इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-132
अवकल समीकरण

खंड

4

प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ
विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
शिव नाडर विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पुणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन.आई.एस.ई.आर., भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई.आई.एस.ई.आर.,
मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई.आई.टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य
विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू
डॉ. दीपिका
श्री पवन कुमार
प्रो. पूर्णिमा मित्तल
प्रो. परवीन सिंक्लेयर
प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. एस. वेंकटारमन

*पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. ओ.पी. भूटानी (सेवानिवृत्त)
आई.आई.टी., दिल्ली (संपादक)

प्रो. पूर्णिमा मित्तल
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयक : प्रो. पूर्णिमा मित्तल तथा प्रो. सुजाता वर्मा

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन.सी.ई.आर.टी.

प्रो. पूर्णिमा मित्तल
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

आभार: प्रो. परवीन सिंक्लेयर, डॉ. दीपिका और श्री पवन कुमार को पांडुलिपि पर सुझाव के लिए।

खंड मुद्रण

श्री सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
विज्ञान विद्यापीठ, इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

नवम्बर, 2018

ISBN : 978-93-88498-50-0

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय, मैदानगढ़ी, नई दिल्ली–110 068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in से प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. महेंद्र सिंह नाथावत, निदेशक (विज्ञान विद्यापीठ) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेजर कम्पोजिंग : राजश्री कम्प्यूटर्स, वी-166ए, भगवती विहार (नजदीक सेक्टर 2, द्वारका), उत्तम नगर, नई दिल्ली-110059

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली–110002

खंड 4 प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण

खंड 2 और 3 में, हमनें अपनी चर्चा साधारण अवकल समीकरणों (ODEs) तक सीमित रखी थी। इन समीकरणों में एक आश्रित चर और एक स्वतंत्र चर होता है। परंतु कुछ ऐसी भौतिक स्थितियां भी होती हैं, जिनको नियंत्रित करने वाले अवकल समीकरण युगपत् समीकरण या संपूर्ण अवकल समीकरण या आंशिक अवकल समीकरण हो सकते हैं, जिनमें एक से अधिक स्वतंत्र चर या एक से अधिक आश्रित चर होते हैं। उदाहरण के लिए, एक लंबे विद्युतरोधी केबल में विद्युत प्रवाह को नियंत्रित करने वाले विसरण/उष्मा समीकरण, केबल पर उच्च-आवृत्ति परिघटनाओं से संबंधित तरंग समीकरण, इत्यादि आंशिक अवकल समीकरण हैं।

सन् 1769 में, एक इतालवी गणितज्ञ लग्रांज (1736-1813) ने रैखिक प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात करने की विधि प्रस्तुत की। उसने प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरणों के समाकलों को पूर्ण समाकल, व्यापक समाकल और विचित्र समाकल के रूप में भी वर्गीकृत किया। प्रथम कोटि अरैखिक आंशिक अवकल समीकरणों की स्थिति में, पूर्ण समाकल का श्रेय आंशिक रूप से लग्रांज को जाता है। लग्रांज के परिणामों को बाद में पूर्ण रूप देने का कार्य एक फ्रांसीसी गणितज्ञ चार्पिट ने 1784 में किया।

खंड 2 और 3 में, आपने इस ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि साधारण अवकल समीकरणों के समाकल समतल वक्र होते हैं, परंतु आंशिक अवकल समीकरणों की स्थिति में, ये हल आकाश-वक्र या पृष्ठ हो सकते हैं। इन समीकरणों को हल करने की विधियों को समझने के लिए तथा इन हलों की व्याख्या करने के लिए, आकाश-वक्रों और पृष्ठों की जानकारी आवश्यक है। इस बात को ध्यान में रखते हुए, हमने इस खंड को चार इकाइयों में बांटा है।

इकाई 14, जो इस खंड की प्रथम इकाई है, को हमने संक्षिप्त रूप से दो ज्यामितीय वस्तुओं, जैसे आकाश में वक्रों और पृष्ठों की चर्चा से प्रारंभ किया है। इस इकाई में, आकाश में कुछ सरल वक्रों और पृष्ठों के प्राचल निरूपणों, एक और दो प्राचल पृष्ठ कुल के अन्वालोप, अभिलक्षणिक वक्रों और अभिलक्षणिक बिंदुओं से भी परिचित कराया गया है। इस इकाई में हमने युगपत अवकल समीकरणों के उद्गम और निर्माण को प्रस्तुत किया है। युगपत अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों की चर्चा की गई है तथा इन्हें उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट किया गया है। इसी इकाई में, युगपत अवकल समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों, जैसे कि एक दिए हुए पृष्ठ पर वक्रों के निकाय की लंबकोणीय संछेदी (orthagonal trajectory) प्रावस्था-आकाश और वैद्युत परिपथों में कण-गति की भी चर्चा की गई है।

इकाई 15 में, हमने प्रथम कोटि के संपूर्ण अवकल समीकरणों को परिभाषित किया है। हमने मुख्यतः तीन चरों वाले संपूर्ण अवकल समीकरणों पर केन्द्रित किया है। उनके समाकलनीयता प्रतिबंध दिए हैं तथा जब वे समाकलनीय हैं तब उनको हल करने की विभिन्न विधियां दी गई हैं।

इकाई 16 में प्रथम कोटि के रैखिक आंशिक अवकल समीकरणों का अध्ययन किया गया है। इस इकाई का प्रारंभ हमनें प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों के उद्गम के बारे में जानकारी देते हुए किया है। हमने विभिन्न स्थितियों की चर्चा की है तथा उन्हें स्पष्ट किया है, जिनसे प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं। प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों को रैखिक, सामि-रैखिक, रैखिक कल्प तथा अरैखिक आंशिक अवकल समीकरणों में वर्गीकृत करने के बाद, हमने प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों के विभिन्न प्रकार के हलों/समाकलों की चर्चा की है तथा इन विभिन्न समाकलों के बीच संबंध प्रदान किया है।

इकाई 17, जो इस खंड की अंतिम इकाई है, में प्रथम कोटि के रैखिक और अरैखिक आंशिक अवकल समीकरणों के हलों को ज्ञात करने की विधियां दी गई हैं। प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने की लग्रांज विधि की चर्चा की गई है तथा इसे विभिन्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है। प्रथम कोटि के अरैखिक आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने के लिए हमने चार्पिट विधि की चर्चा की है। यहां हमने प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों के सुसंगत निकायों को भी परिभाषित किया है तथा उन प्रतिबंधों को प्राप्त किया है, जिनके अंतर्गत दो निकाय सुसंगत होते हैं।

संकेत और प्रतीक

$D^n y$ जहाँ $D=\dfrac{d}{dx}$	:	x के सापेक्ष y का nवीं कोटि अवकलज
$f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}$	:	D में n वीं कोटि बहुपद या nवीं कोटि रैखिक
$+\cdots+a_{n-2}D^2+a_{n-1}D+a_n$	:	अवकल संकारक
$W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$	:	n फलनों $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ का रांसकियन
C.F.	:	पूरक फलन
P.I.	:	विशेष समाकल
l.h.s.	:	बायाँ पक्ष
r.h.s.	:	दायाँ पक्ष
kg.	:	किलोग्राम
m.	:	मीटर
sec.	:	सेकंड
cm.	:	सेंटिमीटर
E	:	विद्युत वाहक बल
R	:	प्रतिरोध
L	:	प्रेरकत्व
C	:	धारिता
q	:	आवेश
i	:	धारा

ग्रीक वर्णमाला

σ	सिग्मा
ζ	ज़ीटा
ε	एप्सिलॉन
τ	टाओ
π	पाई
ω	ओमेगा
δ	डेल्टा
ξ	ज़ाई

इकाई 14

युगपत् अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

14.1 प्रस्तावना

अभी तक खंड 2 और 3 में आपने साधारण अवकल समीकरणों, अर्थात् एक स्वतंत्र चर और एक आश्रित चर वाले समीकरणों का अध्ययन किया है। आपने यह अवश्य ध्यान दिया होगा कि साधारण अवकल समीकरणों के हल समतल वक्र होते हैं (इकाई 6 का भाग 6.4 देखिए)। आपको याद होगा कि इकाई 6 में हमने आपको संपूर्ण अवकल समीकरणों, अर्थात् $Pdx+Qdy+Rdz=0$ के रूप के समीकरणों से परिचित कराया था। इन समीकरणों में एक स्वतंत्र चर तथा एक से अधिक आश्रित चर होते हैं। इसी प्रकार के अन्य समीकरण युगवत् अवकल समीकरण होते हैं। हम इस इकाई में युगपत अवकल समीकरणों का तथा इकाई 15 में संपूर्ण अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे। $f(x, y, z, z_x, z_y)=0$ के प्रकार के आंशिक

अवकल समीकरणों, जिनमें एक अश्रित चर और एक से अधिक स्वतंत्र चर होते हैं, की चर्चा इकाई 16 में की जाएगी। आप देखेंगे कि इन सभी अवकल समीकरणों के हल आकाश वक्र और पृष्ठ होते हैं। ऐसे समीकरणों को हल करने की विधियों को समझने के लिए तथा उनके हलों की व्याख्या करने के लिए, त्रिविमीय आकाश में वक्रों और पृष्ठों की जानकारी होना आवश्यक है। इसी को ध्यान में रखते हुए, हम इस इकाई का प्रारंभ भाग 14.2 में दो ज्यामितीय वस्तुओं, अर्थात् आकाश में वक्रों और पृष्ठों, की चर्चा द्वारा करेंगे। भाग 14.3 में, हम युगपत् अवकल समीकरणों के निर्माण को लेंगे तथा भाग 14.4 में इन समीकरणों को हल करने की विधियों की चर्चा करेंगे। अंत में, भाग 14.5 में, हम ज्यामिति और गणितीय भौतिकी में युगपत् अवकल समीकरणों के कुछ रोचक अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- ❖ आकाश वक्रों के समीकरणों की पहचान कर सकेंगे;
- ❖ पृष्ठ के समीकरण को पहचान सकेंगे तथा पृष्ठ, वक्र और बिंदु के बीच के संबंध को पहचान सकेंगे;
- ❖ एक प्राचल और दो प्राचल पृष्ठ-कुल के अन्वालोप, अभिलक्षणिक वक्र तथा अभिलक्षणिक बिंदु के अर्थ का कथन दे सकेंगे;
- ❖ युगपत् अवकल समीकरणों के उद्‌गम का वर्णन कर सकेंगे;
- ❖ यह बता सकेंगे कि युगपत अवकल समीकरणों का हल समुच्चय दो प्राचल आकाश वक्र-कुल होता है;
- ❖ युगपत् अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों का प्रयोग कर सकेंगे; और
- ❖ एक दिए हुए पृष्ठ पर वक्रों के निकाय की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कर सकेंगे।

14.2 आकाश में वक्र और पृष्ठ

इस भाग में, हम संक्षिप्त रूप से दो ज्यामितीय वस्तुओं, अर्थात् वक्रों और पृष्ठों के बारे में चर्चा करेंगे।

आइए, सबसे पहले आकाश वक्रों पर विचार करें।

हम आकाश वक्रों के कुछ सरल उदाहरण लेकर प्रारंभ करते हैं।

आकाश में सरलतम वक्र एक सरल रेखा है। एक दिए हुए बिंदु $P_0(x_0, y_0, z_0)$ से होकर जाने वाली तथा OX, OY और OZ से क्रमशः कोण α, β, γ बनाने वाली सरल रेखा (देखिए चित्र 1) का समीकरण

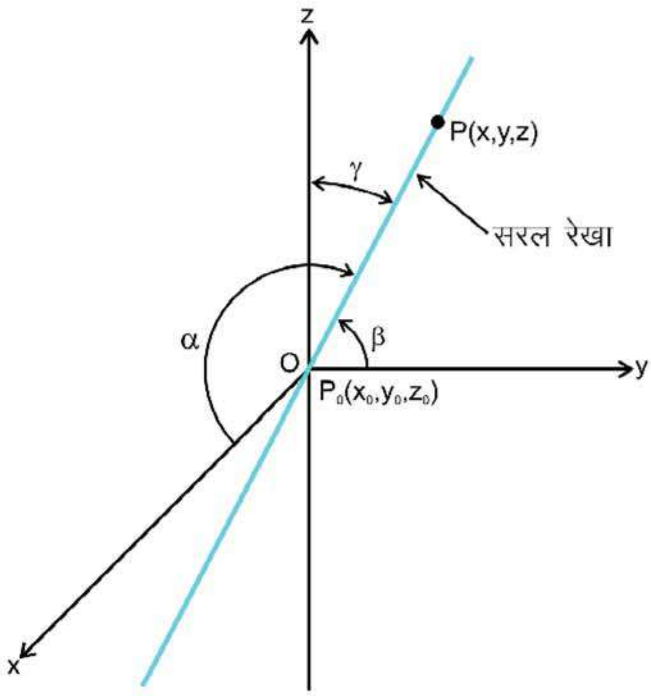
$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}=s,\ s=\overset{\frown}{P_0P} \tag{1}$$

है, जहाँ $s = \widehat{P_0P}$ एक स्थिर (निश्चित) बिंदु P_0 से P तक की इस सरल रेखा के अनुदिश मापी गई दूरी है।

अतः,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + s\cos\alpha \\ y &= y_0 + s\cos\beta \\ z &= z_0 + s\cos\gamma \end{aligned}\right\},\ -\infty < s < \infty \tag{2}$$

सरल रेखा (1) पर $P_0(x_0, y_0, z_0)$ से दूरी s पर स्थित बिंदु $P(x, y, z)$ के निर्देशांक हैं। इन्हें एक ही प्राचल s के पदों में व्यक्त किया गया है।



चित्र 1 : सरल रेखा

s के बदलने पर, हमें रेखा पर विभिन्न बिंदु प्राप्त होते हैं। समीकरण (2) को अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,\ \frac{dy}{ds} = \cos\beta,\ \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

या,

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma} = ds \tag{3}$$

समीकरण (3) युगपत् अवकल समीकरण हैं, जो सरल रेखा को परिभाषित करते हैं।

हम युगपत् अवकल समीकरणों के बारे में इस इकाई में बाद में विस्तार से चर्चा करेंगे।

अब हम आकाश में एक अन्य वक्र पर विचार करते हैं। मान लीजिए कि इस वक्र के प्राचलिक समीकरण

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t, \\ y &= a\sin\omega t, \\ z &= Wt \end{aligned}\right\} -\infty < t < \infty. \tag{4}$$

हैं, जहाँ a, ω और W अचर हैं।

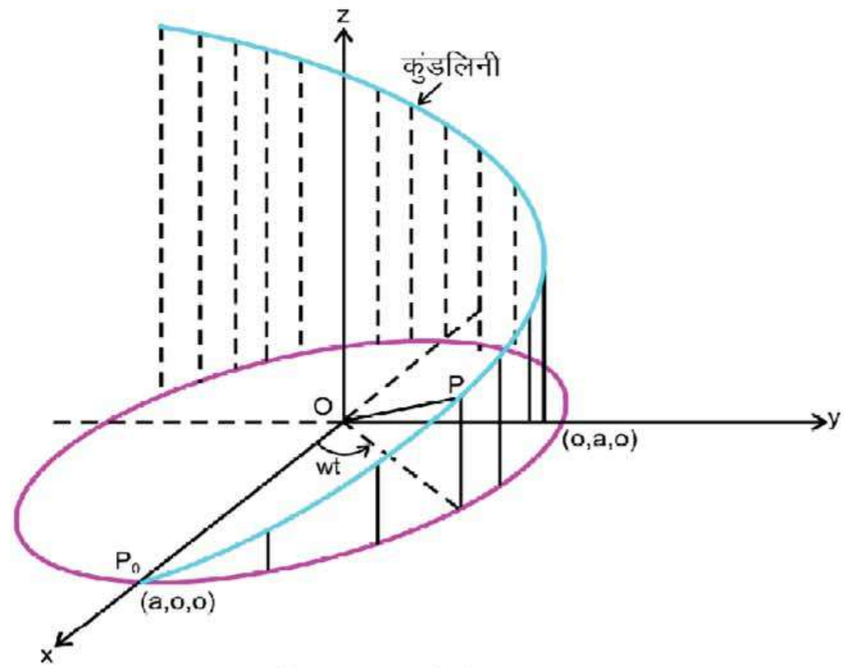
तब, बिंदु $P(x, y, z)$ त्रिज्या a वाले वृत्तीया बेलन के पृष्ठ $x^2 + y^2 = a^2$ पर (जो $x = a\cos\omega t,\ y = a\sin\omega t$ से t को विलुप्त करने से प्राप्त होता है) एक आकाश वक्र निर्धारित करता है, जिसे कुंडलिनी (helix) कहते हैं (देखिए चित्र 2)। आइए, हम $t = 0$ पर इस बिंदु को P_0 से दर्शाते हैं। तब, बिंदु P_0 के निर्देशांक $(a, 0, 0)$ होंगे। किसी भी समय t पर हमें, वक्र के अनुदिश चाप $s = P_0P$ की लंबाई निम्नलिखित रूप में प्राप्त होती है :

$$\int_0^s ds = \int_{P_0}^{P} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$

या

$$s = \int_{P_0}^{P} (a^2\omega^2 \sin^2\omega t + a^2\omega^2\cos^2\omega t + W^2)^{1/2}\, dt = \int_0^t (a^2\omega^2 + W^2)^{1/2}\, dt$$

$$= (a^2\omega^2 + W^2)^{1/2} t$$



चित्र 2 : कुंडलिनी

किसी कुंडलिनी का चुड़ी-अंतराल (pitch) उस कुंडलिनी के अक्ष के समांतर मापी गई एक पूर्ण कुंडलिनी भ्रमण की ऊँचाई होती है।

यदि प्राचल t को समय मान लिया जाए, तो समय $t = 2\pi/\omega$ में, बिंदु P त्रिज्या a का एक पूर्ण वृत्त निर्धारित करता है तथा साथ ही OZ के समांतर एक दूरी $2\pi W/\omega$ भी तय करता है, जो कुंडलिनी का चूड़ी-अंतराल कहलाता है। समीकरण, (4) से आप देख सकते हैं कि कुंडलिनी के अवकल समीकरण निम्न युगपत् अवकल समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{W} = dt.$$

ऊपर विचार किए गए, उदाहरणों से सुझाव मिलता है कि हम एक आकाश वक्र के प्राचलिक समीकरणों को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\left.\begin{array}{l} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \theta(t), \end{array}\right\} t_1 \le t \le t_2, \tag{5}$$

जहाँ ϕ, ψ, θ ऐसे फलन हैं जिनके t के सापेक्ष संतत अवकलज हैं। हम पहले दो समीकरणों से t को विलुप्त करके $C_1 : f_1(x, y) = 0$ प्राप्त करते हैं।

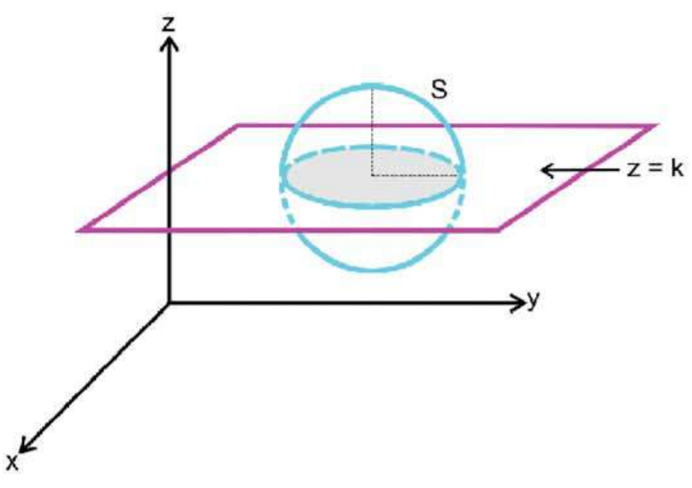
इसी प्रकार, अंतिम दो समीकरणों से हम $C_2 : f_2(y, z) = 0$ प्राप्त करते हैं।

अतः, C_1 और C_2 बेलन के समीकरण हैं जो समीकरण (5) द्वारा दिए गए आकाश वक्र में प्रतिच्छेद करते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि S समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ वाला एक गोला है, तो समतल $z = k$ में S के बिंदुओं के लिए

$$z = k, x^2 + y^2 = a^2 - k^2$$

होता है तथा ये त्रिज्या $\sqrt{(a^2 - k^2)}$ वाले वृत्त पर स्थित होते हैं, यदि $k < a$ गोले के प्रत्येक बिंदु के संगत ऐसा ही एक वृत्त होता है, जबकि k का मान $-a$ और $+a$ के बीच में बदलता रहता है (देखिए चित्र 3)। इस प्रकार, गोले के पृष्ठ को ऐसे वृत्तों से जनित माना जा सकता है।



चित्र 3

इस प्रकार, आकाश में एक वक्र की व्याख्या एक पृष्ठ और एक समतल के प्रतिच्छेदन के रूप में की जा सकती है।

आगे, हम तीन विमाओं में पृष्ठों पर विचार करते हैं।

आकाश में पृष्ठ

एक त्रिविमीय पृष्ठ का सरलतम उदाहरण समतल है। एक समतल का व्यापक समीकरण निम्न होता है :

$$ax + by + cz + d = 0$$

जहाँ a, b, c, d दिए हुए अचर हैं।

ऊपर दिए समीकरण में, हम x, y को स्वेच्छ रूप से चुन सकते हैं। आइए मान लें कि

$$x = u,\ y = v,\ -\infty < u, v < \infty$$

तब $z = -(au + bv + d)/c,\ c \neq 0$ है।

इस प्रकार, हमने समतल पर स्थित किसी बिंदु के कार्तीय निर्देशांकों को **दो प्राचलों** u और v के पदों में व्यक्त कर लिया है।

साथ ही, आप यह भी जानते हैं कि एक गोला एक बंदु $P(x, y, z)$ का बिंदुपथ होता है, जिसकी गोले के केन्द्र, मान लीजिए $O(0,0,0)$ से दूरी त्रिज्या a के बराबर होती है। इस प्रकार,

$$(OP)^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{6}$$

इकाई 1 के अपने ज्ञान से आप, किसी बिंदु के कार्तीय निर्देशांकों (x, y, z) और उसके गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ, ϕ) के बीच के संबंध के बारे में आप जानते हैं। जब $r = a$ हो तब हम इस संबंध को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin\theta\cos\phi \\ y &= a\sin\theta\sin\phi \\ z &= a\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

जहाँ $0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le a < \infty$.

समीकरण (7) प्राचलिक रूप में एक गोले का समीकरण है।

इस स्थिति में, आप पुनः यह देख सकते हैं कि एक पृष्ठ, जो इस स्थिति में एक गोला है, पर स्थित किसी बिंदु के कार्तीय निर्देशांकों को दो प्राचलों θ और ϕ के रूप में व्यक्त किया गया है। समीकरण (7) से इन निर्देशांकों को जोड़ने वाला संबंध प्राप्त होता है।

हमें प्राप्त है :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2\sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + a^2\cos^2\theta \\ &= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= a^2 \end{aligned}$$

साथ ही, जब (7) के प्रथम दो समीकरणों को प्राचलों θ और ϕ के लिए x और y के पदों में हल करते हैं, तब

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}, \phi = \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ प्राप्त होता है।

ऊपर से प्राप्त θ के मान को जब (7) के तीसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं, तब हम प्राप्त करते हैं :

$$z = a\cos\theta = a\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a}$$

$$= \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

या, $$z^2 = a^2 - x^2 - y^2.$$

इस प्रकार, ऊपर दी गयी दो विशेष स्थितियों से, यह देखा जा सकता है कि एक पृष्ठ का समीकरण 3 विमीय आकाश में एक बिंदु के निर्देशांकों (x, y, z) को जोड़ने वाला एक संबंध होता है।

अब, हम एक पृष्ठ की औपचारिक परिभाषा देते हैं।

परिभाषा : यदि त्रिविमीय आकाश में किसी बिंदु के कार्तीय निर्देशांक (x, y, z), निम्न प्रकार के एक संबंध से संबंधित हों

$$f(x, y, z) = 0 \tag{8}$$

तो ऐसे सभी बिंदुओं के संग्रह से एक पृष्ठ निर्धारित होता है।

समीकरण (8) एक पृष्ठ का समीकरण है। कुछ सरल स्थितियों में, अर्थात जब समीकरण (8) को z के लिए हल किया जा सकता हो, तब हम इसे

$$z = F(x, y)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

ऊपर लिए गए उदाहरणों को देखकर, हम कह सकते हैं कि एक पृष्ठ के प्राचलिक समीकरण

$$\left.\begin{aligned} x &= \phi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \theta(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

के रूप के होते हैं, जहाँ u और v दो प्राचल हैं, $u_1 \le u \le u_2$ और $v_1 \le v \le v_2$ है।

इस प्रकार, अवश्य ही जब व्यंजक (9) को समीकरण (8) में प्रतिस्थापित किया जाएगा, तब वह इसे एक सर्वसमिका में बदल देगा। साथ ही, हम व्यंजक (9) के

प्रथम दो समीकरणों को हल कर सकते हैं और

$$u = F_1(x, y), v = F_2(x, y)$$

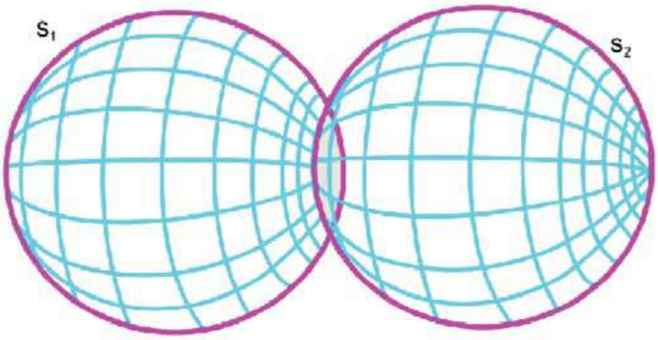
प्राप्त कर सकते हैं तथा जब इन्हें (9) के तीसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करेंगे, तब हमें पृष्ठ का समीकरण $z = F(x, y)$ के रूप में प्राप्त होगा।

व्यापक रूप में, यदि निर्देशांकों (x, y, z) वाला एक बिंदु P एक पृष्ठ S_1 पर स्थित होता है, तो $f_1(x, y, z) = 0$ के रूप के संबंध का अस्तित्व होता है और यदि P एक पृष्ठ S_2 पर भी स्थित हो, तो हमें इसी प्रकार का एक अन्य संबंध $f_2(x, y, z) = 0$ प्राप्त होता है। इसलिए, S_1 और S_2 के उभयनिष्ठ (common) बिंदु समीकरण-युग्म

$$f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0 \tag{10}$$

को संतुष्ट करेंगे।

पृष्ठ S_1 और S_2 एक वक्र में प्रतिच्छेद करते हैं। अतः उस बिंदु का बिंदुपथ, जिसके निर्देशांक समीकरण (10) के प्रकार के संबंधों के एक युग्म को संतुष्ट करते हैं, आकाश में एक वक्र होगा। चित्र 4 विभिन्न त्रिज्याओं वाले दो गोलों के प्रतिच्छेदन को दर्शाता है, जो एक वृत्त है।



चित्र 4

इस प्रकार, आकाश में एक वक्र की व्याख्या दो पृष्ठों के प्रतिच्छेदन के रूप में भी की जा सकती है।

याद रखिए कि किसी पृष्ठ के प्राचलिक समीकरण अद्वितीय नहीं होते हैं। एक उदाहरण के रूप में, आप देख सकते हैं कि प्राचलिक समीकरणों के दोनों समुच्चयों

$$x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\cos u$$

तथा

$$x = a\frac{1-v^2}{1+v^2}\cos u,\ y = a\frac{1-v^2}{1+v^2}\sin u,\ z = \frac{2av}{1+v^2}$$

से गोलीय पृष्ठ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ प्राप्त होता है।

इस तथ्य को स्पष्ट करने के लिए, हम एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : पृष्ठ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ -\infty<z<\infty$ के प्राचलिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : हम पृष्ठ के दिए हुए समीकरण को पुनः

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},\ -\infty<z<\infty$$

रूप में लिख सकते हैं।

इस पृष्ठ का एक समतल $z=k$ (एक अचर) के साथ प्रतिच्छेदन एक दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1 \text{ है, जहाँ } a'=a\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}},\ b'=b\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}\cdot$$

यहाँ आप देख सकते हैं कि यदि हम $x=a'\cos\theta$ और $y=b'\sin\theta$ लें, तो

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{a'^2\cos^2\theta}{a'^2}+\frac{b'^2\sin^2\theta}{b'^2}=1.$$

इस प्रकार, दिए हुए पृष्ठ के प्राचलिक समीकरणों को हम निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x=a'\cos\theta,\ y=b'\sin\theta,\ z=k$$

जहाँ

$$a'=a\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}} \text{ और } b'=b\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}}\,.$$

क्योंकि z का प्राँत $-\infty<z<\infty$ है, इसलिए $z=c\sinh\alpha$ स्थापित करने पर, हम प्राचलिक समीकरणों का एक अन्य समुच्चय

$$x=a\cosh\alpha\cos\theta,$$

$$y=b\cosh\alpha\sin\theta$$

$$z=c\sinh\alpha,$$

के रूप में प्राप्त करते हैं, जहाँ $0\le\theta\le2\pi,\ -\infty<\alpha<\infty\cdot$

दिया हुआ पृष्ठ एक पृष्ठीय दीर्घवृत्तीय अतिपरवलयज (elliptic hyperboloid of one-sheet) है।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E1) i) पृष्ठ $x^2 + y^2 = 2z,\ -\infty < z < \infty$ के प्राचलिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

ii) पृष्ठ $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u\cot v$ का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

अभी तक हमने केवल आकाश के पृष्ठ पर विचार किया है। अब हम पृष्ठ-कुल (Family of Surfaces) पर विचार करेंगे।

पृष्ठ-कुल

त्रिविमीय यूक्लिडीय आकाश में एक प्राचल पृष्ठ-कुल समीकरण

$$f(x, y, z, c) = 0 \tag{11}$$

द्वारा निरूपित किया जाता है, जहाँ फलन f के $x, y, z \in D,$ के सापेक्ष प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलज का अस्तित्व होता है, जबकि D आकाश में प्राँत है तथा c एक प्राचल है। c के विभिन्न मानों के लिए, हम कुल के विभिन्न सदस्य प्राप्त करते हैं। उदाहरण के लिए, एक पृष्ठ के एक वक्र के अनुदिश उस पृष्ठ पर खींचे गए स्पर्शी समतल (tangent planes) ऐसा ही एक कुल बनाते हैं।

आइए, एक कुल (11) के दो सदस्यों पर विचार करें एक c के एक निर्दिष्ट मान के लिए, और दूसरा मान $c + \delta c$ के संगत जिसका समीकरण है :

$$f(x, y, z, c + \delta c) = 0 \tag{12}$$

दोनों पृष्ठ (11) और (12) एक वक्र में प्रतिच्छेद करेंगे, जिसे समीकरणों

$$f(x, y, z, c) = 0,\ f(x, y, z, c + \delta c) = 0$$

द्वारा निरूपित किया जाता है। इस वक्र को समीकरणों $f(x, y, z, c) = 0$ तथा

$$\frac{1}{\delta c}\{f(x, y, z, c + \delta c) - f(x, y, z, c)\} = 0 \tag{13}$$

वाले पृष्ठों के प्रतिच्छेदन के रूप में भी लिया जा सकता है।

जैसे-जैसे प्राचल अंतर δc शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, प्रतिच्छेदन वक्र समीकरणों

$$f(x, y, z, c) = 0,\ \frac{\partial}{\partial c} f(x, y, z, c) = 0 \tag{14}$$

द्वारा प्राप्त सीमांत स्थिति की ओर प्रवृत्त होता है। हम इस सीमांत वक्र को इस कुल का **अभिलक्षणिक वक्र** (characteristic curve) कहते हैं तथा यह पृष्ठ (11) पर स्थित होता है। जैसे-जैसे प्राचल c में परिवर्तन होता है, वैस-वैसे अभिलक्षणिक वक्र (14) एक पृष्ठ अनुरेखित करता है, जिसका समीकरण दोनों समीकरणों (14) के बीच से c का विलोपन करके $g(x, y, z) = 0$ के रूप में प्राप्त किया जाता है।

हम इस पृष्ठ को समीकरण (11) द्वारा प्राप्त एक प्राचल कुल का **अन्वालोप** (envelope) कहते हैं।

अब हम यह दर्शाएँगे कि z-अक्ष पर स्थित केन्द्रों वाले तथा इकाई त्रिज्या वाले गोला-कुल का अन्वालोप बेलन होता है।

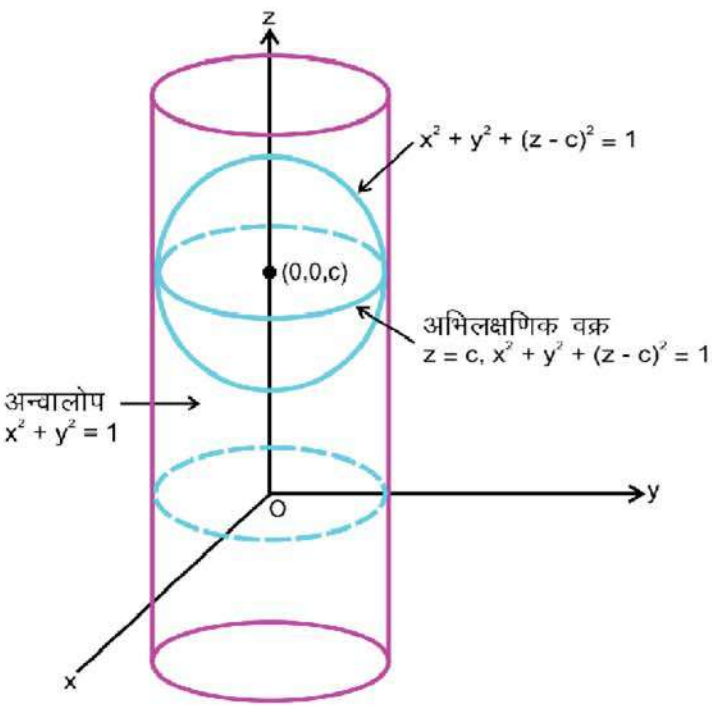
उदाहरण 2 : गोला-कुल $x^2+y^2+(z-c)^2=1$, जहाँ c एक प्राचल है, का अन्वालोप ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f=x^2+y^2+(z-c)^2-1=0.$

$$\therefore \; \frac{\partial f}{\partial c}=-2(z-c)=0 \Rightarrow z=c.$$

$f=0$ और $\frac{\partial f}{\partial c}=0$ से c को विलुप्त करने पर, हम गोला-कुल का अन्वालोप $x^2+y^2=1$ के रूप में प्राप्त करते हैं, जो एक बेलन है, जिसका आधार xy-समतल में है, केन्द्र $(0,0)$ है तथा त्रिज्या 1 है (देखिए चित्र 5)।

इसका अभिलक्षणिक वक्र $z=c$ और $x^2+y^2+(z-c)^2=1$ द्वारा प्राप्त होता है।



चित्र 5

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्न हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E2) गोला-कुल $x^2+y^2+(z-c)^2=c^2\sin^2\alpha$, जहाँ c एक प्राचल है, का अन्वालोप ज्ञात कीजिए।

अब, हम समीकरण

$$f(x,y,z,a,b)=0 \tag{15}$$

द्वारा परिभाषित **दो-प्राचल पृष्ठ-कुल** पर विचार करते हैं, जहाँ f एक फलन **है,** जिसके $x, y, z \in D$ के सापेक्ष प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलज हैं, जबकि D त्रिविमीय आकाश में एक प्राँत है तथा a और b प्राचल हैं। समीकरण (15) में, हम b को a का एक निश्चित फलन, जैसे कि

$$b = \phi(a) \tag{16}$$

मानकर समीकरण (15) से **एक प्राचल पृष्ठ-कुल** प्राप्त कर सकते हैं। तब, हम समीकरणों (15) और (16) तथा संबंध

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} = 0 \tag{17}$$

से a और b को विलुप्त करके इस एक प्राचल पृष्ठ-कुल का अन्वालोप प्राप्त कर सकते हैं। इस **एक-प्राचल पृष्ठ-कुल** का **अभिलक्षणिक वक्र** समीकरणों (15) और (17) से प्राप्त हो जाता है, जिसमें $b = \phi(a)$.

आप **देख सकते** हैं कि $\phi(a)$ के प्रत्येक विकल्प के लिए एक-प्राचल कुल का अभिलक्षणिक वक्र समीकरणों

$$f(x, y, z, a, b) = 0,\ f_a = 0,\ f_b = 0 \tag{18}$$

द्वारा परिभाषित बिंदु से होकर जाती है। यह बिंदु कुल के विशेष पृष्ठ पर, दो प्राचल कुल (18) का, **अभिलक्षणिक बिंदु** है। जैसे-जैसे हम प्राचलों a और b को बदलते हैं, वैसे-वैसे यह अभिलक्षणिक बिंदु एक पृष्ठ जनित करता है, जिसे हम **दो-प्राचल पृष्ठ-कुल (15) का अन्वालोप** कहते हैं। इसका समीकरण तीनों समीकरणों (18) में से a और b को विलुप्त करने से प्राप्त होता है।

अब हम ऊपर बताए गए सिद्धांत को स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : दो-प्राचल समतल-कुल $z = ax + by + a^2 + b^2$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि

$$f(x, y, z, a, b) = z - ax - by - a^2 - b^2 = 0 \tag{19}$$

$$\therefore\ f_a = 0 \Rightarrow x + 2a = 0$$

$$f_b = 0 \Rightarrow y + 2b = 0$$

$f_a = 0,\ f_b = 0$ और समीकरण (19) में से a और b को विलुप्त करने पर, हम

$$4z = -(x^2 + y^2) \tag{20}$$

के रूप का अन्वालोप प्राप्त करते हैं, जो कि परिक्रमण परवलयज (paraboloid) है। यहाँ, अभिलक्षणिक बिंदु $(-2a, -2b, -(a^2 + b^2))$ है। अब हम $a^2 + b^2 = 1$ लेते हैं। इसे समीकरण (19) में प्रतिस्थापित करने पर हमें एक-प्राचल समतल-कुल

$$z = ax \pm y\sqrt{1 - a^2} + 1 \tag{21}$$

प्राप्त होता है, जिसका अन्वालोप लंब वृत्तीय शंकु (right circular cone)

$$(z-1)^2 = x^2 + y^2 \tag{22}$$

है। इस बात की जाँच सरलता से की जा सकती है कि $a^2+b^2=1$ के लिए अभिलक्षणिक बिंदु $\left(-2a, \pm 2\sqrt{1-a^2}, -1\right)$ है तथा यह बिंदु दोनों पृष्ठों (21) और (22) पर स्थित होता है।

★★★

और अब आपके लिए एक प्रश्न।

E3) दो-प्राचल गोला-कुल $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए। साथ ही, एक प्राचल कुल $(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=1$ के अभिलक्षणिक वक्र का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

आकाश में वक्रों और पृष्ठों की ऊपर दी गयी पृष्ठभूमि के साथ अब हम युगपत् अवकल समीकरणों के अध्ययन की ओर बढ़ते हैं। पहले आपने देखा कि 3डी-निर्देशांक पद्धति में एक सरल रेखा के समीकरण को समीकरण (3) के रूप में निरूपित कर सकते हैं, जो युगपत् अवकल समीकरण है। आप देख सकते हैं कि कोटि दो और उससे अधिक कोटि के साधारण अवकल समीकरणों को युगपत् अवकल समीकरणों के एक निकाय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। एक सरल उदाहरण के रूप में, द्वितीय कोटि के निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 7\frac{dx}{dt} + 9 = 0$$

या, $$\frac{d^2x}{dt^2} = 7\frac{dx}{dt} - 9 = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \text{ मान लीजिए।}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को प्रथम कोटि के दो अवकल समीकरणों के एक निकाय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, अर्थात्

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = f$$

या, $$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{f} = dt \tag{23}$$

जहाँ y, t का एक फलन है।

इसी प्रकार,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) \tag{24}$$

के रूप के nवीं कोटि के अवकल समीकरण को n प्रथम कोटि के अवकल समीकरणों के एक निकाय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, अर्थात् :

$$\frac{dx}{dt} = y_1, \frac{dy_1}{dt} = y_2, \cdots, \frac{dy_{n-2}}{dt} = y_{n-1}, \cdots$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dt} = f(x, t, y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{25}$$

या,

$$\frac{dx}{y_1} = \frac{dy_1}{y_2} = \frac{dy_2}{y_3} = \cdots = \frac{dy_{n-1}}{f} = dt \tag{26}$$

समीकरण (23) और (26) प्रथम कोटि युगपत् अवकल समीकरणों के निकाय हैं। ये समीकरण हमें अधिकतर गणितीय भौतिकी में देखने को मिलते हैं। उदाहरण के लिए, (26) के प्रकार के समीकरण रेडियोएक्टिव रूपांतरणों के व्यापक सिद्धांत में प्राप्त होते हैं, जिसकी खोज रदरफर्ड और सॉडी द्वारा (1930 में) की गई थी। वैश्लेषिक यांत्रिकी (analytical mechanics) में n स्वातंत्र्य कोटि (degrees of freedom) वाले गतिकीय निकाय के गति-समीकरण ये होते हैं :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{27}$$

जहाँ $H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$ हैमिल्टोनियन फलन है तथा $q_i, p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ अज्ञात फलन हैं, जिनकी संख्या $2n$ है। समीकरण (27) प्रथम कोटि के $2n$ समीकरणों का निकाय है, जिसके हल से किसी भी समय t पर गतिकीय तंत्र (dynamical system) के गुणधर्मों के बारे में जानकारी प्राप्त होती है।

इस खंड की आगे आने वाली इकाइयों में, आप देखेंगे कि रैखिककल्प और अरैखिक अवकल समीकरणों से भी युगपत् अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं। अगले भाग में, अब हम युगपत् अवकल समीकरणों के निर्माण पर चर्चा करेंगे।

14.3 युगपत् अवकल समीकरणों का निर्माण

आइए हम दो पृष्ठ-कुल

$$u(x, y, z) = c_1, v(x, y, z) = c_2 \tag{28}$$

पर विचार करें, जहाँ c_1 और c_2 प्राचल हैं।

आप जानते हैं कि ये पृष्ठ एक दो-प्राचल आकाश वक्र-कुल में प्रतिछेद करते हैं। साथ ही इस कुल के किसी भी वक्र के अनुदिश $du = 0$ और $dv = 0$.

अब,

$$du = 0 \Rightarrow u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0 \tag{29}$$

$$dv = 0 \Rightarrow v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0 \tag{30}$$

dx, dy और dz के लिए, समीकरणों (29) और (30) को हल करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{u_y v_z - u_z v_y} = \frac{dy}{u_z v_x - u_x v_z} = \frac{dz}{u_x v_y - u_y v_x}$$

या

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}, \qquad (31)$$

जहाँ P, Q और R चर x, y और z के ज्ञात फलन हैं।

समीकरण (31) दो-प्राचल आकाश वक्र-कुल के युगपत् अवकल समीकरण हैं, जिनमें दो पृष्ठ-कुल $u(x, y, z) = c_1$ और $v(x, y, z) = c_2$ प्रतिच्छेद करते हैं।

अब हम उदाहरणों की सहायता से युगपत् अवकल समीकरणों के निर्माण को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 4 : उन आकाश वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनमें दो पृष्ठ-कुलों

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = c_1 \text{ और } v = x + z = c_2 \qquad (32)$$

प्रतिच्छेद करते हैं।

हल : यहाँ, दिए गए पृष्ठ-कुल निम्न हैं :

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = c_1, \; v = x + z = c_2$$

कुल के किसी भी वक्र के अनुदिश, हमें $du = 0$ और $dv = 0$ प्राप्त है।

$$du = 0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \qquad (33)$$

तथा $$dv = 0 \Rightarrow dx + dz = 0 \qquad (34)$$

समीकरणों (33) और (34) को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{2y - 0} = \frac{dy}{2z - 2x} = \frac{dz}{0 - 2y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{-y},$$

जो आकाश वक्रों के अभीष्ट अवकल समीकरण हैं।

★★★

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 5 : उन आकाश वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनमें पृष्ठ-कुल $u = xy = c_1$ और $v = x^4 - z^4 - 2xyz^2 = c_2$ प्रतिच्छेद करते हैं।

हल : दिए हुए पृष्ठ-कुल निम्न हैं :

$$u = xy = c_1 \text{ और } v = x^4 - z^4 - 2xyz^2 = c_2$$

$$du = 0 \Rightarrow ydx + dy = 0$$

$$dv = 0 \Rightarrow 4x^3dx - 4z^3dz - 2yz^2dx - 2xz^2dy - 4xyzdz = 0$$

ऊपर दिए दोनों समीकरणों को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dx}{-4x(z^3 + xyz)} = \frac{dy}{4zy(z^2 + xy)} = \frac{dz}{-2xyz^2 - 4x^4 + 2xyz^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{xz(z^2 + xy)} = \frac{dy}{-zy(z^2 + xy)} = \frac{dz}{x^4}$$

जो कि आकाश वक्रों के अभीष्ट अवकल समीकरण हैं।

★★★

अब आप इस प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E4) उन आकाश वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जिनमें $u = c_1$ और $v = c_2$ के निम्नलिखित दो पृष्ठ-कुल प्रतिच्छेद कहते हैं :

i) $u = 3x + 4y + z,\ v = x + z$.

ii) $u = x^2 + y^2,\ v = 3x + 4z$.

iii) $u = xy,\ v = z(x + y) + x^2 + y^2$.

युगपत अवकल समीकरणों के निर्माण से यह स्पष्ट हो जाता है कि समीकरण (31) के प्रकार के युगपत् समीकरणों का हल समुच्चय दो-प्राचल आकाश वक्र-कुल होता है, जो एक-प्राचल के दो पृष्ठ-कुलों के प्रतिच्छेदन से प्राप्त होता है। परंतु इस हल को प्राप्त कैसे किया जाय? अगले भाग में, हम (31) के रूप के समीकरणों के हल ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा करेंगे।

14.4 $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ के हल की विधियाँ

जैसा कि आप देख चुके हैं, समीकरण (28), अर्थात् $u(x, y, z) = c_1$ और $v(x, y, z) = c_2$ से दिए जाने वाले पृष्ठ-कुलों के प्रतिच्छेदन वक्र युगपत् अवकल समीकरण निकाय (31) अर्थात्,

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

द्वारा परिभाषित होते हैं, जहाँ

$P(x, y, z) = u_y v_z - u_z v_y, Q(x, y, z) = u_z v_x - u_x v_z$ और $R(x, y, z) = u_x v_y - u_y v_x$.

इस प्रकार, समीकरणों (31) का हल ज्ञात करने के लिए, हमें इससे दो स्वेच्छ अचर c_1 और c_2 वाले समीकरण (28) के रूप के, दो संबंधों की व्युत्पत्ति करने की

आवश्यकता है। इन अचरों में परिवर्तन करके, फिर हम समीकरणों (31) को संतुष्ट करने वाले एक दो-प्राचल वक्र-कुल पर पहुँच सकते हैं।

अब हम समीकरणों (31) से प्रारंभ करते हुए, जिसके लिए फलन P, Q, R ज्ञात हैं, समीकरण (28) के प्रकार के पृष्ठों को ज्ञात करने की विधियों की चर्चा करेंगे। हम कुछ सरल स्थितियों को लेकर प्रारंभ करते हैं।

जबकि समीकरणों (31) का हल सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।

सरलतम स्थिति वह है जब समीकरणों (31) में तीन में से दो-भिन्नों को बराबर रखने पर केवल दो चरों में एक समीकरण प्राप्त करना संभव हो। उदाहरणार्थ,

$$\frac{x\,dx}{y^2 z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y^2} \tag{35}$$

के रूप के समीकरणों पर विचार कीजिए।

प्रथम दो भिन्नों को बराबर रखने पर, हम केवल दो चरों वाला निम्न समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$\frac{x\,dx}{y^2} = \frac{dy}{x} \text{ या, } x^2 dx = y^2 dy \tag{36}$$

समीकरण (36) को हल किया जा सकता है, जिससे समीकरण

$$x^2 - y^2 = c_1 \tag{37}$$

प्राप्त होता है, जो समीकरणों (35) के पूर्ण हल का एक संबंध प्रदान करता है। इसी प्रकार, समीकरणों (35) में पहली और तीसरी भिन्न को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{x\,dx}{z} = dz \text{ या } x\,dx = z\,dz$$

जिसे समाकलित करने पर,

$$x^2 - z^2 = c_2 \tag{38}$$

प्राप्त होता है। समीकरणों (37) और (38) द्वारा दिए दोनों संबंध मिलकर समीकरणों (35) का संपूर्ण हल बनाते हैं।

आइए एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 6 : समीकरणों $\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{x^2 y^2 z^2}$ के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

हल : ऊपर दिए समीकरणों की पहली दो भिन्न को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2 dx = y^2 dy$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - y^3 = c_1$$

पुनः दूसरी और तीसरी भिन्न को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dy = \frac{dz}{y^2 z^2} \text{ या } y^2 dy = \frac{1}{z^2} dz$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^3}{3} = -\frac{1}{z} + c$$

या, $$y^3 + \frac{3}{z} = c_2.$$

इस प्रकार, अभीष्ट समाकल वक्र पृष्ठ-कुल $x^3 - y^3 = c_1$ तथा $y^3 + \frac{3}{z} = c_2$ का प्रतिच्छेदन होते हैं।

कभी-कभी ऐसी स्थिति आ जाती है जब, दिए हुए समीकरणों के लिए, हल के पृष्ठों के एक समुच्चय की व्युत्पत्ति करना तो सरल होता है, परंतु पृष्ठों के दूसरे समुच्चय की व्युत्पत्ति करना इतना सरल नहीं होता। ऐसी स्थितियों में, आप पृष्ठों के पहले हल समुच्चय का प्रयोग करके पृष्ठों का दूसरा समुच्चय ज्ञात कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए, हम एक चर को अन्य दो चरों के रूप में व्यक्त करते हैं तथा संभवतः दो चरों में एक समीकरण प्राप्त करने का प्रयास करते हैं, जिसे फिर हल करके पृष्ठों का दूसरा समुच्चय प्राप्त किया जा सकता है। आइए इस विधि को एक उदाहरण की सहायता से समझने का प्रयास करें।

उदाहरण 7 : युगपत समीकरणों

$$\frac{dx}{xz(z^2 + xy)} = \frac{dy}{-yz(z^2 + xy)} = \frac{dz}{x^4}$$

0

को हल कीजिए।

हल : पहली दो भिन्नों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \text{ या } \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

ऊपर दिए समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$xy = c_1 \tag{39}$$

समीकरण (39) का प्रयोग करने पर, पहले और तीसरे भिन्न से प्राप्त होता है :

$$x^4 dx = xz(z^2 + c_1)\, dz$$

या, $$x^3 dx - (z^3 + c_1 z) dz = 0$$

जिसे समाकलित करने पर, प्राप्त होता है :

$$\frac{x^4}{4} - \left(\frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{2} c_1 z^2\right) = c$$

या, $$x^4 - z^4 - 2c_1z^2 = c_2$$

या, $$x^4 - z^4 - 2xyz^2 = c_2 (\because c_1 = xy) \qquad (40)$$

समीकरण (39) और (40) मिलकर अभीष्ट पूर्ण हल बनाते हैं।

★★★

व्यावहारिक रूप में, सदैव ऐसी स्थिति संभव नहीं हो सकती है, जैसी कि उदाहरणों 6 और 7 में दिखाई गई है। हमें समीकरणों (31) को हल करने की अन्य विधियों का पता लगाने की आवश्यकता है। परंतु इससे पहले कि हम समीकरणों (31) को हल करने की अन्य विधियों पर चर्चा करें, आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E5) निम्नलिखित समीकरण-निकाय के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

i) $$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

ii) $$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{zxy - 2x^2}$$

iii) $$\frac{xdx}{y^2z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y^2}$$

अब हम समीकरणों (31) को हल करने के लिए, गुणक-विधि की चर्चा करते हैं।

14.4.1 गुणक-विधि

मान लीजिए कि $u(x, y, z) = c_1$ और $v(x, y, z) = c_2$ समीकरण निकाय (31) अर्थात्,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

के दो एक-प्राचल पृष्ठ-कुल हैं।

तब कुल के किसी भी वक्र के अनुदिश, हमें प्राप्त है :

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0$$

तथा $$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0$$

u और v ज्ञात करने के लिए, हम ऐसे फलन (P_1, Q_1, R_1) और (P_2, Q_2, R_2) ज्ञात करना चाहते हैं जिससे कि

$$P_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q_1 = \frac{\partial u}{\partial y},\ R_1 = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$P_2 = \frac{\partial v}{\partial x},\ Q_2 = \frac{\partial v}{\partial y},\ R_2 = \frac{\partial v}{\partial z}$$

तथा

$$PP_1 + QQ_1 + RR_1 = 0 \tag{41}$$

$$PP_2 + QQ_2 + RR_2 = 0 \tag{42}$$

बीजगणित के योगातरानुपात (componendo-dividendo) नियम से हम जानते हैं कि

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz}{PP_1 + QQ_1 + RR_1} = \frac{P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz}{PP_2 + QQ_2 + RR_2} \tag{43}$$

इस प्रकार, समीकरणों (41) और (42) को दृष्टिगत रखते हुए, हम समीकरण (43) से प्राप्त करते हैं :

$$P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0 \tag{44}$$

$$P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz = 0 \tag{45}$$

अब, यदि समीकरण (44) और (45) यथातथ हैं, तो

$$du = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0$$

$$dv = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz = 0$$

इन समीकरणों को समाकलित करने पर, हम पृष्ठ

$$u(x, y, z) = c_1$$

तथा

$$v(x, y, z) = c_2$$

प्राप्त करते हैं।

इन पृष्ठों के प्रतिच्छेदन वक्र ही समीकरण निकाय (31) के समाकल वक्र होते हैं।

इस विधि को और अच्छी प्रकार से समझने के लिए, निम्नलिखित उदाहरण ले रहे हैं।

उदाहरण 8 : समीकरणों

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

को हल कीजिए,

जहाँ l, m और n अचर हैं।

हल : यहाँ $P = mz - ny,\ Q = nx - lz,\ R = ly - mx$ है।

यदि हम $P_1 = 1, Q_1 = m, R_1 = n$

तथा

$$P_2 = x, Q_2 = y, R_2 = z$$

लें, तो

$$PP_1 + QQ_1 + RR_1 = 1(mz - ny) + m(nx - lz) + n(ly - mx)$$
$$= lmz - \text{lny} + mnx - mlz + \text{lny} - mnx = 0$$

तथा

$$PP_2 + QQ_2 + RR_2 = x(mz - ny) + y(nx - lz) + z(ly - mx)$$
$$= mxz - nxy + nxy - lyz + lyz - mxz = 0 .$$

दिए हुए निकाय के लिए, हमें प्राप्त है :

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx} = \frac{ldx + mdy + ndz}{0} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

साथ ही,

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = d(lx + my + nz) = du \text{ (मान लीजिए)}$$

तथा

$$xdx + ydy + zdz = d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right) = dv \text{ (मान लीजिए)}$$

अतः, समाकल वक्र निम्नलिखित पृष्ठ-कुल का प्रतिच्छेदन होते हैं :

$$lx + my + nz = c_1$$

और

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

★★★

उदाहरण 9 : समीकरणों $\dfrac{dx}{y(x+y)+\alpha z} = \dfrac{dy}{x(x+y)-\alpha z} = \dfrac{dz}{z(x+y)}$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, हमें प्राप्त है :

$$P = y(x+y) + \alpha z,\ Q = x(x+y) - \alpha z,\ R = z(x+y)$$

यदि हम

$$P_1 = x,\ Q_1 = -y,\ R_1 = -\alpha$$

तथा

$$P_2 = 1, Q_2 = 1, R_2 = -\frac{x+y}{z}$$

लें, तो

$$PP_1 + QQ_1 + RR_1 = x[y(x+y) + \alpha z] - y[x(x+y) - \alpha z] - \alpha[z(x+y)]$$

$$= xy(x+y) + \alpha xz - xy(x+y) + \alpha yz - \alpha xz - \alpha yz = 0$$

तथा

$$PP_2 + QQ_2 + RR_2 = y(x+y) + \alpha z + x(x+y) - \alpha z - \left(\frac{x+y}{z}\right)[z(x+y)]$$

$$= y(x+y) + x(x+y) - (x+y)\,(x+y) = 0$$

साथ ही, समीकरणों के दिए हुए निकाय के लिए, हमें यह भी प्राप्त है :

$$\frac{dx}{y(x+y)+\alpha z} = \frac{dy}{x(x+y)-\alpha z} = \frac{dz}{z(x+y)} = \frac{xdx - ydy - \alpha dz}{0} = \frac{dx + dy - \left(\frac{x+y}{z}\right)dz}{0} \tag{46}$$

इस प्रकार,

$$xdx - ydy - \alpha dz = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \alpha z\right) = 0$$

तथा

$$dx + dy - \left(\frac{x+y}{z}\right) dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(x+y)}{x+y} - \frac{dz}{z} = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\left[\ln\left|\frac{(x+y)}{z}\right|\right] = 0$$

अतः, समाकल वक्र, पृष्ठ-कुल

$$x^2 - y^2 - 2\alpha z = c_1$$

और

$$\ln\left|\frac{x+y}{z}\right| = c_2 \tag{47}$$

के प्रतिच्छेदन होते हैं।

★★★

ऊपर दिए उदाहरणों में, आपने यह अनुभव किया होगा कि इस विधि से हल ज्ञात करने में, फलनों (P_1, Q_1, R_1) और (P_2, Q_2, R_2) के रूपों को निर्धारित करने के लिए

अच्छे सहजज्ञान की आवश्यकता होती है। वास्तविक अभ्यास में, कभी-कभी दिए हुए समीकरणों को ऐसे रूप में लिखना बहुत अधिक सरल होता है, जिससे उसका हल सीधे ही प्राप्त किया जा सके। उदाहरण के लिए यदि हम उदाहरण 9 में पहले दो भिन्नों के अंशों और हरों को जोड़ लें, तो हम पाते हैं :

$$\frac{dx+dy}{(x+y)^2} = \frac{dz}{z(x+y)},$$

जिसे हम

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)} = \frac{dz}{z}$$

के रूप में लिख सकते हैं

और इसका व्यापक हल है :

$$\ln\left|\frac{x+y}{z}\right| = \text{अचर} \qquad (48)$$

इसी प्रकार, हमें प्राप्त है :

$$\frac{xdx - ydy}{\alpha(x+y)z} = \frac{dz}{z(x+y)}$$

$$\Rightarrow \quad xdx - ydy - \alpha dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \alpha z\right) = 0$$

जिससे, हम हल

$$x^2 - y^2 - 2\alpha z = \text{अचर} \qquad (49)$$

प्राप्त करते हैं। समीकरण (48) और (49) से हमें हल (47) प्राप्त होता है।

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 10 : हल कीजिए :

$$\frac{dx}{3x+y-z} = \frac{dy}{x+y-z} = \frac{dz}{2(x-y)}$$

हलः दिए हुए समीकरण-निकाय के लिए, हमें

प्रत्येक अनुपात प्राप्त है।

$$= \frac{dx-3dy-dz}{3x+y-z-3\,(x+y-z)-2(z-y)} = \frac{dx-3dy-dz}{0}$$

अतः

$$dx - 3dy - dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad d(x - 3y - z) = 0.$$

समाकलित करने पर, हमें एक समाकल पृष्ठ

$$u = x - 3y - z = c_1 \tag{50}$$

के रूप में मिलता है।

समीकरण (50) से, हमें प्राप्त होता है :

$$z = x - 3y - c_1$$

दूसरा समाकल पृष्ठ ज्ञात करने के लिए, हम z के इस मान को दिए हुए समीकरणों के प्रथम दो अनुपातों में प्रतिस्थापित करते हैं तथा प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{3x + y - (x - 3y - c_1)} = \frac{dy}{x + y - (x - 3y - c_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2x + 4y + c_1} = \frac{dy}{4y + c_1} \tag{51}$$

समीकरण (51) चरों x और y में एक साधारण अवकल समीकरण है, जिसे आप खंड 2 में अध्ययन की गई विधियों से हल कर सकते हैं। यदि हम $4y + c_1 = t$ लिखें, तो समीकरण (51) निम्नलिखित रूप में बदल जाता है :

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{2t} = \frac{1}{4} \tag{52}$$

समीकरण (52) एक रैखिक समीकरण है, जिसका $\text{I.F} = e^{-\int \frac{1}{2t} dt} = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

समीकरण (52) का हल है :

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\sqrt{t} + \text{ अचर}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x - t}{\sqrt{t}} = \text{अचर}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - y + z}{\sqrt{x + y - z}} = \text{अचर} = c_2 \qquad [\, t = 4y + c_1 \text{ और } c_1 = x - 3y - z \text{ प्रतिस्थापित करने पर} \,] \tag{53}$$

दिए हुए समीकरण के समाकल वक्र इस प्रकार पृष्ठों (50) और (53) के प्रतिच्छेदन के रूप में प्राप्त होते हैं।

★★★

ऊपर दिए उदाहरणों में, आपने यह अवश्य देखा होगा कि समीकरणों (31) को हल करने के लिए, हमने फलनों (P_1, Q_1, R_1) और (P_2, Q_2, R_2) के एक ऐसे समुच्चय को ज्ञात करने का प्रयास किया जो संबंधों (41) और (42) को संतुष्ट करता हो तथा व्यंजकों (44) और (45) से यथातथ अवकल प्राप्त होते हों। परंतु कभी-कभी ऐसा करना संभव नहीं होता। ऐसी स्थितियों में, ऐसे फलनों (P_1, Q_1, R_1) और (P_2, Q_2, R_2) को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए ताकि या तो व्यंजक

$$\frac{P_1dx + Q_1dy + R_1dz}{PP_1 + QQ_1 + RR_1} \text{ और } \frac{P_2dx + Q_2dy + R_2dz}{PP_2 + QQ_2 + RR_2} \tag{54}$$

यथातथ अवकल हों जैसाकि हमने ऊपर किया है, या इन भिन्नों को समीकरणों (31) के दो भिन्नों के साथ लेने पर यथातथ अवकल प्राप्त हो, जैसा कि हम अगले उदाहरण में स्पष्ट कर रहे हैं।

उदाहरण 11 : समीकरण-निकाय

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{3y+4z} = \frac{dz}{2y+5z}$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण-निकाय का प्रत्येक भिन्न

$$\frac{dy - dz}{y - z} \text{ और } \frac{dy + 2dz}{7(y+2z)} \tag{55}$$

के बराबर है। इस प्रकार, हमें प्राप्त है :

$$\frac{dy - dz}{y - z} = \frac{dy + 2dz}{7(y+2z)}$$

समाकलित करने पर, हमें एक पृष्ठ-कुल

$$y - z = c_1(y + 2z)^{1/7} \tag{56}$$

के रूप में प्राप्त होता है।

दूसरा पृष्ठ-कुल ज्ञात करने के लिए, हम दिए हुए समीकरणों में से पहले भिन्न को संबंध (51) के पहले भिन्न के साथ लेते हैं। अर्थात्,

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy - dz}{y - z}.$$

समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$y - z = c_2 e^{-x} \tag{57}$$

दोनों पृष्ठ-कुलों (56 और 57) का प्रतिच्छेदन दिए हुए समीकरण-निकाय के समाकल वक्र प्रदान करता है।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E6) निम्नलिखित समीकरण-निकाय के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए :

i) $$\frac{dx}{y^3x-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}$$

ii) $$\frac{xdx}{z^2-2yz-y^2}=\frac{dy}{y+z}=\frac{dz}{y-z}$$

iii) $$\frac{dx}{\cos(x+y)}=\frac{dy}{\sin(x+y)}=\frac{dz}{z}$$

iv) $$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{2}=\frac{dz}{5z+\tan(y-2x)}$$

ऐसी भी स्थिति हो सकती है कि, समीकरणों (31) के समुच्चय में एक समीकरण में एक चर अनुपस्थित हो। ऐसी स्थितियों में, हम समाकल वक्रों की व्युत्पत्ति एक सरल विधि से कर सकते हैं। अगले उपभाग में, हम इस विधि को लेंगे।

14.4.2 एक चर अनुपस्थित

हम इस विधि को एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

युगपत अवकल समीकरणों के एक निकाय

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{xyz-2x^2} \tag{58}$$

पर विचार कीजिए।

आप देख सकते हैं कि इस निकाय के प्रथम दो भिन्नों में चर z अनुपस्थित है तथा हम समीकरण

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{y^2}$$

को $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)=y/x$ के रूप में लिख सकते हैं।

ऊपर दिए समीकरण को सरलता से समाकलित करके हम पहला हल

$$x=c_1\ y \tag{59}$$

के रूप में प्राप्त कर सकते हैं।

समीकरणों (58) के अंतिम दो भिन्नों को लेकर, उनमें समीकरण (59) से x का मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xyz - 2x^2}$$

या, $$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{c_1 y^2 z - 2c_1^2 y^2}$$

या, $$c_1 dy = \frac{dz}{z - 2c_1}$$

जिसे सरलता से समाकलित करके समीकरणों (58) का दूसरा हल प्राप्त किया जा सकता है। उपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर हम पाते हैं :

$$c_1 y = \ln|(z - 2c_1)| + c_2$$

या, $$x = \ln\left|\left(z - \frac{2x}{y}\right)\right| + c_2 \qquad [\because x = c_1 y]$$

या, $$x = \ln|(yz - 2x)| - \ln|y| + c_2 \tag{60}$$

अतः, समीकरणों (58) के पूर्ण हल समीकरणों (59) और (60) से प्राप्त हो जाता है। समीकरणों (58) के समाकल वक्र पृष्ठों $x/y = c_1$ और $x - \ln|(yz - 2x)| + \ln y = c_2$ का प्रतिच्छेदन है।

व्यापक रूप में, मान लीजिए कि चर x समीकरण-निकाय (31) के फलनों Q और R में प्रकट नहीं होता है। तब, हल किए जाने वाले समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(y, z)} = \frac{dz}{R(y, z)} \tag{61}$$

ऊपर दिए समुच्चय के अंतिम दो भिन्नों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{Q(y, z)}{R(y, z)} = f(y, z) \tag{62}$$

समीकरण (62) चरों y, z में एक प्रथम कोटि का समीकरण है तथा इसका हल

$$\phi(y, z, c_1) = 0, \tag{63}$$

के रूप का होगा, जहाँ c_1 एक स्वेच्छ अचर है।

संबंध (63) को z के लिए हल करने पर तथा इसे समीकरणों (61) के प्रथम दो भिन्नों में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(y, z)}{P(x, y, z)} = g(x, y, c_1)$$

प्राप्त समीकरण पुनः x, y में प्रथम कोटि का समीकरण है तथा इसका हल

$$\psi(x, y, c_1, c_2) = 0$$

के रूप का होगा जहाँ c_2 एक स्वेच्छ अचर है। इस प्रकार समीकरणों (61) के समाकल वक्र, पृष्ठों $\phi(y, z, c_1) = 0$ और $\psi(x, y, c_1, c_2) = 0$ के प्रतिच्छेदन हैं। हम इस विधि को एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 12 : समीकरणों

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+y^2}$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरणों के दिए समुच्चय के अंतिम दो अनुपातों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = y$$

यह एक रैखिक समीकरण है तथा इसका हल है :

$$z - y^2 = c_1 y \tag{64}$$

समीकरण (64) से प्राप्त z के मान को दिए हुए समीकरणों के प्रथम अनुपात में प्रतिस्थापित करने तथा पहले दो अनुपातों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y + c_1$$

यह पुनः x और y में एक रैखिक समीकरण है तथा इसका हल है :

$$x = c_1\, y \ln|y| + y^2 + c_2 y$$

समीकरण (64) से c_1 का मान ऊपर समीकरण में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = (z - y^2)\ \ln|y| + y^2 + c_2 y \tag{65}$$

दिए हुए समीकरणों के समाकल वक्र समीकरणों (64) और (65) से प्राप्त हो जाते हैं।

★★★

और अब आपके लिए कुछ प्रश्न।

E7) निम्नलिखित युगपत् समीकरणों के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए :

i) $$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{3x^2 \sin(y+2x)}$$

ii) $$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{x^2 y^2 z^2}$$

iii) $$\frac{dx}{-\frac{y^2+z^2}{x}} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

iv) $$\frac{dx}{\cos(x+y)} = \frac{dy}{\sin(x+y)} = \frac{dz}{z+\frac{1}{z}}$$

E8) निम्नलिखित समीकरण-निकाय को हल कीजिए :

i) $$\frac{adx}{(b-c)yz} = \frac{bdy}{(c-a)zx} = \frac{cdz}{(a-b)xy}$$

ii) $$\frac{dx}{xz-y} = \frac{dy}{yz-x} = \frac{dz}{1-z^2}$$

iii) $$\frac{dx}{x^2(y^3-z^3)} = \frac{dy}{y^2(z^3-x^3)} = \frac{dz}{z^2(x^3-y^3)}$$

भाग 14.4 में, हमने युगपत् अवकल समीकरणों के निकाय को हल करने की विभिन्न विधियों की चर्चा की है। जैसा कि भाग 14.1 और 14.2 में पहले ही बताया जा चुका है कि युगपत समीकरण अधिकतर ज्यामिति और गणितीय भौतिकी में प्राप्त होते हैं। अगले भाग में, हम युगपत् अवकल समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों को लेंगे।

14.5 अनुप्रयोग

ज्यामितीय रूप से, जब एक वक्र-कुल $G(x, y, c_1) = 0$ की सभी वक्र अन्य कुल $H(x, y, c_2) = 0$ की सभी वक्रों को लांबिक रूप से प्रतिच्छेद करते हैं, तब हम कहते हैं कि ये कुल एक दूसरे के लंबकोणीय संछेदी (orthogonal trajectories) हैं। दूसरे शब्दों में, एक लंबकोणीय संछेदी ऐसा वक्र है जो एक अन्य कुल के प्रत्येक वक्र को समकोण पर प्रतिच्छेद करता है। एक दिए हुए पृष्ठ पर एक वक्र-निकाय की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात करने की समस्या युगपत अवकल समीकरणों का एक रोचक अनुप्रयोग प्रदान करती है। अगले उपभाग में, हम इस समस्या पर चर्चा करेंगे।

14.5.1 दिए हुए पृष्ठ के वक्र-निकाय की लंबकोणीय संछेदी

आप जानते हैं कि एक समतल द्वारा एक पृष्ठ का प्रतिच्छेदन एक वक्र होता है। जब हम शंकु (cone)

चित्र 6

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$$

और समांतर समतल निकाय $z = c$ का प्रतिच्छेदन लेते हैं, जहाँ c एक प्राचल है, तब हमें एक वृत्त निकाय प्राप्त होता है। (देखिए चित्र 6)।

ज्यामितीय रूप से, हम कह सकते हैं कि, इस स्थिति में, लंबकोणीय संछेदी शंकु के जनक (generators) हैं, जिन्हें चित्र 6 में बिंदुकित रेखाओं से दिखाया गया है। हम इसे उदाहरण 13 में दर्शाएँगे।

आपको याद होगा कि इकाई 6 के भाग 6.4 में, हमने समतल वक्र निकाय की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात करने की समस्या पर चर्चा की थी। तीन विमाओं में, संगत समस्या है कि दिए गए एक-प्राचल पृष्ठ-कुल

$$F(x, y, z) = c_1 \tag{66}$$

तथा उस पर एक वक्र-निकाय के लिए वक्रों का एक अन्य निकाय ज्ञात करना, जिनमें से प्रत्येक वक्र पृष्ठ (66) पर स्थित है, तथा दिए हुए निकाय के प्रत्येक वक्र को समकोण पर काटता है।

मान लीजिए कि दिया हुआ वक्र-निकाय एक-प्राचल पृष्ठ-कुल

$$G(x, y, z) = c_2 \tag{67}$$

और पृष्ठ (66) का प्रतिच्छेदन है।

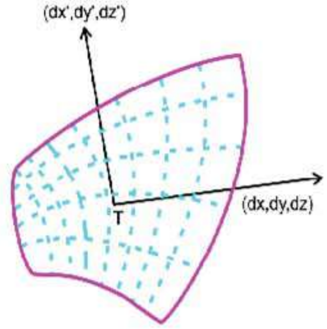
अब, हम पृष्ठ (66) पर एक अन्य वक्र-निकाय ज्ञात करना चाहते हैं जो दिए हुए वक्र-निकाय को लांबिकतः प्रतिच्छेद करता हो।

यदि (dr, dy, dz) पृष्ठ (66) पर स्थित एक बिंदु, मान लीजिए, $T(x, y, z)$ से होकर जाने वाले दिए हुए वक्र-निकाय की स्पर्शी दिशा को परिभाषित करता हो तो हमें प्राप्त है :

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \tag{68}$$

और $$\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz = 0 \tag{69}$$

dx, dy, dz के लिए, समीकरणों (68) और (69) को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :



चित्र 7

$$\frac{dx}{F_y G_z - F_z G_y} = \frac{dy}{F_z G_x - F_x G_z} = \frac{dz}{F_x G_y - F_y G_x}$$

या $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{70}$$

जहाँ $$P = F_y G_z - F_z G_y,\ Q = F_z G_x - F_x G_z,\ R = F_x G_y - F_y G_x \tag{71}$$

समीकरण (70) पृष्ठ (66) पर दिए हुए वक्र-निकाय के युगपत् अवकल समीकरण हैं।

इसी प्रकार, पृष्ठ (66) के बिंदु $T(x, y, z)$ से होकर जाने वाले लंबकोणीय वक्र-निकाय (देखिए चित्र 7) के वक्र के लिए, हम लिख सकते हैं :

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx' + \frac{\partial F}{\partial y} dy' + \frac{\partial F}{\partial z} dz' = 0 \tag{72}$$

जहाँ (dr', dy', dz') पृष्ठ (66) के बिंदु $T(x, y, z)$ पर लंबकोणीय निकाय की स्पर्शी दिशाओं को परिभाषित करते हैं।

साथ ही, लंबकोणीय प्रतिबंध के कारण, हमें समीकरण (70) से प्राप्त होता है :

$$Pdx' + Qdy' + Rdz' = 0 \tag{73}$$

समीकरणों (72) और (73) को dx', dy' और dz' के लिए हल करने पर, हमें समीकरण-निकाय

$$\frac{dx'}{P'} = \frac{dy'}{Q'} = \frac{dz'}{R'} \tag{74}$$

प्राप्त होता है, जहाँ

$$\left.\begin{aligned} P' &= R\frac{\partial F}{\partial y} - Q\frac{\partial F}{\partial z} \\ Q' &= P\frac{\partial F}{\partial z} - R\frac{\partial F}{\partial x} \\ R' &= Q\frac{\partial F}{\partial x} - P\frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

संबंध (66) के साथ समीकरणों (75) का हल अभीष्ट लंबकोणीय संछेदी निकाय प्रदान करता है।

हम निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा इस विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 13 : शंकु $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ पर, $z = c$ के समांतर समतल कुल के साथ प्रतिच्छेदन की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त है

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0$$

और $$G(x, y, z) = z = c,$$

अब, $$F_x = 2x,\ F_y = 2y,\ F_z = -2z\tan^2 \alpha,$$

$$G_x = 0,\ G_y = 0,\ G_z = 1.$$

इसलिए, संबंधों (71) से, हमें प्राप्त होता है :

$$P = F_y G_z - F_z G_y = 2y$$

$$Q = F_z G_x - F_x G_z = -2x$$

$$R = F_x G_y - F_y G_x = 0$$

इसी प्रकार, संबंधों (75) से, हमें प्राप्त होता है :

$$P' = RF_y - QF_z = -4xz\tan^2\alpha$$

$$Q' = PF_z - RF_x = -4yz\tan^2\alpha$$

$$R' = QF_x - F_yG_x = -4x^2 - 4y^2$$

अतः लंबकोणीय संछेदी निम्नलिखित द्वारा प्राप्त होती हैं :

$$\frac{dx}{-4xz\tan^2\alpha} = \frac{dy}{-4yz\tan^2\alpha} = \frac{dz}{-4(x^2+y^2)}$$

प्रथम दो भिन्नों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow |x| = c_1|y|,\ c_1 \text{ एक प्राचल है।}$$

साथ ही हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{xdx + ydy}{-4z\tan^2\alpha(x^2+y^2)} = \frac{dz}{-4(x^2+y^2)}$$

$$\Rightarrow \quad xdx + ydy = z\tan^2\alpha\ dz$$

समाकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x^2 + y^2 - z^2\tan^2\alpha = c_2$$

जहाँ c_2 एक प्राचल है।

अतः, लंबकोणीय संछेदी इस शंकु के जनक हैं, जो उसके पृष्ठ के साथ z-अक्ष से होकर जाने वाले समतलों $x = c_1 y$ के प्रतिच्छेदन से बनती है (देखिए चित्र 6)।

★★★

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 14 : समतल-कुल $z = k, -1 \le k \le 1$ के साथ गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के प्रतिच्छेदनों पर लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ,

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

और $\quad G(x, y, z) = z - k = 0.$

अतः,

$$F_x = 2x,\ F_y = 2y,\ F_z = 2z$$

$$G_x = 0,\ G_y = 0,\ G_z = 1$$

इस प्रकार, दिए गए समाकल वक्रों को परिभाषित करने वाला समीकरण-निकाय है :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

जहाँ

$$P=F_yG_z-F_zG_y=2y$$

$$Q=F_zG_x-F_xG_z=-2x$$

$$R=F_xG_y-F_yG_x=0\,.$$

लंबकोणीय संछेदी निम्नलिखित समीकरण-निकाय द्वारा प्राप्त हो जाती हैं :

$$\frac{dx}{P'}=\frac{dy}{Q'}=\frac{dz}{R'}$$

जहाँ

$$P'=RF_y-QF_z=4xz,$$

$$Q'=PF_z-RF_x=4yz,$$

$$R'=QF_x-PF_y=-4(x^2+y^2).$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dx}{4xz}=\frac{dy}{4yz}=\frac{dz}{-4(x^2+y^2)}. \qquad (76)$$

समीकरणों (76) के हल है :

$$|y|=c_1|x|,\ \text{और}\ x^2+y^2+z^2=c_2$$

जहाँ c_1, c_2 प्राचल हैं।

अतः लंबकोणीय संछेदी समतलों $|y|=c_1|x|$ के साथ पृष्ठ $x^2+y^2+z^2=c_2$ के प्रतिच्छेदन वक्र हैं।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E9) अतिपरवलयज $x^2+y^2-z^2=1$ पर उन शांकवों की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए जिनमें वह समतल-कुल $x+y=c$ से प्रतिच्छेदित होती है।

E10) शांकवज $(x+y)z=1$ पर उन शांकवों की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए, जिनमें वह समतल-निकाय $x-y+z=k$ द्वारा प्रतिच्छेदित होती है, जहाँ k एक प्राचल है।

अब हम प्रावस्था-समतल (phase-plane) में कण-गतिकी (particle dynamics) से एक अन्य अनुप्रयोग पर चर्चा करेंगे। यहाँ प्रावस्था-समतल xy-समतल है, जिसमें कण गति कर रहा है। इस समस्या में, हमें xy-समतल में एक दिए हुए बिंदु, मान लीजिए (x_0, y_0) से होकर जाने वाले ऐसे वक्र को ज्ञात करना है, जिसके अनुदिश एक कण सरल आवर्त गति (simple harmonic motion) में चलता रहता है।

14.5.2 प्रावस्था आकाश में कण गति

आप जानते हैं कि (देखिए भाग 13.6, इकाई 13) किसी कण की सरल आवर्त गति को नियंत्रित करने वाली समीकरण है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = 0,\ x(0) = x_0,\ \frac{dx}{dt}(0) = y_0 \tag{77}$$

मान लीजिए कि

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{78}$$

समीकरणों (77) और (78) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dt} = -w^2 x$$

या,
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-w^2 x} = dt,\ y(x_0) = y_0 \tag{79}$$

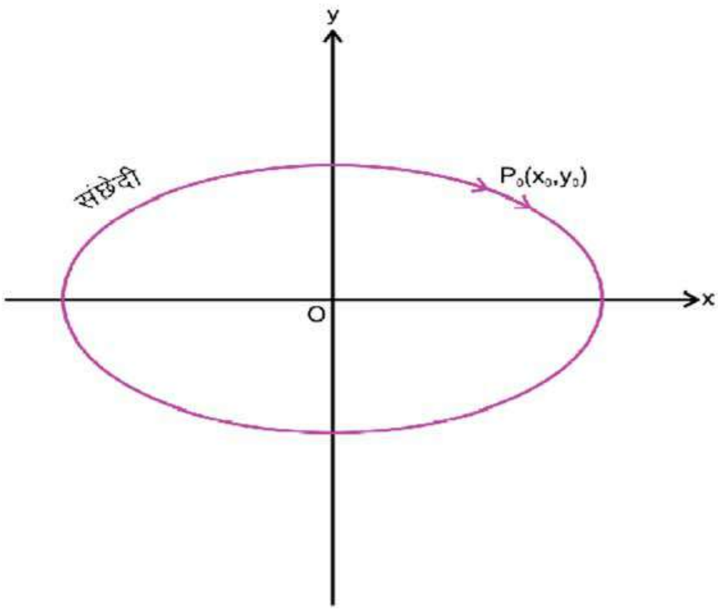
समीकरण निकाय (79) में समय चर स्पष्ट रूप से प्रकट नहीं हो रहा है। इन समीकरणों को स्वतः (autonomous) कहा जाता है।

समीकरण (79) युगपत् अवकल समीकरण हैं जो प्रावस्था-समतल (phase-space) में कण की गति को परिभाषित करते हैं।

समीकरणों (79) को समाकलित करने पर, हम

$$w^2 x^2 + y^2 = w^2 x_0^2 + y_0^2. \tag{80}$$

प्राप्त करते हैं। समाकल वक्र (संछेदी) चित्र 8 में दर्शाया गया है।



चित्र 8

संछेदी पर लगा तीर समय के साथ गतिकीय तंत्र के विकास के बारे में बताता है।

अब, आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E11) दो आलंब-बिंदुओं से लटक रही एक भारी डोरी की साम्यावस्था को नियंत्रित करने वाला युगपत् अवकल समीकरण-निकाय निर्धारित कीजिए, जहाँ H डोरी के निम्नतम बिंदु L पर क्षैतिज तनाव है, T बिंदु P पर डोरी में तनाव है तथा W डोरी के भाग P पर लगा भार है।

अब, हम युगपत् समीकरणों के एक अन्य अनुप्रयोग की चर्चा करेंगे। जिसमें वैद्युत परिपथ की समस्या युगपत् अवकल समीकरण-निकाय में समानीत हो जाती है।

14.5.3 वैद्युत परिपथ

आपको याद होगा कि खंड 13 की, इकाई 13 के भाग 13.6, में हमने एक ऐसे वैद्युत परिपथ का अवकल समीकरण प्राप्त किया था, जिसमें एक प्रेरकत्व (inductance) L, एक प्रतिरोध R, धारित C वाला एक चालक और एक वैद्युत चुंबकीय बल $E(t)$ (देखिए समीकरण (127) इकाई 13)।

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t) \tag{81}$$

के रूप में लगे हुए थे, जहाँ i धारा है तथा q आवेश है। साथ ही, हम यह भी जानते हैं कि धारा i आवेश q में तात्क्षणिक परिवर्तन दर होती है तथा हमें प्राप्त है:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{82}$$

समीकरणों (81) और (82) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{di}{dt} = \frac{E(t) - iR - \frac{q}{C}}{L} \text{ और } \frac{dq}{dt} = i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{\frac{\left(E(t) - iR - \frac{q}{C}\right)}{L}} = \frac{dq}{i} = \frac{dt}{1} \tag{83}$$

समीकरण (83) वैद्युत परिपथ में हो रहे कंपनों को परिभाषित करने वाले युगपत् अवकल समीकरण निकाय है। समीकरण (83) के हल से किसी समय t पर आवेश और धारा प्राप्त हो जाते हैं।

आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 15 : एक वैद्युत परिपथ में 0.1 हेनरी वाला एक प्रेरकत्व, 20 ओम वाला एक प्रतिरोध और 25 माइक्रोफैरड वाला एक कंडेंसर लगा हुआ है। समय t पर आवेश और धारा को नियंत्रित करने वाला समीकरण निकाय ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $L = 0.1$, $R = 20$, $C = 25$ माइक्रोफैरड $= 25 \times 10^{-6}$ फैरड, और $E(t) = 0$.

इस स्थिति में, वैद्युत परिपथ में कंपनों को नियंत्रित करने वाले युगपत समीकरण (83) निम्न रूप में समानीत हो जाते हैं:

$$\frac{di}{\frac{\left(E(t) - Ri - \frac{q}{c}\right)}{L}} = \frac{dq}{i} = \frac{dt}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{-200i - 400{,}000q} = \frac{dq}{i} = \frac{dt}{1},$$

जहाँ किसी समय t पर q आवेश है और i धारा है।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E12) उदाहरण 15 में, नियंत्रित करने वाले समीकरण का रूप क्या होगा, यदि $100 \cos 200t$ वोल्ट का एक परिवर्ती वैद्युत चुंबकीय बल लगा हो।

इस इकाई में हमने जो अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए इस इकाई को हम यहीं समाप्त कर रहे हैं।

14.6 सारांश

इस इकाई में, हमनें निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन

1. i) आकाश वक्र $f(x. y, z) = 0$ को प्राचलिक समीकरण $x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ z = \theta(t),\ t_1 \le t \le t_2$ होते हैं, जबकि $f(\phi(t), \psi(t), \theta(t)) = 0$ जहां $t_1 \le t \le t_2$.

   ii) एक पृष्ठ का समीकरण $f(x, y, z) = 0$ या $z = F(x, y)$ होता है।

   iii) समीकरण $f(x, y, z, c) = 0$ एक-प्राचल पृष्ठ-कुल को निरूपित करता है, जहाँ c एक प्राचल है।

   iv) एक-प्राचल पृष्ठ-कुल का अन्वालोप एक पृष्ठ होता है जो

   $f(x, y, z, c) = 0$ और $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$ से c को विलुप्त करने पर प्राप्त होता है।

   v) अभिलक्षणिक वक्र $f(x, y, z, c) = 0$ और $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$ द्वारा दिए जाने वाले पृष्ठों का प्रतिच्छेदन होता है।

   vi) समीकरण $f(x, y, z, a, b) = 0$ दो प्राचलों a और b वाले दो प्राचल पृष्ठ-कुल को निरूपित करता है। यदि $b = \phi(a)$ है, तो पृष्ठ $f(x, y, z, a, b) = 0$ का अभिलक्षणिक वक्र पृष्ठ

   $f(x, y, z, a, \phi(a)) = 0$ तथा $\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{ba} = 0$ का प्रतिच्छेदन होता है।

vii) समीकरण $f(x, y, z, a, b) = 0, \frac{\partial f}{\partial a} = 0$ और $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ एक बिंदु निरूपित करते हैं, जो दो-प्राचल पृष्ठ-कुल का अभिलक्षणिक बिंदु कहलाता है।

vii) दो-प्राचल पृष्ठ-कुल का अन्वालोप उसके अभिलक्षणिक बिंदु से जनित होता है तथा यह समीकरणों $f(x, y, z, a, b) = 0, \frac{\partial f}{\partial a} = 0$ और $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ से a और b को विलुप्त करके प्राप्त किया जाता है।

2. युगपत अवकल समीकरण निरूपित करते हैं :

   i) दो पृष्ठों के प्रतिच्छेदन के रूप में एक आकाश वक्र।

   ii) गतिकीय तंत्र के गति समीकरण।

   iii) रेडियोएक्टिव रूपांतरणों के सिद्धांत को नियंत्रित करने वाले समीकरण।

3. युगपत् अवकल समीकरण-निकाय

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

को निम्नलिखित विधियों द्वारा हल किया जा सकता है :

   i) **गुणक-विधि** : इस विधि में, हम ऐसे गुणक P_1, Q_1, R_1 और P_2, Q_2, R_2 (अचर या x, y, z के फलन) ज्ञात करते हैं जिससे कि

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz}{PP_1 + QQ_1 + RR_1} = \frac{P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz}{PP_2 + QQ_2 + RR_2}$$

जहाँ $PP_1 + QQ_1 + RR_1 = 0$

और $PP_2 + QQ_2 + RR_2 = 0$

साथ ही, $P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0$ और $P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz = 0$ या तो यथातथ अवकल हों या यथातथ अवकलों में बदले जा सकते हैं तथा इनके समाकलन से पृष्ठ-कुल प्राप्त होता है, जिनका प्रतिच्छेदन दिए हुए समीकरणों का समाकल वक्र होता है।

   ii) **एक चर अनुपस्थित** : इस स्थिति में, हम एक हल पृष्ठ ज्ञात करते हैं तथा इसके उपयोग से दिए हुए निकाय से दूसरा हल पृष्ठ ज्ञात करते हैं।

4. युगपत् अवकल समीकरणों के अनुप्रयोग के रूप में, हम प्राप्त करते हैं कि

   i) पृष्ठों $F(x, y, z) = C_1$ और $G(x, y, z) = C_2$ के प्रतिच्छेदन के रूप में, प्राप्त आकाश वक्रों की लंबकोणीय संछेदी, निम्नलिखित युगपत् अवकल समीकरण-निकाय के हल होते हैं :

$$\frac{dx}{F_y(F_xG_y - F_yG_x) - F_z(F_zG_x - F_xG_z)}$$
$$= \frac{dy}{F_z(F_yG_z - F_zG_y) - F_x(F_xG_y - F_yG_x)}$$
$$= \frac{dz}{F_x(F_zG_x - F_xG_z) - F_y(F_yG_z - F_zG_y)}.$$

ii) प्रावस्था-आकाश में कण-गति समीकरण-निकाय

$\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-w^2x} = dt,\ y(x_0) = y_0$ द्वारा नियंत्रित होती है।

iii) एक वैद्युत परिपथ में कंपनों को समीकरण-निकाय

$$\frac{di}{\dfrac{\left(E(t) - iR - \dfrac{q}{C}\right)}{L}} = \frac{dq}{i} = \frac{dt}{1}$$

से निरूपित किया जा सकता है।

14.7 हल / उत्तर

E1) i) दिए गए पृष्ठ का समीकरण है:

$x^2 + y^2 = 2z, -\infty < z, < \infty$

इस पृष्ठ का तल $z = k$ से प्रतिच्छेदन वृत्त $x^2 + y^2 = 2k$ है। यदि हम $x = \sqrt{2k}\cos\theta,\ y = \sqrt{2k}\sin\theta$ लें, तो यह समीकरण संतुष्ट हो जाता है अतः दिए हुए पृष्ठ का प्राचलिक समीकरण है :

$$x = \sqrt{2k}\cos\theta,\ y = \sqrt{2k}\sin\theta,\ z = k$$

क्योंकि z का प्राँत $-\infty < z < \infty$ हैं, इसलिए हम

$z = \sinh\alpha$ स्थापित करते हैं तब यह प्राचलिक समीकरण

$x = \sqrt{2\sinh\alpha}\cos\theta,\ y = \sqrt{2\sinh\alpha}\sin\theta$ में बदल जाता है,

जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi,\ -\infty < \alpha < \infty$.

ii) पृष्ठ के दिए हुए समीकरण हैं :

$$\left.\begin{aligned} x &= u\cos v \\ y &= u\sin v \\ z &= u\cot v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{x}{u} = \cos v \\ &\frac{y}{u} = \sin v \\ \text{और } &z = u\cot v \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{u^2}=\cos^2 v+\sin^2 v=1$$

अर्थात्, $x^2+y^2=u^2=\left(\frac{z}{\cot v}\right)^2=z^2\tan^2 v$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=z^2\tan^2 v$, जो पृष्ठ का अभीष्ट कार्तीय समीकरण हैं।

E2) हम समीकरणों $f=x^2+y^2+(z-c)^2-c^2\sin^2\alpha=0$

और $\frac{\partial f}{\partial c}=-2(z-c)-2c\sin^2\alpha=0 \Rightarrow z=c\,\cos^2\alpha$ के बीच से प्राचल c

को विलुप्त करके अन्वालोप प्राप्त कर सकते हैं। c को विलुप्त करने पर, हम ज्ञात करते हैं कि अन्वालोप शंकु

$x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$ है

तथा अभिलक्षणिक वक्र

$$x^2+y^2=c^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$z=c\,\cos^2\alpha$$

द्वारा प्राप्त होता है, जो समतल $z=c\,\cos^2\alpha$ में त्रिज्या $c\sin\alpha\cos\alpha$ का एक वृत्त है।

E3) दो-प्राचल गोला-कुल का समीकरण है:

$$f=(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-1=0.$$

यहाँ $f_a=0 \Rightarrow -2(x-a)=0 \Rightarrow (x-a)=0$

$$f_b=0 \Rightarrow -2(y-b)=0 \Rightarrow (y-b)=0$$

$f=0,\ f_a=0$ और $f_b=0$ की बीच में से a और b को विलुप्त करने पर, दिए हुए गोला-कुल का अन्वालोप है :

$$z^2-1=0$$

$\Rightarrow \quad z=1$ और $z=-1$

अब, एक-प्राचल कुल है :

$$g=(x-a)^2+(y-a)^2+z^2-1=0$$

अभिलक्षणिक वक्र निम्नलिखित द्वारा प्राप्त है :

$g=0$ और $\frac{\partial g}{\partial a}=0$

$$\Rightarrow \quad (x-a)^2+(y+a)^2+z^2-1=0 \text{ और } 2(x-a)+2(y-a)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-a)^2+(y-a)^2+z^2-1=0 \text{ और } (x+y)=2a$$

अतः, अभिलक्षणिक वक्र है ($g=0$ और $\frac{\partial g}{\partial a}=0$ से a को विलुप्त करने पर)

$$\left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(y-\frac{x+y}{2}\right)^2+z^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(x-y)^2+\frac{1}{4}(y-x)^2+z^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-y)^2=2(1-z^2)$$

E4) i) दिए हुए पृष्ठ कुल हैं :

$$u=3x+4y+z-c_1=0 \text{ और } v=x+z-c_2=0$$

इन कुलों के किसी भी वक्र के अनुदिश

$$du=0 \text{ और } dv=0$$

अब $du=0 \Rightarrow 3dx+4dy+dz=0$

तथा $dv=0 \Rightarrow dx+dz=0$

dx, dy, dz, के लिए, हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{4}=\frac{dy}{1-3}=\frac{dz}{-4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{-2}$$

जो आकाश-वक्रों के अभीष्ट युगपत् अवकल समीकरण हैं।

ii) दिए हुए पृष्ठ-कुल हैं :

$$u=x^2+y^2-c_1 \text{ और } v=3x+4z-c_2=0$$

$$du=0 \Rightarrow 2x\,dx+2y\,dy=0$$

$$dv=0 \Rightarrow 3dx+4dz=0$$

dx, dy, dz, के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{8y}=\frac{dy}{-8x}=\frac{dz}{-6y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{4y}=\frac{dy}{-4x}=\frac{dz}{-3y}$$

जो आकाश-वक्रों के अभीष्ट युगपत् अवकल समीकरण हैं।

iii) $du = ydx + xdy = 0$

$dv = (z+2x)dx + (3+2y)dy + (x+y)dz = 0$

dx, dy, dz के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(z+2y+2x)}.$$

E5) i) दिए हुए समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

दूसरी और तीसरी भिन्नों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{z} = c_1$$

पहली दो भिन्नों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{y} \text{ या } dx = y\, dy$$

$$\Rightarrow \quad 2x - y^2 = c_2$$

अभीष्ट समाकल वक्र पृष्ठ-कुलों

$y = zc_1$ और $2x - y^2 = c_2$ के प्रतिच्छेदन द्वारा प्राप्त हो जाते हैं।

ii) दिए हुए निकाय की प्रथम दो भिन्नों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow x/y = c_1 \text{ या } x = c_1 y \qquad (84)$$

दूसरी और तीसरी भिन्नों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{c_1 z\, y^2 - 2c_1^2 y^2} \text{ या } c_1 dy = \frac{dz}{z - 2c_1^2} \quad (\because x = c_1 y)$$

जिसे समाकलित करने पर प्राप्त होता है :

$$c_1 y - \ln|(z - 2c_1^2)| = c_2 \text{ या } x - \ln|(z - 2x^2/y^2)| = c_2 \qquad (85)$$

अभीष्ट समाकल वक्र पृष्ठ-कुलों (84) और (85) के प्रतिच्छेदन द्वारा प्राप्त हो जाते हैं।

iii) अभीष्ट समाकल वक्र पृष्ठ-कुलों $x^3 - y^3 = c_1$ और $x^2 - z^2 = c_2$ के प्रतिच्छेदन हैं।

E6) i) दिए हुए समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{y^3x - 2x^4} = \frac{dy}{2y^4 - x^3y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}$$

यहाँ, $P = y^3x - 2x^4,\ Q = 2y^4 - x^3y,\ R = 9z(x^3 - y^3)$.

यदि हम $P_1 = \frac{1}{x},\ Q_1 = \frac{1}{y},\ R_1 = \frac{1}{3z}$, लें, तो

$$PP_1 + QQ_1 + RR_1 = \frac{1}{x}(y^3x - 2x^4) + \frac{1}{y}(2y^4 - x^3y) + \frac{1}{3z}(x^3 - y^3) = 0$$

इस प्रकार, दिए हुए समीकरण-निकाय के लिए, हमें प्राप्त है :

$$\frac{dx}{y^3x - 2x^4} = \frac{dy}{2y^4 - x^3y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)} = \frac{dx/x + dy/y + dz/(3z)}{0}$$

अंतिम भिन्न से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{3z} = 0$$

$$\Rightarrow\ d\left(\ln|x| + \ln|y| + \frac{1}{3}\ln|z|\right) = 0$$

इसे समाकलित करने पर, हम $\ln|x||y||z|^{1/3} =$ अचर प्राप्त करते हैं।

$\Rightarrow\ |x|.|y|.|z|^{1/3} = c_1$

पहली और दूसरी भिन्नों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$(2y^4 - x^3y)\,dx - (y^3x - 2x^4)\,dy = 0$$

x^3y^3, से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{2y}{x^3}dx - \frac{1}{y^2}dx - \frac{1}{x^2}dy + \frac{2x}{y^3}dy = 0$$

$$\Rightarrow\ -\left(-\frac{2y}{x^3}dx + \frac{dy}{x^2}\right) - \left(\frac{dx}{y^2} - \frac{2x}{y^3}dy\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ d\left(\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right) = 0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=c_2$$

इस प्रकार, समाकल वक्र पृष्ठ-कुल

$\Rightarrow \ |x|.|y|.|z|^{1/3} \ = c_1$ और $\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}=c_2$ का प्रतिच्छेदन हैं।

ii) दिए हुए समीकरण हैं :

$$\frac{x\ dx}{z^2-2yz-y^2}=\frac{dy}{y+z}=\frac{dz}{y-z} \tag{86}$$

दूसरी और तीसरी भिन्नों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dz}=\frac{y+z}{y-z}$$

यह y और z में एक समघात समीकरण है। इसे हल करने के लिए, हम $y=vz$ रखते हैं तथा हल के रूप में प्राप्त करते हैं।

$z^2(-v^2+2v+1)=$ अचर

$\Rightarrow \ -y^2+2yz+z^2=c_1$, मान लीजिए, ($v=y/z$ प्रतिस्थापित करने पर) (87)

साथ ही, समीकरणों (86) में, प्रत्येक भिन्न $=\dfrac{xdx+ydy+zdz}{0}$

$$\therefore x\ dx+y\ dy+z\ dz=0$$

$$\Rightarrow \ d(x^2+y^2+z^2)=0$$

इसे समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2+y^2+z^2=c_2 \tag{88}$$

समीकरणों (87) और (88) से, अभीष्ट समाकल वक्र पृष्ठ-कुलों

$z^2+2yz-y^2=c_1$ और $x^2+y^2+z^2=c_2$ के प्रतिच्छेदन हैं।

iii) दिए हुए समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{\cos(x+y)}=\frac{dy}{\sin(x+y)}=\frac{dz}{z} \tag{89}$$

समीकरणों (89) में, प्रत्येक भिन्न $=\dfrac{d(x+y)}{\cos(x+y)+\sin(x+y)}$

इस प्रकार, $\frac{dz}{z} = \frac{d(x+y)}{\cos(x+y)+\sin(x+y)}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dU}{\cos U + \sin U}, \text{ जहाँ } U = x + y.$$

इसे समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln|z| = \int \frac{1}{\sin U + \cos U} dU + \text{अचर}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \operatorname{cosec}\left(U + \frac{\pi}{4}\right) dU + \text{अचर}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{U}{2}\right) \right| + \text{अचर}$$

$$\Rightarrow |z|^{\sqrt{2}} \left| \cot\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x+y}{2}\right) \right| = c_1 \ (U = x + y) \tag{90}$$

पुनः समीकरणों (89) में प्रथम दो भिन्नों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x+y) \tag{91}$$

$x + y = V$, रखने पर, समीकरण (91) इस रूप में बदल जाता है :

$$\frac{dV}{1 + \tan V} = dx$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x + \text{अचर} = \frac{1}{2}[V + \ln|\cos V + \sin V|]$$

$$= \frac{1}{2}[(y+x) + \ln|\cos(y+x) + \sin(y+x)|]$$

$$\Rightarrow 2x + \text{अचर} = (y+x) + \ln|\cos(y+x) + \sin(y+x)|$$

$$\Rightarrow c_2 = e^{y-x}|\cos(y+x) + \sin(y+x)| \tag{92}$$

अतः अभीष्ट समाकल वक्र पृष्ठ-कुलों (90) और (92) के प्रतिच्छेदन हैं।

iv) दिए हुए समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{5z + \tan(y - 2x)} \tag{93}$$

पहली और दूसरी भिन्नों से, हम निम्न पृष्ठ कुल प्राप्त करते हैं।

$$y - 2x = c_1 \qquad (94)$$

समीकरणों (93) की पहली और तीसरी भिन्नों से तथा संबंध (94) का उपयोग करके, हमें दूसरा पृष्ठ-कुल

$$5z + \tan(y - 2x) = c_2 e^{5x} \qquad (95)$$

के रूप में प्राप्त होता है।

अभीष्ट समाकल वक्र पृष्ठ-कुलों (94) और (95) के प्रतिच्छेदन हैं।

E7) i) $y + 2x = c_1$ और

$z - x^3 \sin(y + 2x) = c_2$.

ii) $x^3 - y^3 = c_1$

और $y^3 + \frac{3}{z} = c_2$.

iii) $\left| \frac{y}{z} \right| = c_1$ और $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$.

संकेत : $\dfrac{dx}{-\dfrac{y^2 + z^2}{x}} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{0}$

iv) $e^{y-x}\{\cos(x + y) + \sin(x + y)\} = c_1$

तथा $(z^2 + 1)^{1/\sqrt{2}} \cot\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x + y}{2}\right) = c_2$

संकेत : उसी प्रकार करिए जैसा E6) iii) में किया था।

E8) i) दिए हुए समीकरण हैं :

$$\frac{adx}{(b - c)yz} = \frac{bdy}{(c - a)zx} = \frac{cdz}{(a - b)xy}$$

यहाँ, $P = \frac{b - c}{a} yz,\ Q = \frac{c - a}{b} zx,\ R = \frac{a - b}{c} xy$.

मान लीजिए कि $P_1 = ax, Q_1 = by, R_1 = cz$. तब

$$PP_1 + QQ_1 + RR_1 = 0.$$

साथ ही, यदि हम

$P_2 = a^2 x,\ Q_2 = b^2 y,\ R_2 = c^2 z$ लें, तो

$$PP_2 + QQ_2 + RR_2 = 0.$$

इस प्रकार, दिए हुए समीकरणों में प्रत्येक भिन्न

$\dfrac{ax\ dx + by\ dy + cz\ dz}{0}$ और $\dfrac{a^2x\ dx + b^2y\ dy + c^2z\ dz}{0}$ के बराबर है।

इन भिन्नों को दिए हुए समीकरणों के भिन्नों में से किसी एक के साथ लेने पर, हमें दो पृष्ठ-कुल

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = c_1$$

और

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = c_2.$$ प्राप्त होते हैं।

ii) दिए हुए समीकरणों से प्राप्त होता है :

$$\frac{dx}{xz-y} = \frac{dy}{yz-x} = \frac{dz}{1-z^2} = \frac{dx+dy}{(x+y)\ (z-1)} = \frac{dx-dy}{(x-y)(z+1)}$$

जिनसे हमें दो पृष्ठ-कुल

$$(x+y)(z+1) = c_1$$

और $(x-y)(z-1) = c_2$ प्राप्त होते हैं।

iii) दिए हुए समीकरणों में प्रत्येक भिन्न

$\dfrac{\dfrac{dx}{x^2} + \dfrac{dy}{y^2} + \dfrac{dz}{z^2}}{0}$ और $\dfrac{xdx + ydy + zdz}{0}$ के बराबर है।

इस प्रकार, अभीष्ट पृष्ठ-कुल हैं:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1$$

और $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = c_2$.

E9) यहाँ $F = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ है तथा

$$G = x + y - c = 0.$$

अतः $F_x = 2x,\ F_y = 2y,\ F_z = -2z$

और $G_x = 1,\ G_y = 1,\ G_z = 0$.

अतः दिए हुए समाकल वक्रों को परिभाषित करने वाला समीकरण-निकाय है :

$$\frac{dx}{(F_yG_z - F_zG_y)} = \frac{dy}{(F_zG_x - F_xG_z)} = \frac{dz}{(F_xG_y - F_yG_x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2z} = \frac{dy}{-2z} = \frac{dz}{2x-2y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{z} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{x-y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \text{ जहाँ } P = z, Q = -z \text{ और } R = x - y,$$

लंबकोणीय संछेदी समीकरण-निकाय

$\frac{dx}{P'} = \frac{dy}{Q'} = \frac{dz}{R'}$ द्वारा प्राप्त हो जाती हैं

जहाँ

$$P' = RF_y - QF_z = 2[y(x-y) - z^2]$$

$$Q' = PF_z - RF_x = -2\,[x(x-y) + z^2]$$

$$R' = QF_x - PF_y = -2z\,(x+y).$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{y(x-y) - z^2} = \frac{dy}{-[x(x-y)+z^2]} = \frac{dz}{-z(x+y)}$$

$$= \frac{xdx + ydy - zdz}{0} = \frac{dx - dy}{x^2 - y^2}$$

चौथी भिन्न से प्राप्त होता है :

$$xdx + ydy - zdz = 0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$x^2 + y^2 - z^2 = c_1$$

तीसरी और पाँचवीं भिन्नों से प्राप्त होता है :

$$\frac{d\,(x-y)}{(x-y)} = \frac{dz}{-z}$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$|\,x - y\,|\,.\,|\,z\,| = c_2$$

अतः पृष्ठों $x^2 + y^2 - z^2 = c_1 = 1$ और $|\,x-y\,|\,.\,|\,z\,| = c_2$ के प्रतिच्छेदन

द्वारा लंबकोणीय संछेदी प्राप्त हो जाती हैं, जहाँ c_1 और c_2 प्राचल हैं।

E10) यहाँ $F = (x+y)z - 1 = 0$

$$G = x - y + z - k = 0.$$

दिए हुए समाकल वक्रों को परिभाषित करने वाला समीकरण निकाय है :

$$\frac{dx}{z+x+y}=\frac{dy}{x+y-z}=\frac{dz}{-2z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

जहाँ, $P = z+x+y$, $Q = x+y-z$ और $R = -2z$.

लंबकोणीय संछेदी समीकरणों

$\frac{dx}{P'}=\frac{dy}{Q'}=\frac{dz}{R'}$ द्वारा प्राप्त होती हैं, जहाँ

$$P' = -2z^2-(x+y-z)(x+y),\ Q' = (x+y)\ (x+y+z)+2z^2,\ R' = -2z^2.$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{-2z^2-(x+y-z)(x+y)}=\frac{dy}{(x+y)\ (x+y+z)+2z^2}$$

$$=\frac{dz}{-2z^2}=\frac{d(x+y)}{2z(x+y)}$$

तीसरी और चौथी भिन्नों को लेकर, और उन्हें समाकलित करने पर, हम $(x+y)z=1$ प्राप्त करते हैं।

पहली और तीसरी भिन्नों में $x+y=\frac{1}{z}$ का प्रयोग करने पर तथा फिर समाकलित करने पर हम $x+c_1=z+\frac{1}{2z}-\frac{6}{6z^3}$ प्राप्त करते हैं।

लंबकोणीय संछेदी निम्न वक्र हैं।

$$x+c_1=z+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6z^3},\ (x+y)z=1.$$

E11) मान लीजिए कि एक डोरी के दो आलंब-बिंदु A और B हैं (देखिए चित्र 9)। P पर तनाव T, L पर तनाव H तथा भार W के अंतर्गत डोरी का भाग LP साम्यावस्था में है। मान लीजिए कि चाप $LP = s$ है। यदि ψ क्षैतिज से P पर स्पर्श रेखा का झुकाव है, तो हमें प्राप्त है :

$$T\cos\psi = H \tag{96}$$

और $T\sin\psi = W$ (97)

चित्र 9

यदि W डोरी का प्रति इकाई लंबाई भार हो, तो $W = ws$ होगा और इसलिए समीकरणों (96) और (97) से हम प्राप्त करते हैं :

$$\tan\psi=\frac{ws}{H}=\frac{s}{c},\ (\text{मान लीजिए}) \tag{98}$$

जहाँ $c = H / w$.

यदि हम x और y अक्षों को क्रमशः क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अक्ष लें, तो

$$\frac{dy}{dx} = \tan\psi = \frac{s}{c} \text{ (समीकरण (98) के प्रयोग से)}$$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{c}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (99)$$

मान लीजिए कि $\frac{dy}{dx} = v$. (100)

तब, समीकरण (99) बन जाता है :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{c}\sqrt{1+v^2} \qquad (101)$$

समीकरणों (100) और (101) से, दिए हुए प्रतिबंधों के अंतर्गत, डोरी की साम्यावस्था को नियंत्रित करने वाले अभीष्ट युगपत् अवकल समीकरण हैं:

$$\frac{c\,dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dy}{v} = dx.$$

E12) यहाँ $L = 0.1,\ R = 20,\ c = 25\times10^{-6}$ और $E(t) = 100\cos 200t.$

इस प्रकार, वैधुत परिपथ को नियंत्रित करने वाले समीकरण हैं :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{di}{dt} + 200i + 400{,}000q = 100\cos 200t \\ &\text{और } \frac{dq}{dt} = i \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

समीकरणों (102) से वैधुत परिपथ की गति को नियंत्रित करने वाला अभीष्ट युगपत् समीकरण-निकाय

$$\frac{di}{100\cos 200t - (200i + 400{,}000q)} = \frac{dq}{i} = dt$$

रूप में प्राप्त हो जाता है।

—×—

इकाई 15

संपूर्ण अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

15.1 प्रस्तावना

खंड 2, इकाई 6 में, हमने आपको संपूर्ण अवकल और संपूर्ण अवकल समीकरणों से परिचित कराया था। इन समीकरणों में एक से अधिक आश्रित चर तथा एक स्वतंत्र चर आविष्ट होता है। इस इकाई में, हम ऐसे समीकरणों पर विस्तार से चर्चा करेंगे। n चरों में प्रथम कोटि के संपूर्ण अवकल समीकरण का व्यापक रूप

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 + F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_2 + \cdots + F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n = 0 \quad (1)$$

के प्रकार का होता है, जहाँ $F_i'(i = 1, 2, \ldots, n), n$ स्वतंत्र चरों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ में से सभी या कुछ के संतत फलन होते हैं।

समीकरण (1), जिसे **फैफियन अवकल समीकरण** (pfaffian differential equation) भी कहा जाता है, को हल करने में प्रथम महत्वपूर्ण योगदान 1814 में जर्मन गणितज्ञ जोहान फ्रेड्रिच फैफ (1765-1825) ने अपने एक संस्मरण में दिया। उन्हें 19वीं शताब्दि के समय काल में जर्मन का एक सबसे अधिक प्रख्यात गणितज्ञ माना जाता था। उन्होंने

समाकल कलन का अध्ययन किया तथा उन्हें प्रथम कोटि के फैफियन अवकल समीकरणों पर किए गए उनके कार्य के लिए जाना जाता है। बाद में 1909 में एक यूनानी गणितज्ञ कैराथेऑदोरी ने इन समीकरणों को भौतिकी के विभिन्न सिद्धांतों के गणितीय सूत्रीकरण, उदाहरण के तौर पर, ऊष्मागति के प्रथम और द्वितीय नियमों के सूत्रीकरण में उपयोग किया। लेजान्ड्रे-रूपांतरण (एक चर x से एक अन्य चर X में परिवर्तित करने के लिए एक विशेष प्रकार का रूपांतरण) दो चरों x और X वाले संपूर्ण अवकल समीकरणों से जनित होता है। परंतु हम इन अनुप्रयोगों की इस इकाई में चर्चा नही करेंगे, क्योंकि इनके लिए विभिन्न संकल्पनाओं की समझ की आवश्यकता है, जो इस कोर्स की सीमा के बाहर है।

इस इकाई में, हम मुख्यतः तीन चरों वाले संपूर्ण अवकल समीकरण पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे, जो कुछ प्रतिबंधों के अंतर्गत एक-प्राचल पृष्ठ-कुल को निरूपित कर सकता है। हम भाग 15.2 में संपूर्ण अवकल समीकरण के निर्माण पर विचार करते हुए प्रारंभ करेंगे तथा भाग 15.3 में इसकी समाकलनीयता के प्रतिबंधों को निर्धारित करेंगे। भाग 15.4 में, हम संपूर्ण अवकल समीकरण को हल करने की विभिन्न विधियों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- ❖ एक संपूर्ण अवकल समीकरण की पहचान कर सकेंगे;
- ❖ दर्शा सकेंगे कि 3-विमाओं में एक-प्राचल पृष्ठ-कुल से तीन चरों वाला एक संपूर्ण अवकल समीकरण प्राप्त होता है;
- ❖ दर्शा सकेंगे कि तीन चरों वाले एक संपूर्ण अवकल समीकरण को, 3-विमाओं में एक-प्राचल पृष्ठ-कुल प्राप्त करने के लिए समाकलित किया जा सकता है, यदि और केवल यदि कुछ समाकलनीयता प्रतिबंध संतुष्ट होते हों;
- ❖ तीन चरों वाले एक संपूर्ण अवकल समीकरण को हल करने के लिए विभिन्न विधियों का प्रयोग कर सकेंगे।

15.2 संपूर्ण अवकल समीकरण का निर्माण

हम एक सरल समीकरण पर विचार करते हुए प्रारंभ करते हैं। समीकरण

$$xy + z^2 = c \tag{2}$$

जहाँ x, y और z तीन चर हैं तथा c एक प्राचल है को लीजिए।

आप जानते हैं कि समीकरण (2) एक-प्राचल पृष्ठ-कुल को निरूपित करता है। समीकरण (2) का संपूर्ण अवकलज है :

$$d(xy + z^2) = 0$$

$$\Rightarrow \ y\,dx + x\,dy + 2z\,dz = 0 \tag{3}$$

जो समीकरण (1) के रूप का है तथा एक संपूर्ण अवकल समीकरण है। इस प्रकार, संपूर्ण अवकल समीकरण (3) समीकरण (2) द्वारा दिए जाने वाले एक-प्राचल पृष्ठ-कुल

के संगत है। व्यापक रूप में, 3-विमीय आकाश में, एक-प्राचल पृष्ठ-कुल के समीकरण

$$f(x, y, z) = c \tag{4}$$

पर विचार कीजिए, जहाँ c पृष्ठ को परिभाषित करने वाला प्राचल है। समीकरण (4) को अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \tag{5}$$

यदि f_x, f_y, f_z का एक सार्वगुणनखंड (Common factor) मान लीजिए, $\mu(x, y, z)$ है, तो हम लिख सकते हैं :

$f_x = \mu P, f_y = \mu Q$ और $f_z = \mu R$

जहाँ P, Q और R, (x, y, z) के फलन हैं।

तब, समीकरण (5)

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{6}$$

के रूप में बदल जाता है, जो तीन चरों वाला एक संपूर्ण अवकल समीकरण है। इस प्रकार, 3-विमाओं में एक-प्राचल पृष्ठ-कुल से एक तीन चरों वाला संपूर्ण अवकल समीकरण प्राप्त होता है। फिर हम समीकरण (6) को फलन $\mu(x, y, z)$ से गुणा करने के बाद समाकलित करके पृष्ठ-कुल (4) प्राप्त कर सकते हैं।

अब, हम निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा ऊपर चर्चा की गई विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 1: पृष्ठ-कुल $xy = c(a - z)$ के संगत, संपूर्ण अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ c एक प्राचल है।

हल: दिया हुआ पृष्ठ-कुल एक एक-प्राचल पृष्ठ-कुल है, जिसे

$$\frac{xy}{a - z} = c$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

ऊपर प्राप्त संबंध के संपूर्ण अवकलज से हमें प्राप्त होता है :

$$d\left(\frac{xy}{a - z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a - z)\, d(xy) - xy\, d(a - z)}{(a - z)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (a - z)\,[x\, dy + y\, dx] + xy\, dz = 0$$

जो दिए हुए पृष्ठ-कुल के संगत अभीष्ट अवकल समीकरण है।

★★★

उदाहरण 2: पृष्ठ-कुल $x^2+y^2+z^2=xc$ के संगत संपूर्ण अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ c एक प्राचल है।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x}=c$$

इस समीकरण का संपूर्ण अवकलज हमें प्रदान करता है :

$$d\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow\ d\left(\frac{x^2}{x}\right)+d\left(\frac{y^2}{x}\right)+d\left(\frac{z^2}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow\ dx+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}+\frac{2xzdz-z^2dx}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow\ x^2dx+2xydy-y^2dx+2xzdz-x^2dx=0$$

$$\Rightarrow\ (x^2-y^2-z^2)dx+2xydy+2xzdz=0,$$

जे अभीष्ट पूर्ण अवकल समीकरण है।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E1) निम्नलिखित पृष्ठ-कुलों में से प्रत्येक के लिए, संपूर्ण अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जबकि c प्रत्येक स्थिति में कुल परिभाषित करने वाला प्राचल है :

i) $x^3z+x^2y=c$

ii) $x^2+y^2+(z+c)^2=a^2$

iii) $xyz+x^2-2yz=c$

जैसा कि आपने ऊपर देखा संबंध (4) से प्रारंभ करके समीकरण (6) प्राप्त किया जा सकता है। परंतु क्या इसका विलोम भी सत्य है? अर्थात्, क्या (6) के रूप के समीकरण से सदैव (4) के रूप का संबंध प्राप्त किया जा सकता है? यह आवश्यक रूप से सदैव संभव नहीं है, क्योंकि संबंध (4) के अस्तित्व का अर्थ है कि तीनों फलन P, Q और R एक सार्व फलन के अवकल गुणांक के समानुपाती हैं और यह प्रतिबंध, व्यापक रूप में, संतुष्ट नहीं भी हो सकता।

अगले भाग में हम P, Q और R पर प्रतिबंध प्राप्त करेंगे, जिनके अंतर्गत समीकरण (6) के रूप के समीकरण से हम सदैव (4) के रूप का संबंध प्राप्त हो जाएँ। दूसरे शब्दों में, हम वे प्रतिबंध प्राप्त करेंगे, जिनके अंतर्गत समीकरण (6) समाकलनीय है।

15.3 संपूर्ण अवकल समीकरण की समाकलनीयता

आइए निम्नलिखित अवकल समीकरणों पर विचार करें :

$$3x^2(y+z)dx+(z^2+x^3)dy+(2yz+x^3)dz=0 \tag{7}$$

$$(3xz+2y)dx+xdy+x^2dz=0 \tag{8}$$

$$ydx+(z-y)dy+xdz=0 \tag{9}$$

ये सभी समीकरण (1) के रूप के होने के कारण संपूर्ण अवकल समीकरण हैं।

समीकरण (7) फलन

$$f(x, y, z)=x^3y+x^3z+z^2y=c$$

का यथातथ अवकल है, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

आप सरलता से जाँच कर सकते हैं कि

$$d[x^3y+x^3z+z^3y]=0$$

$$\Rightarrow 3x^2ydx+x^3dy+3x^2zdx+x^3dz+z^2dy+2zydz=0$$

$$\Rightarrow 3x^2(y+z)dx+(x^3+z^2)dy+(x^3+2zy)\,dz=0,$$

जो हमारा समीकरण (7) है। ऐसा समीकरण एक यथातथ समीकरण कहलाता है। इस प्रकार, समीकरण (7) एक यथातथ समीकरण है।

समीकरण (8) एक यथातथ अवकल नहीं है, परंतु x को एक समाकलन-गुणक (integrating factor) के रूप में प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(3x^2z+2xy)dx+x^2dy+x^3dz=0,$$

जो फलन $f(x, y, z)=x^3z+x^2y=c$ का यथातथ अवकल है जहाँ c एक अचर है।

समीकरण (7) और (8) समाकलनीय समीकरण कहलाते हैं। साथ ही, आप देख सकते हैं कि समीकरण (9) समाकलनीय नहीं है, क्योंकि इसके लिए कोई ऐसा फलन

$$f(x, y, z)=c$$

ज्ञात नहीं किया जा सकता जिसके यथातथ अवकल से समीकरण (9) प्राप्त हो सकें।

अब हम एक प्रमेय का कथन देंगे जो समीकरण (6) की समाकलनीयता के लिए प्रतिबंध देता है।

प्रमेय 1: एक **आवश्यक** और **पर्याप्त** प्रतिबंध जिससे कि संपूर्ण अवकल समीकरण

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

समाकलनीय हो निम्नलिखित है :

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \tag{10}$$

हम इस प्रमेय को यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे, क्योंकि यह इस पाठ्यक्रम के बाहर है। परंतु हम इसे उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे। आप देख सकते हैं कि समीकरण (8) की स्थिति में,

$$P = 3xz + 2y, Q = x \text{ और } R = x^2$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = 2, \frac{\partial P}{\partial z} = 3x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial R}{\partial x} = 2x, \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

तथा प्रतिबंध (10) के बाएं पक्ष से प्राप्त होता है :

$$(3xz + 2y)\,(0 - 0) + x(2x - 3x) + x^2(2 - 1)$$

$$= 0 - x^2 + x^2 = 0 = \text{समीकरण (10) का दायां पक्ष}$$

अतः समीकरण (8) समाकलनीय है।

इसी प्रकार, आप जाँच कर सकते हैं कि समीकरण (9) के लिए प्रतिबंध (10) का बायां पक्ष निम्नलिखित रूप में बदल जाता है :

$$y(1 - 0) + (z - y)\,(1 - 0) + x(1 - 0)$$

$$= y + z - y + x = z + x \neq 0$$

इस प्रकार समीकरण (10) संतुष्ट नहीं होता। अतः समीकरण (9) समकलनीय नहीं है।

आप देख सकते हैं कि प्रतिबंध (10) को सरलता से याद रखा जा सकता है, क्योंकि इसमें P, Q, R, x, y, z एक चक्रीय क्रम में प्रकट हो रहे हैं। इसको याद रखने की एक अन्य विधि है कि प्रतिबंध (10) को नीचे दिए सारणिक को उसकी प्रथम पंक्ति के अवयवों के पदों में प्रसारित करके प्राप्त किया जा सकता है :

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

साथ ही, समीकरण $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ के यथातथ होने के लिए प्रतिबंध है :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \text{ और } \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{11}$$

जब प्रतिबंध (11) संतुष्ट हो जाते हैं, तब समाकलनीयता प्रतिबंध (10), अर्थात्,

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

भी संतुष्ट हो जाता है, क्योंकि कोष्ठकों में दिया प्रत्येक पद सर्वसम रूप से शून्य हो जाता है। इस प्रकार, **एक यथातथ अवकल समीकरण सदैव समाकलनीय होता है।**

समीकरण (7) की स्थिति में, आप पाएँगे कि

$$P = 3x^2(y+z),\ \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 3x^2$$

$$Q = z^2 + x^3,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z$$

$$R = 2yz + x^3,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 3x^2,\ \frac{\partial R}{\partial y} = 2z$$

तथा प्रतिबंध (11) संतुष्ट हो जाते हैं। अतः समीकरण (7) एक यथातथ समीकरण है।

याद रखिए कि एक संपूर्ण अवकल समीकरण समाकलनीय हो सकता है, परंतु इसका यथातथ होना आवश्यक नहीं है, जैसा कि समीकरण (8) की स्थिति में है। समीकरण (8) को जब x से गुणा किया जाता है, तब यह प्रतिबंध (10) को संतुष्ट करता है, परंतु यह प्रतिबंध (11) को संतुष्ट नहीं करता।

जब दिया हुआ संपूर्ण अवकल समीकरण यथातथ हो, तब इस समीकरण के पदों को पुनः वर्गीकृत करने के बाद, जिससे प्रत्येक नया पद यथातथ अवकल हो जाए, समाकलित किया जा सकता है।

हम इसे एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 3 : जाँच कीजिए कि निम्नलिखित अवकल समीकरण यथातथ है तथा इसका हल ज्ञात कीजिए :

$$(yz + 2x)dx + (zx + 2y)dy + (xy + 2z)dz = 0$$

हल : दिए हुए समीकरण के लिए,

$$P = (yz + 2x),\ Q = (zx + 2y),\ R = (xy + 2z).$$

अब, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = z = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = x = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = y = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

इस प्रकार, प्रतिबंध (11) संतुष्ट हो जाता है। अतः दिया हुआ समीकरण यथातथ है। दिए हुए समीकरण को पुनः लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(yzdx + zxdy + xydz) + (2xdx + 2ydy + 2zdz) = 0$$

या, $d(xyz) + d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

ऊपर दिए समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 = c,$$

जो अभीष्ट हल है।

★★★

इससे पहले कि हम समीकरण (6) के रूप के समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों को लें, अब तक की गयी चर्चा की अपनी समझ की जाँच करने के लिए, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E2) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित संपूर्ण अवकल समीकरण समाकलनीय है, परंतु यथातथ नहीं :

i) $(y^2 + z^2 - x^2)dx - 2xydy - 2xzdz = 0$

ii) $y^2 dx - zdy + ydz = 0$

iii) $(2x^3 y + 1)dx + x^4 dy + x^2 \tan z dz = 0$.

E3) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित संपूर्ण अवकल समीकरण यथातथ हैं, तथा इनके हल ज्ञात कीजिए :

i) $(x - y)dx - xdy + zdz = 0$

ii) $(y - z)\,(y + z - 2x)dx + (z - x)\,(z + x - 2y)dy$

$\quad + (x - y)(x + y - 2z)dz = 0$

iii) $(3x^2 y^2 - e^x z)dx + (2x^3 y + \sin z)dy + (y \cos z - e^x)dx = 0$

अब हम संपूर्ण अवकल समीकरणों के हल ज्ञात करने की विभिन्न विधियों की चर्चा करते हैं।

15.4 समाकलन की विधियाँ

संपूर्ण अवकल समीकरण (6), अर्थात्

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz = 0$$

पर विचार कीजिए, जिसके लिए समाकलनीयता प्रतिबंध (10) संतुष्ट होता हो।

हम समीकरण (6) को हल करने की विभिन्न विधियों पर एक-एक करके करेंगे।

15.4.1 निरीक्षण द्वारा

कभी-कभी दिए हुए समीकरण के पदों को दोबारा से व्यवस्थित करके तथा/या पदों को x, y, z के एक उपयुक्त फलन से भाग देकर, हम एक ऐसा समीकरण प्राप्त कर सकते हैं जिसके पदों को, यथातथ अवकल प्राप्त करने के लिए, संयोजित किया जा सकता है। फिर इन पदों को अभीष्ट हल प्राप्त करने के लिए समाकलित किया जा सकता है, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है :

उदाहरण 4: जाँच कीजिए कि दिया हुआ समीकरण

$$yz\, dx + zx\, dy + xy\, dz = 0$$

समाकलनीय है तथा इसके समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $P = yz, Q = zx, R = xy$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = z, \frac{\partial P}{\partial z} = y, \frac{\partial Q}{\partial x} = z, \frac{\partial Q}{\partial z} = x, \frac{\partial R}{\partial x} = y, \frac{\partial R}{\partial y} = x .$$

समाकलनीयता प्रतिबंध (10) लागू करने पर हम पाते हैं :

बायाँ पक्ष $= yz(x-x) + zx(y-y) + xy(z-z) = 0$ = दायाँ पक्ष

अतः दिया हुआ समीकरण समाकलनीय है।

इस समीकरण के रूप को देखकर ही, हम इसे तुरंत

$d\,(xyz) = 0$

के रूप में लिख सकते हैं, जिससे

दिए हुए समीकरण का अभीष्ट हल $xyz = c$ प्राप्त हो जाता है, जहाँ c एक अचर है।

★★★

आइए एक अन्य उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5 : जाँच कीजिए कि समीकरण

$$(x^2z - y^3)\,dx + 3xy^2dy + x^3dz = 0$$

समाकलनीय है तथा इसके समाकल-पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ $P = x^2z - y^3, Q = 3xy^2, R = x^3$

इस स्थिति में, प्रतिबंध (10) लागू करने पर हम पाते हैं :

बायाँ पक्ष $= (x^2z - y^3)\,(0-0) + 3xy^2(3x^2 - x^2) + x^3(-3y^2 - 3y^2)$

$= 0 + 6x^3y^2 - 6x^3y^2$

$= 0 =$ दायाँ पक्ष

के रूप में बदल जाता है।

इस प्रकार, दिया हुआ समीकरण समाकलनीय है तथा इसे पुनः इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$x^2\,(zdx + xdz) - y^3dx + 3xy^2dy = 0$$

$$\Rightarrow\ (zdx + xdz) - \frac{y^3}{x^2}dx + \frac{3y^2}{x}dy = 0$$

$$\Rightarrow\ d(xz) + d\left(\frac{y^3}{x}\right) = 0$$

इस प्रकार, दिए हुए समीकरण का समाकल पृष्ठ है

$$xz + \left(\frac{y^3}{x}\right) = c,$$

जहाँ c एक अचर है।

★★★

ध्यान दीजिए कि जब तक कहा न जाए, एक दी हुई समस्या के लिए आपको समाकलनीयता प्रतिबंध की जाँच करने की आवश्यकता नहीं है तथा आप इसका हल ज्ञात करने के लिए सीधी प्रक्रिया प्रारंभ कर सकते हैं।

उदाहरण 6: निम्नलिखित संपूर्ण अवकल समीकरण

$$z(1-z^2)dx + zdy - (x+y+xy^2)dz = 0.$$

के समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$z(dx+dy) - z^2(zdx + xdz) - (x+y)dz = 0$$

या $$zd(x+y) - z^2 d(xz) - (x+y)dz = 0.$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को z^2 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{zd(x+y) - (x+y)dz}{z^2} - d(xz) = 0$$

या $$d\left(\frac{x+y}{z}\right) - d(xz) = 0$$

समाकलित करने पर, हम अभीष्ट समाकल पृष्ठ

$$\frac{x+y}{z} - xz = c$$

के रूप में प्राप्त करते हैं, जहाँ c एक अचर है।

***

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E4) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण समाकलनीय हैं तथा इनके समाकल-पृष्ठ ज्ञात कीजिए :

i) $yz\,dx + zx\,dy - y^2 dz = 0$

ii) $(y^2+z^2)\,dx + xy\,dy + xz\,dz = 0$

iii) $(y+z)\,dx + dy + dz = 0.$

E5) f(z) ज्ञात कीजिए ताकि
$[(y^2+z^2-x^2)/2x]dx - ydy + f(z)dz = 0,\ x>0$ समाकलनीय हो। इसके बाद, इसे हल कीजिए।

आपको याद होगा कि खंड 2 की इकाई 7 में, हमने दो चरों वाले अवकल समीकरणों की चर्चा की थी, जिनके लिए चर-पृथक्करणीय थे। अगले उप-भाग में, हम तीन चरों वाले संपूर्ण अवकल समीकरणों को लेंगे, जिनके लिए चर-पृथक्करणीय हैं।

15.4.2 चर-पृथक्करणीय

आइए उदाहरण 4 पर पुनः दृष्टि डालें। हल किए जाने वाला दिया हुआ अवकल समीकरण है :

$$yz\ dx + zx\ dy + xy\ dz = 0.$$

यदि हम इस समीकरण को xyz से भाग दें, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0 \tag{12}$$

आप देख सकते हैं कि समीकरण (12) चर-पृथक्करणीय रूप में है, क्योंकि इसका प्रत्येक पद केवल एक चर का फलन है। समीकरण (12) को सरलता से समाकलित करके अभीष्ट हल

$$\ln|x|+\ln|y|+\ln|z|=\ln c$$

या, $|xyz|=c$ प्राप्त किया जा सकता है, जहाँ c एक घनात्मक अचर है।

इसी प्रकार कुछ स्थितियों में, समीकरण (6) को

$$P(x)dx+Q(y)dy+R(z)dz=0 \tag{13}$$

के रूप में लिखना संभव होता है, जहाँ चर-पृथक्करणीय होते हैं तथा समीकरण (13) को समाकलित करके हम समाकल पृष्ठ को

$$\int P(x)\,dx+\int Q(y)\,dy+\int R(z)\,dz=c$$

रूप में प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

ऊपर दी गयी विधि को स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 7: अवकल समीकरण

$$a^2y^2z^2dx+b^2z^2x^2dy+c^2x^2y^2dz=0$$

को हल कीजिए

हल : इस समीकरण के दोनों पक्षों को $x^2y^2z^2$ से भाग देने पर,

हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{a^2}{x^2}dx+\frac{b^2}{y^2}dy+\frac{c^2}{z^2}dz=0,$$

यह चर-पृथक्करणीय रूप में है तथा इसका समाकल है :

$$\int\frac{a^2}{x^2}dx+\int\frac{b^2}{y^2}dy+\int\frac{c^2}{z^2}dz=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=k$$

जहाँ k एक अचर है।

★★★

उदाहरण 8 : अवकल समीकरण

$$2yz\ dx-2xz\ dy-xyz(z-1)dz=0$$

को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को xyz से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{2}{x}dx-\frac{2}{y}dy-(z-1)dz=0$$

समाकलित करने पर, हम अभीष्ट हल निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$2\ln|x|-2\ln|y|-\left(\frac{z^2}{2}-z\right)=c$$

या, $\dfrac{x^2}{y^2}=c_1e^{z\left(\frac{z}{2}-1\right)}$

जहाँ c और c_1 स्वेच्छ अचर हैं।

★★★

और अब आपके लिए कुछ प्रश्न हैं।

E6) अवकल समीकरण

$yz\ln z\ dx-zx\ln z\ dy+xy\ dz=0,\ z>0$

को हल कीजिए।

E7) अवकल समीकरण

$f(z)\ (ydx+xdy)+f'\ (z)\ xy\ dz=0$ जहाँ $f'(z)=\dfrac{df}{dz}$

है को चर-पृथक्करणीय रूप में व्यक्त कीजिए तथा फिर उसके समाकल-पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

कभी-कभी, ऐसा हो सकता है कि समीकरण (6) के रूप में दिए संपूर्ण अवकल समीकरण में सभी चर पृथक्करणीय नहीं हों, परंतु केवल एक ही चर पृथक्करणीय हो। अब हम ऐसे अवकल समीकरणों को लेते हैं।

15.4.3 एक चर-पृथक्करणीय

आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करते हुए प्रारंभ करें :

उदाहरण 9 : समीकरण $(x^2 - y^2)\, dx - 2xydy + e^{-z} dz = 0$ के समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : आप देख सकते हैं कि दिया हुआ समीकरण z में पृथक्करणीय है। इस समीकरण के प्रथम दो पदों, अर्थात्

$$(x^2 - y^2)dx - 2xydy$$

पर विचार कीजिए।

यहाँ $P = x^2 - y^2$ और $Q = -2xy$.

ये पद यथातथ अवकल होंगे, यदि समीकरण $Pdx + Qdy = 0$ के यथातथ होने के लिए P और Q, यथातथता प्रतिबंध, अर्थात् $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ को संतुष्ट करें। (देखिए भाग 7.4, इकाई 7)।

यहाँ $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y + 2y = 0\cdot$

अतः प्रतिबंध संतुष्ट हो जाता है। प्रथम दो पद यथातथ अवकल हैं तथा इन्हें निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x^2 dx + (-y^2 dx - 2xy\, dy)$$

या, $$d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d(-xy^2).$$

इन्हें दिए हुए समीकरण के तीसरे पद से जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d\,(-xy^2) + d\,(-e^{-z}) = 0$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, अभीष्ट समाकल पृष्ठ

$$\frac{x^3}{3} - xy^2 - e^{-z} = c$$

के रूप में प्राप्त होते हैं, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

★★★

व्यापक रूप में आइए कल्पना करें कि समीकरण (6) में चर z पृथक्करणीय है। तब, इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy + R(z)\, dz = 0 \tag{14}$$

समीकरण (6) का समाकलनीयता प्रतिबंध (10), इस स्थिति में, निम्नलिखित रूप में बदल जाता है :

$$P(x, y)[0-0] + Q(x, y)[0-0] + R(z)\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = 0$$

या, $$R(z)\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] = 0$$

अब, क्योंकि $R(z) \neq 0$, इसलिए $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$. (15)

यहाँ क्या आपने इस ओर ध्यान दिया कि समीकरण (15) समीकरण $P\, dx + Q\, dy = 0$ के यथातथ समीकरण होने का प्रतिबंध है? इसलिए, हम टिप्पणी कर सकते हैं कि व्यंजक $Pdx + Qdy$ एक यथातथ अवकल, मान लीजिए du, है तथा समीकरण (14) निम्न रूप में परिवर्तित हो जाता है :

$$du + R(z)\, dz = 0$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u + \int R(z)\, dz = c$$

जो अभीष्ट हल है।

ऊपर दी गयी विधि को स्पष्ट करने के लिए, आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 10: अवकल समीकरण

$$(2x^3 y + 1)dx + x^4 dy + x^2 \tan z\; dz = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को x^2 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{(2x^3 y + 1)dx}{x^2} + x^2 dy + \tan z\; dz = 0 \tag{16}$$

समीकरण (16), z में पृथक्करणीय है।

यहाँ $P = \dfrac{2x^3 y + 1}{x^2}$, $Q = x^2$.

साथ ही, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{2x^3}{x^2} = 2x$ और $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$.

इस प्रकार, P और Q प्रतिबंध $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ को संतुष्ट करते हैं। अतः व्यंजक $Pdx + Qdy$ एक यथातथ अवकल है। हम समीकरण (16) में $Pdx + Qdy$ को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\left(2xy + \frac{1}{x^2}\right)dx + x^2dy = d(x^2y) + d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

तब, दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$d\left(x^2y - \frac{1}{x}\right) + \tan z\, dz = 0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$x^2y - \frac{1}{x} + \ln|\sec z| = c,$$

जो अभीष्ट हल है, जहाँ c एक अचर है।

★★★

अब, आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E8) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित अवकल समीकरण समाकलनीय हैं तथा इनके हल प्राप्त कीजिए :

i) $x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$

ii) $2yz\, dx - 2xz\, dy - (x^2 - y^2)\,(z-1)\, dz = 0$

आपको याद होगा कि खंड 2 को इकाई 7 के भाग 7.3 में, हमने दो चरों वाले समघात (homogeneou) फलनों को परिभाषित किया था तथा दो चरों वाले समघात अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों की चर्चा की थी। अब हम समघात फलनों की परिभाषा को तीन चरों के लिए विस्तृत करेंगे तथा साथ ही तीन चरों वाले समघात अवकल समीकरणों को हल करने की विधि पर भी चर्चा करेंगे।

परिभाषा : तीन चरों x, y, z वाला वास्तविक मान फलन $P(x, y, z)$ घात n का एक समघात फलन कहलाता है, जहाँ n एक वास्तविक संख्या है, यदि हमें प्राप्त है :

$$P(x, y, z) = x^n f_1(y/x, z/x) = x^n f_1(u, v)$$

जहाँ $u = y/x$ और $v = z/x$.

तुल्य रूप से, हम प्राप्त कर सकते हैं :

$$P(x, y, z) = y^n f_2\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$$

या, $P(x, y, z) = z^n f_3\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$.

उदाहरण के रूप में फलन

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 3xz^2 = x^3 f_1\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{x}\right)^2\right] = x^3 f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

या, $$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 3xz^2 = y^3 f_3\left[\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 1 + 3\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{y}\right)^2\right] = y^3 f_2\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$$

या, $$f(x, y, z) = z^3 f_3\left[\left(\frac{x}{z}\right)^3 + \left(\frac{y}{z}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{z}\right)\right] = z^3 f_3\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

(x, y, z) में घात 3 का एक समघात फलन है।

समीकरण (6) के रूप का एक संपूर्ण अवकल समीकरण, अर्थात्

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$$

जिसमें $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ और $R(x, y, z)$ समान घात के समघात फलन हों, **समघात संपूर्ण अवकल समीकरण** कहलाता है।

उदाहरण के रूप में संपूर्ण अवकल समीकरण

$$(y^2 + yz + z^2)dx + (z^2 + xz + x^2)dy + (x^2 + xy + y^2)dz = 0 \qquad (17)$$

पर विचार कीजिए। यहाँ, $P = y^2 + yz + z^2 = x^2(u^2 + uv + v^2)$,

$$Q = z^2 + xz + x^2 = x^2(v^2 + v + 1)$$

$$R = x^2 + xy + y^2 = x^2(1 + u + u^2).$$

जहाँ $u = y/x$ और $v = z/x$.

इस प्रकार, P, Q और R घात 2 के समघात फलन हैं तथा समीकरण (17) एक समघात समीकरण है। अगले भाग में हम ऐसे समघात समीकरणों को हल करने की विधि पर चर्चा करेंगे।

15.4.4 समघात संपूर्ण अवकल समीकरण

आइए एक सरल उदाहरण लेकर प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 11 : निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$2(y + z)dx - (x + z)dy + (2y - x + z)\,dz = 0 \qquad (18)$$

हल : समीकरण (18) में, हमें प्राप्त है :

$P = y + z = x(u + v), Q = -(x + z) = -x(1 + v)$ और
$R = (2y - x + z) = x(2u - 1 + v)$ जहाँ $u = y/x$ और $v = z/x$. P, Q और R सभी घात एक के समघात फलन हैं तथा समीकरण (18) भी इसीलिए समघात समीकरण है।

यहाँ आप इकाई 7 के भाग 7.3 में दी गयी, दो चरों वाले समघात अवकल समीकरणों को हल करने की विधि का स्मरण कीजिए। तीन चरों वाले अवकल समीकरणों के लिए, इस विधि को विस्तृत करते हुए, आइए प्रतिस्थापन

$$y = xu \text{ और } z = xv \tag{19}$$

का उपयोग करें। समीकरण (19) से मानों को समीकरण (18) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2(xu + xv)dx - (x + xv)(xdu + udx) + (2xu - x + xv)(xdv + vdx) = 0$$

$$(u + v)(1 + v)dx - x(1 + v)du + x(2u - 1 + v)dv = 0$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को $x(u + v)(v + 1)$ से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x} - \frac{1}{u + v}du + \frac{(2u - 1 + v)}{(u + v)\,(1 + v)}\,dv = 0 \tag{20}$$

यहाँ आप देख सकते हैं कि समीकरण (20) में एक चर, अर्थात् x पृथक्करणीय है। उप-भाग 15.4.3 में चर्चा की गई विधि का प्रयोग करते हुए, हम पाते हैं कि व्यंजक

$$\frac{-1}{u + v}du + \frac{(2u - 1 + v)}{(u + v)\,(1 + v)}\,dv \tag{21}$$

यथातथ अवकल है। व्यंजन (21) के पदों को संयोजित करने और दोबारा से व्यवस्थित करने पर, हम समीकरण (20) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{dx}{x} - \frac{1}{u + v}du + \frac{2dv}{1 + v} - \frac{1}{u + v}dv = 0$$

$$\Rightarrow \; \frac{dx}{x} - \left(\frac{du + dv}{u + v}\right) + \frac{2}{1 + v}dv = 0$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\ln|x| - \ln|(u + v)| + 2\ln|(1 + v)| = \ln|c|$$

या, $$\left|\frac{x(1 + v)^2}{u + v}\right| = c$$

ऊपर प्राप्त समीकरण में, समीकरण (19) से u और v के मान रखने पर,

हम अभीष्ट हल $(x + z)^2 = c\,|(y + z)|$ के रूप में प्राप्त करते हैं।

★★★

ऊपर स्पष्ट की गई विधि को व्यापक, रूप में संपूर्ण अवकल समीकरण (6) के लिए प्रयोग किया जा सकता है, जिसमें P, Q और R समान घात, मान लीजिए n वाले x, y, z में समघात फलन हैं। इसका हल ज्ञात करने के लिए, हम समीकरण (6) में प्रतिस्थापन

$$y = u\,x \text{ और } z = v\,x \tag{22}$$

का प्रयोग करते हैं। पूरे समीकरण में से गुणनखंड x^n का विलोपन (cancelling) करने पर, यह समीकरण निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$P(u, v)dx + Q(u, v)\,(u\,dx + x\,du) + R(u,v)\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$\Rightarrow\ [P(u, v) + uQ(u, v) + vR(u, v)]\,dx + xQ(u, v)du + xR(u, v)\,dv = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{dx}{x} + A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv = 0, \tag{23}$$

जहाँ $$A(u, v) = \frac{Q(u, v)}{P(u, v) + uQ(u, v) + vR(u, v)}, \tag{24}$$

तथा $$B(u, v) = \frac{R(u, v)}{P(u, v) + uQ(u, v) + vR(u, v)} \tag{25}$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण (22) उसी प्रकार है जैसा कि समीकरण (14), अर्थात्, एक चर पृथक्करणीय। इस स्थिति में, प्रतिबंध (15) निम्न रूप में समानीत हो जाता है

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u} \tag{26}$$

एक बार प्रतिबंध (26) संतुष्ट हो जाए, तो हम समीकरण (23) का हल

$$f\,(u, v) + \ln|x| = c \tag{27}$$

के रूप में प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ, c एक स्वेच्छ अचर है।

तब हम समीकरण (22) में u, v को उनके x, y और z के पदों में प्रतिस्थापित कर, समीकरण (6) का हल निम्न रूप में प्राप्त कर सकते हैं।

$$f\,(y/x, z/x) + \ln|x| = c$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण (22) में, हमने रूपांतरण $y = ux$ और $z = vx$ का प्रयोग करके चर x में पृथक्करणीय समीकरण प्राप्त किया था। इसके स्थान पर, हम अन्य रूपांतरणों जैसे $x = uz$ और $y = vz$ या, $x = uy$ और $z = vy$ का भी प्रयोग कर सकते थे तथा उसी के अनुसार क्रमशः z और y में चर पृथक्करणीय समीकरण प्राप्त कर सकते थे।

उदाहरण के लिए यदि उदाहरण 11 में, हम प्रतिस्थापन,

$x = uz$ और $y = vz$ लें, तो समीकरण (18) निम्नलिखित रूप में समानीत हो जाता है :

$$z\,[2(v+1)du - (u+1)dv] + (u+1)\,(v+1)dz = 0$$

या, $$2\frac{du}{u+1}-\frac{dv}{v+1}+\frac{dz}{z}=0$$

प्राप्त समीकरण चर z में पृथक्करणीय है तथा अभीष्ठ हल ज्ञात करने के लिए, इसे समाकलित किया जा सकता है।

अब हम इस विधि को कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 12 : जाँच कीजिए कि समीकरण $y(y+z)dx+z(z+x)dy+y(y-x)dz=0$ के लिए समाकलनीयता संबंध संतुष्ट होता है तथा इसके समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $P=y(y+z), Q=z(z+x)$ और $R=y(y-x)$. क्योंकि x, y, z में P, Q, R घात 2 के समघात फलन हैं, इसलिए दिया हुआ समीकरण समघात है। साथ ही, बायाँ पक्ष समाकलनीयता प्रतिबंध (10) से प्राप्त होता है :

बायाँ पक्ष $=(y^2+yz)(2z+x-2y+x)+(z^2+zx)(-y-y)+(y^2-yx)(2y+z-z)$

$$=2(y^2+yz)(x+z-y)-2y(xz+z^2)+2y(y^2-xy)=0$$ = दायाँ पक्ष

अतः समाकलनीयता प्रतिबंध संतुष्ट हो जाता है। $y=xu$ और $z=xv$ रखने पर, दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$xu(xu+xv)dx+xv(xv+x)\,(xdu+udx)+xu(xu-x)\,(xdv+vdx)=0,$$

$$\Rightarrow\ x^2u(v+1)\,(u+v)\,dx+x^3v(v+1)\,du+x^3u(u-1)\,dv=0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{dx}{x}+\frac{v}{u(u+v)}du+\frac{u-1}{(v+1)\,(u+v)}\,dv=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{dx}{x}+\frac{du}{u}+\frac{dv}{v+1}-\frac{du+dv}{u+v}=0.$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln|x|+\ln|u|+\ln|(v+1)|-\ln|(u+v)|=\ln|c|,$$ मान लीजिए

$$\Rightarrow\ \left|\frac{xu(v+1)}{u+v}\right|=c$$

u और v के मान x, y और z के पदों में प्रतिस्थापित करने पर, हम अभीष्ट समाकल पृष्ठ निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$|y(x+z)|=c|(y+z)|$$

★★★

टिप्पणी : समीकरणों (24) और (25) में क्रमश $A(u, v)$ और $B(u, v)$ के रूपों को देखने पर, यह टिप्पणी की जा सकती है कि समीकरण (6) यदि समाकलनीयता प्रतिबंध संतुष्ट करता है तथा P, Q, R समान घात वाले x, y, z के समघात फलन हों

और साथ ही $xP + yQ + zR$ शून्य नहीं हो जाता हो तो $\dfrac{1}{xP + yQ + zR}$ दिए हुए समीकरण का समाकलन-गुणक होगा।

ऊपर दिए गए दावे की जाँच के लिए, आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 13 : जाँच कीजिए कि समीकरण

$$(x^2 + xy + yz)\, dx - x(x + z)\, dy + x^2 dz = 0 \qquad (28)$$

समाकलनीय है तथा इसका हल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $P = x^2 + xy + yz, Q = -x(x + z), R = x^2$ दिया हुआ समीकरण समघात है। आप इसकी भी जाँच कर सकते हैं कि यह समीकरण समाकलनीय है।

यहाँ $xP + yQ + Rz = x(x^2 + xy + yz) - xy(x + z) + x^2 z$

$$= x^2 (x + z)$$

$$\neq 0 \cdot$$

अतः $\dfrac{1}{x^2 (x + z)}$ दिए हुए समीकरण का समाकलन गुणक (I.F.) है।

दिए हुए समीकरण को $\text{I.F} = \dfrac{1}{x^2 (x + z)}$, से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{x^2 + (x + z)y}{x^2 (x + z)} dx - \frac{x(x + z)}{x^2 (x + z)} dy + \frac{x^2}{x^2 (x + z)} dz = 0,$$

इस समीकरण में विभिन्न पदों को संयोजित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{x + z} dx + \frac{y}{x^2} dx - \frac{dy}{x} + \frac{1}{x + z} dz = 0,$$

या, $$\frac{d(x + z)}{x + z} + \frac{d}{dx} \left(-\frac{y}{x} \right) = 0$$

जो एक यथातथ अवकल है।

समाकलित करने पर, हम निम्न अभीष्ट हल प्राप्त करते हैं,

$$\ln |(x + z)| - \frac{y}{x} = c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E9) जाँच कीजिए कि समीकरण (28) समाकलनीय है।

E10) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण समाकलनीय है तथा उनके हल प्राप्त कीजिए :

i) $yz^2(x^2 - yz)dx + zx^2(y^2 - zx)dy + xy^2(z^2 - xy)dz = 0$

ii) $(y^2 + yz)dx + (z^2 + zx)dy + (y^2 - xy)dz = 0$

iii) $(y^2 + z^2)dx + xy\ dy + xz\ dz = 0$

iv) $yz(y + z)dx + xz(x + z)dy + xy(x + y)dz = 0$

अब हम इस इकाई का अंत इसमें अध्ययन किए गए तथ्यों का सारांश देते हुए करते हैं।

15.5 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1) $\sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i = 0$ के रूप का समीकरण,

जहाँ $F_i(i = 1, 2, \ldots, n)$, n स्वतंत्र चरों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ में से सभी या कुछ के संतत फलन हैं, एक संपूर्ण अवकल समीकरण कहलाता है।

2) 3-विमीय आकाश में एक-प्राचल पृष्ठ-कुल से $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ के रूप का तीन चरों वाला एक संपूर्ण अवकल समीकरण प्राप्त होता है।

3) संपूर्ण अवकल समीकरण $P\ dx + Q\ dy + R\ dz = 0$ समाकलनीय होता है, यदि और केवल यदि

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

यदि यह समाकलनीय है, तो इसका समाकल वक्र 3-विमीय आकाश में एक - प्राचल पृष्ठ-कुल होता है।

4) संपूर्ण अवकल समीकरण (6), अर्थात $P\ dx + Q\ dy + R\ dz = 0$ को हल किया जा सकता है, यदि

i) यह यथातथ हो तथा इसका हल पदों को पुनः वर्गित करने के बाद निरीक्षण द्वारा स्पष्ट हो जाए।

ii) यह समाकलनीय हो तथा इसे चर पृथक्करणीय रूप
$X(x)dx + Y(y)dy + Z(z)dz = 0$

में लिखा जा सकता हो। फिर इसके समाकल से चर पृथक्करणीय विधि द्वारा हल प्राप्त हो जाता है।

iii) यह समाकलनीय हो तथा इसे एक चर पृथक्करणीय के साथ निम्न रूप में लिखा जा सकता हो :

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy + R(z)dz = 0$$

जहाँ व्यंजक $P(x, y)dx + Q(x, y)\ dy$ यथातथ फलन मान लीजिए du हो।

तब इसका हल $u(x, y) + \int R(z)dz =$ अचर, के रूप में लिखा जा सकता है।

iv) यह समघात हो तथा रूपांतरणों $x = uz$ और $x = uz, y = vz$ के प्रयोग से एक चर मान लीजिए चर z का पृथक्करण में करने पर समाकलनीय हो। इस समीकरण को तब ऊपर 4 (iii) में दी गई विधि द्वारा समाकलित किया जा सकता है। साथ ही, उस स्थिति में, जब $(xP + yQ + zR) \neq 0$, हो तब $\dfrac{1}{xP + yQ + zR}$ समीकरण (6) के रूप के समघात समाकलनीय समीकरण का एक समाकलन-गुणक होता है।

15.6 हल / उत्तर

E1) i) दिया हुआ पृष्ठ-कुल है $x^3z + x^2y = c$

यह एक-प्राचल पृष्ठ-कुल है।

इस संबंध का संपूर्ण अवकलज है :

$$d(x^3z + x^2y) = 0$$

$$\Rightarrow x^3dz + 3x^2dxz + x^2dy + 2x\,dxy = 0$$

$$\Rightarrow (3x^2z + 2xy)\ dx + x^2dy + x^3dz = 0$$

$$\Rightarrow (3xz + 2y)dx + xdy + x^2dz = 0$$ (x से भाग देने पर क्योंकि $x \neq 0$)

जो अभीष्ट संपूर्ण अवकल समीकरण है।

ii) दिए हुए पृष्ठ-कुल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(z + c)^2 = a^2 - x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - z$$

इस समीकरण का संपूर्ण अवकलज लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$d\left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) - dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}(-2xdx - 2ydy) - dz = 0$$

$\Rightarrow\ xdx + ydy + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ dz = 0$,

जो अभीष्ट संपूर्ण अवकल समीकरण है।

iii) $(yz + 2x)dx + (xz - 2z)dy + (xy - 2y)dz = 0$

E2) i) यहाँ $P = y^2 + z^2 - x^2, Q = -2xy, R = -2xz$.

समाकलनीयता प्रतिबंध (10) से प्राप्त होता है :

बायाँ पक्ष = $(y^2 + z^2 - x^2)(0-0) - 2xy(-2z - 2z) - 2xz(2y + 2y)$

$= 8xyz - 8xyz = 0$ = दायाँ पक्ष

जो प्रदर्शित करता है कि प्रतिबंध (10) संतुष्ट होता है।

साथ ही, $\frac{\partial R}{\partial x} = -2z \neq 2z = \frac{\partial P}{\partial z}$ तथा $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq -2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\therefore$ दिया हुआ समीकरण यथातथ नहीं है।

ii) $P = y^2, Q = -z, R = y$.

समाकलनीयता संबंध (10) संतुष्ट हो रहा है। परंतु $\frac{\partial Q}{\partial z} \neq \frac{\partial R}{\partial y}$ और $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. दिया हुआ समीकरण यथातथ नहीं है।

iii) $P = 2x^3y + 1, Q = x^4, R = x^2 \tan z$.

समाकलनीयता प्रतिबंध (10) संतुष्ट हो रहा है। परंतु $\frac{\partial R}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial z}$ और $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ दिया हुआ समीकरण यथातथ नहीं है।

E3) i) $P = x - y, Q = -x, R = z$.

यहाँ, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$ और $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$.

$\therefore$ दिया हुआ समीकरण यथातथ है।

साथ ही, $(x - y)dx - xdy + zdz = 0$

$\Rightarrow\ xdx - (ydx + xdy) + zdz = 0$

$\Rightarrow\ x^2 - 2xy + z^2 = c$ जो अभीष्ट हल है।

ii) यहाँ $P = (y - z)(y + z - 2x), Q = (z - x)(z + x - 2y)$,
$R = (x - y)(x + y - 2z)$

दिया हुआ समीकरण यथातथ है, क्योंकि

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=-2y+2z,\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=2x-2z \text{ और}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2y-2x$$

हम समीकरण को पुनः निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$(y^2dx+2xydy)-(z^2dx+2zxdz)+(z^2dy+2yzdz)-(x^2dy+2xydy)$$

$$+(x^2dz+2xzdx)-(y^2dz+2yzdy)=0$$

$$\Rightarrow\ d(y^2x)-d(z^2x)+d(z^2y)-d(x^2y)+d(x^2z)-d(y^2z)=0$$

समाकलित करने पर, हमें निम्न अभीष्ट हल प्राप्त होता है :

$$y^2x-z^2x+z^2y-x^2y+x^2z-y^2z=c$$

iii) यहाँ $P=(3x^2y^2-e^xz), Q=(2x^3y+\sin z), R=(y\cos z-e^x)$.

क्योंकि $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\cos z, \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=-e^x$ और $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y$.

इसलिए दिया हुआ समीकरण यथातथ है। दिए हुए समीकरण के पदों को दोबारा से व्यवस्थित करके, इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(3x^2y^2dx+2x^3ydy)-(e^xzdx+dz)+(\sin zdy+y\cos zdz)=0$$

$$\Rightarrow\ d(x^3y^2)-d(e^xz)+d(y\sin z)=0$$

समाकलित करने पर अभीष्ट हल है :

$$x^3y^2-e^xz+y\sin z=c$$

E4) i) समाकलनीय है; $\frac{x}{y}-\ln|z|=c$

संकेत : y^2z से भाग देने पर, दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dx}{y}-\frac{x}{y^2}dy-\frac{dz}{z}=0$$

$$\Rightarrow\ d\left(\frac{x}{y}\right)-d(\ln|z|)=0.$$

ii) समाकलनीय है, $|x|.\sqrt{y^2+z^2}=c$.

संकेत : दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dx}{x}+\frac{y\,dy+z\,dz}{y^2+z^2}=0$$

$$\Rightarrow\ d\left(\ln|x|+\frac{1}{2}\,\frac{d(y^2+z^2)}{y^2+z^2}\right)=0$$

iii) समाकलनीय है; $x+\ln|y+z|=c$.

संकेत : दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$dx+\frac{dy+dz}{y+z}=0.$$

E5) दिए हुए समीकरण को $2x$, से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$(y^2+z^2-x^2)dx-2xydy+2xf(z)dz=0 \tag{29}$$

यहाँ $P=y^2+z^2-x^2; Q=-2xy,\ R=2xf(z)$. (30)

यदि समीकरण (29) समाकलनीय है, तो इसे समाकलनीय प्रतिबंध को संतुष्ट करना चाहिए, अर्थात्

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \tag{31}$$

समीकरण (30) से समीकरण (31) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(y^2+z^2-x^2)\ (0-0)-2xy(2f(z)-2z)+2xf(z)(2y+2y)=0$$

$$\Rightarrow\ -4xy(f(z)-z)+8xy\ f(z)=0$$

$$\Rightarrow\ f(z)=-z$$

$f(z)$ के इस मान को समीकरण (29) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(y^2+z^2-x^2)dx-2x\ ydy-2x\,zdz=0$$

या, $$(y^2+z^2+x^2)dx-2x^2dx-2xy\ dy-2xz\,dz=0$$

या, $$(y^2+z^2+x^2)dx-2x(x\,dx+y\ dy+z\ dz)=0$$

या, $$\frac{dx}{x}=\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

ऊपर दिए समीकरण को समाकलित करने पर, हम अभीष्ट हल निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$\ln|x| + \ln|c| = \ln|(x^2 + y^2 + z^2)|$$

या, $$|xc| = (x^2 + y^2 + z^2).$$

E6) दिया हुआ समीकरण है :

$$yz \ln z \, dx - zx \ln z \, dy + xy \, dz = 0, \; z > 0$$

इसे $xyz \ln z$ से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z \ln z} = 0$$

यह चर पृथक्करणीय रूप में है। समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln|x| - \ln|y| + \ln(\ln z) = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{|x|}{|y|}.\ln z\right) = \ln c$$

$$\Rightarrow c|y| = |x| \ln z$$

E7) दिया हुआ समीकरण है :

$$f(z)\,(y\,dx + x\,dy) + f'(z)\,xy\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ydx + xdy}{xy} + \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$$

यह चर पृथक्करणीय रूप में है। समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\ln|x| + \ln|y| + \ln|f(z)| = \ln c$$

$$\Rightarrow |x|.|y|.|f(z)| = c.$$

E8) i) दिया हुआ समीकरण है :

$$x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$$

इसे $(y^2 - a^2)(x^2 - z^2)$ से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{xdx - zdz}{x^2 - z^2} + \frac{ydy}{y^2 - a^2} = 0 \qquad (32)$$

इस प्रकार, दिया हुआ समीकरण y में चर पृथक्करणीय है। यह समाकलनीय है, यदि

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

जहाँ, $P = \frac{x}{x^2 - z^2}$, $R = \frac{-z}{x^2 - z^2}$.

यहाँ $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$. अतः दिया हुआ समीकरण समाकलनीय है। समीकरण (32) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{2} d\frac{(x^2 - z^2)}{x^2 - z^2} + \frac{1}{2}\frac{d(y^2 - a^2)}{y^2 - a^2} = 0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{2}\ln|x^2 - z^2| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - a^2| = \frac{1}{2}\ln c \Rightarrow |x^2 - z^2|.|y^2 - a^2| = c$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

ii) समाकलनीय है, $\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| - z + \ln|z| = c$

संकेत : दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{2ydx - 2xdy}{x^2 - y^2} - \frac{z-1}{z}dz = 0.$$

E9) समाकलनीय है।

E10) i) दिया हुआ समीकरण है :

$$yz^2(x^2 - yz)dx + zx^2(y^2 - zx)dy + xy^2(z^2 - xy)dz = 0$$

जाँच कीजिए कि यह समाकलनीयता प्रतिबंध (10) को संतुष्ट करता है। दिया हुआ समीकरण एक समघात संपूर्ण अवकल समीकरण है। $x = uz$ और $y = vz$ प्रतिस्थापित करने पर, यह निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$v(u^2 - v)\,du + u^2(v^2 - u)dv = 0$$

इस समीकरण को u^2v^2 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u^2}\right)du + \left(1 - \frac{u}{v^2}\right)dv = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{v} - \frac{u}{v^2}dv\right) + dv - \frac{1}{u^2}du = 0$$

$$\Rightarrow \ d\left(\frac{u}{v}+v+\frac{1}{u}\right)=0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{u}{v}+v+\frac{1}{u}= \text{ अचर}$$

$\Rightarrow \ \frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}=c$, ($x, y, z$ के पदों में u, v के मान रखने पर),

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

ii) समाकलनीय है, $\frac{|x+z||y|}{|y+z|}=c$.

संकेत : $x = uz, y = vz$ प्रतिस्थापित करने और सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{(v^2+v)du+(u+1)dv}{(u+1)\,(v^2+v)}+\frac{dz}{z}$$

या, $\frac{du}{u+1}+\frac{dv}{v^2+v}+\frac{dz}{z}=0$

iii) समाकलनीय है, $|x||y^2+z^2|^{1/2}=c$

संकेत : $y = xu, z = xv$ प्रतिस्थापित करने और सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{2dx}{x}+\frac{udu+v\,dv}{u^2+v^2}=0$$

iv) समाकलनीय है, $|xyz|=c|(x+y+z)|$

—×—

इकाई 16

रैखिक आंशिक अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

16.1 प्रस्तावना

इकाई 14 और 15 में, हमने आंशिक अवकल समीकरणों (PDEs) के अध्ययन से संबंधित कुछ आवश्यक बातों को प्रस्तुत किया है। ज्यामिति, भौतिकी तथा विज्ञान और इंजीनियरी के अन्य क्षेत्रों की अनेक समस्याओं का जब गणितीय रूप से सूत्रण किया जाता है, तब हमें PDE प्राप्त होते हैं। ऐसे समीकरण तब प्राप्त होते हैं, जब चर्चा की जा रही समस्या में स्वतंत्र चरों की संख्या दो या अधिक होती है। ऐसी स्थितियों में कोई भी आश्रित चर एक से अधिक स्वतंत्र चरों का फलन हो सकता है जिसके एक चर के सापेक्ष साधारण अवकलज नहीं बल्कि अनेक चरों के सापेक्ष आंशिक अवकलज होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि $u\ (x, y, t)$ का एक फलन है, तो

$$u_t + u_x = u \tag{1}$$

एक आंशिक अवकल समीकरण है। दो विमाओं में आंशिक अवकल समीकरणों के सुप्रसिद्ध उदाहरण हैं :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{(लाप्लास समीकरण)} \tag{2}$$

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{1}{k}u_t \text{ (ऊष्मा समीकरण)} \tag{3}$$

$$u_{xx}+u_{yy}=c^2u_{tt} \text{ (तरंग समीकरण)} \tag{4}$$

व्यापक रूप में, एक PDE को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$f(x, y, ..., u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, ...) = 0 \tag{5}$$

जिसमें अनेक स्वतंत्र चर $x, y, ...,$ इन चरों का अज्ञात फलन u तथा इस फलन के आंशिक अवकलज $u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, ...$ शामिल होते हैं। समीकरण (5) स्वतंत्र चरों $x, y, ...$ में n-विमीग आकाश R^n के एक उपयुक्त प्राँप्त D में परिभाषित होती है। जैसा कि साधारण अवकल समीकरणों की स्थिति में है, एक PDE की कोटि उस समीकरण में प्रकट होने वाले उच्चतम कोटि वाले आंशिक अवकलज की कोटि होती है। इस प्रकार, समीकरण (1) प्रथम कोटि की PDE है, जबकि समीकरण (2) से (4) द्वितीय कोटि के PDE हैं। इस इकाई में, हम प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरणों पर ही अपना ध्यान केंद्रित करेंगे। भाग 16.2 में, हम एक आश्रित चर z और दो स्वतंत्र चरों (x और y) तक सीमित रखते हुए, आंशिक अवकल समीकरणों के उद्‌गम से प्रारंभ करेंगे।

साधारण अवकल समीकरणों से भिन्न, जहाँ समीकरण या तो रैखिक या अरैखिक होते हैं (देखिए, 2 की इकाई 6), आंशिक अवकल समीकरणों में रैखिक समीकरणों का और आगे भी वर्गीकरण किया जाता है। भाग 16.3 में, हमने प्रथम, कोटि आंशिक अवकल समीकरणों के वर्गीकरण को लिया है। साथ ही, 1769 में इतालवी गणितज्ञ लंग्राज (1736-1813), द्वारा किए गए प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों के समाकलों के वर्गीकरण पर चर्चा इकाई के भाग 16.4 में की गई है।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- ❖ आंशिक अवकल समीकरण के उद्‌गम के बारे में चर्चा कर सकेंगे;
- ❖ प्रथम कोटि के रैखिक, सामि-रैखिक, रैखिकल्प और अरैखिक आंशिक अवकल समीकरणों की पहचान कर सकेंगे;
- ❖ प्रथम कोटि अवकल समीकरण के समाकल का पूर्ण समाकल, व्यापक समाकल, विचित्र समाकल और विशिष्ट समाकल के रूप में भेद कर सकेंगे।

16.2 प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण का उद्‌गम

ज्यामिति में प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण विविध विधियों से उत्पन्न हो सकते हैं। हम इस रोचक प्रश्न की जांच से प्रारंभ करते हैं कि ये किस प्रकार उत्पन्न होते हैं। हम एक-एक करके विभिन्न स्थितियों पर विचार करेंगे।

आइए, एक सरल उदाहरण लेकर प्रारंभ करें। एक गोला-कुल जिनके केन्द्र z-अक्ष के अनुदिश स्थित है के समीकरण

$$x^2+y^2+(z-c)^2=r^2 \tag{6}$$

को लीजिए तथा इसमें से स्वेच्छ अचर c को विलुप्त करने का प्रयास कीजिए।

समीकरण (6) को x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$x+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=0 \text{ और } y+(z-c)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

इन समीकरणों में से c को विलुप्त करने पर, हम

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (7)$$

प्राप्त करते हैं, जो एक प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण है। समीकरण (7) प्रथम कोटि का है, क्योंकि इसमें केवल प्रथम कोटि आंशिक अवकलज $\frac{\partial z}{\partial x}$ और $\frac{\partial z}{\partial y}$ शामिल हैं। इस प्रकार, गोला कुल समीकरण (6), प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण (7) को संतुष्ट करता है। यह व्यापक रूप में, उन सभी परिक्रमण पृष्ठों के लिए सत्य है, जिनकी सममिति z-अक्ष है।

परिक्रमण पृष्ठ

आइए समीकरण

$$z=f(r),\ r=(x^2+y^2)^{1/2} \qquad (8)$$

पर विचार करें, जहाँ किसी प्राँप्त D पर f एक स्वेच्छ फलन है जिसके प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। समीकरण (8) उन परिक्रमण पृष्ठों को निरूपित करता है, जिनकी परिक्रमण-अक्ष z-अक्ष है, जैसे गोला, शंकु इत्यादि।

समीकरण (8) को क्रमशः x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} \text{ और } \frac{\partial z}{\partial y}=q=f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}$$

जहाँ

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}$$

और

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow\ p=\frac{x}{r}f'(r) \textbf{ और } q=\frac{y}{r}f'(r) \qquad (9)$$

समीकरण, (9) में से, फलन $f(r)$ को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$yp-xq=0 \qquad (10)$$

या, $$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

जो एक प्रथम कोटि का आंशिक अवकल समीकरण है।

ध्यान दीजिए कि z को आश्रित चर तथा x और y को स्वतंत्र चरों के रूप में लेते हुए, आंशिक अवकल समीकरणों की पूरी चर्चा में, हम x और y के सापेक्ष z के आंशिक अवकलजों को क्रमश: p और q द्वारा व्यक्त करेंगे।

आगे हम दो-प्राचल पृष्ठ-कुल पर विचार करते हैं।

दो-प्राचल पृष्ठ

आइए दो-प्राचल गोला-कुल के एक उदाहरण को लें।

उदाहरण 1 : समीकरण $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1$ से प्राचल a और b को विलुप्त कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$z^2=1-(x-a)^2-(y-b)^2 \tag{11}$$

समीकरण (11) को आंशिकतः x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}=-2(x-a) \tag{12}$$

और

$$2z\frac{\partial z}{\partial y}=-2(y-b) \tag{13}$$

समीकरण (12) और (13) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$(x-a)=-z\frac{\partial z}{\partial x} \text{ और } (y-b)=-z\frac{\partial z}{\partial y}\cdot$$

$(x-a)$ और $(y-b)$ के इन मानों को समीकरण (11) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z^2=1-\left(z\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(z\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

या, $z^2(1+p^2+q^2)=1$

जो पुनः एक प्रथम कोटि PDE है।

इस प्रकार, दो-प्राचल गोला-कुल प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है।

★★★

ऊपर दिया परिणाम, व्यापक रूप में किसी भी दो-प्राचल पृष्ठ-कुल

$$z=F(x,\ y,\ a,\ b) \tag{14}$$

के लिए सत्य है, जहां a और b दो प्राचल हैं। यदि हम समीकरण (14) को क्रमशः x और y के सापेक्ष अवकलित करें, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$p=F_x(x,\ y,\ a,\ b) \tag{15}$$

और $$q=F_y(x,\ y,\ a,\ b) \tag{16}$$

यदि हम समीकरणों (14) और (15) को लें, तो हम इन्हें a और b के लिए हल कर सकते हैं यदि,

$$\begin{vmatrix} F_a & F_b \\ F_{xa} & F_{xb} \end{vmatrix} = F_a F_{xb} - F_b F_{xa} \neq 0 .$$

तीन समीकरणों (14), (15) और (16) में से किन्हीं दो को हल करके a और b को x, y, p, q, के पदों में ज्ञात किया जा सकता है, यदि, निम्नलिखित प्रतिबंध लागू हों :

i) $F_a F_{xb} - F_b F_{xa} \neq 0$ (यदि समीकरण (14) और (15) लिए जाते हैं)

ii) $F_{xa} F_{yb} - F_{xb} F_{ya} \neq 0$ (यदि समीकरण (15) और (16) लिए जाते हैं) (17)

iii) $F_a F_{yb} - F_b F_{ya} \neq 0$ (यदि समीकरण (14) और (16) लिए जाते हैं)

इस प्रकार, a और b के लिए हल करने के लिए, हमें या तो 17(i) या 17(ii) या 17(iii) की आवश्यकता है।

समीकरण (17) के किन्हीं दो समीकरणों से प्राप्त a और b के मानों को तीसरे समीकरण मे प्रतिस्थापित करने पर, हमें निम्न रूप का एक संबंध प्राप्त होता है

$$f(x, y, z, p, q) \tag{18}$$

जो दो स्वतंत्र चरों x और y में **प्रथम कोटि का एक व्यापक आंशिक अवकल** समीकरण है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 2 : समीकरण

$$z^2(1+a^3) = 8(x+ay+b)^3$$

के संगत PDE ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ दो-प्राचल पृष्ठ-कुल है :

$$z^2(1+a^3) = 8(x+ay+b)^3 \tag{19}$$

समीकरण : (19) को क्रमश x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$zp(1+a^3) = 12(x+ay+b)^2 \tag{20}$$

और $$zq(1+a^3) = 12a(x+ay+b)^2 \tag{21}$$

अभीष्ट PDE प्राप्त करने के लिए, हमें समीकरणों (20) और (21) में से a और b को विलुप्त करना होगा। समीकरण (20) और (21) के धनों को लेकर और उन्हें जोडनें पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z^3(1+a^3)^3(p^3+q^3) = 12^3(x+ay+b)^6(1+a^3)$$

$$= \frac{12^3}{8^2} z^4 (1+a^3)^3 \quad \text{(समीकरण (19) के प्रयोग से)}$$

$$(p^2+q^3) = 27z \tag{22}$$

जो अभीष्ट PDE है।

★★★

उदाहरण 3 : समीकरण

$$2z = (ax + y)^2 + b \tag{23}$$

के संगत PDE ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण (23) को x के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2\frac{\partial z}{\partial x} = 2(ax + y)\,a$$

या,

$$\frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial x} = ax + y,\ a \neq 0 \tag{24}$$

समीकरण (23) को y के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ax + y \tag{25}$$

समीकरण (24) और (25) से, हम लिख सकते हैं :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial y}$$

इस समीकरण में, समीकरण (25) से a का मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - y\right)\frac{\partial z}{\partial y}$$

या $$x\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - y\frac{\partial z}{\partial y}$$

या $$px + qy = q^2$$

जो अभीष्ट प्रथम कोटि PDE है।

★★★

कभी-कभी स्वेच्छ अचरों या प्राचलों को विलुप्त करने के स्थान पर, हमें दिए हुए समीकरण के संगत PDE प्राप्त करने के लिए उसमें से एक स्वेच्छ फलन विलुप्त करना पड़ता है। इस स्थिति को हम अपने अगले उदाहरण में स्पष्ट कर रहे हैं।

उदाहरण 4 : समीकरण

$$z = xy + f(x^2 + y^2) \tag{26}$$

के संगत PDE ज्ञात कीजिए, जहाँ f एक स्वेच्छ फलन है।

हल : समीकरण (26) को x के सापेक्ष, अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + f'(x^2 + y^2).2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y\right) = 2\ f'(x^2 + y^2) \qquad (27)$$

पुनः, समीकरण (26) को y के सापेक्ष अवकलित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + f'(x^2 + y^2).2y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - x\right) = 2\ f'(x^2 + y^2) \qquad (28)$$

समीकरण (27) और (28) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)$$

या, $yp - y^2 = xq - x^2$

जो अभीष्ट प्रथम कोटि PDE है।

★★★

अब, हम एक उदाहरण द्वारा यह स्पष्ट करेंगे कि यदि दिए हुए समीकरण में स्वतंत्र चरों की संख्या से अधिक स्वेच्छ अचर हों, तो विलोपन की ऊपर दी गयी प्रक्रिया से प्राप्त आंशिक अवकल समीकरण एक से अधिक कोटि का होगा।

उदाहरण 5 : समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (29)$$

के संगत DE ज्ञात कीजिए, जहाँ a, b और c स्वेच्छ अचर हैं।

हल : समीकरण (29) को x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ या } c^2x + a^2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (30)$$

और $$\frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y} \text{ या } c^2y + b^2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (31)$$

एक बार पुनः समीकरण (30) को x के सापेक्ष तथा समीकरण (31) को y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$c^2 + a^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + a^2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \qquad (32)$$

और $$c^2 + b^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + b^2 z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (33)$$

समीकरण (30) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$c^2 = \frac{-a^2 z}{x}\frac{\partial z}{\partial x}$$

समीकरण (32) में c^2 के इस मान को रखने और सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$zx\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (34)$$

इस प्रकार, समीकरण (31) से c^2 के मान को समीकरण (33) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$zy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (35)$$

इसी प्रकार, समीकरण (34) और (35) से अभीष्ट PDE प्राप्त हो जाते हैं। **ध्यान दीजिए** कि दोनों PDE कोटि दो के हैं।

★★★

अब हम अगली स्थिति की ओर चलते हैं।

$F(u, v) = 0$ के रूप के पृष्ठ

हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 6 : समीकरण $F(x+y+z, x^2+y^2-z^2) = 0$ में से स्वेच्छ फलन F को विलुप्त कीजिए तथा संगत PDE प्राप्त कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $u = x+y+z$ और $v = x^2+y^2-z^2$. (36)

तब, दिया हुआ समीकरण निम्न हो जाता है :

$$F(u, v) = 0 \qquad (37)$$

समीकरण (37) को x के सापेक्ष आंशिक : अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \qquad (38)$$

समीकरण (36) से, u_x, u_z, v_x, v_z के मान समीकरण (38) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial F}{\partial v}\left(x - z\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

या, $$\frac{\partial F}{\partial u}\bigg/\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{-2(x-pz)}{1+p} \tag{39}$$

इसी प्रकार, समीकरण (37) को y के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

ऊपर प्राप्त समीकरण में u_y, u_z, v_y, v_z के मान समीकरण (36) से रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\bigg/\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{-2(y-qz)}{1+q} \tag{40}$$

समीकरणों (39) और (40), से F को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{x-pz}{1+p}=\frac{y-qz}{1+q}$$

या, $$(1+q)\,(x-pz)=(1+p)\,(y-qz)$$

या, $$(y+z)\,p-(x+z)\,q=x-y$$

जो प्रथम कोटि का अभीष्ट PDE है।

★★★

ऊपर दी गयी विधि को, व्यापक रूप में,

$$F(u, v)=0 \tag{41}$$

रूप के पृष्ठों के लिए, प्रयोग किया जा सकता है, जहाँ $u=u(x, y, z), v=v(x, y, z)$ चरों x, y और z के ज्ञात फलन हैं तथा F चरों u और v का एक स्वेच्छ फलन है। यदि हम संबंध (41) को क्रमशः x और y के सापेक्ष अवकलित करें, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_x+pu_z)+\frac{\partial F}{\partial v}(v_x+pv_z)=0 \tag{42}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_y+qu_z)+\frac{\partial F}{\partial v}(v_y+qv_z)=0 \tag{43}$$

समीकरणों (42) और (43) से $\frac{\partial F}{\partial u}$ और $\frac{\partial F}{\partial v}$ को विलुप्त करने के लिए, हम इन दोनों समीकरणों से $\frac{\partial F/\partial u}{\partial F/\partial v}$ परिकलित करते हैं तथा उन्हें बराबर रखने पर प्राप्त करते हैं :

$$\frac{(v_x+pv_z)}{(u_x+pu_z)}=\frac{(v_y+qv_z)}{(u_y+qu_z)}$$

$$\Rightarrow \quad p(v_z u_y - u_z v_y) + q(u_z v_x - u_x v_z) = u_x v_y - v_x u_y$$

$$\Rightarrow \quad p\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \tag{44}$$

जो प्रथम कोटि का एक आंशिक अवकल समीकरण है।

अब हम इस विधि को एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 7: समीकरण $F(z-x, xy) = 0$ में से स्वेच्छ फलन F को विलुप्त कीजिए तथा संगत PDE प्राप्त कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $u = z - x$ और $v = xy$, तब

$$F(z-x, xy) = F(u, v) = 0.$$

समीकरण (44) से, हमें प्राप्त है :

$$p\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

$$\Rightarrow xp - yq - x = 0,$$

जो प्रथम कोटि का अभीष्ट PDE है।

★★★

ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं, जहाँ आपको प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण देखने को मिलते हैं। यहाँ हम उनमें से कुछ स्थितियों को ले रहे हैं।

समाकलन गुणक

आप इकाई 15 के उपभाग 15.4.3 में अध्ययन की गई विधि का स्मरण कीजिए। यहाँ संपूर्ण अवकल समीकरण के एक विशेष रूप

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

के लिए समाकलन गुणक ज्ञात करने की समस्या में एक फलन $\mu(x, y)$ ज्ञात करना होता है, जिसके लिए $(\mu \; Pdx + \mu \; Qdy)$ एक यथातथ अवकल हो। इससे हम पाते हैं :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \tag{45}$$

जो फलन $\mu(x, y)$ के लिए तथा ज्ञात P और Q के लिए प्रथम कोटि का एक आंशिक अवकल समीकरण है।

किसी समघात फलन के लिए ऑयलर समीकरण

खंड 2 की इकाई 7 में, हमने चर x और y के एक फलन f को धात n वाला समघात फलन परिभाषित किया था, जहाँ n एक वास्तविक संख्या है, यदि वह सभी x, y और किसी भी अचर $\lambda > 0$ के लिए $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ को संतुष्ट करता है।

मान लीजिए कि चर x और y में $z = f(x, y)$ धात, एक समधात फलन है। तब, ऑयलर प्रमेय द्वारा, फलन f प्रथम कोटि के निम्न PDE को संतुष्ट करता है :

$$xf_x + yf_y = nf$$

हैमिल्टोनियन फलन

इकाई 14 में, हमनें बताया था कि n स्वातंत्र्य कोटि वाले गतिकीय निकाय के xfr I ehdj.k (देखिए, समीकरण (27), इकाई 14)

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial q_i}, \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, i = 1, 2, \ldots, n \tag{46}$$

द्वारा दिए जाते हैं, जहाँ $H(q_i, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2 \ldots, p_n, t)$ हैमिल्टोनियन फलन है, जो निकाय की संपूर्ण ऊर्जा के बराबर होता है। समय t के पदों में $q_i's(i = 1, 2, \ldots, n)$ व्यापीकृत निर्देशांक हैं तथा $p_i's(i = 1, 2, \ldots, n)$ व्यापीकृत आघूर्ण हैं, जो किसी गतिकीय निकाय की अवस्था को अभिलक्षणित करते हैं। समीकरण (46) प्रथम कोटि के $2n$ आंशिक अवकल समीकरणों का निकाय है जिन्हें xfr dh gSehYVu fofgr (canonical) समीकरण कहा जाता है। इन समीकरणों के हल किसी भी समय t पर इस गतिकीय निकाय के गुणों का विवरण करते हैं। ये समीकरण एक ईरिश (आयरलेंड के) भौतिकविद्, खगोलविद् और गणितज्ञ डब्ल्यू. आर. हैमिल्टन (1805-1865) के नाम पर नामांकित किए गए हैं।

उन्होंने चिरप्रतिष्ठित यॉँत्रिकी, प्रकाश और बीजगणित में महत्वपूर्ण योगदान दिया।

गणितीय भौतिकी में इनका सबसे प्रसिद्ध योगदान न्यूटोनियन यॉँत्रिकी का

पुनः सूत्रीकरण करना है, जिसे आजकल हैमिल्टोनियन यॉँत्रिकी कहा जाता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं, जहाँ हमें प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं। अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करते समय कुछ PDE स्वंय प्राप्त कर सकते हैं।

E1) दिखाइए कि लंब वृत्तीय शंकु कुल $x^2 + y^2 = (z-c)^2 \tan^2 \alpha$ जिनके अक्ष z-अक्ष पर है, एक प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

E2) निम्नलिखित समीकरणों में से स्वेच्छ अचरों a और b को विलुप्त कीजिए तथा संगत आंशिक, अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए। इन PDE की कोटि भी बताइए।

i) $z = ax + by + a^2 + b^2$

ii) $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$

iii) $z = x + ax^2y^2 + b$

iv) $az + b = a^2x + y$

v) $z = ae^{bt} \sin bx$

vi) $z = ae^{-b^2t} \cos bx$

vii) $z = ax + by + a + b - ab$.

E3) निम्नलिखित पृष्ठों में से प्रत्येक से प्राप्त होने वाले आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए :

i) $z = f\left(\frac{xy}{z}\right)$

ii) $z = xy + f(x^2 + y^2)$

iii) $F(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$

iv) $2z = (\alpha x + y)^2 + \beta$

आपको याद होगा कि खंड 2 इकाई 6 के भाग 6.2 में हमने अवकल समीकरणों को उनके आश्रित चरों तथा उनके अवकलजों के घातों के आधार पर दो वर्गों में वर्गीकृत किया था। ये वर्ग थे रैखिक और अरैखिक। जो साधारण अवकल समीकरण रैखिक नहीं हो वह अरैखिक कहलाता है। पंरतु PDE की स्थिति में, जैसा कि हम इस इकाई की प्रस्तावना में बता चुके हैं, इन समीकरणों के आगे भी वर्गीकरण होते हैं। यदि एक आंशिक अवकल समीकरण रैखिक नहीं है, तो वह रैखिककल्प, समरैखिक या अरैखिक हो सकता है। अब हम प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण के वर्गीकरण को लेते हैं।

16.3 प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण का वर्गीकरण

दो स्वंतत्र चरों x और y में, समीकरण (18) द्वारा दिए गए प्रथम कोटि PDE के व्यापक रूप, अर्थात्

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

पर विचार कीजिए, जिसमें $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

समीकरण (18) को निम्नलिखित प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है :

1) समीकरण (18) को **रैखिक** कहा जाता है यदि f प्रत्येक चर z, p और q में रैखिक हो तथा इन चरों के गुणांक केवल स्वतंत्र चरों x और y के फलन हों। उदाहरण के लिए, समीकरण

$$x^2 p + y^2 q = (x + y)\, z$$

एक रैखिक समीकरण है। सबसे अधिक व्यापक रैखिक प्रथम कोटि PDE का रूप निम्न होता है :

$$P(x, y)p + Q(x, y)q + R(x, y)z = H(x, y) \tag{47}$$

जहाँ P, Q, R और H केवल स्वतंत्र चरों x और y के फलन हैं।

समीकरण (47) **समघात** कहलाता है, यदि $H(x, y) = 0$ तथा **असमघात** कहलाता है, यदि $H(x, y) \neq 0$। प्रथम कोटि रैखिक PDE के कुछ और उदाहरण ये हैं :

$$yp + xq = xy \tag{48}$$

$$np + (x+y)q - u = e^x \tag{49}$$

$$xp - yq - nu = 0 \tag{50}$$

यहाँ समीकरण (48) और (49) असमघात हैं, जबकि समीकरण (50) एक समधात समीकरण है।

2) यदि हम समीकरण (18) को

$$P(x, y)p + Q(x, y)q = R(x, y, z) \tag{51}$$

के रूप में लिख सकते हों तब यह प्रथम कोटि **सामिरैखिक** (Semilinear) PDE कहलाता है। यहाँ, गुणांक P और Q केवल स्वतंत्र चरों के फलन हैं, जबकि R आश्रित चर और स्वतंत्र चर दोनों का ही एक स्वेच्छ फलन है।

समीकरण

$$px(x+y) = qy(x+y) - (x-y)(2x+2y+z^2) \tag{52}$$

$$xp + yq = z^2 + x^2 \tag{53}$$

$$(x+1)^2 p + (y-1)^2 q = (x+y)z^2 \tag{54}$$

में से सभी सामिरैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं।

3) समीकरण (18) को यदि

$$P(x\ y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z) \tag{55}$$

के रूप में व्यक्त करना संभव हो, तो यह प्रथम कोटि **रैखिककल्प** PDE कहलाता है, जहाँ गुणांक P, Q और R चरों x, y और z के फलन हैं।

ऐसे समीकरण आश्रित चर $z(x, y)$ के प्रथम कोटि आंशिक अवकलजों में, अर्थात् p और q में रैखिक होते हैं।

समीकरण

$$z(xp - yq) = y^2 - x^2 \tag{56}$$

$$(y+zx)p - (x+yz)q = (x^2 - y^2)z \tag{57}$$

और

$$x(y^2+z)p - y(x^2+z)q + z^2 = 0 \tag{58}$$

रैखिकल्प समीकरण हैं। ऐसे समीकरण अपने उच्चतम अवकलज में रैखिक होते हैं। समीकरणों (56)-(58) में उच्चतम अवकलज कोटि एक का है तथा इसकी घात सभी स्थानों पर एक है।

यहाँ आपने शायद यह भी **ध्यान दिया** होगा कि रैखिक और सामिरैखिक समीकरण रैखिकल्प समीकरण की विशेष स्थितियाँ हैं।

यदि समीकरण (18) ऊपर दिए समीकरणों में से किसी भी प्रकार का नहीं है, तो हम इसे प्रथम कोटि का अरैखिक PDE कहते हैं।

उदाहरण के तौर पर हम समीकरणों

$$z^2(1+p^2+q^2)=1 \tag{59}$$

और $$2(y+zp)=q(xp+yq) \tag{60}$$

को ऊपर चर्चा किए गए 1) से 3) रूपों में से किसी में भी नहीं रख सकते हैं। समीकरण (59) और (60) अरैखिक समीकरण हैं।

ध्यान दीजिए कि जैसा कि साधारण अवकल समीकरण ODE में होता है PDE में रैखिकता (सामिरैखिक और रैखिककल्प) आश्रित चर z के घात पर निर्भर नहीं करती, जैसा कि आप समीकरणों (52)-(54) और (58) में देख सकते हैं।

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E4) निम्नलिखित समीकरणों को रैखिक, सामिरैखिक, रैखिककल्प और अरैखिक समीकरणों में वर्गीकृत कीजिए :

i) $xp+yq=zx+x^2+y^2$

ii) $qx^2y^2z=3px^3y^2+3qx^2y^3+pq$

iii) $xp+2yq=x^2/y$

iv) $py-qx=x^2-y^2$

v) $(x^2-y^2-z^2)p+2xyq=2xz$

vi) $(xz+y^2)p+(yz-2x^2)q+2xy+z^2=0$

vii) $\cos(x+y)p+\sin(x+y)q=z+\dfrac{1}{z}$

viii) $p^2+q^2+2px+2qy+zp=0$

प्रथम कोटि PDE के वर्गीकरण पर चर्चा करने के बाद, अब आप किसी भी प्रथम कोटि PDE का रैखिक, सामिरैखिक, रैखिककल्प और अरैखिक समीकरण के रूप में वर्गीकरण कर सकते हैं। आगे आपकी स्वाभाविक उत्सुकता इसके हल के बारे में जानकारी प्राप्त करने की होगी। क्योंकि बहुचरीय फलनों के आंशिक अवकलज एक चर के सापेक्ष (अन्य चरों को अचर समझा जाता है) उनके साधारण अवकलज हैं, इसलिए आपको ऐसा प्रतीत हो सकता है कि आंशिक अवकल समीकरणों का अध्ययन साधारण अवकल समीकरणों के सिद्धांत का एक सरल विस्तार होना चाहिए। परंतु स्थिति ऐसी नहीं हैं। आंशिक अवकल समीकरणों तथा साधारण अवकल समीकरणों को भिन्न-भिन्न विधियों से अध्ययन किया जाता है। यह समझने के लिए कि ऐसा क्यों है, आप याद कर सकते हैं कि ODE के स्थिति में, द्वितीय कोटि रैखिक ODE

$$p\frac{d^2y}{dt^2}+q\frac{dy}{dt}+ry=0 \tag{61}$$

का व्यापक हल $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ है, जहाँ A और B स्वेच्छ अचर हैं तथा $y_1(t)$ और $y_2(t)$ समीकरण के दो रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं। एक बार $y_1(t)$ और $y_2(t)$ ज्ञात हो जाएँ तब इस समीकरण का प्रत्येक हल A और B के कुछ मानों के लिए $Ay_1(t) + By_2(t)$ के रूप का होगा। दिए हुए प्रतिबंधों के अंतर्गत A और B के विशेष मानों के लिए, समीकरण (61) का हल समीकरण का एक विशेष (या विशिष्ट) हल होता है। परंतु PDE को भिन्न प्रकार से लिया जाता है, क्योंकि व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों के स्थान पर स्वेच्छ फलन ले लिए जाते हैं तथा सहायक प्रतिबंधों का प्रयोग करते हुए, इन स्वेच्छ फलनों को ज्ञात करना प्रायः कठिन या असंभव होता है। इसलिए, हम अगले भाग में पहले यह परिभाषित करेंगे कि प्रथम कोटि PDE के हल/समाकल का क्या अर्थ होता है तथा इसके बाद विभिन्न प्रकार समाकल जो हमारे सम्मुख आ सकते हैं उनका वर्गीकरण करेंगे तथा इन विभिन्न समाकलों के बीच के संबंधों को बताएँगे।

16.4 प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण का हल

समीकरण (18) के प्रकार के एक प्रथम कोटि व्यापक PDE अर्थात्

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

पर विचार कीजिए।

इस समीकरण के हल से हमारा तात्पर्य किसी प्राँत $D \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ पर सभी x, y के लिए परिभाषित एक संततः अवकलनीय फलन से है, जिससे कि

$$f(x, y, \phi(x, y), \phi_x(x, y), \phi_y(x, y)) = 0 \tag{62}$$

यदि हम $z = \phi(x, y)$ लिखें, तो यह हल xyz-आकाश में एक पृष्ठ-कुल को निरूपित करता है। उदाहरण के लिए, आप उदाहरण 3 के समीकरण, (23) अर्थात्,

$$2z = (ax + y)^2 + b$$

को लीजिए, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं। यह एक दो-प्राचल पृष्ठ-कुल है तथा यह PDE

$$px + qy = q^2 \tag{63}$$

को निरूपित करता है, जो प्रथम कोटि का है। समीकरण (23) PDE (63) का हल/समाकल है।

भाग 16.2 में लिए गए उदाहरणों 1 से 3 में, आप देख चुके हैं कि दो-प्राचल पृष्ठ-कुल से एक रैखिक या अरैखिक प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है। इसलिए, हम यह कल्पना करेंगे कि एक व्यापक प्रथम कोटि का आंशिक अवकल समीकरण (18) अर्थात्,

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

का हल

$$z = F(x, y, a, b), \tag{64}$$

हो सकता है, जो दो प्राचलों a और b पर निर्भर करता है।

प्राचलों की संख्या के आधार पर, अब हम प्रथम कोटि PDE के हलों को निम्न अनुसार वर्गीकृत करते हैं :

समाकलों का वर्गीकरण

1) पूर्ण समाकल

एक दो-प्राचल हल-कुल (64), अर्थात् $z = F(x, y, a, b)$ समीकरण (18) का एक **पूर्ण समाकल** (complete integral) कहलाता है, यदि लिए गए क्षेत्र में, फलन F समीकरणों 17 (i), (ii) और (iii) में से किसी को भी संतुष्ट करता हो। उदाहरण 3 की स्थिति में, समीकरण (23), PDE (63) का एक पूर्ण समाकल है।

2) व्यापक समाकल

समीकरण (64) में, यदि हम $b = b(a)$ लें, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$z = F(x, y, a, b(a)), \tag{65}$$

जो समीकरण (18) का एक प्राचल हल-कुल है तथा समीकरण (64) द्वारा दिए गए दो-प्राचल कुल का एक उप-निकाय (subsystem) है। हम संबंध (65) और संबंध

$$F_a + F_b b'(a) = 0$$

से a को विलुप्त करके, समीकरण (65) का अन्वालोप (envelope) 6 प्राप्त कर सकते हैं। वस्तुतः हम ऊपर दिए संबंध को a के लिए हल कर सकते है जिससे $a = a(x, y)$ प्राप्त होगा और a के इस मान को संबंध (65) में प्रतिस्थापित करने पर, हम समीकरण (18) का **व्यापक समाकल** (general integral)

$$z = F(x, y, a(x, y), b(a(x, y))) \tag{66}$$

के रूप में प्राप्त कर सकते हैं। समीकरण (66) से दिए जाने वाला पृष्ठ, एक-प्राचल पृष्ठ-कुल (65) का अन्वालोप होने के कारण, कुल के प्रत्येक सदस्य को अभिलक्षणिक वक्र के अनुदिश स्पर्श करता है तथा पूरे वक्र के अनुदिश इसपर p, q के वही मान होते हैं, जो कि समीकरण (65) में है। अतः एक समीकरण (18) का हल समुच्चय है, जो स्वेच्छ फलन पर निर्भर करता है। उदाहरण 3 की स्थिति में, एक-प्राचल हल-कुल को समीकरण (23) में $b = b(a)$ लेकर नीचे दिए अनुसार लिखा जा सकता है :

$$2z = (ax + y)^2 + b(a) \tag{67}$$

समीकरण (67) का अन्वालोप समीकरण

$$(ax + y)x + \frac{1}{2}b'(a) = 0$$

को $a = a(x, y)$ के लिए हल करके तथा फिर $a(x, y)$ के मान को समीकरण (67) में प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार, समीकरण

$$2z = (ax + y)^2 + b(a(x, y)) \tag{68}$$

से, जहाँ b एक स्वेच्छ फलन है, समीकरण (63) का व्यापक हल प्राप्त होता है।

यदि समीकरण (66) में एक विशेष फलन $b(a)$ का प्रयोग किया जाता है, तो हम PDE का एक **विशिष्ट हल** (particular solution) प्राप्त करते हैं। b के विभिन्न विकल्प PDE (18) के विभिन्न विशिष्ट हल देते हैं। उदाहरण के तौर पर हम समीकरण (67) में $b = a$ ले सकते हैं तथा समीकरण (63) का एक विशिष्ट हल $2z = (ax + y) + a$ प्राप्त कर सकते हैं।

3) विचित्र समाकल

व्यापक समाकल के अतिरिक्त, हम कभी-कभी दो-प्राचल कुल (64) का अन्वालोप ज्ञात करके एक अन्य हल भी ज्ञात कर सकते हैं। यह समीकरणों

$$\left.\begin{aligned} z &= F(x, y, a, b) \\ 0 &= F_a \\ 0 &= F_b \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

में से a और b को विलुप्त करके प्राप्त होता है तथा समीकरण (18) का **विचित्र** (singular) समाकल कहलाता है। उदाहरण के तौर पर आप E2) vii) से यह जानते हैं कि दो-प्राचल समतल-कुल

$$z = ax + by + a + b = F(x, y, a, b)$$

$$z = px + qy + p + q - pq \tag{70}$$

का PDE पूर्ण समाकल है। इस दो-प्राचल समतल-कुल का अन्वालोप

$$z = F = ax + by + a + b - ab$$

$$F_a = 0 \Rightarrow x + 1 - b = 0 \Rightarrow x + 1 = b$$

$$F_b = 0 \Rightarrow y + 1 - a = 0 \Rightarrow y + 1 = a$$

से प्राप्त होता है।

इस प्रकार, अन्वालोप के रूप में हम प्राप्त करते हैं

$$z = x(y+1) + y(x+1) + y + 1 + x + 1 - (x+1)(y+1)$$

$$= xy + x + y + 1,$$

जो PDE (70) का विचित्र हल है।

आप यह भी ध्यान दे सकते हैं कि सभी समीकरणों के विचित्र हल नहीं होते।

जैसे कि उदाहरण 3 में

PDE $px + qy = q^2$ के दो-प्राचल हल-कुल

$$2z = (ax + y)^2 + b = F(x, y, a, b) \tag{71}$$

को लीजिए। यहाँ, हमें प्राप्त है :

$$F_a = 0 \Rightarrow (ax + y)x = 0$$

$F_b = 0 \Rightarrow 1 = 0$, जो सही नहीं है।

इस प्रकार समीकरण (71) के अन्वालोप और इसी कारण समीकरण $px + qy = q^2$ के विचित्र समाकल का अस्तित्व नहीं है।

ऊपर वर्णित **प्रक्रिया** को अपनाए बिना ऐसा भी, PDE (18) से विचित्र हल को सीधे प्राप्त किया जा सकता है। ऐसा समीकरणों

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, p, q) = 0 \\ f_p = 0,\ f_q = 0 \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

में से p और q को विलुप्त करके किया जा सकता है। वास्तव में, ये दोनों प्रक्रियाएँ तुल्य हैं और यह नीचे की गयी चर्चा से स्पष्ट हो जाता है।

अब क्योंकि $z = F(x, y, a, b)$ समीकरण (18) का दो-प्राचल हल-कुल है, इसलिए समीकरण

$$f(x, y, F(x, y, a, b), F_x(x, y, a, b), F_y(x, y, a, b)) = 0 \tag{73}$$

a और b दोनों के लिए सर्वसम रूप से लागू होता है। हम समीकरण (73) को a और b के सापेक्ष अवकलित करते हैं तथा प्राप्त करते हैं।

$$\left.\begin{aligned} f_z F_a + f_p F_{xa} + f_q F_{ya} = 0 \\ f_z F_b + f_p F_{xb} + f_q F_{yb} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

परंतु हम समीकरण (69) से जानते हैं कि विचित्र समाकल पर

$$F_a = 0, F_b = 0.$$

अतः संबंध (74) निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\left.\begin{aligned} f_p F_{xa} + f_q F_{ya} = 0 \\ f_p F_{xb} + f_q F_{yb} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

समीकरण निकाय (75) को f_p और f_q के लिए हल करने के लिए,

$$\begin{vmatrix} F_{xa} & F_{ya} \\ F_{xb} & F_{yb} \end{vmatrix} = F_{xa} F_{yb} - F_{xb} F_{ya} \tag{76}$$

पर विचार कीजिए।

समीकरणों (17) से हम जानते हैं कि F, $F_{xa} F_{yb} - F_{xb} F_{ya} \neq 0$ (समीकरण 17 ii) को संतुष्ट करता है और इसलिए समीकरण (75) का एक मात्र हल $f_p = 0, f_q = 0$ है (देखिए, परिशिष्ट, इकाई 10)

इस प्रकार, हम विचित्र समाकल समीकरण का समीकरणों (72) में से p और q को विलुप्त करके ज्ञात कर सकते हैं। समीकरणों (72) से दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण के पदों में विचित्र समाकल का, जब भी इसका अस्तित्व हो, वैकल्पिक अभिलक्षणीकरण (alternative characterisation) प्राप्त होता है।

4) विशिष्ट समाकल

प्रायः (परंतु सदैव नहीं) ऊपर चर्चा किए गए तीनों वर्ग 1), 2) और 3) में प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरणों के सभी समाकल शामिल होते हैं। विशेष रूप के समीकरणों

के लिए विशिष्ट स्थितियों में कुछ अपवाद (exceptions) हो सकते हैं। इन समीकरणों के हलों को जिन्हें हम **विशिष्ट समाकल** (special integral) कहते हैं ऊपर दिए 1), 2) और 3) से प्राप्त नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण के तौर पर यदि हम समीकरण $F(x+y,\, y-\sqrt{z})=0$ से फलन F को विलुप्त करें, तो हम प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण $p-q=2\sqrt{z}$ प्राप्त करते हैं। अतः $F(x+y,\, x-\sqrt{z})$ जिसमें एक स्वेच्छ फलन शामिल है, समीकरण $p-q=2\sqrt{z}$ का व्यापक समाकल है। परंतु $z=0$ भी इस समीकरण को संतुष्ट करता है तथा इसे व्यापक समाकल से प्राप्त नहीं किया जा सकता है। इसी कारण यह समीकरण का विशिष्ट समाकल है।

ऊपर 1) से 4) में प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरणों के विभिन्न प्रकार के समाकलों के बारे में की गयी चर्चा को हम कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे। हम एक दो-प्राचल पृष्ठ-कुल से प्रारंभ करके संगत आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त करेंगे तथा फिर पूर्ण समाकल से व्यापक समाकल और विचित्र समाकल ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 8 : समतल-कुल

$$z = ax+by+a^2+b^2$$

से a और b को विलुप्त करके, कुल का आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए। इस समीकरण का पूर्ण समाकल बताइए तथा इसका विचित्र समाकल और व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : समतल-कुल है :

$$f = z-(ax+by+a^2+b^2)=0 \tag{77}$$

समीकरण (77) को x और y के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left.\begin{aligned} p-a=0 \\ q-b=0 \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

समीकरण (77) और (78) में से a और b को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z = px+qy+p^2+q^2 \tag{79}$$

जो दिए हुए समतल-कुल के लिए आंशिक अवकल समीकरण है। समीकरण (79) रैखिक प्रथम कोटि PDE है।

क्योंकि समीकरण (77) एक दो-प्राचल समतल-कुल है, इसलिए यह PDE (79) के पूर्ण समाकल को निरूपित करता है।

संबंध (69) का प्रयोग करते हुए, समीकरण (77) और समीकरणों

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0 \Rightarrow x+2a=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=0 \Rightarrow y+2b=0$$

में से a और b को विलुप्त करके विचित्र समाकल प्राप्त होता है। ऊपर प्राप्त a, b के मानों को समीकरण (77) में रखने पर, हमें विचित्र समाकल इस रूप में प्राप्त होता है :

$$z = x.\left(-\frac{x}{2}\right) + y\left(-\frac{y}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 4z = -(x^2 + y^2), \tag{80}$$

जो **परिक्रमण-परवलयज** (paraboloid of revolution) है। यदि हम $b = b(a)$ लें, तो हमें एक-प्राचल कुल निम्न रूप में प्राप्त होता है

$$z - (ax + b(a)y + a^2 + b^2(a)) = 0 \tag{81}$$

इस एक-प्राचल कुल का अन्वालोप, समीकरण (81) और उसके a के सापेक्ष अवकलज, अर्थात्,

$$x + b'(a)y + 2a + 2b(a)b'(a) = 0 \tag{82}$$

में से a को विलुप्त करके प्राप्त किया जाता है, जो दिए हुए समीकरण का व्यापक हल होगा।

★★★

उदाहरण 9 : xyz-आकाश में त्रिज्या 1 वाले ऐसे दो प्राचल गोला-कुल का आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके केन्द्र $(a, b, 0)$, xy-समतल पर स्थित हैं। उनका पूर्ण समाकल बताइए तथा व्यापक समाकल और विचित्र समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : xyz-आकाश में त्रिज्या 1 वाला दो-प्राचल गोला-कुल, जिसके केन्द्र $(a, b, 0)$, xy-समतल पर स्थित हैं यह है :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = 1 \tag{83}$$

उदाहरण 1 से आप जानते हैं कि इस दो-प्राचल पृष्ठ-कुल (83) से संतुष्ट होने वाला प्रथम कोटि PDE निम्न है :

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = 1 \tag{84}$$

संबंध (83) PDE (84), का पूर्ण समाकल है, क्योंकि इसमें दो स्वेच्छ अचर शामिल हैं। यदि हम समीकरण (83) में $b = b(a)$ लें, तो हमें एक-प्राचल गोला-कुल प्राप्त होता है, जिनके केन्द्र $(a, b(a), 0)$ हैं और ये xy समतल में वक्र $y = b(x)$ पर स्थित हैं। तब, इस कुल का अन्वालोप समीकरणों

$$(x-a)^2 + (y - b(a))^2 + z^2 = 1 \tag{85}$$

और a के सापेक्ष इसके अवकलज, अर्थात्

$$x - a + b'(a)\,(y - b(a)) = 0 \tag{86}$$

में से a को विलुप्त करके प्राप्त किया जाता है।

समीकरण (85) और (86) एक पृष्ठ निर्धारित करते हैं, जिसका अक्ष

$y = b(x)$ होता है तथा जो समीकरण (84) का व्यापक समाकल होता है। यदि समीकरण (86) में एक **विशेष मान** $b = 2a$ का प्रयोग किया जाए, तो हम

$a = \dfrac{x+2y}{5}$ प्राप्त करते हैं। a के इस मान को समीकरण (85) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{4(2x-y)^2}{25} + \frac{(y-2x)^2}{25} + z^2 = 1$$

या $$(y-2x)^2 + 5z^2 = 5 \tag{87}$$

जो PDE (84) का एक **विशिष्ट समाकल** है।

दो-प्राचल कुल (83) से एक अन्य अन्वालोप भी प्राप्त होता है, जिसे हम समीकरणों

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = 1$$

$$x - a = 0,$$

$$y - b = 0$$

में से a और b को विलुप्त करके निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$z = 1 \text{ और } z = -1 \tag{88}$$

इस प्रकार, इस दो-प्राचल कुल का अन्वालोप समतल युग्म $z = \pm 1$ है। समीकरण (88) से हमें PDE (84) का **विचित्र समाकल** प्राप्त होता है। वैकल्पिकतः हम संबंध (72) का प्रयोग करते हुए PDE से सीधे ही विचित्र समाकल प्राप्त कर सकते हैं।

यहाँ

$$\left.\begin{aligned} f &= z^2(1+p^2+q^2) - 1 = 0 \\ f_p &= 2z^2 p = 0 \Rightarrow p = 0 \\ f_q &= 2z^2 q = 0 \Rightarrow q = 0 \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

समीकरण (89) में से p और q को विलुप्त करने पर, हम $z = 1$ और $z = -1$ प्राप्त करते हैं, जो वही है जो समीकरण (88) द्वारा दिया गया है।

★★★

इस बात की सरलता से जाँच की जा सकती है कि विशिष्ट हल (87) और विचित्र हल (89), PDE (84) को संतुष्ट करते हैं। विचित्र हल (89) हल (87) को $y - 2x = 0,\ z = 1$ और $y - 2x = 0,\ z = -1$ के अनुदिश स्पर्श भी करता है। हम इसकी जाँच करने के लिए स्वयं आप पर छोड़ रहे हैं।

E5) जाँच कीजिए कि

i) विशिष्ट हल (87) और विचित्र हल (88), PDE (84) को संतुष्ट करते हैं।

ii) विचित्र हल (88) हल (87) को $y-2x=0,\ z=1$ और $y-2x=0,\ z=-1$ के अनुदिश स्पर्श करता है।

आइये एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 10 : दिया गया है कि दो-प्राचल समतल-कुल

$$z = ax + by + a^2 + b^2, \tag{90}$$

PDE , $z = px + qy + p^2 + q^2$ का पूर्ण समाकल है, तो इसका विशिष्ट समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : पूर्ण समाकल से प्रारंभ करते हुए हम कितनी भी संख्या में विशिष्ट समाकल ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ, हम दो विशिष्ट समाकल दे रहे हैं। पूर्ण समाकल (90) में $b = \sqrt{1-a^2}$ लीजिए। इसका अर्थ है कि हमें संबंध (90) में से समतलों का केवल एक उप-निकाय ही लेना है। इस एक-प्राचल समतल-कुल का समीकरण है :

$$F = z - ax - \sqrt{1-a^2}\ y - 1 = 0 \tag{91}$$

यहाँ $$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \Rightarrow -x + \frac{ay}{\sqrt{1-a^2}} = 0 \tag{92}$$

अब हम समीकरणों (91) और (92) में से a को विलुप्त करते हैं। समीकरण (92) को a के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a के इस मान को समीकरण (91) में रखने पर, हमें समतल-कुल (91) का अन्वालोप एक **लंब वृत्तीय शंकु** (right circular cone) के रूप में प्राप्त होता है, जिसका समीकरण निम्न है :

$$(z-1)^2 = x^2 + y^2 \tag{93}$$

समीकरण (93) PDE (90) का एक विशिष्ट समाकल है। समीकरण (90) का एक और विशिष्ट समाकल ज्ञात करने के लिए, हम $b(a)$ के लिए एक अन्य विकल्प, मान लीजिए,

$b = b(a) = a$ लेते हैं।

तब

$$F = z - ax - ay - 2a^2 \tag{94}$$

और $\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \Rightarrow x + y + 4a = 0$ (95)

समीकरणों (94) और (95) में से, a को विलुप्त करने पर, हम समीकरण (94) का अन्वालोप

$$8z = -(x+y)^2 \tag{96}$$

के रूप में प्राप्त करते हैं, जो एक **परवलयिक बेलन** (parabolic cylinder) है तथा दिए हुए PDE एक अन्य विशिष्ट समाकल है।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं

E6) उदाहरण 10 में, दिए हुए PDE का विचित्र समाकल प्राप्त कीजिए, यदि उसका अस्तित है तो।

E7) यदि PDE, $z = px + qy + pq$ का पूर्ण समाकल $z = ax + by + ab$ दिया गया हो तो इसका व्यापक समाकल और विचित्र समाकल प्राप्त कीजिए।

इस इकाई में हमने जो कुछ भी अध्ययन किया है, उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए, इस इकाई को हम यहीं समाप्त करते हैं।

16.5 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1) ज्यामिति, भौतिकी और गणित में अनेक विधियों द्वारा PDE प्राप्त किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए,

   i) परिक्रमण-पृष्ठों को परिभाषित करने वाले स्वेच्छ फलन को विलुप्त करके।

   ii) पृष्ठ-कुल को परिभाषित करने वाले समीकरण तथा उनके स्वतंत्र चरों के सापेक्ष आंशिक अवकलजों के बीच में से, दो-प्राचल पृष्ठ-कुल को परिभाषित करने वाले दो अचरों का विलुप्त करके।

   iii) $F(u, v) = 0$ के रूप के पृष्ठों के परिभाषित करने वाले फलन F को विलुप्त करके। जहाँ $u = u(x, y, z)$ और $v = v(x, y, z)$ चरों x, y और z के ज्ञात फलन हैं।

   iv) किसी समीकरण के यथातथ होने के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते समय।

   v) किसी गतिकीय निकाय की गति के हैमिल्टन विहित समीकरण लिखते समय।

   vi) किसी समघात फलन के लिए ऑयलर समीकरण प्राप्त करते समय।

2) प्रथम कोटि PDE का व्यापक रूप $f(x, y, z, p, q) = 0$ होता है।

3) एक प्रथम कोटि PDE का वर्गीकरण निम्न रूप में किया जाता है :

   i) **रैखिक,** (असमघात), यदि इसे

$$P(x, y)p + Q(x, y)q + R(x, y)z = H(x, y)$$

रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यह समघात होता है, यदि
$H(x, y) = 0$.

ii) **सामिरैखिक,** यदि इसे

$$P(x,y)p + Q(x, y)q = R(x, y, z)$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो।

iii) **रैखिककल्प,** यदि इसे

$$P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z)$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो।

iv) **अरैखिक** यदि इसे ऊपर दिए हुए रूपों i), ii) और iii) में से किसी भी रूप में व्यक्त नही किया जा सकता हो।

4) प्रथम कोटि PDE के हलों को निम्न रूप में वर्गीकृत किया जाता है :

i) **पूर्ण समाकल,** जो चरों के बीच का एक संबंध है, जिसमें उतने ही अचर होते है, जितने कि स्वतंत्र चर।

ii) **व्यापक समाकल,** जो कि पूर्ण समाकल

$$f(x,y, z,a, b) = 0$$

और समीकरणों

$$b = b(a) \text{ और } \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} b'(a) = 0$$

में से a को विलुप्त करके प्राप्त किया जाता है, जहाँ b एक स्वेच्छ फलन है। व्यापक समाकल एक-प्राचल पृष्ठ-कुल के अन्वालोप को निरूपित करता है।

iii) विचित्र समाकल, जो पूर्ण समाकल $f(x, y, z, a, b) = 0$ तथा

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = 0 \end{array}\right\}$$

में से a और b को विलुप्त करके प्राप्त होता है।

विचित्र समाकल दो-प्राचल पृष्ठ-कुल के अन्वालोप को निरूपित करता है।

वैकल्पिक रूप में, विचित्र समाकल को PDE

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

और $$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

में से p और q को विलुप्त करके भी ज्ञात किया जा सकता है।

iv) अपवाद स्थितियों में, यदि दिए हुए PDE के ऐसे समाकल हों जिन्हें पूर्ण समाकल, व्यापक समाकल या विचित्र समाकल में सम्मिलित नहीं किया जा सकता हो तो ये समाकल विशिष्ट समाकल कहलाते हैं।

16.6 हल/उत्तर

E1) दिया गया समीकरण है :

$$x^2 + y^2 = (z - c)^2 \tan^2 \alpha$$

इस समीकरण को x और y के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2x = 2(z - c) \tan^2 \alpha \ p$$

$$2y = 2(z - c) \tan^2 \alpha \, q$$

ऊपर दोनों समीकरणों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$yp - xq = 0$$

जो अभीष्ट प्रथम कोटि PDE है।

E2) i) दिया हुआ समीकरण है :

$$z = ax + by + a^2 + b^2 \tag{97}$$

x और y के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = a \tag{98}$$

और $$q = b \tag{99}$$

समीकरणों (98) और (99) का प्रयोग करते हुए, समीकरण (97) में से a और b को विलुप्त करके पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z = px + qy + p^2 + q^2$$

जो अभीष्ट प्रथम कोटि PDE है।

ii) $4z = p^2 + q^2$, प्रथम कोटि

iii) $xp - yq - x = 0$, प्रथम कोटि

iv) दिया हुआ समीकरण है :

$$az + b = a^2 x + y$$

x और y के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$ap = a^2$$

और $aq = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{q}$

और इसलिए $pq = 1$ अभीष्ट प्रथम कोटि PDE है।

v) $z = ae^{bt}\sin bx$

इस समीकरणों को x और t के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = abe^{bt}\cos bx \quad (100)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = abe^{bt}\sin bx \quad (101)$$

समीकरणों (100) और (101) को क्रमशः x और t के सापेक्ष एक बार और अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -ab^2e^{bt}\sin bx$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = ab^2e^{bt}\sin bx$$

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

जो अभीष्ट द्वितीय कोटि PDE है।

vi) $z = ae^{-b^2t}\cos bx$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -bae^{-b^2t}\sin bx \text{ और } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -ab^2e^{-b^2t}\cos bx \quad (102)$$

$$\text{और } \frac{\partial z}{\partial t} = -ab^2e^{-b^2t}\cos bx \quad (103)$$

समीकरणों (102) और (103) से हम निम्न द्वितीय कोटि PDE प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

vii) $z = ax + by + a + b - ab$

$\therefore\ p = z_x = a, q = z_y = b$

दिए हुए समीकरण में, a और b के ऊपर प्राप्त मानों को रखने पर, हम पाते हैं :

$z = px + qy + p + q - pq$

जो अभीष्ट प्रथम कोटि PDE है।

E3) i) दिया हुआ समीकरण है :

$$z = f\left(\frac{xy}{z}\right) \quad (104)$$

समीकरण (104) को आंशिकतः क्रमशः x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = f'\left(\frac{y}{z} - \frac{xy}{z^2}p\right) \tag{105}$$

और $$q = f'\left(\frac{x}{z} - \frac{xy}{z^2}q\right) \tag{106}$$

जहाँ f' , f का $\left(\frac{xy}{z}\right)$ के सापेक्ष अवकलज है।

समीकरणों (105) और (106) में से f' को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते है :

$$\frac{p}{\frac{y}{z} - \frac{xy}{z^2}p} = \frac{q}{\frac{x}{z} - \frac{xy}{z^2}q}$$

$\Rightarrow \quad p(xz - xyq) = q(yz - xyp)$

$\Rightarrow \quad z(px - qy) = 0$,

जो अभीष्ट PDE है

ii) $z = xy + f(x^2 + y^2)$

ऊपर दिए समीकरण को आंशिकतः x और y, के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = y + 2xf' \Rightarrow \frac{p-y}{x} = 2f'$$

$$q = x + 2yf' \Rightarrow \frac{q-x}{y} = 2f'$$

इन दोनों समीकरणों को बराबर रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$py - qx = y^2 - x^2,$$

जो अभीष्ट PDE है

iii) दिया हुआ समीकरण है :

$$F(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$$

मान लीजिए कि $x^2 + y^2 + z^2 = u,\ z^2 - 2xy = v$. (107)

तब, दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है :

$$F(u, v) = 0$$

इन समीकरण को x और y, के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर

तथा $\frac{\partial F}{\partial u}$ और $\frac{\partial F}{\partial v}$, को विलुप्त करने पर (समीकरण (44) के अनुसार) हम प्राप्त करते हैं :

$$p\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}+q\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)}=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \tag{108}$$

यहाँ
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} &= u_y v_z - u_z v_y = 2y.2z - 2z(-2x) = 4(yz+xz)\\
\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} &= u_z v_x - u_x v_z = 2z(-2y) - 2x.2z = -4(yz+xz)\\
\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= u_x v_y - u_y v_x = 2x(-2x) - (2y)(-2y) = 4(y^2 - x^2)
\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

समीकरण (109) से समीकरण (44) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(yz+zx)\,(p-q)=(y^2-x^2),$$

जो अभीष्ट PDE है

iv) $2z=(\alpha x+y)^2+\beta$

दिए हुए समीकरणों को x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते है :

$$2p = 2(\alpha x+y)\,\alpha \tag{110}$$

$$2q = 2(\alpha x+y) \tag{111}$$

समीकरण (111) को α के लिए हल करने तथा प्राप्त α के मान को समीकरण (110) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते है :

$$p=(q-y+y)\left(\frac{q-y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\ xp+yq=q^2$$

जो अभीष्ट PDE है।

E4) i) सामि-रैखिक

ii) अरैखिक

iii) रैखिक

iv) रैखिक

v) रैखिककल्प

vi) रैखिककल्प

vii) सामि-रैखिक

viii) अरैखिक

E5) i) विशिष्ट हल (87) निम्न है :

$$(y-2x)^2+5z^2=5$$

$$\Rightarrow \; z^2=1-\frac{1}{5}(y-2x)^2$$

x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$zp=\frac{2}{5}(y-2x),\; zq=\frac{-1}{5}(y-2x)$$

ऊपर प्राप्त समीकरणों से, z^2, z^2p^2 और z^2q^2 के मान समीकरण (84) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\text{L.H.S.}=1-\frac{(y-2x)^2}{5}+\frac{4}{25}(y-2x)^2+\frac{(y-2x)^2}{25}=1=\text{R.H.S}$$

ii) $z=1$ और $z=-1$ तथा x और y के सापेक्ष इनके अवकलजों को समीकरण (84) में प्रतिस्थापित करने पर, हम $(y-2x)=0$

प्राप्त करते हैं।

E6) समीकरण (90) से, हमें प्राप्त है :

$$z=F(x, y, a, b)=ax+by+a^2+b^2$$

$Fa=0$ और $Fb=0$ से प्राप्त होता है :

$$x+2a=0 \tag{112}$$

और $$y+2b=0 \tag{113}$$

समीकरण (90), (112) और (113) से a और b को विलुप्त करने पर, हम निम्न विचित्र हल प्राप्त करते हैं :

$$4z=-(x^2+y^2)$$

जो परिक्रमण-परवलयज है।

E7) पूर्ण समाकल $z=ax+by+ab$.

मान लीजिए कि $b=b(a)$.

तब, पूर्ण समाकल से प्राप्त होता है :

$$z=ax+b(a)+ab(a) \tag{114}$$

समीकरण (114) को आंशिकतः a के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$0 = x + b'(a)y + b(a) + ab'(a) \tag{115}$$

समीकरणों (114) और (115) से a को विलुप्त करने पर, हमें व्यापक समाकल प्राप्त हो जाता है। विचित्र समाकल समीकरणों

$$\left.\begin{aligned} z &= ax + by + ab \\ 0 &= x + b \\ 0 &= y + a \end{aligned}\right\}$$

के बीच से a और b को विलुप्त करने पर $z = -xy$ के रूप में प्राप्त होता है।

—×—

इकाई 17

प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

17.1 प्रस्तावना

इकाई 16 में, हमने देखा कि साधारण अवकल समीकरणों की स्थिति में समीकरण या तो रैखिक होते हैं या अरैखिक। परंतु प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरणों की स्थिति में रैखिक समीकरण के आगे और भी वर्गीकरण रैखिककल्प, सामिरैखिक और रैखिक समीकरण के रूप में होते हैं। वहाँ हमने प्रथम कोटि PDE के विभिन्न प्रकार के हलों/समाकलों की चर्चा भी की थी। इस इकाई में हम रैखिक और अरैखिक दोनों प्रकार के प्रथम कोटि PDE के हल ज्ञात करने की विधियों की चर्चा करेंगे। आप देखेंगे कि प्रथम कोटि रैखिक PDE के समाकल की रचना एक बहुस्तरीय प्रक्रिया है तथा इस दृष्टि से इसमें और साधारण अवकल समीकरण के समाकल की रचना में अंतर है। प्रथम कोटि अरैखिक PDE का समाकल ज्ञात करने की समस्या संगतरैखिक समीकरण का समाकल ज्ञात करने की समस्या की तुलना में और अधिक कठिन है, यद्यपि इनमें बहुत कुछ समानताएँ भी हैं।

हम भाग 17.2 का आरंभ रैखिक प्रथम कोटि PDE का व्यापक हल ज्ञात करने की लग्रांज विधि, जिसका श्रेय इतालवी गणितज्ञ लग्रांज, (1736-1813) को जाता है, की चर्चा से करेंगे। प्रथम कोटि द्वारा दी गयी है अरैखिक PDE को हल करने की विधि

आंशिक रूप से लग्रांज। परंतु बाद में, एक फ्रांसीसी गणितज्ञ चार्पिट ने इस विधि को एक परिपूर्ण रूप दिया, जिसे उसने पेरिस विज्ञान अकादमी के एक संस्मरण में 1784 में प्रस्तुत किया। यह विधि चार्पिट विधि कहलाती है तथा यह प्रथम कोटि अरैखिक PDE का पूर्ण समाकल प्रदान करती है। हम इस विधि की चर्चा भाग 17.3 में करेंगे। क्योंकि यह विधि सुसंगत प्रथम कोटि समीकरण निकाय पर आधारित है, इसलिए हमने भाग 17.3 का प्रारंभ सुसंगत समीकरण निकाय परिभाषित करके किया है तथा निकाय के सुसंगत होने के प्रतिबंध प्राप्त किए हैं। इस भाग में, हम प्रथम कोटि अरैखिक PDE के कुछ विशेष प्रकार, जिन्हें मानक रूप कहा जाता है, को भी लेंगे, जिनके लिए चार्पिट विधि का अनुप्रयोग लघु हो जाता है और जिनका पूर्ण समाकल सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- प्रथम कोटि PDE को हल करने के लिए लग्रांज विधि का प्रयोग कर सकेंगे;
- सुसंगत प्रथम कोटि समीकरण निकाय परिभाषित कर सकेंगे;
- दो प्रथम कोटि अरैखिक PDE निकायों के सुसंगत होने का प्रतिबंध ज्ञात कर सकेंगे;
- प्रथम कोटि आरैखिक PDE का पूर्ण समाकल ज्ञात करने के लिए चार्पिट विधि का प्रयोग कर सकेंगे;
- आरैखिक प्रथम कोटि PDE के मानक रूपों की पहचान कर सकेंगे तथा लघु-विधियों का प्रयोग करके उनके पूर्ण समाकल प्राप्त कर सकेंगे।

17.2 प्रथम कोटि रैखिक समीकरण


लग्रांज (1736–1813)

रैखिककल्प समीकरण

$$P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z) \qquad (1)$$

पर विचार कीजिए, जहाँ P, Q और R चरों x, y, z के दिए हुए फलन हैं, जिनमें p या q शामिल नहीं हैं तथा x, y, z को सम्मिलित करने वाले किसी प्रांत में इनके x, y, z के सापेक्ष संतत आंशिक अवकलज हैं। समीकरण (1) का व्यापक हल प्राप्त करने के लिए, हमें x, y और z के बीच एक संबंध ज्ञात करने की आवश्यकता है, जिसमें एक स्वेच्छ फलन सम्मिलित हो। इस प्रकार के समीकरणों को हल करने की प्रथम क्रमबंद्ध विधि लग्रांज द्वारा दी गई थी। इसी कारण, समीकरण (1) लंग्राज समीकरण कहलाता है। इस समीकरण के हल की विधि निम्नलिखित प्रमेय पर आधारित gßft I I sbl d k **व्यापक हल** प्राप्त हो जाता है।

प्रमेय 1 : रैखिककल्प समीकरण (1) (या लंग्राज समीकरण)

$$P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z)$$

का व्यापक हल

$$F(u, v) = 0 \qquad (2)$$

होता है, जहाँ F, u और v का एक स्वेच्छ फलन है तथा $u(x,y,z)=c_1$ और $v(x,y,z)=c_2$ युगपत् समीकरण-निकाय

$$\frac{dx}{P(x,\ y,\ z)}=\frac{dy}{Q(x,\ y,\ z)}=\frac{dz}{R(x,\ y,\ z)}. \tag{3}$$

के हल हैं।

आइए अब हम इस प्रमेय को सिद्ध करें।

उपपत्ति : दो पृष्ठ-कुल

$$u(x,\ y,z)=c_1 \text{ और } v(x,\ y,z)=c_2 \tag{4}$$

पर विचार कीजिए। यदि ये समीकरण निकाय (3), अर्थात्,

$$\frac{dx}{P(x,\ y,\ z)}=\frac{dy}{Q(x,\ y,\ z)}=\frac{dz}{R(x,\ y,\ z)}$$

के हल हों तो समीकरण (3) द्वारा दिए गए किसी भी वक्र के अनुदिश, हमें प्राप्त है :

$$\left.\begin{aligned} u_x dx+u_y dy+u_z dz=0 \\ v_x dx+v_y dy+v_z dz=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

समीकरणों (5) को dx, dy, dz के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{u_y v_z-u_z v_y}=\frac{dy}{u_z v_x-u_x v_z}=\frac{dz}{u_x v_y-u_y v_x} \tag{6}$$

जो पृष्ठ (4) द्वारा दिए गए वक्रों के अवकल समीकरण हैं। अतः समीकरण निकाय (3) और (6) को समान समाकल वक्रों को निरूपित करना चाहिए। समीकरणों (3) और (6) की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$P=K(u_y v_z-u_z v_y),\ Q=K(u_z v_x-u_x v_z), R=K(u_x v_y-u_y v_x), \tag{7}$$

जहाँ K चरों $x,\ y,\ z$ का एक शून्येतर फलन है।

अब संबंध (2), अर्थात्

$$F(u,\ v)=0$$

पर विचार कीजिए, जहाँ u और v चरों $x,\ y,\ z$ के ज्ञात फलन हैं तथा F, u और v एक स्वेच्छ फलन है।

संबंध (2) को क्रमशः x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right]+\frac{\partial F}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right]=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right]+\frac{\partial F}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right]=0 \tag{9}$$

$\frac{\partial F}{\partial u}$ और $\frac{\partial F}{\partial v}$ के शून्येतर हल के लिए, समीकरण (8) और (9) से प्राप्त होता है :

$$\begin{vmatrix} u_x + pu_z & v_x + pv_z \\ u_y + qu_z & v_y + qv_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (u_x + pu_z)(v_y + qv_z) - (v_x + pv_z)(u_y + qu_z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p(u_y v_z - u_z v_y) + q(u_z v_x - u_x v_z) = (u_x v_y - u_y v_x), \qquad (10)$$

जो समीकरण (1) के प्रकार का एक आंशिक अवकल समीकरण है।

समीकरण (7) से समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने तथा संबंध (10) का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं कि समीकरण (1) सर्वसम रूप से संतुष्ट हो जाता है। इस प्रकार, $F(u,v)=0$ समीकरणों (3) का एक हल है, जो संबंधों (4) द्वारा दिए गए पृष्ठों u और v का प्रतिच्छेदन है तथा यह इसका व्यापक हल कहलाता है।

इस प्रकार प्रमेय 1 की उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

—■—

समीकरण निकाय (3) **लग्रांज सहायक** (auxiliary) या **गौण** (subsidiary) समीकरण कहलाता है।

पृष्ठ $u(x, y, z) = c_1$ और पृष्ठ $v(x, y, z) = c_2$ के प्रतिच्छेदन द्वारा प्राप्त हुए समाकल वक्र समीकरण (1) के **अभिलक्षणिक** वक्र या **अभिलक्षणिक** कहलाते हैं तथा ये समीकरणों (3) के हल हैं।

इस विधि को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करने से पहले, हम इसमें सम्मिलित सभी चरणों को लिख लेते हैं।

1) समीकरण (1), अर्थात् $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ के लिए लंग्राज सहायक समीकरण लिखें।

2) इन युगपत् समीकरणों को इकाई 14 के भाग 14.4 में सीखी विधियों द्वारा हल करके दो स्वतंत्र हल $u(x, y, z) = c_1$ और $v(x, y, z) = c_2$ प्राप्त करें।

3) तब, समीकरण (1) के व्यापक हल/समाकल, जो पृष्ठ $u(x, y, z) = c_1$ और पृष्ठ $v(x, y, z) = c_2$ का प्रतिच्छेदन होता है, को निम्नलिखित तीनों तुल्य रूपों में से किसी एक रूप में लिखा जा सकता है :

   $F(u, v) = 0, u = \phi(v)$ या $v = \psi(u)$

   जहाँ F, ϕ और ψ स्वेच्छ फलन हैं।

   अब हम इस विधि को विभिन्न उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे। आप यहाँ इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि ऊपर दिए चरण (2) के अनुसार, हमने दी गयी समस्याओं के दो स्वतंत्र हल $u = c_1$ और $v = c_2$ ज्ञात करने के लिए उन विभिन्न विविधों का प्रयोग किया है जो आपने इकाई 14 के भाग 14.4 में सीखी थी।

उदाहरण 1 : आंशिक अवकल समीकरण

$$z_t + zz_x = 0$$

का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए।

हलः सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{z} = \frac{dz}{0} \tag{11}$$

समीकरण (11) के दो समाकल हैं :

$u = z = c_1,\ v = x - c_1 t = c_2$ या $v = x - zt = c_2$

तब, दिए हुए समीकरण का व्यापक समाकल है :

$$F(z,\ x - zt) = 0$$

या $\quad z(x, t) = \phi(x - zt)$. (12)

आप यह जाँच भी कर सकते हैं कि ऊपर प्राप्त किया गया हल दिए हुए PDE को संतुष्ट करता है। यह समीकरण (12) को t और x के सापेक्ष अवकलित करके तथा फिर इसे दिए हुए समीकरण में, प्रतिस्थापित करके किया जा सकता है। इस स्थिति में, हमें प्राप्त है :

$$z_t = \phi'(x - zt)\,(-z - tz_t)$$

$$= -z\phi'(x - zt) - t\phi'(x - zt)\,z_t$$

$$\Rightarrow \quad z_t = \frac{-z\phi'}{1 + t\phi'} \tag{13}$$

इसी प्रकार,

$$z_x = \frac{\phi'}{1 + t\phi'}. \tag{14}$$

समीकरणों (13) और (14) से दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z_t + zz_x = \frac{-z\phi'}{1 + t\phi'} + z\left(\frac{\phi'}{1 + t\phi'}\right) = 0$$

इस प्रकार, समीकरण (12) द्वारा प्राप्त हल दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है।

★★★

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 2 : PDE,

$$x^2 p + y^2 q = (x + y)z \tag{15}$$

का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण (15) के सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z(x+y)} = \frac{x^{-1}dx + y^{-1}dy - z^{-1}dz}{0} \tag{16}$$

समीकरणों (16) के प्रथम दो भिन्नों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x} = -\frac{1}{y} + c_1$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = c_1$$

समीकरणों (16) के अंतिम भिन्न को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$= \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = 0$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln y - \ln z = \text{अचर} \Rightarrow v(x, y, z) = \frac{xy}{z} = c_2$$

इस प्रकार, समीकरण (15) का व्यापक समाकल है :

$$F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{xy}{z}\right) = 0$$

जहाँ F एक स्वेच्छ फलन है।

इस व्यापक समाकल को

$$z = xy\, F_1\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

के रूप में भी लिखा जा सकता है, जहाँ F_1 एक स्वेच्छ फलन है।

★★★

उदाहरण 3 : निम्नलिखित PDE

$$p + q = x + y + z$$

का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : लग्रांज सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{x+y+z} \tag{17}$$

समीकरणों (17) के प्रथम दो भिन्नों को लेकर तथा उन्हें समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x - y = c, \text{ या } x = c_1 + y \tag{18}$$

समीकरणों (17) के अंतिम दो भिन्नों को लेकर तथा समीकरण (18) का प्रयोग करके, हम प्राप्त करते हैं :

$$dy = \frac{dz}{c_1 + 2y + z} \text{ या } \frac{dz}{dy} = c_1 + 2y + z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} - z = c_1 + 2y \tag{19}$$

समीकरण (19) z और y में एक रैखिक समीकरण है तथा इसका I.F. $= e^{\int -dy} = e^{-y}$. समीकरण (19) का हल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$ze^{-y} = \int (c_1 + 2y)e^{-y} dy + c_2$$

$$= -(c_1 + 2y)e^{-y} + \int e^{-y} 2dy + c_2$$

$$= -(c_1 + 2y)e^{-y} - 2e^{-y} + c_2$$

$$= -e^{-y}(c_1 + 2y + 2) + c_2$$

$$\therefore \ z = c_2 e^y - (c_1 + 2y + 2)$$

$$= c_2 e^y - (x + y + 2)$$

$$\text{या} \quad (z + x + y + 2)e^{-y} = c_2 \tag{20}$$

समीकरणों (18) और (20) से, अभीष्ट व्यापक हल है :

$$F[x - y, e^{-y}(z + x + y + 2)] = 0.$$

★★★

उदाहरण 4 : PDE,

$$(x - y)p + (x + y)q = 2xz$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : लग्रांज सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{2xz} \tag{21}$$

समीकरणों (21) में से प्रथम दो भिन्नों के लेने पर, हम निम्न समघात समीकरण प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y} = \frac{1 + y/x}{1 - y/x} \tag{22}$$

मान लीजिए कि $y/x = v$ या $y = xv$ और $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$·

इन मानों को समीकरण (22) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

या $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

या $$\frac{2dx}{x} = \frac{2(1-v)}{1+v^2}dv = \left[\frac{2dv}{1+v^2} - \frac{2vdv}{1+v^2}\right]$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2\ln x = 2\tan^{-1} v - \ln(1+v^2) + \ln c_1$$

या $$\ln x^2 = 2\tan^{-1}(y/x) - \ln(1+y^2/x^2) + \ln c_1$$

या $$\ln\frac{(x^2+y^2)}{c_1} = 2\tan^{-1}(y/x)$$

या $$(x^2+y^2) = c_1 e^{2\tan^{-1} y/x}$$

या $$(x^2+y^2)e^{-2\tan^{-1} y/x} = c_1 \qquad (23)$$

अब $1, 1, -\frac{1}{z}$ को गुणकों के रूप में चुनने पर समीकरणों (21) का प्रत्येक भिन्न

$$= \frac{dx + dy - dz/z}{(x-y)+(x+y)-2x} = \frac{dx+dy-dz/z}{0}$$

$$\therefore\ dx + dy - \frac{dz}{z} = 0 \Rightarrow x + y - \ln z = c_2 \qquad (24)$$

अतः, समीकरणों (23) और (24) से अभीष्ट व्यापक समाकल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$F[(x^2+y^2)e^{-2\tan^{-1} y/x},\ x + y - \ln z] = 0$$

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को करने का प्रयास कर सकते हैं।

E1) निम्नलिखित अवकल समीकरणों के व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $z(xp - yq) = y^2 - x^2$

ii) $y^2 p - xyq = x(z - 2y)$

iii) $(z^2 - 2yz - y^2)p + x(y + z)q = x(y - z)$

iv) $\frac{y - z}{yz} p + \frac{z - x}{zx} q = \frac{x - y}{xy}$

v) $(x^3 + 3xy^2)p + (y^3 + 3x^2 y)q = 2(x^2 + y^2)z$

आपको याद होगा कि इकाई 6 के भाग 6.3 में, हमने प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण के लिए एक आदि मान समस्या (initial value problem) को परिभाषित किया था। वहाँ, हमनें एक साधारण अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ जहाँ, } y = y_0 \text{ पर } x = x_0$$

के हल के लिए, अस्तित्व प्रमेय (existence theorem) का कथन दिया था।

अब हम एक रैखिककल्प आंशिक अवकल समीकरण के लिए आदि मान समस्या को लेंगे।

जैसा कि आप ऊपर देख चुके हैं, प्रथम कोटि PDE का हल दो पृष्ठों का प्रतिच्छेदन होता है। इस प्रकार, इस स्थिति में आदि प्रतिबंध एक बिंदु पर नहीं होंगे, बल्कि हल पृष्ठ एक वक्र Γ_0 मान लीजिए, से होकर जाएँगे, जो **आदि आँकड़ा वक्र** (initial data curve) कहलाती है। इस कोर्स में, हम प्रथम कोटि PDE के हल के अस्तित्व की चर्चा नहीं करेंगे। परंतु हम आपको एक विधि बताएँगे जो यह दर्शाती है कि समीकरण (1), अर्थात्

$$Pp + Qq = R$$

के व्यापक हल का प्रयोग किस प्रकार उस समाकल पृष्ठ को ज्ञात करने में किया जा सकता है, जो एक आदि आँकड़ा वक्र से होकर जाता है। हम इस विधि को निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 5 : समीकरण

$$(2xy - 1)\ p + (z - 2x^2)\ q = 2(x - yz) \tag{25}$$

का व्यापक हल तथा रेखा $x = 1,\ y = 0$ से होकर जाने वाला हल पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल: समीकरण (25) के संगत सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{2xy - 1} = \frac{dy}{z - 2x^2} = \frac{dz}{2(x - yz)} \tag{26}$$

इनमें से प्रत्येक भिन्न निम्नलिखित के बराबर है :

$$\frac{zdx+dy+xdz}{0}=\frac{xdx+ydy+(dz/2)}{0} \tag{27}$$

समीकरण (27) को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u=y+xz=c_1,\ v=x^2+y^2+z=c_2$$

जहाँ c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

दिए हुए समीकरण के व्यापक हल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x^2+y^2+z=F(y+xz) \tag{28}$$

जहाँ F एक स्वेच्छ फलन है। हम आदि आँकड़ों :

$$x=1,\ y=0$$

का प्रयोग करके F का रूप ज्ञात करेंगे।

इन आँकड़ों को समीकरण (28) में प्रतिस्थापित करके, हम प्राप्त करते हैं :

$$F(z)=1+z$$

और इसलिए

$$F(y+xz)=1+y+xz \tag{29}$$

समीकरण (29) से समीकरण (28) में प्रतिस्थापित करने पर, हम अभीष्ट हल पृष्ठ

$$x^2+y^2-xz-y+z=1$$

के रूप में प्राप्त करते हैं।

★★★

आइए एक अन्य उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 6 : समीकरण

$$x^3p+y(3x^2+y)q=z(2x^2+y) \tag{30}$$

के समाकल पृष्ठ का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो वक्र

$$\Gamma_0 : x_0=1,\ y_0=s, z=s(1+s) \tag{31}$$

से होकर जाता है, जहाँ s वक्र को परिभाषित करने वाला प्राचल है।

हल : समीकरण (30) के संगत सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{x^3}=\frac{dy}{y(3x^2+y)}=\frac{dz}{z(2x^2+y)} \tag{32}$$

समीकरणों (32) का प्रत्येक भिन्न निम्न के बराबर है :

$$\frac{-x^{-1}dx+y^{-1}dy-z^{-1}dz}{0} \Rightarrow x^{-1}dx-y^{-1}dy+z^{-1}dz=0$$

अतः, ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y=c_1xz \tag{33}$$

समीकरणों (32) के पहले और तीसरे भिन्न से बने युग्म को हल करने तथा समीकरण (33) का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{2x}{z}-\frac{x^2}{z^2}\frac{dz}{dx}=c_1,$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{z}\right)=c_1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{z}=c_1x+c_2$$

या $\quad x^2=y+c_2z.$ (34)

समीकरणों (33) और (34) में, आदि आँकड़ों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$1=c_1(1+s),\ 1-s=c_2s(1+s) \tag{35}$$

समीकरणों (35) से s को विलुप्त करने पर, हम c_1 और c_2 के बीच एक संबंध निम्नलिखित रूप में प्राप्त करते हैं :

$$c_1(2c_1-1)=c_2(1-c_1). \tag{36}$$

समीकरणों (33) और (34) से c_1 और c_2 के मान समीकरण (35) में प्रतिस्थापित करने पर, हम अभीष्ट हल पृष्ठ रूप में प्राप्त करते हैं:

$$2y^2-xyz=x(x^2-y)\,(xz-y).$$

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E2) समीकरण $x(y^2+z)p-y(x^2+z)q=(x^2-y^2)z$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए, जो वक्र $x+y=0, z=1$ से होकर जाता है।

E3) समीकरण $yp+xq-z=0$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए, जो वक्र $z=x^3,\ y=0$ से होकर जाता है।

E4) समीकरण $(y-z)p+(z-x)q=x-y$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए, जो वक्र $z=0,\ xy=1$ से होकर जाता है।

अब हम प्रथम कोटि अरैखिक समीकरण को हल करने की विधि की चर्चा करेंगे।

17.3 प्रथम कोटि के अरैखिक समीकरण

व्यापक प्रथम कोटि अरैखिक PDE

$$f(x, y, z, p, q)=0$$

पर विचार कीजिए। जैसा कि हम भाग 17.1 में पहले ही बता चुके हैं, प्रथम कोटि अरैखिक PDE का पूर्ण समाकल ज्ञात करने की विधि फ्राँसीसी गणितज्ञ चार्पिट ने विकसित की थी। इस विधि के अंतर्गत एक अन्य PDE ज्ञात करनी होती है, जो दिए हुए समीकरण (37) के साथ सुसंगत हो तथा जिसमें एक स्वेच्छ प्राचल हो। अतः, चार्पिट विधि को लेने से पहले, हम यह परिभाषित करेंगे कि प्रथम कोटि PDE निकाय कब सुसंगत होता है तथा ऐसे निकायों द्वारा कौन से प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं।

17.3.1 सुसंगत प्रथम कोटि समीकरण निकाय

प्रथम कोटि PDE

$$f(x,y,z, p,q)=0 \tag{37}$$

और PDE

$$g(x, y,z, p, q)=0 \tag{38}$$

पर विचार कीजिए। समीकरण (37) और (38) **सुसंगत** कहे जाते हैं यदि और केवल यदि समीकरणों (37) और (38) को हल करने पर प्राप्त

i) $$J=\frac{\partial(f, g)}{\partial(p, q)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q}\\ \frac{\partial g}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial q}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{39}$$

ii) $$p=\phi(x, y, z),\ q=\psi(x, y, z) \tag{40}$$

समीकरण

$$dz=\phi(x, y, z)dx+\psi(x, y, z)dy \tag{41}$$

को समाकलनीय बना देते हैं।

अधिक स्पष्टता के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 7 : दिखाइए कि समीकरण $xp=yq,\ z(xp+yq)=2xy$ सुसंगत हैं तथा इनका हल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f=xp-yq=0$ (42)

और $$g=z(xp+yq)-2xy=0 \tag{43}$$

तब, $$\frac{\partial(f, g)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} x & -y \\ xz & yz \end{vmatrix} = 2xyz \neq 0.$$

इस प्रकार, f और g प्रतिबंध (39) को संतुष्ट करते हैं। प्रतिबंध (41) की जाँच करने के लिए, हम p और q के लिए समीकरणों (42) और (43) को हल करके निम्न प्राप्त करते हैं :

$$p = \frac{y}{z} \text{ और } q = \frac{x}{z}$$

समीकरण (41) में p और q के मान प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$z\ dz = y\ dx + x\ dy$$

प्राप्त करते हैं, जिसे समाकलित करने पर $z^2 = 2xy + c$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, समीकरण (42) और (43) सुसंगत हैं तथा इनका एक प्राचल सार्व हल-कुल $z^2 = 2xy + c$ है।

★★★

आइए समीकरण (41), अर्थात्

$$\phi\, dx + \psi dy - dz = 0$$

पर पुनः दृष्टि डालें। आप जानते हैं कि यह एक संपूर्ण अवकल समीकरण है तथा इसकी समाकलनीयता का आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध (देखिए प्रमेय 1, इकाई 15) निम्न है :

$$\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial z} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \phi \psi_z + \psi_x = \phi_y + \psi \phi_z \tag{44}$$

इस प्रकार, समीकरण (37) और (38) सुसंगत हैं, यदि समीकरण (44) संतुष्ट होता है, जहाँ ϕ और ψ समीकरण (40) द्वारा प्राप्त होते हैं। सुसंगता प्रतिबंध f और g के पदों में प्राप्त करने के लिए, हम समीकरणों (37) और (38) में समीकरण (40) से प्राप्त p और q के मानों को प्रतिस्थापित करते हैं और फिर परिणामी समीकरणों (37) और (38) को x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर प्राप्त करते हैं :

$$f_x + f_z \phi + f_p(\phi_x + \phi_z \phi) + f_q(\psi_x + \psi_z \phi) = 0 \tag{45}$$

$$g_x + g_z \phi + g_p(\phi_x + \phi_z \phi) + g_q(\psi_x + \psi_z \phi) = 0 \tag{46}$$

$$f_y + f_z \psi + f_p(\phi_y + \phi_z \psi) + f_q(\psi_y + \psi_z \psi) = 0 \tag{47}$$

$$g_y + g_z \psi + g_p(\phi_y + \phi_z \psi) + g_q(\psi_y + \psi_z \psi) = 0 \tag{48}$$

समीकरणों (45) और (46) को क्रमशः g_p और f_p से गुणा करने पर तथा परिणामी समीकरणों को घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(f_x g_p - g_x f_p) + \phi(f_z g_p - g_z f_p) + (\phi_x + \phi_z \phi)\,(f_p g_p - g_p f_p)$$

$$+(\psi_x + \psi_z \phi)\,(f_q g_p - g_q f_p) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(f,\,g)}{\partial(x,\,p)} + p\frac{\partial(f,\,g)}{\partial(z,\,p)} + (\psi_x + \psi_z \phi)\,\frac{\partial(f,\,g)}{\partial(q,\,p)} = 0 \tag{49}$$

जहाँ हमने संबंध (40) का प्रयोग करके समीकरण (49) के दूसरे पद में ϕ के स्थान पर p लिया है। इसी प्रकार, समीकरणों (47) और (48) को क्रमशः g_p और f_q से गुणा करने तथा परिणामी समीकरणों को घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\partial(f,\,g)}{\partial(y,\,q)} + q\frac{\partial(f,\,g)}{\partial(z,\,q)} - (\phi_y + \phi_z \psi)\,\frac{\partial(f,\,g)}{\partial(q,\,p)} = 0 \tag{50}$$

समीकरणों (49) और (50) को जोड़ने पर तथा संबंध (44) का प्रयोग करने पर, हम समीकरणों (37) और (38) का सुसंगतता प्रतिबंध

$$\frac{\partial(f,\,g)}{\partial(x,\,p)} + \frac{\partial(f,\,g)}{\partial(y,\,q)} + p\frac{\partial(f,\,g)}{\partial(z,\,p)} + q\frac{\partial(f,\,g)}{\partial(z,\,q)} = 0 \tag{51}$$

के रूप में प्राप्त करते हैं। समीकरण (51) के बाएँ पक्ष के व्यंजक को $[f,\,g]$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं :

$$[f,\,g] = \frac{\partial(f,\,g)}{\partial(x,\,p)} + \frac{\partial(f,\,g)}{\partial(y,\,q)} + p\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,\,p)} + q\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,\,q)} = 0 \tag{52}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि समीकरण (41) की समाकलनीयता का प्रतिबंध $[f,\,g]=0$ है।

समीकरण (52) को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

$$f_p\frac{\partial g}{\partial x} + f_q\frac{\partial g}{\partial y} + (pf_p + qf_q)\frac{\partial g}{\partial z} - (f_x + pf_z)\frac{\partial g}{\partial p} - (f_y + qf_z)\frac{\partial g}{\partial q} = 0 \tag{53}$$

समीकरण (53), जो एक प्रथम कोटि PDE है, का प्रयोग हम दिए हुए समीकरण $f=0$ का सुसंगत समीकरण $g=0$ ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं। एक बार g ज्ञात हो जाए तो हम p और q ज्ञात कर सकते हैं और फिर

$$h(x,\,y,\,z,\,b) = 0 \tag{54}$$

के रूप का एक-प्राचल हल-कुल प्राप्त करने के लिए, जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है, समीकरण (41) को समाकलित कर सकते हैं। संबंध (54) से प्राप्त हल दोनों समीकरणों (37) और (38) को संतुष्ट करेगा। इस प्रकार, **सुसंगत समीकरणों का एक एक-प्राचल सार्व हल-कुल होता है।**

ध्यान दीजिए कि, जैसा हम ऊपर बता चुके हैं, सुसंगत समीकरणों (37) और (38) का एक एक-प्राचल सार्व हल-कुल होता है। इसका अर्थ यह नहीं है कि

$f(x, y, z, p, q) = 0$ का प्रत्येक हल आवश्यक ही $g(x, y, z, p, q) = 0$ का एक हल हो या विलोमत : यह आवश्यक नहीं है कि $g(x, y, z, p, q) = 0$ का प्रत्येक हल $f(x, y, z, p, q) = 0$ का एक हल हो। उदाहरण 7 में, $z = xy$ समीकरण (42) का एक हल है, परंतु यह समीकरण (43) को संतुष्ट नहीं करता।

आइए ऊपर चर्चा की गई विधि को स्पष्ट करने के लिए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 8 : दिखाइए कि आंशिक अवकल समीकरण

$$p^2x + q^2y - z = 0 \tag{55}$$

समीकरण $$p^2x - q^2y = 0 \tag{56}$$

के साथ सुसंगत है तथा इनका एक प्राचल सार्व हल-कुल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f = p^2x + q^2y - z = 0$.

तथा $g = p^2x - q^2y = 0$.

यहाँ, हमें प्राप्त है :

$$f_x = p^2,\ f_y = q^2,\ f_p = 2px,\ f_q = 2qy,\ f_z = -1$$

$$g_x = p^2,\ g_y = -q^2,\ g_p = 2px,\ g_q = -2qy,\ g_z = 0$$

प्रतिबंध (53) का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$[f, g] = 2xp^3 - 2yq^3 - (p^2 - p)\,2px + (q^2 - q)\,2qy$$

$$= 2(p^2x - q^2y) = 0$$ [समीकरण (56) के प्रयोग से]

अतः दिया हुआ PDE निकाय सुसंगत है।

समीकरणों (55) और (56) को p और q के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \pm\left(\frac{z}{2x}\right)^{\frac{1}{2}},\ q = \pm\left(\frac{z}{2y}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{57}$$

समीकरण (57) में p और q के केवल धनात्मक मानों को लेने पर तथा इन्हें

$$dz = pdx + qdy$$

में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{z}}dz = \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

जिसे समाकलित करने पर, $\sqrt{2z} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + b$ के रूप में एक-प्राचल सार्व हल-कुल प्राप्त होता है, जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है।

★★★

आइए एक अन्य उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 9 : दिखाइए कि समीकरण

$$z = px + qy \tag{58}$$

किसी भी समीकरण

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{59}$$

के साथ सुसंगत है, जो x, y और z में समधात है।

हल : यहाँ हमें प्राप्त है :

$$[f, g] = xf_x + yf_y + (xp + yq)\, f_z, \tag{60}$$

जहाँ $g = px + qy - z = 0$.

यदि f चरों x, y और z में समधात है तथा, मान लीजिए, घात n का है, तो ऑयलर प्रमेय द्वारा (देखिए इकाई 4, खंड 1), हमें प्राप्त है :

$$xf_x + yf_y + zf_z = nf$$

इस प्रकार, समीकरण (60) निम्न रूप में बदल जाता है :

$[f, g] = f_z(xp + yq - z) + nf = 0$ [समीकरणों (58) और (59) के कारण]

इस प्रकार, सुसंगतता प्रतिबंध संतुष्ट होता है तथा समीकरण (58) और (59) सुसंगत हैं।

★★★

अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E5) दिखाइए कि समीकरण $f(x, y, p) = 0$ और $g(x, y, q) = 0$ सुसंगत हैं, यदि $f_p g_x - f_y g_q = 0$.

E6) दिखाइए क आंशिक अवकल समीकरण

$f(x, y, p, q) = 0$ और $g(x, y, p, q) = 0$ सुसंगत हैं, यदि

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} = 0.$$

E7) दिखाइए कि समीकरण $(y - z)p + (z - x)q = x - y$ और $z - px - qy = 0$ सुसंगत हैं।

E8) दिखाइए कि समीकरण $xp - yq = x$ और $x^2 p + q = xz$ सुसंगत हैं तथा इनका एक प्राचल सार्व हल-कुल ज्ञात कीजिए।

अब हम समीकरण (37) का पूर्ण समाकल ज्ञात करने की चार्पिट विधि की चर्चा करेंगे।

17.3.2 चार्पिट विधि

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, (37) के रूप के अरैखिक PDE, अर्थात्

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात करने की चार्पिट विधि में, हम

$$F(x, y, z, p, q, a) = 0 \tag{61}$$

के प्रकार का एक अन्य प्रथम कोटि PDE लेते हैं, जिसमें एक स्वेच्छ प्राचल a होता है तथा जो समीकरण (37) के साथ सुसंगत होता है। दूसरे शब्दों में, हम एक फलन F ज्ञात करने का प्रयास करते हैं ताकि

i) समीकरणों (37) और (61) को,

$$p = p(x, y, z, a), q = (x, y, z, a) \tag{62}$$

प्राप्त करने के लिए, हल किया जा सके।

ii) समीकरण (62) में प्राप्त p, q के लिए समीकरण

$$dz = p(x, y, z, a)\, dx + q(x, y, z, a)\, dy \tag{63}$$

समाकलनीय हों।

एक बार हम ऐसा फलन ज्ञात करने में सफल हो जाते हैं, तो हम समीकरण (63) को समाकलित कर सकते हैं तथा दो-प्राचल हल-कुल

$$G(x, y, z, a, b) = 0, \tag{64}$$

रूप में प्राप्त कर सकते हैं, जो समीकरण (37) का पूर्ण समाकल होगा।

इस प्रकार, अब मुख्य समस्या दूसरा समीकरण (61) प्राप्त करने की है। वास्तव में, यह समस्या उप-भाग 17.3.1 में पहले ही हल की जा चुकी है तथा हमें केवल दिए हुए समीकरण $f = 0$ के सुसंगत समीकरण $F = 0$ प्राप्त करने की आवश्यकता है। आप जानते हैं कि समीकरणों $F = 0$ और $f = 0$ के सुसंगता प्रतिबंध जो समीकरणों (39) और (53) द्वारा प्राप्त हैं वे निम्न हैं

$$J = \frac{\partial(f, F)}{\partial(p, q)} \neq 0$$

और

$$f_p \frac{\partial F}{\partial x} + f_q \frac{\partial F}{\partial y} + (pf_p + qf_q)\frac{\partial F}{\partial z} - (f_x + pf_z)\frac{\partial F}{\partial p} - (f_y + qf_z)\frac{\partial F}{\partial q} = 0 \tag{65}$$

ध्यान दीजिए कि पाँच चरों x, y, z, p और q वाला एक फलन F ज्ञात करने के लिए प्राप्त समीकरण (65) एक प्रथम कोटि रैखिक PDE है। प्रथम कोटि कोटि वैश्विक PDE को हल करने की लंग्राज विधि द्वारा समीकरण (65) के सहायक समीकरण निम्न हैं :

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-(f_x + pf_z)} = \frac{dq}{-(f_y + qf_z)} \tag{66}$$

समीकरण (66) चार्पिट समीकरण कहलाते हैं तथा इन्हें दिए हुए समीकरण (37) का प्रयोग करते हुए तुरंत लिखा जा सकता है। एक बार हम समीकरण निकाय (66) का हल जिसमें p या q या दोनों शामिल हों समीकरण (61), अर्थात्

$$F(x, y, z, p, q, a) = 0$$

के रूप में ज्ञात कर लें, तो समस्या समीकरणों (37) और (61) को p और q के लिए हल करने तथा संपूर्ण अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों, जो आपने इकाई 15 में सीखी हैं, द्वारा समीकरण (63) को समाकलित करने की रह जाती है।

अब हम इस विधि को उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 10 : चार्पिट विधि द्वारा

$$z^2 = pqxy$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $f = pqxy - z^2 = 0$

इस स्थिति में, सहायक समीकरण (66) से प्राप्त होता है :

$$\frac{dx}{qxy} = \frac{dy}{pxy} = \frac{dz}{2pqxy} = \frac{dp}{2zp - pqy} = \frac{dq}{2zq - pqx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{2pqxy} = \frac{dz}{2z^2} = \frac{pdx + qdy + xdp + ydq}{2z(px + qy)}$$ (दिए गए समीकरण के प्रयोग से)

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{d(xp + yq)}{xp + yq}$$

समाकलित करने पर, हम F जो कि f के साथ सुसंगत है, निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$F = z - a(xp + yq) = 0, \tag{67}$$

जहाँ a एक स्वेच्छ अचर है। दिए हुए समीकरण और समीकरण (67) को p और q के लिए हल करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \frac{z}{x}\left(\frac{2a}{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2}}\right), q = \frac{z}{y}\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}\right)$$

मान लीजिए कि $c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}$.

तब, हम $p = \frac{z}{cx}, q = \frac{cz}{y}$

लिख सकते हैं, जहाँ $a(c^{-1} + c) = 1$, c एक अचर है।

$$\therefore \quad dz = pdx + qdy = \left(\frac{1}{c}\frac{dx}{x} + c\frac{dy}{y}\right)z$$

समाकलित करने पर, हम दिए हुए समीकरण का पूर्ण समाकल $z = bx^{1/c}y^c$ के रूप में प्राप्त करते हैं, जहाँ b समाकलन अचर है।

★★★

टिप्पणी : किसी भी दी हुए समस्या के लिए, यह आवश्यक नहीं है कि F ज्ञात करने के लिए सभी चार्पिट समीकरणों (66) का प्रयोग किया जाए, जैसा कि अगले उदाहरण में स्पष्ट किया जा रहा है। बस आपको इस बात का ध्यान रखना है कि प्राप्त किए गए हलों में p या q अवश्य शामिल हों।

उदाहरण 11 : चार्पिट विधि का प्रयोग करते हुए, समीकरण

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$f = (p^2 + q^2)\,y - qz = 0$$

इस स्थिति में सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - z} = \frac{dz}{2p^2y + 2q^2y - qz} = \frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-(p^2+q^2)+q^2}$$

ऊपर दिए समीकरणों के अंतिम दो भिन्नों से हम प्राप्त करते हैं :

$$pdp + qdq = 0$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p^2 + q^2 = a \tag{68}$$

जहाँ a एक अचर है।

समीकरण (68) और दिए हुए समीकरण को p और q के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \pm\frac{\sqrt{az^2 - a^2y^2}}{z} \text{ और } q = \frac{ay}{z}$$

p और q के इन मानों को $dz = pdx + qdy$ में प्रतिस्थापित करने तथा p को केवल धनात्मक चिन्ह के साथ लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dz = \frac{\sqrt{az^2 - a^2y^2}}{z}\,dx + \frac{ay}{z}\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{zdz - ay\,dy}{\sqrt{az^2 - a^2y^2}} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2az}\,\frac{2az\,dz - 2a^2y\,dy}{\sqrt{az^2 - a^2y^2}} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{d(az^2 - a^2y^2)}{\sqrt{az^2 - a^2y^2}} = a\ dx$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\sqrt{az^2 - a^2y^2} = ax + b$, b समाकलन अचर है।

$$\Rightarrow az^2 - a^2y^2 = (ax+b)^2,$$

जो अभीष्ट पूर्ण समाकल है।

★★★

ध्यान दीजिए कि एक प्रथम कोटि PDE के एक से अधिक पूर्ण समाकल हो सकते हैं, जैसा कि अगले उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 12 : चार्पिट विधि का प्रयोग करके PDE

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = 1$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f = z^2(1 + p^2 + q^2) - 1 = 0$.

इस स्थिति में सहायक समीकरण (66) से प्राप्त होता है :

$$\frac{dx}{2pz^2} = \frac{dy}{2qz^2} = \frac{dz}{2p^2z^2 + 2q^2z^2} = \frac{dp}{-2zp(1+p^2+q^2)} = \frac{dq}{-2zq(1+p^2+q^2)} \qquad (69)$$

अंतिम दो भिन्नों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \text{ या } p = aq \qquad (70)$$

जहाँ a एक स्वेच्छ अचर है।

p और q के लिए, दिए हुए समीकरण और समीकरण (70) को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}} \text{ और } q = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}$$

$$\therefore \quad dz = pdx + qdy = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}dy$$

जिसे समाकलित करने पर, दिए हुए समीकरण का पूर्ण समाकल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$-\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+a^2} = ax + y + c \text{, } c \text{ समाकलन अचर है।}$$

या $$(ax+y+c)^2 = (1+a^2)(1-z^2) \tag{71}$$

यदि समीकरणों (69) में, हम तीसरे और चौथे भिन्न को लें, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dz}{z(1-z^2)} = \frac{dp}{-p} \text{ (दिए हुए समीकरण का उपयोग करके)}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{2(1-z)} - \frac{1}{2(1+z)}\right]dz + \frac{dp}{p} = 0$$

जो समाकलित करने पर देता है :

$$z^2 p^2 = b(1-z^2) \tag{72}$$

जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है।

दिए हुए समीकरण और समीकरण (72) को p और q के लिए हल करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$p = b\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}} \text{ और } q = \sqrt{1-b^2}\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}$$

$$\therefore \quad dz = pdx + qdy = b\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}dx + \sqrt{1-b^2}\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}dy.$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हमें दिए हुए समीकरण का एक और पूर्ण समाकल

$$(bx + \sqrt{1-b^2}\,y + c_1)^2 + z^2 = 1 \tag{73}$$

के रूप में प्राप्त होता है।

★★★

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेते हैं, जहाँ दिए हुए समीकरण के पूर्ण समाकल से हमने व्यापक और विचित्र हल भी ज्ञात किए हैं।

उदाहरण 13 : समीकरण

$$(p^2+q^2)y = qz \tag{74}$$

का पूर्ण समाकल चार्पिट विधि से ज्ञात कीजिए। इसके व्यापक और विचित्र हल भी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f=(p^2+q^2)y-qz=0$.

चार्पिट के सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{2py}=\frac{dy}{2qy-z}=\frac{dz}{2p^2y+2q^2y-qz}=\frac{dp}{qp}=\frac{dq}{-(p^2+q^2)+q^2}$$

अंतिम दो भिन्नों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$pdp+qdq=0$$

इसे समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p^2+q^2=a^2,\ a \text{ एक अचर है।} \tag{75}$$

समीकरण (74) और (75) को p और q के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p=\frac{a}{z}\sqrt{z^2-a^2y^2} \text{ और } q=\frac{a^2y}{z}$$

$$\therefore\ dz = pdx+qdy=\frac{a}{z}\sqrt{z^2-a^2y^2}\,dx+\frac{a^2y}{z}dy$$

या, $$\frac{zdz-a^2ydy}{\sqrt{z^2-a^2y^2}}=a\,dx$$

ऊपर दिए समीकरण को समाकलित करने पर, हम अभीष्ट समाकल निम्न रूप में प्राप्त करते हैं :

$$(z^2-a^2y^2)^{1/2}=ax+b$$

या $$z^2-a^2y^2=(ax+b)^2 \tag{76}$$

जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है।

विचित्र हल

समीकरण (76) को a और b के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2ay^2+2(ax+b)x=0 \tag{77}$$

$$2(ax+b)=0 \tag{78}$$

समीकरणों (76), (77) और (78) में से a और b को विलुप्त करने पर, हम $z = 0$ प्राप्त करते हैं, जो समीकरण (74) को संतुष्ट करता है तथा इसका विचित्र समाकल है।

व्यापक हल

समीकरण (76) में, b के स्थान पर $\phi(a)$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z^2 - a^2y^2 = [ax + \phi(a)]^2 \qquad (79)$$

समीकरण (79) को a के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$-2ay^2 = 2[ax + \phi(a)]\,[x + \phi'(a)] \qquad (80)$$

समीकरण (74) का व्यापक समाकल समीकरणों (79) और (80) में से a को विलुप्त करने पर प्राप्त होता है।

★★★

चार्पिट विधि की अपनी समझ की जाँच आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करके कर सकते हैं।

E9) चार्पिट की विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरणों के पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $p^2x + q^2y = z$

ii) $2(z + xp + yq) = yp^2$

iii) $2z + p^2 + qy + 2y^2 = 0$

iv) $2x(z^2q^2 + 1) = pz$

v) $pxy + pq + qy = yz$

E9) को हल करने के बाद, आपने यह अवश्य अनुभव किया होगा कि एक अरैखिक प्रथम कोटि PDE के पूर्ण समाकल को ज्ञात करने के लिए चार्पिट द्वारा दी गई व्यापक विधि बहुत लंबी और जटिल है। परंतु कुछ विशेष प्रकार की प्रथम कोटि अरैखिक PDE होती हैं, जिनके पूर्ण समाकल चार्पिट विधि से बड़ी सरलता से प्राप्त किए जा सकते हैं। विशेष प्रकार के ये प्रथम कोटि अरैखिक PDE समीकरण (37) के **मानक रूप** (standard forms) कहलाते हैं। अब हम इन मानक रूपों को समाकलित करने की विधियों को लेते हैं।

17.3.3 मानक रूप

आइए समीकरण (37) के विभिन्न मानक रूपों की एक-एक करके चर्चा करें।

प्रकार I: समीकरण जिनमें p और q सम्मिलित हों :

आइए, केवल p और q से वाले समीकरण का एक उदाहरण लेकर प्रारंभ करें।

उदाहरण 14 : समीकरण $pq = 1$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण के लिए चार्पिट सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} \tag{81}$$

चौथे भिन्न से, हम प्राप्त करते हैं :

$$dp = 0$$

$\Rightarrow$ $p =$ अचर $= a$, मान लीजिए।

इस समीकरण और दिए गए समीकरण से हम प्राप्त करते हैं :

$$aq = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{a}$$

$dz = p dx + q dy$ में p और q के ऊपर प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dz = a\ dx + \frac{1}{a} dy$$

समाकलित करने पर, हमें दिए हुए समीकरण का पूर्ण समाकल

$$z = ax + \frac{1}{a} y + b$$

के रूप में प्राप्त होता है।

सहायक समीकरण निकाय (81) में, यदि हम अंतिम भिन्न को लें, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$dq = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = a \text{ (अचर)}$$

तथा पूर्ण समाकल

$$z = \frac{1}{a} x + ay + b$$

के रूप का होता है।

★★★

व्यापक रूप में, प्रथम कोटि अरैखिक PDE, जिनमें चर x, y, z स्पष्ट रूप से अंतर्विष्ट नहीं होते तथा जिनमें केवल p और q सम्मिलित होते हैं, निम्न रूप के होते हैं :

$$f(p, q) = 0 \tag{82}$$

इस स्थिति में, चार्पिट समीकरण (या सहायक समीकरण (66)) हैं :

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

ऊपर दिए समीकरण-निकाय के अंतिम दो भिन्नों से, हम या तो $p = a$ या $q = a$, प्राप्त करते हैं, जहाँ a एक अचर है।

यदि हम $p = a$ लें, तो समीकरण (82), $f(a, q) = 0$ के रूप का हो जाता है, जिसे हल करने पर $q = Q(a)$ प्राप्त होता है।

अतः समीकरण $dz = pdx + qdy$ निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$dz = adx + Q(a)\,dy,$$

जिसे समाकलित करने पर, समीकरण (82) का पूर्ण समाकल

$$z = ax + Q(a)\,y + b, \tag{83}$$

के रूप में प्राप्त होता है, जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है।

इसी प्रकार, यद हम $q = a$ लें, तो समीकरण (82) से हम $p = Q(a)$ प्राप्त करते हैं तथा समीकरण (82) का पूर्ण समाकल निम्न रूप का होता है :

$$z = Q(a)x + ay + b \tag{84}$$

अब हम एक उदाहरण की सहायता से इस विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 15 : समीकरण

$$p^2 - q^2 = 4 \tag{85}$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण $f(p, q) = 0$ के रूप का है। आइए $p = a$ (a अचर) लें।

समीकरण (85) में, $p = a$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$q = \pm\sqrt{a^2 - 4} = Q(a)$$

समीकरण (83) में a और $Q(a)$ के मान प्रतिस्थापित करने पर, समीकरण (85) का पूर्ण समाकल

$z = ax \pm \sqrt{a^2 - 4}\,y + c,\ c$ एक अचर है।

★★★

अब हम एक ऐसा उदाहरण ले रहे हैं, जो यह स्पष्ट करेगा कि किस प्रकार एक दिया गया समीकरण सरलता से हल किया जा सकता है, यदि इसे पहले (82) के रूप में बदल लिया जाता है।

उदाहरण 16 : समीकरण

$(x+y)(p+q)^2+(x-y)\,(p-q)^2=1$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए

हल : मान लीजिए कि $x+y=U^2$ और $x-y=V^2$.

तब,

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{2U}\frac{\partial z}{\partial U}+\frac{1}{2V}\frac{\partial z}{\partial V} \tag{86}$$

तथा

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{2U}\frac{\partial z}{\partial U}-\frac{1}{2V}\frac{\partial z}{\partial V} \tag{87}$$

समीकरणों (86) और (87) से p और q के मानों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, यह निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)^2=1$$

यह समीकरण प्रकार I का है तथा हम इसका पूर्ण समाकल सीधे ही समीकरण (83) का प्रयोग करके निम्न रूप में प्राप्त कर सकते हैं :

$$z=aU+\sqrt{1-a^2}V+b$$

$=a\sqrt{x+y}+\sqrt{1-a^2}\sqrt{x-y}+b$ (U और V के मानों को वापिस x और y के पदों में प्रतिस्थापित करने पर)

जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्न हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E10) निम्नलिखित समीकरणों के पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $p+q-pq=0$

ii) $p^2+q^2=1$

iii) $p=e^q$

iv) $(y-x)\,(qy-px)=(p-q)^2$

v) $(1-x^2)\,yp^2+x^2q=0$

आगे हम ऐसे समीकरणों को लेते हैं, जिनमें स्वतंत्र चर x और y स्पष्ट रूप से सम्मिलित नहीं होते।

प्रकार II : समीकरण जिनमें स्वतंत्र चर सम्मिलित नही होते

समीकरण (37) के प्रकार के समीकरण, जिनमें x और y स्पष्ट रूप से सम्मिलित नहीं होते, निम्न रूप के होते हैं :

$$f(z, p, q) = 0 \tag{88}$$

इस स्थिति में, चार्पिट समीकरण (66) निम्न रूप ले लेते हैं :

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-pf_z} = \frac{dq}{-qf_z}$$

इनमें से अंतिम दो से प्राप्त होता है :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \tag{89}$$

इस समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = aq \text{ या } q = ap \tag{90}$$

जहा a एक अचर है।

समीकरणों (88) और (90) से, तब हम प्राप्त करते हैं :

$$f(z, aq, q) = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = Q(a, z) \tag{91}$$

समीकरणों (90) और (91) से p और q के मानों को समीकरण

$$dz = pdx + qdy$$

में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dz = aq\,dx + q\;dy = Q(a, z)\;(adx + dy)$$

इस प्रकार, समीकरण (88) का पूर्ण समाकल निम्न द्वारा दिया जाता है :

$$\int \frac{dz}{Q(a, z)} = ax + y + b$$

जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है।

समीकरण (89) के वैकल्पिक हल $q = ap$ का प्रयोग करने पर, समीकरण (88) का पूर्ण समाकल

$$\int \frac{dz}{Q(a, z)} = x + ay + b$$

द्वारा प्राप्त होता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 17 : समीकरण

$$z\,pq - p - q = 0$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण है

$$zpq - p - q = 0$$

दिए हुए समीकरण में $p = aq$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$zaq^2 - aq - q = 0$$

$\Rightarrow \quad q = 0$ या $q = \dfrac{a+1}{az}$

अब यदि $q = 0$ तो $p = 0$.

तथा यदि $q = \dfrac{a+1}{az}$ तो, $p = \dfrac{a+1}{z}$.

$p = 0,\ q = 0$ की स्थिति के लिए, संबंध

$$dz = pdx + qdy$$

से प्राप्त होता है :

$$dz = 0$$

$\Rightarrow \quad z =$अचर, जो स्पष्टतः दिए हुए समीकरण का पूर्ण समाकल नहीं है।

अब, $q = \dfrac{a+1}{az},\ p = \dfrac{a+1}{z}$ के लिए, संबंध

$$dz = pdx + qdy$$

से प्राप्त होता है :

$$dz = \frac{a+1}{z}\left(dx + \frac{1}{a}\,dy\right)$$

जो समाकलन करने पर, दिए हुए समीकरण का पूर्ण समाकल

$$z^2 = \frac{2(1+a)}{a}\,(ax+y) + b$$

के रूप में देता है, जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है।

★★★

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेते हैं, जहाँ हमने दिए हुए समीकरण को प्रकार II के समीकरण के रूप में परिवर्तित किया है और फिर उसका पूर्ण समाकल ज्ञात किया है।

उदाहरण 18 : समीकरण

$$q^2y^2 = z(z - px)$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $X = \ln x$ और $Y = \ln y$. (92)

तब, $$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X} \qquad (93)$$

और $$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial Y} \qquad (94)$$

यदि हम $\frac{\partial z}{\partial X}$ को P से तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ को Q से व्यक्त करें, तो समीकरणों (93) और (94) से क्रमशः $px = P$ और $qy = Q$ दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने से वह

$$Q^2 = z^2 - zP \qquad (95)$$

में बदल जाता है, जो प्रकार II का है। समीकरण (95) को हल करने के लिए आइए $Q = ap$ लें, जहाँ a एक अचर है। (96)

तब, समीकरणों (95) और (96) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$a^2P^2 + zP - z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 + 4a^2z^2}}{2a^2} = kz \qquad (97)$$

जहाँ $k = \frac{1}{2a^2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4a^2}\right)$.

$$\therefore \quad dz = PdX + QdY$$

$$= k\ zdX + a\ k\ zdY$$ [समीकरणों (96) और (97) से]

$$= k\ z(dX + adY)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{k\ z} = dX + a\,dY$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$X + aY + \ln b = \frac{1}{k}\ln z$$

या $\ln x + a\ln y + \ln b = \frac{1}{k}\ln z$ [समीकरण (92) के प्रयोग से]

या $x\ b\ y^a = z^{1/k}$

जो अभीष्ट पूर्ण समाकल है।

★★★

अब, आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E11) निम्नलिखित समीकरणों के पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $4z = pq$

ii) $p^2 = zq$

iii) $p^3 + q^3 = 27z$

iv) $z = p^2 - q^2$

v) $p^2x^2 = z(z-9y)$

अब हम ऐसे समीकरण लेते हैं, जिनमें z स्पष्ट रूप से प्रकट नहीं होता तथा जो चर पृथक्करणीय रूप में हैं। दूसरे शब्दों में, हम ऐसे समीकरणों पर विचार करेंगे जिन्हें

$$f(x, p) = g(y, q)$$

के रूप में लिखा जा सकता है।

प्रकार III : चर पृथक्करणीय समीकरण

आइए एक सरल उदाहरण लेकर प्रारंभ करें।

उदाहरण 19 : समीकरण

$$q - p + x - y = 0$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$p - x = q - y \tag{98}$$

आप देख सकते हैं कि समीकरण (98) चर पृथक्करणीय रूप का है, जहाँ बायाँ पक्ष केवल x और p का एक फलन है तथा दायाँ पक्ष y और q का एक फलन है।

समीकरण (98) के लिए चार्पिट सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{p-q} = \frac{dp}{1} = \frac{dq}{-1}$$

ऊपर दिए समीकरण के प्रथम और चौथे भिन्न से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dp}{1}$$

इसे समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = x + a \text{ या } p - x = a$$

तब, हम समीकरण (98) से प्राप्त करते हैं :

$q - y = a$ या $q = y + a$

$\therefore\ dz = pdx + qdy$ से प्राप्त होता है :

$$dz = (x+a)dx + (y+a)dy$$

या $2z = (x+a)^2 + (y+a)^2 + b$ जहाँ b एक स्वेच्छ अचर है।

★★★

व्यापक रूप में, हम एक प्रथम कोटि PDE लेते हैं, जिसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$f(x, p) = g(y, q)$$

$$\Rightarrow\ f(x, p) - g(y, q) = 0$$

ऐसे समीकरण के लिए, चार्पिट समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{-g_q} = \frac{dz}{pf_p - qg_q} = \frac{dp}{-f_x} = \frac{dq}{g_y} \tag{99}$$

समीकरणों (99) के पहले और चौथे भिन्न से प्राप्त होता है :

$$\frac{dp}{f_x} + \frac{dx}{f_p} = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{dp}{dx} + \frac{f_x}{f_p} = 0 \tag{100}$$

आप देख सकते हैं कि समीकरण (100) चरों x और p में एक ODE है। हम इसे निम्न रूप में लिख कर हल कर सकते हैं :

$$f_x dx + f_p dp = 0$$

$$\Rightarrow\ d\ f(x, p) = 0$$

$$\Rightarrow\ f(x, p) = \text{अचर} = a, \text{ मान लीजिए।} \tag{101}$$

इसी प्रकार, समीकरणों (99) के दूसरे और पाँचवें भिन्न से तथा दिए हुए समीकरण का उपयोग करके, हम प्राप्त करते हैं :

$$g(y, q) = \text{अचर} = a \tag{102}$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण (102) में, हमने समाकलन अचर पुनः 'a' लिया है। यह इस कारण है कि हमें $f(x, p) = g(y, q)$ दिया गया हैं। यहाँ f चरों x और p का फलन हैं, जबकि g चरों y और q का फलन है तथा यदि दोनों बराबर हैं, तो f और g में प्रत्येक को अलग-अलग से एक ही अचर के बराबर होना चाहिए।

समीकरणों (101) और (102) को अब

$p = F(a, x)$ और $q = G(a, y)$

प्राप्त करने के लिए हल किया जा सकता है।

$\therefore$ $dz = pdx + qdy$ निम्न रूप में समानीत हो जाता है।

$$dz = F(a, x)dx + G(a, y)dy$$

जिसे समाकलित करने पर, पूर्ण समाकल

$$z = \int F(a,x)dx + \int G(a,y)dy + b,$$

प्राप्त होता है, जहाँ b एक अन्य स्वेच्छ अचर है।

ऊपर चर्चा की गई विधि को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 20 : समीकरण

$$p^2 + q^2 = x + y$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$p^2 - x = y - q^2$$

अतः, प्रत्येक पक्ष एक ही अचर, मान लीजिए a, के बराबर होना चाहिए।

$\therefore$ $p^2 - x = a$ और $y - q^2 = a$

$\Rightarrow$ $p = \pm\sqrt{x+a}$ और $q = \pm\sqrt{y-a}$

$\pm$ चिन्हों के किसी भी संचय को लिया जा सकता है। यहाँ हम p और q को केवल घनात्मक चिन्हों के साथ ले रहे हैं। तब,

$dz = pdx + qdy$, से प्राप्त होता है :

$$dz = \sqrt{a+x}\ dx + \sqrt{y-a}\ dy$$

समाकलित करने पर, पूर्ण समाकल

$$z = \frac{2}{3}(a+x)^{3/2} + \frac{2}{3}(y-a)^{3/2}$$

के रूप में प्राप्त होता है।

★★★

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेते हैं, जहाँ हमने दिए हुए समीकरण को उसका पूर्ण समाकल ज्ञात करने के लिए, प्रकार III के समीकरण में रूपांतरित किया है।

उदाहरण 21 : समीकरण

$$y\,z\,p^2 = q$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : आइए $Z = \frac{z^2}{2}$ लें तथा दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखें :

$$y\,z^2 p^2 = z\,q \tag{103}$$

अब $zp = z\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = P$, मान लीजिए, तथा $zq = z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y} = Q$, मान लीजिए।

ऊपर प्राप्त प्रतिस्थापनों से समीकरण (103) निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$yP^2 = Q \quad \text{या} \quad P^2 = \frac{Q}{y} \tag{104}$$

आप इस ओर **ध्यान दे सकते** हैं कि समीकरण (104) अब एक चर पृथक्करणीय समीकरण है। इसलिए यदि हम $P = a$ लें, तो हम $Q = ya^2$ प्राप्त करते हैं।

P तथा Q के इन मानों को $dZ = P\,dx + Qdy$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$dZ = adx + ya^2 dy$$

समाकलित करने पर, $Z = ax + \frac{1}{2}a^2y^2 + b$, b एक अचर है।

ऊपर प्राप्त समीकरण में $Z = z^2/2$ रखने पर हम दिए हुए समीकरण का अभीष्ट पूर्ण समाकल

$$z^2 = 2ax + a^2y^2 + 2b$$

के रूप में प्राप्त करते हैं।

★★★

अब क्यों न एक प्रश्न हल कर लिया जाए?

E12) निम्नलिखित समीकरणों के पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $q = xp + p^2$

ii) $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x$

iii) $p^2 - y^3 q = x^2 - y^2$

iv) $p^2 y(1+x^2) = qx^2$

v) $p^2q^2 + x^2y^2 = x^2q^2(x^2+y^2)$

vi) $p^2q(x^2+y^2) = p^2+q$

आपको याद होगा कि खंड 2 की इकाई 6 में, हमने $y = xp + f(p)$ के प्रकार की ODE को क्लेरों समीकरण (Clairaut's Equation) के रूप में परिभाषित किया था।

प्रथम कोटि PDE की स्थिति में, हम क्लेरों समीकरण को

$$z = px + qy + f(p, q)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

हम नीचे चार्पिट समीकरणों का प्रयोग करते हुए, कलेरों समीकरण को हल करने की विधि दे रहे हैं।

प्रकार IV : क्लेरों समीकरण

आइए क्लेरों समीकरण के एक सरल उदाहरण को लेते हैं।

उदाहरण 22 : समीकरण

$$z = px + qy + pq$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण है :

$$px + qy + pq - z = 0$$

इस स्थिति में, सहायक समीकरण (66) निम्न रूप ले लेते हैं :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{px+qy} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

ऊपर दिए समीकरणों के अंतिम दो भिन्नों से, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = a, q = b$$

जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं।

यदि हम दिए हुए समीकरण में p और q के मानों को प्रतिस्थापित करें, तो हमें प्राप्त होता है :

$$z = ax + by + ab$$

जो अभीष्ट पूर्ण समाकल है।

★★★

व्यापक रूप में, प्रथम कोटि PDE का क्लेरों रूप लीजिए।

$$px + qy + f(p, q) - z = 0 \tag{105}$$

समीकरण (105) के लिए, चार्पिट समीकरण (66) से प्राप्त होता है:

$$\frac{dx}{x + f_p} = \frac{dy}{y + f_q} = \frac{dz}{px + qy + pf_p + qf_q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

इस समीकरण-निकाय के स्पष्टतः हल $p = a$ और $q = b$ हैं।

यदि हम p और q के इन मानों को समीकरण (105) में प्रतिस्थापित करें, तो हम प्राप्त करते हैं :

$$z = ax + by + f(a, b),$$

जो समीकरण (105) का पूर्ण समाकल है।

आइए हम एक उदाहरण लेते हैं जहाँ हमने दिए हुए समीकरण को हल करने के लिए पहले इसे क्लेरों रूप में समानीत कर लिया है।

उदाहरण 23 : समीकरण

$$p\,q\,z = p^2(xq + p^2) + q^2(yp + q^2)$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण

$p\,q\,z = p^2(xq + p^2) + q^2(yp + q^2)$ है:

समीकरण के दोनों पक्षों को pq से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z = px + \frac{p^3}{q} + yq + \frac{q^3}{p}$$

$$\Rightarrow \quad z = xp + yq + \left(\frac{p^3}{q} + \frac{q^3}{p}\right)$$

जो क्लेरों रूप में है।

हम ऊपर प्राप्त समीकरण में $p = a$ और $q = b$ प्रतिस्थापित करने पर, जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं, दिए हुए समीकरण का पूर्ण समाकल

$$z = ax + by + \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}\right)$$

रूप में प्राप्त करते हैं।

★★★

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E13) निम्नलिखित समीकरणों के पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $(p+q)(z-xp-yq)=1$

ii) $z = xp + yq + \sqrt{\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma}$

iii) $z = px + qy + 3(pq)^{1/3}$

इस इकाई में हमने जो कुछ भी अध्ययन किया है, उसका सारांश देते हुए हम इस इकाई को यही समाप्त कर रहे हैं।

17.4 सारांश

इस इकाई में, हमनें निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. प्रथम कोटि रैखिककल्प PDE को हल करने की लग्रांज विधि से समीकरण $P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z)$ का व्यापक समाकल $F(u, v) = 0$ प्राप्त होता है, जहाँ $u(x, y, z) =$ अचर और $v(x, y, z) =$ अचर सहायक समीकरणों

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

के दो स्वतंत्र समाकल हैं।

2. प्रथम कोटि PDE

$f(x, y, z, p, q) = 0$, (देखिए समीकरण (37))

और $g(x, y, z, p, q) = 0$, (देखिए समीकरण (38))

सुसंगत होते हैं, यदि और केवल यदि,

i) $J = \dfrac{\partial(f, g)}{\partial(p, q)} \neq 0$.

ii) $f(x, y, z, p, q) = 0$ और $g(x, y, z, p, q) = 0$ को हल करने से प्राप्त $p = \phi(x, y, z), q = \psi(x, y, z)$ समीकरण $dz = \phi(x, y, z)dx + \psi(x, y, z)dz$ को समाकलनीय बनाते हैं।

3. ऊपर चरण 2 में प्रतिबंध (ii) वैकल्पिक रूप से, समीकरणों (37) और (38) की सुसंगतता का प्रतिबंध निम्न रूप में प्रदान करता है :

$$[f, g] = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} + p\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, p)} + q\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, q)} = 0.$$

4. समीकरण (37) के रूप के PDE को हल करने की चार्पिट विधि में निम्नलिखित चरण निहित होते हैं :

i) सहायक समीकरणों

$$\frac{dx}{f_p}=\frac{dy}{f_q}=\frac{dz}{pf_p+qf_q}=\frac{dp}{-(f_x+pf_z)}=\frac{dq}{-(f_y+qf_z)}$$

का एक हल ज्ञात कीजिए, जिसमें p या q या दोनों शामिल हों तथा एक स्वेच्छ अचर सम्मिलित हो और यह $F(x, y, z, p, q, a)=0$ के रूप का हो।

ii) चरों x, y, z के पदों में p और q के लिए $f=0$ और $F=0$ को हल कीजिए।

iii) p और q के ऊपर प्राप्त मानों को संबंध

$$dz = pdx + qdy$$

में प्रतिस्थापित कीजिए तथा समीकरण (37) का पूर्ण समाकल प्राप्त करने के लिए इसे समाकलित कीजिए।

5. समीकरण (37) के चार विशेष रूप हैं जिन्हें मानक रूप कहा जाता है और इनके लिए चार्पिट विधि सरलता से प्रयोग की जा सकती है। ये रूप हैं :

I समीकरण जिनमें केवल p और q सम्मिलित होते हैं जिनके लिए सहायक समीकरण निम्न रूप के हो जाते हैं:

$$\frac{dx}{f_p}=\frac{dy}{f_q}=\frac{dz}{pf_p+qf_q}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}$$

II समीकरण जिनमें स्वतंत्र चर स्पष्ट रूप से सम्मिलित नहीं होते और जिनके लिए सहायक समीकरण निम्न रूप के हो जाते हैं :

$$\frac{dx}{f_p}=\frac{dy}{f_q}=\frac{dz}{pf_p+qf_q}=\frac{dp}{-pf_z}=\frac{dq}{-qf_z}$$

III $f(x, p)=g(y, p)$ रूप के चर पृथक्करणीय समीकरण जिनके लिए सहायक समीकरण $f(x, p)=a=g(y, q)$ रूप का हल प्रदान करते हैं, जहाँ a एक अचर है।

IV प्रथम कोटि PDE के क्लेरों रूप, अर्थात् $z = xp + yq + f(p, q)$ के लिए, सहायक समीकरणों से

$p=a$ और $q=b$ रूप में हल प्राप्त होता है जिससे कि

$z = ax + by + f(a, b)$ हो जाता है, जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं।

17.5 हल / उत्तर

E1) i) दिए हुए समीकरण को

$zxp - zyp = y^2 - x^2$ रूप में लिखा जा सकता है।

सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{-zy}=\frac{dz}{y^2-x^2}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण-निकाय के समाकल हैं :

$$u = xy = c_1 \text{ और } v = x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

अतः, दिए हुए PDE का व्यापक समाकल है :

$$F(xy, x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

जहाँ F एक स्वेच्छ फलन है।

ii) दिया हुआ समीकरण है :

$$y^2 p - xyq = x(z - 2y)$$

सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{x(z-2y)}$$

इस समीकरण-निकाय को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$u = x^2 + y^2 = c_1 \text{ और } v = yz - y^2 = c_2$$

अतः, दिए हुए PDE का व्यापक समाकल है :

$$x^2 + y^2 = \phi(yz - y^2).$$

iii) दिए हुए समीकरण के संगत सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{x(y+z)} = \frac{dz}{x(y-z)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

इस समीकरण-निकाय को समाकलित करने पर, हमें निम्न दो पृष्ठ कुल प्राप्त होते हैं।

$$u = y^2 - 2yz - z^2 = c_1, \; v = x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

अतः, दिए हुए PDE का व्यापक समाकल है:

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(y^2 - 2yz - z^2)$$

जहाँ f एक स्वेच्छ फलन है।

iv) दिए हुए समीकरण के संगत सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{zx\,dx}{y-z} = \frac{zx\,dy}{z-x} = \frac{xy\,dz}{x-y} = \frac{dx + dy + dz}{0} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$$

अंतिम दो भिन्नों को समाकलित करने पर, हम निम्न दो पृष्ठ-कुल प्राप्त करते हैं :

$$x + y + z = c_1 \text{ और } xyz = c_2$$

इस प्रकार, दिए हुए PDE का व्यापक समाकल

$$F(x+y+z, xyz) = 0.$$

v) सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{x^3+3xy^2} = \frac{dy}{y^3+3x^2y} = \frac{dz}{2(x^2+y^2)z} \quad \text{(i)}$$

$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, 0$ को गुणक चुनने पर, (i) का प्रत्येक भिन्न

$$= \frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}}{4(x^2+y^2)} \quad \text{(ii)}$$

(i) के अंतिम भिन्न तथा भिन्न (ii) को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{xy}{z^2} = c_1 \quad \text{(iii)}$$

1, 1, 0 को गुणक चुनने पर, (i) का प्रत्येक भिन्न

$$= \frac{dx+dy}{x^3+3xy^2+y^3+3x^2y} = \frac{dx+dy}{(x+y)^3} \quad \text{(iv)}$$

1, −1, 0 को गुणक चुनने पर, (i) का प्रत्येक भिन्न

$$= \frac{dx-dy}{x^3+3xy^2-y^3-3x^3y} = \frac{dx-dy}{(x-y)^3} \quad \text{(v)}$$

(iv) और (v) से $(x+y)^{-3}(dx+dy) = (x-y)^{-3}(dx-dy)$

समाकलित करने पर, $-(x+y)^2 + (x-y)^{-2} = c_2$

इस प्रकार अभीष्ट व्यापक हल है :

$$F\left[(x-y)^{-2} - (x+y)^{-2}, \frac{xy}{z^2}\right] = 0.$$

E2) सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{x(y^2+z)} = \frac{dy}{-y(x^2+z)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

$$= \frac{yzdx+zxdy+xydz}{0} = \frac{xdx+ydy-dz}{0}$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$xyz = c_1 \text{ और } x^2+y^2-2z = c_2$$

दिए हुए वक्र $x+y=0,\ z=1$ का प्राचलिक समीकरण है :

$$x=t,\ y=-t,\ z=1$$

इन मानों को समीकरण (106) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$-t^2=c_1 \text{ और } 2t^2-2=c_2$$

ऊपर दिए समीकरण में से t को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2c_1+2=-c_2$$

ऊपर प्राप्त संबंध में समीकरण (106) से c_1 और c_2 के मान रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2+y^2+2xyz-2z+2=0,$$

जो अभीष्ट समाकल पृष्ठ है।

E3) सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}=\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$$

$\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}$ को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2-y^2=c_1 \tag{107}$$

साथ ही, $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{d(x+y+z)}{x+y+z}$ को समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$\frac{x+y+z}{z}=c_2 \tag{108}$$

दिए हुए वक्र $z=x^3,\ y=0$ का प्राचलिक समीकरण है :

$$x=t,\ y=0,\ z=t^3.$$

x, y, z के इन मानों को समीकरणों (107) और (108) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$t^2=c_1 \text{ और } \frac{t+t^3}{t^3}=c_2$$

इन समीकरणों में से, t को विलुप्त करने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$\frac{1+c_1}{c_1}=c_2$$

ऊपर प्राप्त समीकरण में, समीकरणों (107) और (108) से c_1 और c_2 के मानों को प्रतिस्थापित करने पर हम अभीष्ट समाकल पृष्ठ के रूप में $z(1+x^2-y^2)=(x^2-y^2)\,(x+y+z)$ प्राप्त करते हैं।

E4) सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x+y+z=c_1 \text{ और } x^2+y^2+z^2=c_2 \tag{109}$$

दिए हुए वक्र $z=0,\ xy=1$ का प्राचलिक समीकरण है :

$$x=t,\ y=\frac{1}{t},\ z=0.$$

x, y, z के इन मानों को समीकरण (109) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$t+\frac{1}{t}=c_1 \text{ और } t^2+\frac{1}{t^2}=c_2$$

इन समीकरणों में से, t को विलुप्त करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$c_1^2-2=c_2$$

इस समीकरण में, (109) से c_1 और c_2 के मानों को रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$xy+yz+zx-1=0$$

$$\Rightarrow\quad z=\frac{1-xy}{x+y}$$

जो अभीष्ट समाकल पृष्ठ है।

E5) समीकरण (53) से, प्रथम कोटि के दो PDE के लिए सुसंगता प्रतिबंध है :

$$[f,\ g]=f_p\frac{\partial g}{\partial x}+f_p\frac{\partial g}{\partial y}+(pf_p+qf_q)\frac{\partial g}{\partial z}-(f_x+pf_z)\frac{\partial g}{\partial p}-(f_y+qf_z)\frac{\partial g}{\partial q}=0$$

क्योंकि हमारे PDE है :

$$f(x,\ y,\ p)=0 \text{ और } g(x,\ y,\ q)=0.$$

$$\therefore\quad f_q=0,\ f_z=0,\ g_p=0,\ g_z=0.$$

तब, समीकरण (53)

$f_p\ g_x-f_y\ g_q=0$ में समानीत हो जाता है, जो अभीष्ट प्रतिबंध है।

E6) यहाँ $f(x, y, p, q) = 0$ और $g(x, y, p, q) = 0$

$\therefore \; f_z = 0$ और $g_z = 0$

तब, प्रतिबंध (53) निम्न रूप में समानीत हो जाता है :

$$f_p g_x + f_q g_y - f_x g_p - f_y g_q = 0$$

$$\Rightarrow \; (f_p g_x - f_x g_p) + (f_q g_y - f_y g_q) = 0$$

$$\Rightarrow \; \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} = 0$$

जो अभीष्ट प्रतिबंध है।

E7) यहाँ, मान लीजिए, कि $f = (y-z)p + (z-x)q - (x-y) = 0$.

तथा $g = z - px - qy = 0$

समीकरण (53) का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$[f, g] = (y-z)\,(-p) + (z-x)\,(-q) + [(y-z)p + (z-x)q].1$$

$$-[-1-q+p(q-p)]\,(-x) - [1+p+q(q-p)]\,(-y)$$

$$= (q-p)\,[xp+yq] - (x-y) + yp - qx$$

$$= (q-p)z - (x-y) + yp - qx \qquad [\text{क्योंकि } g=0 \text{ से } xp+yq=z]$$

$$= 0 \qquad [\text{क्योंकि } f=0 \text{ से } z(q-p)=(x-y)-yp+qx]$$

अतः दिए हुए PDE सुसंगत हैं।

E8) मान लीजिए कि $f = xp - yq = 0$.

तथा $g = x^2 p + q - xz = 0.$

समीकरण (53) के प्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं :

$$[f, g] = x(2xp - z) - y.(0) + [(xp - yq](-x) - [p + p.0]x^2 - [-q + q.0].1$$

$$= 2x^2.p - xz - x^2 p + xyq - px^2 + q$$

$$= -xz + q + xyq$$

$$= -x^2 p + xyq + x^2 \qquad [\text{क्योंकि } g=0 \text{ से}, -xz+q=-x^2 p]$$

$$= x(yq - xp)$$

$$= 0 \qquad [f=0 \text{ के प्रयोग से}]$$

अतः, दिए हुए PDE सुसंगत हैं।

$f = 0$ और $g = 0$ को p और q के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$p = \frac{1+yz}{1+xy},\ q = \frac{x(z-x)}{1+xy}$$

$dz = pdx + qdy$ में p और q के इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$$dz = \frac{1+yz}{1+xy}dx + \frac{x(z-x)}{1+xy}\,dy$$

$$\Rightarrow\ (1+xy)dz = (1+yz)dx + x(z-x)dy$$

$$\Rightarrow\ (1+xy)dz = (1+xy+yz)dx + xzdy - x^2dy - xydx$$ ($xy\,dx$ को जोड़ने और घटाने पर)

$$\Rightarrow\ (1+xy)dz = (1+xy)dx + z(ydx+xdy) - x(xdy+ydx)$$

$$\Rightarrow\ (1+xy)\ d(z-x) - (z-x)\ (xdy+ydx) = 0$$

$$\Rightarrow\ (1+xy)\,d(z-x) - (z-x)\,d(1+xy) = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{(1+xy)\,d(z-x) - (z-x)\ d(1+xy)}{(1+xy)^2} = 0,$$ जबकि $1+xy \neq 0$.

$$\Rightarrow\ d\left(\frac{z-x}{1+xy}\right) = 0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{z-x}{1+xy} = b$$

$\Rightarrow\ z = x + b(1+xy)$, दिए हुए PDE का एक प्राचल सार्व हल-कुल है जहाँ b के एक स्वेच्छ अचर है।

E9) i) दिया हुआ PDE है :

$$p^2x + q^2y = z \tag{110}$$

इसके सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{2px} = \frac{dy}{2qy} = \frac{dz}{2(p^2x+q^2y)} = \frac{dp}{p-p^2} = \frac{dq}{q-q^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{p^2dx + 2pxdp}{p^2x} = \frac{q^2dy + 2qydy}{q^2y}$$

$$\Rightarrow\ p^2x = aq^2y. \tag{111}$$

जहाँ a एक अचर है।

समीकरणों (110) और (111) को p और q के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p=\left\{\frac{az}{(1+a)x}\right\}^{1/2} \text{ और } q=\left\{\frac{z}{(1+a)y}\right\}^{1/2}$$

p और q के इन मानों को $dz = pdx + qdy$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\left(\frac{1+a}{z}\right)^{1/2} dz = \left(\frac{a}{x}\right)^{1/2} dx + \left(\frac{1}{y}\right)^{1/2} dy$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\{(1+a)z\}^{1/2} = (ax)^{1/2} + (y)^{1/2} + b,$$

जो दिए हुए PDE का अभीष्ट पूर्ण समाकल है :

ii) दिया हुआ PDE है :

$$f = 2(z + xp + yq) - yp^2 = 0 \tag{112}$$

समीकरणों (66) के संगत सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{2x-2yp} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{2xp-2yp^2+2yq} = \frac{dp}{-(2p+p.2)} = \frac{dq}{-(2q-p^2+q.2)}$$

दूसरी और चौथी भिन्न से, हम प्राप्त करते हैं :

$$2\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^2 p = a \tag{113}$$

समीकरणों (112) और (113) को p और q के लिए हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = \frac{a}{y^2},\ q = \frac{a^2}{2y^4} - \frac{ax}{y^3} - \frac{z}{y}$$

p और q के इन मानों को $dz = pdx + qdy$, में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dz = \frac{a}{y^2}dx + \frac{a^2}{2y^4}dy - \frac{ax}{y^3}dy - \frac{z}{y}dy$$

$$\Rightarrow \quad ydz + zdy = \frac{a}{y}dx - \frac{ax}{y^2}dy + \frac{a^2}{2y^3}dy$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$yz = \frac{ax}{y} - \frac{a^2}{4y^2} + b$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{ax}{y^2} + \frac{b}{y} - \frac{a^2}{4y^3},$$

जो दिए हुए PDE का पूर्ण समाकल है।

iii) दिया हुआ PDE है :

$$f = 2z + p^2 + qy + 2y^2 = 0 \tag{114}$$

समीकरण (66) के संगत सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2p^2 + qy} = \frac{dp}{-(0 + p.2)} = \frac{dq}{-(q + 4y + q.2)}$$

यहाँ पहली और चौथी भिन्न से प्राप्त होता है :

$$dx + dp = 0$$

समाकलित करने पर, $x + p = a$

$$\Rightarrow \quad p = a - x \tag{115}$$

समीकरण (114) और (115) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$q = \frac{-(2z + 2y^2 + (a-x)^2)}{y}$$

p और q के प्राप्त मानों को $dz = pdx + qdy$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dz = (a - x)\ dx - \frac{(a-x)^2 + 2y^2 + 2z}{y}dy$$

$$\Rightarrow \quad y^2dz = y^2(a-x)dx - (a-x)^2 ydy - 2y^3dy - 2z\ ydy$$

$$\Rightarrow \quad y^2dz + 2zydy + (a-x)^2 ydy - y^2(a-x)dx + 2y^3dy = 0$$

या

$$d\left(y^2z + \frac{1}{2}(a-x)^2 y^2 + 2\frac{y^4}{4}\right) = 0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$y^2\ [2z+(a-x)^2+y^2]=b$,

जो दिए हुए PDE का पूर्ण समाकल है।

iv) $z^2 = 2(a^2+1)x^2+2ay+b$

v) $z = ax+be^y(y+a)^{-a}$

E10) i) दिया हुआ PDE है :

$p+q-pq=0$

जो केवल p और q के पदों में ही है।

मान लीजिए कि $p=a$.

तब, हम दिए हुए समीकरण से प्राप्त करते हैं :

$$q=\frac{a}{a-1}$$

p और q के ऊपर प्राप्त मानों को $dz = pdx+qdy$, में प्रतिस्थापित करने पर, हम

$$dz = a\ dx+\frac{a}{a-1}dy$$

प्राप्त करते हैं :

समाकलित करने पर, हम दिए हुए PDE का पूर्ण समाकल

$$z = ax+\frac{a}{a-1}y+b$$

के रूप में प्राप्त करते हैं।

ii) $z = ax \pm \sqrt{1-a^2}\ y+b$

iii) $z = e^a x+ay+b$

iv) दिया हुआ PDE है :

$(y-x)\ (qy-px)=(p-q)^2$

मान लीजिए कि $y+x=U$, और $xy=V$

$$\therefore\ \ p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}\ \frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial V}\ \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial U}+y\frac{\partial z}{\partial V}$$

इसी प्रकार, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial U} + x\frac{\partial z}{\partial V}$

दिया हुआ समीकरण तब निम्न रूप में बदल जाता है :

$$\frac{\partial z}{\partial U} = \left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)^2$$

यह समीकरण प्रकार I का है तथा हम इसका पूर्ण समाकल सीधे समीकरण (83) का प्रयोग करके निम्न रूप में प्राप्त कर सकते हैं :

$$z = aU + \sqrt{a}\ V + b$$

$$\Rightarrow\ z = a(y+x) + \sqrt{a}\ xy + b$$

v) दिए हुए PDE को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{1-x^2}{x^2}p^2 + \frac{q}{y} = 0$$

मान लीजिए कि $\sqrt{1-x^2} = X$ और $\frac{y^2}{2} = Y$.

तब, दिया हुआ PDE निम्न में बदल जाता है :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial Y} = 0$$

तथा समीकरण (83) के प्रयोग से इसका पूर्ण समाकल है :

$$z = aX + (-a^2)Y + b$$

$$= a\sqrt{1+x^2} - \frac{a^2y^2}{2} + b$$

E11) i) दिया हुआ PDE

$$f = 4z - pq = 0 \tag{116}$$

प्रकार II का समीकरण है।

दिए हुए समीकरण में $p = aq$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$4z = aq^2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{\frac{4z}{a}}$$

केवल घनात्मक चिन्हों को लेते हुए p और q के मान समीकरण $dz = pdx + qdy$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dz = a\sqrt{\frac{4z}{a}}\,dx + \sqrt{\frac{4z}{a}}\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a}{4z}}\,dz = adx + dy$$

समाकलित करने पर, हमें दिए PDE का पूर्ण समाकल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$\frac{\sqrt{az}}{\sqrt{4}.\frac{1}{2}} = (ax+y)+b$$

$$\Rightarrow \quad \pm\sqrt{az} = ax+y+b$$

$$\Rightarrow \quad az = (ax+y+b)^2$$

ii) $a^2 \ln|z| = (ax+b+y)^2$

iii) $8(x+ay+b)^3 = (1+a^3)z^2$

iv) $4(a^2-1)\,z = (ax+y+b)^2$

v) उदाहरण 18 की तरह ही प्रक्रिया प्रारंभ करके प्राप्त करें

$$x\,y^a\,b = z^{1/k}$$

जहाँ $k = \frac{1}{2}[-a+\sqrt{a^2+4}\,]$.

E12) i) दिया हुआ PDE है :

$$q = xp + p^2$$

अतः, प्रत्येक पक्ष समान अचर, मान लीजिए a, के बराबर होना चाहिए।

$\therefore \quad xp + p^2 = a$ और $q = a$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4a}}{2}$$

ऊपर से, p और q के मान संबंध $dz = pdx + qdy$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$dz = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4a}}{2}\,dx + a\,dy$$

समाकलित करने पर, हमें दिए हुए PDE का पूर्ण समाकल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$z = -\frac{x^2}{4} \pm \left(\frac{x\sqrt{x^2+4a}}{4} \pm a\ln\left| x + \sqrt{x^2+4a} \right| \right) + ay + b$$

ii) $z = \frac{1}{6}(2x-a)^3 + a^2 y + b$

iii) $z = \frac{\sqrt{x^2+a}}{2} + \frac{a}{2}\ln\left| x + \sqrt{x^2+a} \right| - \frac{a}{2}\frac{1}{y^2} + \ln|y| + b$

iv) $z = a\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}a^2 y^2 + b$

जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं।

संकेत : दिए हुए PDE को $\frac{p^2(1+x^2)}{x^2} = \frac{q}{y}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

v) $z = \frac{1}{3}(x^2+a^2)^{3/2} + (y^2-a^2)^{1/2} + b$

संकेत : दिए हुए PDE को q^2x^2 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{p^2 - x^4}{x^2} = \frac{y^2q^2 - y^2}{q^2}$$

जो कि चर पृथक्करणीय रूप में हैं।

vi) $z + b = \ln\left| x + \sqrt{a+x^2} \right| + \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left| \frac{y-\sqrt{a}}{y+\sqrt{a}} \right|$

संकेत : दिए हुए PDE को p^2q से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{q} - y^2$$

E13) i) दिया हुआ PDE है :

$$(p+q)\,(z - xp - yq) = 1$$

इसे $z = xp + yq + \frac{1}{p+q}$ के रूप में लिखा जा सकता है,

जो एक क्लेरों समीकरण है।

अतः, दिए हुए समीकरण का पूर्ण समाकल है :

$$z = ax + by + \frac{1}{a+b}.$$

ii) $z = ax + by + \sqrt{\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma}$

iii) $z = ax + by + 3(ab)^{1/3}$

—x—

विविध प्रश्न

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति अथवा एक प्रति उदाहरण की सहायता से कीजिए।

i) समीकरण $yz\,dx + (x^2y - xz)dy + (x^2z - xy)dz = 0$ समाकलनीय है।

ii) PDE $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, का हल $z = -[y + f(x - y)]$ है।

iii) द्वितीय कोटि PDE $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x - y$ के पूर्ण हल में दो स्वेच्छ अचर सम्मिलित होते हैं।

iv) PDE $p^2x + q^2y = z$ और $p^2x - q^2y = 0$ सुसंगत हैं।

v) PDE $(\sqrt{p} + \sqrt{q}) = 2x$ का पूर्ण समाकल, $z = \frac{(2x-a)^2}{6} + a^2y + b$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं।

vi) युगपत् अवकल समीकरणों $\frac{dx}{x(y^3 - 2x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3 - x^3)} = \frac{dz}{z(x^3 - y^3)}$ का एक हल $xyz^{3/2} = c$ है।

vii) समीकरण $(6x + yz)dx + (xz - 2y)dy + (xy + 2z)dz = 0$ यथातथ है।

2. निम्नलिखित समीकरण-निकायों के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए :

i) $\frac{dx}{3} = \frac{dy}{5} = \frac{dz}{3z + \tan(3y - 5x)}$

ii) $\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{-y(z^2 + x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$

iii) $\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}$

iv) $\frac{dx}{y^2(x - y)} = \frac{dy}{x^2(x - y)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$

v) $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$.

3. उन आकाश वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित दो पृष्ठ कुल $u = c_1$ और $v = c_2$ प्रतिच्छेद करते हैं :

i) $u = x^2 + y^2 + z^2, v = xyz$

ii) $u = x^2 + y^2, v = 3x + 2y + z$

iii) $u = xyz, v = x^2 + y^2 - 2z$.

4. बेलन $2y = x^2$ पर एक-प्राचल निकाय $xy = z + c$ वाले अतिपरवलयजों के लांबिक प्रतिच्छेदन से प्राप्त वक्र-निकाय के समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. दिखाइए कि $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x}$ द्वारा दी जाने वाली वक्रों के लांबिक पृष्ठों का कोई समुच्चय नहीं है।

6. एक वैधुत परिपथ में 0.1 हेनरी का प्रेरकत्व, 10 ओम का एक प्रतिरोध, 25 माइक्रोफैरड धारिता वाला एक कंडेसर तथा $400 \cos 200t$ वोल्ट का एक विद्युत चुम्बकीय बल लगे हुए हैं। समय t पर आवेश और धारा को नियंत्रित करने वाले युगपत् समीकरणों का निकाय लिखिए।

7. निम्नलिखित समीकरणों को रैखिक, सामिरैखिक, रैखिककल्प और अरैखिक समीकरणों में वर्गीकृत कीजिए :

i) $(x^2 + z^2)p - xyq = z^3x + y^2$

ii) $xp - yxq = xz^2$

iii) $yp - xq = xyz + x$

iv) $z^2(1 + p^2 + q^2) = 1$

v) $(2xy - 1)p + (z - x^2)q = 2(x - yz)$

vi) $uu_x = e^y + \sin x, u = u(x, y)$

vii) $p + q = x + y + z$

viii) $z(p - q) = z^2 + (x + y)^2$

ix) $p + q = pq$

x) $x^2 p + (x + y)^2 q = (x + y)\,(z^2 + 1)$

8. निम्नलिखित पृष्ठ-कुलों के लिए संपूर्ण अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जबकि c प्रत्येक स्थिति में कुल परिभाषित करने वाला प्राचल है :

i) $y(x + z) = c(y + z)$

ii) $(yz + 1)\,(cy + 1) = (xy + 1)$

iii) $xyz = c$

iv) $2zy - x(y^2 + z^2) = 2cx$

v) $3x^2 - y^2 + z^2 + xyz = c$.

9. जाँच कीजिए कि ये संपूर्ण अवकल समीकरण यथातथ/समाकलनीय हैं तथा इनके संगत समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $2yz\,dx + zx\,dy - xy(1+z)dz = 0$

ii) $zy\ dx = zx\ dy + y^2 dz$

iii) $(x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz)dx + (y^2 - z^2 - x^2 + 2yz + 2yx)dy$

$$+ (z^2 - x^2 - y^2 + 2zx + 2zy)dz = 0$$

iv) $(y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0$

v) $(yz + z^2)dx - xz\,dy + xy\,dz = 0$

vi) $z^2 dx + (z^2 - 2yz)dy + (2y^2 - yz - xz)dz = 0$.

10. ऐसा $f(y)$ ज्ञात कीजिए जिससे कि संपूर्ण अवकल समीकरण

$$\{(yz+z)/x\}dx - z\,dy + f(y)dz = 0$$

समाकलनीय हो जाए। अतः इसे हल भी कीजिए।

11. निम्नलिखित समीकरणों में से स्वेच्छ अचरों a और b को विलुप्त कीजिए तथा संगत PDE ज्ञात कीजिए :

i) $z = (x+a)\,(y+b)$

ii) $z = (x^2 + a)\,(x^2 + b)$

iii) $z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$

iv) $z = ax + by + ab$

v) $z = ax + a^2 y^2 + b$

vi) $z = ax + (1-a)\,y + b$

12. निम्नलिखित पृष्ठों में से प्रत्येक से प्राप्त होने वाला PDE ज्ञात कीजिए :

i) $z = x + y + f(x, y)$

ii) $z = f(x - y)$

iii) $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \ln y\right)$

iv) $f(x^2 + y^2, z - xy) = 0$

v) $x + y + z = f(x^2 + y^2 + z^2)$

vi) $y = f(x - at) + g(x + at)$

vii) $z = f(x + iy) + g(x - iy)$

13. निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों के व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए:

i) $xzp + yzq = xy$

ii) $p \tan x + q \tan y = \tan z$

iii) $z(p - q) = z^2 + (x + y)^2$

iv) $x^2(y - z)p + y^2(z - x)q = z^2(x - y)$

v) $(y + zx)p - (x + yz)q = x^2 - y^2$.

14. दिए हुए वक्रों से होकर जाने वाले, निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों के समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए :

i) $(y - z)p + (z - x)q = x - y;\ z = 0,\ y = 2x$

ii) $(x - y)p + (y - x - z)q = z;\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 1$

15. जाँच कीजिए कि समीकरण

i) $z = \sqrt{2x + a} + \sqrt{2y + b}$, और

ii) $z^2 + \mu = 2(1 + \lambda^{-1})(x + \lambda y)$

दोनों ही PDE $z = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ के पूर्ण समाकल हैं। यह भी दिखाइए कि पूर्ण समाकल ii) हल i) में $b = -\frac{a}{\lambda} - \frac{\mu}{1 + \lambda}$ लेने पर प्राप्त एक-प्राचल उपनिकाय का अन्वालोप है।

16. दिखाइए कि $z = ax + (y/a) + b$ समीकरण $pq = 1$ का एक पूर्ण समाकल है। उप-कुल $b = a$ के संगत विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए। साथ ही, विचित्र समाकल भी ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व है।

17. निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों के पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

i) $(x^2 + y^2)(p^2 + q^2) = 1$

ii) $(x + y)(p + q)^2 + (x - y)(p - q)^2 = 1$

iii) $z = px + qy + \sqrt{\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma}$

iv) $q^2 = z^2 p^2 (1 - p^2)$

v) $z^2 = 1 + p^2 + q^2$

vi) $z(p^2 - q^2) = x - y$

vii) $2x(z^2 q^2 + 1) = pz$

viii) $p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0$

ix) $2(z + px + qy) = yp^2$

x) $zpq = p + q$.

— x —

विविध प्रश्नों के हल/उत्तर

1. i) **सत्य**, समाकलनीयता के प्रतिबंध की जाँच कीजिए।

ii) **असत्य**, $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{z^2} \Rightarrow x-y=c_1; \frac{-1}{z}=y+c_2=y+f(x-y)$.

iii) **असत्य**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x-y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{2}-yx+\phi(y) \Rightarrow u=\frac{x^2 y}{2}-\frac{y^2 x}{2}+f(y)+g(x)$$

हल में दो, स्वेच्छ फलन सम्मिलित हैं।

iv) **सत्य,** यहाँ, $f=p^2x+q^2y-z=0$ और $g=p^2x-q^2y=0$.

जाँच कीजिए कि सुसंगतता प्रतिबंध $[f, g]=0$ संतुष्ट हो रहा है।

v) **असत्य,** $\sqrt{p}-2x=-\sqrt{q}=-a$ (मान लीजिए)

$$\Rightarrow \; p=(2x-a)^2, q=a^2$$

$$\therefore \; dz=p\,dx+q\,dy \Rightarrow z=\frac{(2x-a)^3}{6}+a^2y+b.$$

vi) **सत्य,** $\dfrac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}}{y^3-x^3}=\dfrac{dz}{2z(x^3-y^3)}$ से $xyz^{3/2}=c$ प्राप्त होता है।

vii) **सत्य,** यथातथता प्रतिबंध की जाँच कीजिए।

2. i) सहायक समीकरणों के प्रथम दो पद से प्राप्त होता है :

$$3y-5x=c_1$$

पहली और तीसरी भिन्न को लेने पर $dx=\dfrac{3dz}{3z+\tan c_1}$

$$\Rightarrow \; \ln c_2+x=\ln(3z+\tan c_1)$$

$$\Rightarrow \; 3z+\tan c_1=c_2e^x$$

समाकल वक्र पृष्ठों के दोनों कुलों $3y-5x=c_1$ और
$e^{-x}\{3z+\tan(3y-5x)\}=c_2$ के प्रतिच्छेदन है।

ii) $$\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{\dfrac{dx}{x}-\dfrac{dy}{y}-\dfrac{dz}{z}}{0}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{0}$$

समाकलित करने पर $\dfrac{x}{yz}=c_1$ और $x^2+y^2+z^2=c_2$.

$\therefore$ अभीष्ट हल $f\left(\dfrac{x}{yz}, x^2+y^2+z^2\right)=0$ है।

iii) $$\frac{dx}{x^2-yz}=\frac{dy}{y^2-zx}=\frac{dz}{z^2-xy}$$

$$\therefore \frac{dx-dy}{(x-y)(x+y+z)}=\frac{dy-dz}{(y-z)(x+y+z)}=\frac{dz-dx}{(z-x)(x+y+z)}$$

पहली दो भिन्नों से, $\ln(x-y)=\ln(y-z)+\ln c_1$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{y-z}=c_1$$

दूसरी और तीसरी भिन्न से, $\ln(y-z)=\ln(z-x)+\ln c_2$

$$\Rightarrow \frac{y-z}{z-x}=c_2$$

$\therefore$ अभीष्ट हल $f\left(\dfrac{x-y}{y-z}, \dfrac{y-z}{z-x}\right)=0$ है।

iv) $$\frac{dx}{y^2(x-y)}=\frac{dy}{-x^2(x-y)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

पहली दो भिन्नों से,

$$x^2dx=-y^2dy \text{ या } 3x^2dx+3y^2dy=0$$

समाकलित करने पर, $x^3+y^3=c_1$

$1, -1, 0$ को गुणक चुनने पर, प्रत्येक भिन्न

$$=\frac{dx-dy}{y^2(x-y)+x^2(x-y)}=\frac{dx-dy}{(x-y)(x^2+y^2)}$$

तीसरी भिन्न और ऊपर प्राप्त भिन्न से,

$$\frac{dz}{z(x^2+y^2)} = \frac{dx-dy}{(x-y)\,(x^2+y^2)} \text{ या } \frac{dz}{z} = \frac{dx-dy}{x-y}$$

समाकलित करने पर, $(x-y)/z = c_2$

$\therefore$ अभीष्ट हल $f\left(x^3+y^3, \dfrac{(x-y)}{z}\right) = 0$ है।

v) दिए हुए निकाय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz}$$

अंतिम दो भिन्नों से, $y/z = c_1$

x, y, z को गुणक चुनने पर,

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^3 - xy^2 - xz^2 + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2+y^2+z^2)}$$

ऊपर दिए और तीसरी भिन्न से, $\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2+y^2+z^2)} = \dfrac{dz}{2xz}$

समाकलित करने पर, $(x^2+y^2+z^2)/z = c_2$

$\therefore$ अभीष्ट हल $f\left(\dfrac{y}{z}, \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}\right) = 0$ है।

3. i) $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)} = \dfrac{dy}{y(z^2-x^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2-y^2)}$.

ii) $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} = \dfrac{dz}{2x-3y}$.

iii) $\dfrac{dx}{x(y^2+z)} = \dfrac{dy}{-y(x^2+z)} = \dfrac{dz}{z(x^2-y^2)}$.

4. $(x+y)\,(z+1) = c_1$ और $(x-y)\,(z-1) = c_2$.

5. $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x}$ से प्राप्त वक्रों पर लंब पृष्ठ का अवकल समीकरण

$z\,dx + (z+x)dy + x\,dz = 0$ है।

जाँच कीजिए कि इस अवकल समीकरण के लिए, समाकलनीयता प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता, अतः इसे हल नहीं किया जा सकता। अतः दिए हुए वक्रों पर लंब पृष्ठों के किसी समुच्चय का अस्तित्व नहीं है।

6. यहाँ $R=10,\ L=0.1,\ C=25\times10^{-6},\ E(t)=400\cos 200t$.

नियंत्रण समीकरण हैं :

$$\frac{di}{dt}-100\,i+400000\,q=400\cos 200\,t$$

तथा $\frac{dq}{dt}=i$

$$\Rightarrow\ \frac{di}{400\cos 200\,t+(100\,i-400000\,q)}=\frac{dq}{i}=dt\,.$$

7. i) रैखिककल्प
   ii) सामिरैखिक
   iii) रैखिक
   iv) अरैखिक
   v) रैखिककल्प
   vi) अरैखिक
   vii) रैखिक
   viii) रैखिककल्प
   ix) अरैखिक
   x) सामिरैखिक

8. i) $(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0$
   ii) $(1+yz)dx+x(z-x)dy-(1+xy)dz=0$
   iii) $yz\,dx+xz\,dy+xy\ dz=0$
   iv) $yz\ dx+(x^2y-zx)dy+(x^2z-xy)dz=0$
   v) $(6x+yz)dx+(xz-2y)dy+(xy+2z)dz=0$.

9. i) $2yz\ dx+zx\ dy-xy(1+z)dz=0$

इसे xyz से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{2dx}{x}+\frac{dy}{y}-\left(1+\frac{1}{z}\right)dz=0$$

समाकलित करने पर, $2\ln x+\ln y-(z+\ln z)=\ln c$

या $\ln x\ +\ln y-\ln c-\ln z=z$ या $x^2y=cz\,e^z$.

ii) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \frac{dz}{z} \text{ या } d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dz}{z}$$

समाकलित करने पर, $\frac{x}{y} = \ln z - \ln c$, या $z = ce^{x/y}$.

iii) दिए हुए समीकरण के क्रमशः पहले, दूसरे और तीसरे पदों में x^2dx, y^2dy, z^2dz जोड़ने और घटाने पर तथा सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$[-(x^2+y^2+z^2)+2x(x+y+z)]dx$$

$$+[-(x^2+y^2+z^2)+2y(x+y+z)]dy$$

$$+[-(x^2+y^2+z^2)+2z(x+y+z)]dz = 0$$

या

$$-(x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)+2(x+y+z)(x\,dx+y\,dy+z\,dz) = 0$$

या, $\dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z} = \dfrac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$

समाकलित करने पर, $\ln(x+y+z) = \ln(x^2+y^2+z^2)+\ln c$

या $(x+y+z) = c(x^2+y^2+z^2)$, c एक स्वेच्छ अचर है।

iv) $xy+yz+zx = c$.

v) $(yz+z^2)dx - xz\,dy + xy\,dz = 0$

मान लीजिए कि $x = uz$ तब $dx = u\,dz + z\,du$.

$y = vz$ मानने पर $dy = v\,dz + z\,dv$.

ऊपर प्राप्त मानों को, दिए हुए समीकरण में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(vz^2+z^2)(u\,dz+z\,du) - uz^2(v\,dz+z\,dv) + vu\,z^2dz = 0$$

या $(v+1)z^3du - u\,z^3dv + (v+1)u\,z^2dz = 0$

$(v+1)uz^3$ से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{du}{u} - \frac{dv}{v+1} + \frac{dz}{z} = 0$$

समाकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$uz = c(v+1)$$

या, $xz = c(y+z)$.

vi) $x = uz$ और $y = vz$ प्रतिस्थापित करने पर, दिया हुआ समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है :

$$z^3 du + z^3 (1-2v)\, dv = 0$$

या, $du + (1-2v)\, dv = 0$

समाकलित करने पर, $u + v - v^2 = c$

या $(x+y)z - y^2 = cz^2$.

10. दिए हुए समीकरण को x से गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(yz+z)dx - xz\, dy + xf(y)dz = 0 \qquad \text{(i)}$$

यदि समीकरण (i) समाकलनीय है, तो समाकलनीयता प्रतिबंध से प्राप्त होता है :

$$(yz+z)(-x-xf') - xz[f-(y+1)] + xf[z-(-z)] = 0$$

या $\quad xz(1+y)f' = xzf \quad \left(f' = \dfrac{df}{dy}\right)$

या $\quad \dfrac{df}{f} = \dfrac{dy}{1+y}$

समाकलित करने पर, हम $f = c(y+1)$ प्राप्त करते हैं, जबकि, c एक अचर है। f के इस मान को (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z(y+1)dx - xz\, dy + xc(y+1)dz = 0$$

या $\quad \dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{y+1} + \dfrac{cdz}{z} = 0$

समाकलित करने पर हमें अभीष्ट हल $xz^c = c_1(y+1)$ के रूप में प्राप्त होता है, जबकि c और c_1 स्वेच्छ अचर हैं।

11. i) $pq = z$

ii) $pq = 4xy$

iii) $px + qy = pq$

iv) $z = px + qy + pq$

v) $q = 2yp^2$

vi) $p + q = 1$.

12. i) दिए हुए समीकरण को x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p = 1 + f'(xy).y$$

$q = 1 + f'(xy).x$

ऊपर प्राप्त दोनों समीकरणों में से, $f'(xy)$ को विलुप्त करने पर अभीष्ट PDE, $xp - yq = x - y$ है।

ii) $p + q = 0$

iii) $px^3 + qx = 2y^2$

iv) $py - qx = y^2 - x^2$

v) दिए हुए समीकरण को x और y, के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$1 + p = f'(x^2 + y^2 + z^2)(2x + 2zp)$$

$$1 + q = f'(x^2 + y^2 + z^2)\ (2y + 2zq)$$

ऊपर प्राप्त दोनों समीकरणों में से f' को विलुप्त करने पर,

$$\frac{(1+p)}{2x + 2zp} = \frac{1+q}{2y + 2zq}$$

$$\Rightarrow \ (y - z)p + (z - x)q = x - y.$$

vi) $y = f(x - at) + g(x + at)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x - at) + g'(x + at)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x - at) + g''(x + at)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f'(x - at)\ (-a) + g'(x + at)\ (a)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f''(x - at)\ (-a)^2 + g''(x + at)\, a^2$$

$$= a^2[f''(x - at) + g''(x + at)]$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$\therefore$ अभीष्ट PDE $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ है।

vii) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \cdot$

13. i) $xy - z^2 = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$.

ii) $\frac{\sin z}{\sin y} = \phi\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)$.

iii) $zp - zq = z^2 + (x+y)^2$ दिया हुआ है।

लग्रांज सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{z^2 + (x+y)^2}$$

पहली दो भिन्नों से, हम $x + y = c_1$ प्राप्त करते हैं।

दूसरी और तीसरी भिन्न से, हम प्राप्त करते हैं :

$$dy = \frac{-z\,dz}{z^2 + c_1^2} \text{ या } \frac{2z\,dz}{z^2 + c_1^2} = -2dy$$

समाकलित करने पर, $\ln(z^2 + c_1^2) - \ln c^2 = -2y$ या $\frac{z^2 + c_1^2}{c^2} = e^{-2y}$

या, $e^{2y}[z^2 + (x+y)^2] = c_2$

इस प्रकार, अभीष्ट व्यापक समाकल $e^{2y}[z^2 + (x+y)^2] = \phi(x+y)$ है।

iv) $\phi\left(xyz, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 0$

v) $\phi(x^2 + y^2 - z^2, xy + z) = 0$

14. i) $5(x+y+z)^2 = 9(x^2 + y^2 + z^2)$

ii) दिया हुआ समीकरण है: $(x-y)p + (y-x-z)q = z$ (i)

लग्रांज सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{y-x-z} = \frac{dz}{z} = \frac{dx+dy+dz}{0} \quad \text{(ii)}$$

$\therefore$ अंतिम भिन्न से, $x + y + z = c_1$ (iii)

$$\frac{dy}{y-x-z} = \frac{dz}{z} \text{ या } \frac{2dy}{2y - c_1} - \frac{2dz}{z} = 0 \text{ लेने पर और}$$

समाकलित करने पर, $\ln(2y - c_1) - 2\ln z = \ln c_2$ या $(2y - c_1) = c_2 z^2$

या, $(y - x - z)/z^2 = c_2$ (iv)

दिया हुआ वक्र है : $z = 1,\ x^2 + y^2 = 1$ (v)

(iii) और (iv) में $z=1$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x+y=c_1-1 \text{ और } y-x=c_2+1 \tag{vi}$$

$$\text{परंतु } 2(x^2+y^2)=(x+y)^2+(y-x)^2 \tag{vii}$$

(v) और (vi) का प्रयोग (vii) में करने पर :

$$2=(c_1-1)^2+(c_2+1)^2 \tag{viii}$$

(iii) और (iv) से c_1 और c_2 के मानों को (viii) में रखने पर हमें अभीष्ट समाकल पृष्ठ

$$z^4(x+y+z)^2+(y-x-z)^2-2z^4(x+y+z)-2z^2(y-x-z)=0$$

के रूप में प्राप्त होता है।

15. दिया हुआ समीकरण है :

$$z=\sqrt{2x+a}+\sqrt{2y+b} \tag{i}$$

x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$p=\frac{1}{\sqrt{2x+a}} \text{ और } q=\frac{1}{\sqrt{2y+b}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\sqrt{2x+a}+\sqrt{2y+b}=z$$

जो यह दिखाता है कि (i) समीकरण $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=z$ का एक हल है। क्योंकि इसमें दो स्वेच्छ अचर a और b हैं, इसलिए यह एक पूर्ण समाकल है।

इसी प्रकार, जाँच कीजिए कि (ii) एक पूर्ण समाकल है।

जब $b=-\frac{a}{\lambda}-\frac{\mu}{1+\lambda}$, तब

$$z=\sqrt{2x+a}+\sqrt{2y-\frac{a}{\lambda}-\frac{\mu}{1+\lambda}} \tag{ii}$$

ऊपर प्राप्त समीकरण को a के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\sqrt{2y-\frac{a}{\lambda}-\frac{\mu}{1+\lambda}}=\sqrt{\frac{2x+a}{\lambda}} \tag{iii}$$

समीकरणों (ii) और (iii) को जोड़ने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2x+a=\frac{\lambda^2z^2}{(1+\lambda)^2} \tag{iv}$$

साथ ही, $\sqrt{2x+a}-\lambda\sqrt{2y-\frac{a}{\lambda}-\frac{\mu}{1+\lambda}}=0$. (v)

समीकरण (v) को समीकरण (ii) में से घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$z=(1+\lambda)\sqrt{2y-\frac{a}{\lambda}-\frac{\mu}{1+\lambda}}$$

या $$2y-\frac{a}{\lambda}-\frac{\mu}{1+\lambda}=\frac{z^2}{(1+\lambda)^2} \qquad \text{(vi)}$$

समीकरणों (ii) और (v) को जोड़ने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$2(x+\lambda y)=\frac{\mu}{1+\frac{1}{\lambda}}+\frac{z^2}{1+\frac{1}{\lambda}}$$

$\Rightarrow \; 2(1+\lambda^{-1})\,(x+\lambda y)=z^2+\mu$

जो हमारा हल (ii) है।

16. $z=ax+\frac{y}{a}+b$ (i)

इसे x और y के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$p=a$ और $q=\frac{1}{a}$

$\therefore\; pq=1$.

इस प्रकार (i) $pq=1$ का एक हल है। इसमें दो स्वेच्छ अचर शामिल हैं। इसलिए यह एक पूर्ण समाकल है। $b=a$, के लिए, हम विशिष्ट समाकल

$z=ax+\frac{y}{a}+a$ प्राप्त करते हैं।

इस समस्या का कोई विचित्र हल नहीं है।

17. i) $(x^2+y^2)\,(p^2+q^2)=1$ दिया हुआ है। (i)

मान लीजिए कि $x=r\cos\theta,\; y=r\sin\theta$ (ii)

तब $x^2+y^2=r^2,\; \theta=\tan^{-1}(y/x)$

$$\therefore\quad p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\left(\because \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

इसी प्रकार, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{r}\,\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

समीकरण (i) में p और q के इन मानों को रखने तथा सरल करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$r^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right] = 1 \text{ अर्थात्, } \left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = 1 \qquad \text{(iii)}$$

मान लीजिए कि $\ln r = R$, तब, समीकरण (iii) निम्न रूप में बदल जाता है:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = 1$$

जो प्रकार I (मानक रूप) का चार्पिट समीकरण है, जिसका हल
$z = aR + b\theta + c$ है, जबकि a, b, c स्वेच्छ अचर है, तथा $a^2 + b^2 = 1$
अर्थात् $b = \sqrt{1-a^2}$.

$\therefore\ z = a\ln r + \sqrt{1-a^2}\ \theta + c$.

जहाँ, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ और $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

ii) $x + y = X^2$ और $x - y = Y^2$ लीजिए तथा ऊपर i) की तरह हल करिए। अभीष्ट पूर्ण समाकल है :

$$z = a\sqrt{x+y} + \sqrt{1-a^2}\ \sqrt{x-y} + c.$$

iii) $z = ax + by + \sqrt{\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma}$.

iv) दिया हुआ समीकरण है : $q^2 = z^2 p^2 (1 - p^2)$

मान लीजिए कि $q = ap$ तब हमें प्राप्त होता है :

$$a^2 p^2 - z^2 p^2 (1 - p^2) = 0$$

$$\Rightarrow\ p^2 (a^2 - z^2 + z^2 p^2) = 0$$

$\Rightarrow$ या तो $p = 0$ या $p = \pm\sqrt{(z^2 - a^2)}/z$.

अब $dz = p\,dx + q\,dy = p(dx + a\,dy)$

जब $p = 0$ तब $dz = 0 \Rightarrow z = c$

जब $p = \pm\sqrt{(z^2 - a^2)}/z$ तब

$$dz = \pm[\sqrt{(z^2 - a^2)}/z]\,(dx + a\,dy)$$

$$\therefore \quad dx + a\,dy = \pm\frac{1}{2}(z^2 - a^2)^{-1/2}\,2z\,dz$$

समाकलित करने पर, $x + ay + b = (z^2 - a^2)^{1/2}$

या $(x + ay + b)^2 = z^2 - a^2$

अतः, अभीष्ट पूर्ण समाकल

$$z^2 - a^2 = (x + ay + b)^2 \text{ या } z = c.$$

v) $z = \pm\cosh[(x + ay + b)/\sqrt{(1 + a^2)}]$.

vi) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\left(\sqrt{z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\sqrt{z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = x - y \qquad \text{(i)}$$

मान लीजिए कि $\sqrt{z}\,dz = dZ$ तब $\frac{2}{3}z^{3/2} = Z$.

ऊपर प्राप्त प्रतिस्थापन से, समीकरण (i) निम्न हो जाता है :

$$P^2 - Q^2 = x - y \text{ जहाँ } P = \frac{\partial Z}{\partial x},\ Q = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

चर पृथक्करण द्वारा, हम लिख सकते हैं :

$$P^2 - x = Q^2 - y = a \quad \text{(मान लीजिए)}$$

तब $P = (x + a)^{1/2},\ Q = (a + y)^{1/2}$.

$\therefore\ dZ = (x + a)^{1/2}\,dx + (a + y)^{1/2}\,dy$

समाकलित करने पर, $z = \frac{2}{3}(x + a)^{3/2} + \frac{2}{3}(y + a)^{3/2} + b$

$$\Rightarrow \quad z^{3/2} = (a + x)^{3/2} + (a + y)^{3/2} + c \text{ जहाँ } c = \frac{3b}{2}.$$

vii) दिए हुए समीकरण को

$$2x\left[\left(z\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right] = z\frac{\partial z}{\partial x}$$

के रूप में लिखिए।

$z\,dz = dz$ लीजिए ताकि $z^2/2 = Z$ तथा दिया हुआ समीकरण निम्न हो जाए,

$$Q^2 = \frac{P}{2x} - 1 \quad \text{जहाँ} \quad P = \frac{\partial Z}{\partial x}, Q = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

अब चर पृथक्करणीय जिस समाकलन करने पर हम पाते हैं :

$$z^2 = 2x^2(1+a) + 2\sqrt{a}y + 2b$$

जहाँ a, b स्वेच्छ अचर है।

viii) दिया हुआ समीकरण $p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0$ है।

यहाँ $f = p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0$ है। (i)

चार्पिट सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dp}{-2p} = \frac{dq}{-2q} = \frac{dz}{-p(2p-2x) - q(2q-2y)} = \frac{dx}{-(2p-2y)} = \frac{dy}{-(2q-2y)}$$

प्रथम दो भिन्नों से, हमें $p = aq$ प्राप्त होता है।

$p = aq$ को (i), में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(a^2+1)q^2 - 2(ax+y)q + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{2(ax+y) \pm \sqrt{4(ax+y)^2 - 4(a^2+1)}}{2(a^2+1)}$$

$dz = p\,dx + q\,dy$ में, p और q के मानों को रखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$dz = \frac{(ax+y) \pm \sqrt{(ax+y)^2 - (a^2+1)}}{(a^2+1)}(a\,dx + dy) \qquad \text{(ii)}$$

$ax + y = v$ लेने से $a\,dx + dy = dv$. तब समीकरण (ii) से प्राप्त होता है:

$$(a^2+1)dz = [v \pm \sqrt{v^2 - (a^2+1)}\,]dv$$

समाकलित करने पर,

$$(a^2+1)z = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v\sqrt{v^2-(a^2+1)} \pm \frac{1}{2}(a^2+1)\ln\left|v + \sqrt{v^2-(a^2+1)}\right| + b$$

पूर्ण समाकल है, जहाँ $v = ax + y$ है तथा a, b अचर हैं।

ix) $z = \dfrac{ax}{y^2} + \dfrac{b}{y} - \dfrac{a^2}{4y^3}$.

x) $z^2 = 2(a+1)(x + y/a) + b$.

—×—