आइए, अब कोटि चार के समीकरण पर विचार करें।

उदाहरण 14: समीकरण

$$\frac{d^4y}{dx^4}-10\frac{d^3y}{dx^3}+35\frac{d^2y}{dx^2}-50\frac{dy}{dx}+24y=0$$

को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण का सहायक समीकरण है :

$$m^4-10m^3+35m^2-50m+24=0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m^3-9m^2+26m-24)=0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-2)(m^2-7m+12)=0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-2)(m-3)(m-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad m=1, 2, 3, 4$$

अतः, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+c_1e^{4x}$$

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E16) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए:

i) $\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-6y=0$.

ii) $9\frac{d^2y}{dx^2}+18\frac{dy}{dx}-16y=0$

iii) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}-6y=0$

E17) साथ दिए हुए प्रतिबंधों के अधीन निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$; जब $x=0$, तब $y=4$ और $y'=0$.

ii) $\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{dy}{dx}=0$; जब $x=0$, तब $y=0$, $y'=0$ और $y''=2$.

अब हम उस स्थिति को लेते हैं जब सहायक समीकरण (17) के मूल वास्तविक तो है परंतु कुछ मूल समान हैं।

स्थिति II : सहायक समीकरण के वास्तविक और समान मूल हैं :

मान लीजिए कि सहायक समीकरण (17) के मूल m_1, m_2 बराबर हैं, अर्थात्

$m_1 = m_2$. यह स्थिति तब उत्पन्न होती है, जब द्विघात समीकरण (17) का विविक्तकर (discriminant) $b^2 - 4ac$ शून्य हो तथा दोनों बराबर मूल $-b/2a$ हों। इन दोनों मूलों से एक ही हल, अर्थात् $y_1(x) = e^{-bx/2a} = y_2(x)$ प्राप्त होता है।

इस स्थिति में समीकरण (17) का हल $y(x) = (c_1 + c_2)e^{-bx/2a}$ हो जाता है। क्योंकि अचरों $(c_1 + c_2)$ को एक ही अचर से प्रतिस्थापित किया जा सकता है, इसलिए इस हल में केवल एक स्वेच्छ अचर शामिल है। परंतु हम जानते हैं कि द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरण के व्यापक या पूर्ण हल में दो स्वेच्छ अचर अवश्य होने चाहिए। अतः ऊपर प्राप्त हल, जिसमें एक ही स्वेच्छ अचर है, व्यापक हल नहीं है। इसलिए, हमें समीकरण (14) का एक अन्य हल ज्ञात करने की आवश्यकता है। आइए, समान मूलों की स्थिति में, एक अन्य हल ज्ञात करने की विधि को समझने के लिए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 15: अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण का सहायक समीकरण है:

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -2, -2$$

दिए हुए समीकरण का एक हल $y_1(x) = e^{-2x}$ है। इसका व्यापक हल ज्ञात करने के लिए, हमें एक अन्य रैखिकतः स्वतंत्र हल की आवश्यकता है, जो y_1 का गुणज नहीं हो। इस अन्य हल को ज्ञात करने की विधि अठारहवीं शताब्दी में एक फ्रांसीसी भौतिकविद् और गणितज्ञ द ऐलम्बर्त (D'Alembert) (1717-1783) द्वारा दी गई थी। आप उपप्रमेय 2 से यह जानते हैं कि यदि समीकरण (14) का एक हल $y_1(x)$ है, तो किसी अचर c के लिए $cy_1(x)$ भी इस समीकरण का हल होगा। यहाँ मौलिक विचार यह है कि इस प्रेक्षण को c के स्थान पर एक फलन $v(x)$ रखकर व्यापीकृत कर दिया जाए और तब ऐसा $v(x)$ ज्ञात करने का प्रयास किया जाए जिससे कि $v(x)y_1(x)$ समीकरण (14) का एक हल हो।

आइए दिए हुए समीकरण में $y = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-2x}$ प्रतिस्थापित करें। हम जानते हैं कि $y' = v'(x)e^{-2x} - 2v(x)e^{-2x}$ तथा
$y'' = v''(x)e^{-2x} - 4v'(x)e^{-2x} + 4v(x)e^{-2x}$.

दिए हुए समीकरण में y, y' और y'' के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं :

$$[v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) + 4v'(x) - 8v(x) + 4v(x)]e^{-2x} = 0$$

जिसे सरल करने पर प्राप्त होता है :

$$v''(x) = 0$$

अतः, $\quad v'(x) = c_1$

या $\quad v(x) = c_1x + c_2$.

इस प्रकार हम

$$y(x) = v(x) y_1(x) = c_1 x e^{-2x} + c_2 e^{-2x} \tag{24}$$

प्राप्त करते हैं, जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं। समीकरण (24) के दाएँ पक्ष का दूसरा पद मूल हल $y_1(x) = e^{-2x}$ के संगत है, परंतु प्रथम पद, दूसरे हल अर्थात्, $y_2(x) = xe^{-2x}$ से उत्पन्न हुआ है। आप सरलता से जाँच कर सकते हैं कि ये दोनों हल रैखिकतः स्वतंत्र हैं, क्योंकि

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x} \neq 0.$$

अतः, $y_1(x) = e^{-2x}$ और $y_2(x) = xe^{-2x}$ दिए हुए समीकरण के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं तथा समीकरण (24) द्वारा इसका व्यापक हल प्राप्त हो जाता है।

***

उदाहरण (15) में उपयोग की गई प्रक्रिया को जब समीकरण (14) के लिए विस्तृत करते हैं तब दो हल

$$y_1(x) = e^{-bx/2a} = e^{m_1 x} \text{ और } y_2(x) = xe^{-bx/2a} = xe^{m_1 x} \text{ प्राप्त होते हैं।}$$

क्योंकि $W(y_1, y_2)(x) = e^{-bx/a} \neq 0$ है, इसलिए y_1 और y_2 समीकरण (14) के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। अतः सामान मूल वाली स्थिति में समीकरण (14) का व्यापक हल निम्न प्राप्त होता है :

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-bx/2a}$$

$$= (c_1 + c_2 x) e^{m_1 x}$$

जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं।

शब्दों में, हम कहते हैं कि समीकरण (14) के समान मूलों की स्थिति में, समान मूल के संगत एक चरघातांकी हल होता है, जबकि दूसरा हल उस चरघातांकी हल को x से गुणा करके प्राप्त किया जाता है। दूसरे हल को ज्ञात करने की ऊपर दी गयी विधि **कोटि लघुकरण** (reduction of order) विधि कहलाती है। यह विधि चर गुणांकों वाले रैखिक समघात समीकरणों के लिए भी अनुप्रयोग की जाती है। हम इस विधि की चर्चा बाद में इकाई 12 में करेंगे।

nवीं कोटि समीकरण, जिसके n मूल $m_1, m_2, \ldots, m_n$ हैं; के लिए यदि मूल m_1 की पुनरावर्ती (repetition) r बार होती है तथा शेष $(n-r)$ मूल भिन्न हैं, तो इस r बार पुनरावर्ती वाले मूल का संगत हल

$$Y = e^{m_1 x}(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \cdots + A_r x^{r-1}) \tag{25}$$

के रूप का होगा तथा तब व्यापक हल

$$y = e^{m_1 x}(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \cdots + A_r x^{r-1}) + A_{r+1} e^{m_{r+1} x} + \cdots + A_n e^{m_n x} \qquad (26)$$

के रूप का होगा, जहाँ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ स्वेच्छ अचर हैं।

अब हम निम्न उदाहरणों की सहायता से ऊपर की गयी चर्चा को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 16: समीकरण $\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^3 y}{dx^3} - 9\frac{d^2 y}{dx^2} - 11\frac{dy}{dx} - 4\,y = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए अवकल समीकरण का सहायक समीकरण हैं :

$$m^4 - m^3 - 9m^2 - 11m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^3 - 2m^2 - 7m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+1)\,(m+1)\,(m^2 - 3m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -1,\, -1,\, -1,\, 4$$

यहाँ मूल -1 की तीन बार पुनरावर्ती हुई है तथा मूल 4 भिन्न है। समीकरण (25) का प्रयोग करने पर, तीन बार पुनरावर्ती वाले मूल -1 के संगत हल को

$$Y = (A + Bx + Cx^2)\, e^{-x}$$

के रूप में लिखा जा सकता है तथा समीकरण (26) से तब व्यापक हल

$$y = (A + Bx + Cx^2)\, e^{-x} + De^{4x}$$

होगा, जहाँ A, B, C और D स्वेच्छ अचर हैं।

***

उदाहरण 17: अवकल समीकरण

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 8\frac{d^2 y}{dx^2} + 16y = 0$$

का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए।

हल : इस स्थिति में, सहायक समीकरण है :

$$m^4 - 8m^2 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-2)\,(m^3 + 2m^2 - 4m - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-2)\,(m-2)\,(m^2 + 4m + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 2,\, 2,\, -2,\, -2$$

यहाँ मूल 2 और -2 दोनों की पुनरावर्ती हो रही है। पुनरावर्ती मूल 2 के संगत हल को

$$Y_1 = (A + Bx)e^{2x}$$

के रूप में लिखा जा सकता है तथा पुनरावर्ती मूल -2 के संगत हल को

$$Y_2 = (C + Dx)\, e^{-2x}$$

के रूप में लिखा जा सकता है। ये दोनों मिल कर, दिए हुए अवकल समीकरण का पूर्ण हल

$$y = (A + Bx)\, e^{2x} + (C + Dx)\, e^{-2x}$$

प्रदान करते हैं, जहा A, B, C और D स्वेच्छ अचर हैं।

***

और अब आपके हल करने के लिए कुछ प्रश्न।

E18) निम्न समीकरणों के पूर्ण हल ज्ञात कीजिए :

i) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+12y=0$.

ii) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=0$

iii) $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-y=0$

iv) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-y=0$

E19) साथ में दिए हुए प्रतिबंधों के अधीन निम्न समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए :

i) $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-4y=0$; जब $x=0$, तब $y=1$ और $y'=-1$

ii) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}-2y=0$; जब $x=0$, तब $y=0, y'=9$ और $y''=0$.

iii) $\frac{d^4y}{dx^4}+3\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}=0$; जब

$x=0,\ y=0,\ y'=4,\ y''=-6,\ y'''=14$.

अब हम उस स्थिति की चर्चा करेंगे जब सहायक समीकरण (17) के सम्मिश्र मूल हों।

स्थिति III : सहायक समीकरण के सम्मिश्र मूल हैं :

मान लीजिए कि समीकरण (17) के मूल m_1 और m_2 सम्मिश्र हैं। हम समीकरणों के सिद्धांत से यह जानते हैं कि यदि किसी बहुपद समीकरण के सभी गुणांक वास्तविक हों, तो इसके सम्मिश्र मूल संयुग्मी युग्मों (conjugate pairs) में होते हैं। समीकरण (17) में गुणांकों को वास्तविक अचर माना गया है और इसी कारण सम्मिश्र मूलों को संयुग्मी युग्मों में होना चाहिए।

मान लीजिए कि समीकरण (17) के सम्मिश्र मूल $m_1=\alpha+i\beta$ और $m_2=\alpha-i\beta$ हैं, जहाँ α और β वास्तविक हैं तथा $i^2=-1$. औपचारिक रूप से, इस स्थिति और स्थिति I में कोई अंतर नहीं है, और इसलिए हल के संगत पद हैं :

$$y=c_1e^{(\alpha+i\beta)\,x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)\,x}$$

$$=e^{\alpha x}\,[c_1e^{i\beta x}+c_2\,e^{-i\beta x}] \qquad (27)$$

परंतु, व्यावहारिक रूप में, हम सम्मिश्र चरघातांकियों के स्थान पर वास्तविक फलनों

के साथ कार्य करने को प्राथमिकता देंगे। और इसके लिए, हम **आयलर सूत्र** (Euler's formula), अर्थात्

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ और } e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

का प्रयोग करते हैं, जहाँ θ एक वास्तविक संख्या है। इन परिणामों का प्रयोग करने पर, व्यंजक (27) का दायाँ पक्ष निम्न हो जाता है :

$$e^{\alpha x}\,[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$$

$$= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 - c_2)\, i\sin\beta x]$$

अब क्योंकि c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं, इसलिए हम $A = c_1 + c_2$ और $B = i\,(c_1 - c_2)$ लिख सकते हैं जहाँ A और B पुनः स्वेच्छ अचर हैं, यद्यपि दोनों वास्तविक नहीं हैं। व्यंजक (27) अब निम्न रूप का हो जाता है :

$$e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x] \tag{28}$$

साथ ही, यदि सम्मिश्र मूल की पुनरावर्ती होती है, तो सम्मिश्र संयुग्मी मूल की भी पुनरावर्ती होती है तथा समीकरण (25) का प्रयोग करते हुए, हल के संगत पदों को $e^{x(\alpha+i\beta)}(c_1 + c_2x) + e^{x(\alpha-i\beta)}(c_3 + c_4x)$

के रूप में लिखा जा सकता है, तथा

$$A = c_1 + c_3,\ B = i(c_1 - c_3),\ C = c_2 + c_4,\ D = i(c_2 - c_4)$$

लिखने पर, हल को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$y = e^{\alpha x}[(A + Cx)\cos\beta x + (B + Dx)\sin\beta x] \tag{29}$$

सम्मिश्र मूलों की कई बार पुनरावर्ती होने की स्थिति में, वास्तविक मूलों की कई बार पुनरावर्ती होने की स्थिति के अनुरूप परिणाम यहाँ भी प्राप्त किए जा सकते हैं।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से सम्मिश्र मूलों की स्थिति को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 18: दिखाइए कि अवकल समीकरण

$\dfrac{d^4y}{dx^4} - m^4y = 0$ के हल को

$y = c_1\cos mx + c_2\sin mx + c_3\cosh mx + c_4\sinh mx$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

हल : इस स्थिति में क्योंकि दिए हुए अवकल समीकरण में m को एक अचर के रूप में प्रयोग किया गया है, इसलिए हम सहायक समीकरण में कोई अन्य अचर, मान लीजिए λ, का प्रयोग कर सकते हैं।

अतः दिए हुए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$(\lambda^4 - m^4) = 0$$

$$\Rightarrow\ (\lambda^2 - m^2)\,(\lambda^2 + m^2) = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda = m, -m, \pm im$

अतः, मूल वास्तविक और काल्पनिक (imaginary) मूलों के मिश्रण हैं। वास्तविक मूलों $+m$ और $-m$ के संगत हल को उसी प्रकार प्राप्त किया जा सकता है जैसा हमने उदाहरण 11 में किया था तथा इसे

$$c_3 \cosh mx + c_4 \sinh mx \tag{30}$$

के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ c_3 और c_4 स्वेच्छ अचर हैं।

काल्पनिक मूलों $+im$ और $-im$ का संगत हल

$$Ae^{imx} + Be^{-imx}$$

होगा जिसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$A(\cos mx + i \sin mx) + B(\cos mx - i \sin mx)$$

$$= (A+B)\cos mx + i\,(A-B)\sin mx$$

$$= c_1 \cos mx + c_2 \sin mx \tag{31}$$

जहाँ $c_1 = (A+B)$ और $c_2 = i(A-B)$ अचर हैं।

अतः समीकरणों (30) और (31) को संयोजित करने पर, दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल निम्न है:

$$y = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx + c_3 \cosh mx + c_4 \sinh mx$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 19: समीकरण $\frac{d^4 y}{dx^4} - 4\frac{d^3 y}{dx^3} + 8\frac{d^2 y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ का हल प्राप्त कीजिए।

हल : इस स्थिति में, सहायक समीकरण है :

$$m^4 - 4m^3 + 8m^2 - 8m + 4 = 0$$

$\Rightarrow \quad (m^2 - 2m + 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad [m - (1+i)]^2\,[m - (1-i)]^2 = 0$

$\Rightarrow \quad m = 1+i, 1+i, 1-i, 1-i.$

इस स्थिति में, मूल सम्मिश्र और पुनरावर्ती हैं। अतः व्यापक हल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y = (c_1 + xc_2)\, e^{(1+i)x} + (c_3 + xc_4)\, e^{(1-i)x}$$

$$= e^x[(c_1 + xc_2)\, e^{ix} + (c_3 + xc_4)\, e^{-ix}]$$

$$= e^x[(c_1 + xc_2)(\cos x + i\sin x) + (c_3 + xc_4)(\cos x - i\sin x)]$$

$$= e^x\{[(c_1 + c_3) + x(c_2 + c_4)]\cos x + i[(c_1 - c_3) + x(c_2 - c_4)]\sin x\}$$

$$= e^x[(A + Bx)\cos x + (C + Dx)\sin x]$$

जहाँ $A = (c_1 + c_3)$, $B = (c_2 + c_4)$, $C = i(c_1 - c_3)$ और $D = i(c_2 - c_4)$ सभी अचर हैं।

***

अब हम एक उदाहरण द्वारा उस अवकल समीकरण को प्राप्त करते हैं जिसके हमें हल ज्ञात हैं।

उदाहरण 20 : अचर गुणांकों वाला ऐसा रैखिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके हल फलन $4e^{6x}$ और $3e^{-3x}$ हैं।

हल : हम जानते हैं कि यदि $y_1 = 4e^{6x}$ और $y_2 = 3e^{-3x}$ किसी रैखिक अवकल समीकरण के दो हल हों तो उनका रैखिक संयोजन

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = 4c_1e^{6x} + 3c_2e^{-3x} \quad (32)$$

भी उस समीकरण का एक हल होता है, जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

अब हम अभीष्ट समीकरण प्राप्त करने के लिए, समीकरण (32) में से c_1 और c_2 को विलुप्त करेंगे। हम प्राप्त करते हैं :

$$y' = 24c_1e^{6x} - 9c_2e^{-3x} \quad (33)$$

$$y'' = 144c_1e^{6x} + 27c_2e^{-3x} \quad (34)$$

समीकरणों (32) और (34), से हमें प्राप्त होता है :

$$y'' = 9(c_1e^{6x} + y) \quad (35)$$

समीकरणों (33) और (34) से, हमें प्राप्त होता है :

$$c_1e^{6x} = \frac{y'' + 3y'}{18} \quad (36)$$

इस प्रकार, समीकरणों (35) और (36) से हम प्राप्त करते हैं :

$$y'' - 3y' - 18y = 0.$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E20) निम्न समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

i) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\alpha\frac{dy}{dx} + (\alpha^2 + \beta^2)\, y = 0.$$

ii) $$\frac{d^4y}{dx^4} + a^4 y = 0$$

iii) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

E21) यदि किसी सहायक समीकरण के मूल

i) $m_1 = 4,\ m_2 = m_3 = -5$

ii) $m_1 = \frac{-1}{2},\ m_2 = 3+i,\ m_3 = 3-i$

हो, तो संगत अवकल समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

E22) अचर गुणांकों वाले वे रैखिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके हल नीचे दिए गए हैं :

i) $10\cos 4x,\ -5\sin 4x$

ii) $3,\ 2x,\ -e^{7x}$

इस इकाई में हमने जो कुछ भी अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, हम इस इकाई को यही समाप्त करते हैं।

10.5 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्न का अध्ययन किया है :

1. परतंत्र चर y और स्वतंत्र चर x वाले व्यापक रैखिक अवकल समीकरण को

   i) चर गुणांकों वाला समीकरण माना जाता है, यदि y और उसके अवकलजों सभी के गुणांक x के अचर फलन नहीं हों।

   ii) अचर गुणांकों वाला समीकरण माना जाता है, यदि y और उसके अवकलजों सभी के गुणांक अचर फलन हों।

   iii) समघात समीकरण माना जाता है, यदि y या उसके कोई भी अवकलज से मुक्त पद अनुपस्थित हो।

   iv) असमघात समीकरण माना जाता है, यदि y और उसके कोई भी अवकलज से मुक्त एक शून्येतर पद हो।

2. किसी IVP

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)y = b(x)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

जहाँ x_0 अंतराल I में कोई भी बिंदु है तथा $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ दी हुई वास्तविक संख्याएँ हैं, के हल y (x) का अंतराल I पर अस्तित्व है तथा हल अद्वितीय है यदि I में प्रत्येक x के लिए, $a_0(x) \neq 0$ के साथ, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ तथा b अंतराल I पर संतत हों।

3. अंतराल I पर परिभाषित फलनों $y_1, y_2, \ldots, y_n$ का एक समुच्चय I पर रैखिकतः परतंत्र होता है, यदि अचरों $c_1, c_2, \ldots, c_n$ के लिए (सभी शून्य नहीं), I, में प्रत्येक x के लिए, हमें

   $$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$$ प्राप्त हो।

4. अंतराल I पर परिभाषित फलनों $y_1, y_2, \ldots, y_n$ का एक समुच्चय I पर रैखिकतः स्वतंत्र होता है, यदि यह I पर रैखिकतः परतंत्र न हो ।

5. यदि $y = y_1$ अंतराल I पर समघात रैखिक अवकल समीकरण का एक हल हो, तो सभी वास्तविक संख्याओं c के लिए $y = cy_1$ भी I पर उस समीकरण का एक हल होता है।

6. यदि I पर रैखिक समघात अवकल समीकरण के हल $y = y_1, y_2, \ldots, y_m$ हों, तो I पर $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$ भी उस समीकरण का एक हल होता है, जहाँ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ स्वेच्छ अचर हैं।

7. n वीं कोटि के रैखिक समघात समीकरण के अंतराल I पर n हल $y_1, y_2, \ldots, y_n$ अंतराल I पर रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं यदि और केवल यदि उस अंतराल में प्रत्येक x के लिए n फलनों का रांसकियन, अर्थात् $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$.

8. अंतराल I पर समघात n वीं कोटि के रैखिक अवकल समीकरण के n रैखिकतः स्वतंत्र हल I पर उस समीकरण के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं।

9. यदि $y_1, y_2, \ldots, y_n$ किसी अंतराल I पर nवीं कोटि के समघात रैखिक अवकल समीकरण के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं, तो

   $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

   (जहाँ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ स्वेच्छ अचर हैं)

   I पर दिए हुए समीकरण का व्यापक हल या पूर्ण समाकल परिभाषित करता है।

10. एक असमघात समीकरण के लिए

    i) संगत समघात समीकरण का पूर्ण समाकल उसका पूरक फलन कहलाता है।

    ii) असमघात समीकरण का एक विशेष हल जिसमें कोई स्वेच्छ अचर शामिल न हो उसका विशेष समाकल कहलाता है।

    iii) पूरक फलन और विशेष समाकल मिल कर उसका व्यापक हल बनाते हैं।

11. nवीं कोटि के रैखिक अवकल समीकरण

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n\ y=0$$

जिसके अचर गुणांक $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ हैं तथा n मूल $m_1, m_2, \ldots, m_n$ हैं, का हल y

i) मूल वास्तविक और भिन्न होने पर

$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots+c_ne^{m_nx}$

होता है।

ii) मूल वास्तविक और पुनरावर्ती मान लीजिए $m_1=m_2=\cdots=m_r$, होने पर,

$y=(c_1+c_2x+\cdots+c_rx^{r-1})e^{m_1r}+c_{r+1}e^{m_{r+1}x}+\cdots+c_ne^{m_nx}$ होता है।

iii) मूल सम्मिश्र होने पर तथा एक युग्म $\alpha\pm i\beta$ होने पर इस मूल युग्म के संगत

$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

होता है।

10.6 हल / उत्तर

E1) i) असमघात, समानीत समीकरण $y'''+xy''+x^2y'+x^3y=0$ है।

ii) समघात

iii) असमघात, समानीत समीकरण $(1-x)y''+xy'-y=0$ है।

E2) i) स्वतंत्र, क्योंकि किन्हीं भी शून्येतर c_1 और c_2 और प्रत्येक वास्तविक x के लिए, $c_1e^x+c_2e^{-x}=0$, केवल जब $c_1=0$ और $c_2=0$ हों।

ii) परतंत्र है। क्योंकि

$2c_1\cos 3x+3c_2\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=2c_1\cos 3x+3c_2\cos 3x$

$=(2c_1+3c_2)\cos 3x$

जो c_1 और c_2 के किसी भी शून्येतर विकल्प से संतुष्ट हो जाता है, ft I d sfy , $c_1=-3/2c_2$.

iii) स्वतंत्र

E3) फलन $y_1(x)=x^2$ और $y_2(x)=x\,|\,x\,|$ अंतराल $-1<x<1$ पर रैखिकतः स्वतंत्र हैं। आप दोनों फलनों के ग्राफ खींच सकते हैं तथा स्वयं इसकी जाँच कर सकते हैं। साथ ही, क्योंकि $y_1(x)=x^2$ और

$$y_2(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -x^2, & x \le 0 \end{cases}$$

का $-1 < x < 1$ में सभी x के लिए, $W(y_1(x), y_2(x)) = 0$.

E4) i) $]-\infty, \infty[$ पर फलन $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ और $f_3(x) = 4x - 3x^2$ रैखिकतः परतंत्र हैं, क्योंकि

$c_1 x + c_2 x^2 + c_3(4x - 3x^2) = 0$, जब $c_1 = -8, c_2 = 6, c_3 = 2$.

ii) $]-\infty, \infty[$ पर फलन
$f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \sin^2 x$ रैखिकतः परतंत्र हैं, क्योंकि
$5c_1 + c_2 \cos^2 x + c_3 \sin^2 x = 0$, जब $c_1 = 1, c_2 = c_3 = -5$.

iii) $]0, \infty[$ पर, $W(x^{1/2}, x^2) = \frac{3}{2} x^{3/2} \neq 0.$

iv) अंतराल $]0, \pi[$ में केवल $x = \frac{\pi}{2}$ पर,
$W(\sin x, \operatorname{cosec} x) = -2 \cot x = 0$

E5) i) नहीं; किसी भी अंतराल पर $W(2, e^x) = 2e^x \neq 0$.

ii) स्वतंत्र, W सदैव शून्य नहीं है।

E6) अंतराल $]-\infty, \infty[$ पर परिभाषित फलन जिसका ग्राफ बिंदु $(0, 2)$ से होकर जाता है तथा उस बिंदु पर उसकी प्रवणता -1 है।

E7) दी हुई आदि-मान समस्या का एक हल $y = \frac{1}{4}\sin 4x$ है। प्रमेय 1 से यह निष्कर्ष निकलता है कि $x = 0$ को आविष्ट करने वाले किसी भी अंतराल पर हल अद्वितीय है।

E8) दिए हुए समीकरण की तुलना समीकरण (1) से करने पर, हम $a_0(x) = x^2 - 3x = x(x-3)$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, समीकरण के गुणांकों की असंतता के बिंदु केवल $x = 0$ और $x = 3$ हैं। आदि बिंदु $x = 1$ को आविष्ट करने वाला दीर्घतम अंतराल, जिसमें सभी गुणांक संतत हैं, $0 < x < 3$ है। इस अंतराल में, प्रमेय 2 हल के अस्तित्व को निश्चित करता है।

E9) $a_0(x)(cy_1)'' + a_1(x)(cy_1)' + a_2(x)(cy_1)$

$= c\,[a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1]$

$= c.0$ [क्योंकि y_1 समीकरण (5) का एक हल है]

$= 0$

इस प्रकार, I पर cy_1 भी समीकरण (5) का एक हल है।

E10) $y = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{-1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$

तब, $y'' - 2y^3 = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} = 0$,

इस प्रकार, $y = \frac{1}{x}$ अरैखिक अवकल समीकरण का एक हल है।

साथ ही, $y = \frac{c}{x}$ के लिए,

$y'' - 2y^3 = \frac{2c}{x^3} - 2\frac{c^3}{x^3} = \frac{2}{x^3}c\ (1 - c^2) \neq 0$ सिर्फ $c \neq 0$ और $c \neq \pm 1$ के लिए।

E11) $c_1y_1 + c_2y_2$ (स्वेच्छ c_2 के लिए) दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। यह केवल स्वेच्छ c_1 तथा $c_2 = 0$ या 1 के लिए एक हल है।

E12) $y_1(x) = x^{1/2}$, $y_1'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $y_1''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$

दिए हुए समीकरण में इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$2x^2\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right) + 3x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - x^{1/2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)x^{1/2} = 0$$

इसी प्रकार, $y_2(x) = x^{-1}$, $y_2'(x) = -x^{-2}$, $y_2''(x) = 2x^{-3}$. इस प्रकार,

$$2x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) - x^{-1} = (4 - 3 - 1)x^{-1} = 0$$

इस प्रकार, y_1 और y_2 दिए हुए समीकरण के हल हैं।

अब $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{-2} \end{vmatrix} = \frac{-3}{2}x^{-3/2}.$

क्योंकि $x > 0$, के लिए $W \neq 0$ इसलिए y_1 और y_2 हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं।

E13) जाँच कीजिए कि फलन $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ और $y_3(x) = e^{3x}$ अंतराल $-\infty < x < \infty$ पर तृतीय कोटि समीकरण

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ को संतुष्ट करते हैं।

साथ ही, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए, $W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = 2e^{6x} \neq 0$.

इस प्रकार, $]-\infty, \infty[$ में y_1, y_2, y_3 हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है।

E14) जाँच कीजिए कि $y_1 = \sin x$ और $y_2 = \cos x$ दिए हुए समीकरण के हल हैं।

साथ ही, $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$.

इस प्रकार, किसी भी अंतराल I पर, y_1 और y_2 दिए हुए समीकरण का मूलभूत हल समुच्चय बनाते हैं। इस प्रकार, I पर दिए हुए समीकरण का व्यापक हल $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ है। अभीष्ट विशेष हल ज्ञात करने के लिए, हम

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 2$$

$$c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 = 3$$

को हल करते हैं तथा $c_2 = 2$ और $c_1 = 3$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, $y = 3\sin x + 2\cos x$ ही अभीष्ट विशेष हल है।

E15) **उपपत्ति :** मान लीजिए कि $y_p(x)$ असमघात समीकरण (13) अर्थात्

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ का एक हल है तथा $y_1(x)$ और $y_2(x)$ किसी अंतराल I में संगत समघात समीकरण के हल हैं। तब, हम प्राप्त करते हैं :

$$a_0(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_2(x)y_p = b(x) \qquad \text{(i)}$$

$$a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

मान लीजिए कि $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$, जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं। तब,

$$a_0(x)[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p]'' + a_1(x)[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p]' + a_2[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p]$$

$$= c_1[a_0y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1] + c_2[a_0y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2] + [a_0y_p'' + a_1y_p' + a_2y_p]$$

$= c_1.0 + c_2.0 + b(x)$ [समीकरणों (i), (ii) और (iii) के प्रयोग से]

$$= b(x)$$

इस प्रकार, $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$ भी I पर समीकरण (13) का एक हल है।

E16) i) सहायक समीकरण है :

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)\,(m-2)\,(m-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1,\ 2,\ 3\,.$$

व्यापक हल $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ है।

ii) सहायक समीकरण है :

$$9m^2 + 18m - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \ 9m^2 - 6m + 24m - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \ (3m+8)\,(3m-2) = 0$$

$$\Rightarrow \ m = -8/3,\ 2/3$$

व्यापक हल $y = c_1e^{\frac{2}{3}x} + c_2e^{\frac{-8}{3}x}$ है।

iii) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-3x}$.

E17) i) मूल 3 और -1 हैं।

$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x},\ y' = 3c_1e^{3x} - c_2e^{-x}$

दिए हुए प्रतिबंधों का प्रयोग करने पर

$c_1 + c_2 = 4$ और $3c_1 - c_2 = 0$

$$\therefore \ c_1 = 1, c_2 = 3$$

$$y = e^{3x} + 3e^{-x}$$

ii) सहायक समीकरण के मूल $m = 0, 2, -2$ हैं।

$$y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$$

दिए हुए प्रतिबंधों का प्रयोग करने पर,

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$2c_2 - 2c_3 = 0$$

$$4c_2 + 4c_3 = 2$$

$$\therefore \ c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)\,.$$

E18) i) सहायक समीकरण है :

$$m^3 - m^2 - 8m + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+3)\,(m-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -3,\, 2,\, 2$$

अतः, $y = (A + Bx)\, e^{2x} + Ce^{-3x}$

ii) सहायक समीकरण के मूल $m = -1, -1, 2, 2$.

$y = (A + Bx)\, e^{-x} + (C + Dx)\, e^{2x}$.

iii) सहायक समीकरण के मूल $m = 1, -1, -1$.

$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x} + c_3 e^{x}$

iv) $y = (A + Bx + cx^2) e^{x}$.

E19) i) $y = (1 + x)\, e^{-2x}$

ii) सहायक समीकरण के मूल $m = -1, -1, 2$.

$y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + c_3 e^{2x}$

प्रतिबंधों का प्रयोग करने पर,

$$c_1 + c_3 = 0$$

$$-c_1 + c_2 + 2c_3 = 9$$

$$c_1 - 2c_2 + 4c_3 = 0$$

$$\therefore \quad c_1 = -2,\, c_2 = 3,\, c_3 = 2$$

$$y = 2e^{2x} + (3x - 2)\, e^{-x}$$

iii) सहायक समीकरण के मूल $m = 0, 0, -1, -2$.

तथा $y = c_1 + xc_2 + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-2x}$

दिए हुए प्रतिबंधों का प्रयोग करके c_1, c_2, c_3, c_4 के लिए हल करने पर,

$y = 2(x + e^{-x} - e^{-2x})$.

E20) i) सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

अतः, व्यापक हल $y = e^{\alpha x}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right]$ है।

ii) सहायक समीकरण $m^4 + a^4 = 0$ है।

मूल ज्ञात करने में द' मायवर प्रमेय का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$m^4 = a^4(-1) = a^4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$= a^4(\cos(2p+1)\pi + i\sin(2p+1)\pi),\ p = 0, 1, 2, \ldots$$

अतः $m = a\left[\cos\frac{(2p+1)}{4}\pi + i\sin\left(\frac{2p+1}{4}\right)\pi\right]$, $p = 0, 1, 2, 3$ के लिए।

$$\therefore \quad m = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right), a\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right), a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right), a\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

अतः हल है :

$$y = e^{(a/\sqrt{2})x}\left[c_1\cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}x\right) + c_2\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}x\right)\right]$$

$$+ e^{-(a/\sqrt{2})x}\left[c_3\cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}x\right) + c_4\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}x\right)\right]$$

iii) $y = e^{-4x}\,(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

E21) i) दिए हुए मूलों वाले सहायक समीकरण का समीकरण है :

$$(m-4)\,(m+5)\,(m+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^3 + 6m^2 - 15m - 100 = 0$$

$\therefore$ संगत अवकल समीकरण है :

$$y''' + 6y'' - 15y' - 100y = 0.$$

ii) सहायक समीकरण है :

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)(m-3-i)\,(m-3+i) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(m + \frac{1}{2}\right)(m^2 - 6m + 10) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2m^3 - 11m^2 + 14m + 10 = 0$$

$\therefore\ 2y''' - 11y'' + 14y' + 10y = 0$ अभीष्ट समीकरण है।

E22) i) $y'' + 16y = 0$.

ii) $y''' - 7y'' = 0$.

– x –

परिशेषिका

यहाँ हम आव्यूह और सारणिक को, जो आपने आवश्य ही अपने स्कूल गणित में पढा होगा, संक्षिप्त में दोहरा रहे हैं।

आव्यूह

रैखिक समीकरणों के निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 7 \\
x - y + 3z &= 3 \qquad \text{(A1)} \\
5x + 4y - 2z &= 1
\end{aligned}
$$

निकाय (A1) के तीनों समीकरणों में x, y, z के गुणांकों को हम एक सारणी में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$
\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A2)}
$$

सारणी (A2) की पहली, दूसरी व तीसरी पंक्ति क्रमशः, निकाय (A1) के पहले, दूसरे व तीसरे समीकरण में x, y, z के गुणांको के संगत हैं।

इसी प्रकार निकाय (A1) को हम पुनः निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$
\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(A3)}
$$

सभी गुरूकोष्ठ ([ ]) के अंदर संख्याएँ अथवा चर, आव्यूह को निरूपित करते हैं । औपचारिक रूप से हम निम्नलिखित परिभाषित करते हैं ।

परिभाषा : आड़ी और खड़ी रेखाओं के रूप में संख्याओं की किसी आयताकार व्यवस्था को आव्यूह (matrix) कहते हैं।

v kO;w eai ftr q l ȧ; kv k@pj kad ksge **अवयव** (elements) कहते हैं।

आव्यूह की एक आड़ी रेखा के अवयवों को आव्यूह की पंक्ति (row) कहते हैं। तथा खड़ी रेखा के अवयवों को आव्यूह का स्तंभ (column) कहते हैं।

उदाहरण के लिए,

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ एक आव्यूह है जिसमें 2 पंक्ति और 3 स्तंभ हैं।

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एक आव्यूह है जिसमें 3 पंक्ति और 2 स्तंभ हैं।

ध्यान दीजिए कि आव्यूह की प्रत्येक पंक्ति में अवयवों की संख्या समान होती है। इसी प्रकार, आव्यूह के प्रत्येक स्तंभ में अवयवों की संख्या समान होती है। सामान्यतः हम आव्यूहो को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से दर्शाते हैं। उदाहरण के लिए, m पंक्तियों तथा n स्तंभो का व्यापक आव्यूह होगा

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}],\ {}_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

यहाँ पर a_{11} पहली पंक्ति तथा पहले स्तंभ में आने वाले अवयव को दर्शाता है, a_{21} दूसरी पंक्ति तथा पहले स्तभ में आने वाले अवयव को दर्शाता है, व्यापक रूप में a_{ij}, i वीं पंक्ति तथा j वें स्तंभ में आने वाले अवयव को दर्शाता है।

हम यह भी कहते हैं कि a_{ij}, A का (i, j) वाँ अवयव है।

उदाहरण के लिए

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$ का $(1, 3)$ वाँ अवयव -2 है तथा $(3,2)$ वाँ अवयव -4 है।

किसी आव्यूह A को, जिसमें 3 पंक्तियाँ और 2 स्तंभ होते हैं, 3×2 आव्यूह कहते हैं या हम कहते है कि आव्यूह A की कोटि 3×2 है। इसे हम $A_{3\times 2}$ या $A(3, 2)$ से भी दर्शाते हैं। आव्यूह (A2) कोटि 3×3 वाला आव्यूह है। क्योकि (A2) में पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर है इसलिए इसे हम **वर्ग आव्यूह** (square matrix) कहते हैं।

आव्यूह, $[2]$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ क्रमश : कोटि 1×1, 2×2 और 3×3, के वर्ग आव्यूहों के उदाहरण हैं।

एसे वर्ग आव्यूहों के साथ एक अद्वितीय संख्या जुड़ी होती है जिसे हम सारणिक कहते हैं।

सारणिक

हम 1×1 आव्यूह के सारणिक की परिभाषा से प्रारंभ करते हैं।

परिभाषा : 1×1 आव्यूह $A=[a]$ का सारणिक, जिसे $|A|$ अथवा $\det A$, से दर्शाया जाता है, a होता है।

उदाहरण के लिए यदि $A=[2]$, तो $|A| = 2$. इसी प्रकार यदि $A=[-3]$ तो $|A| = -3$.

आइए अब हम 2×2 आव्यूह के सारणिक पर विचार करें।

परिभाषा: 2×2 आव्यूह $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ का सारणिक $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ होता है। इसे हम $|A|$ या $\det A$ से दर्शाते हैं।

उदाहरण के लिए यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ तब $|A| = 1\times 5 - 0\times 3 = 5$

आव्यूह 2×2 के सारणिक का प्रयोग करके अब हम आव्यूह 3×3 के सारणिक को परिभाषित करते हैं।

परिभाषा: 3×3 आव्यूह $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ का सारणिक निम्न होगा :

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}| + (-1)^{1+3}a_{13}|A_{13}|$$

जहाँ $A_{ij}\ (j=1, 2, 3)$, एक ऐसा आव्यूह है जो आव्यूह A में से पहली पंक्ति तथा j वें स्तंभ को निकाल देने के बाद प्राप्त होता है।

यहाँ हमनें $|A|$ का मान प्राप्त करने के लिए पहली पंक्ति से (के द्वारा) प्रसार किया है।

हम दूसरी, तीसरी पंक्ति या फिर किसी भी स्तंभ से भी प्रसार कर सकते थे। यदि हम ऊपर सारणिक को दूसरे स्तंभ द्वारा प्रसार करें तो हम प्राप्त करते हैं :

$$|A| = (-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}| + (-1)^{2+2}a_{22}|A_{22}| + (-1)^{3+2}a_{32}|A_{32}|.$$

$|A|$ का मान प्राप्त करने की सभी 6 विधियों (3 पंक्तियों या 3 स्तंभों में से किसी से भी प्रसार) से एक ही मान प्राप्त होता है। इसको यहाँ हम सिद्ध नहीं करेंगे लेकिन इसे निम्नलिखित उदाहरण में स्त्यापित करेंगे।

उदाहरण 1: निम्नलिखित आव्यूह के सारणिक का मान ज्ञात कीजिए :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

हल : पहली पंक्ति से प्रसार करने पर हम पाते हैं :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-9) - 4(0) + 7(3) = 3$$

सारणिक का प्रसार दूसरे स्तंभ से करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5(-1)\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4(0) + 2(-1) - 5(-1) = 3$$

अत : हम वही मान प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार आप जाँच कर सकते हैं कि यदि आप A की अन्य पंक्तियों या स्तंभों से सारणिक का प्रसार करेंगे तो आप यही परिणाम पाऐंगे।

***

n अज्ञात चरों में n समीकरणों के एक रैखिक निकाय का हल प्राप्त करने में कभी-कभी सारणिक बहुत उपयोगी होते हैं। सन् 1750 में जर्मन गणितज्ञ गेब्रियल क्रेमर ने n समीकरणों के समुच्चय को एक साथ हल करने के लिए एक नियम, जिसे क्रेमर-नियम कहते हैं, प्रकाशित किया।

आइए इस नियम पर चर्चा करें।

क्रेमर-नियम

n चरों वाले n समीकरणों के निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad \text{(A4)}$$

मान लीजिए (A4) के गुणांकों का आव्यूह A है और मान लीजिए

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

यदि

$$\begin{array}{c} \hspace{4em} k \text{ वाँ स्तंभ} \\ \det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-2} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; k = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

(A5)

वही है जो कि $\det A$ है सिवाय इसके कि k वें स्तंभ को स्तंभ $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix}$ से बदल दिया गया है तब (A4) का **अद्वितीय हल** निम्न होता है

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \cdots, \ x_n = \frac{\det A_n}{\det A} \qquad \text{(A6)}$$

यदि $\mathbf{det}\ A \neq \mathbf{0}$.

निकाय (A4) को इस प्रकार सारणिक द्वारा हल करने की विधि को क्रेमर-नियम कहते हैं।

याद रखें कि क्रेमर-नियम को तभी लागू किया जा सकता है जब

i) रैखिक निकाय में समीकरणों की संख्या चरों की संख्या के बराबर होः तथा

ii) गुणांक आव्यूह का सारणिक शून्येतर हो।

आइए अब हम निकाय (A1) को क्रेमर-नियम द्वारा हल करें।

उदाहरण 2: समीकरण निकाय

$$3x + 2y + z = 7$$

$$x - y + 3z = 3$$

$$5x + 4y - 2z = 1$$

को क्रेमर-नियम द्वारा हल कीजिए।

हल: हल प्राप्त करने के लिए हमें निम्नलिखित चार सारणिकों के मान निकालने हैं :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 13, \ \det A_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -39$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 78, \ \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 52$$

इस प्रकार (A6) से हमे प्राप्त होता है

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = -3, \ y = \frac{\det A_2}{\det A} = 6, \ z = \frac{\det A_3}{\det A} = 4$$

***

यदि सभी, $i=1, 2, \ldots, n$ के लिए $b_i = 0$, तो निकाय (A4) **समघात** कहलाता है। यदि एक भी b_i शून्येतर हो तो निकाय **असमधात** कहलाता है।

आप इस बात की ओर **ध्यान दीजिए** कि निकाय (A4) के संगत समधात निकाय के लिए यदि $\det A \neq 0$ हो तब (A6) से इस **समधात निकाय** का हल केवल तुच्छ हल अर्थात्, $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ होगा। ऐसा इसलिए है क्योंकि यदि (A5) में $i=1, 2, \ldots, n$ के लिए $b_i = 0$ हों तो (A6) में $k=1, 2, \ldots, n$ के लिए $\det A_k = 0$ हो जाते हैं।

परंतु यदि $\det A = 0$ हो तो n चरों में n समीकरणों के समधात निकाय के **अनंत** अतुच्छ **हल होंगे।** इन हलों को विलोपन विधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

यदि **असमघात निकाय** (A4) में $\mathbf{\det A = 0}$ तो निकाय का या तो **कोई भी हल नहीं** होगा या फिर **अनंत हल** होंगे।

– x –

इकाई 11

अनिर्धारित गुणांक विधि

इकाई की रूपरेखा

11.1 प्रस्तावना

इकाई 10 में, आपने अध्ययन किया कि एक व्यापक असमघात रैखिक अवकल समीकरण, अर्थात

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = b(x) \qquad (1)$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात करने के लिए, जहाँ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ अचर हैं, संगत समघात समीकरण का एक व्यापक हल, अर्थात् पूरक फलन ज्ञात करना आवश्यक होता है और फिर उसमें समीकरण (1) के किसी विशेष समाकल को जोड़ना पड़ता है। वहाँ हमने अचर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरणों के पूरक फलन ज्ञात करने की विधियों की भी चर्चा की थी। परंतु हम समीकरणों, $y'' + y' + y = x^2 + 1$, $y''' - y' = 2\cos x$ इत्यादि, के रूप के समीकरणों के विशेष समाकल कैसे ज्ञात करें? अब हम इस समस्या पर इस इकाई में विचार करेंगे।

समीकरण (1) के रूप के असमघात समीकरण के विशेष समाकल ज्ञात करने की अनेक विधियाँ हैं। इन विधियों में से सरलतम विधि अनिर्धारित गुणांक

(undetermined coefficients) विधि है। मूल रूप से इस विधि में एक जाँच हल (trial solution) का अनुमान लगाना होता है और फिर जाँच हल में निहित गुणांकों को ज्ञात करना होता है, जिससे कि वह वास्तव में दिए हुए समीकरण को संतुष्ट कर सके। आपको याद होगा कि इकाई 8 के भाग 8.3 में, हमनें अचर गुणांकों वाले प्रथम कोटि के असमघात रैखिक अवकल समीकरण का विशेष समाकल प्राप्त करने के लिए, इस विधि पर थोड़ी बहुत चर्चा की थी। इस इकाई में, हम भाग 11.2 में अचर गुणांकों वाले द्वितीय और उच्चतर कोटि के रैखिक असमघात अवकल समीकरणों के विशेष समाकल, जबकि असमघात पद एक बहुपद, एक चरघातांकी फलन, साइन या कोसाइन फलन या इन फलनों का एक सयोजन हो, ज्ञात करने के लिए इस विधि पर व्यापक रूप से चर्चा करेंगे। भाग 11.3 में हमने विधि के कुछ व्यवरोध दिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- असमघात पदों के प्रकार की पहचान कर सकेंगे जिनके लिए अनिर्धारित गुणांक विधि सफलतापूर्वक लागू की जा सकती हैं;
- जाँच हलों के रूप लिख सकेंगे जब दिए हुए समीकरणों के असमघात पद बहुपद, चरघातांकी फलन या उनके संयोजन हों तथा उनका विशेष समाकल प्राप्त करने के लिए इस विधि का प्रयोग कर सकेंगे;
- इस विधि के व्यवरोधों का वर्णन कर सकेंगे।

11.2 असमघात पदों के प्रकार जिन पर विधि लागू होती है

जैसा कि हम भाग 11.1 में बता चुके हैं, अनिर्धारित गुणांक विधि समीकरण (1) के रूप के समीकरणों के व्यापक हल $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ में विशेष समाकल $y_p(x)$ ज्ञात करने की एक प्रक्रिया है। इस विधि की सफलता एक विशेष समाकल के संभावी रूप का ठीक-ठाक अनुमान लगाने की हमारी क्षमता पर निर्भर करती है।

मान लीजिए कि समीकरण (1) में, $b(x) = x^r (r > 0$, एक पूर्णांक), अर्थात् $b(x)$ घात r का x में एक बहुपद है। तब, $\frac{db}{dx}$ क्या है? $\frac{db}{dx} = rx^{r-1}$ है, जो पुनः घात $(r-1)$ का एक बहुपद है। इसी प्रकार, $\int b(x)\, dx = \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ है, जो x में घात $(r+1)$ का एक बहुपद है। अर्थात्, किसी बहुपद को अवकलित या समाकलित करने पर परिणाम पुनः एक बहुपद ही होता है। यही बात तब भी सत्य है, जब $b(x) = e^{mx}$, अर्थात् एक चरघातांकी फलन हो या $b(x)$ अचर m के लिए $b(x) = \sin mx$ या $b(x) = \cos mx$ के प्रकार का एक साइन/कोसाइन फलन हो। हम जानते हैं कि

$$\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m},\ \frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx},\ \int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx,$$

$$\int \sin mx\, dx = \frac{-1}{m}\cos mx$$ इत्यादि।

अतः, यदि समीकरण (1) में असमघात पद $b(x)$ एक बहुपद, एक चरघातांकी फलन अथवा एक साइन या कोसाइन फलन हो, तो हम एक विशेष समाकल का चुनाव

कुछ अनिर्धारित अचरों वाले बहुपद, चरघातांकी फलन अथवा एक ज्यावक्रीय (sinusoidal) फलन के एक उपयुक्त संयोजन के रूप में कर सकते हैं। इसके बाद, इन अचरों को निर्धारित किया जा सकता है ताकि चुना हुआ जाँच हल दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करे।

वह फलन जो साइन फलन (या कोसाइन फलन) के साथ चरघातांकी फलन और/या बहुपद का संयोजन होता है, **ज्यावक्रीय फलन** कहलाता है जैसे कि $x^2 \sin 3x$, $xe^{2x} \cos x$ इत्यादि।

इस प्रकार, असमघात पदों के प्रकार, जिनके लिए अनिर्धारित गुणांक विधि सफलतापूर्वक लागू की जा सकती है, निम्न हैं :

i) बहुपद

ii) चरघातांकी फलन

iii) साइन या कोसाइन फलन

iv) ऊपर दिए गए (i), (ii) और (iii) के प्रकार के पदों का एक संयोजन।

अब हम एक-एक करके इनमें से प्रत्येक प्रकार की चर्चा करेंगे।

11.2.1 असमघात पद एक बहुपद हो

आइए निम्न अवकल समीकरण पर विचार करते हुए प्रारंभ करें तथा इसका विशेष समाकल ज्ञात करने का प्रयास करें :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x^2 \tag{2}$$

यहाँ असमघात पद, अर्थात् x^2 घात 2 का एक बहुपद है। जैसा कि हम ऊपर बता चुके हैं एक बहुपद का अवकलन या समाकलन पुनः एक बहुपद ही होता है। इसलिए हम जाँच हल $y_p(x)$ को निम्न रूप के एक द्वितीय कोटि के बहुपद के रूप में सोच सकते हैं :

$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, जहाँ A, B और C अचर हैं जिनका मान मालूम किया जाना है।

आइए अब इसकी जाँच करें क्या जाँच हल के इस चुनाव से हमें समीकरण (2) का एक विशेष समाकल प्राप्त करने में सहायता मिलती है। A, B और C के मान मालूम करने के लिए, हम y_p, y_p' और y_p'' के मानों को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त करते हैं :

$$2A + (2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

ऊपर प्राप्त समीकरण के दोनों पक्षों में x के समान घातों के गुणांकों को बराबर रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

x^2 गुणांक : $A = 1$

x गुणांक : $2A + B = 0$

x^0 गुणांक : $2A + B + C = 0$

A, B और C के लिए, ऊपर प्राप्त निकाय को हल करने पर, हम

$A=1, B=-2$ और $C=0$ प्राप्त करते हैं।

A, B और C के इन मानों के लिए, जाँच हल $y_p(x)$ निम्न रूप ले लेता है :

$$y_p(x)=x^2-2x$$

तथा इसकी सरलता से जाँच की जा सकती है कि यह समीकरण (2) को भी संतुष्ट करता है। क्योंकि

$$y_p''+y_p'+y_p=2+(2x-2)+(x^2-2x)=x^2.$$

इस प्रकार, चुने गए $y_p(x)$ से, हम समीकरण (2) का एक विशेष समाकल प्राप्त करते हैं।

आइए, अब देखें कि ऊपर दिए उदाहरण में प्रयोग की गई विधि को व्यापक रूप में किस प्रकार एक दिए हुए समीकरण, जिसका असमघात पद एक बहुपद हैं, के जाँच हल का उपयुक्त चुनाव करने में किया जा सकता है।

समीकरण (1) पर विचार कीजिए मान लीजिए असमघात पद $b(x)$ घात k का एक बहुपद है, जो निम्न से दिया गया है :

$$b(x)=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_{k-1}x+b_k=B_k(x),$$

जहाँ $b_0, b_1, \ldots, b_k$ ज्ञात अचर हैं।

ऊपर दिए $b(x)$ से, समीकरण (1) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny$$

$$=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_{k-1}x+b_k \qquad (3)$$

अब क्योंकि समीकरण (3) का दायाँ पक्ष घात k का एक बहुपद है, इसलिए हम विशेष समाकल को $y_p(x)=A_0x^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_{k-1}x+A_k=P_k(x)$ के रूप का सोच सकते हैं, जहाँ $A_0, A_1, \ldots, A_k$ मालूम किए जाने वाले अचर हैं।

अचरों $A_0, A_1, \ldots, A_k$ को मालूम करने के लिए, हम y_p और उसके अवकलजों के मानों को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करते हैं तथा समीकरण (3) के दोनों पक्षों में x के समान घात वाले गुणांकों की तुलना करते हैं। x^k के गुणांकों की तुलना करने पर, हम $a_nA_0=b_0$ प्राप्त करते हैं।

यदि $a_n\neq 0$, तो हमें $A_0=\dfrac{b_0}{a_n}$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार $y_p(x)$ में अचर

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ मालूम करने के लिए हम दोनों पक्षों के $x^{k-1}, x^{k-2}, \ldots, x^0$ के गुणांकों की तुलना करते हैं।

यदि $a_n = 0$ अर्थात्, समीकरण (3) में y का गुणांक शून्य है, तो स्पष्टतः शून्य संगत सहायक समीकरण का मूल होगा, अर्थात्, समीकरण (3) के संगत समघात अवकल समीकरण का मूल होगा और इसी कारण $y =$अचर, इसका हल होगा। ऐसी स्थिति में, $A_0 = \frac{b_0}{a_n}$ अनिर्धारित रहेगा तथा सभी गुणांकों $A_0, A_1, \ldots, A_k$ को मालूम कर पाना हमारे लिए संभव नहीं होगा। उदाहरण के लिए, निम्न समीकरण पर विचार कीजिए :

$$y''' + y'' + y' = x^2 + x \tag{4}$$

यहाँ समीकरण (4) के बाएँ पक्ष में y का कोई पद नहीं है, अर्थात् y का गुणांक शून्य है। इसलिए शून्य समीकरण (4) के संगत समघात समीकरण का मूल है। साथ ही, $b(x) = x^2 + x$ घात 2 का एक बहुपद है। अब, यदि हम $y_p(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2$ के रूप का एक जाँच हल लें, तो समीकरण (4) में y'_p, y''_p और y'''_p के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम $2A_0 + 2A_0x + A_1 = x^2 + x$ प्राप्त करते हैं। यहाँ आप यह ध्यान दे सकते हैं कि इस समीकरण में x की विभिन्न घातों के गुणांकों की तुलना करने पर, हम $A_0 = \frac{1}{2}$ और $A_1 = -1$ प्राप्त करते हैं। हम गुणांक A_2 का मान प्राप्त नहीं कर सकते। परंतु, यदि हम $x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$ के रूप के जाँच हल पर विचार करें, तो आप देख सकते हैं कि हम तीनों गुणांकों के मान $A_0 = \frac{1}{3}$, $A_1 = -\frac{1}{2}$ और $A_2 = -1$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार समीकरण (4) का एक विशेष समाकल $y_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ प्राप्त होता है।

समीकरण (3) पर वापस से विचार करें। अब हम कह सकते हैं कि जब $a_n = 0$, तब kवीं घात के बहुपद $P_k(x)$ के स्थान पर घात $(k+1)$ वाले बहुपद $xP_k(x)$ को जाँच हल लिया जाता है। इस जाँच हल को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर, यदि $a_{n-1} \neq 0$ हो तो हमें समीकरण (3) के बाएँ पक्ष में वह पद प्राप्त होता है जो समीकरण (3) के दाएँ पक्ष के पद b_0x^k को संतुलित कर देता है।

यदि $a_n = 0$ और $a_{n-1} = 0$, तो शून्य समीकरण (3) के संगत समघात अवकल समीकरण का पुनरावर्ती मूल होगा तथा इसके परिणामस्वरूप, $y =$अचर और $y = x$ इसके हल होंगे। ऐसी स्थिति में, हम b_0x^k के विरूद्ध संतुलन बनाए रखने के लिए, घात $(k+2)$ वाले बहुपद $x^2P_k(x)$ के रूप का एक जाँच हल लेते हैं, जबकि $a_{n-2} \neq 0$ हो।

व्यापक रूप में, आइए कल्पना करें कि समीकरण (3) में n गुणांकों $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n$ में से अंतिम r गुणांक, अर्थात् $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-(r-1)}$ शून्य हैं परंतु, $a_{n-r} \neq 0$, तब शून्य समीकरण (3) के संगत सहायक समीकरण का r बार पुनरावर्ती मूल होगा। ऐसी स्थिति में, हम बहुपद $P_k(x)$ को x^r से गुणा करते हैं तथा घात $(k+r)$ वाले बहुपद $x^rP_k(x)$ को जाँच

हल मानते हैं। ऊपर चर्चा की गई विधि को अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 1: अनिर्धारित गुणांक विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=x^3+2x+1$$

का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^4+m^2+m+1=0$$

यहाँ शून्य इस सहायक समीकरण का मूल नहीं है।

साथ ही, दिए हुए अवकल समीकरण, में असमघात पद, अर्थात्, x^3+2x+1 घात 3 का एक बहुपद है। अतः, एक उपयुक्त जाँच हल घात 3 का एक बहुपद होगा। हम इसे निम्न रूप में लेते हैं :

$$y_p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

जहाँ A, B, C और D मालूम किए जाने वाले अचर हैं।

दिए हुए अवकल समीकरण में, y_p और उसके अवकलजों के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(3Ax^2+2Bx+C)+(6Ax+2B)+0$$

$$=x^3+2x+1 \tag{5}$$

समीकरण (5) के दोनों पक्षों में x के समान घात वाले गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left.\begin{array}{lll} x^3 & \text{के गुणांक} : & A=1 \\ x^2 & \text{के गुणांक} : & B+3A=0 \\ x & \text{के गुणांक} : & C+2B+6A=2 \\ x^0 & \text{के गुणांक} : & D+C+2B=1 \end{array}\right] \tag{6}$$

समीकरण समुच्चय (6) को A, B, C और D के लिए हल करने पर, हम

$A=1,\ B=-3,\ C=2$ और $D=5$ प्राप्त करते हैं।

अतः, दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल $y_p(x)=x^3-3x^2+2x+5$.

***

आइए, अब हम ऐसे उदाहरण लें जिनमें शून्य, सहायक समीकरणों का एक मूल है।

उदाहरण 2: अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$ का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए अवकल समीकरण का सहायक समीकरण है :

$$m(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 0, -1$$

इस प्रकार पूरक फलन को

$$y_c = c_1 + c_2 e^{-x}$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं।

क्योंकि 0, सहायक समीकरण का एक मूल है, इसलिए अचर c_1 संगत समघात अवकल समीकरण का एक हल है। साथ ही, इस स्थिति में, असमघात पद घात 2 का है इसलिए हम जाँच हल निम्न रूप का लेते हैं :

$$y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

y_p और उसके अवकलजों के मानों को दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(3Ax^2 + 2Bx + C) + (6Ax + 2B) = x^2 + 2x$$

दोनों पक्षों में x के समान घात वाले गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

x^2 के गुणांक : $3A = 1$

x के गुणांक : $2B + 6A = 2$

x^0 के गुणांक : $C + 2B = 0$

A, B और C के लिए, रैखिक समीकरण के ऊपर दिए समुच्चय को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$A = \frac{1}{3},\ B = 0,\ C = 0$$

अतः दिए हुए अवकल समीकरण का, विशेष समाकल है :

$$y_p(x) = \frac{1}{3}x^3.$$

***

उदाहरण 3: समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 2x^3$ का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण का सहायक समीकरण है :

$$m^3 - m^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^2(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 0, 0, 1$$

अतः, शून्य, सहायक समीकरण का एक द्विक मूल (double root) है।

पूरक फलन को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$y_c = c_1 + xc_2 + c_3 e^x,$$

c_1, c_2 और c_3 अचर हैं।

क्योंकि असमघात पद घात 3 का है तथा 0 समीकरण का एक द्विक मूल है, इसलिए हम निम्न रूप का जाँच हल लेते हैं :

$$y_p(x) = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2$$

दिए हुए समीकरण में y_p और उसके अवकलजों को प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$(60Ax^2 + 24Bx + 6C) - (20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D) = 2x^3$$

प्राप्त करते हैं। दोनों पक्षों में x के समान घात वाले गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

x^3 गुणांक : $-20A = 2$

x^2 गुणांक : $60A - 12B = 0$

x गुणांक : $24B - 6C = 0$

x^0 गुणांक : $6C - 2D = 0$

A, B, C और D के लिए, ऊपर प्राप्त रैखिक समीकरण समुच्चय को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$A = \frac{-1}{10}, B = \frac{-1}{2}, C = -2, D = -6$$

अतः दिए हुए अवकल समीकरण का विशेष समाकल है :

$$y_p = \frac{-x^5}{10} - \frac{x^4}{2} - 2x^3 - 6x^2$$

$$= -\left(\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 6x^2\right)$$

***

ऊपर चर्चित की गई विधि का प्रयोग करते हुए, अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) निम्न अवकल समीकरणों के लिए, विशेष समाकल का एक उपयुक्त रूप लिखिए :

i) $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=x^2+1$$

ii) $$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=x^2$$

E2) निम्न अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

i) $$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=4x^2$$

ii) $$\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}=x$$

अब हम उस स्थिति को लेंगे जब $b(x)$ एक चरघातांकी फलन हो। इस स्थिति में भी एक जाँच हल का उपयुक्त चुनाव करने में प्रयुक्त तर्क वैसा ही है जैसा उप-भाग 11.2.1 में प्रयुक्त किया गया था।

आइए देखें कि यह विधि किस प्रकार कार्य करती है।

11.2.2 असमघात पद एक चरघातांकी फलन हो

आइए एक सरल उदाहरण से प्रारंभ करें तथा समीकरण

$$y''-y=e^x \tag{7}$$

का विशेष समाकल ज्ञात करने का प्रयास करें।

जैसा कि हम पहले भी बता चुके हैं, एक चरघातांकी फलन का अवकलन या समाकलन पुनः एक चरघातांकी फलन होता है। इसलिए, हम समीकरण (7) का जाँच हल $y_p(x)=Ae^x$ के रूप का सोच सकते हैं और फिर गुणांक A का मान मालूम करने का प्रयास कर सकते हैं।

समीकरण (7) में $y_p(x)$ और $y_p''(x)$ प्रतिस्थापित करने पर, हम $Ae^x-Ae^x=e^x$ प्राप्त करते हैं, जो निरर्थक है। इस प्रकार, हमारे द्वारा लिए गए जाँच हल से उद्देश्य पूरा नहीं हुआ। आप यहाँ यह **ध्यान** दे सकते हैं कि क्योंकि समीकरण (7) के संगत समघात समीकरण का एक मूल 1 है इसलिए $y(x)=e^x$ समघात समीकरण का हल होगा। इसलिए समीकरण (7) का एक विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, $y_p(x)=Axe^x$ के रूप का एक जाँच हल लेते हैं। y_p और y_p'' के मान समीकरण (7) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$Axe^x+2Ae^x-Axe^x=e^x$$

जिससे $A=\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है और समीकरण (7) का एक विशेष समाकल

$y_p(x) = \frac{x}{2}e^x$ हो जाता है।

ऊपर दी गयी विधि व्यापक रूप में समीकरण (1) के लिए लागू की जा सकती है, जब $b(x)$ एक चरघातांकी फलन $e^{\alpha x}$ (α एक अचर) हो तथा समीकरण (1) निम्न रूप का हो :

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = e^{\alpha x} \tag{8}$$

समीकरण (8) को हल करने के लिए, जाँच हल का एक उपयुक्त रूप

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x} \tag{9}$$

लिया जा सकता है, जहाँ $e^{\alpha x}$ समीकरण (8) के संगत समघात अवकल समीकरण का हल नहीं होना चाहिए। अर्थात् α संगत सहायक समीकरण का मूल नहीं हो।

यदि α समीकरण (8) के संगत सहायक समीकरण का मूल होगा, तो समीकरण (9) से हमें $Ae^{\alpha x}.0 = e^{\alpha x}$ प्राप्त होगा, जिससे A का मान मालूम नहीं किया जा सकता।

ऐसी स्थिति में, हम जाँच हल $y_p(x) = Axe^{\alpha x}$ लेते हैं, जो हमें A का मान मालूम करने के लिए एक संबंध प्रदान करता है। इसी प्रकार, यदि α सहायक समीकरण का r बार पुनरावर्ती मूल है, तो विशेष समाकल मालूम करने के लिए, जाँच हल का उपयुक्त रूप $y_p(x) = Ax^r e^{\alpha x}$ होगा। और तब, A का मान दिए हुए समीकरण में y_p और उसके अवकलजों को प्रतिस्थापित करके और फिर $e^{\alpha x}$ के गुणांकों की तुलना करके मालूम किया जा सकता है।

आइए इस विधि को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 4: अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+1)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -1, -2$$

$$\therefore \quad C.F. = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

क्योंकि e^x पूरक फलन का एक भाग नहीं है, इसलिए विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, जाँच हल $y_p(x) = Ae^x$ लिया जा सकता है, जहाँ अचर A मालूम किया जाना है।

y_p के इस मान को दिए गए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2Ae^{x}+3Ae^{x}+Ae^{x}=3e^{x}$$

$$\Rightarrow \quad 6Ae^{x}=3e^{x}$$

$$\Rightarrow \quad 6A=3 \quad \text{या} \quad A=\frac{1}{2}$$

अतः, $P.I.=\frac{1}{2}e^{x}$

$\therefore$ दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है :

$$y=C.F.+P.I$$

$$=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{x}.$$

***

उदाहरण 5: अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=3e^{2x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2-3m+2=0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad m=1,2$$

$\therefore \quad C.F.=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

क्योंकि 2 सहायक समीकरण का एक मूल है तथा असमघात पद e^{2x} पूरक फलन का एक भाग है, इसलिए हम $y_p(x)=Axe^{2x}$ के रूप का एक जाँच हल लेते हैं।

दिए हुए समीकरण में $y_p(x)$ और उसके अवकलजों के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$4Ae^{2x}+4Axe^{2x}-3(Ae^{2x}+2Axe^{2x})+2Axe^{2x}=3e^{2x}$$

प्राप्त करते हैं। समीकरण के दोनों पक्षों में e^{2x} के गुणांकों की तुलना करने पर, हम $4A-3A=3 \Rightarrow A=3$ प्राप्त करते हैं।

अतः, $\text{P.I.}=y_p(x)=3xe^{2x}$

$\therefore$ दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है :

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+3xe^{2x}$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण लें जो एक सहायक समीकरण के पुनरावर्ती मूलों की स्थिति को स्पष्ट करता है।

उदाहरण 6: $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 12e^x$ को हल कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$(m-1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1, 1, 1$$

$$\therefore \quad C.F = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\ e^x$$

क्योंकि दिए हुए अवकल समीकरण का असमघात पद e^x है, जो पूरक फलन में उपस्थित है तथा साथ ही सहायक समीकरण के मूल 1 की 3-बार पुनरावर्ती हो रही है, इसलिए हम जाँच हल निम्न रूप में लेते हैं।

$$y_p\ (\mathrm{x}) = Ax^3e^x$$

आप यहाँ जाँच कर सकते हैं कि ऊपर लिए जाँच हल $y_p(x)$ में, x की घात इससे छोटी लेने पर हमें विशेष समाकल प्राप्त नहीं होगा। साथ ही, जाँच हल का रूप दिए हुए समीकरण के पूरक फलन के किसी भी पद के समान नहीं है।

y_p के इस मान को दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$-Ax^3e^x + 3A[x^3e^x + 3x^2e^x] - 3A[x^3e^x + 6x^2e^x + 6xe^x]$$

$$+ A[x^3e^x + 9x^2e^x + 18xe^x + 6e^x] = 12e^x$$

प्राप्त करते हैं। दोनों पक्षों में e^x के गुणांकों की तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$6A = 12, \Rightarrow A = 2$$

इस प्रकार, $P.I. = 2x^3e^x$

$\therefore$ दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\ e^x + 2x^3e^x.$$

***

अब आप निम्न प्रश्न करते समय ऊपर दी गयी विधि की अपनी समझ की जाँच कर सकते हैं।

E3) निम्न अवकल समीकरणों के विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

i) $\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{dy}{dx} = e^{-2x}$

ii) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

आपके सम्मुख ऐसी भी स्थिति आ सकती है जब समीकरण (1) में $b(x)$ दो या अधिक फलनों का योग हो। मान लीजिए कि $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$. यदि $y_p(x)$, $y_{p_1}(x)$ और $y_{p_2}(x)$ क्रमशः असमघात पदों $b(x), b_1(x)$ और $b_2(x)$ के संगत समीकरण (1) के विशेष समाकल हैं, तो अध्यारोपण नियम से हम $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार हम रैखिक समीकरण (1) को हल करने के प्रश्न को आसान प्रश्नों में बांट सकते हैं, जैसा कि आगे आने वाले उदाहरणों में स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 7: अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x + 4$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1, 1.$$

$\therefore \quad C.F. = (c_1 + xc_2)\, e^x$

विशेष हल ज्ञात करने के लिए पहले हम समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \qquad (10)$$

पर विचार करते हैं। क्योंकि 1 सहायक समीकरण का एक द्विक मूल है तथा e^x पूरक फलन में उपस्थित है, इसलिए हम निम्नलिखित जाँच हल लेते हैं।

$$y_{p_1} = Ax^2e^x$$

y_{p_1} और उसके अवकलजों के मानों को समीकरण (10) में प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$(2Ae^x + 4xAe^x + x^2Ae^x) - 2(2xAe^x + x^2Ae^x) + Ax^2e^x = e^x$$

प्राप्त करते हैं। दोनों पक्षों में e^x के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$2Ae^x = e^x$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y_{P_1} = \frac{x^2}{2}e^x$$

अब निम्न समीकरण पर विचार कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 4 \qquad (11)$$

क्योंकि असमघात पद एक अचर है, इसलिए हम $y_{p_2} = A$ लेकर प्रयास करते हैं। हम पाते हैं कि $A = 4$ समीकरण (11) को संतुष्ट करता है। अतः, $y_{p_2} = 4$ तथा दिए हुए समीकरण का विशेष हल है :

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{x^2}{2} e^x + 4.$$

और तब व्यापक हल निम्न होगा :

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 4 + \frac{x^2}{2} e^x.$$

***

आइए अब हम ऐसा उदाहरण लें, जिसमें असमघात पद $b(x)$ एक बहुपद और एक चरघातांकी पद का योग है।

उदाहरण 8 : अवकल समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल: सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1, 2$$

$$\therefore \ C.F. = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

विशेष हल ज्ञात करने के लिए, पहले हम समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 \tag{12}$$

पर विचार करते हैं। यहाँ असमघात पद $2x^2$ घात 2 का एक बहुपद है। अतः, हम निम्नलिखित जाँच हल लेते हैं।

$$y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C.$$

समीकरण (12) में y_{p_1} और उसके अवकलजों के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम $2(Ax^2 + Bx + C) - 3(2Ax + B) + 2A = 2x^2$

प्राप्त करते हैं।

दोनों पक्षों में x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर और हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$A = 1,\ B = 3 \text{ और } c = \frac{7}{2}$$

y_{p_1} में A, B और C के इन मानों को रखने पर, हम

$$y_{p_1} = x^2 + 3x + \frac{7}{2}.$$

प्राप्त करते हैं।

अब निम्न समीकरण पर विचार कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^{2x} \qquad (13)$$

उदाहरण 5 में, हम समीकरण (13) का एक विशेष समाकल $y_{p_2} = 3xe^{2x}$ के रूप में पहले ही प्राप्त कर चुके हैं।

अतः दिए हुए समीकरण का विशेष हल

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$= x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 3xe^{2x}.$$

और तब दिए हुए समीकरण का व्यापक हल निम्न होगा :

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 3xe^{2x}.$$

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E4) निम्न अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

i) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 + e^x$$

ii) $$2\frac{d^2y}{dx^2} + 8y = x^3 + e^{2x}$$

E5) निम्न आदि-मान समस्याओं को हल कीजिए :

i) $$\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^{2x},\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$$

ii) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y + e^{2x} = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$$

अब हम उस स्थिति को लेते हैं जब समीकरण (1) में $b(x)$ या तो साइन या फिर कोसाइन फलन है। `

11.2.3 असमघात पद एक साइन या कोसाइन फलन हो

उप-भागों 11.2.1 और 11.2.2 का अध्ययन करने तथा वहाँ दिए हुए प्रश्नों को हल करने के बाद, आप जानते हैं कि किस प्रकार $b(x)$ के साथ कार्य किया जाता है, जबकि यह एक बहुपद, एक चरघातांकी फलन या दोनों का योग होता है। अब हम उस स्थिति की चर्चा करेंगे जब $b(x)$ एक साइन या कोसाइन फलन हो।

हम जानते हैं कि साइन या कोसाइन फलन $\sin\beta x$ या $\cos\beta x$ का अवकलज पुनः एक साइन या कोसाइन फलन या उनका रैखिक संयोजन होता है। अतः, यदि अवकल समीकरण (1) का असमघात पद $b(x)$ निम्न रूप का हो :

$$b(x) = \alpha_1 \sin\beta x \text{ या } \alpha_2 \cos\beta x \text{ या },\ \alpha_1 \sin\beta x + \alpha_2 \cos\beta x$$

तो हम जाँच हल

$$y_p(x) = A\cos\beta x + \beta \sin\beta x \tag{14}$$

के रूप का लेते हैं, जबकि $\pm i\beta$ दिए हुए अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण के मूल नहीं हों, क्योंकि मूल होने की स्थिति में पद $\sin\beta x$ और $\cos\beta x$ समीकरण के पूरक फलन में शामिल होंगे।

यदि $\pm i\beta$ सहायक समीकरण के मूल हों और मान लीजिए कि इनकी r-बार पुनरावर्ती हो, तो हम जाँच हल का रूप

$$y_p(x) = x^r\ (A\cos\beta x + B\sin\beta x) \tag{15}$$

लेते हैं, जहाँ A और B मालूम किए जाने वाले अचर हैं। A और B को प्राप्त करने के लिए, हम वही प्रक्रिया अपनाएँगे जैसी हम ऊपर करते आ रहे हैं तथा समीकरण (1) में (14) या (15) के रूप के $y_p(x)$ के मान, जो भी लागू हो, प्रतिस्थापित करेंगे।

परिणामी समीकरण के दोनों पक्षों में, $\sin\beta x$ और $\cos\beta x$ के गुणांकों की तुलना करने पर, ज्ञात राशियों के पदों में A और B के मान प्राप्त किए जाते हैं। A और B के मान ज्ञात हो जाने पर, संबंधों (14) और (15) से समीकरण (1) का विशेष समाकल प्राप्त हो जाता है।

अब हम इस विधि को कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 9: अवकल समीकरण

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल: सहायक समीकरण है :

$$(m^4 - 2m^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m^2-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1,\, 1,\, -1,\, -1$$

$$\therefore \quad C.F. = (c_1 + c_2 x)\, e^{x} + (c_3 + c_4 x)\, e^{-x}$$

क्योंकि $\pm i$ सहायक समीकरण का मूल नहीं है, इसलिए पद $\sin x$, जो इस स्थिति में असमघात पद है, पूरक फलन में प्रकट नहीं होता। इसलिए, हम जाँच हल $y_p(x) = A\sin x + B\cos x$ के रूप का ले सकते हैं।

दिए हुए अवकल समीकरण में, y_p के इस मान और उसके अवकलजों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(A\sin x + B\cos x) - 2(-A\sin x - B\cos x) + (A\sin x + B\cos x) = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad 4A\sin x + 4B\cos x = \sin x$$

दोनों पक्षों में $\sin x$ और $\cos x$ के गुणांकों की तुलना करने पर, हम पाते हैं :

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

तथा $\quad 4B = 0 \Rightarrow B = 0.$

इस प्रकार, $y_p(x) = \dfrac{1}{4}\sin x$.

तथा दिए हुए अवकल समीकरण का पूर्ण हल निम्न है :

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + (c_3 + c_4 x)\, e^{-x} + \frac{1}{4}\sin x$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 10: आदि-मान समस्या

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 2\cos x,\; y(0) = 1,\; y'(0) = 0$$

को हल कीजिए।

हल: सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm\, i$$

$$\Rightarrow \quad C.F. = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

अब क्योंकि $\pm i$ सहायक समीकरण का मूल है, इसलिए $\cos x$ स्वयं पूरक फलन में है। इसलिए हम जाँच हल निम्न रूप का लेते हैं :

$$y_p(x) = x\,(A\sin x + B\cos x).$$

दिए हुए समीकरण में, $y_p(x)$ और उसके अवकलजों के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2(A\cos x - B\sin x) + x(-A\sin x - B\cos x) + x(A\sin x + B\cos x) = 2\cos x$$

$$\Rightarrow \quad 2A\cos x - 2B\sin x = 2\cos x$$

दोनों पक्षों में, $\sin x$ और $\cos x$ के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1 \text{ और } B = 0.$$

अतः, $y_p(x) = x\sin x$

तथा दिए हुए समीकरण का व्यापक हल $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x$.

अब हम c_1 और c_2 मालूम करने के लिए, आदि प्रतिबंधों का प्रयोग करते हैं।

$y(0) = 1$ से $c_1 = 1$ प्राप्त होता है

तथा $y'(0) = 0$ से $c_2 = 0$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, $y(x) = \cos x + x\sin x$.

***

अब, आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E6) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^2y}{dx^2} = \sin 2x$$

ii) $$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = 2\cos x$$

E7) निम्न आदि मान समस्याओं को हल कीजिए :

i) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$$

ii) $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x - \sin 2x,\ y(0) = \frac{-7}{20},\ y'(0) = \frac{1}{5}$$

अब तक दिए गए उदाहरणों में, आपने यह ध्यान दिया होगा कि फलन $b(x)$ से स्वयं ही विशेष हल $y_p(x)$ के रूप का अंदाजा लग जाता है। इससे सुझाव मिलता है कि हम फलनों $b(x)$ की सूची, जिनके लिए अनिर्धारित गुणांक विधि लागू की जा सकती है, का विस्तार इन फलनों के गुणनफलों को शामिल करके कर सकते हैं। अब हम ऐसी स्थितियों पर चर्चा करेंगे।

11.2.4 असमघात पद एक चरघातांकी, एक बहुपद और एक ज्यावक्रीय फलन का गुणनफल हो

आइए पहले निम्न अवकल समीकरण को लेते हैं तथा इसे हल करने का प्रयास करते हैं :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=-xe^{4x} \tag{16}$$

समीकरण (16) का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^2+6m+9=0=(m+3)^2$$

इस प्रकार -3 समीकरण का एक द्विक मूल है तथा समीकरण (16) का पूरक फलन $C.F.=(c_1+xc_2)e^{-3x}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं।

आइए समीकरण (16) में असमघात पद को लेते हैं। यह घात एक का एक बहुपद, x, तथा चरघातांकी पद e^{4x} का एक गुणनफल है। अब, क्योंकि e^{4x} पूरक फलन में नहीं है इसलिए पहले की गयी विधियों की हमारी समझ के आधार पर हम

$$y_p(x)=(A+xB)e^{4x} \tag{17}$$

के रूप का एक जाँच हल लेते हैं, जहाँ A और B मालूम किए जाने वाले अचर हैं।

आइए अब $y_p(x)$ और उसके अवकलजों के मानों को समीकरण (16) में रखें तथा A और B मालूम करने का प्रयास करें। हम प्राप्त करते हैं :

$$y_p'=4Ae^{4x}+Be^{4x}+4Bxe^{4x}$$

$$y_p''=16A\,e^{4x}+8B\,e^{4x}+16Bxe^{4x}$$

y_p, y_p' और y_p'' के इन मानों को समीकरण (16) में प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$49Ae^{4x}+14Be^{4x}+49x\,Be^{4x}=-x\,e^{4x}$$

प्राप्त करते हैं।

ऊपर प्राप्त समीकरण में, e^{4x} और xe^{4x} के गुणांकों की तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$B=-\dfrac{1}{49}$ और $A=\dfrac{2}{343}$.

इस प्रकार, समीकरण (17) से, हम समीकरण (16) का विशेष हल

$$y_p(x)=\frac{2e^{4x}}{343}-\frac{x}{49}e^{4x}$$

के रूप में प्राप्त करते हैं।

तब, समीकरण (16) का व्यापक हल निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y = (c_1 + xc_2)e^{-3x} - \frac{x}{49}e^{4x} + \frac{2}{343}e^{4x}.$$

ऊपर दी गयी विधि को समीकरण (1) का हल ज्ञात करने के लिए व्यापीकृत किया जा सकता है, जब $b(x)$ निम्न रूप का हो :

$$b(x) = e^{\alpha x}[b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_{k-1}x + b_k] = e^{\alpha x} P_k(x).$$

$b(x)$ के इस रूप के साथ, समीकरण (1) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y$$

$$= e^{\alpha x}[b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_{k-1}x + b_k] \quad (18)$$

तथा इसका जाँच हल निम्न रूप में लिया जा सकता है :

$$y_p(x) = e^{\alpha x}[A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k] \quad (19)$$

जबकि α समीकरण (18) के संगत, सहायक समीकरण का मूल नहीं हो। यदि α सहायक समीकरण का मूल है, मान लीजिए यह मूल r-बार पुनरावर्ती है, तो हम जाँच हल को निम्न रूप में संशोधित कर ,लेते हैं :

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x}[A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k] \quad (20)$$

जहाँ $A_0, A_1, \ldots, A_k$ वे अचर हैं जिन्हें मालूम किया जाता है।

याद रखिए कि समीकरण (20) में x की अन्य कोई भी छोटी घात एक विशेष समाकल प्रदान नहीं करेगी। यहाँ r वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है जिसके लिए जाँच हल (20) का प्रत्येक पद समीकरण (18) के संगत पूरक फलन के सभी पदों से भिन्न होगा।

अचरों $A_0, A_1, \ldots, A_k$ को मालूम करने के लिए समीकरण (19) या (20) के रूप के $y_p(x)$, जैसी भी स्थिति हो, को समीकरण (18) में प्रतिस्थापित करें और फिर परिणामी समीकरण के दोनों पक्षों में $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \ldots$ इत्यादि के गुणांकों की तुलना करें। ऊपर हमने जो भी चर्चा की है, उसे अच्छी प्रकार से समझने के लिए, आइए नीचे कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 11: अवकल समीकरण $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} = xe^{-x}$

का हल प्राप्त कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है

$$m^3 - m = 0$$

$$\Rightarrow \quad m(m^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 0, -1, 1$$

$\therefore \quad C.F. = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x}$

यहाँ असमघात पद xe^{-x} है। साथ ही, e^{-x} पूरक फलन में प्रकट हो रहा है। क्योंकि (-1) सहायक समीकरण का एक ऐसा मूल है जिसकी पुनरावर्ती नहीं हो रही है, इसलिए हम निम्न रूप का जाँच हल लेते हैं :

$$y_p(x) = [Ax + B]\, x\, e^{-x} = Ax^2 e^{-x} + Bxe^{-x}$$

y_p और उसके अवकलजों के मान दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$-A[-x^2 e^{x} + 2xe^{-x}] + A[-x^2 e^{-x} + 6xe^{-x} - 6e^{-x}] - B(-xe^{-x} + e^{-x}) +$$

$$B(-xe^{-x} + 3e^{-x}) = xe^{-x}$$

ऊपर दिए समीकरण को सरल करने तथा दोनों पक्षों में xe^{-x} और e^{-x} के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

तथा $\quad -6A + 2B = 0 \Rightarrow B = \frac{3}{4}.$

अतः $\quad y_p(x) = \frac{1}{4} x^2 e^{-x} + \frac{3}{4} xe^{-x} = \frac{e^{-x}}{4}(x^2 + 3x).$

तथा दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल निम्न है :

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} + \frac{e^{-x}}{4}\,(x^2 + 3x).$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 12: अवकल समीकरण $\frac{d^3 y}{dx^3} + 3\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}(2 - x^2)$ को हल कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 + 2m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -1, -1, -1$$

$\therefore C.F. = (c_1 + xc_2 + x^2 c_3)\, e^{-x}.$

यहाँ मूल -1 तीन बार आ रहा है तथा e^{-x} पूरक फलन में प्रकट हो रहा है। इसलिए, हम जाँच हल निम्न रूप का लेते हैं :

$$y_p(x) = x^3 e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) = e^{-x}(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3)$$

दिए हुए समीकरण में, y_p और उसके अवकलजों के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$e^{-x}(60Ax^2 + 24Bx + 6C) = 2e^{-x} - x^2 e^{-x}$$

प्राप्त करते हैं।

$e^{-x}x^2$ के गुणांक की तुलना करने पर : $60A = -1 \Rightarrow A = -1/60$

$e^{-x}x$ के गुणांक की तुलना करने पर : $24B = 0 \Rightarrow B = 0$

e^{-x} के गुणांक की तुलना करने पर : $6C = 2 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

$y_p(x)$ में, A, B और C के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$y_p(x) = \frac{x^3 e^{-x}}{60}(20 - x^2)$$

प्राप्त करते हैं।

दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = (c_1 + xc_2 + x^2 c_3)e^{-x} + \frac{x^3 e^{-x}}{60}(20 - x^2)$$

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E8) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = x^2 e^{3x}$$

ii) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 4x\,e^{2x}$$

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेते हैं, जिसमें $b(x)$ एक बहुपद, एक चरघातांकी और एक ज्यावक्रीय फलन का गुणनफल है।

उदाहरण 13: समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = x^2 e^{-x}\sin x$ के लिए एक जाँच हल का रूप लिखिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 2m + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow \quad C.F = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

इस स्थिति में, असमघात पद घात 2 के एक बहुपद x^2, एक चरघातांकी फलन e^{-x} तथा एक साइन फलन $\sin x$ का गुणनफल है। असमघात पद में आने वाला गुणनफल $e^{-x}\sin x$ दिए हुए समीकरण के पूरक फलन का भाग नहीं है। अतः उप-भागों 11.2.1 - 11.2.3 में चर्चा की गई विधियों की अपनी समझ के अनुसार, जाँच हल का उपयुक्त रूप निम्न है :

$$y_p = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2) e^{-x} (B_0 \sin x + B_1 \cos x),$$

जहाँ A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 वे अचर हैं जिन्हें मालूम किया जाना है। इसके समतुल्य जाँच हल y_p को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y_p = (A + Bx + Cx^2)e^{-x} \sin x + (D + Ex + Fx^2)\bar{e}^{x} \cos x$$

जहाँ A, B, C, D, E और F अचर हैं। इन अचरों को दिए हुए समीकरण में y_p और उनके अवकलजों को प्रतिस्थापित करके तथा फिर परिणामी समीकरण के दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करके मालूम किया जा सकता है।

***

व्यापक रूप में, मान लीजिए कि समीकरण (1) में असमघात पद $b(x)$ निम्न दो रूपों में से कोई एक रूप का है :

$$b(x) = e^{\alpha x} B_k(x) \sin \beta x \text{ या } b(x) = e^{\alpha x} B_k(x) \cos \beta x \qquad (21)$$

जहाँ $B_k(x)$, जैसे कि समीकरण (4) में दिया गया है, घात k या उससे कम का एक बहुपद है तथा α और β कोई वास्तविक संख्याएँ हैं। तब, जाँच हल को

$$y_p(x) = (A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_k)\, e^{\alpha x} \cos \beta x +$$

$$(B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + \cdots + B_k)\, e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

रूप का लिया जा सकता है, जबकि $\alpha \pm i\beta$ सहायक समीकरण के मूल नहीं हों, अन्यथा पद $e^{\alpha x} \cos\beta x$ या $e^{\alpha x} \sin \beta x$ दिए हुए समीकरण के पूरक हल में पहले से ही उपस्थित होंगे। यहाँ $A_0, A_1, \ldots, A_k, B_0, B_1, \ldots, B_k$ वे अचर हैं जिन्हें मालूम किया जाना है।

ऐसी स्थितियों में, जब $(\alpha \pm i\beta)$ मूल हैं तथा मान लीजिए इनकी पुनरावर्ती सहायक समीकरण के मूल के रूप में r-बार होती है, तब जाँच हल को x^r से गुणा करके उसे संशोधित कर लिया जाता है। इसे हम नीचे कुछ उदाहरणों के द्वारा स्पष्ट कर रहे हैं।

उदाहरण 14: अवकल समीकरण

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}=3e^x+2xe^{-x}+e^{-x}\sin x$$

के लिए, जाँच हल का एक उपुयक्त रूप लिखिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^4+2m^3+2m^2=0$$

$$\Rightarrow \quad m^2(m^2+2m+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad m=0,\ 0,\ -1\pm i$$

$$\therefore \quad C.F.=c_1+c_2x+e^{-x}(c_3\sin x+c_4\cos x)$$

यहाँ असमघात पद $3e^x+2xe^{-x}+e^{-x}\sin x$ है। क्योंकि पद $e^{-x}\sin x$, $C.F.$ में भी उपस्थित है, इसलिए जाँच हल का उपयुक्त रूप निम्न है :

$$y_p=Ae^x+(Bx+C)\,e^{-x}+xe^{-x}\,(D\cos x+E\sin x)$$

जहाँ A, B, C, D और E मालूम किए जाने वाले अचर हैं।

***

उदाहरण 15: अवकल समीकरण

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=x\sin x$$

के लिए जाँच हल का उपयुक्त रूप लिखिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^4+2m^2+1=0$$

$$\Rightarrow \quad (m^2+1)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad m=\pm i,\ \pm i$$

$$\therefore \ C.F.=(c_1+xc_2)\cos x+(c_3+xc_4)\sin x$$

यहाँ $\pm i$ समीकरण का द्विक मूल है तथा असमघात पद $x\sin x$ पूरक फलन का भाग भी है। तब जाँच हल का उपयुक्त रूप निम्न होगा :

$$y_p=x^2[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$

जहाँ A, B, C और D मालूम किए जाने वाले अचर हैं।

***

अब आपके लिए कुछ प्रश्न हैं।

E9) निम्न में से प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए, जाँच हल का एक रूप लिखिए:

i) $$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+3y = x\cos 3x - \sin 3x$$

ii) $$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+5y = xe^{-x}\cos 2x$$

iii) $$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y = xe^{x}\cos 2x$$

iv) $$\frac{d^2y}{dx^2}+y = x^2\sin x$$

v) $$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y = xe^{2x}\sin x$$

E10) निम्न अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

i) $$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{dy}{dx} = x+3\cos x+e^{-2x}$$

ii) $$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx} = x^2+4+x\sin x$$

iii) $$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx} = x^3+\cos x$$

उप-भागों 11.2.1 – 11.2.4 में चर्चा की गई विधियों का अध्ययन करने तथा प्रत्येक उप-भाग के अंत में दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास करने के बाद, आपने अवश्य ही इस विधि के प्रयोग के लाभ को देख लिया होगा। कई बार आपने इस विधि के प्रयोग में आई जटिलताओं को भी महसूस किया होगा। आइए, अब हम इस विधि के प्रेक्षणों और व्यवरोधों को सारांश रूप में लिखें।

11.3 विधि के प्रेक्षण और व्यवरोध

1. इस विधि को लागू करने की प्रक्रिया सीधी है। एक बार एक जाँच हल की कल्पना कर ली जाए, तो विधि में केवल बीजीय फलनों का अवकलन करना तथा जाँच हल में उपस्थित अनिर्धारित गुणांकों के मान प्राप्त करने के लिए युगपत समीकरणों को हल करना होता है।

2. वह विद्यार्थी भी इस विधि का प्रयोग कर सकता है जो अवकल समीकरणों को हल करने की उत्तम विधियों से परिचित नहीं है, जैसे कि प्राचल विचरण तथा व्युत्क्रम अवकल संकारक विधियाँ जिनमें समाकलन करना पड़ता है। इन विधियों पर चर्चा हम आगे आने वाली इकाइयों में करेंगे।

3. इस विधि की सफलता कुछ सीमा तक जाँच हल के उपयुक्त रूप का अनुमान लगाने की योग्यता पर निर्भर करती है। जैसा कि समीकरण (7) की स्थिति में एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है कि यदि अनुमान लगाए गए जाँच हल का रूप उपयुक्त नहीं है, तो इस विधि से हल प्राप्त नहीं किया जा सकता।

4. यदि असमघात पद जटिल हो तथा जाँच हल में बहुत अधिक पद उपस्थित हों, जैसा कि उदाहरणों 14 और 15 की स्थितियों में है, तो जाँच हल के गुणांकों को मालूम करना कठिन हो जाता है।

5. यह विधि अवकल समीकरणों का विशेष हल ज्ञात करने की एक व्यापक विधि नहीं है। यह विधि **अचर गुणांकों** वाले रैखिक असमघात समीकरणों पर ही लागू होती है जबकि असमघात पद प्रतिबंधित विशेष रूप के हो। विशेष हल ज्ञात करने की अधिक व्यापक विधियों पर चर्चा आगे आने वाली इकाइयों में की जाएगी।

इस इकाई में हमने जो कुछ अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, हम इस इकाई को यहीं समाप्त कर रहे हैं।

11.4 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. अनिर्धारित गुणांक विधि लागू होती है, यदि
   i) समीकरण अचर गुणांकों वाला रैखिक समीकरण हो।
   ii) असमघात पद या तो एक बहुपद, एक चरघातांकी फलन, एक ज्यावक्रीय फलन या इन फलनों का योग/गुणनफल हो।

2. विभिन्न असमघात पदों $b(x)$ के लिए, उन स्थितियों में जहाँ संगत सहायक समीकरण के **मूल की r बार पुनरावर्ती** हो, जाँच हल $y_p(x)$ देने वाले परिणामों का संक्षिप्त विवरण निम्न तालिका में दिया गया है :

असमघात पद b(x)	जाँच हल $y_p(x)$
$p_k(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_{k-1}x + b_k$	$x^r(A_0x^k + A_1x^{k-1} + \cdots + A_k)$
$e^{\alpha x}$	$x^r(Ae^{\alpha x})$
$\begin{cases}\sin\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$	$x^r(A\sin\beta x + B\cos\beta x)$
$e^{\alpha x}P_k(x)$	$x^r e^{\alpha x}(A_0x^k + \cdots + A_k)$
$e^{\alpha x}P_k(x)\begin{cases}\sin\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$	$x^r[(A_0x^k + \cdots + A_k)e^{\alpha x}\sin\beta x$ $+ (B_0x^k + \cdots + B_k)e^{\alpha x}\cos\beta x]$

3. विधि के प्रेक्षण और व्यवरोध

11.5 हल / उत्तर

E1) i) सहायक समीकरण $m^2+m+1=0$ है।

$$\Rightarrow \quad m=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

यहाँ शून्य, सहायक समीकरण का हल नहीं है। साथ ही, दिए हुए समीकरण के लिए, असमघात पद x^2+1 है, जो घात 2 का एक बहुपद है। अतः, P.I. का एक उपयुक्त रूप $y_p(x)=Ax^2+Bx+C$ है, जहाँ A, B और C मालूम किए जाने वाले अचर हैं।

ii) सहायक समीकरण है :

$$m(m^3-m^2-m+1)=0$$

क्योंकि शून्य सहायक समीकरण का मूल है तथा दिए हुए समीकरण में असमघात पद x^2 है, इसलिए $P.I.$ का उपयुक्त रूप $y_p(x)=x(Ax^2+Bx+C)$ है, जहाँ A, B और C मालूम किए जाने वाले अचर हैं।

E2) i) सहायक समीकरण है:

$$m^2+3m+2=0$$

$$\Rightarrow m=-1,\ -2$$

अतः, $C.F.=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

लिए गए जाँच हल का रूप है : $y_p(x)=Ax^2+Bx+C$.

दिए हुए समीकरण में, $y_p(x)$ और उसके अवकलजों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2(Ax^2+Bx+C)+3(2Ax+B)+2A=4x^2$$

दोनों पक्षों में x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने तथा A, B और C के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$A=2$, $B=-6$ और $C=7$

अतः, $y_p(x)=2x^2-6x+7$ तथा व्यापक हल है :

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+7-6x+2x^2.$$

ii) दिया हुआ समीकरण है :

$$\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}=x$$

सहायक समीकरण है :

$m^3 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0, \pm 2i$

अतः $C.F. = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$

क्योंकि शून्य सहायक समीकरण का एक हल है तथा इस स्थिति में असमघात पद x है, जो घात 1 का बहुपद है, इसलिए जाँच हल का उपयुक्त रूप $y_p(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$.

y_p कि इस मान तथा इसके अवकलजों को दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने तथा x के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर, हम $A = \frac{1}{8}$ और $B = 0$ प्राप्त करते हैं।

अतः, $P.I. = \frac{1}{8}x^2$ तथा व्यापक हल है :

$$y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \frac{1}{8}x^2$$

E3) i) $C.F. = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$

जाँच हल का रूप $y_p(x) = Axe^{-2x}$ है।

y_p के इस मान को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम $A = \frac{1}{8}$ प्राप्त करते हैं, अतः $P.I. = \frac{1}{8}xe^{-2x}$.

ii) $C.F. = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

क्योंकि दिए हुए समीकरण का असमघात पद e^{-x} है, जो $C.F.$ में उपस्थित है तथा -1 सहायक समीकरण का ऐसा मूल है जिसकी पुनरावर्ती नहीं हो रही है, इसलिए जाँच हल का एक उपयुक्त रूप $y_p(x) = Axe^{-x}$ है।

दिए हुए समीकरण में y_p के इस मान को प्रतिस्थापित करने पर, हम $A = \frac{1}{2}$ प्राप्त करते हैं। अतः, $P.I. = \frac{1}{2}xe^{-x}$.

E4) i) सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = 2, 2$$

$$\therefore \; C.F. = (c_1 + xc_2)e^{2x}$$

पहले समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=x^2$ पर विचार कीजिए।

$y_{p_1}=Ax^2+Bx+C$ के रूप का एक जाँच हल लीजिए।

ऊपर दिए समीकरण में, y_{p_1} और उसके अवकलजों को प्रतिस्थापित करने तथा A, B और C के लिए हल करने पर हम,

$A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{3}{8}$ प्राप्त करते हैं।

$$\therefore\ y_{p_1}=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}.$$

समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=e^x$ के लिए, $y_{p_2}=Ae^x$ लीजिए तथा $A=1$ प्राप्त कीजिए, जिससे $y_{p_2}=Ae^x$.

$$\therefore\ y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}+e^x.$$

दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y=(c_1+xc_2)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)+e^x.$$

ii) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{3}{16}x+\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{16}e^{2x}$

संकेत : $y_{p_1}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3$ और

$y_{p_2}=Be^{2x}$ के रूप में जाँच हल लीजिए।

E5) i) सहायक समीकरण है :

$$m^2-1=0$$

$$\Rightarrow m=1,-1$$

$$\therefore\ C.F.=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

$y_p=Ae^{2x}$ के रूप का जाँच हल लीजिए तथा $A=\frac{1}{3}$ प्राप्त कीजिए।

$$\therefore\ y_p=\frac{1}{3}e^{2x}.$$

दिए हुए समीकरण का व्यापक हल $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$.

दिए हुए आदि-प्रतिबंधों के प्रयोग से,

$$y(0) = -1 \Rightarrow c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = -1$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow c_1 - c_2 + \frac{2}{3} = 1.$$

c_1 और c_2 के लिए, हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$c_1 = \frac{-1}{2} \text{ और } c_2 = \frac{-5}{6}$$

$$\therefore \; y = -\frac{e^x}{2} - \frac{5e^{-x}}{6} + \frac{e^{2x}}{3}.$$

ii) $C.F. = (c_1 + xc_2)e^{2x}$

$y_p = Ax^2e^{2x}$ लीजिए तथा $A = \frac{-1}{2}$ प्राप्त कीजिए।

व्यापक हल $y = (c_1 + xc_2)e^{2x} - \frac{x^2}{2}e^{2x}$.

दिए हुए आदि प्रतिबंधों के प्रयोग से $c_1 = c_2 = 0$ प्राप्त कीजिए।

$$\therefore \; y = \frac{-x^2e^{2x}}{2}.$$

E6) i) $C.F. = (c_1 + c_2x) + (c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)$

क्योंकि पद $\sin 2x$ पूरक फलन $C.F.$ में उपस्थित है, तथा यह दिए हुए समीकरण का असमघात पद है, इसलिए जाँच हल को $y_p(x) = x(A\sin 2x + B\cos 2x)$ के रूप में लिया जा सकता है।

दिए हुए समीकरण में y_p के इस मान को प्रतिस्थापित करने पर, हम $A = 0$ और $B = \frac{1}{16}$ प्राप्त करते हैं।

$$\therefore \; P.I. = \frac{1}{16}x\cos 2x.$$

अतः दिए हुए समीकरण का हल है :

$$y = (c_1 + c_2x) + (c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x) + \frac{1}{16}x\cos 2x.$$

ii) $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} - \sin x$

E7) i) $C.F. = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

जाँच हल का रूप $y_p = A\cos x + B\sin x$ है।

दिए हुए समीकरण में, y_p को प्रतिस्थापित करने और फिर सरल करने पर, हम $y_p = \frac{1}{3}\sin x$ प्राप्त करते हैं।

$\therefore \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$ व्यापक हल है।

आदि प्रतिबंधों के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं :

$c_1 = 2, c_2 = \frac{-2}{3}$

$\therefore \quad y = 2\cos 2x - \frac{2}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$

ii) $C.F. = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

जाँच हल का रूप $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$ है।

दिए हुए समीकरण में, y_p को प्रतिस्थापित करने और फिर सरल करने पर, हम $y_p = \frac{1}{3}(\sin 2x - \cos 2x)$ प्राप्त करते हैं।

व्यापक हल $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{3}(\sin 2x - \cos 2x)$ है।

आदि प्रतिबंधों के प्रयोग से, हम $c_1 = \frac{-1}{60}$ और $c_2 = \frac{-7}{15}$ प्राप्त करते हैं।

$\therefore \quad y = \frac{-1}{60}\cos x \frac{-7}{15}\sin x + \frac{1}{3}(\sin 2x - \cos 2x)$.

E8) i) $C.F. = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

जाँच हल का उपयुक्त रूप $y_p(x) = e^{3x}(A + Bx + Cx^2)$ है।

दिए हुए समीकरण में y_p के इस मान को रखने पर तथा फिर दोनों पक्षों में $x^2 e^{3x}, x\, e^{3x}$ और e^{3x} के गुणांकों की तुलना करने पर,

हम $A = \frac{1}{162}$, $B = \frac{-1}{27}$ और $C = \frac{1}{18}$ प्राप्त करते हैं।

अतः, $y_p(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{162} - \frac{1}{27}x + \frac{1}{18}x^2\right)$.

$\therefore$ दिए हुए समीकरण का हल है :

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + e^{3x}\left(\frac{1}{162} - \frac{1}{27}x + \frac{1}{18}x^2\right).$$

ii) $C.F. = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$

यहाँ असमघात पद $4xe^{2x}$ है। साथ ही, $C.F.$ में e^{2x} प्रकट हो रहा है। तथा 2 सहायक समीकरण का पुनरावर्ती मूल है। इसलिए, जाँच हल का उपयुक्त रूप है :

$y_p(x) = x^2 e^{2x}(Ax + B) = (Ax^3 + Bx^2)\, e^{2x}$.

दिए हुए समीकरण में $y_p\,(x)$ के इस मान को प्रतिस्थापित करने तथा परिणामी समीकरण के दोनों पक्षों में xe^{2x} और e^{2x} के गुणांकों की तुलना करने पर, हम $A = \frac{2}{3}$ और $B = 0$ प्राप्त करते हैं। अतः,

$P.I. = \frac{2}{3}x^3 e^{2x}$ है तथा व्यापक हल है :

$y = (c_1 + c_2 x)\, e^x + \frac{2}{3}x^3 e^{2x}$.

E9) i) $y_p = (A_0 + A_1 x)\cos 3x + (B_0 + B_1 x)\sin 3x$

ii) $y_p = x[(A_0 + A_1 x)\, e^{-x}\cos 2x + (B_0 + B_1 x) e^{-x}\sin 2x]$

iii) $y_p = e^x[(A_x + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x]$

iv) $y_p = x[(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\, \cos x + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2)\sin x]$

v) $y_p = xe^{2x}[(A + Bx)\cos x + (C + Dx)\sin x]$

E10) i) $C.F = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$

यहाँ e^{-2x} असमघात पद तथा $C.F.$ दोनों ही में उपस्थिति है। साथ ही, शून्य सहायक समीकरण का एक मूल है। अतः जाँच हल का एक उपयुक्त रूप है :

$y_p(x) = x(Ax + B) + (C\cos x + D\sin x) + Exe^{-2x}$.

y_p के इस मान तथा उसके अवकलजों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने तथा परिणामी समीकरण के दोनों पक्षों में x, अचर पद, $\cos x$, $\sin x$ और e^{-2x} के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$A=-\frac{1}{8},\ B=0,\ C=0,\ D=-\frac{3}{5},\ E=\frac{1}{8}.$$

अतः $y_p(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{5}\sin x+\frac{1}{8}xe^{-2x}$.

$\therefore$ दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{5}\sin x+\frac{1}{8}xe^{-2x}.$$

ii) $C.F.=c_1x+(c_2+c_3x)e^x+c_4e^{-x}$

जाँच हल का उपयुक्त रूप है :

$$y_p(x)=x(Ax^2+Bx+C)+(Dx\sin x+Ex\cos x+F\sin x+G\cos x)$$

y_p के इस मान तथा इसके अवकलजों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने तथा परिणामी समीकरण के दोनों पक्षों में x^2, x, अचर पद $x\sin x$, $x\cos x$, $\sin x$ और $\cos x$ के गुणांकों की तुलना करने पर, हम

$$A=\frac{1}{3},\ B=1,\ C=8,\ D=0,\ E=-\frac{1}{2},\ F=1,\ G=-\frac{1}{2}$$

प्राप्त करते हैं।

$$\therefore\ y_p(x)=x\left(\frac{1}{3}x^2+x+8\right)+\left(-\frac{1}{2}x\cos x\right)+\left(\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right).$$

दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y=c_1x+(c_2+c_3x)e^x+c_4e^{-x}+x\left(\frac{1}{3}x^2+x+8\right)$$

$$-\frac{1}{2}x\cos x+\sin x-\frac{1}{2}\cos x.$$

iii) $C.F.=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$

क्योंकि शून्य सहायक समीकरण का एक मूल है तथा $C.F.$ में $\cos x$ प्रकट हो रहा है, इसलिए जाँच हल का एक उपयुक्त रूप है:

$$y_p(x)=x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+x(E\cos x+F\sin x)$$

दिए हुए समीकरण में y_p के इस मान और उनके अवकलजों को प्रतिस्थापित करने तथा फिर परिणामी समीकरण में x^3, x^2, x, अचर, $\sin x$ और $\cos x$ के गुणांकों की तुलना करने पर, हम

$$A = \frac{1}{4},\ B = 0,\ C = -3,\ D = 0,\ E = -\frac{1}{2},\ F = 0$$

प्राप्त करते हैं।

अतः $y_p(x) = x\left(\frac{1}{4}x^3 - 3x\right) + x\left(-\frac{1}{2}\cos x\right)$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - \frac{1}{2}x\cos x$$

$\therefore$ दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - \frac{1}{2}x\cos x.$$

– x –

इकाई 12

चर गुणांक वाले अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

12.1 प्रस्तावना

इकाई 11 में, हमने अचर गुणांकों वाले अवकल समीकरण, जबकि उनका असमघात पद एक विशेष रूप (जैसे बहुपद, चरघातांकी, ज्यावक्रीय फलन आदि) का हो, का विशेष हल ज्ञात करने की अनिर्धारित गुणांक विधि पर चर्चा की थी।

इस इकाई में, हम आपको विशेष हल मालूम करने की ऐसी विधि से परिचित कराएँगे जिसका प्रयोग तब भी किया जा सकता है जबकि अवकल समीकरण के गुणांक स्वतंत्र चर के फलन हों तथा यह भी आवश्यक नहीं कि असमघात पद ऊपर बताए गए विशेष रूपों का ही हो। यह विधि, जिसकी चर्चा हम भाग 12.2 में करेंगे, एक फ्रांसीसी गणितज्ञ जोसफ लुइस लंग्राज (1736-1813) ने प्रस्तुत की थी तथा इसे **प्राचल-विचरण** (variation of parameters) विधि कहा जाता है। यद्यपि यह विधि अति व्यापक है, परंतु, इसका उपयोग केवल उन स्थितियों में किया जा सकता है जब समानीत समीकरण (reduced equation) का मूलभूत हल समुच्चय ज्ञात हो। साथ ही, इस विधि को प्रथम और उच्चतर कोटि वाले समीकरणों पर समान रूप से लागू किया जा सकता है परंतु, इस विधि को उच्चतर कोटि वाले समीकरणों पर लागू करना अधिक लाभप्रद और उपयोगी होता है। इस विधि को लागू करने के लिए, समानीत समीकरण के मूलभूल हल समुच्चय की पूर्ण जानकारी आवश्यक है तथा चर गुणांकों वाले समीकरणों के लिए इस समुच्चय को मालूम करना अति

द ऐलम्बर्त (1717-1783)

कठिन हो सकता है। चर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरणों की स्थिति में, कई बार समानीत समीकरण के सभी रैखिकतः स्वतंत्र हलों को ज्ञात करना संभव नहीं हो पाता, परंतु कम से कम एक या अधिक हल प्राप्त किए जा सकते हैं। ऐसी स्थितियों के लिए, फ्रांसीसी गणितज्ञ और भौतिकीविद् जीन ले रौंड द ऐलम्बर्त (1717-1783) ने एक विधि विकसित की जिसे प्रायः **कोटि लघुकरण** (reduction of order) कहा जाता है। जब समानीत समीकरण के एक या अधिक हल ज्ञात हों, तब 'द' एलम्बर्ट विधि का प्रयोग दिए हुए समीकरण की कोटि से कम कोटि वाला समीकरण प्राप्त करने तथा समानीत समीकरण के शेष हलों और असमघात समीकरण का विशेष समाकल प्राप्त करने में किया जा सकता है। इस इकाई के भाग 12.3 में, हम कोटि लघुकरण विधि पर चर्चा करेंगे।

फिर भी द्वितीय और उच्चतर कोटि के चर गुणांकों वाले ऐसे रैखिक अवकल समीकरण भी होते हैं, जिनके पूरक फलन के समाकल का अनुमान नहीं लगाया जा सकता। परंतु ऐसे समीकरणों में कुछ समीकरणों का एक ऐसा वर्ग है, जिन्हें कोशी-आयलर समीकरण या अधिक सामान्य रूप में ऑयलर समीकरण कहा जाता है। इन समीकरणों में स्वतंत्र चर के रूपांतरण द्वारा उनके पूरक फलन के सभी समाकल ज्ञात किए जा सकते हैं। भाग 12.4 में, हम ऑयलर-समीकरण तथा ऐसे समीकरण जिन्हें ऑयलर रूप में बदला जा सकता है को हल करने की विधियों पर चर्चा करेंगे। लियोनार्ड ऑयलर (1707-1783), जिनका जन्म बेसल, स्विट्ज़रलैंड में हुआ था, एक भौतिकीविद्, खगोलशास्त्री, भाषाविद्, शारीरिकविज्ञानविद तथा प्राथमिक तौर पर एक गणितज्ञ थे। उन्होंने बीजगणित, त्रिकोणमिति, वैश्लेषिक ज्यामिति, फलन, अवकल समीकरण, सम्मिश्र चरों, संख्या सिद्धांत और स्थान विज्ञान (topology) में योगदान दिया।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- अचर या चर गुणांकों वाले असमघात रैखिक अवकल समीकरणों के विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए प्राचल-विचरण विधि का प्रयोग कर सकेंगे;
- द्वितीय कोटि के रैखिक असमघात समीकरण का पूर्ण समाकल (complete integral) ज्ञात करने के लिए कोटि-लघुकरण विधि का प्रयोग कर सकेंगे, जबकि संगत समघात समीकरण का एक समाकल ज्ञात हो; और
- ऑयलर समीकरण को हल कर सकेंगे।

12.2 प्राचल-विचरण

इससे पहले कि हम व्यापक रूप में प्राचल-विचरण (variation of parameters) विधि पर चर्चा करें, आइए, एक उदाहरण के माध्यम से इसे समझने का प्रयास करें।

उदाहरण 1: निम्न अवकल समीकरण का विशेष हल ज्ञात कीजिए :

$$y'' + 4y = 3\operatorname{cosec} 2x,\ 0 < x < \pi/2. \tag{1}$$

हल : यहाँ आप देख सकते हैं कि यह समस्या अनिर्धारित गुणांक विधि की सीमा के अंदर नहीं आती है, क्योंकि असमघात पद $b\ (x) = \dfrac{3}{\sin 2x} = 3\operatorname{cosec} 2x$ में $\sin x$ या $\cos x$ के योग अथवा गुणनफल के स्थान पर एक भागफल उपस्थित है। इस प्रकार, इस समीकरण को हल करने के लिए, हमें एक भिन्न विधि की आवश्यकता है। समीकरण (1) के संगत समघात समीकरण हैं :

$$y'' + 4y = 0 \tag{2}$$

समीकरण (2) का व्यापक हल अथवा अवकल समीकरण (1) का पूरक फलन निम्न द्वारा प्राप्त है :

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \tag{3}$$

जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं।

समीकरण (1) का विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, प्राचल-विचरण विधि में, जैसा कि नाम से अंदाजा लगता है, समीकरण (3) में अचरों c_1 और c_2 को बदल कर उन्हें क्रमशः फलनों $u_1(x)$ और $u_2(x)$ द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। इसके बाद, इन फलनों को मालूम किया जाता है ताकि फलन

$$y_p(x) = u_1(x)\cos 2x + u_2(x)\sin 2x \tag{4}$$

असमघात समीकरण (1) का एक हल हो।

u_1 और u_2 को मालूम करने के लिए, हमें y_p का मान समीकरण (4) से समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने की आवश्यकता है। हम जानते हैं कि समीकरण (4) से समीकरण (1) में y_p और उसके अवकलजों को प्रतिस्थापित करने पर हमें u_1 और u_2 तथा उनके प्रथम दो अवकलजों के संयोजन के रूप में एक समीकरण प्राप्त होगा। क्योंकि यहाँ केवल एक समीकरण तथा दो अज्ञात फलन u_1 और u_2 हैं, इसलिए हम u_1 और u_2 के कुछ संभव चुनावों की आशा कर सकते हैं जिनसे हमारा उद्देश्य पूर्ण हो जाए। दूसरे शब्दों में, हम अपनी पसंद का एक दूसरा प्रतिबंध लगा सकते हैं तथा दो अज्ञात फलनों u_1 और u_2 के लिए दो समीकरण प्राप्त कर सकते हैं। अब हम दिखाएंगे की लग्रांज के दृष्टिकोण का अनुपालन करते हुए u_1 और u_2 पर दूसरे प्रतिबंध का चुनाव इस प्रकार किया जा सकता है जिससे की अभिकल सरल हो जाएँ। आइए देखें कि ऐसा किस प्रकार संभव है।

समीकरण (4), का अवकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_p' = -2u_1(x)\sin 2x + 2u_2(x)\cos 2x + u_1'(x)\cos 2x + u_2'(x)\sin 2x \tag{5}$$

u_1 और u_2 पर दूसरे प्रतिबंध को चुनने की संभावना को ध्यान में रखते हुए, आइए समीकरण (5) के अंतिम दो पदों को शून्य चुनें, अर्थात्

$$u_1'(x)\cos 2x + u_2'(x)\sin 2x = 0 \tag{6}$$

तब, समीकरण (5) से, हमें y_p' का निम्न सरल रूप प्राप्त होता है :

$$y_p' = -2u_1 \sin 2x + 2u_2 \cos 2x \tag{7}$$

समीकरण (7) को एक बार पुनः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_p'' = -4u_1 \cos 2x - 4u_2 \sin 2x - 2u_1' \sin 2x + 2u_2' \cos 2x \tag{8}$$

क्रमशः समीकरणों (7) और (8) से y_p' और y_p'' को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$-2u_1' \sin 2x + 2u_2' \cos 2x = 3\,\mathrm{cosec}\,2x \tag{9}$$

अब हम संक्षेप में कह सकते हैं कि हम समीकरण (6) और (9) को संतुष्ट करने वाले u_1 और u_2 का चुनाव करना चाहते हैं। समीकरण (6) और (9) दो अज्ञात राशियों $u_1'(x)$ और $u_2'(x)$ के लिए रैखिक बीजीय समीकरणों का एक युग्म बनाते हैं। इन समीकरणों को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1'(x) = \frac{-3}{2} \text{ और } u_2'(x) = \frac{3}{2}\cot 2x \tag{10}$$

$u_1'(x)$ और $u_2'(x)$ को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1(x) = \frac{-3}{2}x \text{ और } u_2(x) = \frac{3}{4}\ln|\sin 2x|$$

u_1 और u_2 के ऊपर प्राप्त मानों को समीकरण (4) में प्रतिस्थापित करने पर, हम समीकरण (1) का एक विशेष समाकल निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$y_p(x) = \frac{-3}{2}x\cos 2x + \frac{3}{2}\ln|\sin 2x|\sin 2x \tag{11}$$

तब, समीकरणों (3) और (11) से, हम समीकरण (1) का निम्न व्यापक हल प्राप्त करते हैं :

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{3}{2}x\cos 2x + \frac{3}{2}\ln|\sin 2x|\sin 2x.$$

***

आइए अब देखें कि यह विधि व्यापक रूप से किस प्रकार कार्य करती है।

असमघात द्वितीय कोटि के निम्न रैखिक समीकरण पर विचार कीजिए :

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{12}$$

यहाँ हमनें y'' का गुणांक 1 लिया है तथा कल्पना कि है कि a_1, a_2 और b परिभाषित हैं तथा किसी अंतराल I पर संतत हैं। मान लीजिए कि $\{y_1(x), y_2(x)\}$ संगत समघात समीकरण

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{13}$$

का मूलभूत हल समुच्चय है। तब, हम जानते हैं कि समीकरण (13) का व्यापक हल निम्न होगा :

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \tag{14}$$

जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं। जैसा कि हमनें उदाहरण 1 में बताया है, प्राचल-विचरण विधि के साथ जुड़ा विचार यह है कि समीकरण (14) में अचरों c_1 और c_2 को फलनों $u_1(x)$ और $u_2(x)$ से प्रतिस्थापित करा जाए तथा फिर फलन $u_1(x)$ और $u_2(x)$ मालूम किए जाएँ जिससे की समीकरण

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{15}$$

द्वारा दिए जाने वाला $y_p(x)$ समीकरण (12) को संतुष्ट करे। अर्थात्, हम समीकरण (12) का विशेष समाकल खोजते हैं, जो समीकरण (15) के रूप का हो जहाँ u_1 और u_2 मालूम किए जाने वाले अज्ञात फलन हैं। क्योंकि हमने दो अज्ञात फलनों को शामिल किया है, इसलिए हमें इन्हें मालूम करने के लिए, इन फलनों से संबद्धित दो समीकरणों की आवश्यकता है। इसलिए, हम फलनों u_1 और u_2 पर दो प्रतिबंध लगाते हैं ताकि संबंध (15) समीकरण (12) का एक हल हो। इन प्रतिबंधों को **सहायक प्रतिबंध** (auxiliary conditions) कहते हैं। इन प्रतिबंधों को इस प्रकार लगाया जाता है ताकि परिकलन सरल हो जाएँ। आइए देखें कि ऐसा किस प्रकार किया जाता है।

यदि समीकरण (15) से प्राप्त $y_p(x)$ समीकरण (12) का एक हल है, तो यह उसे संतुष्ट अवश्य ही करेगा। हम समीकरण (15) से $y'_p(x)$ और $y''_p(x)$ अभिकलित करते हैं तथा प्राप्त करते हैं :

$$y'_p = (u'_1 y_1 + u'_2 y_2) + (u_1 y'_1 + u_2 y'_2) \tag{16}$$

अभिकलनों को सरल करने तथा y''_p के व्यंजक में u_1 और u_2 के द्वितीय कोटि अवकलजों से बचने के लिए, आइए **प्रथम सहायक प्रतिबंध** निम्न चुनें :

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \tag{17}$$

तब, समीकरण (16) निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2 \tag{18}$$

तथा हमें प्राप्त होता है :

$$y''_p = u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2 \tag{19}$$

क्रमशः समीकरणों (15), (18) और (19) से प्राप्त y_p, y'_p और y''_p के व्यंजकों को समीकरण (12) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned} b(x) &= (u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2) + a_1(u_1 y'_1 + u_2 y'_2) + a_2(u_1 y_1 + u_2 y_2) \\ &= (u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2) + u_1(y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + u_2(y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2) \qquad (20) \end{aligned}$$

क्योंकि y_1 और y_2 समघात समीकरण (13) के हल हैं, इसलिए हमें

$$y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1 = 0 \text{ और } y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2 = 0$$

प्राप्त हैं। इस प्रकार समीकरण (20) निम्न हो जाता है :

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = b(x) \tag{21}$$

जो **द्वितीय सहायक प्रतिबंध** है।

अब यदि हम समीकरणों (17) और (21), अर्थात्

$$\left.\begin{array}{l} y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = b(x) \end{array}\right] \qquad (22)$$

से दिए जाने वाले दोनों सहायक प्रतिबधों को संतुष्ट करने वाले u_1 और u_2 ज्ञात कर सकें, तो समीक.रण (15) से प्राप्त $y_p(x)$ समीकरण (12) का विशेष हल होगा।

u_1 और u_2 मालूम करने के लिए, हम पहले समीकरणों (22) के रैखिक निकाय को क्रैमर-नियम द्वारा u_1' और u_2' के लिए हल करते हैं (इकाई 10 की परिशेषिका देखिए)। बीजीय परिकलनों से हमें प्राप्त होता है :

$$u_1'(x) = \frac{-b(x)\ y_2(x)}{W(y_1,\ y_2)},\ u_2'(x) = \frac{b(x)\ y_1(x)}{W(y_1,\ y_2)}, \qquad (23)$$

जहाँ

$$W(y_1,\ y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

y_1 और y_2 का **रांसकियन** है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण (23) में W से विभाजन की अनुमति है क्योंकि y_1 और y_2 हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं और इसलिए उनका रांसकियन I पर शून्येतर है। समीकरणों (23) से प्राप्त $u_1'(x)$ और $u_2'(x)$ को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1(x) = \int \frac{-b(x)\ y_2(x)}{W(y_1,\ y_2)}\ dx,\ u_2(x) = \int \frac{b(x)\ y_1(x)}{W(y_1,\ y_2)}\ dx \qquad (24)$$

अतः,

$$y_p(x) = y_1(x) \int \frac{-b(x)\ y_2(x)}{W(y_1,\ y_2)}\ dx + y_2(x) \int \frac{b(x)\ y_1(x)}{W(y_1,\ y_2)}\ dx \qquad (25)$$

समीकरण (12) का एक विशेष समाकल है।

अब हम समीकरण (12) का विशेष हल मालूम करने में लागू विभिन्न चरणों का संक्षिप्त विवरण यहाँ दे रहे हैं।

चरण I: दिए हुए समीकरण (12) के संगत समघात समीकरण (13) का मूलभूत हल समुच्च्य ज्ञात कीजिए।

चरण II : समीकरण (12) के लिए

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)\ y_2(x)$$

के रूप में एक विशेष समाकल की कल्पना कीजिए। $u_1(x)$ और $u_2(x)$ को, सीधे

सूत्र (24) का प्रयोग करके अथवा पहले समीकरण निकाय (22) को $u_1'(x)$ और $u_2'(x)$ के लिए हल करके और फिर उनका समाकलन करके मालूम कीजिए।

चरण III : विशेष समाकल प्राप्त करने के लिए, समीकरण (15) में $y_p(x)$ के व्यंजक में $u_1(x)$ और $u_2(x)$ को प्रतिस्थापित कीजिए।

इन चरणों को अब हम निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 2: अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल: चरण I : दिए हुए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm i$$

तथा समानीत समीकरण के दो हल $y_1(x) = \cos x$ और $y_2(x) = \sin x$ हैं।

अतः, पूरक फलन निम्न है :

$$y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

चरण II : विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, हम लिखते हैं :

$$y_p(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x \tag{26}$$

$$\therefore \quad \frac{dy_p}{dx} = [-u_1(x)\sin x + u_2(x)\cos x] + \frac{du_1}{dx}\cos x + \frac{du_2}{dx}\sin x$$

आइए $\dfrac{du_1}{dx}\cos x + \dfrac{du_2}{dx}\sin x = 0$ (27)

को हम **प्रथम सहायक प्रतिबंध** लें जिससे कि

$$\frac{dy_p}{dx} = -u_1(x)\sin x + u_2(x)\cos x$$

ऊपर दिए समीकरण को पुनः एक बार अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = -u_1(x)\cos x - u_2(x)\sin x - \sin x\frac{du_1}{dx} + \cos x\frac{du_2}{dx} \tag{28}$$

क्योंकि दिया हुआ समीकरण $y_p(x)$ द्वारा अवश्य ही संतुष्ट होना चाहिए, इसलिए हम दिए हुए समीकरण में, क्रमशः समीकरणों (26) और (28) से, y_p और y_p'' के मान प्रतिस्थापित करते हैं तथा **द्वितीय सहायक प्रतिबंध** के रूप में

$$-\sin x \frac{du_1}{dx} + \cos x \frac{du_2}{dx} = \sec x \tag{29}$$

प्राप्त करते हैं।

समीकरणों (27) और (29) को $\frac{du_1}{dx}$ और $\frac{du_2}{dx}$ के लिए हल करने पर, हम

$$\frac{du_1}{dx} = -\tan x, \frac{du_2}{dx} = 1,$$

प्राप्त करते हैं, जिन्हें समाकलित करने पर प्राप्त होता है :

$$u_1(x) = \ln(\cos x) \text{ और } u_2(x) = x.$$

चरण III : समीकरण (26) में, $u_1(x)$ और $u_2(x)$ के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल

$$y_p(x) = \cos x \ln(\cos x) + x \sin x$$

प्राप्त करते हैं तथा व्यापक हल निम्न है :

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln(\cos x).$$

***

ध्यान दीजिए कि समीकरण (12) में, हमने y'' का गुणांक 1 लिया है। यदि दिया हुआ समीकरण $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ हो जहाँ $a_0(x) \neq 1$, तो इस विधि का प्रयोग करने से पहले, विशेष रूप से यदि आप सूत्र (24) का प्रयोग कर रहे हों तो, समीकरण को $y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x)$ के रूप में परिवर्तित कर लेना चाहिए। अन्यथा, असमघात पद $b(x)$ की सही रूप से पहचान नहीं हो पाएगी। इसे समझने के लिए अब हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3: अवकल समीकरण

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = f(x) \quad x \neq \pm 1$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल: चरण I: y'' का गुणांक 1 करने के लिए, हम दिए हुए समीकरण को पुनः निम्न रूप में लिखते हैं :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x(1-x^2)}\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{(1-x^2)} \tag{30}$$

इस समीकरण का संगत समघात समीकरण है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x(1-x^2)}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{31}$$

समीकरण (31) को हल करने के लिए, हम $\frac{dy}{dx} = p$ लेते हैं तथा निम्न समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x(1-x^2)}\ p = 0$$

या, $$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x(1-x^2)} \tag{32}$$

समीकरण (32) चर पृथक्करणीय (variable separable) है तथा इसे

$$\frac{dp}{p} = \left[\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}\right] dx$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

ऊपर दिए समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln p = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \ln c_1,\ c_1 \text{ एक अचर है।}$$

$$\Rightarrow \quad \ln p = \ln \frac{c_1 x}{(1-x^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{c_1 x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c_1 x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{33}$$

समीकरण (33) को पुनः एक बार समाकलित करने पर, हम समीकरण (31) का हल, अर्थात्, समीकरण (30) का $C.F.$ निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$y_c(x) = -c_1\ \sqrt{1-x^2}\ + c_2 \tag{34}$$

जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

चरण II : दिए हुए अवकल समीकरण (30) के लिए,

$$y_p(x) = u_1(x)\ \sqrt{1-x^2}\ + u_2(x)$$

के रूप के विशेष समाकल की कल्पना कीजिए।

$$\therefore \quad \frac{dy_p}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\ u_1 + \sqrt{1-x^2}\ \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx}. \tag{35}$$

हम **प्रथम सहायक प्रतिबंध** का चुनाव निम्न रूप में करते हैं :

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}=0 \tag{36}$$

तब, $\dfrac{dy_p}{dx}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,u_1$

तथा $\dfrac{d^2y_p}{dx^2}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}u_1-\dfrac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}u_1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\dfrac{du_1}{dx}\cdot$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y_p}{dx^2}=-\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,u_1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{du_1}{dx}\cdot$$

समीकरण (30) में y_p' और y_p'' के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{-1}{(1-x^2)^{3/2}}u_1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{du_1}{dx}-\frac{1}{x(1-x^2)}\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}u_1\right)=\frac{f(x)}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad -x\sqrt{1-x^2}\,\frac{du_1}{dx}=f(x) \tag{37}$$

जो हमारा **द्वितीय सहायक प्रतिबंध** है।

समीकरणों (36) और (37) को $u_1(x)$ और $u_2(x)$ के लिए हल करने तथा समाकलित करने पर, हम

$$u_1(x)=-\int\frac{f(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{और} \quad u_2(x)=\int\frac{f(x)}{x}\,dx$$

प्राप्त करते हैं।

चरण III : $u_1(x)$ और $u_2(x)$ के व्यंजकों को जब समीकरण (35) में रखते हैं तो दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$y_{\mathrm{p}}(x)=-\sqrt{1-x^2}\;\int\frac{f(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int\frac{f(x)}{x}\,dx$$

अतः, दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल निम्न है :

$$y=y_c(x)+y_p(x)$$

$$= -c_1\sqrt{1-x^2} + c_2 - \sqrt{1-x^2}\ \int \frac{f(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) प्राचल-विचरण विधि द्वारा निम्न अवकल समीकरणों के विशेष समाकल प्राप्त कीजिए :

i) $y'' + y = \text{cosec } x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

ii) $y'' - 2y' + y = xe^x \ln x,\ x > 0$

iii) $y'' + y = \tan x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

E2) निम्न अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए, जबकि दिया गया है कि $x > 0$ के लिए फलन $y_1(x)$ और $y_2(x)$ संगत समघात समीकरणों के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं :

i) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x + 1;\ y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2$

ii) $x^2y'' + xy' - y = x^2e^x;\ y_1(x) = x,\ y_2(x) = \frac{1}{x}$

iii) $xy'' - (x+1)\,y' + y = x^2;\ y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = x + 1$

अब हम ऊपर प्राप्त परिणाम को एक प्रमेय के रूप में व्यक्त करते हैं।

प्रमेय 1 : यदि किसी अंतराल I पर a_0, a_1, a_2 और b चर x के संतत फलन हैं तथा फलन y_1 और y_2 अवकल समीकरण

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\,y = b(x) \tag{38}$$

के संगत समघात समीकरण के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं तब समीकरण (38) का एक विशेष समाकल निम्न द्वारा प्राप्त होता है :

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)\ b(x)}{a_0(x)\ W(y_1,\ y_2)}\,dx + y_2(x)\ \int \frac{y_1(x)\,b(x)}{a_0(x)W(y_1,\ y_2)}\,dx \tag{39}$$

और तब व्यापक हल

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) \tag{40}$$

होता है, जहाँ $W(y_1,\ y_2)$, $y_1(x)$ और $y_2(x)$ का रांसकियन है।

— ■ —

टिप्पणी : किसी दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, प्राचल-विचरण विधि का प्रयोग करते समय, यह उत्तम होता है कि एक विशेष समाकल $y_p(x) = u_1(x)\ y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$ चुन लिया जाए और तब $u_1(x)$ और $u_2(x)$ ज्ञात करने की प्रक्रिया की जाए, जैसा कि हमने ऊपर उदाहरणों 1 से 3 में किया है। सामान्यतः समीकरणों (24) और (39) में दिए गए सूत्रों को रटने से बचा जाता है।

परंतु, क्योंकि प्रक्रिया कुछ लंबी और जटिल हैं तथा साथ ही इसमें शामिल समाकलों के मान निकालना सदैव सरल या यहाँ तक कि संभव नहीं भी होता, ये सूत्र बहुत लाभप्रद सिद्ध होते हैं। ऐसी स्थितियों में, ये सूत्र $y_p(x)$ के संख्यात्मक मान निकालने के लिए एक शुरूआत का कार्य करते हैं।

प्राचल-विचरण विधि, जिसकी चर्चा हमने असमघात द्वितीय कोटि अवकल समीकरण (12) के लिए की है, को सरलता से nवीं कोटि के असमघात समीकरण

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=b(x)$$

के लिए व्यापीकृत किया जा सकता है, जहाँ $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ किसी अंतराल I पर संतत है। उच्चतर कोटि के समीकरण के लिए इस विधि की विस्तृत जानकारी में रूचि रखने वाले शिक्षार्थी इस इकाई के अंत में दी हुई परिशेषिका को पढ़ सकते हैं। हम यहाँ इसकी विस्तार से चर्चा नहीं करेंगे, परंतु इसे उदाहरणों के द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 4 : प्राचल-विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-6y=e^{2x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल: चरण I : दिए हुए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^3-6m^2+11m-6=0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)\ (m^2-5m+6)=0$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)\ (m-2)\ (m-3)=0$$

इस प्रकार,

$$y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=e^{2x},\ y_3(x)=e^{3x}$$

रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं तथा पूरक फलन निम्न है :

$$y_c(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_2e^{3x} \tag{41}$$

चरण II : विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, हम लिखते हैं :

$$y_p(x)=u_1(x)e^x+u_2(x)e^{2x}+u_3(x)e^{3x} \tag{42}$$

$$\therefore \quad \frac{dy_p}{dx}=(u_1'e^x+u_2'e^{2x}+u_3'e^{3x})+(u_1e^x+2u_2e^{2x}+3u_3e^{3x})$$

मान लीजिए कि **प्रथम सहायक प्रतिबंध** है :

$$u_1'e^x+u_2'e^{2x}+u_3'e^{3x}=0 \tag{43}$$

तब,

$$y_p'=u_1e^x+2u_2e^{2x}+3u_3e^{3x}$$

और $y_p''=(u_1'e^x+2u_2'e^{2x}+3u_3'e^{3x})+(u_1e^x+4u_2e^{2x}+9u_3e^{3x})$.

आइए **द्वितीय सहायक प्रतिबंध** को निम्न रूप में चुनें :

$$u_1'e^x + 2u_2'e^{2x} + 3u_3'e^{3x} = 0 \tag{44}$$

तब,

$$y_p'' = u_1e^x + 4u_2e^{2x} + 9u_3e^{3x}$$

$$\therefore \ y_p''' = (u_1'e^x + 4u_2'e^{2x} + 9u_3'e^{3x}) + (u_1e^x + 8u_2e^{2x} + 27u_3e^{3x})$$

y_p, y_p', y_p'' और y_p''' के मानों को दिए हुए समीकरण में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(u_1'e^x + 4u_2'e^{2x} + 9u_3'e^{3x}) + (u_1e^x + 8u_2e^{2x} + 27u_3e^{3x})$$

$$-6(u_1e^x + 4u_2e^{2x} + 9u_3e^{3x}) + 11(u_1e^x + 2u_2e^{2x} + 3u_3e^{3x})$$

$$-6(u_1e^x + u_2e^{2x} + u_3e^{3x}) = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \ u_1'e^x + 4u_2'e^{2x} + 9u_3'e^{3x} = e^{2x}, \tag{45}$$

जो हमारा **तृतीय सहायक प्रतिबंध** है।

इस प्रकार, u_1', u_2' और u_3' ज्ञात करने के लिए, हमें निम्न समीकरण निकाय प्राप्त है:

$$\left.\begin{array}{r} u_1'e^x + u_2'e^{2x} + u_3'e^{3x} = 0 \\ u_1'e^x + 2u_2'e^{2x} + 3u_3'e^{3x} = 0 \\ u_1'e^x + 4u_2'e^{2x} + 9u_3'e^{3x} = e^{2x} \end{array}\right] \tag{46}$$

समीकरणों (46) को u_1', u_2' और u_3' के लिए हल करने पर हम पाते हैं :

$$u_1' = \frac{1}{2}e^x, \ u_2' = -1 \ \text{ और } \ u_3' = \frac{1}{2}e^{-x}$$

और समाकलित करने पर,

$$u_1 = \frac{1}{2}e^x, \ u_2 = -x \ \text{ और } \ u_3 = \frac{-1}{2}e^{-x}$$

प्राप्त होता है।

चरण III : समीकरण (42) से, हमें दिए हुए समीकरण का निम्न विशेष समाकल प्राप्त होता है :

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} = -xe^{2x}$$

और तब व्यापक हल निम्न हो जाता है :

$$y = y_c(x) + y_p(x)$$

$$= c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - xe^{2x}.$$

***

उदाहरण 5 : प्राचल-विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$y^{IV} - y = x$$

को हल कीजिए, जबकि दिया है कि फलन $\sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x$ संगत समघात समीकरण के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं।

हल: चरण I : पूरक हल निम्न है :

$$y_c(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sinh x + c_4 \cosh x \tag{47}$$

चरण II : निम्न रूप का एक विशेष समाकल लीजिए :

$$y_p(x) = u_1(x)\sin x + u_2(x)\cos x + u_3(x)\sinh x + u_4(x)\cosh x \tag{48}$$

$$\therefore \;\; y_p'(x) = (u_1 \cos x - u_2 \sin x + u_3 \cosh x + u_4 \sinh x)$$

$$+ (u_1' \sin x + u_2' \cos x \;\; + u_3' \sinh x + u_4' \cosh x)$$

प्रथम सहायक प्रतिबंध है :

$$u_1' \sin x + u_2' \cos x + u_3' \sinh x + u_4' \cosh x = 0 \tag{49}$$

इस प्रकार, $\quad y_p' = u_1 \cos x - u_2 \sin x + u_3 \cosh x + u_4 \sinh x$

तथा $\quad y_p'' = (-u_1 \sin x - u_2 \cos x + u_3 \sinh x + u_4 \cosh x)$

$$+ (u_1' \cos x - u_2' \sin x + u_3' \cosh x + u_4' \sinh x)$$

मान लीजिए कि **द्वितीय सहायक प्रतिबंध** है:

$$u_1' \cos x - u_2' \sin x + u_3' \cosh x + u_4' \sinh x = 0 \tag{50}$$

तब, $\quad y_p''' = (-u_1 \cos x + u_2 \sin x + u_3 \cosh x + u_4 \sinh x)$

$$+ (-u_1' \sin x - u_2' \cos x + u_3' \sinh x + u_4' \cosh x)$$

मान लीजिए कि **तृतीय सहायक प्रतिबंध** है :

$$- u_1' \sin x - u_2' \cos x + u_3' \sinh x + u_4' \cosh x = 0 \tag{51}$$

तथा $\quad y_p''' = -u_1 \cos x + u_2 \sin x + u_3 \cosh x + u_4 \sinh x$

$$\therefore \;\; y_p^{IV} = u_1 \sin x + u_2 \cos x + u_3 \sinh x + u_4 \cosh x$$

$$- u_1' \cos x + u_2' \sin x + u_3' \cosh x + u_4' \sinh x.$$

दिए हुए समीकरण में y_p^{IV} और y_p के मानों को रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1 \sin x + u_2 \cos x + u_3 \sinh x + u_4 \cosh x - u_1' \cos x + u_2' \sin x$$

$$+ u_3' \cosh x + u_4' \sinh x - u_1 \sin x - u_2 \cos x - u_3 \sinh x - u_4 \cosh x = x$$

$$\Rightarrow \quad -u_1' \cos x + u_2' \sin x + u_3' \cosh x + u_4' \sinh x = x \tag{52}$$

जो हमारा **चौथा सहायक प्रतिबंध** है।

इस प्रकार हम समीकरणों का निम्न निकाय प्राप्त करते हैं :

$$\left.\begin{array}{l} u_1' \sin x + u_2' \cos x + u_3' \sinh x + u_4' \cosh x = 0 \\ u_1' \cos x - u_2' \sin x + u_3' \cosh x + u_4' \sinh x = 0 \\ -u_1' \sin x - u_2' \cos x + u_3' \sinh x + u_4' \cosh x = 0 \\ -u_1' \cos x + u_2' \sin x + u_3' \cosh x + u_4' \sinh x = x \end{array}\right\} \tag{53}$$

समीकरणों (53) को u_1', u_2', u_3' और u_4', के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1' = \frac{-x}{2} \cos x,\ u_2' = \frac{x}{2} \sin x,\ u_3' = \frac{x}{2} \cosh x,\ u_4' = \frac{-x}{2} \sinh x$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1 = \frac{-1}{2}(x \sin x - \cos x),\ u_2 = \frac{1}{2}(-x \cos x + \sin x)$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(x \sinh x - \cosh x),\ u_4 = \frac{1}{2}(-x \cosh x + \sinh x)$$

चरण III : हम समीकरण (48) से

$$y_p(x) = -x$$

के रूप का विशेष समाकल प्राप्त करते हैं तथा दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है:

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sinh x + c_4 \cosh x - x$$

***

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E3) प्राचल-विचरण विधि द्वारा निम्न अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

i) $y''' - y' = x^2$

ii) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$

iii) $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4,\ x > 0$; दिया गया है कि $y_1 = x,\ y_2 = x^2$ और $y_3 = \frac{1}{x}$ संगत समघात समीकरण के हल हैं।

आपने इस बात पर अवश्य **ध्यान दिया होगा** कि प्राचल-विचरण विधि अनिर्धारित गुणांक विधि की तुलना में अधिक लाभप्रद है क्योंकि, यदि संगत समघात समीकरण के सभी हल ज्ञात हों तो, इससे सदैव एक विशेष समाकल y_p प्राप्त हो जाता है। एक लाभ यह भी है कि इसका अनुप्रयोग अचर गुणांकों वाले उन समीकरणों तक ही सीमित नहीं रहता जिनके असमघात पद विशेष रूपों के ही हों। अगले भाग में, हम एक तकनीक पर चर्चा करेंगे जो प्राचल-विचरण विधि के समान ही है और **कोटि लघुकरण** (reduction of order) विधि कहलाती है। जैसा कि प्रस्तावना में बताया गया था, चर गुणांकों वाले समीकरण के लिए, दिए हुए समीकरण के संगत समानीत समीकरण के मूलभूत हल समुच्चय ज्ञात करना अति कठिन हो सकता है। ऐसे समीकरणों के लिए, कोटि लघुकरण विधि प्राचल-विचरण विधि की अपेक्षा अधिक लाभप्रद है, विशेष रूप से द्वितीय कोटि समीकरणों के लिए, जहाँ समानीत समीकरण का केवल एक रैखिकतः स्वतंत्र हल ज्ञात होने पर, द्वितीय रैखिकतः स्वतंत्र हल तथा दिए हुए समीकरण का व्यापक हल भी इस विधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

12.3 कोटि लघुकरण

कोटि लघुकरण विधि, जैसा कि इसके नाम से प्रतीत होता है, चर गुणांकों वाले दिए हुए समघात/असमघात समीकरण की कोटि एक कम कर देती है; यदि संगत समघात समीकरण का एक अतुच्छ हल ज्ञात हो। उदाहरण के लिए, समीकरण (12) के रूप के द्वितीय कोटि असमघात अवकल समीकरण, अर्थात

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

की स्थिति में, यदि उसके संगत समघात समीकरण का एक अतुच्छ हल, मान लीजिए, $y = y_1(x)$ ज्ञात है, तो कोटि लघुकरण विधि दिए हुए समीकरण को प्रथम कोटि के समीकरण में समानीत कर देती है। व्यापक रूप में, यदि nवीं कोटि के एक असमघात समीकरण के संगत रैखिक समघात समीकरण के k रैखिकतः स्वतंत्र हल ज्ञात हों $(k < n)$, तो कोटि लघुकरण तकनीक का प्रयोग कोटि $(n-k)$ का एक रैखिक समीकरण प्राप्त करने में किया जा सकता है। परंतु यदि $n \geq 3$ हो, तो समानीत समीकरण स्वयं कम से कम द्वितीय कोटि का होगा जिसे हल करना भी दिए हुए समीकरण की तुलना में अधिक सरल नहीं होगा। परंतु यह तकनीक विशेष रूप से तब रोचक है जब $n = 2$ हो, अर्थात द्वितीय कोटि के समीकरण के लिए, क्योंकि परिणामी प्रथम कोटि समीकरण को सदैव ही खंड-2 में अध्ययन की गई विधियों द्वारा हल किया जा सकता है। यहां हम अपनी चर्चा द्वितीय कोटि रैखिक असमघात समीकरणों तक ही सीमित रखेंगे। द्वितीय कोटि के रैखिक असमघात समीकरण की स्थिति में, हम दर्शाएँगे कि संगत समघात समीकरण का एक हल ज्ञात होने पर कोटि लघुकरण विधि किस प्रकार दिए हुए समीकरण का एक विशेष हल तथा द्वितीय रैखिकतः स्वतंत्र हल दोनों ही प्रदान करती है।

पहले हम इस विधि को एक सरल उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करेंगे। निम्न अवकल समीकरण पर विचार कीजिए :

$$x^2y'' - 2y = 0,\ x > 0 \tag{54}$$

इस बात की जाँच सरलता से की जा सकती है कि $y_1 = x^2$ समीकरण (54) को संतुष्ट करता है। अब हम वही प्रक्रिया अपनाते हैं जो हम प्राचल-विचरण विधि की स्थिति में अपनाते हैं तथा समीकरण (54) का $y = v(x)x^2$ के रूप का एक हल ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$y' = 2xv + x^2v'$$

$$y'' = 2v + 4xv' + x^2v''$$

तथा इस प्रकार,

$$x^2y'' - 2y = x^3(4v' + xv'') = 0 \qquad (55)$$

क्योंकि $x \neq 0$, इसलिए समीकरण (55) से हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$xv'' + 4v' = 0 \qquad (56)$$

अब मान लीजिए कि $w = v'$. तब, समीकरण (56) निम्न प्रथम कोटि रैखिक समीकरण में समानीत हो जाता है :

$$xw' + 4w = 0$$

जिसे सरलता से समाकलित किया जा सकता है और

$w = c_1x^{-4}$ या $v' = c_1x^{-4}$

प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार, हम निम्न प्राप्त करते हैं। :

$$v = \frac{c_1x^{-3}}{-3} + c_2$$

$$\therefore \quad y = vx^2 = \frac{-c_1}{3}\frac{1}{x} + c_2x^2 \qquad (57)$$

जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

यदि हम $c_2 = 0$ और $c_1 = -3$ चुनें, तो हम द्वितीय हल $y_2 = \dfrac{1}{x}$ प्राप्त करते हैं।

साथ ही, क्योंकि $W\left(x^2, \dfrac{1}{x}\right) = -3 \neq 0 \ \forall x > 0$, इसलिए $0 < x < \infty$ के लिए y_1 और y_2 रैखिकतः स्वतंत्र हैं। इस प्रकार $0 < x < \infty$ के लिए, $y_1 = x^2$ और $y_2 = \dfrac{1}{x}$ समीकरण (54) के हलों का एक मूलभूत समुच्चय बनाते हैं।

यहाँ आप इस बात पर **ध्यान दें** कि समीकरण (57) द्वारा प्राप्त y का व्यंजक वास्तव में दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है।

आइए अब हम व्यापक द्वितीय कोटि असमघात समीकरण (12)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)\ y=b(x)$$

को लेते हैं, जहाँ a_1, a_2 और b किसी अंतराल I पर संतत हैं, तथा देखते हैं कि ऊपर दी गयी विधि यहाँ किस प्रकार कार्य करती है।

मान लीजिए कि $y=y_1(x)$ संगत समघात समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)\ y=0 \tag{58}$$

का एक अतुच्छ हल है। तब, किसी अचर c के लिए, $y=cy_1(x)$ भी समीकरण (58) का एक हल होगा। समीकरण (58) का द्वितीय हल प्राप्त करने के लिए, अचर c को एक अज्ञात फलन $v(x)$ से प्रतिस्थापित कीजिए तथा $y=v(x)\ y_1(x)$ के रूप का एक जाँच हल लीजिए।

अब,

$$y'=v'y_1+vy_1'$$

$$y''=v''y_1+2v'y_1'+vy_1''$$

दिए हुए असमघात समीकरण में y, y' और y'' के व्यंजकों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$(v''y_1+2v'y_1'+vy_1'')+a_1(v'y_1+vy_1')+a_2vy_1=b(x)$$

$$\Rightarrow\quad v''y_1+v'(2y_1'+a_1y_1)+v(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)=b(x) \tag{59}$$

क्योंकि y_1 समीकरण (58) का एक हल है, इसलिए समीकरण (59) के बाएँ पक्ष का अंतिम पद शून्य होगा। अतः, समीकरण (59) निम्न रूप में समानीत हो जाता है:

$$v''y_1+v'(2y_1'+a_1y_1)=b(x) \tag{60}$$

मान लीजिए कि $v'=\frac{dv}{dx}=p(x)$ जिससे समीकरण (60) निम्न हो जाता है :

$$\frac{dp}{dx}+\frac{2y_1'+a_1y_1}{y_1}\,p=\frac{b(x)}{y_1} \tag{61}$$

समीकरण (61) एक प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण है, जिसका

समाकलन गुणांक $=\exp\left[\int\frac{2y_1'+a_1y_1}{y_1}dx\right]$.

अब $\int\frac{2y_1'+a_1y_1}{y_1}\,dx=2\ln y_1+\int a_1(x)\,dx$.

$\therefore$ समाकलन गुणक $= y_1^2 e^{\int a_1(x)\,dx} = y_1^2 h(x)$, जहाँ $h(x) = e^{\int a_1(x)\,dx}$.

इस प्रकार, समीकरण (61) के हल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y_1^2 h(x)\ p(x) = c_1 + \int b(x)\ y_1 h(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = p(x) = \frac{1}{y_1^2 h(x)}\left[c_1 + \int b(x)\ y_1 h(x)\ dx\right]$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को पुनः एक बार समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v(x) = c_2 + c_1 \int \frac{1}{y_1^2 h(x)}\,dx + \int \frac{1}{y_1^2 h(x)}\left[\int b(x)\ y_1 h(x)\ dx\right]dx$$

इस प्रकार, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$y = v(x)y_1(x) = c_2 y_1(x) + c_1 y_1(x)\int \frac{dx}{y_1^2 h(x)}$$

$$+ y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2 h(x)}\left[\int b(x)\ y_1 h(x)\ dx\right]dx \qquad (62)$$

ध्यान दीजिए कि फलन $y_1(x)\int \frac{dx}{y_1^2 h(x)} = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}\,dx$, जो समीकरण (62) के दाएँ पक्ष का दूसरा पद है, समीकरण (58) का दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र हल है तथा दाएँ पक्ष का अंतिम पद दिए हुए असमघात समीकरण का एक विशेष समाकल है।

इस प्रकार, समीकरण (62) को

$$y = c_2 y_1(x) + c_1 y_2(x) + y_p(x)$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{dx}{y_1^2 h(x)} = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}\,dx \qquad (63)$$

समीकरण (58) का **द्वितीय रैखिकतः स्वतंत्र हल** है तथा

$$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}\left(\int b(x) y_1 e^{\int a_1(x)dx}\,dx\right)dx \qquad (64)$$

समीकरण (12) का **एक विशेष समाकल** है।

अब हम ऊपर चर्चा की गई विधि को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण 6: अवकल समीकरण

$$x^2y'' - xy' + y = x^{1/2}, \quad 0 < x < \infty$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए, जबकि दिया गया है कि $y_1 = x$ संगत समघात समीकरण का एक हल है।

हल : दिया हुआ समीकरण है :

$$x^2y'' - xy' + y = x^{1/2} \tag{65}$$

आइए $y = xv(x)$ को समीकरण (65) का एक जाँच हल लें। इस प्रकार

$$y' = v + xv'$$

$$y'' = 2v' + xv''$$

समीकरण (65) में y, y' और y'' के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$x^2(2v' + xv'') - x(v + xv') + xv = x^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad x^3v'' + x^2v' = x^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad v'' + \frac{1}{x}v' = x^{-5/2} \tag{66}$$

समीकरण (66), v' में एक रैखिक अवकल समीकरण है। इसका समाकलन गुणक है :

समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

अतः, समीकरण (66) से प्राप्त होता है :

$$v'x = \int x.x^{-5/2}dx + c_1$$

$$\Rightarrow \quad v' = c_1x^{-1} - 2x^{-3/2}$$

पुनः एक बार समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$v = c_1 \ln x + 4x^{-1/2} + c_2$$

इस प्रकार,

$$y = xv = c_1x \ln x + c_2x + 4x^{1/2}$$

समीकरण (65) का व्यापक हल है। यहाँ पद $x \ln x$ समीकरण (65) का द्वितीय रैखिकतः स्वतंत्र हल है तथा $4x^{1/2}$ इसका विशेष समाकल है।

अब आइए देखें कि दिए हुए असमघात समीकरण (65) का द्वितीय रैखिकतः स्वतंत्र हल $y_2(x)$ और एक विशेष हल $y_p(x)$ प्राप्त करने में किस प्रकार क्रमशः सूत्रों (63) और (64) का सीधे प्रयोग किया जा सकता है।

समीकरण (65), अर्थात्

$$x^2 y'' - xy' + y = x^{1/2}, \; 0 < x < \infty$$

को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = x^{-3/2}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण की तुलना समीकरण (58) से करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$a_1(x) = -\frac{1}{x} \text{ और } a_2(x) = \frac{1}{x^2}$$

सूत्र (63) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{1}{x} dx}}{x^2}$$

$$= x \int \frac{x}{x^2} dx = x \ln x \quad [y_1(x) = x \text{ दिया गया है}]$$

सूत्र (64) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_p(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} \left(\int b(x) y_1 e^{\int a_1(x)dx} dx \right) dx$$

$$= x \int \frac{x}{x^2} \left(\int x^{-3/2} x . \frac{1}{x} dx \right) dx$$

$$= x \int \frac{1}{x} (-2x^{-1/2}) dx = 4x^{1/2} .$$

***

उदाहरण 7: अवकल समीकरण

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0, \quad 0 < x < \infty$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए, जबकि दिया गया है कि फलन $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ इस समीकरण का एक हल है।

हल : समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0.$$

सूत्र (63) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}(-\cot x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

अतः, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

***

याद रखिए कि द्वितीय हल या विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, सूत्र (63) या (64) का प्रयोग करते समय, दिए हुए समीकरण को समीकरण (58) के रूप में रखना अवश्य है, जैसा कि हमने ऊपर उदाहरण 6 और 7 में किया है।

और अब आपके हल करने के लिए कुछ प्रश्न।

E4) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x^2, \; x > 0; \; y_1(x) = x$

ii) $x^2 y'' + 5xy' - 5y = x^{-1/2}, \; x > 0; \; y_1(x) = x$

E5) अवकल समीकरण

$x^2(1-x^2)\dfrac{d^2 y}{dx^2} - x^3 \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0, \quad 0 < |x| < 1$ का एक हल

$y_1 = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ है। कोटि लघुकरण विधि द्वारा इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

E6) समीकरण

$$x(x\cos x - 2\sin x)\frac{d^2 y}{dx^2} + (x^2+2)\sin x \frac{dy}{dx} - 2(x\sin x + \cos x)\, y = 0,$$

$x > 0$, को हल कीजिए, जब कि दिया है कि $y = x^2$ इसका एक हल है।

अभी तक आप देख चुके हैं कि प्राचल-विचरण विधि चर गुणांकों वाले केवल ऐसे असमघात रैखिक अवकल समीकरणों के लिए ही प्रयोग की जा सकती है, जिनके संगत समघात समीकरणों के सभी रैखिकतः स्वतंत्र हल हमें ज्ञात हों। चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि रैखिक असमघात समीकरणों के पूर्ण हल ज्ञात करने के लिए कोटि लघुकरण विधि सहायक होती है, चाहें संगत समघात समीकरण का **एक ही** हल ज्ञात हो। जैसा कि हमनें इस इकाई की प्रस्तावना में बताया है चर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरणों के एक ऐसे वर्ग का अस्तित्व है, जिन्हें **कोशी-आयॅलर समीकरण** या **ऑयलर समीकरण** के नाम से जाना जाता है, जिनके लिए पूरक फलन के सभी रैखिकतः स्वतंत्र समाकल ज्ञात करना संभव है। इसमें समीकरण को पहले स्वतंत्र चर के रूपांतरण द्वारा एक अचर गुणांकों वाले समीकरण में समानीत किया जाता है और फिर उसके हल प्राप्त किए जाते हैं। अगले भाग में, हम ऑयलर समीकरण को हल करने की विधि पर चर्चा करेंगे।

12.4 ऑयलर समीकरण

निम्नलिखित अवकल समीकरणों पर विचार कीजिए :

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+8x\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{67}$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=e^x \tag{68}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+2y=e^x \tag{69}$$

$$(2x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3}+(2x-1)\frac{dy}{dx}-2y=\sin x \tag{70}$$

ऊपर दिए चार समीकरणों में से समीकरण (67) और (68) ऐसे समीकरण हैं जिनके **गुणांकों में x की घात उनसे संबंधित अवकलज की कोटि के बराबर हैं।** इस प्रकार के समीकरण **ऑयलर समीकरण** या **समविमीय समीकरण** (equidimensional equation) कहलाते हैं। समीकरण (70) ऑयलर रूप का नहीं है, परंतु इसे प्रतिस्थापन $X=2x-1$ द्वारा ऑयलर रूप में बदला जा सकता है। हम ऐसे समीकरण पर भी इस भाग में बाद में विचार करेंगे। जैसा कि आप देख सकते हैं समीकरण (69) न तो ऑयलर समीकरण है और न ही इसे ऑयलर रूप में बदला जा सकता है।

nवीं कोटि के ऑयलर समीकरण का व्यापक रूप निम्न होता है :

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x), \tag{71}$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं तथा दायाँ पक्ष एक अचर या केवल x का एक फलन होता है।

आइए ऑयलर समीकरण (67), अर्थात्

$$4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

से प्रारंभ करें।

अब हमें इस समीकरण को अचर गुणांकों वाले एक समीकरण में बदलना (समानीत करना) है। हम रूपांतरण $x = e^z$ द्वारा समीकरण (67) में स्वतंत्र चर x को एक अन्य चर z में रूपांतरित करते हैं। तब, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = e^{-z}\frac{dy}{dz} \quad \left(\text{since } \frac{dx}{dz} = e^z\right) \tag{72}$$

तथा

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right) = -e^{-z}\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} + e^{-z}\frac{d^2y}{dz^2}.\frac{dz}{dx}$$

$$= -e^{-2z}\frac{dy}{dz} + e^{-2z}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$= e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) \tag{73}$$

समीकरण (67) में, समीकरणों (72) और (73) से प्रतिस्थापन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$4e^{2z}e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) + 8e^z e^{-z}\frac{dy}{dz} + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\frac{d^2y}{dz^2} + 4\frac{dy}{dz} + y = 0 \tag{74}$$

समीकरण (74) अचर गुणांकों वाला एक समीकरण है, जिसमें z स्वतंत्र चर है तथा इसे ज्ञात विधियों से हल किया जा सकता है। इसका सहायक समीकरण है :

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2m+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

समीकरण (74) के व्यापक हल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y = (c_1 + zc_2)e^{-z/2} \tag{75}$$

समीकरण (75) में $x = e^z$ या $z = \ln x$ प्रतिस्थापित करने पर, समीकरण (67) का व्यापक हल

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-1/2}$$

प्राप्त होता है।

यह देखने के लिए कि व्यापक रूप में यह विधि किस प्रकार कार्य करती है, हम द्वितीय कोटि के निम्न ऑयलर समीकरण पर विचार करते हैं :

$$a_0\, x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = f(x). \tag{76}$$

आप यहाँ यह **देख सकते हैं** कि $x = 0$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का गुणांक शून्य है। इसलिए, हम अपना ध्यान अंतराल $]0, \infty[$ में व्यापक हल ज्ञात करने में केन्द्रित रखेंगे।

निम्न प्रतिस्थापन लीजिए:

$$z = \ln x \text{ या } x = e^z$$

इस प्रतिस्थापन द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \quad \left(\because \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \; x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \tag{77}$$

साथ ही, $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

$$\Rightarrow \; x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \tag{78}$$

इस प्रकार, समीकरणों (77) और (78) के प्रतिस्थापन से, समीकरण (76) निम्न रूप में रूपांतरित हो जाता है :

$$a_0\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) + a_1\frac{dy}{dz} + a_2 y = f(e^z)$$

या, $$A_0\frac{d^2y}{dz^2} + A_1\frac{dy}{dz} + A_2 y = Q(z) \tag{79}$$

जहाँ $A_0 = a_0,\, A_1 = a_1 - a_0,\, A_2 = a_2$ और $Q(z) = f(e^z)$.

समीकरण (79) अचर गुणांकों वाला एक समीकरण है तथा इसका पूरक फलन इकाई 10 में चर्चा की गई विधि से ज्ञात किया जा सकता है। इसका विशेष समाकल प्राप्त

करने के लिए, $f(e^z)$ के रूप के अनुसार या तो अनिर्धारित गुणांक विधि या प्राचल-विचरण विधि का उपयोग किया जा सकता है। यदि समीकरण (79) का हल $y = g(z)$ है, तो समीकरण (76) का हल $y = g(\ln x)$ होगा।

हम इस विधि को स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 8 : समीकरण $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \ln x,\ 0 < x < \infty$ को हल कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण कोटि 2 का ऑयलर समीकरण है। इसे हल करने के लिए, मान लीजिए कि

$$x = e^z \text{ या } z = \ln x$$

तब, हम जानते हैं कि

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz},$$

और $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}.$$

दिए हुए समीकरण में, $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2 y}{dx^2}$ के लिए प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} + y = z \tag{80}$$

समीकरण (80) का सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1, 1$$

$$\therefore \quad C.F. = (c_1 + c_2 z)\, e^z$$

समीकरण (80) का P.I. ज्ञात करने के लिए, आइए कल्पना करें कि

$$y_p = u_1(z)\, e^z + u_2(z)\, ze^z \tag{81}$$

$$\therefore \quad \frac{dy_p}{dz} = u_1' e^z + u_2' ze^z + u_1 e^z + u_2 (ze^z + e^z)$$

प्रथम सहायक प्रतिबंध के रूप में, मान लीजिए कि

$$u_1' e^z + u_2' ze^z = 0 \tag{82}$$

तब $$\frac{dy_p}{dz} = u_1 e^z + u_2 (z+1)\, e^z \tag{83}$$

समीकरण (83) को पुनः एक बार अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d^2y_p}{dz^2}=u_1'e^z+u_2'(z+1)\,e^z+u_1e^z+u_2e^z\,(z+1)+u_2e^z \qquad (84)$$

यदि $y_p(z)$ समीकरण (80) का एक हल है, तो यह समीकरण (80) को अवश्य संतुष्ट करेगा। अतः, क्रमशः समीकरणों (81), (83) और (84) से y_p, y_p' और y_p'' के व्यंजकों को समीकरण (80) में प्रतिस्थापित करने पर, हम द्वितीय सहायक प्रतिबंध निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$u_1'e^z+u_2'(z+1)\,e^z=z \qquad (85)$$

समीकरणों (82) और (85) को u_1' और u_2' के लिए हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$u_2'e^z=z \text{ और } e^zu_1'=-z^2$$

$$\Rightarrow \; u_1'=-z^2e^{-z} \text{ और } u_2'=ze^{-z}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1=-\int z^2e^{-z}\,dz$$

$$=-\left[z^2\frac{e^{-z}}{-1}+2\int z\,e^{-z}\,dz\right]$$

$$=+z^2e^{-z}-2\left[z\frac{e^{-z}}{-1}+\int e^{-z}\,dz\right]$$

$$=z^2e^{-z}+2ze^{-z}+2e^{-z}$$

तथा $u_2=\int ze^{-z}\,dz=-ze^{-z}+\int e^{-z}\,dz=-z\,e^{-z}-e^{-z}$.

समीकरण (81) में, $u_1(z)$ और $u_2(z)$ के इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, समीकरण (80) का एक विशेष समाकल निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$y_p(z)=(z^2+2z+2)\,e^{-z}.e^z+(-z-1)\,e^{-z}\,ze^z$$

$$=(z^2+2z+2)-z(z+1)$$

$$=z^2+2z+2-z^2-z$$

$$=z+2$$

तथा समीकरण (80) का व्यापक हल है :

$$y=(c_1+c_2z)\,e^z+z+2$$

z के स्थान पर $\ln x$ रखने पर, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y=(c_1+c_2\ln x).x+\ln x+2.$$

***

उदाहरण 9 : समीकरण $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} + 18y = 0,\ 0 < x < \infty$

को हल कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $x = e^z$ या $z = \ln x$.

तब, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) \tag{86}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{-2}{x^3}\left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3 y}{dz^3}\frac{dz}{dx} - \frac{d^2 y}{dz^2}\frac{dz}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dz^3} - 3\frac{d^2 y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right) \tag{87}$$

दिए हुए समीकरण में समीकरणों (86) और (87) से प्रतिस्थापन करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d^3 y}{dz^3} - 3\frac{d^2 y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} - \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} - 6\frac{dy}{dz} + 18y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^3 y}{dz^3} - 4\frac{d^2 y}{dz^2} - 3\frac{dy}{dz} + 18y = 0$$

ऊपर दिए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+2)\,(m^2 - 6m + 9) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+2)\,(m-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -2, 3, 3$$

$$\therefore\ C.F. = c_1 e^{-2z} + (c_2 + c_3 z)e^{3z}$$

ऊपर दिए समीकरण में, $z = \ln x$ और $e^z = x$ प्रतिस्थापित करने पर, हम दिए हुए समीकरण का व्यापक हल

$$y = c_1 x^{-2} + (c_2 + c_3 \ln x)\,x^3$$

प्राप्त करते हैं।

***

अब हम निम्न उदाहरण द्वारा सम्मिश्र मूलों की स्थिति स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 10: समीकरण $x^2y'' + xy' + 4y = 0,\ 0 < x < \infty$ को हल कीजिए।

हल : $x = e^z$ या $z = \ln x$ लेने पर तथा समीकरण (86) से अवकलजों के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में समानीत हो जाता है:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 4y = 0$$

ऊपर दिए समीकरण का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm 2i$$

अतः, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = c_1 \cos 2z + c_2 \sin 2z$$

या, $$y = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x).$$

***

अब हम एक आदि-मान समस्या का उदाहरण लेते हैं, जहाँ आदि प्रतिबंध x के ऋणात्मक मानों के लिए दिए गए हैं तथा हमें अंतराल $]-\infty, 0[$ में व्यापक हल ज्ञात करना है। ऐसी स्थितियों में, सर्वप्रथम हम प्रतिस्थापन $t = -x$ का प्रयोग करते हुए, दिए हुए समीकरण तथा आदि प्रतिबंधों को अंतराल $]0, \infty[$ में, रूपांतरित करते हैं और फिर ऊपर चर्चा की गई विधि द्वारा व्यापक हल प्राप्त करते हैं। आइए देखें कि ऐसा कैसे किया जाता है।

उदाहरण 11: दिए हुए अवकल समीकरण

$$4x^2y'' + y = 0,\ -\infty < x < 0;$$

$$y(-1) = 2,\ y'(-1) = 4$$

को हल कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $t = -x$. तब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt} \left(\because \frac{dt}{dx} = -1\right)$.

$$\text{तथा } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-dy}{dt}\right) = \frac{-d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

ऊपर दिए प्रतिस्थापनों द्वारा, दिया हुआ समीकरण निम्न में समानीत हो जाता है :

$$4t^2\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = -4 \left(\because \frac{dy}{dx} = \frac{-dy}{dt}\right)$$

इस समीकरण को हल करने के लिए, हम $t = e^z$ या $z = \ln t$ लेते हैं तथा निम्न समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$4\frac{d^2y}{dz^2}-4\frac{dy}{dz}+y=0$$

इसका सहायक समीकरण है :

$$4m^2-4m+1=0$$

$$\Rightarrow\ (2m-1)(2m-1)=0$$

$$\Rightarrow\ m=\frac{1}{2},\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y=e^{z/2}(c_1+zc_2)$$

$$=t^{1/2}(c_1+c_2\ln t)$$

अब, $y(1)=2\Rightarrow c_1=2$

तथा $y'(1)=-4\Rightarrow c_2=-5$

इस प्रकार, $y=t^{1/2}(2-5\ln t)$

$$=(-x)^{1/2}[2-5\ln(-x)]$$

जो अभीष्ट व्यापक हल है।

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E7) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए।

i) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+3y=0,\ 0<x<\infty$.

ii) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+5x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}+8y=0,\ 0<x<\infty$.

E8) अंतराल $]0,\infty[$ पर निम्न अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कीजिए :

i) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$

ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^n$

iii) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{4}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{5}{x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x^3}=1$

E9) दिखाइए कि ऑयलर समीकरण $r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-n^2R=0$ का एक हल, जो $R(b)=0$ को संतुष्ट करता है, जहाँ b अचर है, निम्न है :

i) $R=C\left[\left(\frac{b}{r}\right)^n-\left(\frac{r}{b}\right)^n\right]$; $n=1, 2, 3, \ldots,$ के लिए, C एक अचर है।

ii) $R=C\ln\left(\frac{r}{b}\right)$; $n=0$ के लिए, C एक अचर है।

E10) दिए गए आदि प्रतिबंधों के अधीन निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $x^2y''+xy'+y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=2,\ 0<x<\infty.$

ii) $x^2y''-4xy'+6y=0,\ y(-2)=8,\ y'(-2)=0,\ -\infty<x<0$

जैसा कि हमनें पहले बताया था समीकरण (70) ऑयलर समीकरण नहीं है परंतु इसे प्रतिस्थापन $X=2x-1$ द्वारा ऑयलर रूप में समानीत किया जा सकता है। अब हम ऐसे समीकरणों पर विचार करेंगे जिन्हें ऑयलर रूप में समानीत किया जा सकता है।

आयॅलर रूप में समानेय समीकरण

समीकरण (70), अर्थात्

$$(2x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3}+(2x-1)\frac{dy}{dx}-2y=\sin x$$

को लीजिए।

मान लीजिए कि $X=2x-1$. तब हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dX}\frac{dX}{dx}=2\frac{dy}{dX},\ \frac{d^2y}{dx^2}=4\frac{d^2y}{dX^2}\ \text{और}\ \frac{d^3y}{dx^3}=8\frac{d^3y}{dX^3} \tag{88}$$

समीकरण (88) से समीकरण (70) में प्रतिस्थापित करने पर, यह निम्न में समानीत हो जाता है :

$$8X^3\frac{d^3y}{dX^3}+2X\frac{dy}{dX}-2y=\sin\left(\frac{X+1}{2}\right) \tag{89}$$

जो ऑयलर रूप का है।

इसी प्रकार, व्यापक nवीं कोटि समीकरण

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+(ax+b)^{n-1}a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+(ax+b)a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x) \tag{90}$$

जहाँ $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ सभी अचर हैं, के लिए प्रतिस्थापन $X=ax+b$ लीजिए।

इस प्रतिस्थापन के साथ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dX}\,\frac{dX}{dx}=a\frac{dy}{dX},\ \frac{d^2y}{dx^2}=a^2\,\frac{d^2y}{dX^2},\ \cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}=a^n\,\frac{d^ny}{dX^n}$$

और समीकरण (90) निम्न समीकरण में समानीत हो जाता है :

$$a^nX^n\,\frac{d^ny}{dX^n}+a^{n-1}X^{n-1}a_1\,\frac{d^{n-1}y}{dX^{n-1}}+\cdots+aXa_{n-1}\,\frac{dy}{dX}+a_ny=g(X) \quad (91)$$

जहाँ g फलन f का रूपांतरित रूप है।

दोनों समीकरण (89) और (91) आयॅलर रूप के हैं। इन्हें ऊपर चर्चा की गई विधि द्वारा अचर गुणांकों वाले समीकरणों में समानीत करके हल किया जा सकता है। परंतु प्रतिस्थापन $ax+b=e^z$ समीकरण (90) को सीधे ही चर गुणांकों वाले एक समीकरण में समानीत कर देता है। इसी प्रकार, समीकरण (70) को अचर गुणांकों वाले समीकरण में बदलने के लिए प्रतिस्थापन $2x-1=e^z$ का प्रयोग किया जा सकता है ।

हम एक उदाहरण की सहायता से इस विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 12: समीकरण

$$(3x+2)^2\,\frac{d^2y}{dx^2}+3(3x+2)\frac{dy}{dx}-36y=3x^2+4x+1,\ 0<x<\infty$$

को हल कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण ऑयलर समीकरण के रूप में समानेय होने वाला समीकरण है। हम इसे एक ही प्रतिस्थापन द्वारा अचर गुणांकों वाले समीकरण में समानीत कर सकते हैं।

मान लीजिए कि $3x+2=e^z$ या $z=\ln(3x+2)$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}=\frac{1}{3x+2}.3\frac{dy}{dz}\Rightarrow(3x+2)\,\frac{dy}{dx}=3\frac{dy}{dz}\ \left(\because\ \frac{dz}{dx}=\frac{3}{3x+2}\right)$$

$$\text{तथा}\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{3}{3x+2}\,\frac{dy}{dz}\right]=\frac{-3^2}{(3x+2)^2}\,\frac{dy}{dx}+\frac{3}{3x+2}\,\frac{d^2y}{dz^2}\,\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{3^2}{(3x+2)^2}\left[\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right]$$

दिए हुए समीकरण में $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$9\left[\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right]+3.3\,\frac{dy}{dz}-36y=\frac{1}{3}\,[e^{2z}-1]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}-4y=\frac{1}{27}(e^{2z}-1) \tag{92}$$

सहायक समीकरण है:

$$m^2-4=0 \Rightarrow m=\pm 2$$

अतः, $C.F.=y_c=c_1e^{2z}+c_2e^{-2z}.$

एक विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, हम लेते हैं :

$$y_p(z)=u_1(z)\,e^{2z}+u_2(z)\,e^{-2z} \tag{93}$$

$$\therefore \frac{dy_p}{dz}=u_1'e^{2z}+u_2'e^{-2z}+2(u_1e^{2z}-u_2e^{-2z})$$

प्रथम सहायक प्रतिबंध के रूप में, मान लीजिए कि

$$u_1'e^{2z}+u_2'e^{-2z}=0 \tag{94}$$

इस प्रकार

$$\frac{dy_p}{dz}=2(u_1e^{2z}-u_2e^{-2z}). \tag{95}$$

समीकरण (95) को पुनः एक बार अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d^2y_p}{dz^2}=2(u_1'e^{2z}-u_2'e^{-2z})+4u_1e^{2z}+4u_2e^{-2z} \tag{96}$$

क्योंकि $y_p(z)$ समीकरण (92) को अवश्य ही संतुष्ट करेगा, इसलिए हम समीकरणों (93), (95) और (96) को संयोजित करते हैं तथा द्वितीय सहायक प्रतिबंध के रूप में निम्न प्राप्त करते हैं :

$$2(u_1'e^{2z}-u_2'e^{-2z})=\frac{1}{27}(e^{2z}-1)$$

$$\Rightarrow u_1'e^{2z}-u_2'e^{-2z}=\frac{1}{54}(e^{2z}-1) \tag{97}$$

u_1' और u_2' के लिए, समीकरणों (94) और (97) को हल करने पर, हम

$$u_1'=\frac{1}{108}(1-e^{-2z}) \text{ और } u_2'=-\frac{1}{108}(e^{4z}-e^{2z}) \text{ प्राप्त करते हैं।}$$

u_1' और u_2' को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1(z)=\frac{1}{108}\left(z+\frac{e^{-2z}}{2}\right) \text{ और } u_2(z)=-\frac{1}{108}\left(\frac{e^{4z}}{4}-\frac{e^{2z}}{2}\right).$$

संबंध (93) में $u_1(z)$ और $u_2(z)$ के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, समीकरण (92) का एक विशेष हल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$y_p = \frac{1}{108}\left(z + \frac{e^{-2z}}{2}\right)e^{2z} - \frac{1}{108}\left(\frac{e^{4z}}{4} - \frac{e^{2z}}{2}\right)e^{-2z}$$

$$= \frac{1}{108}e^{2z}\left(z - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{108}$$

$\therefore$ समीकरण (92) का व्यापक हल है :

$$y = c_1 e^{2z} + c_2 e^{-2z} + \frac{1}{108}e^{2z}\left(z - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{108}$$

तथा दिए हुए समीकरण का अभीष्ट हल है:

$$y = c_1(3x+2)^2 + \frac{c_2}{(3x+2)^2} + \frac{1}{108}(3x+2)^2\left[\ln\,(3x+2) - \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{108}.$$

***

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E11) अंतराल $]0, \infty[$ में, निम्न अवकल समीकरणों का हल प्राप्त कीजिए :

i) $$(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+a)\frac{dy}{dx} + 6y = x$$

ii) $$(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (1+x)\frac{dy}{dx} + y = 4\cos[\ln\,(x+1)]$$

इस इकाई में, हमने जो कुछ भी अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, हम इस इकाई को यहीं समाप्त कर रहे हैं।

12.5 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित परिणामों का विस्तारपूर्वक अध्ययन किया है:

1. मान लीजिए y_1 और y_2 अचर या चर गुणांकों वाले समीकरण (12) के रूप के एक दिए गए असमघात द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरण के संगत समानीत समीकरण के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं। तब, दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल $y_p(x)$, समीकरण में $y_p(x) = y_1u_1(x) + y_2u_2(x)$ प्रतिस्थापित करके तथा सूत्रों

$$u_1(x) = \int \frac{-b(x)\,y_2(x)}{W(y_1,\, y_2)}\,dx$$

और $u_2(x) = \int \frac{b(x) y_1(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$ द्वारा, $u_1(x)$ और $u_2(x)$ ज्ञात करके, प्राप्त किया जाता है,

जहाँ $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, $y_1(x)$ और $y_2(x)$ का रांसकियन है।

2. यदि $y = y_1(x)$ समानीत समीकरण का एक हल है, तो $y = y_1(x)\, v(x)$ प्रतिस्थापित करने पर, समानीत समीकरण का द्वितीय हल तथा संगत असमघात समीकरण का एक विशेष समाकल ज्ञात किया जा सकता है।

3. अवकल समीकरण

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

के रूप का चर गुणांकों वाला अवकल समीकरण, जहाँ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं तथा जिसके गुणाकों में x की घात संबंधित अवकलज की कोटि के बराबर हैं, ऑयलर समीकरण कहलाता है। इस समीकरण को प्रतिस्थापन $x = e^z$ द्वारा अचर गुणांकों वाले समीकरण में समानीत किया जा सकता है और फिर इसे ज्ञात विधियों से हल किया जा सकता है।

12.6 हल / उत्तर

E1) i) दिए हुए समीकरण का पूरक फलन निम्न है :

$$y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

मान लीजिए कि $y_p(x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$

तब, दो सहायक प्रतिबंध हैं :

$$\frac{du_1}{dx} \cos x + \frac{du_2}{dx} \sin x = 0$$

और

$$-\sin x \frac{du_1}{dx} + \cos x \frac{du_2}{dx} = \operatorname{cosec} x.$$

ऊपर दिए निकाय को $\frac{du_1}{dx}$ और $\frac{du_2}{dx}$ के लिए हल करने पर, हम

$$\frac{du_1}{dx} = -1 \text{ और } \frac{du_2}{dx} = \cot x$$

प्राप्त करते हैं। u_1' और u_2' को समाकलित करने पर, हम, प्राप्त करते हैं।

$$u_1(x) = -x \text{ और } u_2(x) = \ln \sin x.$$

अतः, $y_p(x) = -x\cos x + \ln(\sin x).\sin x$

और अभीष्ट व्यापक हल है :

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln(\sin x)$.

ii) दिया हुआ समीकरण है

$y'' - 2y' + y = xe^x \ln x,\ x > 0$.

पूरक फलन $y_c = (c_1 + c_2 x)e^x$.

मान लीजिए कि $y_p(x) = [u_1(x) + u_2(x).x]\ e^x$.

तब, सहायक प्रतिबंध निम्न है :

$\frac{du_1}{dx} + x\frac{du_2}{dx} = 0$, और

$\frac{du_1}{dx} + (1+x)\frac{du_2}{dx} = x \ln x$.

$\frac{du_1}{dx}$ और $\frac{du_2}{dx}$ के लिए हल करने पर, हम

$\frac{du_1}{dx} = -x^2 \ln x$ और $\frac{du_2}{dx} = x \ln x$ प्राप्त करते हैं।

u_1' और u_2' को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1 = -\int x^2 \ln x\ dx = -\frac{x^3}{3}\ln x + \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\ dx$$

$$= -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{1}{9}x^3,$$

$$u_2 = \int x \ln x\ dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\ dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

अतः, $y_p(x) = e^x\left[-\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{1}{9}x^3 + \frac{x^3}{2}\ln x - \frac{x^3}{4}\right]$

$$= e^x\left[\frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5}{36}x^3\right].$$

iii) पूरक फलन है :

$$y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

मान लीजिए, $y_p(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x$.

दो सहायक प्रतिबंध निम्न हैं :

$$\frac{du_1}{dx}\cos x + \frac{du_2}{dx}\sin x = 0, \text{ और}$$

$$-\frac{du_1}{dx}\sin x + \frac{du_2}{dx}\cos x = \tan x.$$

इन्हें हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{du_1}{dx} = \cos x - \sec x \text{ और } \frac{du_2}{dx} = \sin x$$

u_1' और u_2' को समाकलित करने पर, हम पाते हैं :

$u_1 = \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$ और $u_2 = -\cos x$.

इस प्रकार $y_p(x) = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$.

E2) i) पूरक फलन $y_c(x) = c_1 x + c_2 x^2$.

मान लीजिए कि एक विशेष समाकल $y_p(x) = x u_1(x) + x^2 u_2(x)$.

दो सहायक प्रतिबंध निम्न हैं :

$$x u_1' + x^2 u_2' = 0, \text{ और}$$

$$u_1' + 2x u_2' = \frac{x+1}{x^2}.$$

u_1' और u_2' के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$u_1' = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ और } u_2' = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

इस प्रकार, $u_1 = -\ln x + \dfrac{1}{x}$ और $u_2 = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$.

इसलिए, $y_p(x) = \dfrac{1}{2} - x - x \ln x$.

अतः, व्यापक हल $y = c_1 x + c_2 x^2 + \dfrac{1}{2} - x - \ln x$.

ii) $y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + e^x - \frac{1}{x} e^x$.

iii) दिए हुए समीकरण को पुनः निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$y'' - \frac{(x+1)}{x} y' + \frac{y}{x} = x$$

पूरक हल $y_c(x) = c_1 e^x + c_2(x+1)$.

मान लीजिए कि एक विशेष समाकल $y_p(x) = u_1 e^x + u_2(x+1)$.

दो सहायक प्रतिबंध हैं :

$e^x u_1' + (x+1)u_2' = 0$ और $e^x u_1' + u_2' = x$

u_1' और u_2' के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$u_1' = (x+1)e^{-x}, u_2' = -1$

इस प्रकार, $u_1 = -e^{-x}(x+2), u_2 = -x$

$y_p(x) = -(x+2) - x(x+1) = -(x^2 + 2x + 2)$

$\therefore$ व्यापक हल $y = c_1 e^x + c_2(x+1) - (x^2 + 2x + 2)$.

E3) i) $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 2x - \frac{x^3}{3}$.

ii) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x} + \frac{1}{8} e^{3x}$.

iii) दिए हुए समीकरण को पुनः निम्न रूप में लिखने पर,

$$y''' + \frac{y''}{x} - \frac{2}{x^2} y' + \frac{2}{x^3} y = 2x, \; x > 0$$

$$y_c(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{c_3}{x}$$

मान लीजिए कि $y_p(x) = x u_1 + x^2 u_2 + \frac{1}{x} u_3$.

तीन सहायक प्रतिबंध हैं :

$$x u_1' + x^2 u_2' + \frac{1}{x} u_3' = 0$$

$$u_1' + 2x u_2' - \frac{1}{x^2} u_3' = 0$$

$$u_2' + \frac{1}{x^3}u_3' = 0$$

ऊपर प्राप्त निकाय को u_1', u_2' और u_3' के लिए हल करने पर, हम पाते हैं :

$$u_1' = -x^2, u_2' = \frac{2}{3}x, u_3' = \frac{x^4}{3}$$

समाकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1 = \frac{-x^3}{3}, u_2 = \frac{x^2}{3}, u_3 = \frac{x^5}{15}$$

$$\therefore \quad y_p(x) = \frac{-x^4}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{15} = \frac{x^4}{15}$$

तथा अभीष्ट व्यापक हल है :

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{c_3}{x} + \frac{x^4}{15}.$$

E4) i) दिया हुआ समीकरण $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x^2$ है।

यहाँ संगत समघात समीकरण के हलों में से एक हल $y_1(x) = x$ है।

$\therefore$ मान लीजिए कि $y = vx$.

दिए हुए समीकरण में y, y' और y'' के लिए प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2(2v' + xv'') - 2x(v + xv') + 2vx = 4x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^3 v'' = 4x^2$$

$$\Rightarrow \quad v'' = \frac{4}{x}, x > 0$$

समाकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v' = 4 \ln x + c_1$$

पुनः समाकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v = c_1 x + c_2 + \int 4 \ln x \, dx$$

$$= c_1 x + c_2 + 4x \ln x - 4\int x \frac{1}{x} \, dx$$

$$= c_1x + c_2 + 4x\ln x - 4x$$

इस प्रकार, $y = vx = c_2x + c_1x^2 + 4x^2\ln x - 4x^2$

ii) $y = -\dfrac{c_1}{6}x^{-5} + c_2x - \dfrac{4}{27}x^{-1/2}$.

E5) दिया हुआ समीकरण $x^2(1-x^2)y'' - x^3y' - 2y = 0$ है।

क्योंकि इस समीकरण का एक हल $y_1 = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ है, इसलिए मान लीजिए कि

$$y = v\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

दिए हुए समीकरण में y, y' और y'' के लिए प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$v'' - \frac{2+x^2}{x(1-x^2)}v' = 0$$

जो कि v' और x में एक रैखिक समघात समीकरण है तथा इसका

समाकलन गुणक $= e^{-\int \frac{2+x^2}{x(1-x^2)}dx}$

अब, $-\displaystyle\int \frac{2+x^2}{x(1-x^2)}dx = -\int \frac{2}{x}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{1-x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+x}dx$

[आंशिक भिन्नों के द्वारा]

$$= -2\ln x + \frac{3}{2}\ln(1-x) + \frac{3}{2}\ln(1+x)$$

$$= \ln\frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^2}$$

$\therefore$ समाकलन गुणक $= \dfrac{(1-x^2)^{3/2}}{x^2}$

और $v'\dfrac{(1-x^2)^{3/2}}{x^2} = c_1$

$$\Rightarrow \quad v' = \frac{c_1x^2}{(1-x^2)^{3/2}}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को पुनः एक बार समाकलित करने पर, हम

$$v = c_1 \int \frac{x}{1-x^2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

प्राप्त करते हैं।

$\sqrt{1-x^2} = \sin\theta$ प्रतिस्थापित करने पर

$$v = -c_1 \int \cot^2\theta \, d\theta$$

$$= -c_1[-\cot\theta - \theta] + c_2$$

$$= c_2 + c_1\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$$

अतः $y = v\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = c_2\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c_1\left(1 + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$

ध्यान दीजिए कि ऊपर दी गयी समस्या में, आप सूत्र (63) का प्रयोग करके तथा

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2} dx = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}} \int \frac{x^2}{1-x^2} e^{\int \frac{x}{1-x^2}dx}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{1-x^2}{x}} \int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx$$

को हल करके सीधे ही दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र हल प्राप्त कर सकते हैं।

E6) दिया हुआ समीकरण है :

$$x(x\cos x - 2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2+2)\sin x\frac{dy}{dx} - 2(x\sin x + \cos x)y = 0.$$

क्योंकि $y_1 = x^2$ दिए हुए समीकरण का एक हल है, इसलिए मान लीजिए कि $y = vx^2$

दिए हुए समीकरण में y, y' और y'' के लिए प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं : $\therefore$

$$v'' + \frac{x^2\sin x + 4x\cos x - 6\sin x}{x^2\cos x - 2x\sin x}v' = 0$$

यह एक रैखिक समघात समीकरण है तथा इसका

समाकलन गुणक $= e^{\int (x^2\sin x + 4x\cos x - 6\sin x)/(x^2\cos x - 2x\sin x)\,dx}$

अब, $\int \frac{x^2 \sin x + 4x\cos x - 6\sin x}{x^2 \cos x - 2x\sin x}\, dx$

$$= \int \left[-\frac{(-x^2 \sin x - 2\sin x)}{x^2 \cos x \quad - 2x\sin x} + \frac{4(x\cos x - 2\sin x)}{x(x\cos x - 2\sin x)} \right] dx$$

$$= -\ln(x^2 \cos x - 2x\sin x) + 4\ln x$$

$$= \ln \left[\frac{x^4}{(x^2 \cos x - 2x\sin x)} \right]$$

$\therefore$ समाकलन गुणक $= \dfrac{x^4}{(x^2 \cos x - 2x\sin x)}$

इस प्रकार, $v' \dfrac{x^4}{x^2 \cos x - 2x\sin x} = c_1$

$$\Rightarrow \quad v' = c_1 \left(\frac{x^2 \cos x - 2x\sin x}{x^4} \right)$$

$$= c_1 \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{2}{x^3} \sin x \right) \quad = c_1 \, d\left(\frac{\sin x}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad v = c_2 + c_1 \left(\frac{\sin x}{x^2} \right)$$

अतः $\quad y = c_2 x^2 + c_1 \sin x$

E7) i) दिए हुए समीकरण में $x = e^z$ या $z = \ln x$ रखने पर यह निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + 3\frac{dy}{dz} + 3y = 0$$

इस समीकरण का सहायक समीकरण है

$$m^2 + 2m + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -1 \pm \sqrt{2}\, i$$

व्यापक हल है :

$$y = e^{-z}[c_1 \cos(\sqrt{2}z) + c_2 \sin(\sqrt{2}z)]$$

$$= x^{-1}[c_1 \cos(\sqrt{2}\ln x) + c_2 \sin(\sqrt{2}\ln x)]$$

ii) $x = e^z$ या $z = \ln x$ रखने पर, दिया हुआ समीकरण

$$\frac{d^3y}{dz^3} + 2\frac{d^2y}{dz^2} + 4\frac{dy}{dz} + 8y = 0$$

में समानीत हो जाता है।

सहायक समीकरण है :

$$m^3 + 2m^2 + 4m + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \ (m+2)(m^2+4) = 0$$

$$\Rightarrow \ m = -2, 2i, -2i$$

व्यापक हल $y = \dfrac{c_1}{x^2} + c_2 \cos(2\ln x) + c_3 \sin(2\ln x)$.

E8) i) मान लीजिए कि $x = e^z$. इसके अवकलजों को प्रतिस्थापित करने पर दिया हुआ समीकरण निम्न रूप का हो जाता है :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} = e^{-z} \qquad (98)$$

सहायक समीकरण है : $m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m = 0, -2$

$$y_c = c_1 + c_2 e^{-2z}$$

समीकरण (98) का विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए, मान लीजिए

$$y_p(z) = u_1(z) + u_2(z)\, e^{-2z}. \qquad (99)$$

$$\therefore \ \frac{dy_p}{dz} = u_1' + u_2' e^{-2z} + u_2(-2)\, e^{-2z}$$

प्रथम सहायक प्रतिबंध के रूप में, मान लीजिए कि

$$u_1' + u_2' e^{-2z} = 0, \qquad (100)$$

इसलिए $\dfrac{dy_p}{dz} = -2u_2\, e^{-2z}$, और (101)

$$\frac{d^2y_p}{dz^2} = -2u_2' e^{-2z} + 4u_2 e^{-2z} \qquad (102)$$

क्योंकि $y_p(z)$ समीकरण (98) को अवश्य संतुष्ट करेगा, अतः क्रमशः संबंधों (99) (101) और (102) से y_p, y_p' और y_p'' के मान समीकरण (98) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$-2u_2' e^{-2z} + 4u_2 e^{-2z} + 2[-2u_2 e^{-2z}] = e^{-z}$$

$$\Rightarrow \quad u_2' = -\frac{1}{2}e^{z} \tag{103}$$

समीकरणों (100) और (103) को u_1' और u_2', के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u_1' = \frac{1}{2}e^{-z} \quad \text{और} \quad u_2' = \frac{1}{2}e^{z}$$

अतः, समीकरण (99) में $u_1(z)$ और $u_2(z)$ के मानों को प्रतिस्थापित करने पर समीकरण (98) का एक विशेष समाकल निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$y_p(z) = -\frac{1}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{-z} = -e^{-z}$$

समीकरण (98) का व्यापक हल निम्न रूप का हो जाता है :

$$y = c_1 + c_2 e^{-2z} - e^{-z},$$

इस प्रकार, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल निम्न है :

$$y = c_1 + \frac{c_2}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

ii) $$y = \begin{cases} Ax + \dfrac{B}{x} + \dfrac{1}{m^2-1}x^m \ ; \text{ यदि } m \neq \pm 1. \\[2ex] Ax + \dfrac{B}{x} + \dfrac{\ln x}{2}x^m \ ; \text{ यदि } m = \pm 1. \end{cases}$$

iii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3,$$

जो एक ऑयलर समीकरण है तथा इसका व्यापक हल

$$y = c_1x^2 + x^{5/2}(c_2x^{\sqrt{21}/2} + c_3x^{-\sqrt{21}/2}) - \frac{x^3}{5}.$$

E9) $r = e^z$ या $z = \ln r$ प्रतिस्थापित करने पर, दिया हुआ समीकरण

$$\frac{d^2R}{dz^2} - n^2R = 0$$

में समानीत हो जाता है। सहायक समीकरण है :

$$m^2 - n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm n$$

व्यापक हल है :

$$R = c_1 e^{nz} + c_2 e^{-nz}$$

या $\quad R = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$

$R(b) = 0$ दिया हुआ है।

$\therefore \; c_1 b^n + c_2 b^{-n} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ के लिए।

$$\Rightarrow \; c_1 = \frac{-c_2 b^{-n}}{b^n}$$

$$\therefore \; R = \frac{-r^n c_2 b^{-n}}{b^n} + c_2 r^{-n}$$

$$= -\left(\frac{r}{b}\right)^n c_2 b^{-n} + \frac{r^{-n}}{b^{-n}} c_2 b^{-n}$$

$$= C\left[-\left(\frac{r}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{r}\right)^n\right],$$ जहाँ $C = c_2 b^{-n}$.

$n = 0$ के लिए, सहायक समीकरण हो जाता है :

$$m^2 = 0 \Rightarrow m = 0, 0$$

व्यापक हल है :

$R = c_1 + c_2 z \quad$ या $\quad R = c_1 + c_2 \ln r$

$$R(b) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 \ln b = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = -c_2 \ln b$$

$$\therefore \; R = c_2[-\ln b + \ln r] = c_2 \ln(r/b).$$

E10) i) प्रतिस्थापन $x = e^z$, $z = \ln x$ दिए हुए समीकरण को

$\dfrac{d^2y}{dz^2} + z = 0$ में समानीत कर देता है।

सहायक समीकरण है : $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$

$\therefore$ व्यापक हल $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$.

$y(1) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$ और $y'(1) = 2 \Rightarrow c_2 = 2$

इस प्रकार, व्यापक हल है :

$$y = \cos(\ln x) + 2\sin(\ln x).$$

ii) $t=-x$ प्रतिस्थापित करने पर, दिया हुआ समीकरण निम्न में समानीत हो जाता है :

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}-4t\frac{dy}{dt}+6y=0,\ y(2)=8,\ y'(2)=0$$

$t=e^z,\ z=\ln t$ को ऊपर दिए समीकरण में रखने पर,

$$\frac{d^2y}{dz^2}-5\frac{dy}{dz}+6y=0\ .$$

सहायक समीकरण है : $m^2-5m+6=0 \Rightarrow m=2,3$

$\therefore$ व्यापक हल $y=c_1e^{2z}+c_2e^{3z}=c_1t^2+c_2t^3$.

$$y(2)=8 \Rightarrow 4c_1+8c_2=8$$

तथा $y'(2)=0 \Rightarrow 4c_1+12c_2=0$

c_1 और c_2 के लिए, ऊपर प्राप्त निकाय को हल करने पर, हम $c_1=6$ और $c_2=-2$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, $y=6x^2+2x^3$ अभीष्ट व्यापक हल है।

E11) i) दिया हुआ समीकरण है :

$$\left[(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+a)\frac{dy}{dx}+6\right]y=x \tag{104}$$

इसे हल करने के लिए, मान लीजिए कि $x+a=e^z$ या

$z=\ln(x+a)$.

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+a}\frac{dy}{dz}$, और

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(x+a)^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{(x+a)^2}\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{(x+a)^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)$$

इस प्रतिस्थापन के साथ, दिया हुआ समीकरण निम्न में समानीत हो जाता है :

$$\left[\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)-4\frac{dy}{dz}+6y\right]=e^z-a$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{d^2y}{dz^2}-5\frac{dy}{dz}+6y\right)=e^z-a \tag{105}$$

समीकरण (105) का व्यापक हल निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$y = c_1 e^{2z} + c_2 e^{3z} + \frac{1}{2} e^{z} - \frac{a}{6}$$

तथा समीकरण (104) का व्यापक हल है :

$$y = c_1 (x+a)^2 + c_2 (x+a)^3 + \frac{1}{2}(x+a) - \frac{a}{6}.$$

ii) $y = a\cos\{\ln(1+x)\} + b\sin\{\ln(1+x)\} + 2\ln(1+x)\sin\{\ln(1+x)\}.$

- x -

परिशोषिका

आइए हम निम्नलिखित रूप का रैखिक अवकल समीकरण लें :

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)\,y=b(x), \tag{A1}$$

जहाँ $a_0(x)\neq 0$ है तथा $a_0, a_1, \ldots, a_n$ और b किसी अंतराल I में संतत हैं।

यहाँ हम यह मान लेंगे कि (A1) के संगत समघात अवकल समीकरण का हल

$$y_c(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x), \tag{A2}$$

है, जहाँ $y_1 \;\; y_2 \ldots y_n$ समघात अवकल समीकरण के रैखिकतः स्वतंत्र हल है तथा $c_1 \;\; c_2 \ldots c_n$ अचर है। आइए हम यह मान लें कि समीकरण (A1) का विशेष समाकल निम्न रूप का है ;

$$y_p(x)=\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\; y_i(x) \tag{A3}$$

इस संबंध में n अज्ञात फलन $u_1, u_2, \ldots, u_n$ हैं। यह प्रतिबंध कि संबंध (A3) समीकरण (A1) को संतुष्ट करता है केवल एक आवश्यक प्रतिबंध है, जो अवश्य ही संतुष्ट होना चाहिए तथा इससे $u_1, u_2, \ldots u_n$ को चुनने में बहुत स्वतंत्रता मिल जाती है। वास्तव में, हम $(n-1)$ प्रतिबंध लगा सकते हैं, जिन्हें दिए हुए अवकल समीकरण के साथ लेने पर n अज्ञात फलनों $u_1, u_2, \ldots u_n$ को ज्ञात करने के लिए हमें n प्रतिबंध प्राप्त हो जाते हैं। संबंध (A3) का अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy_p}{dx}=\sum_{i=1}^{n} u_i\frac{dy_i}{dx}+\sum_{i=1}^{n}\frac{du_i}{dx}\,y_i \tag{A4}$$

हम प्रथम सहायक प्रतिबंध के रूप में संबंध (A4) के दाएँ पक्ष के दूसरे पद को शून्य मान लेते हैं, अर्थात्

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{du_i}{dx}\,y_i=0 \tag{A5}$$

तब, $\dfrac{dy_p}{dx}$ का व्यंजक निम्न रूप का हो जाता है:

$$\frac{dy_p}{dx}=\sum_{i=1}^{n} u_i\frac{dy_i}{dx} \tag{A6}$$

(A6), का अवकलन करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{d^2 y_p}{dx^2} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{d^2 y_i}{dx^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{du_i}{dx} \frac{dy_i}{dx} \tag{A7}$$

द्वितीय सहायक प्रतिबंध के रूप में हम लेते हैं :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{du_i}{dx} \frac{dy_i}{dx} = 0, \tag{A8}$$

जिससे कि $\dfrac{d^2 y_p}{dx^2} = \sum_{i=1}^{n} u_i \dfrac{d^2 y_i}{dx^2}$. (A9)

हम y_p के अवकलन की प्रक्रिया को $(n-1)$ बार जारी रख कर $(n-1)$ सहायक प्रतिबंध प्राप्त करते हैं। तब, $(n\text{-}1)$वाँ सहायक प्रतिबंध यह होगा :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{du_i}{dx} \frac{d^{n-2} y_i}{dx^{n-2}} = 0 \tag{A10}$$

तथा $\dfrac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} u_i \dfrac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}}$ (A11)

(A11) का अवकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{d^n y_p}{dx^n} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{d^n y_i}{dx^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{du_i}{dx} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \tag{A12}$$

(A3), (A6), (A9), (A11) और (A12) इत्यादि जैसे समीकरणों से प्राप्त y_p और उसके अवकलजों के मानों को (A1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \left[a_0 \frac{d^n y_i}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y_i \right]$$

$$+ a_0(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} . \frac{du_i}{dx} = b(x) \tag{A13}$$

क्योंकि $y_1,\ y_2 \ldots y_n$, समीकरण (A1) के संगत समघात समीकरण के हल हैं; इसलिए (A13) के बाएँ पक्ष का प्रथम व्यंजक शून्य के बराबर होगा और तब (A13) का रूप निम्न हो जाएगा :

$$a_0(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \frac{du_i}{dx} = b(x) \tag{A14}$$

जो हमारा nवाँ सहायक प्रतिबंध है।

$u_1, u_2, \ldots u_n$ पर लगाए गए विभिन्न प्रतिबंधों को लिखने पर, हमें $u_1, u_2, \ldots u_n$ के लिए निम्नलिखित युगपत रैखिक अवकल समीकरणों का समुच्चय प्राप्त होता है :

$$\left.\begin{array}{lllll}
y_1 u_1' & + \; y_2 u_2' & + \cdots + & y_n u_n' = 0 & \\[2mm]
\dfrac{dy_1}{dx} u_1' & + \; \dfrac{dy_2}{dx} u_2' & + \cdots + & \dfrac{dy_n}{dx} u_n' = 0 & \\
\cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots & \\
\dfrac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} u_1' & + \; \dfrac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-1}} u_2' & + \cdots + & \dfrac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} u_n' = 0 & \\[2mm]
\dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} u_1' & + \; \dfrac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} u_2' & + \cdots + & \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} u_n' = \dfrac{1}{a_0(x)} b(x) &
\end{array}\right\} \quad (A15)$$

क्योंकि $y_1, y_2, \cdots y_n$ चर x के ज्ञात फलन हैं, इसलिए क्रैमर नियम का प्रयोग करके हम $u_1, u_2, \ldots u_n$ के लिए युगपत समीकरण समुच्चय (A15) को हल कर सकते हैं। क्रैमर नियम के अनुसार,

$$u_k = \frac{W_k}{W}, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

जहाँ W, $y_1, y_2, \ldots y_n$ का रांसकियन है, जो कि अलोपनी है क्योंकि $y_1, y_2, \ldots y_n$ रैखिकतः स्वतंत्र है। W_k एक सारणिक है, जो रांसकियन के k वें स्तंभ को स्तंभ

$$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{array}$$

से प्रतिस्थापित करके प्राप्त होता है। क्रैमर नियम के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त करने के लिए इकाई 10 की परिशेषिका का अध्ययन कीजिए।

इस प्रकार, हमें $u_1, u_2, \ldots u_n$ में प्रथम कोटि के n रैखिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं, जिन्हें सदैव ही ऐसे सरल समाकलों में व्यक्त किया जा सकता है जिनका संख्यात्मक समाकलन तब भी किया जा सकता है, जबकि उन्हें स्पष्टतः (explicitly) समाकलित करना संभव न हो।

– x –

इकाई 13

अवकल संकारक विधि

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

13.1 प्रस्तावना

इकाई 10 में, हमने देखा था कि एक असमघात रैखिक अवकल समीकरण के व्यापक हल में दो भाग, अर्थात् पूरक फलन और विशेष समाकल होते हैं। इकाई 11 में, हमने असमघात पदों के कुछ विशेष रूपों के लिए, अचर गुणांकों वाले असमघात रैखिक अवकल समीकरणों का एक विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए अनिर्धारित गुणांक विधि विकसित की थी। इकाई 12 में हमने प्राचल-विचरण विधि पर चर्चा की थी। यह विधि अचर और चर गुणांकों वाले असमघात रैखिक अवकल समीकरणों का एक विशेष समाकल प्रदान करती है, जबकि संगत समघात समीकरण के सभी रैखिकतः स्वतंत्र हल ज्ञात हों। अचर गुणांकों वाले असमघात समीकरणों की स्थिति में, इन दोनों विधियों, अर्थात्, अनिर्धारित गुणांक विधि तथा प्राचल-विचरण विधि, के प्रयोग पर लगे व्यवरोधों को बहुत कुछ सीमा तक **अवकल संकारक** (differential operator) विधि का प्रयोग करके दूर किया जा सकता है। अवकल संकारक की धारणा को सर्वप्रथम एक फ्रांसीसी गणितज्ञ और सिविल इंजीनियर बारनेब ब्रिसन (1777-1820) ने प्रस्तुत किया था तथा इसके प्रयोग को एक अन्य फ्राँसीसी गणितज्ञ लुइस कौशी (1789-1857) ने आगे बढ़ाया, जो विश्लेषण (analysis) के एक प्रसिद्ध आदि अन्वेषक भी थे।

एक संकारक एक ऐसा फलन है जो संख्याओं के स्थान पर फलन को तर्क के रूप में लेता है। अर्थात्, ऐसा परिभाषित फलन जिसका प्रांत फलनों का समुच्चय होता है।

अवकल संकारक अवकलन की संक्रिया का व्यापकीकरण होते हैं। सामान्य रूप में अधिकांशतः प्रयोग होने वाला अवकल संकारक स्वयं अवकलज करने की क्रिया ही है।

अवकल संकारक के लिए प्रयोग किया जाने वाला सामान्य संकेतन $D = \frac{d}{dx}$ है। इस प्रकार, यदि y एक nवीं कोटि का अवकलनीय फलन है, तो

$$D^o y = y,\ Dy = y',\ D^2 y = y'',\ \ldots,\ D^n y = y^{(n)} \tag{1}$$

तथा $D^m D^n = D^{m+n}$ जहाँ m और n धनात्मक पूर्णांक हैं।

इस इकाई में, हम अचर गुणांकों वाले असमघात रैखिक अवकल समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात करने में अवकल संकारक विधि का उपयोग करेंगे। किसी असमघात समीकरण के विशेष समाकल का निर्धारण D के प्रतिलोम, अर्थात् संकारक D^{-1} के गुणधर्मों पर निर्भर करता है। प्रतिलोम (inverse) संकारक की समस्या खोज का विषय रही है तथा इसका अध्ययन हॉलैण्ड के एक गणितज्ञ रेहुएल लोबाटो (1797-1866) तथा एक अंग्रेजी गणितज्ञ, दार्शनिक और तर्कशास्त्री जार्ज बूले (1815-1864) ने किया था।

इस इकाई में मुख्यतः अचर गुणांकों वाले बहुपद अवकल संकारकों पर चर्चा करेंगे। भाग 13.2 में हम बहुपद अवकल संकारक परिभाषित करने से प्रारंभ करेंगे तथा बहुपद अवकल संकारकों की संक्रियाओं के मूलभूत नियम देंगे। यहां हमनें प्रतिलोम अवकल संकारक भी परिभाषित किया है तथा बहुपद संकारकों और प्रतिलोम संकारकों के कुछ व्यापक गुणधर्म प्रस्तुत किए हैं। भाग 13.3 में हम अवकल संकारकों के प्रयोग से अचर गुणांकों वाले असमघात अवकल समीकरणों के विशेष समाकल प्राप्त करने की व्यापक विधि पर चर्चा करेंगे। कुछ स्थितियों में, जो अवकल समीकरण में असमघात पदों के रूप पर निर्भर करती हैं, विशेष समाकल प्राप्त करने की कुछ लघु विधियां उपलब्ध है। भाग 13.4 में हम इन लघु विधियों पर चर्चा करेंगे। अंत में भाग 13.5 में हम अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि असमघात रैखिक अवकल समीकरणों के यांत्रिकी में कंपनों तथा विद्युत परिपथ के सिद्धांत में अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- ❖ एक अवकल संकारक और प्रतिलोम अवकल संकारक को परिभाषित कर सकेंगे;
- ❖ अवकल संकारकों तथा प्रतिलोम संकारकों के गुणधर्मों को बता सकेंगे;
- ❖ अवकल संकारक विधि का प्रयोग करके, एक दिए हुए असमघात अवकल समीकरण का एक विशेष समाकल प्राप्त कर सकेंगे;
- ❖ जब असमघात पद $\exp(\alpha x), \sin(ax+b)$ या $\cos(ax+b)$, x में बहुपद $V(x)$, $\exp(\alpha x).V(x)$ के रूप का हो, तब विशेष समाकल ज्ञात करने की लघु संकारक विधियों का प्रयोग कर सकेंगे; और
- ❖ कुछ भौतिक समस्याओं के अवकल समीकरण व्युत्पन्न कर सकेंगे व उनके हल प्राप्त कर सकेंगे।

13.2 अवकल संकारक

अचर गुणांकों वाले कोटि n के एक रैखिक असमघात अवकल समीकरण, अर्थात्

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = b(x),\ a_0 \neq 0 \tag{2}$$

पर विचार कीजिए। समीकरण (1) का प्रयोग करके समीकरण (2) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \cdots + a_n y) = b(x)$$

या, $$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_n) y = b(x)$$

यदि हम

$$L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-2} D^2 + a_{n-1} D + a_n,\ a_0 \neq 0 \tag{3}$$

लिखें, तो $L(D)$ कोटि n का एक **बहुपद अवकल संकारक** है। तब, समीकरण (2) को

$$L(D) y = b(x) \tag{4}$$

के रूप में लिखा जा सकता है तथा इसे "y पर संकारक $L(D)$ बराबर $b(x)$" पढ़ा जाता है। यह ध्यान देने योग्य बात है कि $L(D)$ का तभी कोई अर्थ है जब उसका किसी फलन पर अनुप्रयोग किया जा रहा हो।

आइए, अचर गुणांकों वाले दो बहुपद अवकल संकारकों L_1 और L_2 पर विचार करें, जहाँ

$$L_1 = D + 2 \text{ और } L_2 = 3D - 1.$$

तब, $$L_1(L_2(y)) = (D+2)\left(3\frac{dy}{dx} - y\right)$$

$$= 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$= (3D^2 + 5D - 2) y \tag{5}$$

इसी प्रकार, $$L_2(L_1(y)) = (3D-1)\left(\frac{dy}{dx} + 2y\right)$$

$$= 3\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2y$$

$$= (3D^2 + 5D - 2) y \tag{6}$$

समीकरणों (5) और (6) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$L_1(L_2(y)) = L_2(L_1(y)) \tag{7}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि दो बहुपद अवकल संकारकों L_1 और L_2 के गुणनफल $L_1 L_2$ को ऐसे संकारक के रूप में परिभाषित किया जाता है जो वही परिणाम प्रदान करे जो संकारक L_2 के बाद संकारक L_1 के प्रयोग से प्राप्त होता है। दो बहुपद अवकल संकारकों के गुणनफल का अस्तित्व सदैव होता है तथा यह पुनः एक बहुपद अवकल संकारक होता है। साथ ही, यदि L_1 और L_2 **अचर गुणांकों वाले अवकल बहुपद संकारक हों**, तो $\boldsymbol{L_1 L_2 = L_2 L_1}$ होता है, परंतु यह प्रायः **चर गुणांकों** वाले बहुपद संकारकों के लिए **सत्य नहीं** होता। उदाहरण के लिए, यदि $L_1 = xD + 2$ और $L_2 = D - 1$ तो इसकी जाँच की जा सकती है कि $L_2 L_1 = xD^2 + (3-x)\,D - 2$, जबकि $L_1 L_2 = xD^2 + (2-x)\,D - 2$. इसका

कारण यह है कि L_1 एक चर गुणांकों वाला संकारक है, जिसका गुणनफल गुणकों के क्रम पर निर्भर करता है। इस इकाई में, हम मुख्यतः अचर गुणांकों वाले बहुपद अवकल संकारकों की चर्चा करेंगे।

साथ ही, यदि ऊपर दिए L_1 और L_2 के अतिरिक्त, हमें $L_3 = D+1$ प्राप्त है, तो

$$L_1L_2[L_3(y)] = (3D^2+5D-2)\left(\frac{dy}{dx}+y\right)$$

$$= 3\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}-2y$$

$$= 3\frac{d^3y}{dx^3}+8\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-2y \tag{8}$$

तथा $L_1[L_2L_3(y)] = (D+2)\left[3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-y\right]\left(\because\ L_2L_3 = 3D^2+2D-1\right)$

$$= 3\frac{d^3y}{dx^3}+8\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-2y \tag{9}$$

समीकरणों (8) और (9) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$\boldsymbol{L_1L_2(L_3(y)] = L_1[L_2L_3(y)].} \tag{10}$$

इसके अतिरिक्त किन्हीं भी दो बहुपद अवकल संकारकों का **योग** उनके संगत गुणांकों को जोड़ने से प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ, यदि $L_1 = 3D^2 - D + x - 2$ और $L_2 = x^2D + 4D + 7$, तो

$$\boldsymbol{L_1 + L_2} = 3D^2 + (x^2+3)D + x + 5 = \boldsymbol{L_2 + L_1} \tag{11}$$

इसी प्रकार, यदि $L_3 = 2D^2 + 2xD + 2$ है, तो

$$(L_1+L_2)+L_3 = [3D^2+(x^2+3)D+x+5]+2D^2+xD+2$$

$$= 3D^2+x+(x^2D+3D+7+2D^2+xD)$$

$$= 3D^2+x-D-2+(x^2D+3D+7+2D^2+xD+D+2)$$

$$= 3D^2-x-D-2+[(x^2+x+4)D+2D^2+9]$$

$$= L_1+(L_2+L_3)$$

अर्थात्, $\quad (\boldsymbol{L_1+L_2})+\boldsymbol{L_3} = \boldsymbol{L_1}+(\boldsymbol{L_2}+\boldsymbol{L_3}) \qquad (12)$

अब, आइए एक संकारक $L = 3D^2 - 2xD$ तथा फलनों $y_1 = x^2+4$ और $y_2 = 2x + x^3$ पर विचार करें। तब, अचरों c_1 और c_2 के लिए हमें प्राप्त है :

$$L(c_1y_1+c_2y_2) = (3D^2-2xD)\,[c_1(x^2+4)+c_2(2x+x^3)]$$

$$= 3D^2[c_1(x^2+4)+c_2(2x+x^3)] - 2xD[c_1(x^2+4)+c_2(2x+x^3)]$$

$$= (6c_1+18c_2x)-(4x^2c_1+4xc_2+6x^3c_2)$$

$$= c_1(6-4x^2)+c_2(18x-4x-6x^3) \qquad (13)$$

तथा $c_1L(y_1)+c_2L(y_2)=c_1(3D^2-2xD)\,(x^2+4)+c_2(3D^2-2xD)\,(2x+x^3)$

$$= c_1(6-4x^2)+c_2(18x-4x-6x^3) \qquad (14)$$

समीकरणों (13) और (14) से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$\boldsymbol{L(c_1y_1+c_2y_2)=c_1L(y_1)+c_2L(y_2)} \qquad (15)$$

शब्दों में, समीकरण (15) दिखाता है कि **बहुपद अवकल संकारक रैखिक संकारक हैं।** अर्थात्, यदि L कोई बहुपद संकारक है, c_1 और c_2 अचर हैं तथा y_1 और y_2 चर x के कोई भी ऐसे फलन हैं कि प्रत्येक के अभीष्ट कोटि के अवकलज हैं, तो

$$L(c_1y_1+c_2y_2)=c_1L(y_1)+c_2L(y_2)$$

यहाँ आप जाँच कर सकते हैं कि व्यापक रूप में, समता (10), L_1, L_2, L_3 की तरह के सभी **अचर गुणांक** वाले बहुपद अवकल संकारकों के लिए मान्य है। जबकि समताएं (11), (12) और (15) व्यापक रूप में, L_1, L_2, L_3 की तरह के बहुपद अवकल संकारकों, जिनके **गुणांक चर हों अथवा अचर,** सभी के लिए मान्य हैं।

ऊपर की गयी चर्चा का संक्षिप्त विवरण देते हुए, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि बहुपद अवकल संकारक संक्रियाओं के निम्न मूलभूत नियमों को संतुष्ट करते हैं :

संक्रियाओं के मूल भूत नियम

यदि L_1, L_2 और L_3 कोई तीन बहुपद अवकल संकारक हैं, तो

i) $L_1+L_2=L_2+L_1$ **(योग क्रमविनिमेय है)**

ii) $(L_1+L_2)+L_3=L_1+(L_2+L_3)$ **(योग साहचर्य है)**

iii) $L(L_2+L_3)=L_1L_2+L_1L_3$ **(गुणन योग के सापेक्ष बंटनात्मक है)**

iv) यदि L_1 और L_2 **अचर गुणांकों** वाले संकारक हैं, तो

$L_1L_2=L_2L_1$ **(गुणन क्रमविनिमेय है)**

v) $(L_1L_2)L_3=L_1(L_2L_3)$ **(गुणन साहचर्य है)**

ध्यान दीजिए कि योग और गुणन की संक्रियाओं के अंतर्गत, अचर गुणांकों वाले बहुपद अवकल संकारक बीजीय बहुपदों की तरह ही व्यवहार करते हैं। इसलिए, इन संकारकों के साथ कार्य करते समय, हम प्रारंभिक बीजगणित के साधनों का प्रयोग कर सकते हैं। विशेष रूप में, अचर गुणांकों वाले संकारकों के गुणनखंड करने में गुणन की प्रक्रिया का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, हम लिख सकते हैं :

$D^3-3D^2+4=(D+1)\,(D^2-4D+4)=(D+1)\,(D-2)^2$ तथा

$D^3+2D^2-D-2=(D-1)\,(D^2+3D+2)=(D-1)\,(D+1)\,(D+2)$

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E1) निम्न अवकल संकारकों में से प्रत्येक के गुणनखंड कीजिए :

i) $2D^2+3D-2$

ii) D^3-2D^2-5D+6

iii) $2D^4+12D^3+18D^2+4D-8\cdot$

iv) $D^3-11D-20$

संक्रियाएं i) से v) बहुपद अवकल संकारकों और प्रतिलोम अवकल संकारकों के गुणधर्मों को प्राप्त करने के लिए बहुत उपयोगी हैं, यह गुणधर्म बाद में असमघात रैखिक अवकल समीकरण के हल ज्ञात करने में प्रयोग किए जाते हैं। बहुपद अवकल संकारक के गुणधर्मों पर चर्चा करने से पहले, आइए प्रतिलोम अवकल संकारक को परिभाषित करें।

समीकरण (4), अर्थात्,

$$L(D)y=b(x)$$

पर विचार कीजिए, जहाँ $L(D)$ केवल अचर गुणांकों वाला कोटि n का एक बहुपद अवकल संकारक है। समीकरण (4) का एक विशेष हल ज्ञात करने के लिए, हम इसे निम्न रूप में लिखते हैं :

$$y=\frac{1}{L(D)}b(x) \tag{16}$$

तथा फिर $L(D)$ के प्रतिलोम संकारक, जिसे $\frac{1}{L(D)}$ के रूप में लिखा जाता है, को परिभाषित करने का प्रयास करते हैं ताकि संबंध (16) में फलन y का कोई अर्थ हो और यह समीकरण (4) को संतुष्ट करे।

दूसरे शब्दों में, हम चाहते हैं कि

$$L(D).\frac{1}{L(D)}b(x)=b(x) \tag{17}$$

विशेष रूप में, यदि $L(D)=D$ हो, तो समीकरण (4) $Dy=b(x)$ में बदल जाता है।

$$\Rightarrow \quad y=D^{-1}b(x)$$

और $b(x)=DD^{-1}b(x)$,

जिससे कि $DD^{-1}=1$.

इस प्रकार, D^{-1} किसी राशि पर ऐसी संक्रिया निरूपित करता है कि यदि बाद में इस पर संक्रिया D की जाए, तो वह राशि अपरिवर्तित रहे। **इस प्रकार, D^{-1} एक ऐसा संकारक है जो D का प्रतिलोम है।** साथ ही, हम यह भी जानते हैं कि अवकलन की प्रतिलोम संक्रिया समाकलन है। अतः, D^{-1} सरल रूप में अनिश्चित समाकलन की एक संक्रिया है। इसी प्रकार D^{-p}, p-बार समाकलन की

एक संक्रिया है। यहाँ आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि ये प्रतिलोम संक्रियाएँ एक विशेष समाकल प्रदान करती हैं, पूर्ण समाकल नहीं। इसी कारण हम समाकलन के दौरान प्राप्त हुए स्वेच्छ अचर को छोड़ सकते हैं।

संबंधों (16) और (17) से, हम कह सकते हैं कि $\boldsymbol{\frac{1}{L(D)}b(x)}$ **, $\boldsymbol{x}$ का वह फलन है जिस पर संक्रिया $\boldsymbol{L(D)}$ लागू करने से $\boldsymbol{b(x)}$ प्राप्त होता है।**

उदाहरण के लिए $\frac{1}{D^2+2D}(6x+6x^2)=x^3$, क्योंकि $(D^2+2D)x^3=6x+6x^2$.

इस प्रकार, **$\boldsymbol{L(D)}$ का प्रतिलोम संकारक**, जिसे $L^{-1}(D)$ या $\frac{1}{L(D)}$ लिखा जाता है, एक संकारक है जिसे अवकल $b(x)$ पर लागू करने पर, $L(D)y=b(x)$ का एक विशेष समाकल y_p प्राप्त होता है। अर्थात्,

$$y_p=\frac{1}{L(D)}b(x) \tag{18}$$

हम जानते हैं कि समीकरण (4) का व्यापक हल $y=y_c+y_p$ है। समीकरण (18) के प्रयोग से यह निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$y=y_c+\frac{1}{L(D)}\,b(x) \tag{19}$$

यदि $g(D)$ और $h(D)$ अचर गुणांकों वाले दो बहुपद अवकल संकारक हैं, तो प्रतिलोम संकारकों के योग और अंतर को निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$\left[\frac{1}{g(D)}\pm\frac{1}{h(D)}\right]b(x)=\frac{1}{g(D)}\,b(x)\pm\frac{1}{h(D)}\,b(x) \tag{20}$$

जब हम किसी फलन [एक संकार्य (operand)] पर क्रमिक रूप से दो या अधिक प्रतिलोम संकारकों को लागू करते हैं; तो संकार्य से बाईं ओर ठीक पहले वाले संकारक को सर्वप्रथम लागू किया जाता है, फिर अगला और फिर उससे अगला आदि। इस प्रकार,

$$\frac{1}{g(D)}\cdot\frac{1}{h(D)}\,b(x)=\frac{1}{g(D)}\left[\frac{1}{h(D)}\,b(x)\right]. \tag{21}$$

अब, हम रैखिक बहुपद अवकल संकारकों तथा प्रतिलोम अवकल संकारकों के कुछ व्यापक गुणधर्मों को प्रमेयों के रूप में देंगे।

आइए अवकल समीकरण $y''-5y'+6y=e^{3x}$ पर विचार करते हुए प्रारंभ करें। इससे प्राप्त होता है : $(D^2-5D+6)y=e^{3x}$

यहाँ इस बात की जाँच की जा सकती है कि $y_1 = xe^{3x}$ और $y_2 = (x-1)e^{3x}$, दिए हुए समीकरण के दो विशेष समाकल है। हम प्राप्त करते हैं :

$[D^2 - 5D + 6]\,(xe^{3x}) = 9xe^{3x} + 6e^{3x} - 5(3xe^{3x} + e^{3x}) + 6xe^{3x} = e^{3x}$ तथा

$$[D^2 - 5D + 6]\,(x-1)e^{3x} = 9xe^{3x} - 3e^{3x} - 5(3xe^{3x} - 2e^{3x}) + 6xe^{3x} - 6e^{3x} = e^{3x}.$$

इस प्रकार, y_1 और y_2 दोनों ही दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। आगे, इस बात की भी जाँच की जा सकती है कि दोनों विशेष हलों का अंतर $y_1 - y_2 = xe^{3x} - (x-1)e^{3x} = e^{3x}$, संगत समघात समीकरण, अर्थात् $(D^2 - 5D - 6)y = 0$ का एक हल है। स्पष्टतः, हम देख सकते हैं कि $(D^2 - 5D - 6)e^{3x} = 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0$, अर्थात् , $y_1 - y_2 = e^{3x}$ संगत समघात समीकरण को संतुष्ट करता है।

अब हम इस परिणाम को व्यापक रूप में निम्न प्रमेय के रूप में देते हैं।

प्रमेय 1: यदि y_1 और y_2 समीकरण $L(D)\ y = b(x)$ के दो विशेष समाकल हों, तो उनका अंतर संगत समघात समीकरण का एक हल होता है।

उपपत्ति : क्योंकि y_1 और y_2 समीकरण $L(D)\ y = b(x)$ के विशेष समाकल हैं, इसलिए हम $L(D)\ y_1 = b(x)$ और $L(D)\ y_2 = b(x)$ प्राप्त करते हैं।

अब क्योंकि $L(D)$ एक रैखिक बहुपद अवकल संकारक है अतः,

$$\begin{aligned} L(D)\ (y_1 - y_2) &= L(D)y_1 - L(D)y_2, \\ &= b(x) - b(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

– ■ –

समीकरण (4) के रूप के समीकरणों में, दिए हुए समीकरण का व्यापक हल प्राप्त करने के लिए, हम इस समीकरण के किसी भी विशेष समाकल का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए, हम निम्न रूप के एक अवकल समीकरण पर विचार करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha + \beta)\frac{dy}{dx} + \alpha\beta\ y = X \tag{22}$$

या, $[D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta]\ y = X$,

जहाँ α और β अचर हैं।

इसका विशेष समाकल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta}X$$

हम इसे तुल्य रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{(D-\alpha)\,(D-\beta)}X \qquad (23)$$

समीकरण (23) पर संकारक $(D-\alpha)\,(D-\beta)$ लागू करने पर तथा अचर गुणांकों वाले बहुपद अवकल संकारकों के लिए संक्रियाओं के मूलभूत नियमों का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(D-\alpha)\,(D-\beta)\,\frac{1}{(D-\alpha)\,(D-\beta)}X$$

$$=(D-\beta)\,(D-\alpha)\,\frac{1}{(D-\alpha)}\cdot\frac{1}{(D-\beta)}X$$

$$=(D-\beta)\left[D-\alpha\,\frac{1}{D-\alpha}\right]\frac{1}{D-\beta}X$$

$$=(D-\beta)\,\frac{1}{D-\beta}X=X$$

इस समानीयता से, आपने यह देख लिया होगा कि हम विशेष समाकल (23) को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{(D-\beta)\,(D-\alpha)}X \qquad (24)$$

अतः हम कह सकते हैं कि **अचर गुणांकों वाले प्रतिलोम अवकल संकारक क्रमविनिमेय हैं।** प्रतिलोम अवकल संकारकों का यह गुणधर्म व्यापक रूप में भी सत्य है। हम इस गुणधर्म को प्रमेय 2 के रूप में देंगे। परंतु, यहाँ हम इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे।

प्रमेय 2: यदि $g(D)$ और $h(D)$ अचर गुणांकों वाले दो बहुपद अवकल संकारक हैं, तो

$$\frac{1}{g(D)\,h(D)}=\frac{1}{g(D)}\cdot\frac{1}{h(D)}=\frac{1}{h(D)}\cdot\frac{1}{g(D)}$$

– ■ –

अब आइए मान लें कि हम दो अवकल समीकरणों, अर्थात्

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=2 \text{ या, } (D^2-1)y=2 \qquad (25)$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2}-y=5x \text{ या, } (D^2-1)y=5x \qquad (26)$$

पर कार्य कर रहे हैं। मान लीजिए कि y_{1p} और y_{2p} क्रमशः समीकरणों (25) और (26) के विशेष समाकल हैं :

क्योंकि $(D^2-1)(-2)=2$, इसलिए $y_{1P}=\frac{1}{D^2-1}2=-2$.

साथ ही, $(D^2-1)(-5x)=5x$, इसलिए $y_{2P}=\frac{1}{D^2-1}5x=-5x$.

अब, यदि हम समीकरणों (25) और (26) के असमघात पदों को जोड़ें तब हमें निम्न समीकरण प्राप्त होगा :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=2+5x \tag{27}$$

और तब, $(D^2-1)(-2-5x)=2+5x$

$\therefore$ समीकरण (27) का P.I. $y_p=-2-5x=y_{1p}+y_{2p}$.

इस प्रकार, हम देखते हैं कि यदि समीकरणों (25) और (26) के विशेष समाकल क्रमशः y_{1p} और y_{2p} हैं, तो समीकरण (27) का विशेष समाकल $y_{1p}+y_{2p}$ होता है। इसे हलों का **अध्यारोपण** (superposition) कहते हैं।

अब हम उपरोक्त परिणाम को एक प्रमेय के रूप में देते हैं।

प्रमेय 3: यदि $y_1, y_2, \ldots, y_m$ क्रमशः समीकरणों
$L(D)y=b_1(x), L(D)y=b_2(x), \ldots, L(D)y=b_m(x)$, के विशेष समाकल हैं,
तो $y=y_1+y_2+\cdots+y_m$ समीकरण $L(D)y=b_1(x)+b_2(x)+\cdots+b_m(x)$ का एक विशेष हल होता है।

उपपत्ति: हम जानते हैं कि एक योग का अवकलज उनके अवकलजों का योग होता है। अतः, यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$L(D)[y_1+y_2+\cdots+y_m]=L(D)y_1+L(D)y_2+\cdots+L(D)y_m \tag{28}$$

हमें दिया है कि $y_1, y_2, \ldots, y_m$ क्रमशः समीकरणों
$L(D)y=b_1(x), L(D)y=b_2x, \ldots, L(D)y=b_m(x)$ के विशेष हल हैं। अतः, इस परिकल्पना के अंतर्गत समीकरण (28) का दायाँ पक्ष $b_1(x)+b_2(x)+\cdots+b_m(x)$ के बराबर है, जो अभीष्ट परिणाम को सिद्ध कर देता है।

– ■ –

E2) प्रमेय 3 का प्रयोग करते हुए, समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-4\right)=e^x+2$ का एक विशेष हल ज्ञात कीजिए।

अब हम बहुपद अवकल संकारकों के एक अन्य गुणधर्म पर विचार करते हैं।

आइए निम्न पर विचार कीजिए :

$$(D^2+3D+4)e^{ax}y \tag{29}$$

इसे तुल्य रूप से निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$D[De^{ax}y]+3D\,[e^{ax}y]+4e^{ax}y$$

$$=D[e^{ax}Dy+ae^{ax}y]+3[e^{ax}Dy+ae^{ax}y]+4e^{ax}y$$

$$=e^{ax}D^2y+ae^{ax}Dy+ae^{ax}Dy+a^2e^{ax}y+3e^{ax}Dy+3ae^{ax}y+4e^{ax}y$$

$$=e^{ax}[D^2y+2aDy+a^2y+3Dy+3ay+4y]$$

$$=e^{ax}[(D^2y+2aDy+a^2y)+(3Dy+3ay)+4y]$$

$$=e^{ax}[(D+a)^2+3(D+a)+4]\;y \qquad (30)$$

इस प्रकार, यदि $L(D)=D^2+3D+4$, तो समीकरणों (29) और (30) से हम प्राप्त करते हैं।

$$L(D)e^{ax}y=e^{ax}L(D+a)\;y$$

यह बहुपद अवकल संकारक $L\,(D)$ के लिए **विस्थापक सूत्र** (shift formula) कहलाता है।

संबंध (30) हमें दर्शाता है कि किस प्रकार एक चरघातांकी गुणक को एक बहुपद अवकल संकारक के दाईं ओर से बाईं ओर विस्थापित करते हैं। यह सूत्र अवकल समीकरणों के हल ज्ञात करने में अति उपयोगी है। हम इसे भाग 13.3 में स्पष्ट करेंगे। परंतु, अगले प्रमेय में हम इस सूत्र को व्यापक रूप से सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 4: मान लीजिए कि $L(D)$ कोटि n का एक बहुपद अवकल संकारक है। यदि x के सापेक्ष y के प्रथम n अवकलजों का अस्तित्व है और ये परिमित है तथा a कोई अचर है, तो

$$\boldsymbol{L(D)[e^{ax}y]=e^{ax}L(D+a)\;y}. \qquad (31)$$

उपपत्ति : हमें प्राप्त है :

$$D(e^{ax}y)=e^{ax}Dy+ae^{ax}y=e^{ax}(D+a)\;y$$

मान लीजिए कि किसी धनात्मक पूर्णांक k के लिए, हमें प्राप्त है :

$$D^k(e^{ax}y)=e^{ax}(D+a)^k y \qquad (32)$$

x के सापेक्ष समीकरण (32) के दोनों पक्षों का अवकलन करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$D^{k+1}(e^{ax}y)=D[e^{ax}(D+a)^k y]$$

$$=e^{ax}D\,(D+a)^k y+ae^{ax}\,(D+a)^k y$$

$$=e^{ax}\,[(D+a).\,(D+a)^k y]$$

$$= e^{ax}(D+a)^{k+1}y$$

इस प्रकार, यदि k के लिए संबंध (32) सत्य है, तो यह $k+1$ के लिए भी सत्य होगा। हम इसे $k=1$ के लिए पहले ही सत्यापित कर चुके हैं। अतः, आगमन (induction) द्वारा, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि संबंध (32) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक k के लिए सत्य है।

क्योंकि $L(D)$, D में एक बहुपद है, इसलिए अध्यारोपण प्रमेय 3 और संबंध (32) के प्रयोग से परिणाम (31) सिद्ध हो जाता है।

इस प्रकार, व्यापक रूप में, हमें प्राप्त होता है :

$$L(D)(e^{ax}y) = e^{ax}\ L(D+a)\ y$$

– ■ –

अभी तक, हमने प्रमेयों 1 से 4 में बहुपद अवकल संकारकों तथा प्रतिलोम अवकल संकारकों के कुछ गुणधर्मों को दिया है। अब तक हमनें अवकल संकारकों का प्रयोग करते हुए विशेष समाकल ज्ञात करने की विधियों की चर्चा नहीं की है। अगले भाग में, हम दिए हुए अवकल समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात करने की व्यापक विधि पर चर्चा करेंगे।

13.3 विशेष समाकल ज्ञात करने की व्यापक विधि

हम निम्न उदाहरण लेकर चर्चा प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 1: अवकल समीकरण

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x} \tag{33}$$

का हल ज्ञात कीजिए।

हल : संकारक संकेतन में, समीकरण (33) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = e^{2x}$$

या, $$(D-1)(D+1)(D+2)y = e^{2x} \tag{34}$$

मान लीजिए कि $u = (D+1)(D+2)y$. (35)

तब, समीकरण (34) समीकरण $(D-1)u = e^{2x}$ में बदल जाता है, जो एक रैखिक समीकरण है। इसका हल है :

$u = e^{2x} + c_1e^x$, c_1 एक अचर है। (36)

समीकरण (36) से समीकरण (35) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(D+1)(D+2)y = e^{2x} + c_1e^x \tag{37}$$

मान लीजिए कि $(D+2)y = v$. (38)

तब, समीकरण (37) का रूप $(D+1)v = e^{2x} + c_1 e^x$ हो जाता है, जो एक रैखिक समीकरण है जिसका समाकलन गुणक. $e^{\int dx}$ है तथा इसका हल है :

$$ve^x = \int (e^{2x} + c_1 e^x) e^x dx + c_2$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} + \frac{c_1 e^{2x}}{2} + c_2$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{e^{2x}}{3} + \frac{c_1}{2} e^x + c_2 e^{-x}. \qquad (39)$$

समीकरण (39) से समीकरण (38) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(D+2)y = \frac{e^{2x}}{3} + \frac{c_1 e^x}{2} + c_2 e^{-x}$$

जो पुनः एक रैखिक अवकल समीकरण है, जिसका हल है :

$$y = \frac{1}{12} e^{2x} + \frac{c_1}{6} e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} \qquad (40)$$

जहाँ c_1, c_2 और c_3 स्वेच्छ अचर हैं।

यहाँ **आप ध्यान दे** सकते हैं कि समीकरण (40) में $(c_1/6)e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$ समीकरण (33) का एक पूरक फलन है तथा $\left(\frac{1}{12}\right) e^{2x}$ एक विशेष समाकल है (स्वेच्छ अचरों से स्वतंत्र)।

***

आइए अब देखें कि किस प्रकार उदाहरण 1 में प्रयोग की गई विधि एक nवीं कोटि के समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए व्यापीकृत की जा सकती है।

आइए समीकरण (2) पर विचार करें, जो अवकल संकारक D के पदों में लिखने पर निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \cdots + a_n y = b(x) \qquad (41)$$

या, $\quad L(D)y = b(x)$, जहाँ $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n$.

यदि $m_1, m_2, \ldots, m_n$ अवकल समीकरण (41) के संगत सहायक समीकरण के n भिन्न मूल हों, तो हम इसे निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$L(D)y = (D - m_1)(D - m_2) \ldots (D - m_n)\, y = b(x) \qquad (42)$$

$(D - m_2)(D - m_3) \ldots (D - m_n) = \eta_1$ रखने पर, समीकरण (42) निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$(D-m_1)\,\eta_1 = b(x) \tag{43}$$

समीकरण (43) प्रथम कोटि का एक रैखिक अवकल समीकरण है तथा हम इसके हल को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\eta_1 = \frac{1}{(D-m_1)}b(x) = e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} b(x)\,dx + c_1 e^{m_1 x} \tag{44}$$

क्योंकि हम समीकरण (41) के एक विशेष समाकल को खोज रहे हैं, इसलिए हम व्यंजक (44) को $c_1 = 0$ रख कर सरल कर सकते हैं। आगे, हम

$$(D-m_3)\,(D-m_4), \ldots, (D-m_n)\,y = \eta_2 \tag{45}$$

रखते हैं, ताकि

$$(D-m_2)\eta_2 = \eta_1 = \frac{1}{(D-m_1)}b(x) = e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x}\, b(x)\,dx\,. \tag{46}$$

रैखिक अवकल समीकरण (46) को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\eta_2 = \frac{1}{(D-m_2)\,(D-m_1)}b(x) = e^{m_2 x} \int e^{(m_1-m_2)x} \left(\int e^{-m_1 x} b(x)\,dx\right) dx \tag{47}$$

इस प्रक्रिया को n-बार जारी रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_p(x) = \frac{1}{(D-m_n)\ldots(D-m_2)\,(D-m_1)}b(x) = e^{m_n x} \int e^{(m_{n-1}-m_n)x} \left(\int e^{(m_{n-2}-m_{n-1})x}\right.$$

$$\left.\int \ldots \left(\int e^{(m_1-m_2)x} \left(\int e^{-m_1 x} b(x)\,dx\right) dx \ldots dx\right) dx \right. \tag{48}$$

संबंध (48) समीकरण (41) का एक विशेष समाकल प्रदान करता है।

अब हम ऊपर दिए गए सिद्धांत को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 2 : निम्न अवकल समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए :

$$(D^2 - 5D + 6)\;y = e^{3x} \tag{49}$$

हल : यहाँ विशेष समाकल (P.I.) $= y_p = \dfrac{1}{D^2 - 5D + 6}\, e^{3x}$

$$= \frac{1}{(D-3)\,(D-2)}\, e^{3x}$$

$$= \frac{1}{D-3}\,\frac{1}{D-2}\, e^{3x}$$

$$= \frac{1}{D-3} e^{2x} \int e^{-2x} e^{3x} \, dx$$

$$= \frac{1}{D-3} e^{2x} \int e^{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{D-3} e^{2x} \, e^{x}$$

$$= \frac{1}{D-3} e^{3x}$$

$$= e^{3x} \int e^{-3x} \, e^{3x} \, dx$$

$$= e^{3x} \int 1 \, dx$$

$$= x \, e^{3x}$$

अतः, $y_p = xe^{3x}$ समीकरण (49) का एक विशेष समाकल है।

***

आइए, मूलों की पुनरावर्ती वाली स्थिति लेते हैं।

उदाहरण 3: निम्न अवकल समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए :

$$y'' + 4y' + 4y = -x^{-2} e^{-2x}, \; x > 0 \tag{50}$$

हल : समीकरण (50) को संकारक रूप में लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(D^2 + 4D + 4) \, y = -x^{-2} \, e^{-2x}$$

$\therefore$ समीकरण (50) का विशेष समाकल है :

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 4} (-x^{-2} \, e^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{(D+2)^2} \, x^{-2} \, e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{D+2} \, \frac{1}{D+2} \, x^{-2} \, e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{D+2} \, e^{-2x} \int x^{-2} \, e^{2x} \, e^{-2x} \, dx$$

$$= \frac{1}{D+2} x^{-1} \, e^{-2x}$$

$$= e^{-2x} \int x^{-1} e^{-2x} e^{2x} \, dx$$

$$= e^{-2x} \ln |x|$$

***

व्यवहार में, कई बार दी गई समस्या में, समीकरण (48) के रूप का समाकलन अति जटिल हो जाता है। ऐसी स्थितियों में, हम एक ऐसी विधि का प्रयोग करते हैं, जिसमें बार-बार समकलन करने की प्रक्रिया से बचा जा सकता है। इस विधि में, बहुपद अवकल संकारक $\frac{1}{L(D)}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कर लिया जाता है।

जैसे कि, उदाहरण 2 में, हम समीकरण (49) का विशेष समाकल y_p, समीकरण को निम्न रूप में लिख कर प्राप्त कर सकते हैं :

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(D-2)} e^{3x}$$

$$= \left(\frac{1}{D-3} - \frac{1}{D-2} \right) e^{3x}$$

$$= \frac{1}{D-3} e^{3x} - \frac{1}{D-2} e^{3x} \tag{51}$$

और फिर ऊपर दी गई विधि का प्रयोग करके समीकरण (51) के प्रत्येक पद को हल कर सकते हैं।

इसी प्रकार, यदि nवीं कोटि के बहुपद अवकल संकारक $L(D)$ के n गुणनखंड भिन्न हैं (सहायक समीकरण के भिन्न मूलों के संगत), तो हम एक विशेष समाकल को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$y_p = \frac{1}{L(D)} b(x) = \left(\frac{\alpha_1}{D - m_1} + \frac{\alpha_2}{D - m_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{D - m_n} \right) b(x) \tag{52}$$

जहाँ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ अचर हैं तथा दी गई समस्या के लिए, हम इन अचरों को सरल बीजीय परिकलनों द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

ऊपर दी गई विधि को समीकरण (52) के प्रत्येक पद को हल करने के लिए प्रयोग करने पर, निम्न रूप का एक विशेष समाकल प्राप्त किया जा सकता है :

$$y_p = \alpha_1 e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} b(x) \, dx + \alpha_2 e^{m_2 x} \int e^{-m_2 x} \, b(x) \, dx + \cdots$$

$$+ \alpha_n e^{m_n x} \int e^{-m_n x} \, b(x) \, dx \tag{53}$$

यदि अवकल समीकरण (52) के संगत सहायक समीकरण के मूल m_1 की r बार पुनरातवर्ती होती है, तो $\frac{1}{L(D)}$ के संगत आंशिक भिन्न, निम्न रूप के होंगे :

$$\frac{\alpha_1}{D-m_1}+\frac{\alpha_2}{(D-m_1)^2}+\ldots+\frac{\alpha_r}{(D-m_1)^r}+\frac{\alpha_{r+1}}{(D-m_{r+1})}+\ldots+\frac{\alpha_n}{(D-m_n)}$$

तथा समीकरण (52) का एक विशेष समाकल निम्न रूप में प्राप्त हो जाएगा :

$$y_p=\alpha_1 e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x}b(x)\,dx+\alpha_2 e^{m_1 x}\int\left(\int e^{-m_1 x}b(x)\,dx\right)dx+\cdots$$

$$+\alpha_r e^{m_1 x}\int\left(\int\ldots\int\left(\int e^{-m_1 x}\,b(x)\,dx\ldots dx\right)dx+\cdots\right.$$

$$\cdots+\alpha_n\,e^{m_n x}\int e^{-m_n x}\,b(x)\,dx \qquad (54)$$

ऊपर जो कुछ हमने चर्चा की है उसको बेहतर प्रकार से समझने के लिए, आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 4: निम्न अवकल समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए :

$$(D^2-5D+6)\;y=\ln x,\; x>0 \qquad (55)$$

हल : हमें प्राप्त है :

$$\frac{1}{D^2-5D+6}=\frac{1}{(D-3)(D-2)}$$

$$=\frac{1}{D-3}-\frac{1}{D-2}$$

अतः समीकरण (55) का एक विशेष समाकल है :

$$y_p=\frac{1}{D^2-5D+6}\ln x=\left(\frac{1}{D-3}-\frac{1}{D-2}\right)\ln x$$

$$=\frac{1}{D-3}\ln x-\frac{1}{D-2}\ln x$$

$$=e^{3x}\int e^{-3x}\,(\ln x)\,dx-e^{2x}\int e^{-2x}(\ln x)\,dx$$

क्योंकि ऊपर प्राप्त समीकरण के दाएँ पक्ष के समाकलों के मान प्रारंभिक फलनों के पदों में ज्ञात नहीं किए जा सकते, इसलिए हमनें हल को इन समाकलों के पदों में ही छोड़ दिया है।

***

अब हम मूलों की पुनरावर्ती वाली स्थिति पर विचार करते हैं।

उदाहरण 5: अवकल समीकरण

$$(D-1)^2\,(D+1)^2\;y=e^x$$

का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : विशेष समाकल है :

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)^2}\, e^x$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{D-1} + \frac{1}{(D-1)^2} + \frac{1}{D+1} + \frac{1}{(D+1)^2}\right] e^x$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{D-1} e^x + \frac{1}{(D-1)^2} e^x + \frac{1}{D+1} e^x + \frac{1}{(D+1)^2} e^x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[-e^x \int e^{-x} e^x dx + e^x \int\Big(\int e^{-x} e^x\, dx\Big) dx$$

$$+ e^{-x}\int e^x\, e^x\, dx + e^{-x}\int\Big(\int e^x\, e^x\, dx\Big) dx\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-xe^x + \frac{x^2}{2} e^x + \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{4}\right]$$

***

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेते हैं; जिसमें असमघात पद एक त्रिकोणमितीय फलन है।

उदाहरण 6: अवकल समीकरण $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec^2 x$

को हल कीजिए।

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(D^2+1)\, y = \sec^2 x$$

सहायक समीकरण है

$$m^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ m = \pm i$$

$$\therefore\ C.F. = y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\text{P. I.} = y_p = \frac{1}{D^2+1}\sec^2 x = \frac{1}{(D+i)\,(D-i)}\sec^2 x$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{D-i} - \frac{1}{D+i}\right]\sec^2 x$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int e^{-ix}\sec^2 x\, dx - e^{-ix}\int e^{ix}\sec^2 x\, dx\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int\frac{\cos x-i\sin x}{\cos^2 x}\,dx-e^{-ix}\int\frac{\cos x+i\sin x}{\cos^2 x}\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[e^{ix}\int(\sec x-i\sec x\,\tan x)\,dx-e^{-ix}\int(\sec x+i\sec x\,\tan x)\,dx\right]$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$
$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

$$=\frac{1}{2i}\left[(e^{ix}-e^{-ix})\int\sec x\,dx-i(e^{ix}+e^{-ix})\int\tan x\,\sec x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2i}[\,(2i\sin x)\ln|(\sec x+\tan x)|-(2i\cos x).\sec x]$$

$$=\sin x\ln|(\sec x+\tan x)|-1$$

$\therefore$ दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल निम्न है :

$$y=y_c+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x\ln|(\sec x+\tan x)|-1.$$

***

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E3) निम्न अवकल समीकरणों के विशेष समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $(D^2+n^2)\,y=\sec nx$

ii) $(D^2-3D+2)\,y=\sin x\,e^{-x}$

iii) $(D^2+2D+1)\,y=2e^{2x}$

iv) $(D^3-D^2-8D+12)\,y=X(x)$

विशेष समाकल अभिकलित करने की व्यापक विधि में, जिसकी चर्चा भाग 13.3 में की गई है, बहुत परिकलनों की आवश्यकता पड़ती है। कुछ स्थितियों में, विशेष समाकल ऐसी विधियों से प्राप्त किया जा सकता है जो व्यापक विधि की तुलना में लघु (संक्षिप्त) होती हैं। अगले भाग में हम ऐसी विधियों की चर्चा करेंगे।

13.4 विशेष समाकल ज्ञात करने की लघु विधियाँ

समीकरण (41) के रूप के व्यापक nवी कोटि रैखिक अवकल समीकरण, अर्थात्

$$L(D)y=(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)\;y=b(x)$$

पर विचार कीजिए, जहाँ गुणांक $a_0, a_1, \ldots, a_n$ अचर हैं तथा $a_0\neq 0$. ऊपर दिए समीकरण में असमघात पद $b(x)$ के कुछ विशेष रूपों के लिए, विशेष समाकल ज्ञात करने की लघु विधियों का अस्तित्व है।

आइए एक-एक करके $b(x)$ के इन विशेष रूपों के लिए इन विधियों पर विचार करें।

I. $b(x) = e^{\alpha x}$, α अचर है

हम जानते हैं कि

$$D\, e^{\alpha x} = \alpha\, e^{\alpha x}$$

$$D^2 e^{\alpha x} = D(\alpha\, e^{\alpha x}) = \alpha^2\, e^{\alpha z}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D^n e^{\alpha x} = \alpha^n\, e^{\alpha x}$$

$$\therefore\quad L(D)\, e^{\alpha x} = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)\, e^{\alpha x}$$

$$= (a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n) e^{\alpha x}$$

$$= L(\alpha) e^{\alpha x} \qquad (56)$$

साथ ही, यदि $L(\alpha) \neq 0$, अर्थात्, α बहुपद $L(D)$ का मूल नहीं है, तो

$$L(D)\left[\frac{1}{L(\alpha)}\, e^{\alpha x}\right] = \frac{1}{L(\alpha)}\left[L(D)\, e^{\alpha x}\right]$$

$$= \frac{1}{L(\alpha)} .\ L(\alpha)\, e^{\alpha x} \text{ (समीकरण (56) से)}$$

$$= e^{\alpha x} \cdot$$

अर्थात् जब भी $L(\alpha) \neq 0$, तब $L(D)\ y = e^{\alpha x}$ का एक विशेष समाकल $\dfrac{1}{L(\alpha)}\, e^{\alpha x}$ होगा।

इस प्रकार, $$\boxed{\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{L(\alpha)},\ L(\alpha) \neq 0} \qquad (57)$$

अब मान लीजिए कि $L(\alpha) = 0$. तब, $L(D)$ में एक गुणनखंड $(D - \alpha)$ निहित होगा। मान लीजिए कि यह गुणनखंड $L(D)$ में p बार उपस्थित है। अर्थात्, मान लीजिए कि

$$L(D) = (D - \alpha)^p\ \phi(D),\ \phi(\alpha) \neq 0,\ p \geq 1, \qquad (58)$$

जहाँ $\phi(D)$, कोटि $(n - p)$ वाला, D में एक बहुपद है।

अब, $$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{(D-\alpha)^p\ \phi(D)}\, e^{\alpha x} \text{ (समीकरण (58) से)}$$

$$= \frac{1}{(D-\alpha)^p}\left[\frac{1}{\phi(D)}\, e^{\alpha x}\right]$$

$$= \frac{1}{(D-\alpha)^p}\left[\frac{e^{\alpha x}}{\phi(\alpha)}.1\right]$$ (समीकरण (57) से)

$$= \frac{1}{\phi(\alpha)}\,\frac{1}{(D-\alpha)^p}\,[e^{\alpha x}.1]$$

$$= \frac{1}{\phi(\alpha)}\,e^{\alpha x}\,\frac{x^p}{p!}$$

यहाँ $\frac{1}{(D-\alpha)^p}e^{\alpha x}$ का मान व्यापक विधि से निकाला गया है।

साथ ही, निम्न पर विचार कीजिए :

$$L(D)\left[\frac{e^{\alpha x}}{\phi(\alpha)}.\frac{x^p}{p!}\right] = (D-\alpha)^p\ \phi(D)\left[\frac{e^{\alpha x}}{\phi(\alpha)}.\frac{x^p}{p!}\right]$$

$$= \phi(D)\left\{(D-\alpha)^p\left[\frac{e^{\alpha x}}{\phi(\alpha)}.\frac{x^p}{p!}\right]\right\}$$

$$= \phi(D)\left\{\frac{e^{\alpha x}}{\phi(\alpha)}.D^p\left(\frac{x^p}{p!}\right)\right\}$$ (प्रमेय 4 के प्रयोग से)

$$= \phi(D)\left\{\frac{e^{\alpha x}}{\phi(\alpha)}.1\right\}$$

$$= \frac{1}{\phi(\alpha)}\ \phi(D)\ e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{\phi(\alpha)}\ \phi(\alpha)\ e^{\alpha x}$$ (समीकरण (56) से)

$$= e^{\alpha x}$$

अतः , $L(D)y = e^{\alpha x}$ का $\left[\frac{1}{\phi(\alpha)}e^{\alpha x}\frac{x^p}{p!}\right]$ एक विशेष समाकल है, जहाँ

$L(D) = (D-\alpha)^p\ \phi(D)$ तथा $\phi(\alpha) \neq 0$

अर्थात्,

$$\boxed{\frac{1}{(D-\alpha)^p\,\phi(D)}e^{\alpha x} = \frac{x^p e^{\alpha x}}{p\,!\,\phi(\alpha)},\ \phi(\alpha)\neq 0} \qquad (59)$$

अब हम ऊपर दी गयी विधि को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 7: अवकल समीकरण $(D^2 - 4D + 3)\ y = e^{2x}$ को हल कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-3)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1, 3$$

$\therefore \quad C.F. = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$, c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

विशेष समाकल $= \dfrac{1}{(D-1)(D-3)} e^{2x}$ (यहाँ 2 सहायक समीकरण का मूल नहीं है।)

$$= \frac{1}{(2-1)(2-3)} e^{2x} \text{ (संबंध (57) के प्रयोग से)}$$

$$= -e^{2x}$$

$\therefore$ दिए हुए अवकल समीकरण का पूर्ण हल है :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - e^{2x}$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 8: अवकल समीकरण $\dfrac{d^3 y}{dx^3} + y = 3 + e^{-x} + 5e^{2x}$ (60)

का हल प्राप्त कीजिए।

हल : संकारक रूप में समीकरण (60) निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$(D^3 + 1)\ y = 3 + e^{-x} + 5e^{2x}$$

इसका सहायक समीकरण है :

$$m^3 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m+1)(m^2 - m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

अतः, $\text{C.F.} = c_1 e^{-x} + e^{x/2} \left[c_2 \cos\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + c_3 \sin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right]$

जहाँ c_1, c_2 और c_3 स्वेच्छ अचर हैं।

विशेष समाकल $= \dfrac{1}{D^3 + 1} [3 + e^{-x} + 5e^{2x}]$

$$= \frac{1}{D^3 + 1} [3e^{ox} + e^{-x} + 5e^{2x}]$$

$$= 3\frac{1}{D^3+1}e^{ox} + \frac{1}{D^3+1}e^{-x} + 5\frac{1}{D^3+1}\,e^{2x}$$

$$= 3\frac{1}{0+1}e^{0x} + \frac{1}{(D+1)}\cdot\frac{1}{(D^2-D+1)}\,e^{-x} + 5\frac{1}{2^3+1}e^{2x}$$

[$\alpha = -1$ सहायक समीकरण का एक मूल है]

$$= 3 + \frac{1}{D+1}\cdot\frac{1}{(-1)^2-(-1)+1}e^{-x} + \frac{5}{9}e^{2x}$$

$$= 3 + \frac{1}{3}e^{-x}\,\frac{x}{1!} + \frac{5}{9}e^{2x}$$ [$p = 1,\ \alpha = -1,\ \phi(D) = 1$ के लिए संबंध (59) के प्रयोग से]

$$= 3 + \frac{1}{3}e^{-x}.x + \frac{5}{9}e^{2x}$$

अतः, समीकरण (60) का पूर्ण हल है :

$$y = c_1 e^{-x} + e^{x/2}\left[c_2\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + c_3\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right] + 3 + \frac{e^{-x}x}{3} + \frac{5}{9}e^{2x}.$$

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करते समय, ऊपर दी गई विधि के बारे में अपनी समझ की जाँच कर सकते हैं।

E4) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(D^2 - 2D + 1)\ y = 3e^{(5/2)x}$

ii) $(D^2 - 1)\ y = (e^x + 1)^2$

iii) $(D^3 + 5D^2 + 7D - 3)\ y = e^{2x}\cosh x$

iv) $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)\ y = e^{2x}$

अब हम उस स्थिति को लेते हैं जब $b(x)$ एक साइन या कोसाइन फलन है।

II. $b(x) = \cos(ax+b)$ or $\sin(ax+b)$

$\cos(ax+b)$ के उत्तरोत्तर अवकलन से निम्न प्राप्त होता है :

$$D\cos(ax+b) = -a\sin(ax+b)$$

$$D^2\cos(ax+b) = -a^2\cos(ax+b)$$

$$D^3\cos(ax+b) = a^3(\sin x + b)$$

$$D^4\cos(ax+b) = (D^2)^2\cos(ax+b) = a^4\cos(ax+b) = (-a^2)^2\cos(ax+b)$$

अतः, व्यापक रूप में

$$(D^2)^n \cos(ax+b) = (-a^2)^n \cos(ax+b)$$

इस प्रकार, यदि $\phi(D^2)$, D^2 में एक बहुपद फलन है, तो

$$\phi(D^2)\cos(ax+b) = \phi(-a^2)\cos(ax+b) \tag{61}$$

इसी प्रकार, $\phi(D^2)\sin(ax+b) = \phi(-a^2)\sin(ax+b)$

अब, दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं।

स्थिति I : $\phi(-a^2) \neq 0$

इस स्थिति में, $\phi(D^2)\left[\dfrac{\cos(ax+b)}{\phi(-a^2)}\right] = \dfrac{1}{\phi(-a^2)}\phi(D^2)\,[\cos(ax+b)]$

$$= \frac{1}{\phi(-a^2)}\phi(-a^2)\cos(ax+b) \text{ (using (61))}$$

$$= \cos(ax+b)$$

इसी प्रकार, $\phi(D^2)\left[\dfrac{\sin(ax+b)}{\phi(-a^2)}\right] = \sin(ax+b)$

अतः, $\phi(D^2)\, y = \cos(ax+b)$ का $\dfrac{1}{\phi(-a^2)}\cos(ax+b)$ एक विशेष हल है

तथा $\phi(D^2)y = \sin(ax+b)$ का $\dfrac{1}{\phi(-a^2)}\sin(ax+b)$ एक विशेष हल है

जहाँ $\phi(-a^2) \neq 0$.

अर्थात्, हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{\phi(D^2)}\cos(ax+b) &= \frac{1}{\phi(-a^2)}\cos(ax+b),\ \phi(-a^2)\neq 0 \\ \frac{1}{\phi(D^2)}\sin(ax+b) &= \frac{1}{\phi(-a^2)}\sin(ax+b),\ \phi(-a^2)\neq 0 \end{aligned}} \tag{62}$$

स्थिति II : $\boldsymbol{\phi(-a^2) = 0}$

मान लीजिए, $\phi(D^2) = (D^2+a^2)^p\psi(D^2)$, जहाँ $\psi(-a^2) \neq 0$.

$$\therefore \quad \frac{1}{\phi(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{(D^2+a^2)^p \psi(D^2)}\cos(ax+b),$$

$$= \frac{1}{(D^2+a^2)^p}\,\frac{1}{\psi(-a^2)}\cos(ax+b)$$

$$= \frac{1}{\psi(-a^2)}\,\frac{1}{(D^2+a^2)^p}\cos(ax+b),$$

जहाँ, $\frac{1}{(D^2+a^2)^p}\cos(ax+b)$ का मान व्यापक विधि से निकाला जा सकता है।

इसी प्रकार, $\frac{1}{\phi(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{\psi(-a^2)}\cdot\frac{1}{(D^2+a^2)^p}\sin(ax+b),$

जहाँ, $\frac{1}{(D^2+a^2)^p}\sin(ax+b)$ का मान व्यापक विधि से निकाला जा सकता है।

अब, हम ऊपर दी गई विधि को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 9: अवकल समीकरण $(D^4+10D^2+9)\ y = \cos(2x+3)$ का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : विशेष समाकल निम्न से प्राप्त होता है :

$$y_p = \frac{1}{(D^4+10D^2+9)}\cos(2x+3)$$

$$= \frac{1}{D^2.D^2+10D^2+9}\cos(2x+3)$$

$$= \frac{1}{(-2^2)\ (-2^2)+10(-2^2)+9}\cos(2x+3)$$

$$= \frac{1}{(-4)(-4)+10(-4)+9}\cos(2x+3)$$

$$= \frac{1}{16-40+9}\cos(2x+3)$$

$$= -\frac{1}{15}\cos(2x+3).$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 10: अवकल समीकरण $(D^4-1)\ y = \sin x$ का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हलः दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल है :

$$y_p = \frac{1}{(D^4-1)}\sin x$$

$$= \frac{1}{(D^2-1)\,(D^2+1)}\sin x$$

$$= \frac{1}{(-1^2-1)\,(D^2+1)}\sin x \ (\because D^2 = -1^2 \text{ के लिए } D^2+1=0)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{D^2+1}\sin x$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(D+i)\,(D-i)}\right]\sin x$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{D-i}-\frac{1}{D+i}\right]\sin x$$

$$= -\frac{1}{4i}\left[\frac{1}{D-i}\sin x-\frac{1}{D+i}\sin x\right]$$

$$= -\frac{1}{4i}\left[e^{ix}\int e^{-ix}\sin x\,dx - e^{-ix}\int e^{ix}\sin x\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{4i}\left[e^{ix}\int e^{-ix}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)dx - e^{-ix}\int e^{ix}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{ix}\int(1-e^{-2ix})dx - e^{-ix}\int(e^{2ix}-1)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{ix}\left(x+\frac{e^{-2ix}}{2i}\right)-e^{-ix}\left(\frac{e^{2ix}}{2i}-x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[x(e^{ix}+e^{-ix})+\frac{1}{2i}(e^{-ix}-e^{ix})\right]$$

$$= \frac{1}{8}\,[2x\cos x-\sin x]$$

***

साइन और कोसाइन वाली स्थिति II में वैकल्पिक रूप से हम $L(D)y = e^{i(ax+b)} = \cos(ax+b)+i\sin(ax+b)$ लेकर तथा फिर स्थिती अनुसार दाएँ पक्ष में वास्तविक भाग या काल्पनिक भाग लेकर भी कार्य कर सकते हैं। तब, अध्यारोपण प्रमेय 3 द्वारा हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{L(D)}\cos(ax+b) = \text{Re}\left[\frac{1}{L(D)}e^{i(ax+b)}\right]$$

$$\frac{1}{L(D)}\sin(ax+b) = \text{Im}\left[\frac{1}{L(D)}e^{i(ax+b)}\right] \qquad (63)$$

प्रतीकों Re और Im को क्रमशः 'वास्तविक भाग' और 'काल्पनिक भाग' पढ़ा जाता है।

विशेष रूप से, मान लीजिए कि हम

$$V = \frac{1}{D^2+a^2}\sin ax$$

को हल करना चाहते हैं। तब, आइए निम्न पर विचार करें :

$$U = \frac{1}{D^2+a^2}e^{iax}$$

$$= \frac{1}{(D+ai)\,(D-ai)}e^{iax}$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{D-ai} - \frac{1}{D+ai}\right]e^{iax}$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{D-ai}e^{iax} - \frac{e^{iax}}{2ai}\right] \ (\text{यहाँ } D = ai \text{ के लिए } D - ai = 0)$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[e^{iax}\int e^{-iax}e^{iax}dx - \frac{e^{iax}}{2ai}\right]$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[xe^{iax} - \frac{e^{iax}}{2ai}\right]$$

$$= \frac{ix}{-2a}(\cos ax + i\sin ax) + \frac{1}{4a^2}(\cos ax + i\sin ax)$$

अब, $V = \text{Im}\ U = \dfrac{-x\cos ax}{2a} + \dfrac{\sin ax}{4a^2}$ (64)

इसी प्रकार, $\dfrac{1}{D^2+a^2}\cos ax = \text{Re}\,U = \dfrac{x\sin ax}{2a} + \dfrac{\cos ax}{4a^2}$ (65)

टिप्पणी : आपने इस बात पर अवश्य ही ध्यान दिया होगा कि ऊपर दी गई वैकल्पिक विधि से, उदाहरण 10 में पद $\dfrac{1}{D^2+1}\sin x$ का मान बहुत सरलता से निकाला जा सकता था, तथा इस प्रकार हम लंबे परिकलनों से बच सकते थे। यहाँ हम यह टिप्पणी करना चाहेंगे कि एक दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल प्राप्त

करने के लिए उपयुक्त विधि का चुनाव करना एक कला है, जो केवल बार-बार अभ्यास करने से ही आती है।

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E5) पूर्णांकों m और n के लिए, निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(D^4 + 2n^2 D^2 + n^4)\ y = \cos mx,\ m \neq n$

ii) $(D^2 + m^2)\ (D^2 + n^2)\ y = \cos\left\{(m+n)\dfrac{x}{2}\right\}\cos\left\{(m-n)\dfrac{x}{2}\right\},\ m \neq n$.

ऊपर दी गई स्थिति II में, साइन, कोसाइन फलनों से संबंद्धित अनेक समस्याओं में, आपने पाया होगा कि बहुपद $L(D)$ एक विषम कोटि का फलन होता है। उदाहरण के लिए, निम्न अवकल समीकरण को लीजिए :

$$(D^3 + 2D^2 - 5D - 10)y = 2\sin x \tag{66}$$

तब, समीकरण (66) का एक विशेष समाकल निम्न प्रकार से प्राप्त किया जाता है :

$$y_p = 2\frac{1}{D^3 + 2D^2 - 5D - 10}\sin x$$

$$= 2\frac{1}{(D+2)(D^2-5)}\sin x \tag{67}$$

यहाँ $L(D) = (D^2 - 5)\ (D+2) = g(D)\ h(D)$ मान लीजिए, जहाँ $g(D) = (D^2 - 5)$ एक सम कोटि तथा $h(D) = (D+2)$ एक विषम कोटि का बहुपद फलन है।

$h(D)$ को एक सम कोटि का बहुपद फलन बनाने के लिए, हम समीकरण (67) को $(D-2)$ से गुणा और भाग करते हैं। तब, समीकरण (67) को निम्न रूप में लिखकर हल किया जा सकता है :

$$y_p = 2\frac{(D-2)}{(D^2-4)\ (D^2-5)}\sin x$$

$$= \frac{2(D-2)}{(-1^2-4)\ (-1^2-5)}\sin x = \frac{2}{30}(D-2)\sin x$$

$$= \frac{1}{15}(\cos x - 2\sin x)$$

इस प्रकार, ऐसी स्थितियों में, जब $L(D) = g(D)\ h(D)$, जहाँ $g(D)$ एक सम कोटि का बहुपद गुणक तथा $h(D)$ एक विषम कोटि बहुपद गुणक है, तब हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{1}{L(D)}\sin(ax+b)=\frac{h(-D)}{g(D)\,h(D)\;h(-D)}\sin(ax+b) \qquad (68)$$

तथा, $$\frac{1}{L(D)}\cos(ax+b)=\frac{h(-D)}{g(D)\;h(D)\;h(-D)}\cos(ax+b) \qquad (69)$$

और तब स्थिति II की तरह समीकरणों (68) या (69) के विशेष समाकल प्राप्त कर सकते हैं।

आइए ऊपर दी गई विधि को स्पष्ट करने के लिए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 11: अवकल समीकरण $(D^3+D^2-D-1)\,y=\cos 2x$ (70)
को हल कीजिए।

हल : समीकरण (70) का संगत सहायक समीकरण है :

$$m^3+m^2-m-1=0$$

$$\Rightarrow \quad m^2(m+1)-(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (m^2-1)\;(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad m=1,\,-1,\,-1.$$

$$\therefore \quad C.F.=y_c=c_1e^x+(c_2+c_3x)\,e^{-x}$$

विशेष समाकल $=y_p=\dfrac{1}{D^3+D^2-D-1}\cos 2x$

$$=\frac{1}{(D+1)\;(D^2-1)}\cos 2x$$

$$=\frac{(D-1)}{(D-1)\;(D+1)(D^2-1)}\cos 2x$$

$$=\frac{(D-1)}{(D^2-1)^2}\cos 2x$$

$$=(D-1)\left[\frac{1}{(D^2-1)^2}\cos 2x\right]$$

$$=(D-1)\left[\frac{1}{(-2^2-1)^2}\cos 2x\right]=(D-1)\;\frac{\cos 2x}{25}$$

$$=-\frac{2\sin 2x}{25}-\frac{\cos 2x}{25}$$

अतः, समीकरण (70) का पूर्ण हल निम्न द्वारा प्राप्त हो जाता है :

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)\, e^{-x} - \frac{2\sin 2x}{25} - \frac{\cos 2x}{25}.$$

***

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं ।

E6) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(D^2 + D + 1)\, y = \sin 2x$

ii) $(D^2 + 2n\cos\alpha D + n^2)\, y = a\cos nx$

अब हम उस स्थिति पर चर्चा करेंगे जब असमघात पद $b(x)$, x का एक बहुपद हो।

III. $b(x) = Ax^n$, n पूर्णांक, A अचर

हम सरल स्थिति लेकर चर्चा प्रारंभ करते हैं, जब बहुपद संकारक $L(D) = D - a,\ a \neq 0$.

तब, $L(D)y = b(x)$ निम्न हो जाता है :

$$(D-a)y = Ax^n \tag{71}$$

समीकरण (71) का विशेष समाकल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$y_p = \frac{Ax^n}{D-a} = \frac{-1}{a}\left(1 - \frac{D}{a}\right)^{-1}(Ax^n) = \frac{-1}{a}\left(1 + \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} + \cdots + \frac{D^n}{a^n} + \cdots\right)(Ax^n) \tag{72}$$

क्योंकि $D^{n+1}x^n = 0$ है, इसलिए समीकरण (72) में x^n को n-बार अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_p = \frac{-A}{a}\left(x^n + \frac{nx^{n-1}}{a} + \cdots + \frac{n!}{a^n}\right),\ a \neq 0$$

हम दी गयी स्थिति को एक उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 12: अवकल समीकरण

$$(D^2 - 4)y = x^2 \tag{73}$$

को हल कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm 2$$

इस प्रकार, $C.F. = y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

साथ ही, विशेष समाकल है :

$$y_p = \frac{1}{D^2-4}x^2$$

$$= \frac{-1}{4}\left(1-\frac{D^2}{x}\right)^{-1}x^2$$

$$= \frac{-1}{4}\left(1+\frac{D^2}{4}+\frac{D^4}{4^2}+\cdots\right)x^2$$

$$= \frac{-1}{4}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$$

अतः, समीकरण (73) का व्यापक हल है

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{2}\right).$$

***

ऊपर दी गयी विधि को व्यापीकृत किया जा सकता है, जब

$$L(D)y = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = Ax^n,\ a_n \neq 0 . \tag{74}$$

और तब, विशेष समाकल निम्न से प्राप्त हो जाता है :

$$y_p = \frac{A}{L(D)}x^n$$

$$= \frac{A}{a_n}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}D+\cdots+\frac{a_0}{a_n}D^n\right)^{-1}x^n,\ a_n \neq 0$$

$$= \frac{A}{a_n}(1+b_1D+b_2D^n+\cdots+b_nD^n)x^n \tag{75}$$

जहाँ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ अचर हैं। यहाँ $(1+b_1D+\cdots+b_nD^n)$, nवें पद तक, $\frac{1}{L(D)}$ का द्विपद प्रसार है।

आइए विधि को स्पष्ट करने के लिए, कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 13: निम्न अवकल समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए :

$$y''' + y'' + y = x^4 + 2x + 1$$

हल : यहाँ विशेष समाकल $= \frac{1}{1+D^2+D^3}\,(x^4+2x+1)$

$$= [1 + (D^2 + D^3)]^{-1} (x^4 + 2x + 1)$$

$$= (1 - D^2 - D^3 + D^4 + 2D^5 + \cdots)\ (x^4 + 2x + 1)$$

$$= (x^4 + 2x + 1) - 12x^2 - 24x + 24$$

$$= x^4 - 12x^2 - 22x + 25$$

***

अब हम एक ऐसी स्थिति का उदाहरण लेंगे जहाँ $L(D)$ पर कुछ परिकलन करने से $\dfrac{1}{L(D)}$ का द्विपद प्रसार सरल हो जाता है।

उदाहरण 14: अवकल समीकरण

$$y''' + y'' + y' + y = x^4 + 2x + 1$$

का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ विशेष समाकल

$$= \frac{1}{1 + D + D^2 + D^3} (x^4 + 2x + 1)$$

$$= \frac{(1 - D)}{(1 - D)\ (1 + D + D^2 + D^3)}\ (x^4 + 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{1 - D^4} \left[(1 - D)\ (x^4 + 2x + 1)\right]$$

$$= \frac{1}{1 - D^4} \left[x^4 + 2x + 1 - 4x^3 - 2\right]$$

$$= (1 - D^4)^{-1}\ (x^4 - 4x^3 + 2x - 1)$$

$$= (1 - D^4 + D^8 + \cdots)\ (x^4 - 4x^3 + 2x - 1)$$

$$= (x^4 - 4x^3 + 2x - 1) + 24$$

$$= x^4 - 4x^3 + 2x + 23$$

***

जब समीकरण (74) में $a_n = 0$ हो, तब $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$L(D) = D(a_0 D^{n-1} + a_1 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) \text{ जहाँ } a_{n-1} \neq 0.$$

यदि दोनों $a_n = 0$ और $a_{n-1} = 0$ हों तो $L(D)$ का एक गुणनखंड D^2 होगा तथा $L(D)$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$L(D) = D^2(a_0 D^{n-2} + a_1 D^{n-2} + \cdots + a_{n-2}).$$

इसी प्रकार व्यापक रूप में, यदि $L(D)$ का गुणनखंड D^r है, तो $L(D)y = Ax^n$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$L(D)y = D^r(a_0 D^{n-r} + \cdots + a_{r+1} D + a_r)y = Ax^n,\ a_r \neq 0 \tag{76}$$

तथा हमें प्राप्त होता है :

$$y_p = \frac{1}{D^r(a_0 D^{n-r} + \cdots + a_{r+1} D + a_r)} Ax^n \tag{77}$$

अब हम कुछ उदाहरणों द्वारा इस विधि को स्पष्ट करते है।

उदाहरण 15: निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$(D^3 + 3D^2 + 2D)\ y = x^2$

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^3 + 3m^2 + 2m = 0$$

$\Rightarrow\ m(m+2)\ (m+1) = 0$

$\Rightarrow\ m = 0, -1, -2$

$\therefore\ C.F. = y_c = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$

विशेष समाकल $= y_p = \dfrac{1}{D^3 + 3D^2 + 2D} x^2 = \dfrac{1}{D(D^2 + 3D + 2)} x^2$

$$= \frac{1}{2D}\left(\frac{1}{1 + \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2}\right) x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 - \frac{3}{2}D + \frac{7}{4}D^2 + \cdots\right] x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[x^2 - \frac{3}{2}2x + \frac{7}{4}.2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}x\right]$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x$$

अतः, पूर्ण हल है :

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} + \frac{1}{12}(2x^3 - 9x^2 + 21x)$$

***

अब, आपके लिए एक प्रश्न।

E7) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(D^4 - 2D^3 + D^2)\ y = x$

ii) $(D^3 - 3D^2 - 6D + 8)\ y = x$

iii) $(D^2 + D - 2)\ y = 2(1 + x - x^2)$

iv) $(D^4 + 2D^3 - 3D^2)\ y = x^2 + 3e^{2x} + 4\sin x$

अब हम एक ऐसी स्थिति लेते हैं जो ऊपर दी गयी विधियों I-III का संयोजन है। अवकल समीकरण का असमघात पद एक चरघांताकी फलन तथा x के एक फलन का गुणनफल है। x का यह फलन एक बहुपद या एक साइन/कोसाइन फलन हो सकता है। उदाहरणार्थ, $e^{\alpha x}x^2$ या $e^{\alpha x}\cos x$ या $e^{\alpha x}\sin x$ या उनका रैखिक संयोजन हो सकता है।

IV. $b(x) = e^{\alpha x}V(x)$, α अचर

निम्न रूप के समीकरण पर विचार कीजिए :

$$L(D)\ y = e^{\alpha x}\ V(x) \tag{78}$$

जहाँ α एक अचर है तथा V चर x का एक फलन है। आइए, अब हम इसका विशेष समाकल

$$y_p = \frac{1}{L(D)}e^{\alpha x}\ V(x)$$

ज्ञात करें।

बहुपद अवकल संकारक के विस्थापन सूत्र (प्रमेय 4) द्वारा, हम जानते हैं कि

$$L(D)\ e^{\alpha x}V(x) = e^{\alpha x}L(D+\alpha)\ V(x) \tag{79}$$

मान लीजिए कि

$$L(D+\alpha)\ V = V_1 \tag{80}$$

तब, $$V = \frac{1}{L(D+\alpha)}\ V_1 \tag{81}$$

क्योंकि V चर x का एक फलन है, इसलिए V_1 भी x का एक फलन होगा।
समीकरणों (80) और (81) से समीकरण (79) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$L(D)e^{\alpha x}\frac{1}{L(D+\alpha)}V_1 = e^{\alpha x}V_1 \tag{82}$$

समीकरण (82) के दोनों पक्षों पर $\dfrac{1}{L(D)}$ के साथ संक्रिया करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\boxed{\frac{1}{L(D)}e^{\alpha x}\,V_1(x) = e^{\alpha x}\,\frac{1}{L(D+\alpha)}\,V_1(x)} \tag{83}$$

जहाँ V_1 चर x का कोई भी फलन हो सकता है। इस प्रकार, संबंध (83) का प्रयोग करने पर, समीकरण (78) का विशेष समाकल ज्ञात करने की समस्या अब ऐसी समस्या में बदल जाती है, जिसे I-III में चर्चा की गई विधियों से हल किया जा सकता है। हम इस विधि को कुछ उदाहरणों के माध्यम से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 16: अवकल समीकरण $(D^2+1)\ y = xe^{2x}$ का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : विशेष समाकल $= \dfrac{1}{D^2+1}\,xe^{2x}$

$$= e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+1}x \qquad \text{(संबंध (83) के प्रयोग से)}$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D^2+4D+5}x$$

$$= e^{2x}\frac{1}{5}\left(1+\frac{4}{5}D+\frac{1}{5}D^2\right)^{-1}x$$

$$= e^{2x}\frac{1}{5}\left(1-\frac{4}{5}D-\frac{1}{5}D^2+\frac{16}{25}D^2+\cdots\right)x$$

$$= e^{2x}\frac{1}{5}\left(x-\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{e^{2x}}{25}\,(5x-4)$$

***

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 17: अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2y=x^2e^{3x}+e^x\cos 2x$$

को हल कीजिए।

हल : सहायक समीकरण है :

$$m^2+2=0$$

$$\Rightarrow \quad m=\pm i\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad C.F.=y_c=c_1\cos\sqrt{2}\,x+c_2\sin\sqrt{2}\,x$$

विशेष समाकल $=y_p=\dfrac{1}{D^2+2}\,(x^2e^{3x}+e^x\cos 2x)$

$$=\frac{1}{D^2+2}x^2e^{3x}+\frac{1}{D^2+2}e^x\cos 2x$$

$$=e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2+2}x^2+e^x\frac{1}{(D+1)^2+2}\cos 2x$$

$$=e^{3x}\frac{1}{D^2+6D+11}x+e^x\frac{1}{D^2+2D+3}\cos 2x$$

$$=e^{3x}\frac{1}{11}\left(1-\frac{6}{11}D+\cdots\right)x+e^x\frac{1}{-2^2+2D+3}\cos 2x$$

$$=e^{3x}\frac{1}{11}\left(x-\frac{6}{11}\right)+e^x\frac{(2D+1)}{(2D-1)\,(2D+1)}\cos 2x$$

$$=\frac{1}{121}e^{3x}(11x-6)+e^x(2D+1).\frac{1}{4D^2-1}\cos 2x$$

$$=\frac{1}{121}e^{3x}(11x-6)+e^x(2D+1)\frac{1}{4(-2^2)-1}\cos 2x$$

$$=\frac{1}{121}e^{3x}(11x-6)+\frac{e^x}{-17}\,[2\,(-2\sin x)+\cos 2x)]$$

$$=\frac{1}{121}e^{3x}(11x-6)+\left(\frac{4}{17}\sin 2x-\frac{1}{17}\cos 2x\right)e^x$$

अतः पूर्ण हल है :

$$y=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x+\frac{1}{121}e^{3x}(11x-6)+\frac{1}{17}e^x(4\sin 2x-\cos 2x).$$

***

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेते हैं जिसमें $b(x)$ एक चरघातांकी, एक बहुपद और एक साइन फलन का गुणनफल है।

उदाहरण 18: अवकल समीकरण $(D^2-2D+1)\, y = xe^x \sin x$

का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : विशेष समाकल है :

$$y_p = \frac{1}{D^2-2D+1} xe^x \sin x$$

$$= \text{Im}\left\{\frac{1}{D^2-2D+1} xe^x e^{ix}\right\}$$

$$= \text{Im}\left\{\frac{1}{D^2-2D+1} xe^{(1+i)x}\right\}$$

$$= \text{Im}\left\{e^{(1+i)x} \frac{1}{(D+1+i)^2-2\,(D+1+i)+1} x\right\}$$

$$= \text{Im}\left\{e^{(1+i)x} \frac{1}{D^2+2iD-1}\, x\right\}$$

$$= \text{Im}\ \{-e^{(1+i)x}[1-(D^2+2iD)]^{-1} x\}$$

$$= \text{Im}\{-e^{(1+i)x}(1+2iD+D^2+\cdots)\ x\}$$

$$= \text{Im}\ \{-e^{(1+i)x}(x+2i)\}$$

$$= \text{Im}\{-e^x(\cos x + i\sin x)\ (x+2iD)\ \}$$

$$= -e^x(2\cos x + x\sin x)$$

***

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E8) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(D^2+3D+2)\ y = e^{2x}\sin x$

ii) $(D^2-2D+1)\ y = x^2 e^{3x}$

iii) $(D^3-2D^2-19D+20)\ y = xe^x + 2e^{-4x}\sin x$

iv) $(D^3-3D^2+3D-1)\ y = xe^x + e^x$

E9) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(D^2 - 1)\ y = x^2 \cos x$

ii) $(D^2 - 4D + 4)\, y = 8x^2 e^{2x} \sin 2x$

iii) $(D^2 - 1)\ y = x \sin x + (1 + x^2)\ e^x$

iv) $(D^4 - 1)\ y = x^2 \sin x$

ध्यान दीजिए कि विशेष हल ज्ञात करने के लिए बहुपद अवकल संकारकों की विधियाँ केवल तभी उपयोग में लाई जा सकती है जबकि अवकल समीकरण अचर गुणांकों वाले हों। ये चर गुणांकों वाले समीकरणों की स्थितियों में कार्य नहीं करती। अनेक बार चर गुणांकों वाले संकारकों के गुणनखंड नहीं किए जा सकते । यदि ऐसा हो भी जाए, तो ये गुणनखंड क्रमविनिमेय नहीं होते हैं, जैसा कि आप भाग 13.2 में पहले ही देख चुके हैं। परंतु इन विधियों का प्रयोग चर गुणांकों वाले कुछ विशेष प्रकार के अवकल समीकरण अर्थात ऑयलर समीकरण और ऐसे समीकरण जो ऑयलर समीकरण के रूप में समानीत किए जा सकते हैं, पर किया जा सकता है। इस प्रकार के समीकरण का अध्ययन आप इकाई 12 में कर चुके हैं। ऐसे समीकरणों को स्वतंत्र चरों के कुछ रूपांतरणों का प्रयोग करके अचर गुणांकों वाले समीकरणों में समानीत किया जा सकता है तथा इसीलिए इन पर बहुपद अवकल संकारक विधियों का प्रयोग संभव हो जाता है। अब हम ऐसे समीकरणों को ले रहे हैं।

ऑयलर समीकरण

nवीं कोटि के ऑयलर समीकरण, अर्थात्

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = b(x), \ \ x > 0 \tag{84}$$

पर विचार कीजिए, जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ वास्तविक अचर हैं तथा $a_0 \neq 0$.

संकारक संकेतन में, समीकरण (84) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(a_0 x^n D^n y + a_1 x^{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} x\ Dy + a_n y) = b(x) \tag{85}$$

$x = e^z$ या $z = \ln x$ प्रतिस्थापित करके, हम समीकरण (85) को निम्न रूप में समानीत कर सकते हैं :

$$[a_0 D'(D'-1)\ldots(D' - \overline{n-1}) + a_1 D'(D'-1)\ldots(D' - \overline{n-2}) + \cdots$$

$$\ldots + a_{n-1} D' + a_n]\ y = b(e^z)$$

या, $$[A_0 D'^n + A_1 D'^{n-1} + \cdots + A_{n-1} D' + A_n]\ y = b(e^z) \tag{86}$$

जहाँ $D' = \frac{d}{dz}$ तथा $A_0, A_1, \ldots, A_n$ अचर हैं।

समीकरण (86) अचर गुणांकों वाला एक रैखिक अवकल समीकरण है तथा इसके साथ अवकल संकारक विधियों से कार्य किया जा सकता है। यदि इसका हल $y = g(z)$ है, तो समीकरण (86) का हल $y = g(\ln x)$ होगा।

ऊपर दी गयी विधि को स्पष्ट करने के लिए, आइए निम्न उदाहरण लें।

उदाहरण 19: अवकल समीकरण $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\ln x,\ x > 0$ (87)
को हल कीजिए।

हल: $z = \ln x$ रखने तथा $\frac{d}{dz}$ को D' से व्यक्त करने पर, समीकरण (87) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$[D'(D'-1) - D' + 1]\ y = 2z$$

$$\Rightarrow\ (D'^2 - 2D' + 1)\ y = 2z$$

सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ m = 1, 1$$

$$\therefore\ C.F = (c_1 + c_2 z)\ e^z$$

विशेष समाकल $= \frac{1}{1 - 2D' + D'^2} 2z$

$$= 2\ [1 - 2D' + D'^2]^{-1} z$$

$$= 2\ [1 + 2D' + \cdots]\ z$$

$$= 2\ (z + 2) = 2z + 4$$

$\therefore$ पूर्ण हल है :

$$y = (c_1 + c_2 z)\ e^z + 2z + 4$$

$$= (c_1 + c_2 \ln x)\ x + 2\ln x + 4$$

– ■ –

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E10) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $(x^2 D^2 - 3xD + 4)\ y = 2x^2,\ x > 0$

ii) $(x^2D^2+3xD+1)\ y=\dfrac{1}{(1-x)^2},\ \ x>1$

iii) $\left(D^3-\dfrac{4}{x}D^2+\dfrac{5D}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)y=1,\ x>0$

iv) $(x^2D^2-xD+4)\ y=\cos\ (\ln x)+x\sin\ (\ln x),\ x>0$

कुछ अवकल समीकरण ऐसे होते हैं जो सरलता से ऑयलर समीकरण के रूप में समानीत किए जा सकते हैं; अर्थात् अचर गुणांकों वाले समीकरण में समानीत हो जाते हैं। अब हम ऐसे कुछ समीकरणों को लेंगे।

ऑयलर रूप में समानीत समीकरण

निम्न रूप के समीकरण पर विचार कीजिए :

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x),\ x>0, \tag{88}$$

जहाँ a और b धनात्मक वास्तविक अचर हैं तथा $a_1, a_2, \ldots, a_n$, अचर हैं। प्रतिस्थापन $z=ax+b$ द्वारा स्वतंत्र चर x को z में बदल कर हम समीकरण (88) के रूप के समीकरणों को ऑयलर समीकरण के रूप में रूपांतरित कर सकते हैं। इस प्रतिस्थापन के अंतर्गत, समीकरण (88) निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$z^n\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a_1}{a}z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a^{n-1}}z\frac{dy}{dz}+\frac{a_n}{a^n}y=\frac{1}{a^n}f\left(\frac{z-b}{a}\right) \tag{89}$$

फिर हम प्रतिस्थापन $t=\ln z$ द्वारा समीकरण (89) को अचर गुणांकों वाले एक समीकरण के रूप में समानीत कर लेते हैं।

व्यावहारिक रूप में, दो प्रतिस्थापनों के स्थान पर, हम केवल एक प्रतिस्थापन अर्थात् $e^t=ax+b$ लेते हैं तथा फिर समीकरण (88) से हम सीधे अचर गुणांकों वाला समीकरण प्राप्त कर लेते हैं।

अब हम एक उदाहरण द्वारा यह स्पष्ट करते हैं कि ऐसा कैसे किया जाता है।

उदाहरण 20 : निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(3x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+3(3x+2)\frac{dy}{dx}-36y=3x^2+4x+1,\ x>0. \tag{90}$$

हल: $3x+2=e^z$ रखने तथा $\dfrac{d}{dz}$ को D' से व्यक्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{3}{3x+2}\ D'y \tag{91}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3.3}{(3x+2)^2}D'y+\frac{3}{3x+2}\ (D'^2y)\frac{3}{3x+2}$$

$$= \frac{9}{(3x+2)^2} (D'^2 - D')\ y \tag{92}$$

समीकरणों (91) और (92) से समीकरण (90) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$[D'(D'-1) + D' - 4]\ y = \frac{1}{27}(e^{2z} - 1) \tag{93}$$

आप यह देख सकते हैं कि समीकरण (90) के दाएँ पक्ष को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{3}[(3x+2)^2 - 1].$$

समीकरण (93) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$(D'^2 - 4)\ y = \frac{1}{27}(e^{2z} - 1)$$

सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm 2$$

$$\therefore \quad C.F. = c_1 e^{2z} + c_2 e^{-2z}$$

विशेष समाकल $= \frac{1}{D'^2 - 4} \cdot \frac{1}{27}\ (e^{2z} - 1)$

$$= \frac{1}{27}\left[\frac{1}{D'^2 - 4}.e^{2z} - \frac{1}{D'^2 - 4}\ e^{0z}\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[\frac{1}{(D'-2)(D'-2)}.e^{2z} - \frac{1}{D'^2 - 4}\ e^{0z}\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[e^{2z}\ \frac{z}{4} + \frac{1}{4}\right]$$

$\therefore$ समीकरण (90) का पूर्ण हल है :

$$y = c_1 e^{2z} + c_2 e^{-2z} + \frac{1}{27}\left[z\frac{e^{2z}}{4} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= c_1(3x+2)^2 + \frac{c_2}{(3x+2)^2} + \frac{1}{108}\ [(3x+2)^2 \ln(3x+2) + 1]$$

***

अब आपके लिए एक प्रश्न।

E11) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

i) $$(2x-1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} - 2y = 0,\ x > \frac{1}{2}$$

ii) $$(1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1+x)\frac{dy}{dx} + y = 4\cos[\ln(1+x)],\ x > 0$$

अगले भाग में, हम भौतिक निदर्शों में इन असमघात अवकल समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे।

13.5 भौतिक निदर्शों में अनुप्रयोग

इस भाग में, हम कुछ भौतिक निदर्शों पर चर्चा करेंगे, जहाँ नियंत्रण करने वाले अवकल समीकरणों को द्वितीय कोटि के असमघात रैखिक अवकल समीकरणों में रूपांतरित किया जा सकता है।

सामान्यतः, जब कभी स्थायी साम्य (stable equilibrium) में स्थित किसी भौतिक तंत्र को अस्तव्यस्त किया जाता है, तो उसमें कंपन (vibration) होने लगते हैं तथा तब इस स्थिति में तंत्र की साम्यावस्था को वापस लौटाने (restore) के लिए इस पर बल (force) लगाना पड़ता है। हम देखेंगे कि इस प्रकार की स्थितियाँ कैसे अवकल समीकरणों में रूपांतरित हो जाती हैं तथा इन समीकरणों का अध्ययन किस प्रकार भौतिक स्थितियों के बारे में निष्कर्ष निकालने में उपयोगी हो सकता है। सर्वप्रथम, हम याँत्रिक कंपनों के विभिन्न पहलुओं पर विचार करते हैं।

13.5.1 याँत्रिक कंपन

प्रत्येक दिन हमें अनेक प्रकार के याँत्रिक कंपनों से सामना करना पड़ता है। सड़कों पर बंप और दरार होने के कारण मोटर की उच्छलन गति (bouncing motion) तथा यातायात और तेज हवा के कारण पुल का कंपन इसके कुछ सामान्य उदाहरण है। याँत्रिक कंपनों का अध्ययन करने के लिए पहले हम एक सरल याँत्रिक तंत्र लेते हैं जिसमें एक कुंडली कमानी (coil spring) होती है, जो एक दृढ़ आलंब (support) से लटकी होती है तथा इसके दूसरे सिरे पर एक द्रव्यमान m लगा होता है।

इस कमानी-द्रव्यमान तंत्र का विश्लेषण करने के लिए, आपको भौतिकी के निम्नलिखित दो नियमों को दोहराना आवश्यक होगा। हुक का नियम तथा न्यूटन का द्वितीय गति-नियम। एक अंग्रेज भौतिकविद् राबर्ट हुक (1635-1703) ने 1658 में हुक का नियम प्रकाशित किया। यह नियम इस प्रकार है : कमानी एक प्रत्यानयन बल लगाती है जो कि कमानी के दीर्घीकरण (elongation) की विपरीत दिशा में कार्य करता है, जिसका परिमाण दैर्ध्यवृद्धि (elongation) की मात्रा के अनुलोमानुपाती (directly proportional) होता है। अर्थात् कमानी एक **प्रत्यानयन बल F लगाती है जिसका परिमाण ks होता है, जहाँ s दैर्ध्यवृद्धि की मात्रा है तथा $k(>0)$ कमानी स्थिरांक है।**

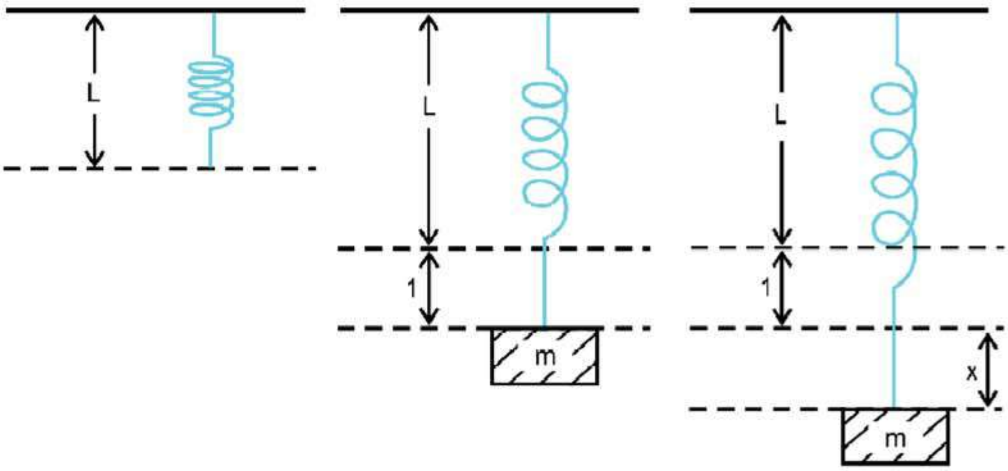
उदाहरण के लिए, यदि $20\ kg$ का भार एक कमानी की लंबाई में $\frac{1}{2}m$ की वृद्धि करता है, तो हुक के नियम के अनुसार, $20 = |F| = ks = k\left(\frac{1}{2}\right)$ (kg/m प्रणाली में)

अतः कमानी स्थिरांक $k = 40\ kg/m$.

न्यूटन का द्वितीय नियम हमें एक गतिमान पिंड का गति समीकरण सूत्रित करने में समर्थ बनाता है। जब द्रव्यमान अचर रहता है, तब इस नियम को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

न्यूटन का द्वितीय नियम इस प्रकार है : जब किसी पिंड पर एक या अधिक बाह्य बल कार्य कर रहे हों, तो पिंड के संवेग (momentum) की काल परिवर्तन दर इस पर लग रहे बाह्य बलों के सदिश योगफल (vector sum) के बराबर होती है।

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = ma = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right) \tag{94}$$



(क) (ख) (ग)

चित्र 1

कमानी-द्रव्यमान तंत्र के विश्लेषण के प्रथम चरण में एक निर्देशांक अक्ष का चुनाव किया जाता है जिसमें द्रव्यमान की गति को निरूपित किया जा सके। मान लीजिए कि कमानी की लंबाई L है, जब वह अपने आलंब से लटकी हुई है (देखिए चित्र 1(क))। मान लीजिए कि कमानी के सिरे पर द्रव्यमान m लटकाने पर कमानी की लंबाई बढ़ने लगती है तथा जब यह तंत्र साम्यावस्था में आ जाता है, तब मान लीजिए कि कमानी की लंबाई में 1 इकाई की वृद्धि होती है (देखिए चित्र 1(ख))। अतः, आइए हम एक ऊर्ध्वाधर निदेशांक-अक्ष लें जो कमानी से होकर जाता है तथा जिसका मूलबिदु द्रव्यमान की साम्य स्थिति पर हो। मान लीजिए कि x अपनी साम्य स्थिति से द्रव्यमान के विस्थापन को व्यक्त करता है और यह विस्थापन धनात्मक माना जाता है, जब कि द्रव्यमान अपनी साम्य स्थिति से नीचे होता है, जैसा कि चित्र 1(ग) में दर्शाया गया है।

अब हम द्रव्यमान m पर लगने वाले विभिन्न बलों पर विचार करते हैं।

गुरूत्व : गुरूत्व (gravity) बल F_1 एक अधोमुखी बल (downward force) होता है, जिसका परिमाण mg होता है, जहाँ g गुरूत्व-त्वरण है। अतः,

$$F_1 = mg$$

प्रत्यानयन बल : कमानी एक प्रत्यानयन बल F_2 लगाती है, जिसका परिमाण कमानी की दैर्ध्यवृद्धि के समानुपाती होता है। चित्र 1(ग) से आप देख सकते हैं कि कमानी की अपनी प्राकृतिक लंबाई में $(x+l)$ इकाई की वृद्धि हो जाती है। अतः, F_2 का परिमाण $k(x+l)$ है, जहाँ k कमानी स्थिरांक है। क्योंकि कमानी ऊपर की ओर खींचती है (ऋणात्मक x दिशा में), इसलिए हमें प्राप्त होता है :

$$F_2 = -k(x+l)$$

ध्यान दीजिए कि k की इकाई बल/लंबाई होती है।

जब $x=0$, अर्थात् जब तंत्र साम्यावस्था में होता है, तब गुरुत्व बल और कमानी के कारण बल एक दूसरे को संतुलित कर देते हैं। इस प्रकार, $mg = kl$ और F_2 को निम्न रूप मे व्यक्त किया जा सकता है :

$$F_2 = -kx - mg$$

$g = 32 ft/\sec^2$,

$g = 9.8 m/\sec^2$ या

$980 cm/\sec^2$

अवमंदक बल (Damping Force) : द्रव्यमान पर एक अवमंदक बल या घर्षण बल F_3 लगा रहा होता है। उदाहरण के लिए, यह बल वायु प्रतिरोध या शॉक एब्जार्बर के कारण घर्षण हो सकता है। प्रत्येक स्थिति में, हम मान लेते हैं कि अवमंदक बल द्रव्यमान के वेग के परिमाण के समानुपाती होता है, परंतु विपरीत दिशा में होता है। अर्थात,

$$F_3 = -c\frac{dx}{dt},\ c > 0,$$

जहाँ c **अवमंदक अचर** है, जो द्रव्यमान/समय की इकाइयों में दिया होता है।

बाह्य बल : द्रव्यमान पर लगने वाले किसी भी बाह्य बल (उदाहरण के लिए, चुंबकीय बल या सड़क पर बंपों के कारण कार पर लग रहा बल) को $F_4 = f(t)$ से व्यक्त किया जाएगा। आइए यह मान लें कि ये बल केवल समय पर निर्भर करते हैं तथा द्रव्यमान की स्थिति या उसके वेग पर निर्भर नहीं करते।

तब, द्रव्यमान m पर लगने वाला **कुल बल** F चार बलों F_1, F_2, F_3 और F_4 का योग होगा। अर्थात् ,

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = mg - kx - c\frac{dx}{dt} + f(t) \qquad (95)$$

इस तंत्र पर, न्यूटन के द्वितीय नियम के प्रयोग से, हम द्रव्यमान का गति-समीकरण निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - mg - c\frac{dx}{dt} + f(t)$$

$$\Rightarrow\ m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t) \qquad (96)$$

जब $c = 0$ है, तब हम कहते हैं कि तंत्र **अनवमंदित** (undamped) है, अन्यथा हम कहते हैं कि तंत्र **अवमंदित** है। जब $f(t) = 0$ है, तब हम कहते हैं कि गति **मुक्त** (free) है, अन्यथा गति **प्रणोदित** (forced) कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण (96) को अब तक अध्ययन की गई विधियों द्वारा हल किया जा सकता है।

आइए इस समीकरण को निम्नलिखित स्थितियों में हल करें।

(i) अनवमंदित मुक्त कंपन

आइए एक सरल तंत्र से प्रारंभ करें, जिसमें $c = 0$ और $f(t) = 0$. इस स्थिति में, समीकरण (96) निम्न हो जाता है :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (97)$$

समीकरण (97) को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \qquad (98)$$

जहाँ, $\omega_0^2 = k/m$.

यहाँ ω_0 कंपन की कोणीय आवृत्ति (angular frequency) कहलाती है। किसी विशेष समस्या के लिए, सुनिश्चित आदि प्रतिबंधों के द्वारा अचरों A और B के मान निर्धारित किए जाते हैं।

मान लीजिए $A = R\cos\delta$ और $B = R\sin\delta$, अर्थात्

$$R\cos(\omega_0 t - \delta) = R\cos\omega_0 t\cos\delta + R\sin\omega_0 t\sin\delta$$

$$= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

जहाँ R और δ अचर हैं। तब, हम समीकरण (98) को एक अधिक सुविधाजनक रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$x(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) \qquad (99)$$

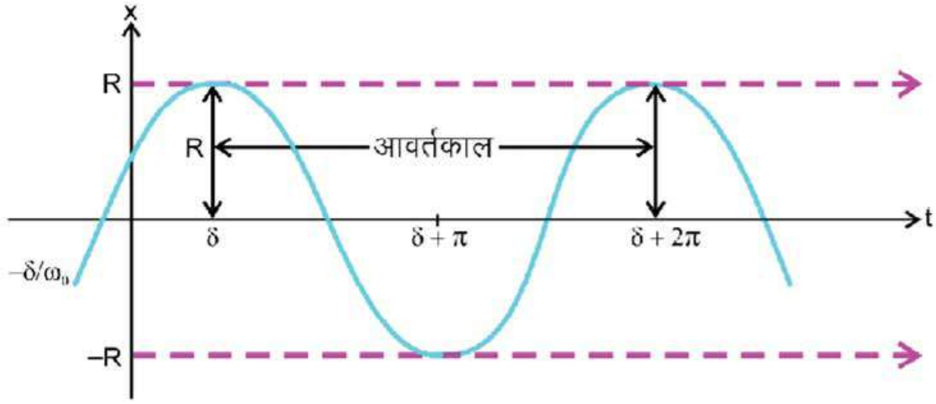
जहाँ $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ और $\tan\delta = \dfrac{B}{A}$.

कोसाइन फलन के आवर्ती अभिलक्षण के कारण, समीकरण (99) एक **आवर्ती गति** (periodic motion) या **आवर्त काल** (period) T वाली एक **सरल आवर्त गति** (simple harmonic motion) को निरूपित करता है,

जहाँ, $$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}. \qquad (100)$$

इसका अर्थ है कि $x(t)$ का ग्राफ प्रत्येक $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ इकाइयों के बाद पुनरावर्ती होता है।

क्योंकि $|\cos(\omega_0 t-\delta)| \le 1$ है, अतः x सदैव रेखाओं $x=\pm R$ के बीच स्थित होता है। अधिकतम विस्थापन समय $\omega_0 t-\delta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ पर होता है। यहाँ अचर R द्रव्यमान का साम्यता से अधिकतम विस्थापन है तथा यह गति का **आयाम** (amplitude) कहलाता है। अचर δ **गति का काल कोण** (phase angle) कहलाता है तथा यह $\delta = 0$ पर तरंग की सामान्य स्थिति से उस तरंग का विस्थापन (समय में) मापता है। इस स्थिति में, समय में वृद्धि होने के साथ आवर्ती गति शून्य की ओर प्रवृत्त नहीं होती। समीकरण (99) द्वारा निरूपित गति का स्कैच चित्र 2 में दर्शाया गया है।



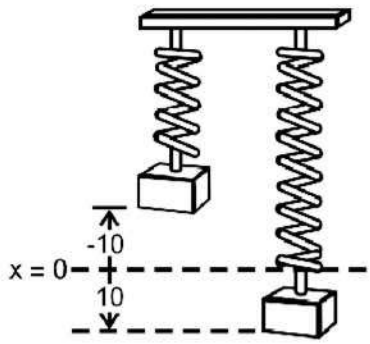
चित्र 2: सरल आवर्त गति

आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 21: कमानी-द्रव्यमान तंत्र के पदों में दी गई आदि-मान समस्या का निर्वचन कीजिए और इसे हल कीजिए।

$$\frac{d^2x}{dt^2}+16x=0, \tag{101}$$

जहाँ, $x(0)=10, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0.$



चित्र 3

हल : यह समस्या ठीक वैसी है जैसे कि एक कमानी पर लगे एक द्रव्यमान को साम्य स्थिति से 10 इकाई नीचे खींचा गया हो। इस स्थिति को आदि स्थिति $t=0$ माना जाता है। इस स्थिति में, तंत्र विरामावस्था में होता है तथा फिर द्रव्यमान को छोड़ा जाता है, जिससे कमानी में गति होने लगती है (देखिए चित्र 3)।

समीकरण (101) का हल है :

$$x(t)=c_1\cos 4t+c_2\sin 4t \tag{102}$$

समीकरण (102) में, c_1 और c_2 निर्धारित करने के लिए, हम आदि प्रतिबंधों का प्रयोग करते हैं।

अब, $x(0)=10.$

$\Rightarrow \; c_1.1+c_2.0=10$

$\Rightarrow \quad c_1 = 10$

समीकरण (102) से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dx}{dt} = -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos t$$

दूसरे आदि प्रतिबंध के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं :

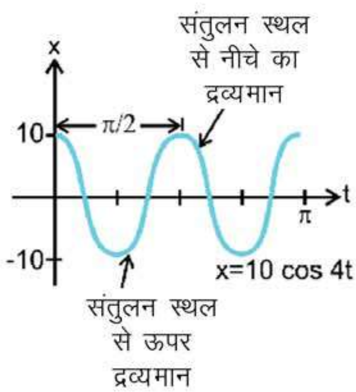
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 = 4c_2.1$$

$\Rightarrow \quad c_2 = 0$

इस प्रकार, गति का समीकरण (102) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$x(t) = 10\cos 4t$$

यह हल स्पष्टतः यह दर्शाता है कि एक बार तंत्र के गति में आ जाने पर यह गति में बना रहता है तथा इसका द्रव्यमान साम्य स्थिति $x = 0$ के दोनों और 10 इकाई आगे और पीछे होता रहता है। इस गति का आवर्त काल $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ है (देखिए चित्र 4)।



चित्र 4

***

अब आपके हल करने के लिए एक प्रश्न।

E12) 19.6 kg भार वाले एक द्रव्यमान से कमानी की लंबाई में $\frac{1}{2}m$ की वृद्धि हो जाती है। $t = 0$ पर द्रव्यमान को साम्य स्थिति से $\frac{2}{3}m$ नीचे एक बिंदु से $4/3m/\sec$ के उपरिमुखी वेग (upward velocity) से छोड़ा जाता है। वह फलन $x(t)$ मालूम कीजिए, जो मुक्त गति निर्धारित करता है।

अनवमंदित मुक्त स्थिति में, हमने एक आदर्श व्यवस्था में कंपन पर विचार किया था, अर्थात्, यह मान कर चलते हुए कि कोई बाह्य बल या घर्षण बल वहाँ उपस्थित नहीं हैं। परंतु अधिकांश अनुप्रयोगों में कम से कम एक न एक प्रकार का घर्षण बल या अवमंदक बल अवश्य होता है जो एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। यह बल तंत्र में कोई घटक जैसे कि, कार में शॉक एब्जार्वर या तंत्र के आसपास के माध्यम जैसे कि वायु या कोई द्रव होने के कारण हो सकता है।

अब हम मुक्त कंपनों पर अवमंदक बल के प्रभाव के बारे में अध्ययन करेंगे।

(ii) अवमंदित मुक्त कंपन

यदि हम अवमंदन के प्रभाव को सम्मिलित करें तथा मान लें कि $f(t) = 0$, तो द्रव्यमान की गति को नियंत्रित करने वाला समीकरण (96) निम्न रूप का हो जाता है :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (103)$$

संगत सहायक समीकरण के मूल है :

$$r_1, r_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\right)} \tag{104}$$

क्योंकि c, k, m धनात्मक हैं, इसलिए $(c^2 - 4km)$ सदैव c^2 से कम होगा।

अतः, यदि $c^2 - 4km \geq 0$, तो समीकरण (104) द्वारा r_1 और r_2 के प्राप्त मान ऋणात्मक होते हैं। साथ ही, यदि $(c^2 - 4km) < 0$ तो r_1 और r_2 के मान सम्मिश्र होते हैं, परंतु इनके वास्तविक भाग ऋणात्मक हैं। इसलिए, हम समीकरण (104) के हलों को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$c^2 - 4km > 0,\ x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},\ r_1, r_2 < 0 \tag{105}$$

$$c^2 - 4km = 0,\ x = (A + Bt)\ e^{-(c/2m)t} \tag{106}$$

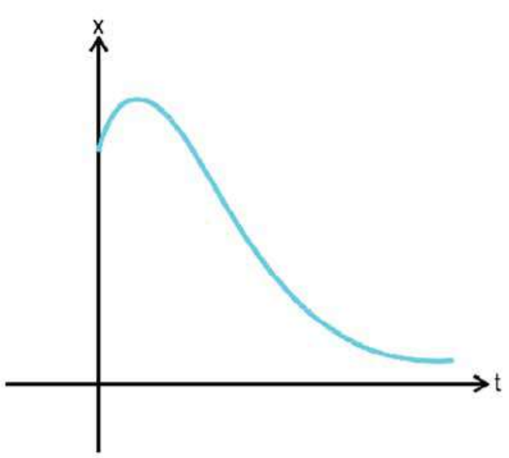
$$c^2 - 4km < 0,\ x = e^{-(c/2m)t}\ [A\cos \mu t + B\sin \mu t] \tag{107}$$

जहाँ $\mu = \sqrt{(4km - c^2)}/2m > 0.$

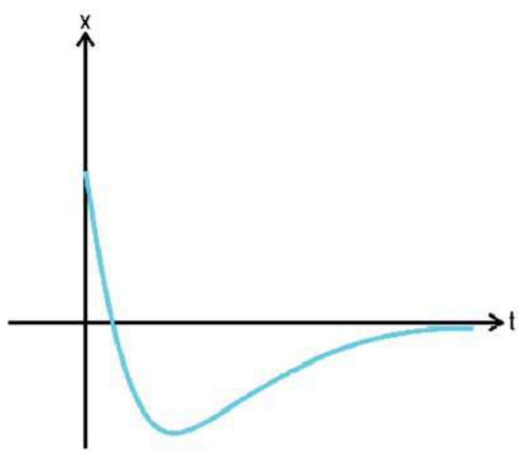
आप यहाँ इस ओर **ध्यान** दे सकते हैं कि तीनों स्थितियों में, चाहे आदि प्रतिबंध तथा A और B के मान कुछ भी हों, $t \to \infty$ पर $x \to 0$. दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि समय में वृद्धि के साथ गति धीमी होती जाती है जो समीकरण (97) के हलों के विपरीत है।

इस प्रकार, **बिना अवमंदन के गति सदैव जारी रहती है और अवमंदन होने पर समय में वृद्धि के साथ गति शून्य की ओर प्रवृत्त होती जाती है।**

प्रथम स्थिति को, अर्थात् जब $c^2 - 4km > 0$, **अति अवमंदित** (over damped) कहते हैं (देखिए चित्र 5) तथा द्वितीय स्थिति $c^2 - 4km = 0$ को **क्राँतिकतः अवमंदित** (critically damped) कहते हैं देखिए (चित्र 6) ।



चित्र 5: अति अवमंदित गति



चित्र 6: क्रॉतिकत अवमंदित गति

तीसरी स्थिति, अर्थात् $c^2 - 4km < 0$ में तंत्र को **न्यून अवमंदित** (under damped) कहा जाता है, क्योंकि अवमंदन गुणांक कमानी स्थिरांक की तुलना में छोटा होता है। इस स्थिति में, हम समीकरण (107) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

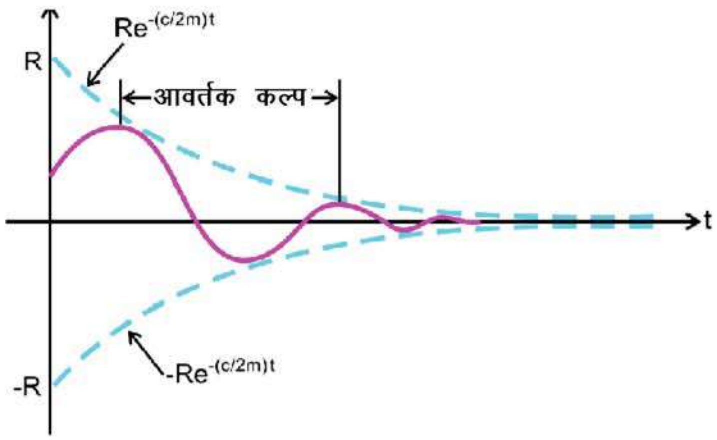
$$x = R\, e^{-(c/2m)t} \cos(\mu t - \delta), \tag{108}$$

जहाँ $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ तथा $\tan\delta = \dfrac{B}{A}$.

समीकरण (108) में, चरघातांकी गुणक $R r^{-(c/2m)t}$ **अवमंदक गुणक** है तथा $\cos(\mu t - \delta)$ के कारण दोलनी गति (oscillatory motion) होती है। क्योंकि कोसाइन गुणक -1 और 1 के बीच में आवर्त $2\pi/\mu$ के साथ विचरित करता है, इसलिए विस्थापन $x(t)$ वक्रों $x = \pm \mathrm{Re}^{-ct/2m}$ के बीच स्थित रहता है। इसी कारण यह विस्थापन एक कोसाइन तरंग से मिलता-जुलता है जिसका आयाम t में वृद्धि होने पर कम होता जाता है। एक प्रतिरूपी हल $x(t)$ का ग्राफ चित्र (7) में दर्शाया गया है। यद्यपि गति आवर्तक नहीं है, फिर भी प्राचल μ वह आवृत्ति निर्धारित करता है जिसके साथ द्रव्यमान पीछे और आगे दोलित होता है तथा यह **आवृत्ति कल्प** (quasi-frequency) कहलाती है। राशि $p = 2\pi/\mu = \dfrac{4m\pi}{\sqrt{4mk - c^2}}$ **आवर्तक कल्प** (quasi-period) कहलाती है। हम इस तंत्र को **न्यून अवमंदित** कहते हैं, क्योंकि यहाँ पर्याप्त अवमंदन उपस्थित नहीं होता (c बहुत छोटा है) जो तंत्र में दोलन को रोक सके।

आवर्तक कल्प द्रव्यमान की स्थिति के उत्तरोत्तर उच्चिष्ठ या उत्तरोत्तर निम्निष्ठ के बीच का समय होता है।

आवृत्ति कल्प वह आवृत्ति है जिससे द्रव्यमान अपनी साम्य स्थिति से पीछे और आगे दोलन करता है।



चित्र 7 : न्यून अवमंदित कंपन

ऊपर दिए गए सिद्धांत को हम उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 22: $9.8kg$ के एक भार से किसी कमानी की लंबाई में $2.45m$ की वृद्धि होती है। मान लीजिए कि इस तंत्र के लिए अवमंदक स्थिरांक अचर $4\,kg/m$ है। यदि भार को साम्य स्थिति से उपरिमुखी वेग $3\,m/\sec$ से छोड़ा जाए, तो गति समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : हुक के नियम से, हम प्राप्त करते हैं :

$$9.8 = k(2.45) \Rightarrow k = 4\ kg/m.$$

$m = w/g$ से हम प्राप्त करते हैं :

$$m = \frac{9.8}{9.8} = 1\ kg.$$

इस प्रकार, गति को नियंत्रित करने वाले अवकल समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

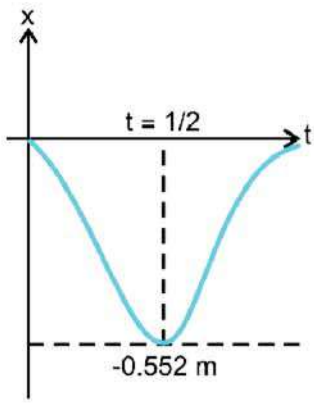
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \tag{109}$$

आदि प्रतिबंध है : $x(0) = 0, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -3$ (110)

समीकरण (109) का सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow\ m = -2, -2$$



चित्र 8

यहाँ तंत्र **क्रांँतिकतः अवमंदित** है तथा

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}\ . \tag{111}$$

प्रतिबंधों (110) को प्रयोग करने पर, हम $c_1 = 0$ और $c_2 = -3$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, गति का समीकरण (111) निम्न रूप का हो जाता है :

$$x(t) = -3t\ e^{-2t} \tag{112}$$

स्पष्टत:, $x'(t) = -3e^{-2t}(1-2t)$ तथा जब $t = \frac{1}{2}$ तब $x'(t) = 0$.

तथा संगत चरम (extreme) विस्थापन $x\left(\frac{1}{2}\right) = -3\left(\frac{1}{2}\right)e^{-1} = -0.552m$. इसका अर्थ है कि भार साम्य स्थिति से ऊपर अधिकतम $0.552m$ ऊँचाई तक पहुँचता है। गति का ग्राफ चित्र 8 में दर्शाया गया है।

***

उदाहरण 23: किसी कमानी-द्रव्यमान तंत्र की गति निम्न अवकल समीकरण से नियंत्रित होती है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{8}\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{113}$$

यदि $x(0) = 2$ और $x'(0) = 0$ है, तो किसी भी समय पर द्रव्यमान की स्थिति

निर्धारित कीजिए। साथ ही, आवृत्ति कल्प, आवर्तक कल्प तथा वह समय जिस पर द्रव्यमान सर्वप्रथम साम्यता स्थिति से होकर जाता है, ज्ञात कीजिए

हल : समीकरण (113) का सहायक समीकरण है :

$$8m^2 + m + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -\frac{1}{16} \pm \frac{i\sqrt{255}}{16}.$$

अतः, यह तंत्र न्यून अवमंदक है तथा

$$x(t) = e^{-t/16}\left(A\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + B\sin\frac{\sqrt{255}}{16}t\right) \tag{114}$$

आदि-प्रतिबंधों के प्रयोग से,

$$x(0) = 2 \Rightarrow A = 2 \text{ और } x'(0) = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{\sqrt{255}}.$$

इस प्रकार, गति का समीकरण (114) निम्न रूप ले लेता है :

$$x(t) = e^{-t/16}\left(2\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + \frac{2}{\sqrt{255}}\sin\frac{\sqrt{255}}{16}t\right) \tag{115}$$

समीकरण (115) में, $2 = R\cos\delta$ और $\frac{2}{\sqrt{255}} = R\sin\delta$ लेने पर, इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x(t) = e^{-t/16}R\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right) \tag{116}$$

जहाँ, $R = \sqrt{4 + \frac{4}{255}} = \frac{32}{\sqrt{255}} \approx 2.004$ तथा $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{255}}\right) \approx 0.663.$

आवृत्ति कल्प $\mu = \frac{\sqrt{255}}{16} \approx 0.998$ है तथा आवर्तक कल्प

$$p = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\times 22/7}{\mu} = \frac{44\times 16}{7\sqrt{255}} \approx 6.298 \text{ sec.}$$

वह समय, जब द्रव्यमान अपनी साम्यता की स्थिति से होकर जाता है, प्राप्त होता है

जब $\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right) = 0$

या, $\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, 1, 2, \ldots.$ इस प्रकार, सर्वप्रथम जब द्रव्यमान अपनी साम्य स्थिति से होकर जाता है वह समय निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$t = \frac{16}{\sqrt{255}}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \approx 1.637 \text{ sec.}$$

समीकरण (116) द्वारा दिए गए $x(t)$ के ग्राफ को खींचने के लिए, अंत खंड $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ निम्न रूप में प्राप्त होते हैं :

$$t_n = \frac{16}{\sqrt{255}}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \delta\right), \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

साथ ही, हमें $|x(t)| \le \mathrm{Re}^{-t/16}$ प्राप्त है, क्योंकि

$$\left|\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right)\right| \le 1 \cdot$$

इस प्रकार, समीकरण (116) का ग्राफ $\pm \mathrm{Re}^{-t/16}$ के ग्राफों को मानों $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_k^*, \ldots$ पर स्पर्श करता है, जिनके लिए

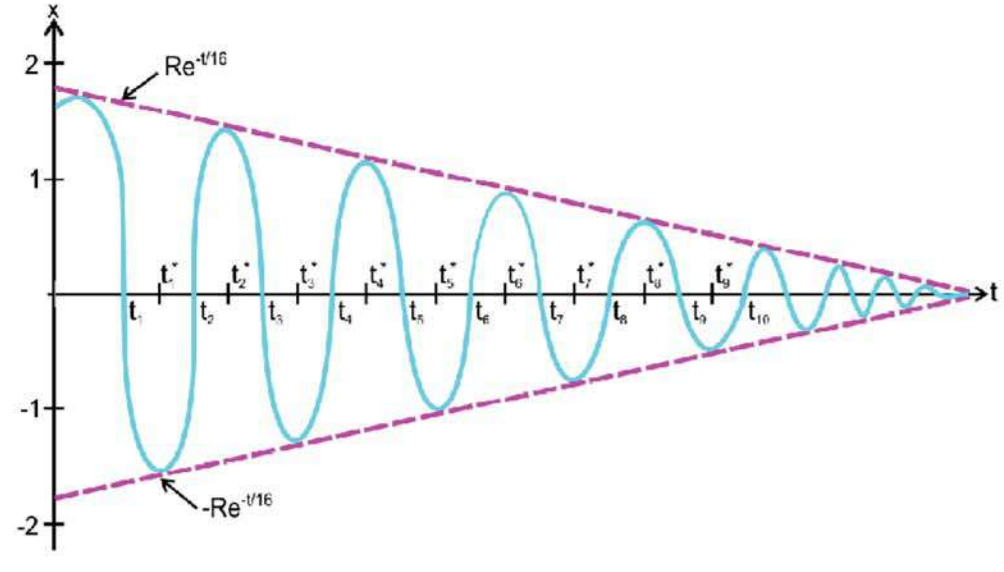
$$\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right) = \pm 1$$

अर्थात्, $\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta$, π का एक सम गुणज होना चाहिए।

या, $$\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta = 2n\pi$$

या, $$t = \frac{16(2n\pi + \delta)}{\sqrt{255}}.$$

हल $x(t)$ का ग्राफ चित्र 9 में दर्शाया गया है।



चित्र 9

अब आप निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E13) निम्न समस्याओं में से प्रत्येक के लिए, ω_0, R और δ निर्धारित कीजिए ताकि दिया हुआ व्यंजक $x(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$ के रूप में लिखा जा सके।

i) $x(t) = 3\cos 2t + 4\sin 2t$

ii) $x(t) = -\cos t + \sqrt{3}\sin t$

iii) $x(t) = -2\cos \pi t - 3\sin \pi t$.

E14) 1m लंबी एक कमानी से $4.9\,kg$ का एक भार जुड़ा हुआ है। साम्यावस्था में कमानी की लबाई 1.98m है। यदि भार को ऊपर खींच कर साम्य स्थिति के ऊपर $2\,m$ की दूरी पर स्थित बिंदु से विरामवस्था से छोड़ा जाए, तो विस्थापन $x(t)$ ज्ञात कीजिए। हमें यह भी ज्ञात है कि आस-पास के माध्यम से होने वाला प्रतिरोध तात्क्षणिक वेग (instantaneous velocity) के बराबर है।

अब हम कमानी-द्रव्यमान तंत्र के कंपनों पर विचार करते हैं जब उस पर एक बाहय बल लगाया गया हो। यहाँ हमारी विशेष रूचि **आवर्ती प्रणोदन पद** के प्रति तंत्र की अनुक्रिया है।

(iii) प्रणोदित कंपन

आइए, उस स्थिति पर विचार करें, जिसमें एक बल $F = F_0 \cos\omega t$ किसी कमानी द्रव्यमान तंत्र पर लगाया गया है। इस स्थिति में, गति-समीकरण (96) का रूप निम्न हो जाता है।

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos\omega t \tag{117}$$

जहाँ F_0 और ω ऋणेतर अचर हैं।

जब कोई अवमंदक प्रभाव नहीं होता, तब समीकरण (117) निम्न हो जाता है :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos\omega t \tag{118}$$

या, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0 \cos\omega t}{m}$$

अवमंदक बल की अनुपस्थिति में, प्रकृति में दो प्रकार की परिघटनाएँ घटित होती हैं। हम इन्हें **विस्पद** (beats) और **अनुनाद** (resonance) कहते हैं, जिनका अब हम अध्ययन करने जा रहे हैं।

समीकरण (118) के संगत सहायक समीकरण के मूल $r_1, r_2 = \pm\sqrt{k/m}$.

मान लीजिए कि $\sqrt{k/m} = \omega_0$.

तब, $C.F. = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

और विशेष समाकल $= \dfrac{1}{D^2+\omega_0^2}\dfrac{F_0}{m}\cos\omega t$

विशेष समाकल प्राप्त करने के लिए, दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं;

$\omega_0 \neq \omega$ और $\omega_0 = \omega$

जब $\omega_0 \neq \omega$, तब

विशेष समाकल $= \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$ है।

जब $\omega_0 = \omega$ है, तब

$$\text{विशेष समाकल} = \mathrm{Re}\frac{1}{(D+i\omega_0)\,(D-i\omega_0)}\frac{F_0}{m}e^{i\omega_0 t}$$

$$= \mathrm{Re}\frac{F_0}{m}\frac{1}{2i\omega_0}\frac{1}{D-i\omega_0}e^{i\omega_0 t}$$

$$= \mathrm{Re}\frac{F_0}{m}\frac{1}{2i\omega_0}te^{i\omega_0 t}$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_0}\,t\,\sin\omega_0 t$$

$\omega_0 \neq \omega$ की स्थिति में, हम समीकरण (118) का हल निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \tag{119}$$

तथा $\omega = \omega_0$ के लिए, समीकरण (118) का हल है :

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t. \tag{120}$$

समीकरणों (119) और (120) में अचरों A और B को आदि प्रतिबंधों द्वारा प्राप्त किया जाता है।

यदि समीकरण (119) में हम यह मान लें कि द्रव्यमान प्रारंभ में विरामावस्था में है तो

$$x(0) = 0 \text{ and } \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0 \tag{121}$$

तथा इन प्रतिबंधों के साथ, हम प्राप्त करते हैं :

$$A = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \text{ और } B = 0\cdot$$

A और B के इन मानों के लिए, हल (119) निम्न रूप ले लेता है :

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) \tag{122}$$

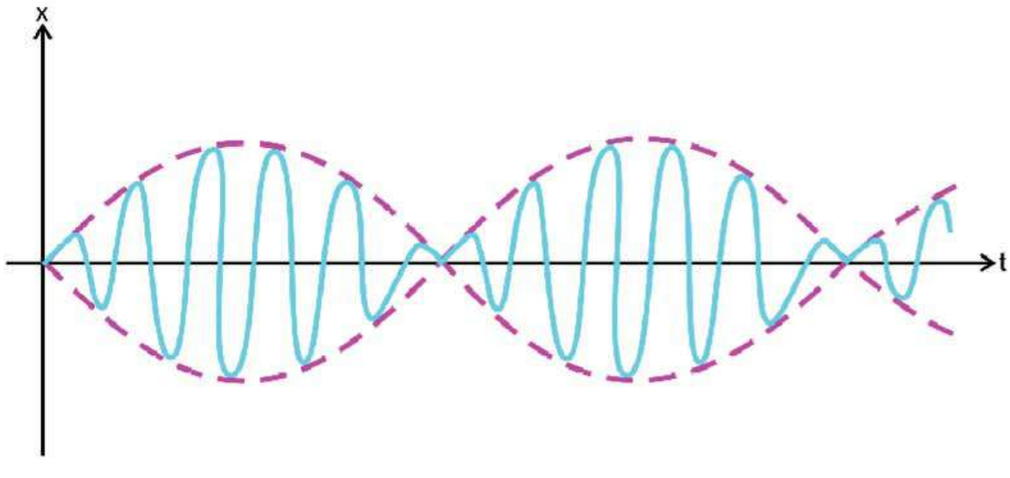
$$\Rightarrow \quad x = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right)t \, \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t \tag{123}$$

समीकरण (123) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x = \left[\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right] \sin\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$$

यदि $|\omega_0 - \omega|$ छोटा है, तो $\omega_0 + \omega > |\omega_0 - \omega|$ तथा इसके परिणामस्वरूप फलन $\sin\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$, फलन $\sin\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}$ की तुलना में, तीव्रता से दोलन करने वाला फलन है। इस प्रकार, यह गति आवृत्ति $\frac{(\omega_0 + \omega)}{2}$ और आयाम $\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}$ वाला एक तीव्र दोलन है।

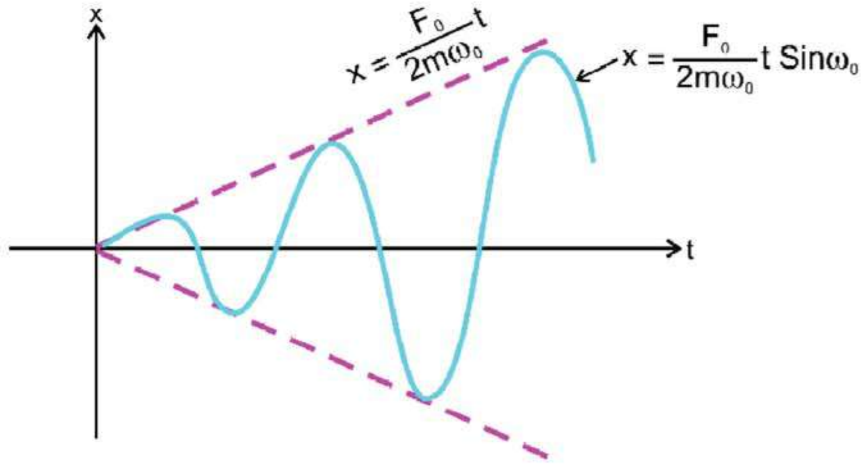
इस प्रकार की गति को, जिसमें आवर्ती आयाम-विचरण होता है, हम विस्पद (beat) कहते हैं। समीकरण (123) द्वारा दी गई विस्पदों की परिघटनाओं को चित्र 10 में दर्शाया गया है।



चित्र 10: विस्पदों की परिघटना

समीकरण (120) पर विचार कीजिए जब $\omega_0 = \omega$, अर्थात्, जब प्रणोदित गति की आवृत्ति वही है जो तंत्र की प्राकृतिक आवृत्ति। आप यह **देख सकते हैं** कि $t \to \infty$ पर पद $t\sin\omega_0 t$ में असीमित रूप से वृद्धि होती है तथा गति अपरिबद्ध हो जाती है, चाहें A और B के मान कुछ भी हो (चित्र 11 देखिए)। इस स्थिति में, हम कहते हैं

कि बाह्य बल कंपन द्रव्यमान के साथ **अनुनाद** (resonance) में है। इस स्थिति में, विस्थापन इतना अधिक हो जाता है कि कमानी की प्रत्यास्थ्य सीमा (elastic limit) अत्याधिक हो जाती है। इसका परिणाम यह होता है कि या तो कमानी टूट जाती है या फिर उसमें स्थायी विरूपण (distortion) आ जाता है।



चित्र 11: अनुनाद की परिघटना

अनुनाद संरचनाओं के डिजाइन में गंभीर कठिनाइयाँ उत्पन्न कर सकते हैं, जहाँ यह अस्थिरताएँ पैदा कर सकते हैं जिससे संरचना असफल हो सकती है। उदाहरणार्थ, किसी पुल को पार करते समय, सैनिक लोग कदम मिला कर मार्च नहीं करते और इस प्रकार अपनी मार्च के आवर्त बल का निराकरण करते हैं, जो पुल की प्राकृतिक आवृत्ति के साथ अनुनाद कर सकता है। दूसरी ओर, अनुनाद की परिघटना सदैव विनाशकारी नहीं होती है। यह एक विद्युत परिपथ का अनुनाद ही है जो हमें रेडियो को एक विशिष्ट स्टेशन पर मिलाने में समर्थ बनाता है।

आप अब निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं :

E15) आदि मान समस्या

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin \gamma t, \; F_0 = \text{अचर} \; (\omega \neq \gamma),$$

$$x_0(0) = 0, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \text{ को हल कीजिए।}$$

E16) एक अनवमंदित याँत्रिक कमानी-भार तंत्र के प्रणोदित कंपन पर विचार कीजिए, जहाँ बाह्य बल $F_0 \sin \omega t$ न्यूटन है। दर्शाइए कि यदि $\omega \neq \omega_0 \left(= \sqrt{k/m}\right)$, तो हल इस प्रकार होगा :

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\sin\omega t.$$

संकीर्ण आवृत्ति परिसर में आवर्ती प्रणोदित बलों का पता लगाने के लिए बनाए जाने वाले भूकंपी यंत्रों (seismic instruments) के डिजाइन बनाने में, जब प्रणोदित कंपन

हो रहा होता है तब उस स्थिति में अवमंदन प्रभाव पड़ता है। इस स्थिति में, हम कंपनों को अवमंदित बल कंपन कहते हैं तथा तंत्र की गति समीकरण (117) द्वारा नियंत्रित होती है।

अब हम ऊपर दी गई स्थिति को स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 24: आदि-मान समस्या

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2}+1.2\frac{dx}{dt}+2x=5\cos 4t,$$

$$x(0)=\frac{1}{2},\ \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0$$

की व्यवस्था कीजिए और फिर उसे हल कीजिए।

हल : हम इस समस्या की व्याख्या एक कंपनीय तंत्र को निरूपित करने में कर सकते हैं, जिसमें एक द्रव्यमान $\left(m=\frac{1}{5}kg.\right)$ एक कमानी $(k=2kg/m.)$ के साथ जुड़ा हुआ है। इस द्रव्यमान को साम्य स्थिति के नीचे $\frac{1}{2}m$ की दूरी पर विरामावस्था से छोड़ा जाता है। गति अवमंदित $(c=1.2)$ है तथा यह $t=0$ पर प्रारंभ किए गए बाह्य बल $5\cos 4t$ द्वारा गतिमान हो रहा है।

जैसै कि समस्या में दिया हुआ है, बाह्य बल $f(t)=5\cos 4t$ सदैव तंत्र पर लगा रहेगा तथा यह तंत्र अवमंदित बल कंपन निरूपित करता है। दिया हुआ अवकल समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+10x=25\cos 4t \qquad (124)$$

समीकरण (124) का सहायक समीकरण है :

$$m^2+6m+10=0$$

$$\Rightarrow\ m=-3\pm i$$

$$\therefore\ C.F=x_c(t)=e^{-3t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$$

विशेष समाकल $=\dfrac{1}{D^2+6D+10}25\cos 4t$

$$=\frac{25}{-(4^2)+6D+10}\cos 4t=\frac{25}{6}\frac{1}{D-1}\cos 4t$$

$$=\frac{25}{6}\text{Re}\frac{1}{D-1}e^{4it}$$

$$= \frac{25}{6} \text{Re} \frac{1}{4i-1} e^{4it}$$

$$= \frac{25}{6 \times (-17)} \text{Re}(4i+1)\ (\cos 4t + i \sin 4t)$$

$$= \frac{-25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \sin 4t \, .$$

अतः, समीकरण (124) का हल है :

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \sin 4t \tag{125}$$

आदि प्रतिबंधों के प्रयोग से अचरों c_1 और c_2 को निर्धारित किया जा सकता है।

$$x(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{38}{51}$$

तथा $x'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = \dfrac{-86}{51}$

समीकरण (125) में, c_1 और c_2 के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हमें गति का निम्न समीकरण प्राप्त होता है :

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51} \cos t - \frac{86}{51} \sin t\right) - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \sin 4t \, .$$

***

और अब आपके हल करने के लिए एक प्रश्न।

E17) न्यून अवमंदित कंपन की स्थिति में, दर्शाइए कि अवकल समीकरण

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \sin \gamma t$ का व्यापक हल निम्न है :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \sin(\gamma t + \theta).$$

जहाँ $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ है तथा कला कोण ϕ और θ क्रमशः

$\sin \phi = \dfrac{c_1}{A}, \;\; \cos \phi = \dfrac{c_2}{A}$ और

$\sin \theta = \dfrac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \cos\theta = \dfrac{\omega^2 - \gamma^2}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}$ द्वारा

परिभाषित हैं।

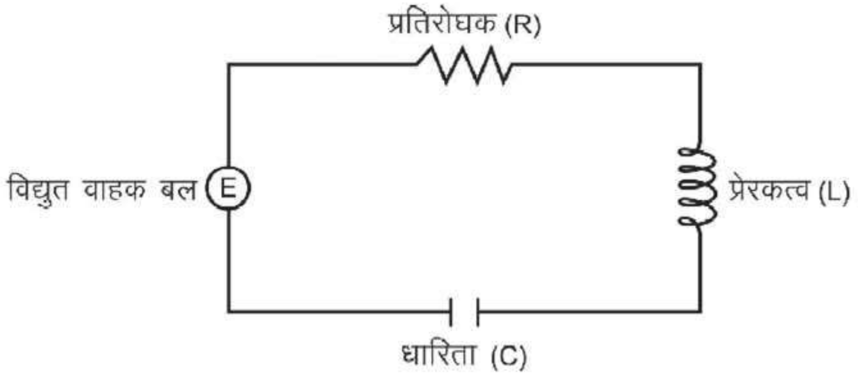
यदि $g(\gamma)=\dfrac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$ है, तो दर्शाइए कि $g(\gamma)$,

$\gamma=\sqrt{\omega^2-2\lambda^2}$ पर अधिकतम है।

अब हम द्वितीय कोटि के असमघात रैखिक अवकल समीकरणों का अनुप्रयोग एक प्रारंभिक विद्युत परिपथ पर करेंगे, जिसमें श्रेणी में एक विद्युत वाहक बल (electromotive force) (जैसे वैटरी या जनरेटर), प्रतिरोधक प्रेरक (inductor) और संधारित्र (capacitor) लगे होते हैं। हम इन परिपथों को **आरएलसी श्रेणी परिपथ** (RLC Series Circuits) कहते हैं।

13.5.2 विद्युत परिपथ

चित्र 12 में दर्शाए एक आर एल सी परिपथ पर विचार कीजिए।



चित्र 12: आर एल सी श्रेणी परिपथ।

आरएलसी श्रेणी परिपथों को नियंत्रित करने वाले भौतिक सिद्धांत हैं :

i) आवेश-संरक्षण (conservation of charge)

ii) ऊर्जा-संरक्षण (conservation of energy)

विद्युत परिपथों के लिए इन संरक्षण नियमों (सिद्धांतों) को एक जर्मन वैज्ञानिक गुस्ताव किरखोफ (1824-1887) ने 1859 में सूत्रित किया था तथा हम इन्हें **किरखोफ नियम** कहते हैं। ये नियम बताते हैं कि

i) श्रेणी परिपथ में लगे प्रत्येक अवयव (प्रतिरोधक, प्रेरक, संधारित्र तथा विद्युत वाहक बल) से होकर जाने वाली धारा i समान होती है।

ii) एक बंद परिपथ के चारों ओर विभव वोल्टता पात (voltage drops) में तात्क्षणिक परिवर्तनों (instantaneous change) का बीजीय योग शून्य होता है।

मान लीजिए कि $i(t)$ एक आर एल सी श्रेणी परिपथ में धारा व्यक्त करता है। किरखोफ के नियमों का अनुप्रयोग करने के लिए, हमें परिपथ के प्रत्येक अवयव पर वोल्टता पात के बारे में जानकारी होना आवश्यक है। अब हम इन वोल्टता सूत्रों के कथन दे रहे हैं :

- **ओम नियम** (Ohm's law) के अनुसार, जिसे एक जर्मन भौतिकविद् जार्ज साइमन ओम (1787-1854) ने दिया था, एक प्रतिरोधक पर वोल्टता पात E_R उस प्रतिरोधक से होकर जाने वाली धारा i के समानुपाती होती है। अर्थात्,

  $$E_R = Ri$$

  समानुपातिकता स्थिरांक R उसका **प्रतिरोधक** कहलाता है।

- **फैराडे नियम,** जो एक अंग्रेज भौतिकविद् माइकेल फैराडे के नाम पर है, के अनुसार एक प्रेरक पर **वोल्टता पात** E_L धारा i में तात्क्षणिक परिवर्तन की दर के समानुपाती होती है, अर्थात्

  $$E_L = L\frac{di}{dt}$$

  समानुपातिकता स्थिरांक L **प्रेरकत्व** (inductance) कहलाता है।

- एक संधारित्र पर वोल्टता पात E_c उस संधारित्र पर लगे विद्युत आवेश q के समानुपाती होती है। अर्थात् ,

  $$E_C = \frac{1}{C}q$$

  समानुपातिकता स्थिरांक $\frac{1}{C}$ **व्युत्क्रम धारिता** (elastance) तथा c **धारिता** (capacitance) कहलाता है। यह माना जाता है कि एक विद्युत वाहक बल से परिपथ की वोल्टता या विभव ऊर्जा में वृद्धि हो जाती है। यदि हम मान लें कि $E(t)$ किसी समय t पर परिपथ को दी गई वोल्टता को व्यक्त करता है, तो किरखोफ के द्वितीय नियम द्वारा हमें प्राप्त होता है :

  $$E_L + E_R + E_C = E(t) \tag{126}$$

  E_L, E_R और E_C के व्यंजकों को समीकरण (126) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

  $$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{127}$$

  क्योंकि धारा आवेश में तात्क्षणिक परिवर्तन दर है, अर्थात् $i = \frac{dq}{dt}$ इसलिए, हम आवेश q के पदों में समीकरण (127) को निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

  $$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{128}$$

  आदि प्रतिबंध $q(t_0) = q_0$, $q'(t_0) = i(t_0) = i_0$ हैं। इस प्रकार, हमें समय t_0 पर संधारित्र पर आवेश तथा परिपथ में धारा की जानकारी होना आवश्यक है।

  यदि $E(t) = 0$ हो, तो हम कहते हैं कि **विद्युत कंपन मुक्त** हैं।

क्योंकि समीकरण (128) का सहायक समीकरण

$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$ है, इसलिए जब $R \neq 0$ तब हल के तीन रूप होंगे। ये हल

विविक्तकर $R^2 - \frac{4L}{C}$ के मान पर निर्भर करते हैं। हम कहते हैं कि परिपथ

अति अवमंदित है, यदि $R^2 - \frac{4L}{C} > 0.$

क्रांतिकतः अवमंदित है, यदि $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$ तथा

न्यून अवमंदित है, **यदि** $R^2 - \frac{4L}{C} < 0.$

इन तीनों ही स्थितियों में समीकरण (128) के व्यापक हल में गुणक $e^{-Rt/2L}$ होता है और इसलिए $t \to \infty$ पर $q(t) \to 0.$

न्यून अवमंदित स्थिति में, जब $q(0) = q_0$, संधारित्र पर आवेश दोलन करने लगेगा क्योंकि इस स्थिति में इसका क्षय होता रहता है। दूसरे शब्दों में, $t \to \infty$ पर संधारित्र का आवेशन (charging) और अनावेशन (discharging) होता रहता है। जब $E(t) = 0$ और $R = 0$, तब हम कहते हैं कि परिपथ अनवमंदित है तथा t में असीमित वृद्धि होने पर विद्युत कंपन शून्य की ओर प्रवृत्त नहीं होते हैं। साथ ही, परिपथ की अनुक्रिया (response) **सरल आवर्त** है।

ऊपर दिए गए सिद्धांत को समझने के लिए आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 25: एक आर एल सी श्रेणी परिपथ में, संधारित्र पर आवेश $q(t)$ ज्ञात कीजिए, जबकि $L = 0.25,\ R = 10$ ओम, $C = 0.001$ फैराडे, $E(t) = 0,\ q(0) = q_0$ कूलॉम तथा $i(0) = 0$.

हल : क्योंकि $C = 0.001$, इसलिए $\frac{1}{C} = 1000$ तथा समीकरण (128) निम्न हो जाता है :

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1000q = 0$$

$$\Rightarrow \quad q'' + 40q' + 4000q = 0$$

सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 40m + 4000 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = -20 \pm i60$$

इस प्रकार, परिपथ न्यून अवमंदित है तथा

$$q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \sin 60t)$$

आदि प्रतिबंधों के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं :

$$q(0) = q_0 = 1(c_1 + 0.c_2) \Rightarrow c_1 = q_0$$

$$i(0) = 0 \Rightarrow q'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -20e^{20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \sin 60t)\,|_{t=0}$$

$$+e^{-20t}(-60c_1 \sin 60t + 60c_2 \cos 60t)\,|_{t=0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -20q_0 + 60c_2$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{q_0}{3}$$

इस प्रकार, हल निम्न से प्राप्त होता है :

$$q_c(t) = q_0 \; e^{-20t}\left(\cos 60t + \frac{1}{3}\sin 60t\right)$$

उस स्थिति में जब $R \neq 0$, हम समीकरण (128) के पूरक फलन $q_c(t)$ को एक **क्षणिक हल** (transient solution) कहते हैं। यदि $E(t)$ आवर्ती या अचर है, तो समीकरण (128) का विशेष हल $q_p(t)$ **स्थायी-अवस्था** हल (steady-state solution) होता है।

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं, जहाँ दी गई वोल्टता $E(t)$ एक आवर्त फलन है।

E18) एक आर एल सी श्रेणी परिपथ में, स्थायी अवस्था हल तथा स्थायी अवस्था धारा ज्ञात कीजिए, जबकि आरोपित वोल्टता (impressed voltage) $E(t) = E_0 \sin \gamma t$,
(**संकेत :** स्थायी अवस्था धारा $i_p(t) = q'_p(t)$ होती है।)

इस इकाई में हमने जो अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, हम इस इकाई को यहीं समाप्त करते हैं।

13.6 सारांश

इस इकाई में हमने निम्न बातों का अध्ययन किया है :

1. $\frac{d}{dx}$ के लिए प्रतीक D का प्रयोग किया जाता है तथा D में n वीं घात वाले बहुपद $L(D)$ को **बहुपद अवकल संकारक** कहा जाता है।

2. $\frac{1}{L(D)}b(x)$, चर x का वह फलन है जिस पर संक्रिया $L(D)$ लागू करने पर $b(x)$ प्राप्त होता है तथा यह $L(D)\; y = b(x)$ का विशेष समाकल है। यहाँ $\frac{1}{L(D)}$ **प्रतिलोम संकारक** कहलाता है।

3. यदि $y_1, y_2, \ldots, y_m$ क्रमशः समीकरणों
$L(D)y = b_1(x),\ L(D)\,y = b_2(x),\ \ldots,\ L(D)\,y = b_m(x)$ के हल हों तो
$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ समीकरण $L(D)y = b_1(x) + \cdots + b_m(x)$ का एक हल होता है।

4. $L(D)\,[e^{ax}y] = e^{ax}\,L(D+a)\,y$.

5. $$\frac{1}{(D-m_1)\,(D-m_2)\ldots(D-m_n)}y$$
$$= e^{m_n x}\int e^{(m_{n-1}-m_n)x}\left(\int e^{(m_{n-2}-m_{n-1})}\int\ldots\left(\int e^{(m_1-m_2)x}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\int e^{m_1 x}b(x)\,dx\right)\ldots dx\right)dx\right.$$

6. $$\frac{1}{D-a}\,b(x) = e^{ax}\int e^{-ax}\,b(x)\,dx.$$

7. $$\frac{1}{L(D)}e^{ax} = \frac{1}{L(a)}e^{ax},\quad L(a)\neq 0.$$

8. यदि $L(D) = (D-a)^p\phi(D),\ \phi(a)\neq 0,\ p\geq 1$, तो
$$\frac{1}{L(D)}e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^p\phi(D)}e^{ax} = \frac{x^p}{p!}\,\frac{e^{ax}}{\phi(a)},\quad \phi(a)\neq 0.$$

9. $$\frac{1}{\phi(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{\phi(-a)^2}\cos(ax+b),\ \text{यदि } \phi(-a^2)\neq 0.$$

10. $$\frac{1}{\phi(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{\phi(-a^2)}\sin(ax+b),\ \text{यदि } \phi(-a^2)\neq 0.$$

11. $$\frac{1}{\phi(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{(D^2+a^2)^p}\,\frac{1}{\psi(D^2)}\cos(ax+b),\ \text{यदि } \phi^{(k)}(-a^2) = 0$$
जहाँ $k = 1, 2, \ldots, p-1$ परंतु $\psi(-a^2)\neq 0$

12. $$\frac{1}{\phi(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{(D^2+a^2)^p}\,\frac{1}{\psi(D^2)}\sin(ax+b),\ \text{यदि } \phi^{(k)}(-a^2) = 0$$
जहाँ $k = 1, 2, \ldots, p-1$ परंतु $\psi(-a^2)\neq 0$.

13. $$\frac{1}{L(D)}e^{ax}V(x) = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}V(x).$$

14. प्रतिस्थापन $x = e^z$ की सहायता से, ऑयलर समीकरण
$(x^nD^n + a_1x^{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}xD + a_n)\ y = b(x),\ x>0$, जहाँ

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ वास्तविक अचर है, को अचर गुणांकों वाले समीकरण के रूप में समानीत किया जा सकता है।

15. अवकल समीकरण

$$[(ax+b)^n D^n + a_1(ax+b)^{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}xD + a_n)y = b(x),\ x > 0$$

जहाँ a, b धनात्मक वास्तविक अचर हैं तथा गुणांक $a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं, को प्रतिस्थापन $ax+b=z$ के प्रयोग से ऑयलर समीकरण के रूप में समानीत किया जा सकता है तथा फिर प्रतिस्थापन $t = \ln z$ द्वारा अचर गुणांकों वाले समीकरण में समानीत किया जा सकता है। या फिर इसे सीधे ही रूपांतरण $ax+b=e^t$ द्वारा अचर गुणांकों वाले समीकरण में समानीत किया जा सकता है।

16. द्वितीय कोटि रैखिक, असमघात अवकल समीकरणों का निम्न अनुप्रयोगों में अध्ययन किया गया है :

i) **यांत्रिक कंपन :** यहाँ एक कमानी से एक द्रव्यमान m को जोड़ा जाता है, जिससे कमानी उस स्थिति तक खींचती हैं, जहाँ कमानी का प्रत्यानयन बल, भार mg से संतुलित हो जाता है। इसके बाद होने वाली कोई भी गति या तो साम्य स्थिति से ऊपर या नीचे होती है। इस तंत्र का गति समीकरण निम्न होता है :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t),\ \text{(देखिए समीकरण(96))},$$

जहाँ c अवमंदन अचर है, k कमानी अचर है तथा $f(t)$ तंत्र पर लगने वाला बाह्य बल है।

जब $c = 0$ है, तब तंत्र **अनवमंदित** होता है, अन्यथा यह **अवमंदित** होता है। साथ ही, जब $f(t) = 0$ है, तो गति **मुक्त** होती है, अन्यथा गति **प्रणोदित** कहलाती है। जब $c = 0,\ f(t) = 0$ हो तब द्रव्यमान **सरल आवर्त गति** प्रदर्शित करता है। जब $c \neq 0$ तथा $f(t) = 0$ हो, तब यदि

i) $c^2 - 4km < 0$, तो गति **न्यून अवमंदित** कहलाती है।

ii) $c^2 - 4km = 0$, तो गति **क्राँतिकतः अवमंदित** कहलाती है।

iii) $c^2 - 4km > 0$, तो गति **अति अवमंदित** कहलाती है।

अवमंदन बल की अनुपस्थिति में, आवर्त बल कंपन के आयामों को बहुत बड़ा बना सकता है। इस स्थिति में हम कहते हैं कि तंत्र **अनुनाद** की स्थिति में है। साथ ही यदि गति में आयामों का एक आवर्ती विचलन हो, तो यह **विस्पद** कहलाता है।

i) **विद्युत परिपथ :** जब प्रेरक, प्रतिरोधक और संधारित्र वाले एक श्रेणी परिपथ पर एक विद्युत चुबंकीय बल लगा हो, तो आवेश के लिए परिणामी अवकल समीकरण निम्न होता है :

$$L\frac{d^2q}{dt} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \text{ (देखिए समीकरण (128))}.$$

ऐसे परिपथों का विश्लेषण ठीक उसी प्रकार किया जाता है, जैसा कि यॉंत्रिक कंपनों की स्थिति में किया जाता है। इन्हें उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है।

13.7 हल / उत्तर

E1) i) $(D+2)\ (2D-1)$

ii) $(D-1)\,(D+2)\,(D-3)$

iii) $(D+2)^3\,(2D-1)$

iv) $(D-4)\ (D^2+4D+5)$

E2) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(D^3-3D^2+4D-1)y = e^x + 2\,.$$

क्योंकि $(D^3-3D^2+4D-1)(e^x) = e^x$

$\therefore$ विशेष समाकल $y_1 = \dfrac{1}{D^3-3D^2+4D-1}e^x = e^x.$

साथ ही, क्योंकि $(D^3-3D^2+4D-1)\ (-2) = 2.$

विशेष समाकल $y_2 = \dfrac{1}{D^3-3D^2+4D-1}(2) = -2$

$\therefore\ y_p = y_1 + y_2 = e^x - 2\,.$

E3) i) विशेष समाकल $= \dfrac{1}{D^2+n^2}\sec nx\,.$

$$= \frac{1}{2ni}\left(-\frac{1}{D+in} + \frac{1}{D-in}\right)\sec nx$$

$$= \frac{1}{2ni}\left[e^{nix}\int e^{-inx}\sec nx\ dx - e^{-inx}\int e^{inx}\sec nx\ dx\right]$$

$$= \frac{1}{2ni}\left[e^{nix}\int (1-i\tan nx)\ dx - e^{-nix}\int (1+i\tan nx)\ dx\right]$$

$$= \frac{1}{2ni}\left[e^{nix}\left(x - \frac{i}{n}\ln(\sec nx)\right) - e^{-nix}\left(x + \frac{i}{n}\ln(\sec nx)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[x\sin nx - \frac{1}{n}\cos nx\ \ln\ (\sec nx)\right]$$

ii) विशेष समाकल $=\left(\frac{1}{D-2}-\frac{1}{D-1}\right)e^{-x}\sin x$

$$=\frac{1}{D-2}e^{-x}\sin x-\frac{1}{D-1}e^{-x}\sin x$$

$$=e^{2x}\int e^{-2x}e^{-x}\sin x\,dx-e^{x}\int e^{-x}e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=-\frac{e^{-x}}{10}(3\sin x+\cos x)+\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin x+\cos x).$$

$$=\frac{e^{-x}}{10}(\sin x+\cos x).$$

iii) $\frac{2}{9}e^{2x}$

iv) विशेष समाकल $=\frac{1}{(D-2)^2(D+3)}X(x)$

$$=\left[-\frac{1}{25(D-2)}+\frac{1}{5(D-2)^2}+\frac{1}{25(D+3)}\right]X(x)$$

$$=\frac{1}{25}\left[-e^{2x}\int e^{-2x}X(x)\,dx+5e^{2x}\int\left(\int e^{-2x}X(x)\,dx\right)dx\right.$$

$$\left.+e^{-3x}\int e^{3x}X(x)\,dx\right]$$

E4) i) $y=(c_1+c_2x)e^{x}+\frac{4}{3}e^{(5/2)x}$

ii) सहायक समीकरण है :

$$m^2-1=0$$

$$\Rightarrow\quad m=1,-1$$

$$y_c=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$$

विशेष समाकल $=\frac{1}{D^2-1}(e^{x}+1)^2$

$$=\frac{1}{D^2-1}(e^{2x}+1+2e^{x})$$

$$=\frac{1}{D^2-1}e^{2x}+\frac{1}{D^2-1}e^{2x}+\frac{2}{(D+1)(D-1)}e^{x}$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}-1+\frac{1}{D-1}e^{x}$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}-1+xe^{x}$$

$$\therefore\quad y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}+xe^{x}-1$$

iii) दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(D^3-5D^2+7D-3)\ y=e^{2x}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right),\left(\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^{x})$$

$$\Rightarrow\quad (D-1)^2(D-3)y=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^{x})$$

सहायक समीकरण के मूल है :

$m=1,1,3$

$$\therefore\quad y_c=(c_1+xc_2)e^{x}+c_3e^{3x}$$

$$\text{विशेष समाकल}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}e^{3x}+\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}e^{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{D-3}e^{3x}-\frac{1}{2(D-1)^2}e^{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x\,e^{3x}-\frac{1}{4}x^2e^{x}\right]$$

$$\therefore\quad y=(c_1+c_2x)\,e^{x}+c_3e^{3x}+\frac{x}{8}e^{3x}-\frac{x^2}{8}e^{x}$$

iv) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}-xe^{x}$

E5) i) $y=(c_1+c_2x)\cos nx+(c_3+c_4x)\sin nx+\dfrac{1}{(n^2-m^2)^2}\cos mx$

ii) सहायक समीकरण के मूल हैं : $\pm mi,\pm ni$

$$\therefore\ \text{C.F.}=y_c=(c_1\cos mx+c_2\sin mx)+(c_3\cos nx+c_4\sin nx)$$

$$\text{विशेष समाकल}=y_p=\frac{1}{(D^2+m^2)\,(D^2+n^2)}\cos\left\{(m+n)\frac{x}{2}\right\}\cos\left\{(m-n)\frac{x}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{(D^2+m^2)(D^2+n^2)} \frac{1}{2}(\cos mx + \cos nx)$$

$$\left[\text{क्योंकि } \cos A \ \cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B) + \cos(A-B) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-m^2} \frac{1}{D^2+m^2}\cos mx + \frac{1}{m^2-n^2} \ \frac{1}{D^2+n^2}\cos nx \right]$$

$$= \frac{1}{2(n^2-m^2)}\left[\frac{x\sin mx}{2m} + \frac{\cos mx}{4m^2} - \frac{x\sin nx}{2n} - \frac{\cos nx}{4n^2} \right]$$

(समीकरण (65) को देखिए)

$$\therefore y = y_c + y_p = (c_1 \cos mx + c_2 \sin mx) + (c_3 \cos nx + c_4 \sin nx)$$

$$+ \frac{x}{4(n^2-m^2)}\left(\frac{\sin mx}{m} - \frac{\sin nx}{n} \right) + \frac{1}{8(n^2-m^2)}\left(\frac{\cos mx}{m^2} - \frac{\cos nx}{n^2} \right)$$

E6) i) $\text{C.F.} = e^{-(1/2)x} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right]$

$$\text{विशेष समाकल} = \frac{1}{D^2+2D+1} \ \sin 2x$$

$$= \frac{1}{-2^2+D+1}\sin 2x$$

$$= \frac{D+3}{(D-3)\,(D+3)}\sin 2x$$

$$= \frac{D+3}{D^2-9}\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{13}\,(2\cos 2x + 3\sin 2x)$$

$\therefore$ पूर्ण हल है :

$$y = e^{(-1/2)x} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right]$$

$$-\frac{2}{13}\cos 2x - \frac{3}{13}\sin 2x.$$

ii) सहायक समीकरण के मूल निम्न द्वारा दिए जाते हैं :

$$m = \frac{-2n\cos\alpha \pm \sqrt{4n^x \cos^2\alpha - 4n^2}}{2}$$

$$= -n\cos\alpha \pm n\sqrt{\cos^2\alpha - 1}$$

$$= -n\cos\alpha \pm ni\sin\alpha$$

$$\therefore y_c = e^{-(n\cos\alpha)x}[c_1\cos(n\sin\alpha)x + c_2\sin(n\sin\alpha)x]$$

विशेष समाकल $= y_p = \dfrac{1}{D^2 + 2n\cos\alpha D + n^2} a\cos nx$

$$= \frac{a}{-n^2 + 2n\cos\alpha\ D + n^2}\cos nx$$

$$= \frac{a}{2n\cos\alpha}\,\frac{\sin nx}{n}$$

$$\therefore y = e^{-(n\cos\alpha)x}[c_1\cos(n\sin\alpha)x + c_2\sin(n\sin\alpha)x] + \frac{a}{2n^2\cos\alpha}\sin nx$$

E7) i) $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)\ e^x + x^2 + \dfrac{x^3}{6}$

ii) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{4x} + \dfrac{x}{8} + \dfrac{3}{32}$

iii) $C.F = c_1e^x + c_2e^{-2x}$

विशेष समाकल $= \dfrac{1}{D^2 + D - 2}\,2(1 + x - x^2)$

$$= -\left[1 - \frac{D}{2} - \frac{D^2}{2}\right]^{-1}(1 + x - x^2)$$

$$= -\left[1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{2} + \frac{D^2}{4} + \text{कोटि } (D^3) + \ldots\right](1 + x - x^2)$$

$$= -(1 + x - x^2) + \frac{-1}{2}(1 - 2x) - \frac{3}{4}(-2)$$

$$= x^2$$

$\therefore$ पूर्ण हल है : $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + x^2$

iv) $y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$

$$y_p = \frac{1}{D^2(D^2+2D-3)}(x^2 + 3e^{2x} + 4\sin x)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\frac{1}{D^2+2D-3}x^2 + \frac{3}{D^2+2D-3}e^{2x} + \frac{4}{D^2+2D-3}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[-\frac{1}{3}\left[1-\frac{(2D+D^2)}{3}\right]^{-1}x^2 + \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{D-2}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[-\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}D+\frac{7}{9}D^2\right)x^2 + \frac{3}{5}e^{2x} - \frac{2}{5}(\cos x + 2\sin x)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\frac{-x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{14}{27} + \frac{3}{5}e^{2x} - \frac{2}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right]$$

$$= \frac{-x^4}{36} - \frac{2}{27}x^3 - \frac{7}{27}x^2 + \frac{3}{20}e^{2x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x$$

$\therefore\ y = y_c + y_p$ अभिष्ट हल है।

E8) i) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{170}e^{2x}(11\sin x - 7\cos x)$

ii) $y = (c_1 + c_2 x)\, e^x + \frac{1}{4}e^{3x}\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)$

iii) $C.F = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + c_3 e^{-4x}$

विशेष समाकल $= \frac{1}{D^3 - 2D^2 - 19D + 20}\ (xe^x + 2e^{-4x}\sin x)$

$$= e^x \frac{1}{(D+1)^3 - 2(D+1)^2 - 19(D+1) + 20}x$$

$$+ 2e^{-4x}\frac{1}{(D-4)^3 - 2(D-4)^2 - 19(D-4) + 20}\sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D^3 + D^2 - 20D}x + 2e^{-4x}\frac{1}{D^3 - 14D^2 + 45D}\sin x$$

$$= -e^x \frac{1}{20D}\left[1 - \frac{D+D^2}{20}\right]^{-1} x + 2e^{-4x}\frac{1}{-D+14+45D}\sin x$$

$$= -\frac{1}{20} e^x \frac{1}{D}\left[1 + \frac{D}{20} + \text{कोटि } (D^2)\right] x$$

$$+ e^{-4x} \frac{7 - 22D}{(7 - 22D)\,(7 + 22D)} \sin x$$

$$= -\frac{1}{20} e^x \frac{1}{D}\left[x + \frac{1}{20}\right] + e^{-4x}(7 - 22D)\frac{1}{49 + 484} \sin x$$

$$= -\frac{e^x}{20}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{20}\right) + \frac{e^{-4x}}{533}(7\sin x - 22\cos x)$$

$\therefore$ पूर्ण हल है :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + c_3 e^{-4x} - \frac{e^x}{20}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{20}\right)$$

$$+ \frac{e^{-4x}}{533}(7\sin x - 22\cos x)$$

iv) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^x + e^x\left(\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6}\right)$

E9) i) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{x}{2}\sin x + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\cos x$

ii) सहायक समीकरण के मूल $m = 2, 2$ हैं।

$\text{C.F.} = (c_1 + xc_2)e^{2x}$

विशेष समाकल $= \text{Im}\, 8 \frac{1}{(D-2)^2} x^2 e^{(2+2i)x}$

$$= \text{Im}\, 8 e^{(2+2i)x} \frac{1}{(D + 2 + 2i + 2)^2} x^2$$

$$= \text{Im}\, 8 e^{(2+2i)x} \frac{1}{D^2 - 4 + 4iD} x^2$$

$$= \text{Im}\, 8 e^{(2+2i)x} \frac{1}{-4}\left[1 - \frac{(4iD + D^2)}{4}\right]^{-1} x^2$$

$$= \text{Im} \frac{8e^{(2+2i)x}}{-4}\left[1 + iD + \frac{D^2}{4} - D^2\right] x^2$$

$$= \text{Im} - 2e^{(2+2i)x}\left[x^2 + 2xi - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \text{Im} - 2e^{2x}\left(x^2 + 2xi - \frac{3}{2}\right)(\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$= -2e^{2x}\left(x^2 \sin 2x + 2x\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x\right)$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x} + e^{2x}(3\sin 2x - 4x\cos 2x - 2x^2 \sin 2x)$$

iii) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}(\cos x + x\sin x) + \frac{1}{12} x e^x (9 - 3x + 2x^2)$

iv) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{\cos x}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x\right)$

E10) i) $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^2 + (\ln x)^2 x^2$

ii) $y = (c_1 + c_2 \ln x)\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{1-x}$

iii) दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(x^3 D^3 - 4x^2 D^2 + 5xD - 2)\; y = x^3$$

मान लीजिए $z = \ln x$ है तथा D' द्वारा $\frac{d}{dz}$ व्यक्त करने पर दिया हुआ समीकरण निम्न हो जाता है :

$$[D'(D'-1)\,(D'-2) - 4D'\,(D'-1) + 5D' - 2]\; y = e^{3z}$$

$$\Rightarrow \quad (D'^3 - 7D'^2 + 11D' - 2)\; y = e^{3z}$$

$$\therefore \quad C.F = c_2 e^{2z} + e^{(5/2)z}(c_2 e^{(\sqrt{21}/2)z} + c_3 e^{(-\sqrt{21}/2)z})$$

$$= c_1 x^2 + x^{5/2}(c_2 x^{\sqrt{21}/2} + c_3 x^{-\sqrt{21}/2})$$

$$\text{विशेष समाकल} = \frac{1}{(D'-2)\,(D^2 - 5D + 1)} e^{3z}$$

$$= \frac{1}{(3-2)\,(9 - 15 + 1)}\; e^{3z}$$

$$= -\frac{1}{5}e^{3z} = -\frac{x^3}{5}$$

अतः व्यापक हल है : $y = c_1 x^2 + x^{5/2}(c_3 x^{\sqrt{21}/2} + c_3 x^{-\sqrt{21}/2}) - \frac{x^3}{5}$.

iv) दिया हुआ समीकरण है :

$$(x^2 D^2 - xD + 4)y = \cos(\ln x) + \sin(\ln x)$$

मान लीजिए कि $z = \ln x$ तथा D' द्वारा $\frac{d}{dz}$ को व्यक्त करने पर दिया हुआ समीकरण निम्न हो जाता है :

$$[D'(D'-1) - D' + 4]\ y = \cos z + e^z \sin z$$

$$\Rightarrow\ (D'^2 - 2D' + 4)\ y = \cos z + e^z \sin z$$

सहायक समीकरण है :

$$m^2 - 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$C.F = e^z(c_1 \cos\sqrt{3}z + c_2 \sin\sqrt{3}z) = x\left[c_1 \cos\left(\sqrt{3}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{3}\ln x\right)\right]$$

$$\text{विशेष समाकल} = \frac{1}{D'^2 - 2D' + 4}\cos z + \frac{1}{D'^2 - 2D' + 4}e^z \sin z$$

$$= \frac{1}{-1 - 2D' + 4}\cos z + e^z \frac{1}{(D'+1)^2 - 2(D'+1) + 4}\sin z$$

$$= (3 + 2D')\frac{1}{9 - 4D'^2}\cos z + e^z \frac{1}{D'^2 + 3}\sin z$$

$$= (3 + 2D')\frac{1}{9+4}\cos z + e^z \frac{1}{-1+3}\sin z$$

$$= (3 + 2D')\frac{\cos z}{13} + \frac{e^z}{2}\sin z$$

$$= \frac{3}{13}\cos z - \frac{2}{13}\sin z + \frac{1}{2}e^z \sin z$$

$$= \frac{3}{13}\cos(\ln x) - \frac{2}{13}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}x\sin(\ln x)$$

अतः, व्यापक हल है :

$$y = c_1 x\cos(\sqrt{3}\ln x) + c_2 x\sin(\sqrt{3}\ln x) + \frac{3}{13}\cos(\ln x) - \frac{2}{13}\sin(\ln x)$$

$$+ \frac{x}{2}\sin(\ln x).$$

E11) i) दिया हुआ समीकरण है :

$$(2x-1)^2 D^2 + (2x-1)D - 2y = 0$$

मान लीजिए कि $(2x-1) = z$ है तथा D' द्वारा $\frac{d}{dz}$ को व्यक्त करते हैं तब, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x-1} D'y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(2x-1)^2} (D'^2 - D')\ y$$

इन्हें दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$[4(D'^2 - D') + 2D' - 2]\ y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (4D'^2 - 2D' - 2)\ y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2D' - D' - 1)\ y = 0$$

सहायक समीकरण है :

$$2m^2 - m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1, -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ व्यापक हल है : $y = c_1 e^z + c_2 e^{-(1/2)z}$.

$$\Rightarrow \quad y = c_1(2x-1) + c_2(2x-1)^{-1/2}$$

ii) दिया हुआ समीकरण है :

$$[(1+x^2)\ D^2 + (1+x)\ D + 1]\ y = 4\cos\ (\ln(1+x))$$

मान लीजिए कि $1 + x = e^z$ तथा D' द्वारा $\frac{d}{dz}$ को व्यक्त करते हैं तब, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}\ D'y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)^2} D'(D'-1)\ y$$

तब, दिया हुआ समीकरण

$[D'(D'-1)+D'+1]\ y = 4\cos z$ में बदल जाता है।

सहायक समीकरण है :

$$m^2+1=0$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm i$$

$$\therefore \quad C.F = c_1\cos z + c_2\sin z = c_2\cos(\ln(1+x)) + c_2\sin(\ln(1+x))$$

विशेष समाकल $= 4\dfrac{1}{D'^2+1}\cos z = 4\left(\dfrac{z}{2}\sin z + \dfrac{\cos z}{4}\right)$

$$= 2\ln(1+x)\sin(\ln(1+x)) + \cos\ln(1+x)$$

अतः, अभिष्ट हल है :

$$y = c_1\cos(\ln(1+x)) + c_2\sin(\ln(1+x)) + 2\ln(1+x)\sin(\ln(1+x)).$$

E12) हम जानते हैं कि $mg = w$.

$$\Rightarrow \quad m = \frac{w}{g} = \frac{19.6}{9.8} = 2kg.$$

हुक नियम से,

$$19.6 = k\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad k = 39.2\ kg/m.$$

अतः, गति को नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण है :

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -39.2x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 19.6x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = c_1\cos\sqrt{19.6}t + c_2\sin\sqrt{19.6}t$$

प्रारंभिक विस्थापन और प्रारंभिक वेग निम्न द्वारा दिए जाते हैं :

$$x(0) = \frac{2}{3}m.; \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{4}{3}\ m/\sec.$$

द्वितीय प्रतिबंध में ऋण चिन्ह इस तथ्य का परिणाम है कि द्रव्यमान को प्रारंभिक वेग उपरिमुखी दिशा में दिया जाता है। ऊपर दिए आदि प्रतिबंधों के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं :

$$x(0) = \frac{2}{3} = c_1.1 + c_2.0$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{2}{3} \quad \text{तथा} \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad -c_1\sqrt{19.6}\sin\sqrt{19.6t} + c_2\sqrt{19.6}\cos\sqrt{19.6t}\Big|_{t=0} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad c_2\sqrt{19.6} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{-4}{3\sqrt{19.6}}$$

अतः, गति का वर्णन करने वाला फलन है :

$$x(t) = \frac{2}{3}\left(\cos\sqrt{19.6t} - \frac{2}{\sqrt{19.6}}\sin\sqrt{19.6t}\right)$$

E13) i) $x(t) = 3\cos 2t + 4\sin 2t$

मान लीजिए कि $3 = R\cos\delta$ और $4 = R\sin\delta$

तब, $x(t) = R\cos(2t - \delta)$,

$$R = \sqrt{16+9} = 5,\ \delta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right),\ \omega_0 = 2,$$

ii) मान लीजिए कि $-1 = R\cos\delta,\ \sqrt{3} = R\sin\delta$

$$R = 2,\ \tan\delta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \delta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$x(t) = 2\cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

iii) $x(t) = \sqrt{13}\cos(\pi t - \delta)$

$$\delta = \pi + \tan^{-1}(3/2).$$

E14) जब भार को जोड़ा जाता है, तब कमानी की लंबाई में हुई वृद्धि है :

$1.98 - 1 = 0.98m$

हुक नियम से, निष्कर्ष निकलता है कि

$4.9 = k(.98) \Rightarrow \ \mathrm{k} = 5$

साथ ही, $m = \dfrac{4.9}{9.8} = \dfrac{1}{2}\ kg$.

अतः, गति को नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण है :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

$$\therefore \quad x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$

प्रतिबंधों $x(0) = -2, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$ के प्रयोग से, अचर c_1 और c_2 निर्धारित किए जाते हैं।

अब, $x(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2$

तथा $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{2}{3}$

इसी प्रकार, किसी भी समय t पर विस्थापन

$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \frac{2}{3}\sin 3t\right)$ द्वारा प्राप्त हो जाता है।

E15) यहाँ $x_c(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$ तथा

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\sin\gamma t.$$

आदि प्रतिबंधों से प्राप्त होता है :

$c_1 = 0$ और $c_2 = \frac{-\gamma F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}\sin\gamma t$

इस प्रकार, अभीष्ट हल है :

$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}[-\gamma \sin\omega t + \omega \sin\gamma t]$, जबकि $\gamma \neq \omega$.

E16) हमें प्राप्त है :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \sin\omega t$$

$$\therefore \quad C.F. = A\cos\omega_0 t - 1B\sin\omega_0 t, \; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

विशेष समाकल $= \frac{1}{D^2 + \omega_0^2}\frac{F_0}{m}\sin\omega t$

$\omega \neq \omega_0$ के लिए

विशेष समाकल $= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega t$

$$= \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t$$

E17) $g(\gamma) = \dfrac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2) + 4\lambda^2\gamma^2}}$ अधिकतम है

यदि $f(\gamma) = (\omega^2 - \gamma^2) + 4\lambda^2\gamma^2$ न्यूनतम हो

तब, $f'(\gamma) = 0$

$\Rightarrow \quad \gamma = 0$ या $\gamma = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$

अधिकतम और न्यूनतम सिद्धांतों के प्रयोग से, आप जाँच कर सकते हैं कि $\gamma = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$ के लिए $f(\gamma)$ न्यूनतम है।

E18) स्थायी अवस्था हल $q_p(t)$ अवकल समीकरण

$L\dfrac{d^2\gamma}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{c}.q = C_0 \sin \gamma\, t$ का

एक विशेष हल है। अनिर्धारित गुणांक विधि के प्रयाग से, विशेष हल है $q_p(t) = A \sin \gamma t + B \cos \gamma t$

जहाँ, $$A = \frac{E_0\left(\dfrac{1}{c\gamma} - L\gamma\right)}{\gamma\left[L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{c} + \dfrac{1}{c^2\gamma^2} + R^2\right]}$$

$$B = \frac{E_0 R}{\left[L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{c} + \dfrac{1}{c^2\gamma^2} + R^2\right](-\gamma)}$$

तथा $i_p = \dfrac{dq_p}{dt} = \gamma\, [A \cos \gamma\, t - B \sin \gamma\, t]$.

– x –

विविध प्रश्न

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य/लघु उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

   i) समीकरण $yy'' + (y')^2 = 0$ को प्रथम कोटि अवकल समीकरण में समानीत करके हल नही किया जा सकता।

   ii) अंतराल $]0, \pi[$ में समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + (\sin y - 2) = 0$ एक रैखिक अवकल समीकरण है।

   iii) अंतराल $]-\infty, \infty[$ में आदि मान समस्या $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 1$ का हल $y = cx^2 + x + 3$ समस्या का एक अद्वितीय हल है।

   iv) $\{(\ln a)^2 - a^2\}^{-1} a^x$ अवकल समीकरण $(D^2 - a^2)y = a^x$ का एक विशेष हल है।

   v) प्रतिबंधों $x = 0,\ y = 1$ और $y' = -1$ को संतुष्ट करने वाले अवकल समीकरण $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ का हल $(1 - x)e^{-x}$ है।

2. बताइए कि दिए गए अंतरालों में निम्नलिखित फलन रैखिकतः परतंत्र हैं या रैखिकतः स्वतंत्र।

   i) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x - 1,\ f_3(x) = x + 3;\ ]-\infty, \infty[$

   ii) $f_1(x) = 1 + x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2;\ ]-\infty, \infty[$

   iii) $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{-x},\ f_3(x) = e^{4x};\ ]-\infty, \infty[$

   iv) $f_1(x) = \tan x,\ f_2(x) = \cot x;\ ]0, \pi/2[$

   v) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x \ln x,\ f_3(x) = x^2 \ln x;\ ]0, \infty[$

3. दिखाइए कि निम्नलिखित अवकल समीकरणों के लिए निदर्शित अंतराल में दिए गए फलन अवकल समीकरण हलों का मूलभूत समुच्चय बनाते हैं। समीकरणों के व्यापक हल भी लिखिए।

   i) $y'' - 2y' + 5y = 0;\ e^x \cos 2x,\ e^x \sin 2x,\ ]-\infty, \infty[$

   ii) $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0;\ x^3,\ x^4,\ ]0, \infty[$

   iii) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0;\ x,\ x^{-2},\ x^{-2}\ln x,\ ]0, \infty[$

4. अवकल समीकरण $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ लीजिए।

   i) जॉच कीजिए कि अतंराल $]-\infty, \infty[$ में $y_1(x) = x^3$ और $y_2(x) = |x|^3$ अवकल समीकरण के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं।

ii) दिखाइए कि सभी वास्तविक संख्याओं के लिए $W(y_1, y_2) = 0$.

iii) क्या भाग ii) का परिणाम इकाई 10 के प्रमेय 4 का खडंन करता है?

iv) जॉच कीजिए कि $Y_1 = x^3$ और $Y_2 = x^2$ भी अतंराल $]-\infty, \infty[$ में अवकल समीकरण के रैखिकतः स्वतत्र हल है।

v) $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ को संतुष्ट करने वाले समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

vi) अध्यारोपण-नियम के अनुसार दोनों ही रैखिक संयोजन $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ और $y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$, जहाँ c_1, c_2 अचर हैं, अवकल समीकरण के हल हैं। क्या इनमें से एक, या दोनों या दोनों ही नहीं, अंतराल $]-\infty, \infty[$ में अवकल समीकरण के हल होंगे?

5. निम्नलिखित अवकल समीकरणों के जॉच हल के रूप लिखिए।

i) $y''' - y' = 4e^x + 3e^{2x}$

ii) $y^{iv} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x}\sin x$

iii) $y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$

iv) $y'' - y = e^x(2 + 3x\cos 2x)$

6. प्राचल विचरण विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए।

i) $x^2y'' - 4x^2y' + 4x^2y = e^{2x},\ x > 0$

ii) $y'' - y = \dfrac{2}{1+e^x}$

iii) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$

iv) $y'' + y = 4x\sin x$

v) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

7. कोटि लघुकरण विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कीजिए।

i) $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

ii) $y'' - y = e^x$

iii) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

iv) $y'' - 3(\tan x)y' = 0$

v) $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$

8. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए।

i) $x^4 y''' + 2x^3 y'' - x^2 y' + xy = x^2 + 1$

ii) $yy'' + (y')^2 - 2y(y')^3 = 0$

iii) $y'' - 2y' + y = xe^x \sin x$

iv) $(1+x^2)y'' + (1+x)y' + y = 4\cos\{\ln(1+x)\},\ 1+x > 0$

v) $x^2 y'' - 2xy' - 4y = x^2 + 2\ln x,\ x > 0$

vi) $xy'' + y' = 0$.

9. m kg वाले एक द्रव्यमान पर p न्यूटन का एक अचर बल लगने से द्रव्यमान t सेकण्ड में x मीटर की दूरी तय करता है और उसका वेग v मीटर प्रति सेकण्ड हो जाता है। दिखाइए कि $x = \frac{mv^2}{2gp} = \frac{gt^2 p}{2m}$, जहॉं g गुरूत्व के कारण त्वरण है।

10. एक स्टील की गेंद को जिसका वजन 39.2 कि ग्रा है एक कमानी से जोड़ने पर उसकी प्राकृतिक लंबाई में 2 मीटर की वृद्धि हो जाती है। गेंद को विरामावस्था से 0.5 मीटर की ऊँचाई से विस्थापित करके शून्य आदि वेग के साथ गतिमान किया गया। यह मानकर कि वायु प्रतिरोध नहीं है, किसी भी समय t पर गेंद की गति का व्यजंक प्राप्त कीजिए।.

11. एकसमान भारित (W कि.ग्रा./मी.) एक धरन जिसका एक छोर स्थिर है और दूसरे छोर पर तनन बल P लग रहा है, अवकल समीकरण

$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Py - \frac{1}{2}Wx^2$, को सतुंष्ट करती है, जहाँ E प्रत्यास्थता गुणांक और I जड़त्व आघूर्ण है। दिखाइए कि प्रतिबंधों $x = 0$ पर $y = 0$ और $\frac{dy}{dx} = 0$ के अधीन प्रत्यास्थ वक्र निम्नलिखित समीकरण द्वारा प्राप्त होता है:

$$y = \frac{W}{Pn^2}(1 - \cosh nx) + \frac{Wx^2}{2P},\ \text{जहाँ}\ n^2 = \left(\frac{P}{EI}\right).$$

12. एक विद्युत परिपथ में 1 हेनरी का प्रेरक, 12 ओम का प्रतिरोधक, 0.01 फैरड का संधारित्र और वोल्टता $E(t) = 24\sin 10t$ वाला एक उत्पादक लगा हुआ है। परिपथ में किसी भी समय t पर आवेश q और धारा i ज्ञात कीजिए, यदि $t = 0$ पर $q = 0$ और $i = 0$ हो।

विविध प्रश्नों के हल / उत्तर

1. i) गलत, दिए गए समीकरण को प्रथम कोटि समीकरण में समानीत किया जा सकता है। $y' = p$ रखने पर समीकरण $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$ हो जाता है जो कि प्रथम कोटि अवकल समीकरण है और जिसे चर पृथक्करण विधि से हल किया जा सकता है।

ii) गलत, पद $\sin y$ होने की वजह से समीकरण अरैखिक है।

iii) गलत, क्योंकि $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का गुणांक x^2 है जो अंतराल $]-\infty, \infty[$ में $x = 0$ पर शून्य हो जाता है।

iv) सही, a^x को $e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$ के रूप में लिख सकते हैं और फिर

$$\frac{1}{D^2 - a^2} e^{x\ln a} = \frac{1}{(\ln a)^2 - a^2} e^{x\ln a}.$$

v) गलत, $y = (1+x)e^{-2x}$.

2. i) रैखिकतः परतंत्र

ii) रैखिकतः स्वतंत्र

iii) रैखिकतः स्वतंत्र, अंतराल $]-\infty, \infty[$ में $W(e^x, e^{-x}, e^{4x}) = -30e^{4x} \neq 0$

iv) रैखिकतः स्वतंत्र

v) रैखिकतः स्वतंत्र

3. i) दिए गए फलन अवकल समीकरण को संतुष्ट करते हैं और रैखिकतः स्वतंत्र हैं क्योंकि

$W(e^x \cos 2x, e^x \sin 2x) = 2e^{2x} \neq 0$

$y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$ समीकरण का व्यापक हल है।

ii) फलन समीकरण को संतुष्ट करते हैं व रैखिकतः स्वतत्र हैं क्योंकि

$W(x^3, x^4) = x^6 \neq 0,\ y = c_1 x^3 + c_2 x^4.$

iii) फलन समीकरण को संतुष्ट करते हैं व रैखिकतः स्वतत्र हैं क्योंकि

$W(x, x^{-2}, x^{-2}\ln x) = 9x^{-6} \neq 0;\ y = c_1 x + c_2 x^{-2} + c_3 x^{-2}\ln x.$

4. i) दोनों फलनों y_1 और y_2 के ग्राफ से पता चलता है कि कोई भी फलन दूसरे फलन का अचर गुणज नहीं है। $x \geq 0,$ के लिए $y_1 = x^3 y_2 = x^3$ समीकरण को संतुष्ट करते हैं और $x < 0$ के लिए $y_1 = x^3$ और $y_2 = -x^3$ समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

ii) $x \geq 0,$ के लिए $W(y_1,\ y_2) = 3x^5 - 3x^5 = 0$

$x < 0,$ के लिए $W(y_1,\ y_2) = -3x^5 + 3x^5 = 0$

अतः x के सभी वास्तविक मानों के लिए $W(y_1,\ y_2) = 0$.

iii) नहीं, $x = 0$ पर $a_2(x) = x^2$ शून्य है।

iv) $Y_1\ Y_2$ भी समीकरण को संतुष्ट करते हैं और रैखिकतः स्वतंत्र हैं क्योंकि $W(x^3,\ x^2) = -x^4$, अतः $Y_1\ Y_2$ दिए हुए अंतराल में समीकरण के हल है।

v) $Y_1 = x^3, Y_2 = x^2$ या $y_2 = |x|^3$

vi) दोनों ही नहीं। व्यापक हल के लिए अंतराल के सभी x के लिए $a_2(x) \neq 0$ होना चाहिए। रैखिक संयोजन $y = c_1Y_1 + c_2Y_2$ अंतराल $]0\ ,\infty[$ पर अवकल समीकरण का व्यापक हल होगा।

5. i) $y_p = Ae^{2x} + (B + Cx)e^{-x}$

ii) $y_p = Ae^x + (Bx + C)e^{-x} + xe^{-x}(D\cos x + E\sin x)$

iii) $y_p = x(A_0x + A_1) + B\cos x + C\sin x + Exe^{-2x}$

iv) $y_p = Axe^x + Be^x\cos 2x + Ce^x\sin 2x + Exe^x\cos 2x + Fxe^x\sin 2x$

6. i) दिए गए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}/x^2$$

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$$

$$y_p = V_1e^{2x} + V_2xe^{2x}$$

$$V_1 = \int \frac{(-xe^{2x})e^{2x}}{x^2e^{4x}}\ dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x$$

$$V_2 = \int \frac{e^{2x}.e^{2x}}{x^2e^{4x}}\ dx\ = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}$$

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} - e^{2x}\ln x - e^{2x}$$

ii) $y_c = Ae^x + Be^{-x}$

$$y_p = V_1(x)e^x + V_2(x)e^{-x}$$

$$V_1(x) = \int \frac{1}{2}\frac{2}{1+e^x}e^{-x}dx = \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = -e^{-x} + \ln(1+e^{-x})$$

$$V_2(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln(1+e^x)$$

$$y = y_c + y_p$$

iii) $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \dfrac{x^4e^{-x}}{12}$

iv) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - x^2\cos x + x\sin x$

v) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \dfrac{1}{4}x^2e^{-x}(2\ln x - 3)$

7. i) संगत सहायक समीकरण है

$$y'' + y = 0$$

$y_1 = \sin x$ इसका एक हल है।

मान लीजिए $y = V(x)\sin x$. तब दिया गया समीकरण निम्न हो जाता है

$$V''\sin x + 2V'\cos x - V\sin x + V\sin x = \operatorname{cosec} x$$

$$\Rightarrow \; V''\sin x + 2V'\cos x = \operatorname{cosec} x$$

$$\Rightarrow \; V'' + 2V'\cot x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$w = V'$ लेने से ऊपर दिया समीकरण निम्न हो जाता है

$$w' + 2w\cot x = \operatorname{cosec}^2 x \text{ (रैखिक समीकरण)}$$

$$\therefore \; we^{\int 2\cot x dx} = \int e^{\int 2\cot x dx}\operatorname{cosec}^2 x dx + c_1$$

$$\Rightarrow \; w\sin^2 x = x + c_1$$

$$\Rightarrow \; V' = x\operatorname{cosec}^2 x + c_1\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\Rightarrow \; V = -\cot x + \ln|\sin x| + c_1(-\cot x) + c_2$$

$$\Rightarrow \; y = -x\cos x - c_1\cos x + c_2\sin x + \sin x\ln|\sin x|$$

ii) $y_1 = e^x$ दिए गए समीकरण का एक हल है।

$y = Ve^x$ लेने से हम पाते हैं :

$$V'' + 2V' = 1$$

$\Rightarrow \; w' + 2w = 1$ ($w = V'$ लेने पर)

$$\Rightarrow \; we^{\int 2dx} = \int e^{\int 2dx} dx + c_1$$

$$\Rightarrow \; we^{2x} = \frac{e^{2x}}{2} + c_1$$

$$\Rightarrow \; V' = \frac{1}{2} + c_1 e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \; V = \frac{x}{2} - \frac{c_1}{2} e^{-2x} + c_2$$

$$\Rightarrow \; y = \frac{xe^x}{2} - \frac{c_1}{2} e^{-x} + c_2 e^x$$

iii) $y = c_1(x^2 + x^3) + c_2 x^2$

iv) $y = c_1 + \frac{c_2}{2}[\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|]$

v) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{5}{2} e^{3x}$

8. i) दिए गए समीकरण को x से विभाजित करने पर हम पाते हैं :

$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = x + x^{-1}$

जे कि आयँलर रूप में है।

$x = e^z$ रखने पर समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$[D(D-1)(D-2) + 2D(D-1) - D + 1]y = e^z + e^{-z} \left[D = \frac{d}{dz} \right]$$

$$\Rightarrow \; (D-1)^2 (D+1) y = e^z + e^{-z}$$

सहायक समीकरण है: $(m-1)^2 (m+1) = 0 \Rightarrow m = 1, 1, -1$

$$\therefore \; C.F. = (c_1 + c_2 z)e^z + c_3 e^{-z}$$

$$= (c_1 + c_2 \ln x)x + c_3 x^{-1}$$

विशेष समाकल $= \dfrac{1}{(D-1)^2 (D+1)} (e^z + e^{-z})$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)^2} e^z + \frac{1}{4} \frac{1}{D+1} e^{-z}$$

$$=\frac{e^z}{2}\frac{1}{D^2}(1)+\frac{e^{-z}}{4}\frac{1}{D}(1)=\frac{z^2e^z}{4}+\frac{3e^{-z}}{4}=\frac{2(\ln x)^2}{4}+\frac{x^{-1}\ln x}{4}$$

$\therefore\ y = C.F. +$ विशेष समाकल

ii) $yy'' + (y')^2 - 2y(y')^3 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$\therefore\ yp\frac{dp}{dy} + p^2 - 2yp^3 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = 2p^2$$

मान लीजिए $\dfrac{1}{p} = w \Rightarrow -\dfrac{1}{p^2}\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{dw}{dy}$

तब $\dfrac{1}{p^2}\dfrac{dp}{dy} + \dfrac{1}{py} = 2 \Rightarrow \dfrac{dw}{dy} - \dfrac{w}{y} = -2$

$$\Rightarrow\ we^{-\int\frac{dy}{y}} = \int e^{-\int\frac{dy}{y}}(-2)dy + c_1 \Rightarrow \frac{w}{y} = -2\int\frac{dy}{y} + c_1$$

$$\Rightarrow\ w = -2y\ln y + c_1 y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -2y\ln y + c_1 y$$

$$\Rightarrow\ x = -2\int y\ln y\,dy + c_1\int y\,dy$$

$$\Rightarrow\ x = -2\left(y^2\frac{\ln y}{2} + \frac{y^2}{4}\right) + c_1\frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ x = y^2\left(\frac{c_1+1}{2}\right) - y^2\ln y$$

iii) $y'' - 2y' + y = xe^{2x}\sin x$

$C.F. = c_1e^x + xc_2e^x$

विशेष समाकल $= \dfrac{1}{(D-1)^2}xe^x\sin x = e^x\dfrac{1}{(D+1-1)^2}x\sin x$

$$= e^x\frac{1}{D^2}x\sin x$$

$$= e^x\frac{1}{D}(-x\cos x + \sin x) = (-x\sin x - x\cos x - \cos x)e^x$$

$y = C.F. +$ विशेष समाकल

iv) दिए गए समीकरण में $\ln(1+x) = z$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$(1+x)\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz},\ (1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}$$

तब दिया हुआ समीकरण निम्न हो जाता है:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+y=4\cos z$$

$$y_c=c_1\cos z+c_2\sin z$$

$$y_p=4\frac{1}{D^2+1}\cos z=2z\sin z$$

$$y=c_1\cos(\ln(1+x))+c_2\sin(l(1+x))+2\ln(1+x)\sin(\ln(1+x))$$

v) $x^2y''-2xy'-4y=x^2+2\ln x,\ x>0$

$x=e^z$, लेने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$(D^2-3D-4)y=e^{2z}+2z$$

$$C.F.=c_1e^{-z}+c_2e^{4z}=c_1\frac{1}{x}+c_2x^4$$

$$y_p=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{6}x^2$$

vi) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0$

मान लीजिए $\dfrac{dy}{dx}=p$, तब $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$. दिया हुआ समीकरण हो जाता है: $x\dfrac{dp}{dx}+p=0$

$$\Rightarrow\ \frac{dp}{dx}+\frac{1}{x}p=0$$

$$\Rightarrow\ p=\frac{dy}{dx}=c_1e^{-\ln x}=\frac{c_1}{x}$$

$$\Rightarrow\ y=c_1\ln x+c_2$$

9. न्यूटन के द्वितीय नियम से गति समीकरण है :

$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=pg$ जहाँ $t=0$ पर $x=0,\dfrac{dx}{dt}=0$

m की प्रारंभिक स्थिति मूल बिंदु पर ली गयी है। गति समीकरण का समाकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = \frac{pg}{m}t + c$$

$t = 0$ पर $\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow c = 0$

$$\therefore \ \frac{dx}{dt} = \frac{pg}{m}t$$

दोबारा समाकलित करने पर हम पाते हैं :

$$x = \frac{pg}{m}\frac{t^2}{2} + c_1$$

$t = 0$ पर $x = 0 \Rightarrow c_1 = 0$, अतः $x = \frac{pgt^2}{2m}$

$v = \frac{dx}{dt}$, के पदों में गति समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$mv\frac{dv}{dx} = pg$, $t = 0$ पर $v = 0$

समाकलित करने पर हम पाते हैं $mv^2 = 2pgx + c_2$

$$t = 0, v = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\therefore \ x = \frac{mv^2}{2pg} = \frac{pgt^2}{2m}.$$

10. गति समीकरण है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

जहाँ m द्रव्यमान है, k कमानी-स्थिरांक है, $F(t)$ बाह्य बल है और a अवमदंक अचर है।

$F(t) = 0$, क्योंकि कोई बाह्य बल नहीं है।

वायु प्रतिरोध न होने के कारण $a = 0$

तथा $m = \frac{w}{g} = \frac{39.2}{9.8} = 4$

और $w = 39.2 = 2k \Rightarrow k = 19.6$

गति समीकरण निम्न में समानीत हो जाता है:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4.9x=0$$

$$\Rightarrow \quad x(t)=c_1\cos\sqrt{4.9}\,t+c_2\sin\sqrt{4.9}\,t$$

$$x(0)=-\frac{1}{2}\Rightarrow c_1=-\frac{1}{2} \text{ and } \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0\Rightarrow c_2=0$$

$$\therefore \quad x(t)=-\frac{1}{2}\cos\sqrt{4.9}\,t$$

11. $$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{P}{EI}=0\Rightarrow C.F.\;=c_1e^{nx}+c_2e^{-nx},\; n^2=\frac{P}{EI}$$

$$y_p=\frac{1}{D^2-n^2}\left(\frac{-W}{2EI}x^2\right)=\frac{W}{2n^2EI}\left(1-\frac{D^2}{n^2}\right)^{-1}x^2=\frac{W}{2n^2EI}\left(x^2+\frac{2}{n^2}\right)$$

$$\therefore \quad y=c_1e^{nx}+c_2e^{-nx}+\frac{W}{2n^2EI}\left(x^2+\frac{2}{n^2}\right),\; n^2=\frac{P}{EI}$$

आदि प्रतिबंधों के प्रयोग से $x=0$ पर $\frac{dy}{dx}=0$ और हम पाते हैं $c_1=c_2$

$x=0,\ y=0$ से हम पाते हैं $c_1=c_2=\frac{-W}{2n^2P},\ P=n^2EI$

$$\therefore \quad y=\frac{-W}{2n^2P}(e^{nx}+e^{-nx})+\frac{W}{2P}\left(x^2+\frac{2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{W}{n^2P}(1-\cosh nx)+\frac{Wx^2}{2P},\; n^2=\frac{P}{EI}$$

12. विद्युत प्रवाह को नियन्त्रित करने वाला समीकरण है :

$$1.\frac{d^2q}{dt^2}+12\frac{dq}{dt}+\frac{1}{0.01}q=24\sin 10t$$

या $$\frac{d^2q}{dt^2}+12\frac{dq}{dt}+100\,q=24\sin 10t$$

$$\text{C.F}=e^{-6t}(c_1\cos 8t+c_2\sin 8t)$$

$$y_p=24\frac{1}{D^2+12D+100}\sin 10\,t$$

$$= 24\frac{1}{-100+12+100}\sin 10t = 24\frac{1}{12D}\sin 10t$$

$$= -\frac{1}{5}\cos 10t$$

$$\therefore \quad q = e^{-6t}(c_1\cos 8t + c_2\sin 8t) - \frac{1}{5}\cos 10t$$

आदि प्रतिबंधों द्वारा $c_1 = \frac{1}{5}$ और $c_2 = \frac{3}{20}$

$$\therefore \quad q = \frac{e^{-6t}}{20}(4\cos 8t + 3\sin 8t) - \frac{1}{5}\cos 10t$$

धारा $i = \frac{dq}{dt} = \frac{-5}{2}e^{-6t}\sin 8t + 2\sin 10t$

– x –

शब्दावली

असमघात	Non-homogeneous
आदिमान समस्या	initial value problem
पूर्ण हल	complete solution
समघात	homogeneous
व्यापक हल	general solution
विशेष समाकल	particular integral
रैखिकतः स्वतंत्र	linearly independent
रैखिकतः परतंत्र	linearly dependent
समानीत	reduced
समानयन	reduction
रासकियन	Wronskian
प्राचल	parameter
ऑयलर सूत्र	Euler's formula
अनिर्धारित गुणांक	undetermined coefficients
जाँच हल	trial solution
ज्यावक्रीय फलन	sinusoidal function
पुनरावर्ती	repeated
अध्यारोपण नियम	superposition principle
संगत	corresponding
सहायक समीकरण	auxiliary equation
चरघातांकी	exponential
व्यवरोध	constraints
पूरक फलन	complementary function
पूर्ण समाकल	complete integral
लघुकरण कोटि	reduction of order
प्राचल विचरण	variation of parameters
संकारक	operator
व्यापक विधि	general method
लघु विधि	short cut method
रूपांतरण	transformation
प्रतिलोम	inverse
बहुपद	polynomial
संमिश्र मूल	complex roots
संयुग्मी	conjugate
समाकलन गुणक	integrating factor
संकार्य	operand
संकारक	operator

अति अवमंदित	overdamped
अनवमंदित	undamped
अनुनाद	resonance
अवमंदित	damped
आवर्ती गति	periodic motion
आवर्तक कल्प	quasi-period
आवृत्ति कल्प	quasi-frequency
कला कोण	phase angle
कोणीय आवृत्ति	angular frequency
क्राँतिकतः अवमंदित	critically damped
गति	moion
गुरुत्व	gravity
धारिता	capacitance
क्षणिक हल	transient solution
न्यून अवमंदित	underdermaped
द्रव्यमान	mass
परिपथ	circuit
प्रणोदित कंपन	forced vibration
प्रत्यानयन बल	restoring force
प्रतिरोध	resistance
प्रेरकत्व	inductance
बाह्य बल	external force
सरल आवर्त	simple harmonic
मुक्त गति	force motion
विस्पंद	leat
व्युत्क्रम धारिता	elastance
सरल आवर्त	simple harmonic
स्थायी अवस्था	steady-state