इकाई 5

लग्रांज का प्रमेय

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

5.1 प्रस्तावना
उद्देश्य

5.2 सहसमुच्चय

5.3 लग्रांज का प्रमेय

5.4 कुछ अनुप्रयोग

5.5 सारांश

5.6 हल/उत्तर

5.1 प्रस्तावना

इकाई 3 में आप विभिन्न प्रकार के उपसमूहों का अध्ययन कर चुके हैं। साथ ही, इकाई 1 में आपने एक तुल्यता संबंध द्वारा बने विभाजनों के बारे में अध्ययन किया था। यहाँ हम इन दोनों धारणाओं को साथ मिला रहे हैं। आप देखेंगे कि किसी समूह G का उपसमूह H दिया होने पर, हम H का उपयोग करते हुए G पर एक तुल्यता संबंध परिभाषित कर सकते हैं। इस इकाई में हम इस तुल्यता संबंध की चर्चा करेंगे, तथा इससे जुड़े तुल्यता वर्गों द्वारा बने G के विभाजन पर विचार करेंगे।

भाग 5.2 में आप एक समूह पर उसके प्रत्येक उपसमूह के संगत परिभाषित तुल्यता संबंधों के बारे में अध्ययन करेंगे। आप समूह को तुल्यता वर्गों में विभाजित करने के महत्व का भी अध्ययन करेंगे। ये वर्ग सहसमुच्चय कहलाते हैं।

भाग 5.3 में हम सहसमुच्चयों के उपयोग से एक परिमित समूह की कोटि और उसके किसी भी उपसमूह की कोटि के संबंध के बारे में एक अति उपयोगी प्रमेय को सिद्ध करेंगे। इस परिणाम की शुरूआत बीजीय समीकरणों को हल करने के बारे में एक शोध पत्र में प्रसिद्ध फ़्राँसीसी गणितज्ञ लग्रांज (Lagrange) ने किया था। इसी कारण से यह प्रारंभिक प्रमेय 'लग्रांज का प्रमेय', के नाम से जाना जाता है, हालांकि ऐसा मालूम पड़ता है कि लग्रांज ने इसे केवल S_n के उपसमूहों के लिए सिद्ध किया था।

vkdfr 1½ tkl Q ybl yxkt
¼1736&1813½

भाग 5.4 में, आप लग्रांज के प्रमेय के महत्व का कुछ अनुभव करेंगे। यहाँ आप इसके कुछ अनुप्रयोगों और परिणामों का अध्ययन करेंगे।

इस खंड की अन्य इकाइयों का अध्ययन करते समय, आप लग्रांज के प्रमेय का बार-बार इस्तेमाल करते रहेंगे। इसलिए, इस इकाई का सावधानीपूर्वक अध्ययन कीजिए। ऐसा करने से आप अध्ययन के निम्नलिखित उद्देश्यों को प्राप्त कर सकेंगे। इन्हीं उद्देश्यों के इर्दगिर्द इस इकाई को बनाया गया है।

उद्देश्य

इस इकाई की पढ़ाई के बाद, आप निम्नलिखित कर पाएंगेः

- उपसमूह के वाम और दक्षिण सहसमुच्चयों को परिभाषित करना, तथा उनके उदाहरण देना;
- समूह को एक उपसमूह के असंयुक्त सहसमुच्चयों में विभाजित करना;
- लग्रांज के प्रमेय का कथन देना, उसे सिद्ध करना तथा उसका अनुप्रयोग करना;
- लग्रांज के प्रमेय के विलोम को असिद्ध करना।

5.2 सहसमुच्चय

भाग 3.4, इकाई 3 में आपने एक समूह के दो उपसमुच्चयों के गुणनफल के बारे में अध्ययन किया था। अब हम उस स्थिति पर दृष्टि डालेंगे, जब इन उपसमुच्चयों में से एक एकल (singleton) है। वस्तुतः, हम स्थिति $H\{x\} = \{hx|h\in H\}$, जहाँ H समूह G का एक उपसमूह है और $x \in G$, पर दृष्टि डालेंगे। हम $\mathbf{H\{x\}}$ को $\mathbf{Hx}$ द्वारा व्यक्त करेंगे।

उदाहरणार्थ, यदि $G = S_3, H = <(1\,2)>$ और $x = (1\ 2\ 3)$, तो

$Hx = H(1\,2\,3) = \{(1\,2\,3), (1\,2)\circ(1\,2\,3)\} = \{(1\,2\,3), (2\,3)\}$. यह एक दक्षिण सहसमुच्चय का उदाहरण है, जैसा कि आप अब देखेंगे।

परिभाषाएँ: मान लीजिए कि H समूह G का एक उपसमूह है, तथा $x \in G$.

i) समुच्चय $Hx = \{hx \mid h \in H\}$, G में H का एक **दक्षिण सहसमुच्चय (right coset)** कहलाता है। अवयव x को Hx का एक **प्रतिनिधि (representative)** कहते हैं।

ii) सहसमुच्चय $xH = \{xh \mid h \in H\}$, G में H का एक **वाम सहसमुच्चय (left coset)** कहलाता है, जिसका **एक प्रतिनिधि $\mathbf{x}$** है।

ध्यान दीजिए कि यदि समूह की संक्रिया क्रमविनिमेय है, मान लीजिए **+** है, तो $x \in G$ से निरूपित $(G, +)$ में H के दक्षिण और वाम सहसमुच्चय, क्रमशः

$\mathbf{H} + \mathbf{x} = \{h + x \mid h \in H\}$ और $\mathbf{x} + \mathbf{H} = \{x + h \mid h \in H\}$ हैं।

शब्द 'सहसमुच्चय' का शायद सबसे पहला प्रयोग 1910 में गणितज्ञ जी.ए. मिलर (G.A. Miller) ने किया था। परंतु, ऐतिहासिक सूत्रों के अनुसार, प्रसिद्ध युवा फ़्राँसीसी गणितज्ञ गैलोआ (Galois) ने इस संकल्पना का आविष्कार 1830 में किया था। आइए इस बीजीय वस्तु के कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 1: मान लीजिए H समूह G का उपसमूह है। दर्शाइए कि H स्वयं एक दक्षिण तथा एक वाम सहसमुच्चय है।

हलः G के तत्समक e से निरूपित G में H का दक्षिण सहसमुच्चय लीजिए।

तब, $He=\{he \mid h \in H\}=\{h \mid h \in H\}=H.$

अतः, G में H स्वयं का एक दक्षिण सहसमुच्चय है।

इसी प्रकार, $eH = H$, जिससे कि G में e से निरूपित H का वाम सहसमुच्चय H ही है।

***

उदाहरण 2: $\mathbb{Z}$ में $4\mathbb{Z}$ के दक्षिण सहसमुच्चय क्या हैं?

हलः $H = 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}.$

H के दक्षिण सहसमुच्चय हैं:

$H+0 = H$, उदाहरण 1 से।

$H + 1 = \{..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, ...\}$,

$H + 2 = \{..., -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, ...\}$,

$H + 3 = \{..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, ...\}$,

$H + 4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\} = H$

इसी प्रकार, आप $H+5, H+6, \ldots$ के अवयव लिख सकते हैं। ऐसा करने से आप देख सकते हैं कि $H+5=H+1, H+6=H+2,$ इत्यादि।

आप इसकी भी जाँच कर सकते हैं कि $H-1=H+3, H-2=H+2, H-3=H+1,$ इत्यादि। इस प्रकार, सभी दक्षिण सहसमुच्चय $H, H+1, H+2$ और $H+3$ हैं।

***

यहाँ, एक महत्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 1: ध्यान दीजिए कि उदाहरण 2 में $0 \in H+x$ यदि और केवल यदि $x \in H.$ इस प्रकार, $H+x$, G का उपसमूह सिर्फ़ तब है जब $x \in H.$ उदाहरणार्थ, $H+1$ और $H+2$, G के उपसमूह नहीं हैं।

सहसमुच्चयों के और उदाहरण देने से पहले, आइए सहसमुच्चयों के कुछ गुणों की चर्चा करें। इनमें से कुछ आप उदाहरण 2 में देख चुके हैं। इन गुणों से G में H के भिन्न-भिन्न दक्षिण (या वाम) सहसमुच्चयों को ज्ञात करने में हमें आसानी होगी।

प्रमेय 1: मान लीजिए H समूह G का एक उपसमूह है तथा $x, y \in G$. तब

i) $x \in Hx$,

ii) $Hx = H \Leftrightarrow x \in H$,

iii) $Hx = Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$.

उपपत्ति: किसी भी $x \in G$ के लिए, $Hx = \{hx | h \in H\}$.

i) क्योंकि $e \in H$, इसलिए $ex \in Hx$, अर्थात्, $x \in Hx$.

ii) सर्वप्रथम, आइए मान लें कि $Hx = H$. तब क्योंकि $x \in Hx$. इसलिए $x \in H$.

विलोमतः, आइए मान लें कि $x \in H$. हम दर्शाएँगे कि $Hx \subseteq H$ तथा $H \subseteq Hx$.

$Hx = H \; \forall \; x \in H$.

अब, Hx का कोई भी अवयव hx के रूप का है, जहाँ $h \in H$. क्योंकि $h \in H$ और $x \in H$, इसलिए $hx \in H$.

इस प्रकार, $Hx \subseteq H$. ...(1)

पुनः, किसी भी $h \in H$ के लिए, $h = (hx^{-1})x \in Hx$, क्योंकि $h \in H$ और $x^{-1} \in H$.

$\therefore \; H \subseteq Hx$. ...(2)

(1) और (2) से, आप देख सकते हैं कि $Hx = H$.

मान लीजिए $Hx = Hy$. क्योंकि $x \in Hx = Hy$, $\exists \; h \in H$ s.t. $x = hy$.

अतः, $xy^{-1} = hyy^{-1} = h \in H$.

विलोमतः, मान लीजिए $xy^{-1} \in H$. तब, (ii) द्वारा, $Hxy^{-1} = H$.

इसलिए किसी भी $hx \in Hx$ के लिए, $hxy^{-1} = h'$, किसी $h' \in H$ के लिए।

इस प्रकार $hx = h'y \in Hy$.

अतः $Hx \subseteq Hy$. ...(3)

इसी प्रकार, आप सिद्ध कर सकते हैं कि $Hy \subseteq Hx$. ...(4)

(3) और (4) द्वारा, $Hx = Hy$.

प्रमेय 1 में बताए गए गुण केवल दक्षिण सहसमुच्चयों के लिए ही सत्य नहीं हैं। निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 2: प्रमेय 1 की उपपत्ति की ही तरह आप सिद्ध कर सकते हैं कि यदि G का H एक उपसमूह है तथा $x, y \in G$, तो

i) $x \in xH$,

ii) $xH = H \Leftrightarrow x \in H$,

iii) $xH = yH \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.

आइए अब सहसमुच्चयों के कुछ और उदाहरणों को देखें। सर्वप्रथम, हम प्रमेय 1 का उपयोग उदाहरण 2 के व्यापकीकरण के लिए करेंगे। आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}$ का कोई भी

उपसमूह $n\mathbb{Z}$ के रूप का होता है, जहाँ $n \in \mathbb{Z}$. आइए देखें कि $n\mathbb{Z}$ के सहसमुच्चय क्या हैं।

उदाहरण 3: दर्शाइए कि $n \in \mathbb{Z}$ के लिए $\mathbb{Z}$ **में** $n\mathbb{Z}$ **के सभी भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय** $\mathbf{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+(n-1)}$ हैं। इसी प्रकार, $\mathbb{Z}$ में $n\mathbb{Z}$ के सभी भिन्न-भिन्न वाम सहसमुच्चय $n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, 2+n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1)+n\mathbb{Z}$ हैं।

हलः पहले तो, हम अपनी सुविधा के लिए $n\mathbb{Z} = H$ लिखेंगे। अब, जैसा कि आपने उदाहरण 1 में देखा था, H एक सहसमुच्चय है। तब $H+1, H+2, \ldots, H+(n-1)$ भी दक्षिण सहसमुच्चय हैं। साथ ही, प्रमेय 1 से आप जानते हैं कि $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ के लिए, $H + m_1 = H + m_2$ iff $m_1 - m_2 \in H = n\mathbb{Z}$, अर्थात् iff $n \mid (m_1 - m_2)$.

अब $0 \le i, j < n, i \ne j$, के लिए, $n \nmid (i-j)$, क्योंकि $0 < |i-j| < n$.

इस प्रकार, $H, H+1, H+2, \ldots, H+(n-1)$, $\mathbb{Z}$ में H के भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय हैं।

परंतु, क्योंकि $n \mid (n-0)$, इसलिए $H+n = H+0 = H$.

इसी प्रकार, $H+(n+1) = H+1$, इत्यादि।

वस्तुतः, किसी भी $m \in \mathbb{Z}$ के लिए, जहाँ $m \ge n$ या $m < 0$, विभाजन ऐल्गोरिद्म द्वारा, $\exists\, q, r \in \mathbb{Z}$, जिनसे कि $m = qn + r, 0 \le r < n$. तब, $n \mid (m - r)$.

इस प्रकार, $H + m = H + r$, किसी $r = 0, 1, \ldots, n-1$ के लिए।

अतः, $\mathbb{Z}$ में $n\mathbb{Z}$ के सभी भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय $n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+(n-1)$ हैं।

इसी प्रकार, आप सिद्ध कर सकते हैं कि $\mathbb{Z}$ में $n\mathbb{Z}$ के सभी भिन्न-भिन्न वाम सहसमुच्चय $n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1)+n\mathbb{Z}$ हैं।

हम $\mathbf{m + n\mathbb{Z}}$ **या** $\mathbf{n\mathbb{Z} + m}$ **को** $\bar{\mathbf{m}}$ **द्वारा व्यक्त करते हैं**, जहाँ $m \in \mathbb{Z}$.

ध्यान दीजिए कि $\mathbb{Z}$ का m *एक अवयव **है***, जबकि $\mathbb{Z}$ का $\bar{m}$ *एक उपसमुच्चय **है***।

***

उदाहरण 3 से, विशेष तौर से, आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}$ में $4\mathbb{Z}$ के सभी दक्षिण सहसमुच्चय $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ हैं, जैसा कि आपने उदाहरण 2 में पाया था। उदाहरणार्थ, $4\mathbb{Z} + 57 = 4\mathbb{Z} + 1 = \bar{1}$, क्योंकि $57 \equiv 1 \pmod 4$.

इसी प्रकार, $4\mathbb{Z} - 26 \equiv 4\mathbb{Z} + 2 = \bar{2}$, क्योंकि $(-26) \equiv 2 \pmod 4$.

उदाहरणों 2 और 3 में आपने आबेली समूह $\mathbb{Z}$ में सहसमुच्चयों को ढूंढा था। आइए, अब अन्आबेली समूहों में सहसमुच्चयों को देखें।

उदाहरण 4: मान लीजिए $G = S_3 = \{I, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$, तथा H, $(1\,2\,3)$ से जनित G का चक्रीय उपसमूह है। G में H के सभी वाम सहसमुच्चय प्राप्त कीजिए। (इकाई 9 में आप देखेंगे कि H, A_3 है, यानी 3 प्रतीकों पर एकांतर समूह।)

हल: दो वाम सहसमुच्चय हैं:

$H = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ तथा

$(1\ 2)H = \{(1\ 2), (1\ 2)\circ(1\ 2\ 3), (1\ 2)\circ(1\ 3\ 2)\}$

$\quad = \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}.$

अब, इकाई 2 से आप जानते हैं कि $(1\ 2)^{-1} = (1\ 2), (1\ 3)^{-1} = (1\ 3), (2\ 3)^{-1} = (2\ 3).$

साथ ही, $(1\ 2)^{-1}(1\ 3)^{-1} = (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2) \in H.$

इसलिए, आप प्रमेय 1 के प्रयोग से देख सकते हैं कि $(1\ 2)H = (1\ 3)H.$

इसी प्रकार, आप दर्शा सकते हैं कि $(2\ 3)H = (1\ 3)H$ और $(1\ 2\ 3)H = H = (1\ 3\ 2)H.$

इस प्रकार, H के सभी भिन्न-भिन्न वाम सहसमुच्चय H और $(1\ 2)H$ हैं।

***

उपरोक्त उदाहरण के बारे में अब एक संक्षिप्त टिप्पणी को देखें।

टिप्पणी 3: ध्यान दीजिए कि $S_3 = H \cup (1\ 2)H.$

आप इसका सत्यापन भी कर सकते हैं कि $S_3 = H \cup (1\ 3)H = H \cup (2\ 3)H.$

साथ ही, $H \cap (1\ 2)H = \varnothing, H \cap (1\ 3)H = \varnothing,$ इत्यादि।

यदि इन बातों को आप 'विभाजनों' से जोड़ते हैं, जिनके बारे में आपने इकाई 1 में अध्ययन किया था तो आप क्या देखतें हैं?

आइए अब एक अति महत्वपूर्ण समूह, यानी **चतुष्टयी समूह** के सहसमुच्चयों पर दृष्टि डालें।

इकाई 2 के E29 में आप देख चुके हैं कि

$Q_8 = \{I, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\}$. हम

$Q_8 = \{\pm I, \pm A, \pm B, \pm C\}$ भी लिख सकते हैं,

जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ और $i = \sqrt{-1}.$

यहाँ, Q_8 के अवयवों के बीच निम्नलिखित संबंध हैं:

$(-I)^2 = I, A^2 = B^2 = C^2 = -I,$

$AB = C = -BA, BC = A = -CB, CA = B = -AC.$

ध्यान दीजिए कि आव्यूह गुणन के सापेक्ष Q_8 एक अन्आबेली समूह है। Q_8 के बारे में इस सार के साथ, आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5: दर्शाइए कि उपसमूह $H = < A >$ के Q_8 में केवल दो अलग दक्षिण सहसमुच्चय हैं। इसके Q_8 में कितने अलग-अलग वाम सहसमुच्चय हैं, और क्यों?

हलः $H = \langle A \rangle = \{I, A, A^2, A^3\} = \{I, A, -I, -A\}$, क्योंकि $o(A) = 4$.

अतः, ऊपर दिए हुए संबंधों के उपयोग से, $HB = \{B, C, -B, -C\}$.

प्रमेय 1(ii) के उपयोग से, आप देख सकते हैं कि

$H = HI = HA = H(-I) = H(-A)$.

अब, $A^{-1} = A^3 = -A$. इसी प्रकार, $B^{-1} = -B$ और $C^{-1} = -C$. अतः,
$BC^{-1} = -BC = -A \in H$.

अतः, प्रमेय 1(iii) के उपयोग से आप देख सकते हैं कि $HB = HC$.

इसी प्रक्रिया का पालन करते हुए, सत्यापन कीजिए कि $HB = H(-B) = H(-C)$.

अतः, H के Q_8 में केवल दो भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय हैं, जो कि H और HB हैं।

ध्यान दीजिए कि $Q_8 = H \cup HB = H \cup HC$, इत्यादि।

यहाँ, $H \cap HB = \varnothing = H \cap HC$.

इसी प्रकार, आपको सत्यापन करना चाहिए कि Q_8 में H के कोई भी दो अलग दक्षिण सहसमुच्चय असंयुक्त हैं।

उपरोक्त प्रक्रिया जैसी ही प्रक्रिया अपनाते हुए, आपको यह दर्शाना चाहिए कि Q_8 में H के केवल दो भिन्न-भिन्न वाम सहसमुच्चय हैं — H और CH (या BH).

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) S_3 में $H = \{(1, 2)\}$ के सभी वाम और दक्षिण सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए। दर्शाइए कि किसी $x \in S_3$ के लिए, $Hx \neq xH$.

यदि $H \leq G$, तो सभी $g \in G$ के लिए Hg का gH के बराबर होना आवश्यक नहीं है।

E2) सिद्ध कीजिए कि यदि G एक आबेली समूह है और $H \leq G$, तो G में H का प्रत्येक वाम सहसमुच्चय H का एक दक्षिण सहसमुच्चय है, तथा इसका विलोम भी सत्य है।

E3) दर्शाइए कि Q_8 का $K = \{I, -I\}$ एक उपसमूह है। इसके Q_8 में सभी वाम और दक्षिण सहसमुच्चय प्राप्त कीजिए।

E4) i) क्या समूह G के उपसमूह का प्रत्येक सहसमुच्चय G का एक उपसमूह होता है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

ii) सिद्ध कीजिए कि यदि G एक समूह है और $H \leq G$, तो $xH \leq G$ iff $x \in H$.

E5) मान लीजिए कि G एक समूह है और $H \leq G$. दर्शाइए कि $a, b, c \in G$ के लिए, $Ha = Hb$ iff $Hac = Hbc$.

उपरोक्त उदाहरणों में आपने ध्यान दिया होगा कि प्रत्येक समूह को किसी भी उपसमूह के असंयुक्त सहसमुच्चयों के सम्मिलन के रूप में लिखा जा सकता है। यह किसी भी समूह

के किसी भी उपसमूह के लिए सत्य है। इसको देखने के लिए, हम G के अवयवों पर एक तुल्यता संबंध को परिभाषित करते हैं। (यही वह बात है जिसका हमने टिप्पणी 3 में संकेत दिया था!)

प्रमेय 2: मान लीजिए कि H समूह G का एक उपसमूह है। G के अवयवों पर '$x \sim y$ iff $xy^{-1} \in H$' द्वारा परिभाषित संबंध $\sim$ एक तुल्यता संबंध है। इसके तुल्यता वर्ग ही G में H के दक्षिण सहसमुच्चय हैं।

उपपत्तिः हमें यह सिद्ध करना है कि $\sim$ स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

सर्वप्रथम, किसी भी $x \in G$ के लिए, $xx^{-1} = e \in H$. इसलिए, $x \sim x$, अर्थात् $\sim$ स्वतुल्य है।

दूसरे, यदि किन्हीं $x, y \in G$ के लिए $x \sim y$, तो $xy^{-1} \in H$.

$\therefore (xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$. इस प्रकार, $y \sim x$. अर्थात्, $\sim$ सममित है।

अंत में, यदि $x, y, z \in G$ ऐसे हैं कि $x \sim y$ और $y \sim z$, तो $xy^{-1} \in H$ और $yz^{-1} \in H$.

$\therefore (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$. अर्थात् $x(y^{-1}y)z^{-1} = xz^{-1} \in H$.

इसलिए, $x \sim z$, अर्थात् $\sim$ संक्रामक है।

इस प्रकार, $\sim$ एक तुल्यता संबंध है।

$x \in G$ की तुल्यता वर्ग हैः

$[x] = \{y \in G \mid y \sim x\} = \{y \in G \mid yx^{-1} \in H\} = \{y \in G \mid Hx = Hy\}$, प्रमेय 1 द्वारा।

अब, हम दर्शाएँगे कि $[x] = Hx$. अतः, मान लीजिए कि $y \in [x]$. तब $Hy = Hx$.

क्योंकि $y \in Hy$, इसलिए $y \in Hx$. यह किसी भी $y \in [x]$ के लिए सत्य है।

अतः, $[x] \subseteq Hx$. …(5)

अब, Hx के किसी भी अवयव hx को लीजिए। तब, $x(hx)^{-1} = xx^{-1}h^{-1} = h^{-1} \in H$.

अतः, $hx \sim x$, अर्थात् $hx \in [x]$. यह किसी भी $hx \in Hx$ के लिए सत्य है।

इसलिए, $Hx \subseteq [x]$. …(6)

इस प्रकार, (5) और (6) हमें बताते हैं कि $[x] = Hx$.

अतः, प्रत्येक तुल्यता वर्ग G में H का एक दक्षिण सहसमुच्चय है। ■

उपरोक्त प्रमेय 2 तथा इकाई 1 के प्रमेय 9 के उपयोग से, हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करते हैं।

उपप्रमेय 1: मान लीजिए कि G एक समूह है तथा $H \le G$. यदि G में एक उपसमूह H के Hx और Hy दो दक्षिण सहसमुच्चय हैं, तो $Hx = Hy$ या $Hx \cap Hy = \varnothing$.

आगे, समूह G को कोई भी उपसमूह H सूमह G के असंयुक्त दक्षिण सहसमुच्चयों में विभाजित करता है।

उपपत्तिः प्रमेय 2 में दिया संबंध एक तुल्यता संबंध है, जिसके तुल्यता वर्ग Hx हैं $\forall\ x \in G$. प्रमेय 9, इकाई 1 के उपयोग से हम देखते हैं कि यह तुल्यता संबंध G का असंयुक्त प्रकोष्ठों में विभाजन करता है। ध्यान दीजिए कि कोई भी दो प्रकोष्ठ या तो बराबर होते हैं या असंयुक्त हैं। इस प्रकार, दिया हुआ परिणाम प्राप्त हो जाता है। ■

ठीक उपरोक्त प्रक्रिया की तरह, आप सिद्ध कर सकते हैं कि

i) **G में H के कोई भी दो वाम सहसमुच्चय या तो बराबर हैं, या असंयुक्त हैं**, तथा

ii) **समूह G उपसमूह H के सभी भिन्न-भिन्न वाम सहसमुच्चयों का असंयुक्त सम्मिलन है।**

अतः, जैसा कि उदाहरण 4 में आपने देखा,

$S_3 = <(1\ 2\ 3)> \cup (1\ 2)<(1\ 2\ 3)>.$

साथ ही, उदाहरण 5 में आपने देखा कि $Q_8 = <A> \cup B<A>.$

एक अन्य उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 6: समूह $G = \mathbb{Z}_{15}$ और $H = <\overline{3}>$ के लिए उपप्रमेय 1 का सत्यापन कीजिए।

हलः यहाँ $H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\}$.

अब, $H + \overline{1} = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{10}, \overline{13}\}$. इसी प्रकार, $H + \overline{2}, H + \overline{3}, \ldots$ ज्ञात कीजिए।

ध्यान दीजिए कि $H + \overline{x} = H + \overline{y}$ iff $\overline{x} - \overline{y} \in H$, अर्थात् iff $\overline{x - y} \in H$.

साथ ही, विभाजन ऐल्गोरिद्म द्वारा, किसी भी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए $n = 3q + r$, जहाँ $0 \le r < 3$.

अतः, $H + \overline{n} = H + \overline{3q} + \overline{r} = H + \overline{r}$, क्योंकि $\overline{3q} \in H$.

इस प्रकार, G में H के दक्षिण सहसमुच्चय केवल $H, H + \overline{1}$ और $H + \overline{2}$ हैं।

सत्यापन कीजिए कि ये तीनों समुच्चय असंयुक्त हैं तथा $G = H \cup (H + \overline{1}) \cup (H + \overline{2})$.

***

अब, आपको निम्नलिखित प्रश्नों को हल करना चाहिए।

E6) मान लीजिए कि H समूह G का एक उपसमूह है। दर्शाइए कि H के अवयवों तथा H के प्रत्येक दक्षिण या वाम सहसमुच्चय के अवयवों के बीच एक एकैकी संगति है।

(संकेतः दर्शाइए कि फलन $f : H \to Hx : f(h) = hx$ सुपरिभाषित और एकैकी आच्छादक है।

E7) $\mathbb{Z}$ को $5\mathbb{Z}$ के असंयुक्त सहसमुच्चयों के सम्मिलन के रूप में लिखिए।

E8) $\mathbb{Z}_8$ को $<\overline{4}>$ के असंयुक्त सहसमुच्चयों के सम्मिलन के रूप में लिखिए।

E9) समूह G तथा $H \leq G$ के लिए, $Hg_1 = Hg_2$ से $g_1 = g_2$ प्राप्त होता है। यह कथन सत्य है या असत्य? क्यों?

E10) मान लीजिए G एक समूह है और $a \in G$ कोटि 15 का है। $<a>$ में $<a^5>$ के सभी वाम सहसमुच्चयों को ज्ञात कीजिए।

E11) मान लीजिए $H = S^1$ (इकाई 3 के उदाहरण 5 को देखिए)। $\mathbb{C}^*$ में H के सहसमुच्चयों का ज्यामितीय वर्णन दीजिए।

E6 के उपयोग से, आप देख सकते हैं कि यदि H किसी समूह G का एक **परिमित** उपसमूह है, तो **H के प्रत्येक सहसमुच्चय में उतने ही अवयव हैं जितने कि H** में हैं।

सहसमुच्चयों के बारे में एक और रोचक तथ्य भी है। उदाहरण 4 को लीजिए। आप जानते हैं कि S_3 में H के दो भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय हैं, तथा उतने ही वाम सहसमुच्चय हैं। वस्तुतः, किसी भी परिमित समूह G और $H \leq G$ के लिए, G में H के वाम सहसमुच्चयों की संख्या और G में H के दक्षिण सहसमुच्चयों की संख्या बराबर है। आइए देखें क्यों।

प्रमेय 3: मान लीजिए G एक समूह है तथा H, G का एक उपसमूह है।

$f : \{Hx \mid x \in G\} \to \{yH \mid y \in G\} : f(Hx) = x^{-1}H$ द्वारा परिभाषित फलन f एक एकैकी आच्छादक फलन है। इस प्रकार, G में H के भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चयों की संख्या और G में H के भिन्न-भिन्न वाम सहसमुच्चयों की संख्या बराबर है।

उपपत्ति: सर्वप्रथम, हमें इसकी जाँच करनी चाहिए कि f सुपरिभाषित है।

$x, y \in G$ के लिए, $Hx = Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \Leftrightarrow (xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, क्योंकि $H \leq G$.

$\Leftrightarrow (y^{-1})^{-1}x^{-1} \in H$, क्योंकि $(y^{-1})^{-1} = y$.

$\Leftrightarrow x^{-1}H = y^{-1}H$ (टिप्पणी 2 से).

इस प्रकार, f सुपरिभाषित है। वस्तुतः क्योंकि हमने ऊपर सभी तर्कों में दो-तरफा निहितार्थ का इस्तेमाल किया है, इसलिए हमने साथ-साथ दर्शाया है कि f एकैकी है। (कैसे?) अब आप इसकी जाँच कीजिए कि f एकैकी आच्छादक है।

अतः, G में H के दक्षिण सहसमुच्चयों के समुच्चय तथा G में H के वाम सहसमुच्चययों के समुच्चय में एकैकी संगति है। ■

यदि प्रमेय 3 में G में H अनंततः अनेक वाम सहसमुच्चय हैं, तो G में H के अनंततः अनेक दक्षिण सहसमुच्चय होते हैं। यदि G में H के वाम सहसमुच्चयों की संख्या परिमित है, मान लीजिए n, तो G में H के n दक्षिण सहसमुच्चय होते हैं। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा पर पहुँच हैं।

परिभाषा: मान लीजिए H समूह G का एक उपसमूह है। G में H के भिन्न-भिन्न वाम सहसमुच्चयों (या भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चयों) की संख्या G में H का **सूचकांक (index)** कहलाती है, तथा इसे $|\mathbf{G : H}|$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

अतः, उदाहरण 3 हमें बताता है $|\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}| = n$. उदाहरण 4 से आप प्राप्त करते हैं कि $|S_3 : H| = 2$. इसी प्रकार, उदाहरण 5 से आप जानते हैं कि $|Q_8 : < A >| = 2$.

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E12) मान लीजिए $S = \{1, 2, 3\}$ और $T = \{1, 2\}$. दर्शाइए कि $\wp(T) \le \wp(S)$. साथ ही, $|\wp(S) : \wp(T)|$ ज्ञात कीजिए।

E13) किसी भी परिमित समूह G के लिए दर्शाइए कि $|G : \{e\}| = o(G)$.

E14) $|\mathbb{C}^* : S^1|$ ज्ञात कीजिए।

E15) यदि G एक अपरिमित समूह है तथा $H \le G$, तो क्या $|G : H|$ का अपरिमित होना ज़रूरी है? क्यों, या क्यों नहीं?

अभी तक हमने दोनों, परिमित और अपरिमित समूहों के सहसमुच्चयों पर विचार किया है। अब, हम केवल परिमित समूहों पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे। हम अगले भाग में परिमित समूह के उपसमूह के सहसमुच्चयों के संख्या के बारे में एक अति महत्वपूर्ण प्रमेय को सिद्ध करने के लिए प्रमेय 3 का उपयोग करेंगे।

5.3 लग्रांज का प्रमेय

परिमित समूहों के उन उदाहरणों पर विचार कीजिए जिनकी चर्चा पिछले भाग में की गई थी। इन सभी में आप पाएंगे कि $o(G) = o(H)|G : H|$. आप जल्द ही देखेंगे कि यह व्यापक रूप में सत्य क्यों है।

साथ ही, इकाई 4 में आप देख चुके हैं कि यदि G एक परिमित चक्रीय समूह है तथा $H \le G$ तो $o(H) | o(G)$. इस भाग में आप देखेंगे कि यह कथन किसी भी परिमित समूह के लिए सत्य है। यह तथ्य परिमित समूहों के बारे में एक मूल प्रमेय का हिस्सा है। इसका प्रारंभ लंग्राज द्वारा 1770 में लिखे एक शोध पत्र में मिलता है। हालांकि उन्होंने इस परिणाम को केवल क्रमचय समूहों के लिए सिद्ध किया था। कहा जाता है कि व्यापक परिणाम, जिसका हम कथन देकर सिद्ध करेंगे, एवरीस्त गैल्वा (Evariste Galois) द्वारा 1830 में सिद्ध किया गया था, जब उनकी आयु केवल 19 वर्ष थी! परंतु यह अभी भी केवल लग्रांज के नाम पर है। आइए देखें कि यह मूल प्रमेय क्या है।

प्रमेय 4 (लग्रांज): मान लीजिए H परिमित समूह G का एक उपसमूह है। तब, $o(G) = o(H)|G : H|$.

विशेष रूप से, $o(G)$ को $o(H)$ विभाजित करता है, $o(G)$ को $|G : H|$ विभाजित करता है तथा $|G : H| = \frac{o(G)}{o(H)}$.

उपपत्तिः पिछले भाग में आप देख चुके हैं कि हम G को G में H के परिमिततः अनेक असंयुक्त दक्षिण सहसमुच्चयों के सम्मिलन के रूप में लिख सकते हैं। अतः, यदि G में H के सभी भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय $Hx_1, Hx_2, \ldots, Hx_r$ हैं, तो

$$G = Hx_1 \cup Hx_2 \cup \ldots \cup Hx_r \qquad \ldots(7)$$

तथा $|G:H| = r.$

E6 से आप जानते हैं कि $|Hx_1| = |Hx_2| = \cdots = |Hx_r| = o(H).$

इस प्रकार, (7) के दाँए पक्ष में दिए सम्मिलन में अवयवों की कुल संख्या

$o(H) + o(H) + \cdots + o(H)$ (r बार) $= o(H) \cdot r$ है।

अतः, (7) बताता है कि $o(G) = o(H) \cdot r$

$$= o(H)|G:H|.$$

इस प्रकार, $o(H)|o(G)$, तथा $|G:H|\,|\,o(G).$

साथ ही, $|G:H| = \dfrac{o(G)}{o(H)}.$ ■

जैसा कि आप देख सकते हैं, लग्रांज का प्रमेय किसी भी दिए हुए परिमित समूह के उपसमूहों की संभावनाओं को तुरंत सीमित कर देता है। उदाहरणार्थ, कोटि 25 वाले किसी भी परिमित समूह के केवल कोटियों 1, 5 या 25 कोटि वाले उपसमूह हो सकते हैं। इसका कोटि 10 वाला कोई उपसमूह नहीं हो सकता है, उदाहरणार्थ, क्योंकि $10 \nmid 25.$

एक अन्य उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 7: कोटि 30 वाले किसी भी समूह के उपसमूह की संभव कोटियाँ क्या हैं? आगे, संगत वाम सहसमुच्चयों की संख्याएँ क्या होंगी?

हल: मान लीजिए G कोटि 30 वाला कोई समूह है। G का कोई भी उप समूह केवल कोटि $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$ या 30 का हो सकता है।

आगे, G के किसी भी उपसमूह H के सहसमुच्चयों की संख्या $|G:H| = \dfrac{o(G)}{o(H)}.$

इसलिए, कोटियों $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ वाले उपसमूहों के सूचकांक क्रमशः

$\dfrac{30}{1}, \dfrac{30}{2}, \dfrac{30}{3}, \dfrac{30}{5}, \dfrac{30}{6}, \dfrac{30}{10}, \dfrac{30}{15}, \dfrac{30}{30},$ अर्थात् $30, 15, 10, 6, 5, 3, 2$ और 1 होंगे।

***

यहाँ लग्रांज के प्रमेय के बारे में एक महत्वपूर्ण टिप्पणी है।

टिप्पणी 4: ध्यान दीजिए कि लग्रांज के प्रमेय को अपरिमित समूहों के लिए व्यापकीकृत नहीं किया जा सकता है, क्योंकि $o(G)$ को $o(H)$ भाग देने की संकल्पना केवल परिमित समूहों के लिए अर्थपूर्ण है।

परंतु ध्यान दें कि अपरिमित समूह का एक परिमित उपसमूह हो सकता है, तथा अपरिमित समूह के परिमित सूचकांक वाले उपसमूह हो सकते हैं।

उदाहरणार्थ, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ लीजिए, जो एक अपरिमित समूह है। $(\{1, -1\}, \cdot)$ समूह $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ का एक परिमित उपसमूह है।

साथ ही, जैसा कि आप देख चुके हैं, $\mathbb{Z}$ अपरिमित है, परंतु $\mathbb{Z}$ में $n\mathbb{Z}$ का सूचकांक परिमित, अर्थात् n है।

अब, एक उदाहरण पर विचार कीजिए, जिसकी बात हमने इकाई 4 में की थी।

उदाहरण 8: एक ऐसे अचक्रीय समूह का उदाहरण दीजिए, जिसका प्रत्येक उचित उपसमूह चक्रीय है।

हल: इकाई 4 के उदाहरण 6 में दिए, क्लाइन 4-समूह K_4 पर विचार कीजिए। वहाँ आपने देखा था कि K_4 चक्रीय नहीं है। लग्रांज के प्रमेय से, K_4 का कोई भी उचित उपसमूह कोटि 1 या 2 का होगा। कोटि 1 का उपसमूह केवल $\{e\}$ है, तथा यह चक्रीय है।

इसी प्रकार, कोटि 2 वाले उपसमूह केवल $<a>, <b>$ और $<ab>$ हैं।

इस प्रकार, K_4 वाँछित उदाहरण है।

***

अब कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E16) मान लीजिए कि G एक समूह है, $H \lneq G$ है तथा $K \lneq H$. यदि $o(K) = 30$ और $o(G) = 300$, तो H की संभव कोटियाँ क्या हैं? G में H के संगत सूचकांक क्या होंगे?

E17) यदि H और K समूह G के क्रमशः कोटियों 12 और 35 वाले उपसमूह हैं, तों $H \cap K$ ज्ञात कीजिए।

E18) यदि H और K किसी परिमित समूह G के साथ, ऐसे उचित उपसमूह हैं कि, $o(H) \neq o(K)$, तो क्या $H \cap K = \{e\}$ होना आवश्यक है? क्यों, या क्यों नहीं?

E19) निम्नलिखित में से प्रत्येक के अतुच्छ उचित उपसमूह की संभव कोटियाँ ज्ञात कीजिए:

i) S_4, ii) D_{10}, iii) Q_8, iv) $M_{2\times3}(\mathbb{Z}_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

अब तक, आपको लग्रांज के प्रमेय की शक्ति और सुंदरता का कुछ अंदाजा हो गया होगा। आप शायद सोच रहे होंगे कि क्या इसका विलोम सत्य है। इसके बारे में निम्नलिखित टिप्पणी को देखिए। इस प्रकार, प्रश्न है: यदि $m|o(G)|$ है, तो क्या G का कोटि m वाला कोई उपसमूह है?

टिप्पणी 5: लग्रांज के प्रमेय का विलोम: यदि G एक परिमित समूह है और $m|o(G)$, तो G का m काटि वाला एक समूह है।

क्या यह सत्य है? यदि G चक्रीय है, तो प्रमेय 7, इकाई 4 से आप जानते हैं कि यह सत्य है। परंतु यदि G चक्रीय नहीं है, तो लग्रांज के प्रमेय का विलोम सत्य नहीं है। इकाई 9 में आप S_4 के उपसमूह

$A_4 = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3),$

$(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ के बारे में अध्ययन करेंगे। आप देखेंगे कि A_4 का कोटि 6 वाला कोई उपसमूह नहीं है, हालांकि $6 | 12 = o(A_4)$. हम लग्रांज के प्रमेय का अनुप्रयोग करके बहुत से अच्छे परिणाम सिद्ध कर सकते हैं। अगले भाग में हम ऐसे कुछ परिणामों पर दृष्टि डालेंगे।

5.4 कुछ अनुप्रयोग

जैसा कि आप देख चुके हैं, लग्रांज का प्रमेय परिमित समूहों के संभव उपसमूहों को ज्ञात करने के लिए अति उपयोगी है। इस भाग में हम इस प्रमेय के कुछ विशिष्ट अनुप्रयोगों पर दृष्टि डालेंगे।

इकाई 4 में आप देख चुके हैं कि यदि G एक परिमित चक्रीय समूह है, तो प्रत्येक अवयव की कोटि $o(G)$ को विभाजित करती है। अब आप इस इकाई तथा अन्य इकाइयों में दिए गए सभी अचक्रीय परिमित समूहों के उदाहरणों को देखें। आप पाएंगे कि प्रत्येक स्थिति में सभी $g \in G$ के लिए, $o(G)$ को $o(g)$ विभाजित करता है। यह व्यापक रूप में सत्य है, जैसा कि आप अब देखेंगे।

प्रमेय 5: मान लीजिए G एक परिमित समूह है तथा $g \in G$. तब, $o(g) \mid o(G)$.

अतः, $g^{o(G)} = e \; \forall \; g \in G$.

उपपत्ति: क्योंकि $g \in G$, इसलिए $< g > \leq G$.

अतः, $o(< g >) \mid o(G)$, लग्रांज के प्रमेय से।

इस प्रकार, $o(g) \mid o(G)$.

अब, मान लीजिए $g \in G$ तथा $o(g) = n$. तब, किसी $m \in \mathbb{N}$ के लिए, $o(G) = nm$.

अतः, $g^{o(G)} = g^m = (g^n)^m$
$= e$

प्रमेय 5 द्वारा हम जानते हैं कि, उदाहरणार्थ, $G = \mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{Z}_7)$ में किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, कोटि 5^n वाला अवयव नहीं हो सकता है, क्योंकि $o(G) = 6^7$.

आगे, आइए अभाज्य कोटि वाले समूहों के लिए प्रमेय 5 के एक निष्कर्ष का देखें। आप पाएंगे कि ऐसे समूहों का चक्रीय होना ज़रूरी है, तथा इसीलिए ये आबेली होते हैं।

प्रमेय 6: मान लीजिए G अभाज्य कोटि वाला का एक समूह है। तब, G का कोई उचित अतुच्छ उपसमूह नहीं है। आगे, G चक्रीय है।

उपपत्ति: मान लीजिए G अभाज्य कोटि p वाला एक समूह है। मान लीजिए $H \leq G$ और $H \neq \{e\}$. तब, $o(H) \mid o(G)$. अर्थात् $o(H) \mid p$.

$\because oH = 1$ या p. परंतु, $H \neq \{e\}$ है।

अतः, $o(H) = p = o(G)$.

इस प्रकार, $H = G$.

आगे, क्योंकि $p \neq 1$, इसलिए $\exists \; a \in G$ s.t. $a \neq e$.

इसलिए, $< a > \leq G$ s.t. $< a > \neq \{e\}$.

अतः, $< a > = G$, अर्थात् G चक्रीय है। ■

आइए प्रमेय 6 की उपयोगिता के एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 9: जाँच कीजिए कि कोटि 35 वाले किसी समूह G के सभी उचित उपसमूह चक्रीय हैं या नहीं।

हलः लग्रांज के प्रमेय से, G का कोई भी उपसमूह कोटि $1, 5$ या 7 का होगा। क्योंकि $\{e\} = <e>$, तथा 5 और 7 अभाज्य संख्याएँ हैं, इसलिए प्रमेय 6 द्वारा G के सभी उपसमूह चक्रीय हैं।

***

अब, भाज्य कोटि वाले समूहों के बारे में क्या कहा जा सकता है? क्या हम उदाहरण 9 में देखे गए गुण को व्यापकीकृत कर सकते हैं? यदि हाँ, तो किस हद तक? आइए देखें।

प्रमेय 7: यदि G एक ऐसा परिमित समूह है कि $o(G)$ न तो 1 है और न ही अभाज्य है, तो G का एक अतुच्छ उचित उपसमूह होता है।

उपपत्तिः यदि G चक्रीय नहीं है, तो कोई भी $a \in G, a \neq e$, एक उचित अतुच्छ उपसमूह $<a>$ जनित करता है, और प्रमेय इस स्थिति में सिद्ध हो जाता है।

अब मान लीजिए G चक्रीय है, और $G = <x>$, जहाँ $o(x) = mn(m, n \neq 1)$.

तब, इकाई 4 से आप जानते हैं कि $o(x^m) = \dfrac{mn}{(mn, m)} = n.$

साथ ही, $n < o(G)$.

इस प्रकार, $<x^m>$, G का एक उचित अतुच्छ उपसमूह है। ■

अब, आपको निम्नलिखित प्रश्नों को हल करना चाहिए।

E20) कोटि 28 वाले अचक्रीय समूह के एक अतुच्छ अवयव की संभव कोटियाँ दीजिए।

E21) D_8 के दो अतुच्छ उचित उपसमूह प्राप्त कीजिए।

E22) प्रमेय 6 के विलोम का कथन दीजिए। इसे सिद्ध या असिद्ध, कीजिए।

E23) मान लीजिए G कोटि n वाला एक परिमित समूह है। मान लीजिए $H \lneq G, H \neq \{e\}$. क्या n का भाज्य होना जरूरी है? क्यों, या क्यों नहीं?

E24) क्या हम उदाहरण 9 से यह व्यापकीकृत कर सकते हैं कि यदि $o(G)$ भाज्य है, तो G के प्रत्येक उचित उपसमूह को चक्रीय होना चाहिए? अपने उत्तर के कारण दीजिए।

अब हम कुछ महत्वपूर्ण संख्या सैद्धांतिक परिणामों को सिद्ध करेंगे, जो लग्रांज के प्रमेय से निकलते हैं। पहले तो आइए एक ऐसे परिणाम को सिद्ध करें जिससे हमें प्रत्येक $n \geq 2$ के लिए, $\mathbb{Z}_n^*$ के उपसमूहों के उदाहरण मिल जाते हैं।

प्रमेय 8: मान लीजिए $G = \{\overline{r} \in \mathbb{Z}_n \mid (r, n) = 1\}$, जहाँ $n \geq 2$, तथा r और n का g.c.d, (r, n) है। तब, $(G, \cdot)$ एक समूह है, जहाँ $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{rs} \ \forall \ \overline{r}, \overline{s} \in \mathbb{Z}_n^*$.

आगे, $o(G) = \phi(n)$, जहाँ ϕ ऑयलर फ़ाइ-फलन है (देखिए भाग 4.3, इकाई 4)।

उपपत्तिः आइए पहले इसकी जाँच करें कि G गुणन के सापेक्ष संवृत है।

$\overline{r}, \overline{s} \in G$ के लिए, $(r, n) = 1$ और $(s, n) = 1$. अतः, $(rs, n) = 1$. इस प्रकार, $\overline{rs} \in G$.

इसलिए, G पर $\cdot$ एक द्वि-आधारी संक्रिया है।

इकाई 1 से आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}_n$ में गुणन साहचर्य है। अतः यह G में भी साहचर्य है।

आगे, $\overline{1} \in G$, है और यह ही गुणनात्मक तत्समक है।

अंत में, किसी भी $\overline{r} \in G$ के लिए,

$(r, n) = 1.$

$\Rightarrow ar + bn = 1$, किसी $a, b \in \mathbb{Z}$ के लिए (इकाई 1 के प्रमेय 5 द्वारा)।

$\Rightarrow n \mid (ar - 1) \Rightarrow ar \equiv 1 (\bmod n)$

$\Rightarrow \overline{a}\,\overline{r} = \overline{1}$, $\mathbb{Z}n$ में।

$\Rightarrow \overline{a} = \overline{r}^{-1}.$

आगे, $\overline{a} \in G$, क्योंकि यदि $(a, n) = d$, तो $d \mid (ar + bn)$, अर्थात् $d \mid 1$, जिससे कि $d = 1.$

इस प्रकार, G में प्रत्येक अवयव का एक गुणनात्मक प्रतिलोम है।

अतः, $(G, \cdot)$ एक समूह है।

क्योंकि G उन सभी $\overline{r} \in \mathbb{Z}_n$ का समुच्चय है जिनके लिए $r < n$ और $(r, n) = 1$, इसलिए $o(G) = \phi(n).$

उपरोक्त प्रमेय में, G, $\mathbb{Z}_n$ के उन अवयवों का समूह है जिनके गुणनात्मक प्रतिलोम हैं। खंड 3 में आप देखेंगे कि इसे $\mathbb{Z}_n$ का मात्रक समूह कहते हैं, तथा इसे $U(\mathbb{Z}_n)$ से व्यक्त करते हैं।

अब आइए देखें कि प्रमेय 8 और लग्रांज के प्रमेय को साथ ले कर हमें क्या मिल सकता है। निम्नलिखित परिणाम पर विचार कीजिए, जिसका श्रेय गणितज्ञों लियोनार्ड ऑयलर (Leonhard Euler) और पियेर फ़र्मा (Pierre Fermat) को दिया जाता है। बड़ी संख्याओं के साथ कार्य करने में यह बहुत उपयोगी है। यह प्रमेय फ़र्मा के छोटे प्रमेय (देखिए E26) का व्यापकीकरण है। इसे लियोनार्ड ऑयलर ने सिद्ध किया था।

प्रमेय 9 (ऑयलर–फ़र्मा): मान लीजिए $a \in \mathbb{N}$ और $n \geq 2$ ऐसे हैं $(a, n) = 1.$

तब, $a^{\phi(n)} \equiv 1 (\bmod n).$

आकृति 2: पियेर द फ़र्मा (1601-1665) एक अति महत्वपूर्ण फ्राँसीसी गणितज्ञ थे।

उपपत्ति: क्योंकि $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ और $(a, n) = 1$, इसलिए $\overline{a} \in G$ (प्रमेय 8 का)।

क्योंकि $o(G) = \phi(n)$, इसलिए प्रमेय 5 से हम देखते हैं कि $\overline{a}^{\phi(n)} = \overline{1}.$

इस प्रकार, $a^{\phi(n)} \equiv 1 (\bmod n).$ ■

अब प्रमेय 9 के अनुप्रयोग का एक उदाहरण देखिए।

उदाहरण 10: 6^{41} को 55 से भाग दिए जाने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए। इस तथ्य का उपयोग कीजिए कि यदि $(m, n) = 1$, तो $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$,।

हल: हम $a = 6$ और $n = 55$ के लिए प्रमेय को लागू कर सकते हैं, क्योंकि $(6, 55) = 1.$

अतः, $6^{\phi(55)} \equiv 1 (\bmod 55).$

अब, आप जानते हैं कि $(5, 11) = 1.$ इसलिए, $\phi(55) = \phi(5)\phi(11).$

साथ ही, इकाई 4 से आप जानते हैं कि $\phi(5)=4$ और $\phi(11)=10$. अतः, $\phi(55)=40$.

इस प्रकार, $6^{40} \equiv 1 (\bmod 55)$. अतः, $6^{41} = 6^{40} \cdot 6 \equiv 6 (\bmod 55)$.

अतः, 6^{41} को 55 से भाग देने पर प्राप्त शेषफल 6 है।

***

अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने के लिए प्रमेय 9 का उपयोग कर सकते हैं।

E25) 3^{47} को 23 से भाग देने पर शेषफल क्या होगा?

E26) मान लीजिए $a \in \mathbb{N}$ तथा p एक अभाज्य संख्या है। दर्शाइए कि $a^p \equiv a (\bmod p)$. (इस परिणाम को **फ़र्मा का छोटा प्रमेय (Fermat's little theorem)** कहा जाता है।)

[संकेतः इकाई 4 से ऑयलर फ़ाइ-फलन के गुणों को याद कीजिए।]

अब, आइए लग्रांज के प्रमेय के एक अन्य महत्वपूर्ण अनुप्रयोग को देखें। इसे हम समुच्चय X के क्रमचयों $S(X)$ (इकाई 2 को देखिए) पर लागू करेंगे। परंतु पहले हम कुछ संबंधित संकल्पनाओं से आपका परिचय कराएं।

परिभाषाएँ: मान लीजिए $G \le (S(X), \circ)$. प्रत्येक $x \in X$ के लिए,

1) G में x का **स्थिरक (stabiliser)** समुच्चय

$\text{Stab}_G(x) = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x\}$ है, अर्थात् X के उन सभी क्रमचयों का समुच्चय है जो x को नियत करते हैं।

2) G के अधीन **x की कक्षा (orbit)** समुच्चय $\textbf{Orb}_G\textbf{(x)} = \{\sigma(x) \mid \sigma \in G\}$ है।

इन वस्तुओं के बारे में कुछ महत्वपूर्ण टिप्पणियों पर ग़ौर कीजिए।

टिप्पणी 6:

i) ध्यान दीजिए कि $\text{Stab}_G(x) \subseteq G$ तथा $\text{Orb}_G(x) \subseteq X$.

ii) हम G का उपयोग करते हुए X के अवयवों पर एक ऐसा तुल्यता संबंध परिभाषित कर सकते हैं जिसमें $x \in X$ का तुल्यता वर्ग $\text{Orb}_G x$ है। अतः, X अपने सभी अवयवों x की कक्षाओं का एक असंयुक्त सम्मिलन है।

इन बीजीय वस्तुओं को बेहतर समझने के लिए, आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

यदि G के बारे में कोई भ्रम नहीं हो, तो हम प्रायः $\text{Stab}_G(x)$ के स्थान पर $\text{Stab}(x)$, तथा $\text{Orb}_G(x)$ के स्थान पर $\text{Orb}(x)$ लिखते हैं।

उदाहरण 11: मान लीजिए कि $X = \{1, 2, 3\}$, तथा $G = S_3 = \{I, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

$\text{Stab}_G(1)$ और $\text{Stab}_G(2)$, तथा $\text{Orb}_G(1)$ और $\text{Orb}_G(2)$, ज्ञात कीजिए।

हल: $\text{Stab}_G(1) = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma(1) = 1\} = \{I, (2\ 3)\}$, तथा

$\text{Stab}_G(2) = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma(2) = 2\} = \{I, (1\ 3)\}$.

$\text{Orb}_G(1) = \{\sigma(1) \mid \sigma \in S_3\} = \{1, 2, 3\} = X$, क्योंकि $I(1) = 1$; $(1\ 2)$, 1 को 2 में ले जाता है; और $(1\ 3)$, 1 को 3 में ले जाता है।

इसी प्रकार, $\text{Orb}_G(2) = \{\sigma(2) \mid \sigma \in S_3\} = \{2, 1, 3\} = X$.

यहाँ ध्यान दीजिए कि $o(G) = 6 = |\text{Stab}(1)|\,|\text{Orb}(1)|$, और

$O(G) = |\text{Stab}(2)|\,|\text{Orb}(2)|$ है।

***

उपरोक्त उदाहरण में जो आपने $o(G)$, $|\text{Stab}_G(x)|$ और $|\text{Orb}_G(x)|$ के बीच संबंध देखा है, वह किसी भी परिमित समूह G के लिए सत्य है, जैसा कि अब हम दिखाने जा रहे हैं। यह लग्रांज के प्रमेय का एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है, जैसा कि हमने पहले बताया था। परंतु, पहले एक प्रमेयिका पर विचार कीजिए।

प्रमेयिका 1: मान लीजिए X एक अरिक्त समुच्चय है तथा $G \le S(X)$. तब,

$\text{Stab}_G(x) \le G \;\forall\; x \in X$.

उपपत्ति: क्योंकि $I(x) = x$, इसलिए $I \in \text{Stab}_G(x)$. अतः $\text{Stab}(x) \ne \varnothing$.

आगे, यदि $\alpha, \beta \in \text{Stab}_G(x)$, तो $\alpha\beta^{-1}(x) = x$, जिससे कि $\alpha\beta^{-1} \in \text{Stab}_G(x)$.

इस प्रकार, उपसमूह परीक्षण से, $\text{Stab}_G(x) \le G \;\forall\; x \in X$. ■

अब आइए जिस प्रमेय की बात पहले कर रहे थे, उसे सिद्ध करें।

प्रमेय 10 (कक्षा-स्थिरक प्रमेय): मान लीजिए X एक अरिक्त समुच्चय है तथा G, $S(X)$ का एक परिमित उपसमूह है। तब, किसी भी $x \in X$ के लिए,

$o(G) = |\text{Orb}_G(x)|\; o(\text{Stab}_G(x))$.

उपपत्ति: मान लीजिए $x \in X$ तथा $H = \text{Stab}_G(x)$. तब, $H \le G$, प्रमेयिका 1 से।

$f : \{\sigma H \mid \sigma \in G\} \to \text{Orb}_G(x) : f(\sigma H) = \sigma(x)$ परिभाषित कीजिए।

आइए जाँच करें कि f सुपरिभाषित है तथा 1-1 है या नहीं।

$\sigma, \phi \in G$ के लिए, $\sigma H = \phi H \Leftrightarrow \phi^{-1}\sigma \in H \Leftrightarrow \phi^{-1}\sigma(x) = x \Leftrightarrow \sigma(x) = \phi(x)$. ध्यान दीजिए कि प्रत्येक चरण पर हमने दो-तरफा निहितार्थ (यदि और केवल यदि) का उपयोग किया है। अतः, हमने दो बातों को सिद्ध कर लिया है – एक कि f सुपरिभाषित है, तथा दो f, 1-1 है।

आगे, f आच्छादक है, क्योंकि किसी भी $\sigma(x) \in \text{Orb}_G(x)$ के लिए, G में सहसमुच्चय σH है जिसके लिए $f(\sigma H) = \sigma(x)$.

अतः, G में $\text{Stab}_G(x)$ के (वाम) सहसमुच्चयों के समुच्चय तथा $\text{Orb}_G(x)$ के बीच f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

अतः, $|G : \text{Stab}_G(x)| = |\text{Orb}_G(x)|$.

इस प्रकार, लग्रांज के प्रमेय द्वारा, $o(G) = o(\text{Stab}_G(x))\,|\text{Orb}_G(x)|$. ■

अब एक संबंधित प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए।

E27) मान लीजिए $G = V_4 = \{I, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3)(2\ 4)\} \le S_4$.
$X = \{1, 2, 3, 4\}$ में $x = 1, 3$ के लिए, कक्षा-स्थिरक प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

इसके साथ हम सहसमुच्चयों तथा लग्रांज के प्रमेय पर केन्द्रित चर्चा को समाप्त करते हैं। आइए इसका सारांश दें कि इस इकाई में आपने क्या अध्ययन किया है।

5.5 सारांश

इस इकाई में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं के बारे में अध्ययन किया है।

1. समूह के उपसमूह के दक्षिण और वाम सहसमुच्चयों की परिभाषा, तथा उनके उदाहरण।
2. उपसमूह के किन्हीं दो वाम (या दक्षिण) सहसमुच्चय असंयुक्त होते हैं या एकदम बराबर होते हैं।
3. कोई भी उपसमूह एक समूह को उस उपसमूह के वाम (या दक्षिण) असंयुक्त सहसमुच्चयों में विभाजित करता है।
4. लग्रांज के प्रमेय की उपपत्ति। प्रमेय कहता है कि यदि H एक परिमित समूह G का एक उपसमूह है, तो $o(G) = o(H)|G : H|$.
   परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है। अर्थात्, यदि G एक परिमित समूह है और $m \mid o(G)$, तो यह आवश्यक नहीं है कि G का कोटि m वाला कोई उपसमूह हो।
5. लग्रांज के प्रमेय के निम्नलिखित परिणाम:
   i) परिमित समूह G के उपसमूह H की कोटि तथा G में H का सूचकांक, दोनों ही G की कोटि को विभाजित करते हैं।
   ii) परिमित समूह के किसी भी अवयव की कोटि उस समूह की कोटि को विभाजित करती है।
   iii) अभाज्य कोटि वाला प्रत्येक समूह चक्रीय होता है।
   iv) अभाज्य कोटि वाले समूह का कोई उचित अतुच्छ उपसमूह नहीं होता है।
   v) भाज्य कोटि वाला प्रत्येक समूह का एक अतुच्छ उचित उपसमूह होता है।
   vi) **ऑयलर-फ़र्मा प्रमेय:** $a^{\phi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$, जहाँ $a, n \in \mathbb{N}, (a, n) = 1$ और $n \ge 2$, है तथा ϕ ऑयलर फ़ाइ-फलन है।
   vii) **कक्षा-स्थिरक प्रमेय:** मान लीजिए X एक अरिक्त समुच्चय है तथा $S(X)$ का G एक परिमित उपसमूह है। तब, किसी भी $x \in X$ के लिए,
   $o(G) = |Orb_G(x)|\ o(Stab_G(x)).$

5.6 हल/उत्तर

E1) $H = \{I, (1\ 2)\}$.

इसके वाम सहसमुच्चय $H, (1\ 2)H, (1\ 3)H, (2\ 3)H, (1\ 2\ 3)H, (1\ 3\ 2)H$ हैं।

अब, $(1\ 2)H = H$, क्योंकि $(1\ 2) \in H$.

साथ ही, प्रमेय 1 के उपयोग से, $(1\ 2\ 3)H = (1\ 3)H$ और $(1\ 3\ 2)H = (2\ 3)H$, क्योंकि $(1\ 3)^{-1}(1\ 2\ 3) \in H$ तथा $(2\ 3)^{-1}(1\ 3\ 2) \in H$.

इस प्रकार, S_3 में H के भिन्न-भिन्न वाम सहसमुच्चय $H, (1\ 3)H$ और $(2\ 3)H$ हैं।

इसी प्रकार, सत्यापन कीजिए के S_3 में H के भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय $H, H(1\ 3)$ और $H(2\ 3)$ हैं।

अब, $(1\ 3)H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$ तथा $H(1\ 3) = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

$\therefore (1\ 3)H \neq H(1\ 3)$.

आप यह भी देख सकते हैं कि $(2\ 3)H \neq H(2\ 3)$.

E2) $(G, +)$ में H के एक वाम सहसमुच्चय पर विचार कीजिए।

$x + H = \{x + h \mid h \in H\}$

$= \{h + x \mid h \in H\}$, क्योंकि $x + h = h + x \ \forall\ h \in H$.

$= H + x$, जो G में H का एक दक्षिण सहसमुच्चय है।

इसी प्रकार, आप सिद्ध कर सकते हैं कि प्रत्येक दक्षिण सहसमुच्चय एक वाम समुच्चय है।

E3) क्योंकि $ab^{-1} \in K \ \forall\ a, b \in K$, इसलिए $K \le Q_8$, इकाई 3 के प्रमेय 2 को लागू करके।

अब, $K = KI = K(-I)$. साथ ही, $KA = K(-A) = \{A, -A\}$, क्योंकि $A(-A)^{-1} = -I \in K$.

इसी प्रकार, $KB = K(-B) = \{B, -B\}$, और $KC = K(-C) = \{C, -C\}$.

इसलिए, इसके दक्षिण सहसमुच्चय K, KA, KB, KC हैं। इसी प्रकार, आपको सत्यापित करना चाहिए कि इसके वाम सहसमुच्चय K, AK, BK, CK हैं।

E4) i) नहीं, टिप्पणी 1 को पढ़िए।

ii) $xH \le G \Rightarrow e \in xH \Rightarrow e = xh$, किसी $h \in H$ के लिए
$\Rightarrow x = h^{-1} \in H$. विलोमतः, प्रमेय 1 द्वारा, $xH = H \le G$.

E5) $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow (ac)(bc)^{-1} \in H \Leftrightarrow Hac = Hbc$.

E6) मान लीजिए Hx, G में H का एक सहसमुच्चय है।

फलन $f : H \to Hx : f(h) = hx$ पर विचार कीजिए।

जाँच कीजिए कि f सुपरिभाषित है।

अब, $h, h' \in H$ के लिए, $hx = h'x \Rightarrow h = h'$, निरसन द्वारा।

अतः, f एकैकी है।

साथ ही, f आच्छादक है। (क्यों?)

इस प्रकार, f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

तथा इसीलिए, H के और Hx के अवयवों के बीच एक एकैकी संगतिता है।

इसी प्रकार, फलन $g: H \to xH : g(h) = xh$ एक एकैकी आच्छादक फलन है।

इस प्रकार, H और xH के अवयव एकैकी संगति में हैं

E7) $\mathbb{Z}$ में $5\mathbb{Z}$ के भिन्न-भिन्न सहसमुच्चय $5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}+1, 5\mathbb{Z}+2, 5\mathbb{Z}+3, 5\mathbb{Z}+4$ हैं।

अब, कोई भी $m \in \mathbb{Z}$ दिया रहने पर, $\exists\, q, r \in \mathbb{Z}$ s.t. $m = 5q + r,\ 0 \le r < 4$.

क्योंकि $5q \in 5\mathbb{Z}$, इसलिए किसी $r = 0, 1, \ldots, 4$ के लिए $m \in (5\mathbb{Z} + r)$.

$\therefore \mathbb{Z} = 5\mathbb{Z} \cup (5\mathbb{Z}+1) \cup (5\mathbb{Z}+2) \cup (5\mathbb{Z}+3) \cup (5\mathbb{Z}+4).$

E8) उदाहरण 6 की ही तरह, आपको दर्शाना चाहिए कि $\mathbb{Z}_8$ में $<\overline{4}>$ के भिन्न-भिन्न सहसमुच्चय $<\overline{4}>, <\overline{4}>+\overline{1}, <\overline{4}>+\overline{2}, <\overline{4}>+\overline{3}$ हैं। साथ ही, सत्यपित कीजिए कि $\mathbb{Z}_8$ इन असंयुक्त उपसमुच्चयों का सम्मिलन है।

E9) असत्य। उदाहरणार्थ, E8 में $<\overline{4}>+\overline{1} = <\overline{4}>+\overline{5}$, परंतु $\mathbb{Z}_8$ में $\overline{1} \neq \overline{5}$.

E10) क्योंकि $o(a) = 15$, इसलिए, $o(a^5) = 3$.

मान लीजिए $H = <a^5> = \{e, a^5, a^{10}\}$.

तब, $aH = \{a, a^6, a^{11}\}$, $a^2H = \{a^2, a^7, a^{12}\}$, $a^3H = \{a^3, a^8, a^{13}\}$ और $a^4H = \{a^4, a^9, a^{14}\}$.

क्योंकि $<a>$ सहसमुच्चयों $H, aH, \ldots, a^4H$ का सम्मिलन है, इसलिए ये ही $<a>$ में H के सभी वाम सहसमुच्चय हैं।

E11) $S = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$.

क्योंकि $\mathbb{C}^*$ आबेली है, इसलिए प्रत्येक वाम सहसमुच्चय एक दक्षिण सहसमुच्चय है।

कोई भी सहसमुच्चय S^1w है, जहाँ $w \in \mathbb{C}^*$.

$S^1w = \{zw \mid z \in S^1\} = \{zw \,\big|\, |z| = 1\} = \{\alpha \in \mathbb{C}^* \,\big|\, |\alpha| = |w|\}$.

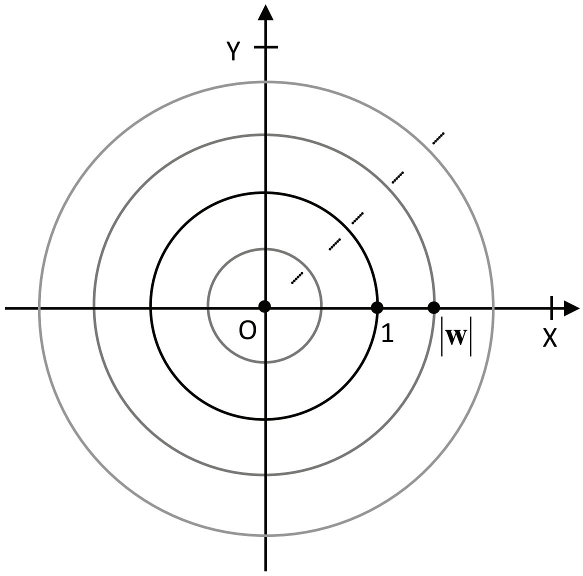
इसका कारण यह है कि कोई भी $\alpha \in \mathbb{C}$ s.t. $|\alpha| = |w|$ को $\alpha = \alpha w^{-1} w$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(क्योंकि $w \neq 0$ है), और $\left|\alpha w^{-1}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|w|} = 1$. अतः, $\alpha w^{-1} \in S^1$.

इसलिए, S^1w का ज्यामितीय निरूपण समतल में केन्द्र $(0, 0)$ और त्रिज्या $|w|$ वाला वृत्त है। आकृति 3 को देखिए। इसमें दिए गए अनंततः अनेक संकेन्द्री (concentric) वृत्तों में से प्रत्येक $\mathbb{C}^*$ में S^1 का एक अलग सहसमुच्चय निरूपित करता है।

आकृति 3: $\mathbb{C}^*$ में S^1 के अंनततः अनेक सहसमुच्चयों का ज्यामितीय निरूपण, जहाँ प्रत्येक वृत्त एक सहसमुच्चय को दर्शाता है।

E12) क्योंकि T का कोई भी उपसमुच्चय S का एक उपसमुच्चय है, इसलिए $\wp(T) \subseteq \wp(S)$. साथ ही, आप इकाई 2 में देख चुके हैं कि ये दोनों एक ही संक्रिया



Δ के सापेक्ष समूह हैं।

अतः, $\wp(T) \leq \wp(S)$. अबः, मान लीजिए $H = \wp(T)$. तब,

$H = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

अतः, $H\{3\} = \{\varnothing \Delta\{3\}, \{1\}\Delta\{3\}, \{2\}\Delta\{3\}, \{1, 2\}\Delta\{3\}\}$

$= \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ है।

अब, जाँच कीजिए कि $H \cup H\{3\} = \wp(S)$.

अतः, $|\wp(S) : \wp(T)| = 2.$

E13) G में $\{e\}$ के दक्षिण सहसमुच्चय $\{e\}g = \{g\}, \forall\ g \in G$, हैं।

अतः, सभी दक्षिण सहसमुच्चयों की संख्या $o(G)$ है।

इस प्रकार, $|G : \{e\}| = o(G)$.

E14) E11 में आप दर्शा चुके हैं कि $\mathbb{C}^*$ में S^1 के अनंततः अनेक सहसमुच्चय हैं। अतः, $|\mathbb{C}^* : S^1|$ अपरिमित है।

E15) नहीं। उदाहरणार्थ, $\mathbb{Z}$ अपरिमित है, परंतु $|\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n$, जो परिमित है।

E16) क्योंकि $K \lneq H$, $o(K) | o(H)$ तथा $o(K) \neq o(H)$.

क्योंकि $H \lneq G$, $o(H) | o(G)$ तथा $o(H) \neq o(G)$.

साथ ही, $o(K) = 30$ और $o(G) = 300$.

इस प्रकार, $o(H)$, 300 का ऐसा गुणनखंड है जो 30 का गुणज है। यह गुणज 30 से अधिक है और 300 से कम है। अतः, यह 60 या 150 ही हो सकता है।

संगत सूचकांक $\frac{o(G)}{o(H)}$ होगा, अर्थात् क्रमशः $\frac{300}{60}$ या $\frac{300}{150}$, अर्थात् क्रमशः 5 या 2 होगा।

E17) क्योंकि $H \cap K \leq H$ तथा $H \cap K \leq K$, इसलिए $o(H \cap K)$, 12 और 35 का एक गुणनखंड है। परंतु $(12, 35) = 1$. इसलिए, $o(H \cap K) = 1$. अतः,

$H \cap K = \{e\}$.

E18) नहीं। उदाहरणार्थ, S_4 में $H = <(1\ 2\ 3\ 4)>$ और $K = <(1\ 3)(2\ 4)>$ लीजिए।

तब, $H \cap K = K \neq \{e\}$, क्योंकि $(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)^2$.

E19) i) $o(S_4) = 24$. अतः, संभव कोटियाँ $2, 3, 4, 6, 8, 12$ हैं।

ii) $o(D_{10}) = 10$. अतः, संभव कोटियाँ 2 और 5 हैं।

iii) $o(Q_8) = 8$. अतः, संभव कोटियाँ 2 और 4 हैं।

iv) $o(\mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{Z}_n)) = 6^n$. अतः, संभव कोटियाँ 1 और 6^n को छोड़ कर, 6^n का कोई भी गुणनखंड हो सकता है।

E20) $o(G) = 28 = 2^2 \times 7$.

अतः, किसी भी $g \in G$ के लिए, जहाँ $g \neq e$, $o(g) = 2, 4, 7, 14$. ध्यान दीजिए कि किसी भी $g \in G$ की कोटि 28 नहीं है, क्योंकि G चक्रीय नहीं है।

E21) $D_8 = \{I, R, R^2, R^3, r, rR, rR^2, rR^3\}$.

यहाँ $o(R) = 4, o(r) = 2$. अतः $< R >$ और $< r >$ D_8 के दो अतुच्छ उचित उपसमूह हैं।

E22) विलोम हैः यदि G एक परिमित चक्रीय समूह है, तो G अभाज्य कोटि का है। यह असत्य है, क्योंकि हमारे पास अनंततः अनेक प्रतिउदाहरण हैं। $\mathbb{Z}_n$ सभी भाज्य $n \in \mathbb{N}$ के लिए।

E23) हाँ। क्योंकि यदि n अभाज्य है, तब, प्रमेय 6 द्वारा H का अस्तित्व ही नहीं है।

E24) नहीं। उदाहरणार्थ, S_4 और $V_4 = \{I, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ पर विचार कीजिए।

तब, $V_4 \leq S_4$, और V_4 चक्रीय नहीं है क्योंकि इसके प्रत्येक अतुच्छ अवयव की कोटि 2 है।

E25) आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}_{23}$ में $(\overline{3})^{\phi(23)} = \overline{1}$.

साथ ही, इकाई 4 से आप जानते हैं कि $\phi(23) = 22$, क्योंकि 23 एक अभाज्य संख्या है।

अतः, $\overline{3}^{22} = \overline{1}$. $\therefore \overline{3}^{44} = \overline{1}$.

$\therefore \overline{3}^{47} = \overline{3}^3\ \overline{3}^{44} = \overline{3}^3 = \overline{27}$.

इस प्रकार, $3^{47} \equiv 27 \pmod{23} \equiv 4 \pmod{23}$.

इसलिए 3^{47} को 23 से भाग देने पर प्राप्त शेषफल 4 है।

E26) यदि $(a, p) = 1$, अर्थात् $p \nmid a$, तो $a^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod p$.

क्योंकि $\phi(p) = p - 1$, इसलिए $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, अर्थात् $a^p \equiv a \pmod p$.

यदि $p \mid a$, तो $a \equiv 0 \pmod p$ और इसलिए $a^p \equiv 0 \pmod p$.

अतः इस स्थिति में भी $a^p \equiv a \pmod p$.

E27) $\text{Stab}(1) = \{I\}$, क्योंकि I के अलावा प्रत्येक $\sigma \in G$, 1 को हिलाता है।

इसी प्रकार, $\text{Stab}(3) = \{I\}$.

अब, $\text{Orb}(1) = \{1, 2, 3, 4\} = \text{Orb}(2)$.

अतः, $o(\text{Stab}(1))\,|\text{Orb}(1)| = 1 \times 4 = 4 = o(G)$ तथा

$o(\text{Stab}(2))\,|\text{Orb}(2)| = 1 \times 4 = 4 = o(G)$ है।

इस प्रकार, इन स्थितियों के लिए, प्रमेय 10 का सत्यापन हो गया है।

इकाई 6

प्रसामान्य उपसमूह

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

6.1 प्रस्तावना

उद्देश्य

6.2 प्रसामान्य उपसमूह क्या होता है?

6.3 प्रसामान्य उपसमूहों के लिए निकष

6.4 प्रसामान्य उपसमूहों के गुण

6.5 सारांश

6.6 हल/उत्तर

6.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपने उपसमूह के सहसमुच्चयों के बारे में अध्ययन किया था। इस इकाई में, हम उन उपसमूहों H पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे, जिनका प्रत्येक वाम सहसमुच्चय xH कोई दक्षिण सहसमच्चुय Hy होता है। ऐसे उपसमूहों का परिचय महान फ़्राँसीसी गणितज्ञ एवारीस्त गैलोआ ने की थी, जिनकी मृत्यु युवा अवस्था में ही हो गई थी। ये उपसमूह 'प्रसामान्य' उपसमूह कहलाते हैं।

भाग 6.2 में आप सीखेंगे कि एक प्रसामान्य उपसमूह क्या होता है। आप ऐसे उपसमूहों के अनेक उदाहरणों को भी देखेंगे।

vkdfr 1½ x¦ykvk
¼1811-1832½

क्या प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह होता है? कोई कैसे निश्चित करे कि एक उपसमूह प्रसामान्य है या नहीं? इन प्रश्नों पर भाग 6.3 में चर्चा होगी।

यदि किसी समूह का उपसमूह प्रसामान्य है, तो क्या इससे वह उपसमूह ज़्यादा 'बल' प्राप्त कर लेता है? क्या प्रसामान्य उपसमूह के कोई उपयोगी गुण हैं? इन प्रश्नों के उत्तरों की चर्चा भाग 6.4 में की जाएगी।

जैसा कि हम पिछली इकाइयों में बता चुके हैं, यह जरूरी है कि आप इस इकाई को सावधानीपूर्वक अध्ययन करें। केवल तभी आप निम्नलिखित सीखने के उद्देश्यों को प्राप्त कर पाएँगे, जिनको ध्यान में रख कर यह इकाई बनी है।

उद्देश्य

इस इकाई की पढ़ाई करने के बाद, आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो जाएँगेः

- समूह के प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित करना, तथा उसके उदाहरण देना;
- उपसमूह के प्रसामान्य होने के निकषों को सिद्ध करना, तथा उनका अनुप्रयोग करना;
- सरल समूह को परिभाषित करना, तथा उसके उदाहरण देना;
- प्रसामान्य उपसमूहों के मौलिक गुणों को सिद्ध करना, तथा उनका अनुप्रयोग करना।

6.2 प्रसामान्य उपसमूह क्या होता है?

इकाई 5 में, आपने दर्शाया था कि उपसमूह H के वाम सहसमुच्चय aH का उसके दक्षिण सहसमुच्चय Ha के समान होना आवश्यक नहीं है। परंतु समूह के कुछ ऐसे भी उपसमूह होते हैं जिनके लिए समूह के प्रत्येक अवयव के प्रतिनिधि वाले दक्षिण और वाम सहसमुच्चय बराबर होते हैं।

उदाहरणार्थ, $n\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ लीजिए। प्रत्येक $m \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$n\mathbb{Z} + m = \{nr + m \mid r \in \mathbb{Z}\} = \{m + nr \mid r \in \mathbb{Z}\}$, क्योंकि $+$ क्रमविनिमेय है।

$$= m + n\mathbb{Z}.$$

$H \ntriangleleft G$ यह व्यक्त करता है कि G का H एक प्रसामान्य उपसमूह **नहीं** है।

इस प्रकार, एक ही प्रतिनिधि वाला, $\mathbb{Z}$ का दक्षिण सहसमुच्चय उसी प्रतिनिधि वाला $\mathbb{Z}$ का वाम सहसमुच्चय है।

दूसरी ओर, अन्आबेली समूह S_3 तथा S_3 के उपसमूह $H = \{I, (1\ 2)\}$ पर विचार कीजिए। तब, $H(1\ 3) = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ और $(1\ 3)H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$. इस प्रकार, $H(1\ 3) \ne (1\ 3)H.$

इस चर्चा के माध्यम से हम निम्नलिखित परिभाषा की ओर बढ़ रहे हैं।

परिभाषाः समूह G का एक उपसमूह N, G का **प्रसामान्य उपसमूह (normal subgroup)** या **निश्चर (invariant) उपसमूह**, कहलाता है यदि $Nx = xN \; \forall \; x \in G$, तथा हम इसे $\mathbf{N \triangleleft G}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

उदाहरणार्थ, किसी भी समूह G के दो प्रसामान्य उपसमूह होते हैं। ये उपसमूह $\{e\}$ और स्वयं G हैं। क्या आप देख सकते हैं कि क्यों?

देखिए, किसी भी $x \in G$ के लिए, $\{e\}x = \{x\} = x\{e\}$ तथा $Gx = G = xG$.

इसी प्रकार, जैसा कि आप पहले देख चुके हैं, $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \; \forall \; n \in \mathbb{Z}$, जबकि S_3 का $H = \{I, (1\ 2)\}$ एक प्रसामान्य उपसमूह नहीं है, अर्थात् $H \ntriangleleft S_3$.

आइए अन्य उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1: दर्शाइए कि $\mathbb{Z}_n$ का प्रत्येक उपसमूह $\mathbb{Z}_n$ में प्रसामान्य है, जहाँ $n \in \mathbb{N}$.

हलः इकाई 4 से आप जानते हैं कि यदि $\mathbb{Z}_n$ का H एक उपसमूह है, तो

$H = \overline{m}\mathbb{Z}_n$, किसी $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ के लिए।

$= \{\overline{0}, \overline{m}, \overline{2m}, \ldots, \overline{(n-1)m}\}$.

अतः, किसी भी $\overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ के लिए,

$$H + \overline{z} = \{\overline{rm} + \overline{z} \mid \overline{r} \in \mathbb{Z}_n\}$$

$$= \{\overline{z} + \overline{rm} \mid \overline{r} \in \mathbb{Z}_n\}, \text{ क्योंकि } + \text{ क्रमविनिमेय है।}$$

$$= \overline{z} + H.$$

$\therefore H \lhd \mathbb{Z}_n$.

***

उदाहरण 1 इस तथ्य की एक विशेष स्थिति है कि क्रमविनिमेय समूह का प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह होता है। हम इसे आगे सिद्ध करेंगे (उपप्रमेय 1 में)। अब, आइए कुछ अन्आबेली समूहों पर विचार करें।

उदाहरण 2: जाँच कीजिए कि चतुष्टयी समूह Q_8 में $H = \{\pm I, \pm A\}$ प्रसामान्य है या नहीं, जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

हलः इकाई 5 के उदाहरण 5 में आपने देखा था कि Q_8 में H के ठीक दो दक्षिण सहसमुच्चय H और HB हैं, जहाँ $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

इसी प्रकार, इसके वाम सहसमुच्चय H और BH हैं।

अब, क्योंकि $B \notin H$, इसलिए $HB \neq H$. इसी प्रकार, $BH \neq H$.

साथ ही, $Q_8 = H \cup HB = H \cup BH$. (दोनों असंयुक्त सम्मिलन हैं) ...(1)

अतः, $HB = Q_8 \setminus H = BH$, अर्थात् $HB = BH$.

अब, (1) द्वारा, किसी भी $\alpha \in Q_8$ के लिए, $\alpha \in H$ या $\alpha \in HB$.

आइए अब इकाई 5 का प्रमेय 1 लागू करें।

यदि $\alpha \in H$, तो $H\alpha = H = \alpha H$.

यदि $\alpha \in HB$, तो $H\alpha = HB = BH = \alpha H$.

इस प्रकार, $H\alpha = \alpha H \ \forall \ \alpha \in Q_8$, क्योंकि $Q_8 = H \cup HB$

अतः, $H \triangleleft Q_8$ है।

***

उदाहरण 3: जाँच कीजिए कि S_4 में $H = \{I, (1\ 2)(3\ 4)\}$ प्रसामान्य है या नहीं।

हल: सर्वप्रथम, ध्यान दीजिए कि $H \le S_4$, क्योंकि $H = <(1\ \ 2)(3\ \ 4)>$.

अब, $H(1\ 2\ 3) = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4) \circ (1\ 2\ 3)\} = \{(1\ 2\ 3), (2\ 4\ 3)\}$.

इसी प्रकार, $(1\ 2\ 3)H = \{(1\ 2\ 3), (3\ 4\ 1)\}$.

क्योंकि $(2\ 4\ 3) \ne (3\ 4\ 1)$ (क्यों?), इसलिए $H(1\ 2\ 3) \ne (1\ 2\ 3)H$.

अतः, $H \ntriangleleft S_4$.

***

यहाँ एक चेतावनी!

टिप्पणी 1: जब $H \triangleleft G$, तब $Hg = gH \ \forall \ g \in G$. **इसका अर्थ यह नहीं है** कि $hg = gh \ \forall \ h \in H$ और $g \in G$. उदाहरणार्थ, उपरोक्त उदाहरण 2 में, $HB = BH$, परंतु $AB \ne BA$, जैसा कि आप इकाई 5 में, और उससे भी पहले, देख चुके हैं।

$Hg = gH$ का अर्थ है कि $h \in H$ के लिए, $\exists \ h' \in H$ s.t. $hg = gh'$.

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) जाँच कीजिए कि D_8 में $<r>$ और $<R_{90}>$ प्रसामान्य हैं या नहीं (देखिए भाग 2.4.3)

E2) दर्शाइए कि $H = <(1\ 2\ 3)> \triangleleft S_3$ (इकाई 5 का उदाहरण 4 देखिए)।

E3) दर्शाइए कि U_{30} का कोई भी उपसमूह प्रसामान्य उपसमूह होता है।

E4) मान लीजिए G एक चक्रीय समूह है तथा $H \le G$. जाँच कीजिए कि $H \triangleleft G$ या नहीं।

E5) मान लीजिए कि H, G का ऐसा उपसमूह है जिससे कि प्रत्येक $x \in G$ के लिए $\exists \ y \in G$ s.t. $xH = Hy$. क्या $H \triangleleft G$? क्यों, या क्यों नहीं?

प्रसामान्य उपसमूहों के और उदाहरणों को देखने से पहले, आइए कुछ प्रसामान्यता परीक्षणों की चर्चा करें।

6.3 प्रसामान्य उपसमूहों के लिए निकष

पिछले भाग में आपने देखा था कि जाँचने के लिए कि उपसमूह H समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है या नहीं हमें प्रत्येक $x \in G$ के लिए, Hx और xH की जाँच करनी पड़ती है। क्या प्रसामान्यता की जाँच के लिए कोई बेहतर विधि भी है? इसका उत्तर देने के लिए, आइए एक उपसमूह के प्रसामान्य होने के लिए, निम्नलिखित प्रतिबंधों पर विचार करें।

प्रमेय 1: मान लीजिए H समूह G का एक उपसमूह है। तब, निम्नलिखित कथन तुल य हैं:

$g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg | h \in H\}$-

i) G में H प्रसामान्य है।

ii) $g^{-1}Hg \subseteq H \forall g \in G.$

iii) $g^{-1}Hg = H \forall g \in G.$

उपपत्ति: हम दर्शाएँगे कि $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$. इससे प्रदर्शित होगा कि ये तीनों कथन तुल्य हैं, क्योंकि '$\Rightarrow$' सभी सत्य कथनों के समुच्चय पर एक संक्रामक संबंध है (देखिए E17, इकाई 1)।

$\mathbf{(i) \Rightarrow (ii)}$: क्योंकि (i) सत्य है, इसलिए $Hg = gH \forall g \in G$. हम (ii) को सिद्ध करना चाहते हैं। इसके लिए, $g^{-1}Hg$ पर विचार कीजिए, जहाँ $g \in G$. मान लीजिए $g^{-1}hg \in g^{-1}Hg$.

क्योंकि $hg \in Hg = gH$, इसलिए $\exists h_1 \in H$ s.t. $hg = gh_1$.

$\therefore g^{-1}hg = g^{-1}gh_1 = h_1 \in H.$

क्योंकि $g^{-1}hg$, $g^{-1}Hg$ का कोई भी एक अवयव था, इसलिए हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

किसी भी $g \in G$ के लिए, $g^{-1}Hg \subseteq H.$

$\therefore \mathbf{(i)}$ सत्य है।

$\mathbf{(ii) \Rightarrow (iii)}$: अब, हम जानते हैं कि (ii) सत्य है, अर्थात् $g \in G$ के लिए, $g^{-1}Hg \subseteq H.$ (iii) को सिद्ध करने के लिए, हमें $H \subseteq g^{-1}Hg$ दर्शाने की आवश्यकता है।

मान लीजिए $h \in H.$ तब,

$h = ehe = (g^{-1}g)h(g^{-1}g).$

$= g^{-1}(ghg^{-1})g = g^{-1}\{(g^{-1})^{-1}hg^{-1}\}g.$

अब $g^{-1} = x$ रखिए। तब, $x \in G$ ऐसा है कि $x^{-1}Hx \subseteq H$, (ii) द्वारा।

$\therefore h = g^{-1}(x^{-1}hx)g \in g^{-1}Hg.$

क्योंकि h, H का कोई भी एक अवयव था, इसलिए हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $H \subseteq g^{-1}Hg.$

अतः, $g^{-1}Hg = H \, \forall \, g \in G.$

(iii) $\Rightarrow$ (i): किसी भी $g \in G$ के लिए, हमें दिया है कि $g^{-1}Hg = H$. हम $Hg = gH$ सिद्ध करना चाहते है।

अतः, मान लीजिए कि $hg \in Hg.$

तब, $hg = g(g^{-1}hg).$ साथ ही, $g^{-1}hg \in g^{-1}Hg = H.$

$\therefore g^{-1}hg \in H.$

इस प्रकार, $hg = g(g^{-1}hg) \in gH.$

$\therefore Hg \subseteq gH.$

इसी प्रकार, आप दर्शा सकते हैं कि $gH \subseteq Hg.$

इस प्रकार, $Hg = gH.$

$\therefore H \triangleleft G$, अर्थात् (i) सत्य है। ■

प्रमेय 1 के बारे में निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए, जो टिप्पणी 1 जैसी ही है।

टिप्पणी 2: प्रमेय 1 कहता है कि $H \triangleleft G \Leftrightarrow g^{-1}Hg = H \, \forall \, g \in G$. **इसका अर्थ यह नहीं है** कि $g^{-1}hg = h \; \forall \; h \in H$ और $g \in G$.

उदाहरणार्थ, उदाहरण 2 में आप देख चुके हैं कि $H \triangleleft Q_8$. अतः, प्रमेय 1 द्वारा,

$C^{-1}HC = H$, जहाँ $C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$. परंतु

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = -A \neq A.$$

अब, हम एक सरल परिणाम सिद्ध करेंगे, जिसके बारे में हमने उदाहरण 1 के बाद बताया

था। यह वास्तव में प्रमेय 1 का एक उपप्रमेय है। (आप इसे E2, इकाई 5 में भी सिद्ध कर चुके हैं।)

उपप्रमेय 1: क्रमविनिमेय समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है।

उपपत्तिः मान लीजिए G एक आबेली समूह है, तथा $H \leq G$. किन्हीं $g \in G$ और $h \in H$ के लिए,

$$g^{-1}hg = (g^{-1}g)h = h \in H.$$

$$\therefore g^{-1}Hg \subseteq H \ \forall \ g \in G.$$

इस प्रकार, $H \lhd G$. ■

उपप्रमेय 1 बताता है कि यदि G आबेली है, तो उसके सभी उपसमूह प्रसामान्य होते हैं। क्या इसका विलोम सत्य है? यह सत्य नहीं है। ऐसे अक्रमविनिमेय समूह हैं जिनके सभी उपसमूह प्रसामान्य होते हैं। हम आपको एक उदाहरण देंगे, जो प्रसामान्यता के लिए एक अन्य निकष का उपयोग करता है। इसलिए, हम वह उदाहरण इस निकष को सिद्ध करने के बाद देंगे। अभी के लिए, आइए उपप्रमेय 1 के अनुप्रयोग का एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 4: मान लीजिए G कोटि 10 वाला एक चक्रीय समूह है। G के कितने प्रसामान्य उपसमूह हैं, और क्यों?

हलः मान लीजिए $G = < g >$, जहाँ $o(g) = 10.$ तब, इकाई 4 से आप जानते हैं कि G के उपसमूह $< e >, < g^2 >, < g^5 >$ और G हैं।

क्योंकि G आबेली है, इसलिए ये सभी G में प्रसामान्य हैं।

अतः G के 4 प्रसामान्य उपसमूह हैं।

***

अब, प्रमेय 1 के अनुप्रयोग के एक उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 5: मान लीजिए G_1 और G_2 दो समूह हैं। जाँच कीजिए कि $G_1 \times \{e_2\} \lhd G_1 \times G_2$ या नहीं, जहाँ G_2 का तत्समक e_2 है (देखिए 2.4.6, इकाई 2)।

हलः ध्यान दीजिए कि अनुलोम गुणनफल $G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ तथा $H = G_1 \times \{e_2\} = \{(g_1, e_2) \mid g_1 \in G_1\}.$

अब, $(g_1, g_2)^{-1} H (g_1, g_2) = (g_1^{-1}, g_2^{-1}) H (g_1, g_2)$ पर विचार कीजिए।

इस समुच्चय का कोई भी अवयव $(g_1^{-1}, g_2^{-1})(g, e_2)(g_1, g_2)$ के रूप का है, जहाँ $g \in G_1$.

अब, $(g_1^{-1}, g_2^{-1})(g, e_2)(g_1, g_2) = (g_1^{-1}gg_1, g_2^{-1}e_2g_2) = (g_1^{-1}gg_1, e_2) \in G_1 \times \{e_2\} = H$, क्योंकि $g_1^{-1}gg_1 \in G_1$.

इस प्रकार, प्रमेय 1(ii) द्वारा $G_1 \times \{e_2\} \lhd G_1 \times G_2$.

इसी प्रकार, आप सिद्ध कर सकते हैं कि $\{e_1\} \times G_2 \lhd G_1 \times G_2$, जहाँ e_1, G_1 का तत्समक है।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E6) $GL_2(\mathbb{R})$ के उपसमूह $SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ पर विचार कीजिए (इकाई 3 के उदाहरण 8 को देखिए)। तथ्यों $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ तथा $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि $SL_2(\mathbb{R}) \lhd GL_2(\mathbb{R})$.

E7) जाँच कीजिए कि $(GL\ (\mathbb{C}), \cdot)$ का $H = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{C}\right\}$ एक प्रसामान्य उपसमूह है या नहीं।

E8) जाँच कीजिए कि समूह G का केन्द्र G में प्रसामान्य है या नहीं।

E9) मान लीजिए G एक समूह है तथा G का H एक आबेली उपसमूह है। क्या $H \lhd G$? क्यों, या क्यों नहीं?

E10) दर्शाइए कि S_3 में $<(2\ 3)>$ प्रसामान्य नहीं है।

E11) $GL_2(\mathbb{R})$ गुणन के सापेक्ष में सभी विकर्ण आव्यूहों के समूह पर विचार कीजिए (देखिए भाग 2.4.2, इकाई 2)। इसके कितने उपसमूह प्रसामान्य हैं?

E12) यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह है s.t. $g^{-1}Hg = gHg^{-1}\ \forall\ g \in G$, क्या $H \lhd G$? क्यों, या क्यों नहीं?

E2 में आपने सिद्ध किया था कि $<(1\ 2\ 3)> \lhd S_3$. क्या आपने ध्यान दिया था कि $|S_3 : <(1\ 2\ 3)>| = 2$? शायद नहीं। परंतु निम्नलिखित निकष इसे E2 के परिणाम से जोड़ता है।

प्रमेय 2: समूह G का सूचकांक 2 वाला प्रत्येक उपसमूह G में प्रसामान्य होता है।

उपपत्तिः जो तर्क हम यहाँ देंगे वो वही है जो हमने उदाहरण 2 में $HB = BH$ दर्शाने के लिए प्रयोग किया था।

मान लीजिए $N \le G$ s.t. $|G:N| = 2$. मान लीजिए कि N के जो दो दक्षिण सहसमुच्चय हैं, वे N और Nx हैं, तथा दोनों वाम सहसमुच्चय N और yN हैं।

अब, $G = N \cup yN$, एक असंयुक्त सम्मिलन। अतः, $yN = G \setminus N$. इसी प्रकार, $G = N \cup Nx$. अतः, $Nx = G \setminus N = yN$.

इसलिए, E5 द्वारा, $Nx = xN$. अतः, $N \triangleleft G$. ■

प्रमेय 2 हमें एक उपसमूह की प्रसामान्यता के लिए एक अन्य निकष बताता है। हम इस निकष का अनेक बार उपयोग करेंगे, खासकर इकाई 9 में यह दर्शाने के लिए कि किसी भी $n \ge 2$ के लिए, S_n का सूचकांक 2 वाला एक उपसमूह है, जो इसी कारण से, एक प्रसामान्य उपसमूह है। अभी के लिए, निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए, जो उपप्रमेय 1 के विलोम को असिद्ध करेगा।

उदाहरण 6: दर्शाइए कि उपप्रमेय 1 का विलोम सत्य नहीं है।

हलः पाठ्यक्रम 'वास्तविक विश्लेषण' की इकाई 2 से याद कीजिए कि किसी कथन को असिद्ध करने के लिए, एक प्रतिउदाहरण ही काफी होता है। इसलिए, चतुष्टयी समूह Q_8 पर विचार कीजिए, जिसकी चर्चा हमने उदाहरण 2 में की है।

लग्रांज के प्रमेय द्वारा, Q_8 के किसी भी उपसमूह को कोटि $1, 2, 4$ या 8 का होना चाहिए।

कोटियों 1 और 8 वाले उपसमूह केवल क्रमशः $\{I\}$ और Q_8 हैं।

आप जानते हैं कि ये Q_8 में प्रसामान्य हैं।

प्रमेय 2 के उपयोग से आप देख सकते हैं कि कोटि 4 वाला कोई भी उपसमूह Q_8 में प्रसामान्य है। साथ ही, इकाई 5 से आप जानते हैं कि कोटि 2 वाला कोई भी उपसमूह चक्रीय है, तथा यह कोटि 2 वाले एक अवयव से जनित है। Q_8 में ऐसा अवयव केवल $-I$ है। इस प्रकार, Q_8 का कोटि 2 वाला उपसमूह केवल $H = \{I, -I\}$ है।

हर अवयव का गुणन स्वयं करके आप देख सकते हैं कि

$$g^{-1}Hg \subseteq H \ \forall \ g \in Q_8. \ \therefore H \triangleleft Q_8.$$

अतः, Q_8 के सभी उपसमूह प्रसामान्य हैं।

परंतु आप जानते हैं कि Q_8 अन्आबेली है (उदाहरणार्थ, $AB = -BA \ne BA.$)

***

अब कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E13) द्वितल समूह D_{2n} पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि D_{2n} में घूर्णनों का समुच्चय एक प्रसामान्य उपसमूह है।

E14) प्रमेय 2 के विलोम का कथन दीजिए। आगे, इसे सिद्ध या असिद्ध कीजिए।

E15) मान लीजिए $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ के लिए, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ तथा $T = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. दर्शाइए कि $\wp(T) \lhd \wp(S)$.

E16) मान लीजिए कि किसी परिमित समुच्चय X के लिए, $G \leq S(X)$. मान लीजिए कि $\mathrm{Orb}_G(x) = \{1, x\}$, जहाँ $x \in X$ (देखिए भाग 5.4, इकाई 5) दर्शाइए कि $\mathrm{Stab}_G(x) \lhd G$.

अभी तक आपने अतुच्छ उचित प्रसामान्य उपसमूहों वाले समूहों के उदाहरण देखें हैं। परंतु ज़रूरी नहीं कि प्रत्येक समूह का ऐसा उपसमूह हो; बल्कि ऐसे समूहों की संख्या बहुत बड़ी है। आइए इन्हें परिभाषित करें।

परिभाषा: एक अतुच्छ समूह G को **सरल समूह (simple group)** कहते हैं यदि इसके प्रसामान्य उपसमूह केवल G और $\{e\}$ हैं।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 7: मान लीजिए G अभाज्य कोटि वाला समूह है। दर्शाइए कि G सरल है।

हल: प्रमेय 6, इकाई 5 से आप जानते हैं कि G का कोई अतुच्छ उचित उपसमूह नहीं है। अतः G का ऐसा कोई प्रसामान्य उपसमूह नहीं है। इसलिए, G एक सरल समूह है।

***

उदाहरण 7 से आप देख सकते हैं कि सरल समूहों की संख्या बहुत बड़ी है – सभी अभाज्य कोटि वाले समूह। अब, शायद आप सोच रहे हैं कि प्रत्येक सरल समूह अभाज्य कोटि वाला है। इकाई 9 में आप इसका एक प्रतिउदाहरण देखेंगे – कोटि 60 वाले एक सरल अन्आबेली समूह का उदाहरण। परंतु, आबेली समूहों के लिए, हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त है।

प्रमेय 3: कोई भी परिमित आबेली सरल अतुच्छ समूह चक्रीय है, तथा अभाज्य कोटि वाला है।

उपपत्ति : मान लीजिए G एक परिमित आबेली सरल समूह है और $o(G) = n > 1$. मान लीजिए कि $x \in G, x \neq e$.

तब, $< x > \leq G$.

क्योंकि G आबेली है, इसलिए उपप्रमेय 1 द्वारा, $< x > \lhd G$.

क्योंकि $x \neq e$, इसलिए $< x > \neq \{e\}$.

अतः, $G = < x >$, क्योंकि G सरल है।

इस प्रकार, G कोटि n वाला चक्रीय समूह है।

मान लीजिए, p, n का एक अभाज्य गुणनखंड है। तब, G का कोटि p वाला एक उपसमूह है, जैसा आप इकाई 4 में देख चुके हैं।

क्योंकि G आबेली है, इसलिए $H \lhd G$. परंतु G सरल है। इस प्रकार, $H = G$.

अतः, $o(G) = o(H) = p$, एक अभाज्य संख्या।

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E17) किन $n \in \mathbb{N}$ के लिए, U_n सरल है? क्यों?

E18) समान कोटि वाले दो ऐसे समूहों के, पुष्टि करते हुए, उदाहरण दीजिए जिनमें से एक आबेली हो और एक अन्आबेली हो। क्या इनमें से कोई भी समूह सरल हो सकता है? क्यों, या क्यों नहीं?

E19) क्या कोई अपरिमित आबेली सरल समूह है? क्यों, या क्यों नहीं?

E20) क्या दो सरल समूहों का अनुलोम गुणनफल सरल होता है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

E21) मान लीजिए G एक समूह है, तथा $n \in \mathbb{N}$. मान लीजिए $H = \{g \in G \mid o(g) = n\}$. यदि $H \leq G$, तो दर्शाइए कि $H \lhd G$. साथ ही, एक ऐसे समूह G का उदाहरण दीजिए, जहाँ $H \not\leq G$.

E22) मान लीजिए H किसी समूह G का एक उचित प्रसामान्य उपसमूह है s.t. $o(H) = 2$. दर्शाइए कि $H \leq Z(G)$.

इसके साथ ही, हम प्रसामान्यता परीक्षण के इस भाग को समाप्त करते हैं। आइए अब प्रसामान्य उपसमूहों के कुछ गुणों पर विचार करें।

6.4 प्रसामान्य उपसमूहों के गुण

इकाई 3 में आपने उपसमूहों के अनेक गुणों का अध्ययन किया था। इस भाग में हम देखना चाहेंगे कि क्या प्रसामान्य उपसमूह भी वैसे ही गुणों को संतुष्ट करते हैं या नहीं।

एक गुण जिसके बारे में आपने भाग 3.3 में सीखा था वह था कि '$\leq$' एक संक्रामक संबंध है। यदि '$\leq$' को '$\lhd$' से बदलें, तो क्या यह गुण तब भी सत्य रहेगा? यदि समूह आबेली है, तो निःसंदेह $\lhd$ संक्रामक होगा। (क्यों?) लेकिन जब G अन्आबेली है, तब क्या होता है? यदि $H \lhd N$ और $N \lhd G$, तो हम जानते हैं कि

i) $n^{-1}\mathbf{h} \in H \ \forall\ n \in N$ और $h \in H$,

ii) $g^{-1}ng \in N \ \forall\ g \in G$ और $n \in N$.

इन दोनों तथ्यों से हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते कि $g^{-1}hg = \in H \ \forall \ g \in G$ और $h \in H$. इस प्रकार, यह आवश्यक **नहीं** है कि $H \lhd G$. आप इकाई 9 में एक ऐसे उदाहरण का अध्ययन करेंगे, जो दर्शाता है कि '$\lhd$' संक्रामक नहीं है। फिर भी हम निम्नलिखित तो सिद्ध कर ही सकते हैं।

प्रमेय 4: मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \leq G$ और $K \leq H$. यदि $K \lhd G$, तो $K \lhd H$.

उपपत्ति: क्योंकि $K \lhd G$, इसलिए $g^{-1}Kg = K \ \forall \ g \in G$. इस प्रकार, $g^{-1}Kg = K \ \forall \ g \in H$.

अतः, $K \lhd H$.

प्रमेय 4 द्वारा आप जानते हैं कि उदाहरणार्थ, $SL_2(\mathbb{R})$ को आविष्ट करने वाले $GL_2(\mathbb{R})$ के किसी भी उपसमूह H के लिए, $SL_2(\mathbb{R}) \lhd H$.

जब हम इकाई 7 में विभाग समूहों के उपसमूहों की चर्चा करेंगे, उस समय प्रमेय 4 का काफी इस्तेमाल होगा।

अब एक संबंधित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E23) मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \lhd G$. मान लीजिए $K \leq H$. क्या $K \lhd G$? क्यों, या क्यों नहीं?

अब, आइए देखें कि प्रसामान्य उपसमूहों का प्रतिच्छेदन, सम्मिलन और गुणनफल की समुच्चय संक्रियाओं के सापेक्ष कैसा व्यवहार है।

प्रमेय 5: मान लीजिए H और K समूह G के प्रसामान्य उपसमूह हैं। तब, $H \cap K \lhd G$.

उपपत्ति: इकाई 3 से आप जानते हैं कि $H \cap K \leq G$. $H \cap K \lhd G$ दर्शाने के लिए है, हमें दर्शाना होगा कि $g^{-1}xg \in H \cap K \ \forall \ x \in H \cap K$ और $g \in G$.

अब, मान लीजिए $x \in H \cap K$ और $g \in G$. तब, $x \in H$ और $H \lhd G$. $\therefore g^{-1}xg \in H$. इसी प्रकार, $g^{-1}xg \in K$. $\therefore g^{-1}xg \in H \cap K$.

इस प्रकार, $H \cap K \lhd G$. ■

ध्यान दीजिए कि प्रमेय 5 को सिद्ध करना के तर्क का उपयोग यह सिद्ध करने के लिए किया जा सकता है कि **G के कितने ही प्रसामान्य उपसमूहों का प्रतिच्छेदन, G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।**

आगे, आइए दो प्रसामान्य उपसमूहों के सम्मिलन पर विचार करें। इकाई 3 से आप जानते हैं कि यदि $H \leq G$ और $K \leq G$, तो $H \cup K$ का G का उपसमूह होना आवश्यक

नहीं है। अतः, $H \triangleleft G, K \triangleleft G$ का यह अर्थ नहीं है कि $H \cup K \triangleleft G$ कुछ विशिष्ट स्थितियों को छोड़ कर ऐसी स्थितियाँ कौनसी हैं? निम्नलिखित प्रश्नों में हम आपसे इसका उत्तर देने के लिए, तथा प्रसामान्य उपसमूहों के अन्य महत्वपूर्ण गुणों को सिद्ध करने के लिए, कह रहे हैं।

E24) मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \triangleleft G$ और $K \triangleleft G$ ऐसे हैं कि $H \cup K \leq G$. H और K पर किन प्रतिबंधों के अधीन $H \cup K \triangleleft G$ होगा?

E25) यदि G एक समूह है तथा $H \leq G$ और $K \leq G$ है, तो क्या $H \cap K \triangleleft H$? होगा? क्यों, या क्यों नहीं?

E26) मान लीजिए कि G_1 और G_2 दो समूह हैं तथा $H \triangleleft G_1$ और $K \triangleleft G_2$. क्या $H \times K \triangleleft G_1 \times G_2$ है? क्यों, या क्यों नहीं?

आइए अब उपसमूहों के गुणनफल पर दृष्टि डालें। इकाई 3 से स्मरण कीजिए कि यदि $H, K \leq G$, तो $HK \leq G$ iff $HK = KH$.

अब एक समूह जिससे आप परिचित हैं D_{2n}, उस पर विचार कीजिए। इकाई 4 से आप जानते हैं कि r और R_{90} से D_8 जनित होता है, जहाँ r समतल में एक परावर्तन है। E1 में आप देख चुके हैं कि $< R_{90} > \triangleleft D_8$, परंतु $< r > \ntriangleleft D_8$. अब आइए देखें कि D_{2n} में क्या होता है, जबकि $n \geq 3$।

उदाहरण 8: समूह $D_{2n}, n \geq 3$, लीजिए, जिसका अध्ययन आपने भाग 2.4, इकाई 2 में किया था। मान लीजिए $H = < r >$ और $K = < R >$, जहाँ $R = R_\theta, \theta = 360/n$. दर्शाइए कि

$K \triangleleft D_{2n}$, $H \ntriangleleft D_{2n}$ और $D_{2n} = HK$.

हल: आइए $r = x$ और $R = y$ लिखें। तब, इकाई 4 से आप जानते कि हैं D_{2n} के अवयव $x^i y^j$ के रूप के हैं, जहाँ $i = 0, 1$ और $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $o(x) = 2$, $o(y) = n \geq 3$, तथा $xy = y^{-1}x = y^{n-1}x$.

$$\therefore D_{2n} = \{e, x, y, y^2, \ldots, y^{n-1}, xy, xy^2, \ldots, xy^{n-1}\} = K \cup xK, \text{ और } x \notin k.$$

$$\therefore |D_{2n} : K| = 2.$$

इस प्रकार, प्रमेय 2 द्वारा, $K \triangleleft D_{2n}$. (आप इसे E13 में पहले ही दर्शा चुके हैं।)

ध्यान दीजिए कि हम उपप्रमेय 1 का उपयोग नहीं कर सकते, क्योंकि D_{2n} अन्आबेली है (क्योंकि $xy = y^{-1}x$ तथा $y \neq y^{-1}$).

आइए अब देखें कि क्या $H \triangleleft D_{2n}$.

$y^{-1}xy$ पर विचार कीजिए। अब, $y^{-1}xy = xy^2$, क्योंकि $y^{-1}x = xy$.

यदि $xy^2 \in H$, तो $xy^2 = e$ या $xy^2 = x$. (याद कीजिए, $o(x) = 2$, जिससे कि $x^{-1} = x$.)

यदि $xy^2 = e$, तो $y^2 = x^{-1} = x \Rightarrow y^3 = xy = y^{-1}x \Rightarrow y^4 = x$.

इस प्रक्रिया को जारी रखने पर, एक पैटर्न निकलता है– विषम m के लिए, हम $y^m = y^{-1}x$ प्राप्त करते हैं, तथा सम m के लिए, हम $y^m = x$ प्राप्त करते हैं।

दोनों ही स्थितियों में $y^m \neq e$, क्योंकि $x \neq e$ और $x \neq y$.

अतः, $y^n \neq e$, जो एक अंतर्विरोध है। अतः, $xy^2 \neq e$.

यदि $xy^2 = x$, तो $y^2 = e$, जो अंतर्विरोध है क्योंकि $o(y) \geq 3$.

$\therefore y^{-1}xy = xy^2 \notin H$, और इसीलिए, $H \ntriangleleft G$.

अंत में, ध्यान दीजिए कि $H \cap K = \{e\}$, जिससे कि $o(H \cap K) = 1$.

अतः, इकाई 3 से हम प्राप्त करते हैं कि $o(HK) = \dfrac{o(H)\,o(K)}{o(H \cap K)} = 2n.$

साथ ही, $o(D_{2n}) = 2n$ और $HK \subseteq D_{2n}$.

अतः, $D_{2n} = HK$.

***

उदाहरण 8 की स्थिति में आपने देखा कि $HK = G$. अतः, G का HK एक उपसमूह है। इस प्रकार, $HK = KH$. क्या यह तब भी सत्य होगा, जब H या K में से एक G में प्रसामान्य है? आप इसका उत्तर उपसमूहों के गुणनफल के बारे में निम्नलिखित प्रश्नों को हल करते समय प्राप्त करेंगे।

E27) i) सिद्ध कीजिए कि यदि $H \triangleleft G$ और $K \leq G$, तो $HK \leq G$.

(**संकेतः** इकाई 3 के प्रमेय 7 का उपयोग कीजिए।)

ii) सिद्ध कीजिए कि यदि $H \triangleleft G$ और $K \triangleleft G$, तो $HK \triangleleft G$. (ध्यान दीजिए कि यह असत्य है यदि ' $\triangleleft$ ' को '$\leq$' से बदल दिया जाता है।)

iii) क्या उपरोक्त (ii) का विलोम सत्य है? अपने उत्तर के कारण दीजिए।

E28) i) यदि H और K किसी समूह के प्रसामान्य आबेली उपसमूह हैं, तथा यदि $H \cap K = \{e\}$, तो दर्शाइए कि HK आबेली होगा।

ii) यदि उपरोक्त (i) में $H \cap K$ पर लगा प्रतिबंध हटा लिया जाए, तो क्या HK तब भी आबेली होगा? क्यों, या क्यों नहीं?

E27 (ii) से आप जानते हैं कि यदि H और K समूह G के प्रसामान्य उपसमूह हैं, तो G का HK एक प्रसामान्य उपसमूह होता है। यदि HK, G के बराबर हो तो तब क्या होता है? तब, बाह्र अनुलोम गुणनफल की ही तरह एक विशिष्ट तथा अति महत्वपूर्ण स्थिति प्राप्त होती है। आपके द्वारा उपभाग 2.4.6 में अध्ययन किया गया। इस स्थिति को समझने के लिए निम्नलिखित परिभाषा पर विचार कीजिए।

परिभाषाः मान लीजिए कि किसी समूह G के H और K **प्रसामान्य** उपसमूह हैं। तब, G को H और K का **आंतरिक अनुलोम गुणनफल (internal direct product)** कहते हैं, यदि

$G = HK$ तथा $H \cap K = \{e\}$.

हम इस तथ्य को $\mathbf{G = H \times K}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 9: क्लाइन 4-समूह $K_4 = \{e, a, b, ab\}$ पर विचार कीजिए, जहाँ $a^2 = e, b^2 = e$ और $ab = ba$. दर्शाइए कि K_4, $<a>$ और $<b>$ का आंतरिक अनुलोम गुणनफल है।

हलः मान लीजिए $H = <a>$ और $K = <b>$. तब, $H \cap K = \{e\}$.

साथ ही, आप यह देख सकते हैं कि $K_4 = HK$.

$\therefore K_4 = H \times K.$

***

उदाहरण 10: जाँच कीजिए कि $\mathbb{Z}_{10}$ अपने उपसमूहों $\bar{5}\mathbb{Z}_{10}$ और $\bar{2}\mathbb{Z}_{10}$ का आंतरिक अनुलोम गुणनफल है या नहीं।

हलः मान लीजिए $H = \{\bar{0}, \bar{5}\}$ और $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$. तब,

i) $\mathbb{Z}_{10} = H + K$, क्योंकि $\mathbb{Z}_{10}$ का कोई भी अवयव H के अवयव और K के अवयव का योग है, तथा

ii) $H \cap K = \{\bar{0}\}$.

इस प्रकार, $\mathbb{Z}_{10} = H \times K.$

***

उपरोक्त दोनों उदाहरण आबेली समूहों के थे। परंतु, अगले उदाहरण पर विचार कीजिए, जो एक तरह से व्यापक उदाहरण है।

उदाहरण 11: दर्शाइए कि किन्हीं दो समूहों G_1 और G_2 के लिए, $G_1 \times G_2$ आंतरिक अनुलोम गुणनफल $(G_1 \times \{e_2\}) \times (\{e_1\} \times G_2)$ है।

हलः मान लीजिए $H = G_1 \times \{e_2\}$ और $K = \{e_1\} \times G_2$. आप पहले ही देख चुके हैं कि $G_1 \times G_2$ में H और K प्रसामान्य हैं।

हमें यह दर्शाने की आवश्यकता है कि $G_1 \times G_2$ का कोई भी अवयव hk के रूप का है, जहाँ $h \in H$ और $k \in K$.

अब, $G_1 \times G_2$ के किसी भी अवयव के साथ, (x, y) के लिए, $(x, y) = (x, e_2)\,(e_1, y)$, जहाँ $(x, e_2) \in H, (e_1, y) \in K$.

$\therefore G_1 \times G_2 = HK.$

अब, मान लीजिए $(x, y) \in H \cap K$.

क्योंकि $(x, y) \in H$, इसलिए $y = e_2$. क्योंकि $(x, y) \in K$, इसलिए $x = e_1$.

$\therefore (x, y) = (e_1, e_2)$. $\therefore H \cap K = \{(e_1, e_2)\}$.

$\therefore G_1 \times G_2 = (G_1 \times \{e_2\}) \times (\{e_1\} \times G_2).$

***

हम यहाँ शब्दावली के बारे में एक टिप्पणी करना चाहेंगे।

टिप्पणी 3: मान लीजिए H और K किसी समूह G के प्रसामान्य उपसमूह हैं। तब, उपसमूहों H और K का आंतरिक अनुलोम गुणनफल वास्तव में समूहों H और K का बाह्य अनुलोम गुणनफल ही है। इसलिए, जब हम उपसमूहों के आंतरिक अनुलोम गुणनफल की बात करते हैं, तब हम प्रायः शब्द 'आंतरिक' को छोड़ देते हैं, तथा केवल 'उपसमूहों का अनुलोम गुणनफल' कहते हैं।

दो उपसमूहों के आंतरिक अनुलोम गुणनफल की परिभाषा को अनेक उपसमूहों के लिए विस्तृत किया जा सकता है, जैसा कि आप तब पाएँगे जब आप अधिक उच्च गणित का अध्ययन करेंगे। वस्तुतः, यह संकल्पना किसी भी परिमिततः जनित आबेली समूह की बीजीय संरचना का आधार है।

अब आप पूछ सकते हैंः क्या प्रत्येक समूह को उसके दो या अधिक उचित प्रसामान्य उपसमूहों के आंतरिक अनुलोम गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है? इसके जवाब के लिए निम्नलिखित प्रमेय पर विचार कीजिए।

यह प्रमेय वे प्रतिबंध देता है जिनके अधीन कोई समूह अपने उपसमूहों का आंतरिक अनुलोम गुणनफल होता है।

प्रमेय 6: मान लीजिए समूह G अपने प्रसामान्य उपसमूहों H और K का आंतरिक अनुलोम गुणनफल है। तब,

i) प्रत्येक $x \in G$ को **अद्वितीय रूप** से $x = hk$ लिखा जा सकता है, जहाँ $h \in H, k \in K$, तथा

ii) $hk = kh \ \forall \ h \in H, k \in K$.

उपपत्तिः हम जानते हैं कि $G = HK$, जहाँ $H \cap K = \{e\}$.

i) मान लीजिए $x \in G$. तब, $x = hk$, किन्हीं $h \in H, k \in K$ के लिए।

अब मान लीजिए $x = h_1k_1$ भी, जहाँ $h_1 \in H$ और $k_1 \in K$.

तब, $hk = h_1k_1$. …(2)

$\therefore h_1^{-1}h = k_1k^{-1}$.

अब, $h_1^{-1}h \in H$.

साथ ही, क्योंकि $h_1^{-1}h = k_1k^{-1} \in K$, इसलिए $h_1^{-1}h \in K$.

$\therefore h_1^{-1}h \in H \cap K = \{e\}$.

$\therefore h_1^{-1}h = e$, जिससे $h = h_1$ निकलता है।

और तब, (2) में निरसन द्वारा, $k = k_1$.

इस प्रकार, x का H के एक अवयव और K के एक अवयव के गुणनफल के रूप में निरूपण अद्वितीय है।

ii) यह दर्शाने के लिए कि दो अवयव x और y क्रमविनिमय करते हैं, सर्वोत्तम विधि है कि $x^{-1}y^{-1}xy$ को तत्समक दर्शा दिया जाए। अतः, $h \in H$ और $k \in K$ के लिए $h^{-1}k^{-1}hk$ पर विचार कीजिए।

क्योंकि $K \triangleleft G$, इसलिए $h^{-1}k^{-1}h \in K$.

$\therefore h^{-1}k^{-1}hk \in K$.

ऐसे ही तर्क से, $h^{-1}k^{-1}hk \in H$.

$\therefore h^{-1}k^{-1}hk \in H \cap K = \{e\}$.

$\therefore h^{-1}k^{-1}hk = e$. अर्थात्, $hk = kh$. ■

अब, एक चेतावनी!

टिप्पणी 4: यदि आप S_3 पर विचार करें, तो आप पाएंगे कि $S_3 = HK$, जहाँ $H = <(1\ 2)>, K = <(1\ 2\ 3)>$ तथा $H \cap K = \{I\}$. अतः, शायद आप सोचें कि $S_3 = H \times K$. परंतु $(1\ 2)(1\ 2\ 3) \neq (1\ 2\ 3)(1\ 2)$.

अतः, कौन-सी बात सही नहीं है? $H \ntriangleleft S_3$.

मुख्य बिंदु यह है कि आपको यह निष्कर्ष निकालने से पहले कि $G = H \times K$, यह

सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि परिभाषा का **प्रत्येक प्रतिबंध** संतुष्ट है।

प्रमेय 6 के बारे में एक अन्य प्रेक्षण पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 5: ध्यान दीजिए कि प्रमेय 6(ii), $G \neq H \times K$ निश्चित करने के लिए, एक अति सहायक साधन है। साथ ही, ध्यान दीजिए कि (ii) कहता है कि H के अवयव K के अवयवों से क्रमविनिमय करते हैं। यह **इसे नहीं बताता** कि H आबेली है, या K आबेली है। जैसे कि, उदाहरण 11 में, यदि G_1 और G_2 अन्आबेली हैं, तो H और K भी अन्आबेली होंगे।

अब आइए एक ऐसे उदाहरण को देखें जिससे प्रमेय 6 से पहले पूछे प्रश्न का जवाब मिलेगा।

उदाहरण 12: जाँच कीजिए कि $\mathbb{Z}$ अपने उपसमूहों का अनुलोम गुणनफल है या नहीं ।

हल: मान लीजिए $\mathbb{Z} = H \times K$, जहाँ $\mathbb{Z}$ के H और K उपसमूह हैं। इकाई 3 से आप जानते हैं कि $H = <m>$ और $K = <n>$, किन्हीं $m, n \in \mathbb{Z}$ के लिए। तब, $mn \in H \cap K$. अतः, $H \cap K \neq \{0\}$, जब तक $m = 0$ या $n = 0$ न हो।

अब, यदि $m = 0$ तब $1 \in \mathbb{Z}$ और 1 को hk के रूप में नहीं लिख सकते हैं, जहाँ $H = 0$ और $k \in K$. इसी प्रकार, $n = 0$ लेने पर हम पाते हैं कि प्रमेय 6(i) इस स्थिति के लिए सत्य नहीं है। अतः हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं। अतः, $\mathbb{Z}$ अपने उपसमूहों का अनुलोम गुणनफल नहीं है।

***

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E29) प्रमेय 6 के एक आंशिक विलोम को सिद्ध कीजिए, अर्थात् यदि H और K समूह G के ऐसे प्रसामान्य उपसमूह हैं जो प्रमेय 6 के (i) को संतुष्ट करते हैं, तो $G = H \times K$.

E30) यदि G एक परिमित समूह है, $H \lhd G$, $K \lhd G$ ऐसे हैं कि $G = H \times K$, तो दर्शाइए कि $o(G) = o(H) \cdot o(K)$.

E31) जाँच कीजिए कि उदाहरण 2 में $Q_8 = <A> \times <B>$ या नहीं।

E32) दर्शाइए कि $\mathbb{R}^*$ उपसमूहों $\mathbb{R}^+$ और $\{1, \quad 1\}$ का आंतरिक अनुलोम गुणनफल है, जहाँ $\mathbb{R}^+$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

अब, जैसा कि आप देख चुके हैं, अन्आबेली समूह के अनेक ऐसे उपसमूह होते हैं जो प्रसामान्य नहीं हैं। क्या यह निर्णय लेने की कोई विधि है कि कोई उपसमूह, प्रसामान्य होने के कितने ''निकट'' है किसी अर्थ में? आप जानते हैं कि यदि $H \ntriangleleft G$ है, तो कम से कम एक $g \in G$ के लिए, $g^{-1}Hg \neq H$. अतः यदि हम जान जाएं कि कितने $g \in G$ के लिए, $g^{-1}Hg = H$, तो क्या इससे हमें कोई मापक मिलता है? इस संदर्भ में निम्नलिखित परिभाषा पर विचार कीजिए।

परिभाषा: मान लीजिए G एक समूह है तथा G का H एक उपसमूह है। समुच्चय $N(H) = \{g \in G | g^{-1}Hg = H\}$ समूह G में H का **प्रसामान्यक (normaliser)** कहलाता है।

ध्यान दीजिए कि $\mathbf{H \triangleleft G}$ iff $\mathbf{N(H) = G.}$

साथ ही, ध्यान दें कि $H \subseteq N(H)$ क्योंकि $H \leq G.$

एक उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 13: दर्शाइए कि यदि $H = <(1\ 2)> \leq S_3$, तो $N(H) = H.$

हल: $H = \{I, (1\ 2)\}$. आप जानते हैं कि $H \ntriangleleft S_3$.

यहाँ, $N(H) = \{\sigma \in S_3 | \sigma^{-1}H\sigma = H\}$.

पहले तो, $H \subseteq N(H).$

आगे, क्योंकि $(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) = (2\ 3) \notin H$, इसलिए $(1\ 3) \notin N(H).$

इसी प्रकार, सत्यापित कीजिए कि $\sigma \notin N(H)\ \forall\ \sigma \notin H.$

अतः, $N(H) = H.$

***

तो, आप देख सकते हैं कि $|G \setminus N(H)|$ हमें इसका मापक देता है कि G में H प्रसामान्य होने से कितना दूर है। समुच्चय $N(H)$ वास्तव में एक समूह है, जैसा कि अब आप देखेंगे।

प्रमेय 7: मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \leq G$. तब, $H \leq N(H) \leq G.$

उपपत्ति: सर्वप्रथम, $H \subseteq N(H).$ इस प्रकार, $H \leq N(H).$

अतः, $e \in N(H).$

साथ ही, यदि $g \in N(H)$, तो $g^{-1}Hg = H \Rightarrow (g^{-1})^{-1}Hg^{-1} = H \Rightarrow g^{-1} \in N(H).$

अंत में, यदि $g_1, g_2 \in N(H)$, तो आपको सिद्ध करना चाहिए कि $g_1g_2 \in N(H).$

इस प्रकार, $N(H) \leq G.$

अब, प्रश्न उठता है: क्या $N(H) \triangleleft G\ \forall\ H \leq G$? क्या उदाहरण 13 इसका उत्तर देता है? हाँ, देता है। क्योंकि वहाँ $H = N(H)$ तथा $H \ntriangleleft S_3$, इसलिए $N(H) \ntriangleleft S_3$.

अतः, **G में $N(H)$ का प्रसामान्य होना आवश्यक नहीं है।**

अब निम्नलिखित संबंधित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E33) सिद्ध कीजिए कि $H \lhd G$ iff $N(H) = G$.

E34) यदि $H \le G$, तो जाँच कीजिए कि $H \lhd N(H)$ है या नहीं।

E35) यदि G एक समूह है और $g \in G$, तो $N(<g>)$ और $N(Z(G))$ ज्ञात कीजिए।

E36) यदि G एक अतुच्छ समूह है और $H \le G$, तो क्या $N(H) = \{e\}$ हो सकता है? क्यों?

E37) $N(<r>)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ D_8 में r एक परावर्तन है।

इसके साथ ही, हम प्रसामान्य उपसमूहों पर इस चर्चा को समाप्त करते हैं। अगली इकाई में हम एक संबंधित संकल्पना पर बात करेंगे। यही संकल्पना कारण था जिसके लिए गैलोआ ने प्रसामान्य उपसमूहों की धारणा को परिभाषित और विकसित किया।

आइए अब इस चर्चा का सारांश दें, जो हमने इस इकाई में की है।

6.5 सारांश

इस इकाई में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं पर अध्ययन किया है।

1. समूह के प्रसामान्य उपसमूह की परिभाषा, और उसके उदाहरण।

2. $H \lhd G$ iff $g^{-1}Hg = H \ \forall \ g \in G$.

3. आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

4. अनुलोम गुणनफल $G_1 \times G_2$ के $G_1 \times \{e_2\}$ और $\{e_1\} \times G_2$ प्रसामान्य उपसमूह हैं।

5. सूचकांक 2 वाला प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

6. सरल समूह की परिभाषा, और उसके उदाहरण।

7. अभाज्य कोटि वाला प्रत्येक समूह सरल होता है।

8. प्रत्येक परिमित आबेली सरल अतुच्छ समूह अभाज्य कोटि वाला चक्रीय समूह होता है।

9. यदि $H \lhd G$, तो $H \lhd K$, जहाँ $K \le G$ s.t. $H \subseteq K$.

10. यदि $H \lhd G$ और $K \lhd G$ है, तो $H \cap K \lhd G$.

11. यदि $H \lhd G$ और $K \le G$, तो $HK \le G$. आगे, यदि $K \lhd G$ भी है, तो $HK \lhd G$.

12. प्रसामान्य उपसमूहों के आंतरिक अनुलोम गुणनफल की परिभाषा, और उसके उदाहरण।

13. मान लीजिए कोई समूह G अपने प्रसामान्य उपसमूहों H और K का आंतरिक अनुलोम गुणनफल है। तब,

    i) प्रत्येक $x \in G$ को **अद्वितीय रूप से** $x = hk$ लिखा जा सकता है, जहाँ $h \in H, k \in K$, तथा

    ii) $hk = kh \ \forall \ h \in H, k \in K.$

14. समूह के उपसमूह के प्रसामान्यक की परिभाषा, कुछ उदाहरण, और उसके मौलिक गुण।

6.6 हल/उदाहरण

E1) इकाई 4 से आप जानते हैं कि D_8 को $\{r, R_{90}\}$ जनित करता है, जहाँ $o(r) = 2, o(R_{90}) = 4$ और $rR_{90} = R_{90}^{-1}r.$

मान लीजिए $H = <r> = \{I, r\}$ तथा $K = <R_{90}> = \{I, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}.$

तब, $HR_{90} = \{R_{90}, rR_{90}\}$ और $R_{90}H = \{R_{90}, R_{90}r\}.$

क्योंकि $R_{90}r \neq R_{90}$ और $R_{90}r \neq rR_{90}$, इसलिए $HR_{90} \neq R_{90}H.$

इस प्रकार, $H \ntriangleleft D_8.$

अब, $KR = K = RK \ \forall \ R \in K.$

साथ ही, $Kr = rK$ दिखाने के लिए, आपको इकाई 2 में D_8 की केली सारणी का उपयोग करना चाहिए।

अतः, $Kx = xK \ \forall \ x \in D_8.$

इस प्रकार, $K \triangleleft D_8.$

E2) $S_3 = \{I, (1\ 2), (1\ 3), (2, 3), (1\ 2\ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\},$

$H = \{I, (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}.$

अब, $\forall \ \sigma \in H, \sigma H = H = H\sigma.$

आप इसकी जाँच कीजिए कि

$H(1\ 2) = (1\ \ 2)H, \ H(1\ 3) = (1\ 3)H, \ H(2\ 3) = (2\ 3)H.$

$\therefore H \triangleleft S_3.$

E3) मान लीजिए $H \leq U_{30}$. इकाई 4 से आप जानते हैं कि $H = <\zeta^i>$ किसी ऐसे i के लिए कि $o(\zeta^i)\big|30$, जहाँ ζ एक का एक पूर्वग 30वां मूल है।

तब, किसी भी $\zeta^j \in U_{30}$ के लिए,

$$H\zeta^j = \{\zeta^{im} \cdot \zeta^j \big| m \in \mathbb{Z}\} = \{\zeta^j \cdot \zeta^{im} \big| m \in \mathbb{Z}\} = \zeta^j H.$$

अतः, $H \lhd U_{30}$.

E4) मान लीजिए $G = <g>$. तब, इकाई 4 से आप जानते हैं कि $H = <g^m>$, किसी $m \in \mathbb{Z}$ के लिए। अतः, E3 की ही तरह, आप दर्शा सकते हैं कि $H \lhd G$.

E5) हाँ। क्योंकि $x \in xH$, इसलिए $x \in Hy$. अतः, $Hx \cap Hy \neq \varnothing$.

तब उपप्रमेय 1, इकाई 5 से, $Hx = Hy$.

अतः, प्रत्येक $x \in G$ के लिए, $xH = Hx$. अतः, $H \lhd G$.

E6) किसी भी $A \in GL_2(\mathbb{R})$ और $B \in SL_2(\mathbb{R})$ के लिए,

$$\det(A^{-1}BA) = \det(A^{-1})\ \det(B)\det(A)$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\det(A),$$ क्योंकि $\det(B) = 1$.

$$= 1.$$

$\therefore A^{-1}BA \in SL_2\ (\mathbb{R})$.

$\therefore SL_2(\mathbb{R}) \lhd GL_2(\mathbb{R})$, प्रमेय 1(ii) द्वारा।

E7) यह नहीं है। उदाहरणार्थ, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ और $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix} \in H$.

परंतु $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \notin H$, जिसका आपको सत्यापन करना चाहिए।

अतः, $H \lhd GL_2(\mathbb{C})$.

E8) मान लीजिए $g \in G$ और $x \in Z(G)$. तब,

$g^{-1}xg = g^{-1}gx$, क्योंकि $x \in Z(G)$.

$\quad = x \in Z(G)$.

$\therefore g^{-1}Z(G)g \subseteq Z(G)\ \forall\ g \in G$.

$\therefore Z(G) \lhd G$.

E9) नहीं। उदाहरणार्थ, $H = <(1\,2)>$, S_3 का एक आबेली उपसमूह है।

परंतु, जैसा आप भाग 6.2 में देख चुके हैं, $H \ntriangleleft G$.

E10) क्योंकि $(1\ 2\ 3)^{-1}(2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 2) \notin <(2\ 3)>$, इसलिए $<(2\ 3)> \triangleleft S_3$.

E11) सभी, क्योंकि यह समूह आबेली है (जिसकी आपको जाँच करनी चाहिए)।

E12) नहीं। उदाहरणार्थ, D_8 में $H = <r>$ लीजिए।

E1 में, आप देख चुके हैं कि $<r> \ntriangleleft D_8$.

परंतु, आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि $g^{-1}Hg = gHg^{-1}\ \forall\ g \in D_8$.

E13) $D_{2n} = <r, R>$, जहाँ $H = \{R^i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}$ घूर्णनों का समुच्चय है।

अब, $o(H) = n$, क्योंकि $H = <R>$. साथ ही, $o(D_{2n}) = 2n$.

अतः, $|D_{2n} : H| = 2$. इस प्रकार, प्रमेय 2 द्वारा, $H \triangleleft D_{2n}$.

E14) **विलोम**: यदि G एक समूह है तथा $H \triangleleft G$. तो $|G:H| = 2$.

$\mathbb{Z}$. में $3\mathbb{Z}$ पर विचार कीजिए। क्योंकि $\mathbb{Z}$ आबेली है, इसलिए $3\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$.

परंतु, $|\mathbb{Z} : 3\mathbb{Z}| = 3$, जैसा कि आप इकाई 5 से जानते हैं।

इस प्रकार, प्रमेय 2 का विलोम असत्य है।

E15) आप पहले देख चुके हैं कि $\wp(T) \le \wp(S)$.

अब, $o(\wp(T) = 2^{n-1}$ और $o(\wp(S)) = 2^n$.

अतः, $|\wp(S) : \wp(T)| = 2^n/2^{n-1} = 2$.

इस प्रकार, $\wp(T) \triangleleft \wp(S)$.

E16) प्रमेय 10, इकाई 5 द्वारा, आप जानते हैं कि $o(G) = o(Stab_G(x))\ |Orb_G(x)|$.

अतः, $o(G) = 2o(Stab_G(x))$.

इसलिए, $|G : Stab_G(x)| = 2$.

इस प्रकार, प्रमेय 2 द्वारा, $Stab_G(x) \triangleleft G$.

E17) किसी भी अभाज्य p के लिए, $|U_p| = p$, एक अभाज्य। अतः, उदाहरण 7 द्वारा, U_p सरल है। साथ ही, क्योंकि U_n चक्रीय है, इसलिए (इकाई 4 से), आप जानते हैं कि यह सरल तभी होगा जब $n = p$.

E18) उदाहरणार्थ, $\mathbb{Z}_6$ और S_3 दोनों कोटि 6 के हैं। इनमें से कोई भी सरल नहीं है। व्यापक रूप से, यदि G_1 और G_2 कोटि n वाले समूह हैं, जहाँ G_1 आबेली है तथा G_2 आबेली नहीं है, तो n अभाज्य नहीं हो सकता। इसका कारण है कि अभाज्य कोटि वाला प्रत्येक समूह चक्रीय होता है, और इसीलिए आबेली होता है। अतः, प्रमेय 3 द्वारा, G_1 सरल नहीं हो सकता। परंतु, G_2 सरल हो सकता है, जैसा कि आप इकाई 9 में देखेंगे।

E19) क्योंकि ऐसा समूह आबेली होता है, इसलिए इसके उचित चक्रीय उपसमूह होंगे, जो प्रसामान्य होंगे। अतः, यह सरल नहीं होगा।

E20) मान लीजिए G_1 और G_2 सरल समूह हैं। तब, $G_1 \times \{e_2\} \triangleleft G_1 \times G_2$, जैसा आप उदाहरण 5 में देख चुके हैं। साथ ही, $G_1 \times \{e_2\}$ तुच्छ नहीं है, क्योंकि G_1 तुच्छ नहीं है।

अतः, $G_1 \times G_2$ सरल नहीं है।

E21) हमें दिया है कि $H \le G$.

क्योंकि $o(g^{-1}hg) = o(h) \ \forall \ g \in G, h \in H$, इसलिए $g^{-1}hg \in H$.

अतः, $H \triangleleft G$.

यदि G परिमित है तथा $n \nmid o(G)$, तो $H = \emptyset$. है। अतः, तुच्छीय रूप से $H \not\le G$,

यदि $n = 1$, तो $H = \{e\} \le G$.

इसलिए, एक उदाहरण देने के लिए हमें किसी $n \ge 2$ को लेना पड़ेगा। परंतु, अब देखिए क्या होता है। क्योंकि $e \in G$ कोटि 1 का है, इसलिए किसी भी $n \ge 2$ के लिए, $e \notin H$. अतः, किसी भी $n \ge 2$ के लिए, $H \not\le G$.

E22) क्योंकि $o(H) = 2$, इसलिए $H = \langle h \rangle = \{e, h\}$, जहाँ $h^2 = e$.

क्योंकि $H \triangleleft G$, इसलिए $g^{-1}hg \in H \ \forall \ g \in G$ और $h \in H$.

अतः, किसी भी $g \in G$ के लिए, $g^{-1}hg = e$ या $g^{-1}hg = h$.

यदि $g^{-1}hg = e$, तो $h = e$, जो इस तथ्य का अंतर्विरोध है कि $o(h) = 2$.

इस प्रकार, $g^{-1}hg = h$, अर्थात् $hg = gh \ \forall \ g \in G$. अतः, $H \subseteq Z(G)$.

इसलिए, $H \le Z(G)$.

E23) $K \le H$ और $H \le G$. इस प्रकार, इकाई 3 से आप जानते हैं कि $K \le G$. परंतु, G में K का प्रसामान्य होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरणार्थ, $K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ लीजिए। तब, आपको दिखाना चाहिए कि

$K \le SL_2(\mathbb{R})$. साथ ही, आप जानते हैं कि $SL_2(\mathbb{R}) \lhd GL_2(\mathbb{R})$.

अब, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ तथा $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K$ लीजिए।

तब, $A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}A \notin K$, जिसकी आपको जाँच करनी चाहिए।

अतः, $K \ntrianglelefteq G$.

E24) सर्वप्रथम, $H \cup K \le G$ यदि और केवल यदि $H \le K$ या $K \le H$, जैसा कि आप इकाई 3 से जानते हैं।

अतः, $H \cup K \le G \Rightarrow H \cup K = H$ या $H \cup K = K$.

इस प्रकार, G में यह दिया रहने पर कि H और K प्रसामान्य हैं, तब $H \cup K \lhd G$ iff $H \cup K \le G$, अर्थात् iff $H \le K$ या $K \le H$.

E25) हाँ। यह देखने के लिए कि ऐसा क्यों है, $x \in H \cap K$ और $h \in H$ लीजिए।

अब, $x \in H \cap K \Rightarrow x \in H$ और $x \in K$.

अतः, $h^{-1}xh \in H$, क्योंकि $x, h \in H$.

साथ ही, $K \lhd G \Rightarrow h^{-1}xh \in K$.

अतः, $h^{-1}xh \in H \cap K$.

इस प्रकार, $H \cap K \lhd H$.

E26) हाँ। सर्वप्रथम, इकाई 3 में आप देख चुके हैं कि $H \times K \le G_1 \times G_2$.

आगे, मान लीजिए कि $(h, k) \in H \times K$ और $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. तब,
$(g_1, g_2)^{-1}(h, k)(g_1, g_2) = (g_1^{-1}hg_1, g_2^{-1}kg_2) \in H \times K$, क्योंकि

$H \lhd G_1$ और $K \lhd G_2$.

अतः, $H \times K \lhd G_1 \times G_2$.

E27) i) मान लीजिए $hk \in HK$. क्योंकि $H \lhd G$, इसलिए $k^{-1}hk \in H$, मान लीजिए $k^{-1}hk = h'$.

तब, $hk = kh' \in KH$. इस प्रकार, $HK \subseteq KH$.

इसी प्रकार, दर्शाइए कि $KH \subseteq HK$.

इस प्रकार, $HK = KH$.

अतः, प्रमेय 7, इकाई 3 से आप जानते है कि $HK \le G$.

ii) क्योंकि $H \lhd G$ और $K \lhd G$, इसलिए उपरोक्त (i) से $HK \le G$.

अब, किसी भी $g \in G$ और $hk \in HK$ के लिए,

$g^{-1}hkg = (g^{-1}hg)(g^{-1}kg) \in HK$, क्योंकि $H \triangleleft G$ और $K \triangleleft G$.

इस प्रकार, $HK \triangleleft G$.

iii) नहीं, जैसा कि आप उदाहरण 8 में देख चुके हैं।

E28) i) HK में hk और h_1k_1 पर विचार कीजिए।

तब, $hkh_1k_1(hk)^{-1}(h_1k_1)^{-1}$ पर विचार कीजिए। यदि हम दर्शा दें कि यह $H \cap K$ में है, तो $(hk)(h_1k_1) = (h_1k_1)(hk)$, अर्थात् HK आबेली होगा।

अब, $hkh_1k_1k^{-1}h^{-1}k_1^{-1}h_1^{-1}$

$= hkh_1k^{-1}k_1h^{-1}k_1^{-1}h_1^{-1}$, क्योंकि K आबेली है।

क्योंकि $h, kh_1k^{-1}, k_1h^{-1}k_1^{-1}, h_1^{-1} \in H$, इसलिए

$h(kh_1k^{-1})(k_1h^{-1}k_1^{-1})h_1^{-1} \in H.$

अतः, $hkh_1k_1k^{-1}h^{-1}k_1^{-1}h_1^{-1} \in H.$

साथ ही, $hkh_1k_1k^{-1}h^{-1}k_1^{-1}h_1^{-1}$

$= hk\,(h^{-1}h)h_1k_1k^{-1}(h_1^{-1}h_1)h^{-1}k_1^{-1}h_1^{-1}$

$= (hkh^{-1})hh_1k_1k^{-1}(hh_1)^{-1}h_1k_1^{-1}h_1^{-1}$, क्योंकि H आबेली है।

$\in K.$

इस प्रकार, हमें परिणाम प्राप्त हो जाता है।

ii) नहीं। उदाहरणार्थ, चतुष्टयी समूह Q_8 तथा $H = \langle A \rangle, K = \langle B \rangle$ लीजिए। तब, $H \cap K = \{\pm I\}$.

साथ ही, $HK = Q_8$, जो आबेली नहीं है।

ध्यान दीजिए कि H और K दोनों Q_8 के प्रसामान्य आबेली उपसमूह हैं।

E29) हम जानते हैं कि प्रत्येक $x \in G$ को hk के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ $h \in H$ और $k \in K$.

$\therefore G = HK.$

हमें दर्शाना है कि $H \cap K = \{e\}$.

मान लीजिए कि $x \in H \cap K$.

तब, $x \in H$ और $x \in K$.

$\therefore xe \in HK$ और $ex \in HK$.

अतः, x के H के एक अवयव और K के एक अवयव के गुणनफल के रूप में दो निरूपण xe और ex हैं। परंतु हम मान कर चले हैं कि प्रत्येक अवयव का **केवल एक निरूपण** होना चाहिए। इसलिए, दोनों निरूपण, xe और ex, एक ही होने चाहिए। अर्थात् $x = e$.

$\therefore H \cap K = \{e\}$.

$\therefore G = H \times K$.

E30) क्योंकि G परिमित है, इसलिए H और K भी परिमित हैं।

अब, $G = HK$, जहाँ $H \cap K = \{e\}$.

अतः, $o(G) = o(HK) = o(H) \cdot o(K)$, इकाई 3 से।

E31) क्योंकि $<A> \cap <B> = \{\pm I\}$, इसलिए $Q_8 \neq <A> \times <B>$.

E32) पहले, सत्यापित कीजिए कि $\mathbb{R}^+$ और $\{1, -1\}$, $\mathbb{R}^*$ के उपसमूह हैं।

क्योंकि $\mathbb{R}^*$ आबेली है, इसलिए ये प्रसामान्य उपसमूह हैं।

आगे, किसी भी $r \in \mathbb{R}^*$ के लिए, $r > 0$ या $r < 0$.

अतः, $r = \pm |r| \in <-1> \mathbb{R}^+$.

साथ ही, $<-1> \cap \mathbb{R}^+ = \{1\}$.

इस प्रकार, $\mathbb{R}^* = <-1> \times \mathbb{R}^+$.

E33) $H \triangleleft G \Leftrightarrow g^{-1}Hg = H \;\forall\; g \in G$

$\Leftrightarrow g \in N(H) \;\forall\; g \in G$

$\Leftrightarrow N(H) = G$.

E34) $N(H) = \{g \in G | g^{-1}Hg = H\}$.

अतः, $\forall\; g \in N(H), g^{-1}Hg = H$. अतः, $H \triangleleft N(H)$.

E35) $N(<g>) = \{x \in G | x^{-1}gx = g^i$ किसी $i \in \mathbb{Z}$ के लिए$\}$

$N(Z(G)) = \{g \in G | g^{-1}Z(G)g = Z(G)\}$.

क्योंकि $Z(G) \triangleleft G$, इसलिए $N(Z(G)) = G$.

E36) नहीं। यदि $H = \{e\}$, तो $N(H) = G \neq \{e\}$.

यदि $H \neq \{e\}$, तो $H \leq N(H)$. इस प्रकार, $N(H) \neq \{e\}$.

E37) $< r > = \{I, r\}$.

क्योंकि $R^4 = I$ और $R^{-i}rR^i = rR^{2i}$, इसलिए $R^{-2}rR^2 = rR^4 = r$.

अतः, $R^2 \in N(< r >)$.

क्योंकि $(rR^i)^{-1}r(rR^i) = R^{-i}rR^i = rR^{2i}$, इसलिए $rR^2 \in N(< r >)$ भी है।

साथ ही, $i = 1, 3$ के लिए, $N(< r >)$ में R^i और rR^i नहीं हैं, क्योंकि $rR^{2i} \notin < r >$.

अतः $N(< r >) = \{I, r, R^2, rR^2\}$.

इकाई 7

विभाग समूह

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

7.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
7.2 जब सहसमुच्चय समूह बनाते हैं
7.3 विभाग समूहों के गुण
7.4 सारांश
7.5 हल/उत्तर

7.1 प्रस्तावना

इस खंड में अभी तक आपने उपसमूहों के वाम और दक्षिण सहसमुच्चयों के विभिन्न पहलुओं का अध्ययन किया है। परंतु, हमने किसी उपसमूह के सहसमुच्चयों के समुच्चय पर द्वि-आधारी संक्रिया की चर्चा नहीं की है। इस इकाई में हम ऐसी एक संक्रिया को परिभाषित करेंगे तथा देखेंगे, कि क्या वह समुच्चय इस संक्रिया के सापेक्ष एक समूह है या नहीं।

भाग 7.2 में आप देखेंगे कि किस प्रकार समूह G पर द्वि-आधारी संक्रिया का G के एक प्रसामान्य उपसमूह के सहसमुच्चयों के समुच्चय पर एक द्विआधारी संक्रिया को परिभाषित करने के लिए उपयोग किया जा सकता है। परंतु, यह परिभाषा तब काम नहीं करती है अगर संबंधित उपसमूह प्रसामान्य नहीं है, जैसा कि आप देखेंगे। आगे, आप देखेंगे कि किसी प्रसामान्य उपसमूह के सहसमुच्चयों का समुच्चय इस संक्रिया के सापेक्ष एक समूह क्यों है। हम इस समूह को विभाग समूह कहते हैं। रोचक बात यह है कि गैलोआ ने प्रसामान्य उपसमूहों को इस प्रकार बनाया था कि इसके सहसमुच्चयों से एक समूह बने।

अगले भाग, भाग 7.3 में, आप विभाग समूहों के अनेक गुणों का अध्ययन करेंगे। ये गुण आपको विभाग समूह की संकल्पना की शक्ति को समझने में सहायता देंगे।

विभाग समूहों पर एक पूरी इकाई को देने का हमारा उद्देश्य है कि आपको इस संकल्पना को समझने के लिए अधिक समय लगाने का अवसर मिले। इसका कारण यह है कि अनेक लोग विभाग समूह की अवधारणा एक बार पढ़ने से नहीं समझ पाते हैं। कृपया इस इकाई का सावधानीपूर्वक अध्ययन कीजिए, ताकि आपको नीचे दिए गए सीखने के उद्देश्यों को प्राप्त करने में सहायता हो।

उद्देश्य

इस इकाई की पढ़ाई के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे:

- विभाग समूह को परिभाषित करना, और उसके उदाहरण देना;

- स्पष्ट करना कि कोई विभाग समूह G/N के बनने के लिए $N \triangleleft G$ क्यों आवश्यक है;
- विभाग समूहों के कुछ मौलिक गुणों को सिद्ध करना, तथा उनका अनुप्रयोग करना।

6.2 जब सहसमुच्चय समूह बनाते हैं

आइए S_3 और $H = \{I, (1\ 2)\}$ पर विचार करते हुए प्रारंभ करें। S_3 में H के दक्षिण सहसमुच्चयों का समुच्चय $A = \{H, H(1\ 3), H(2\ 3)\}$ है। अब, यह स्वाभाविक लगता है कि S_3 पर संयोजन का उपयोग करते हुए A पर एक संक्रिया $*$ परिभाषित करें, अर्थात्, A में $H\sigma, H\rho$ के लिए, $H\sigma * H\rho = H(\sigma \circ \rho) \in A$ से $*$ को परिभाषित करें, क्या यह संक्रिया सुपरिभाषित है? आइए देखें।

जिस प्रकार $*$ को परिभाषित किया गया है, यह A पर संवृत है।

परंतु, ध्यान दीजिए कि $H(1\ 3) = H(1\ 3\ 2)$, क्योंकि $(1\ 3)(1\ 3\ 2)^{-1} \in H.$ इसी प्रकार, $H(2\ 3) = H(1\ 2\ 3).$

अतः, यदि $*$ सुपरिभाषित होता, तो $H(1\ 3) * H(2\ 3)$ को $H(1\ 3\ 2) * H(1\ 2\ 3)$ के बराबर होना चाहिए। परंतु $H(1\ 3) * H(2\ 3) =$ $H((1\ 3) \circ (2\ 3)) = H(2\ 1\ 3) = H((1\ 2) \circ (1\ 3)) = H(1\ 3),$ क्योंकि $(1\ 2) \in H$, तथा $H(1\ 3\ 2) * H(1\ 2\ 3) = H((1\ 3\ 2) \circ (1\ 2\ 3)) = HI = H.$

साथ ही, $H(1\ 3) \neq H$, क्योंकि $(1\ 3) \notin H.$

अतः, $*$ सुपरिभाषित नहीं है।

अब S_3 में $K = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ पर विचार कीजिए।

S_3 में K के सहसमुच्चयों के समुच्चय पर $K\sigma * K\rho = K(\sigma \circ \rho)\ \forall\ \sigma, \rho \in S_3$ द्वारा दिए जाने वाली संक्रिया $*$ पर विचार कीजिए।

परिभाषा द्वारा, K के सहसमुच्चयों के समुच्चय पर $*$ संवृत है।

आइए देंखे कि यदि $K\sigma_1 = K\sigma_2$ और $K\rho_1 = K\rho_2$, तो क्या $K(\sigma_1 \circ \rho_1) = K(\sigma_2 \circ \rho_2)$, है या नहीं, जहाँ $\sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2 \in S_3$.

यहाँ, यदि $\sigma_1 \in K$ या $\rho_1 \in K$, तो किसी जाँच की आवश्यकता नहीं है। (क्यों?)

अब, यदि $\sigma_1 = (1\ 2)$ और $\sigma_2 = (2\ 3)$ तथा $\rho_1 = (1\ 3)$ और $\rho_2 = (1\ 2)$, तो $\sigma_1 \circ \rho_1 \in K, \sigma_2 \circ \rho_2 \in K.$

अतः, $K(\sigma_1 \circ \rho_1) = K = K(\sigma_2 \circ \rho_2).$ आप यही बात ऐसे प्रत्येक $\sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2$ के लिए ज्ञात करेंगे जो K में नहीं हैं।

इस प्रकार, इस स्थिति में $*$ सुपरिभाषित है।

इस संदर्भ में, H और K में अंतर यह है कि $H \ntriangleleft S_3$, जबकि $K \triangleleft S_3$.

अतः, ऐसा प्रतीत होता है कि यदि $K \triangleleft S_3$, तो हम G में K के सहसमुच्चयों के समुच्चय पर एक द्वि-आधारी संक्रिया परिभाषित कर सकते हैं, जिसके सापेक्ष यह समुच्चय संभवतः एक समूह हो जाए। आइए देखें कि क्या ऐसा वास्तव में है।

मान लीजिए H किसी समूह G का एक प्रसामान्य उपसमूह है। तब प्रत्येक $g \in G$ के लिए, $gH = Hg$. G में H के सभी सहसमुच्चयों के समुच्चय पर विचार कीजिए। **हम इस समुच्चय को G/H द्वारा व्यक्त करते हैं।**

(ध्यान दीजिए कि क्योंकि $H \triangleleft G$, इसलिए हमें 'वाम सहसमुच्चय' या 'दक्षिण सहसमुच्चय' लिखने की आवश्यकता नहीं है, केवल 'सहसमुच्चय' ही काफी है।)

अब आइए $* : G/H \times G/H \to G/H : Hx * Hy = Hxy$ से परिभाषित करें, जहाँ xy, G में गुणनफल है। तब, G/H पर * संवृत है। आइए देखें कि क्या * सुपरिभाषित है।

मान लीजिए $Hx = Hx_1$ और $Hy = Hy_1$, $x, x_1, y, y_1 \in G$ के लिए। तब,
$xx_1^{-1} \in H$, $yy_1^{-1} \in H$.

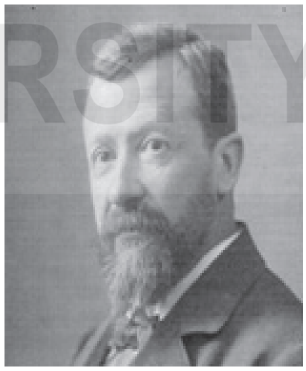
$$\therefore (xy)(x_1y_1)^{-1} = (xy)(y_1^{-1}x_1^{-1}) = x(yy_1^{-1})x_1^{-1}$$

$$= x(yy_1^{-1})x^{-1}(xx_1^{-1}) \in H, \text{ क्योंकि } xx_1^{-1}, yy_1^{-1} \in H \text{ तथा } H \triangleleft G.$$

अतः, $(xy)(x_1y_1)^{-1} \in H$.

$\therefore Hxy = Hx_1y_1$, अर्थात् * सुपरिभाषित है।

तो आपने देखा कि यदि $H \triangleleft G$, तो G/H पर * एक सुपरिभाषित द्वि-आधारी संक्रिया है। आप एक ऐसा उदाहरण भी देख चुके हैं जो दर्शाता है कि यदि $H \ntriangleleft G$, तो * सुपरिभाषित नहीं है। इस प्रकार, यह सुनिश्चित करने के लिए कि * सुपरिभाषित है, G में H को प्रसामान्य होना चाहिए।



आकृति 1: होल्डर (1859-1937)

आगे बढ़ने से पहले, संकेतन पर इस टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 1 : हम G/H पर संक्रिया को आमतौर पर गुणन द्वारा व्यक्त करेंगे, जब तक हम अन्य संक्रिया का विशेष रूप से उल्लेख न करें।

अब, हम दर्शाएँगे कि $(G/H, \cdot)$ एक समूह है। इस प्रमेय का श्रेय जर्मन गणितज्ञ औटो होल्डर (Otto Hölder) को जाता है, जिन्होंने इसे 1889 में सिद्ध किया था।

ध्यान दीजिए कि G/H के अवयव G के उपसमुच्चय हैं।

प्रमेय 1: मान लीजिए H समूह G का एक प्रसामान्य उपसमूह है। तब, $x, y \in G$ के लिए $Hx \cdot Hy = Hxy$ द्वारा परिभाषित गुणन के सापेक्ष, G/H एक समूह है। G/H का तत्समक सहसमुच्चय $H = He$ है तथा Hx का प्रतिलोम सहसमुच्चय Hx^{-1} है।

उपपत्तिः सर्वप्रथम G/H एक अरिक्त समुच्चय है, क्योंकि $H \in G/H$.

आगे, परिभाषा से, G/H में गुणन संवृत्त है।

यह गुणन साहचर्य भी है, क्योंकि

$((Hx)(Hy))(Hz) = (Hxy)(Hz)$

$= H(xy)z$

$= Hx(yz)$, क्योंकि G में गुणनफल सहचार्य है।

$= (Hx)(Hyz)$

$= (Hx)((Hy)(Hz))$, $x, y, z \in G$ के लिए।

अब, यदि G का तत्समक e है, तो $Hx \cdot He = Hxe = Hx$, प्रत्येक $x \in G$ के लिए।

साथ ही, $He = H$, क्योंकि $e \in H$. इस प्रकार, $Hx.H = Hx \forall x \in G$.

अंत में, किसी भी $x \in G$ के लिए, $(Hx)(Hx^{-1}) = Hxx^{-1} = He = H$.

अतः, $(G/H, \cdot)$ इकाई 2 के G1', G2' और G3' को संतुष्ट करता है। इसलिए यह एक समूह है जिसका तत्समक H है। आगे, Hx का प्रतिलोम Hx^{-1} है, $\forall x \in G$. ■

इस प्रकार, हमने सिद्ध कर लिया है कि G में एक प्रसामान्य उपसमूह H के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय G/H, $Hx \cdot Hy = Hxy$ द्वारा परिभाषित गुणन के सापेक्ष एक समूह है इससे हम निम्नलिखित परिभाषा पर पहुँचते हैं।

परिभाषा: मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \triangleleft G$. **समूह** $(G/H, \cdot)$ समूह G का H द्वारा **विभाग समूह** (quotient group) [या **गुणनखंड समूह** (factor group), कहलाता है।

उदाहरणार्थ, आप देख चुके हैं कि S_3/K एक विभाग समूह है, जहाँ $K = <(1\ 2\ 3)>$. ध्यान दीजिए कि S_3/K में अवयवों की संख्या 2 है, तथा ये अवयव K और $K(1\ 2)$ हैं। इस प्रकार, $o(S_3/K) = |S_3 : K|$. इस संदर्भ में, निम्नलिखित प्रेक्षण पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 2: G/H का गणनांक G में H के भिन्न-भिन्न सहसमुच्चयों की संख्या है। जैसा कि आप इकाई 5 से जानते हैं, यह संख्या $|G:H|$ है, जो कि G में H का सूचकांक है।

इस प्रकार, यदि G/H परिमित है, तो $o(G/H) = |G:H|$.

अतः, यदि G एक परिमित समूह है और $H \triangleleft G$, तो लग्रांज के प्रमेय द्वारा,

$$\mathbf{o(G/H) = \frac{o(G)}{o(H)}}.$$

अब, आइए G/H पर संक्रिया से संबंधित कुछ प्रेक्षणों पर विचार करें।

टिप्पणी 3: i) ध्यान दीजिए कि यदि $H \triangleleft G$, तो $xH = Hx\ \forall\ x \in G$. अतः

G/H में,

$$(xH)\cdot(yH) = Hx\cdot Hy = Hxy = xyH.$$

ii) यदि $(G, +)$ एक आबेली समूह है तथा $H \le G$, तो आप जानते हैं कि $H \lhd G$.

इस स्थिति में, G/H पर संक्रिया

$(H+x)+(H+y) = H+(x+y)$ द्वारा परिभाषित है।

अब, आइए विभाग समूहों के कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 1: समूह G/H प्राप्त कीजिए, जहाँ $G = S_3$ और $H = S_3$.

हलः सर्वप्रथम, ध्यान दीजिए कि $S_3 \lhd S_3$ है। अतः, S_3/S_3 एक समूह है। S_3 का S_3 में सहसमुच्चय केवल S_3 है। अतः, इस गुणनखंड समूह में अवयव केवल S_3 है, जो तत्समक अवयव है। अतः, S_3/S_3 तुच्छ समूह है।

***

जो आपने उदाहरण 1 में देखा है, वह किसी भी समूह के लिए सत्य है। निम्नलिखित महत्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 4: किसी भी समूह G के लिए, **G/G तुच्छ समूह होता है।** यह सभी समूहों के लिए सत्य है, चाहे वह परिमित या अपरिमित हो, आबेली या अन्आबेली हो, चक्रीय हो या अचक्रीय हो।

अब एक अपरिमित चक्रीय समूह के उदाहरण पर विचार कीजिए, जिसका विभाग समूह एक परिमित चक्रीय समूह है।

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि समूह $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ कोटि n वाला है।

हलः आप जानते हैं कि $\mathbb{Z} = <1>$, एक अपरिमित चक्रीय समूह।

इकाई 5 में आप देख चुके हैं कि $\mathbb{Z}$ में $n\mathbb{Z}$ के सभी सहसमुच्चय

$a+n\mathbb{Z} = \{a+kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ के रूप के हैं, जहाँ $a = 0, 1, \ldots, n-1.$ इस प्रकार,

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$, जहाँ $\overline{i}$ सहसमुच्चय $i+n\mathbb{Z}$ को व्यक्त करता है।

अब, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ में संक्रिया $\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b}$ द्वारा दी जाती है। अतः, किसी भी $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ के लिए, $\overline{m} = \overline{1}+\overline{1}+\cdots+\overline{1}(m \text{ बार}) = m\cdot\overline{1}.$

इस प्रकार, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = <\overline{1}>$ जहाँ $o(\overline{1}) = n$, क्योंकि $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ में $n\cdot\overline{1} = \overline{0}$, और

$0 < m < n$ के लिए, $m.\overline{1} \ne \overline{0}.$

अतः, $o(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$.

***

उपरोक्त उदाहरण में ध्यान दीजिए कि $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ के अवयव समशेषता वर्ग मोड्यूलो n ही हैं, अर्थात् $\mathbb{Z}_n$ के अवयव हैं।

आगे, आइए एक अचक्रीय आबेली समूह के उदाहरण पर विचार करें, तथा देखें कि क्या इसका विभाग समूह सदैव अचक्रीय होता है।

उदाहरण 3: समूह Q_8 तथा इसके उपसमूह $H = \{\pm I, \pm A\}$ (उदाहरण 2, इकाई 6 देखिए) पर विचार कीजिए। Q_8/H के अवयव प्राप्त कीजिए, तथा इसके प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए। साथ ही, Q_8/K की केली सारणी भी प्राप्त कीजिए, जहाँ $K = \{\pm I\}$.

हल: इकाई 6 में आप देख चुके हैं कि $H \triangleleft Q_8$ है। इकाई 4 में आप देख चुके हैं कि Q_8 चक्रीय नहीं है।

अब, $o(Q_8/H) = \dfrac{o(Q_8)}{o(H)} = \dfrac{8}{4} = 2$, टिप्पणी 2 द्वारा।

अतः, इकाई 4 से आप जानते हैं कि Q_8/H चक्रीय है तथा यह कोटि 2 के एक अवयव द्वारा जनित होता है।

इकाई 6 के उदाहरण 2 में, आप यह भी देख चुके हैं कि $Q_8/H = \{H, HB\}$, जहाँ

$$B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

यहाँ $o(H) = 1$, क्योंकि H, Q_8/H का तत्समक है।

साथ ही, $o(HB) = 2$, क्योंकि $HB \cdot HB = HB^2$ तथा $B^2 = -I \in H$.

इस प्रकार, $Q_8/H = < HB >$.

अतः, Q_8 अचक्रीय है, परंतु Q_8/H चक्रीय है।

आगे Q_8/K की कोटि 4 है। आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि इसके अतुच्छ अवयवों KA, KB और KAB में से प्रत्येक कोटि 2 का है। अतः केली सारणी नीचे दिए अनुसार है:

.	K	KA	KB	KAB
K	K	KA	KB	KAB
KA	KA	K	KAB	KB
KB	KB	KAB	K	KA
KAB	KAB	KB	K	K

इस सारणी से आप देख सकते हैं कि यह क्लाइन 4-समूह (देखिए उदाहरण 3, इकाई 2) ही है।

***

अगले उदाहरण पर जाने से पहले, एक महत्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए, जो उदाहरण 3 से निकलती है।

टिप्पणी 5: उदाहरण 3 में आप देख चुके हैं कि $o(HB) = 2.$ यह HB की कोटि है, समूह G/H के एक अवयव के तौर पर। साथ ही, HB समूह Q_8 का उपसमुच्चय $\pm B, \pm AB$ भी है, जिसका गणनांक 4 है। **यह गणनांक और HB की कोटि, Q_8/H के अवयव के रूप में, दो अलग बातें हैं। इन्हें एक मत समझिए।**

अब आइए कुछ ऐसे उदाहरणों पर विचार करें जहाँ G/H अपरिमित है।

उदाहरण 4: दर्शाइए कि G/H एक अपरिमित समूह है, जहाँ $G = GL_2(\mathbb{R})$ और $H = SL_2(\mathbb{R})$.

G/H के परिमित कोटि वाले कितने अवयव हैं, तथा संभव परिमित कोटियाँ क्या हैं?

हल: हम जानते हैं कि $SL_2(\mathbb{R}) \triangleleft GL_2(\mathbb{R})$ (देखिए E6, इकाई 6)।

G/H का कोई भी अवयव $A \cdot SL_2(\mathbb{R})$ के रूप का है, जहाँ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$ साथ ही, ध्यान दीजिए कि $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ के लिए,

$A \cdot SL_2(\mathbb{R}) = B \cdot SL_2(\mathbb{R})$ iff $B^{-1}A \in SL_2(\mathbb{R})$, अर्थात् iff $\det(B^{-1}A) = 1$ है, अर्थात iff $\det A = \det B \neq 0.$

आगे, प्रत्येक $n \in \mathbb{Z}$ के लिए, $\det\left(\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = n.$ अतः, G/H में कम से कम उतने अवयव हैं जितने शून्येतर पूर्णांक हैं। इस प्रकार, G/H एक अपरिमित समूह है।

आगे, $A \notin SL_2(\mathbb{R})$ के लिए, $A \cdot SL_2(\mathbb{R})$ परिमित कोटि m का है

$\Leftrightarrow A \cdot SL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow A^m \in SL_2(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow (\det A)^m = 1$

$\Leftrightarrow \det A = -1,$ क्योंकि $A \notin SL_2(\mathbb{R})$ तथा $\det A \in \mathbb{R}.$

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि सारणिक (-1) वाले $GL_2(\mathbb{R})$ अनंततः अनेक आव्यूह हैं। उदाहरणार्थ, प्रत्येक $b \in \mathbb{R}$ के लिए, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & b-1 \end{bmatrix}$ एक ऐसा प्रकार है।

इसके आगे, ध्यान दीजिए कि

$$\det A = -1 \Rightarrow \det A^2 = 1 \Rightarrow A^2 \in SL_2(\mathbb{R}) \Rightarrow o(A \cdot SL_2(\mathbb{R})) = 2.$$

इस प्रकार, यदि $A \cdot SL_2(\mathbb{R})$ परिमित कोटि का है, तो कोटि 1 या 2 होनी चाहिए।

***

उदाहरण 5: $G = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha^m = 1,$ किसी $m \in \mathbb{Z}$ के लिए $\}$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि $\mathbb{C}^*$ का G एक उपसमूह है। यह भी दर्शाइए कि $U_{10} \lhd G$, तथा $|G : U_{10}|$ ज्ञात कीजिए।

हलः पहले तो, $G \neq \varphi$. (क्यों?)

दूसरे, गुणनात्मक तत्समक $1 \in G$. (क्यों)

तीसरे, यदि $\alpha \in G$, तो किसी $m \in \mathbb{Z}$ के लिए $\alpha^m = 1$. अतः, $(\alpha^{-1})^m = 1$.
इस प्रकार, $\alpha^{-1} \in G$.

अंत में, यदि $\alpha, \beta \in G$, तो किन्हीं $m, n \in \mathbb{Z}$ के लिए $\alpha^m = 1 = \beta^n$.

अतः, $(\alpha\beta)^{mn} = \alpha^{mn}\beta^{mn} = 1$. इसलिए $\alpha\beta \in G$.

इस प्रकार, $G \leq \mathbb{C}^*$.

अब, $U_{10} = \{\alpha \in \mathbb{C}^* \mid \alpha^{10} = 1\} \leq \mathbb{C}^*$ और $U_{10} \subseteq G$. इस प्रकार, $U_{10} \leq G$.

क्योंकि G आबेली है, इसलिए $U_{10} \lhd G$.

अब, प्रत्येक अभाज्य p के लिए, जहाँ $p \nmid 10$, मान लीजिए ζ एक पूर्वग p वों मूल है। तब $\zeta U_{10} \neq U_{10}$, क्योंकि $\zeta^{10} \neq 1$.

साथ ही, $\zeta_1 U_{10} = \zeta_2 U_{10}$ iff $(\zeta_1\zeta_2^{-1})^{10} = 1$, अर्थात् iff $\zeta_1^{10} = \zeta_2^{10}$.

अतः, यदि, ζ_1 एक का एक पूर्वग p_1वाँ मूल है तथा ζ_2 एक का एक पूर्वग p_2वाँ मूल है, किन्हीं दो अलग अभाज्यों p_1 और p_2 के लिए जो 10 को विभाजित नहीं करते तो $\zeta_1 U_{10} \neq \zeta_2 U_{10}$. यहाँ ध्यान दें कि $o(\zeta_1^{10}) = p_i, i = 1, 2$ के लिए।

इस प्रकार, $|G : U_{10}|$ कम से कम इतना बड़ा है जितने $\mathbb{N}$ में, 2 और 5 को छोड़ कर, अभाज्यों की संख्या है। अतः, यह अपरिमित है।

***

अब एक और 'परिमित उदाहरण' पर ग़ौर कीजिए।

उदाहरण 6: U_{15} के सभी गुणनखंड समूहों की कोटियाँ प्राप्त कीजिए। साथ ही, किसी एक अतुच्छ गुणनखंड समूह के अभी अवयवों को ज्ञात कीजिए।

हलः इकाई 4 से आप जानते हैं कि U_{15} के उपसमूह

$H_1 = <e>, H_2 = <\zeta>, H_3 = <\zeta^3>,\ H_4 = <\zeta^5>$ हैं, जहाँ ζ एक का एक पूर्वग 15वाँ मूल है।

इन समूहों की कोटियाँ निम्न प्रकार हैं:

$o(H_1) = 1,\ o(H_2) = 15,\ o(H_3) = 5,\ o(H_4) = 3.$

इस प्रकार, संगत गुणनखंड समूहों की कोटियाँ $o(G/H_i) = \dfrac{o(G)}{o(H_i)}$, अर्थात् क्रमशः

$\dfrac{15}{1}, \dfrac{15}{15}, \dfrac{15}{5}, \dfrac{15}{3}$ हैं, अर्थात् क्रमशः 15, 1, 3, 5 हैं।

अब G/H_3 पर विचार कीजिए।

ध्यान दीजिए कि $o(G/H_3)$ एक अभाज्य संख्या है। अतः, G/H_3 चक्रीय है। वस्तुतः

$G/H_3 = <\zeta H_3> = \{H_3, \zeta H_3, \zeta^2 H_3\}.$

***

उपरोक्त उदाहरण से संबंधित निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 6: आपने जो उदाहरण 6 (और उदाहरण 2) में देखा है, उसे हम व्यापकीकृत कर सकते हैं।

यदि $\mathbf{G = <g>}$ और $\mathbf{H = <g^n>}$, तो $\mathbf{o(G/H) = n}$, तथा $\mathbf{G/H = \{H, gH, \ldots, g^{n-1}H\} = <gH>}$.

अब, एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 7: D_8 और $H = <R_{90}>$ पर विचार कीजिए। आप इकाई 6 में दर्शा चुके हैं कि $H \lhd D_8$. D_8/H के अवयव ज्ञात कीजिए।

हलः पहले, $o(D_8/H) = \dfrac{8}{4} = 2.$ साथ ही, $r \notin H$, जहाँ r वर्ग के एक विकर्ण में परावर्तन है।

अतः, $D_8/H = \{H, Hr\}.$

***

अब, कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) मान लीजिए $V_4 = \{I, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \le S_4$. दर्शाइए कि $H = \{I, (1\ 2)(3\ 4)\} \lhd V_4$ तथा $o(V_4/H)$ ज्ञात कीजिए। साथ ही, पुष्टि करते हुए, V_4/H के दो अलग अवयव प्राप्त कीजिए।

E2) मान लीजिए $S = \{a, b, c\}$ और $T = \{a, b\}$. आप इकाई 6 में दर्शा चुके हैं कि

$\wp(T) \triangleleft \wp(S)$. $\wp(S)/\wp(T)$ के अवयव ज्ञात कीजिए।

E3) $\mathbb{Z}_{20}/\overline{8}\mathbb{Z}_{20}$ में $(\overline{3}+<\overline{8}>)$ की कोटि, तथा $\mathbb{Z}_{20}/\overline{9}\mathbb{Z}_{20}$ में $(\overline{3}+<\overline{9}>)$ की कोटि, ज्ञात कीजिए।

E4) $5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ के लिए केली सारणी बनाइए।

E5) $H \triangleleft G$ के साथ किसी परिमित समूह G में अवयवों, x, y का पुष्टि करते हुए, एक ऐसा उदाहरण दीजिए कि G/H में $Hx = Hy$, परंतु $o(x) \neq o(y)$.

E6) किसी भी समूह G के लिए, G और $\{e\}$ के संगत गुणनखंड समूह ज्ञात कीजिए।

E7) मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \leq G$ ऐसा है कि $(G/H, \cdot)$ एक समूह है, जहाँ '**.**' को प्रमेय 1 की तरह परिभाषित किया है। क्या G में H प्रसामान्य होगा? क्यों, या क्यों नहीं?

E8) मान लीजिए G एक समूह है, $H \triangleleft G$ तथा $a \in G$ s.t. $o(Ha) = 3$ और $o(H) = 10$. a की संभव कोटियाँ ज्ञात कीजिए।

E9) यदि G एक परिमित समूह है तथा $H \triangleleft G$, तो सिद्ध कीजिए कि $\forall g \in G$, G/H में $o(Hg)$, $o(g)$ को अवश्य विभाजित करेगा।

E10) दर्शाइए कि $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ में प्रत्येक कोटि के अवयव होते हैं। क्या $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ के प्रत्येक अवयव की परिमित कोटि होती है? क्यों?

E11) क्या $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ एक समूह है? क्यों, या क्यों नहीं?

इसके आगे, यदि $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ एक समूह है, तो $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ के दो भिन्न-भिन्न अतुच्छ अवयव, पुष्टि करते हुए, दीजिए। यदि यह समूह नहीं है, तो $\mathbb{C}$ का एक अतुच्छ उचित प्रसामान्य उपसमूह ज्ञात कीजिए।

E12) i) मान लीजिए $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. आप इकाई 2 में देख चुके हैं कि $\mathcal{F}$ बिंदुशः योग के सापेक्ष एक समूह है। मान लीजिए कि

$C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(r) = c \ \forall \ r \in \mathbb{R},$ जहाँ $c \in \mathbb{R}\}$ अचर फलनों का समुच्चय है। दर्शाइए कि $C \triangleleft \mathcal{F}$. $\mathcal{F}/C$ के अवयव किस प्रकार के दिखते हैं? क्या $\mathcal{F}/C$ परिमित है या अपरिमित है? क्या $\mathcal{F}/C$ आबेली है या अन्आबेली है?

ii) मान लीजिए $\text{Cont} = \{f \in \mathcal{F} \mid f, \mathbb{R}$ पर संतत है$\}$. दर्शाइए कि $\mathcal{F}/\text{Cont}$ एक सुपरिभाषित समूह है। क्या इसमें कोटि 2 वाला कोई अवयव है? क्यों, या क्यों नहीं?

अब तक आप विभाग समूहों को कुछ हद तक जान गए होंगे। आइए अब इन बीजीय वस्तुओं के कुछ बीजीय गुणों पर दृष्टि डालने की ओर बढ़ें।

7.3 विभाग समूहों के गुण

इस भाग में हम कुछ ऐसे के प्रश्नों पर विचार करेंगेः क्या G और G/H के समान बीजीय गुण हैं? उदाहरणार्थ, यदि G आबेली है, तो क्या इसके गुणनखंड समूह आबेली होंगे? तथा विलोमतः, यदि

$H \triangleleft G$ s.t. G/H आबेली है, तो क्या G आबेली होगा?

आइए एक प्रमेय से प्रारंभ करें।

प्रमेय 2: यदि G एक आबेली समूह है, तो G का प्रत्येक विभाग समूह आबेली होता है।

उपपत्तिः मान लीजिए $H \triangleleft G$ तथा $xH, yH \in G/H$.

तब, $(xH)(yH) = xyH = yxH,$ क्योंकि G आबेली है।

$$= (yH)(xH).$$

अतः, G/H आबेली है।

प्रमेय 2 से आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ आबेली है। (वैसे, इसे आप, पहले से ही जानते हैं!)। अब आप यह भी जानते हैं कि $\text{Ì}_{m\times n}(\mathbb{C})/H$, आबेली है, $(\text{Ì}_{m\times n}(\mathbb{C}), +)$ के प्रत्येक उपसमूह H के लिए।

अब प्रमेय 2 के विलोम के बारे में आप क्या कह सकते हैं? यदि **किसी** $H \triangleleft G$ **के लिए**, G/H आबेली है, तो क्या G का आबेली होना ज़रूरी है? यदि G के **प्रत्येक** अतुच्छ प्रसामान्य समूह के लिए, G/H आबेली है, तो क्या G का आबेली होना ज़रूरी है? निम्नलिखित प्रश्नों को हल करते समय, इन प्रश्नों के बारे में सोचिए।

E13) यह दर्शाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि यदि G/H आबेली है $\forall\, H \triangleleft G,\ H \neq \{e\}$ तो G का आबेली होना आवश्यक नहीं है।

E14) यदि G एक चक्रीय समूह है, तो $\forall\, H \triangleleft G$ क्या G/H का चक्रीय होना आवश्यक है? आगे, क्या इसका विलोम सत्य है, अर्थात् यदि किसी $H \triangleleft G$ के लिए G/H चक्रीय है, तो क्या G का चक्रीय होना आवश्यक है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

E15) i) यदि G एक परिमित समूह है, तो क्या $\forall\, H \triangleleft G,\ G/H$ का परिमित होना आवश्यक है?

ii) यदि G एक समूह है, $H \triangleleft G$, तथा G/H परिमित है, तो क्या G का परिमित होना आवश्यक है?

अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

G/H कब आबेली होता है, आइए इसकी चर्चा को कुछ और आगे बढ़ाएँ। आपको

क्रमविनिमेयक उपसमूह की बात सबसे पहले ब्रिटिश गणितज्ञ जी.ए. मिलर ने 1898 में किया था।

यह जान कर शायद हैरानी हो कि एक समूह G दिया रहने पर, हम हमेशा एक ऐसा प्रसामान्य उपसमूह परिभाषित कर सकते हैं जिससे कि G/H आबेली हो। आइए इस उपसमूह को परिभाषित करें।

परिभाषाः मान लीजिए कि G एक समूह है तथा $x, y \in G$.

i) अवयव $x^{-1}y^{-1}xy$ को x और y का क्रमविनिमेयक (commutator) कहते हैं, तथा इसे $[x, y]$ से निरूपित करते हैं।

ii) G में सभी क्रमविनिमेयकों के समुच्चय द्वारा जनित G का उपसमूह G का **क्रमनिमेयक उपसमूह (commutator subgroup)** कहलाता है। इसे **[G, G]** या $\mathbf{G'}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

उदाहरणार्थ, यदि G एक क्रमविनिमेय समूह है, तो
$x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}xy^{-1}y = e \; \forall \; x, y \in G. \; \therefore [G, G] = \{e\}.$

विशिष्ट रूप में, यदि G चक्रीय है, तो $G' = \{e\}$.

G' के बारे में निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 7ः ध्यान दीजिए कि समुच्चय $C = \{x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G\}$ उपसमूह $[G, G]$ को **जनित करता** है। इसलिए इकाई 4 से आप जानते हैं कि $[G, G]$ का कोई भी

अवयव $\prod_{i=1}^{m} a_i^{n_i}$ के रूप का होता है, जहाँ $a_i = x_i^{-1}y_i^{-1}x_iy_i$, किन्हीं $x_i, y_i \in G$ और $n_i \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ के लिए।

यहाँ आपको इसका ध्यान देना चाहिए कि हो सकता है कि **C स्वयं एक समूह हो। अतः** $[G, G]$ और C का बराबर होना ज़रूरी नहीं, लेकिन $[G, G] = \langle C \rangle$.

आइए क्रमविनिमेयक उपसमूह के कुछ अतुच्छ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 8ः S_3 का क्रमविनिमेयक उपसमूह ज्ञात कीजिए।

हलः ध्यान दीजिए कि S_3 में किसी भी 2-चक्र $(i\ j)$ के लिए, $(i\ j)(i\ j) = I$. अतः, $(i\ j)^{-1} = (i\ j)$. साथ ही, $(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 2)$.

क्योंकि $o(S_3) = 6$, इसलिए S_3 में ${}^6C_2 = 15$ क्रमविनिमेयक हैं, जिनका भिन्न-भिन्न होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, $I^{-1}\sigma^{-1}I\sigma = I$ एक क्रमविनिमेयक है। ऐसे ही $(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 2\ 3)$ एक क्रमविनिमेयक है।

एक अन्य क्रमविनिमेयक है
$(1\ 2)(1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2).$

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि क्रमविनिमेयकों का समुच्चय $\{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ है।

इस प्रकार, $[S_3, S_3]$, $(1\ 2\ 3)$ और $(1\ 3\ 2)$ द्वारा जनित है, तथा $(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)^2$.

इस प्रकार, $[S_3, S_3] = <(1\ 2\ 3)>$, तथा आप जानते हैं कि यह S_3 में प्रसामान्य है।

ध्यान दीजिए कि $S_3/[S_3, S_3]$ की कोटि 2 है, और इसलिए यह आबेली है।

***

उदाहरण 9: $[G, G]$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $G = D_8$.

हल: $D_8 = \{I, r, R, R^2, R^3, rR, rR^2, rR^3\}$ है, जहाँ $R^4 = I = r^2$ तथा $rR = R^{-1}r$.

प्रत्येक $x, y \in D_8$ के लिए, आपको जाँच करनी चाहिए कि $x^{-1}y^{-1}xy = I$ या R^2.

इस प्रकार, $[G, G] = <\{I, R^2\}> = <R^2>$.

ध्यान दीजिए कि $G/[G, G] = \{\bar{I}, \bar{r}, \bar{R}, \overline{rR}\}$ क्लाइन 4-समूह $<\bar{r}> \times <\bar{R}>$ है।

***

उपरोक्त उदाहरणों में आपने देखा है कि क्रमविनिमेयकों का समुच्चय एक उपसमूह है। परंतु, यह आवश्यक नहीं है। आप ऐसे उदाहरण देखेंगे, जब आप उच्च बीजगणित का अध्ययन करेंगे।

अब, आइए क्रमविनिमेयक उपसमूह के महत्त्व के कारण देखें।

प्रमेय 3: मान लीजिए G एक समूह है। तब, G का $[G, G]$ एक प्रसामान्य उपसमूह है। साथ ही, $G/[G, G]$ क्रमविनिमेयक है।

उपपत्ति: परिभाषा से ही $[G, G]$ एक उपसमूह है,।

अब, किसी भी क्रमविनिमेयक $x^{-1}y^{-1}xy$ और किसी भी $g \in G$ के लिए,

$$g^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)g = (g^{-1}xg)^{-1}(g^{-1}yg)^{-1}(g^{-1}xg)(g^{-1}yg) \in [G, G].$$

साथ ही, $[G, G]$ का कोई भी अवयव $a = \prod_i a_i^{n_i}$ के रूप का है, जहाँ $a_i = x_i^{-1}y_i^{-1}x_iy_i$ किसी $x_i, y_i \in G$ और $n_i \in \mathbb{Z}$ के लिए।

अतः, $g^{-1}ag = \prod_i (g^{-1}a_ig)^{n_i} \in [G, G]$, क्योंकि $g^{-1}a_ig \in [G, G]\ \forall\ i$.

$\therefore [G, G] \triangleleft G.$

प्रमेय के दूसरे भाग को सिद्ध करने के लिए, आइए सुविधा के लिए $[G, G]$ को H द्वारा व्यक्त करें।

अब, G/H आबेली होगा iff $Hx \cdot Hy = Hy \cdot Hx\ \forall\ x, y \in G$. साथ ही,

$Hx \cdot Hy = Hy \cdot Hx \Leftrightarrow Hxy = Hyx$

$$\Leftrightarrow (xy)(yx)^{-1}y^{-1} \in H$$

$$\Leftrightarrow xy\,x^{-1}y^{-1} \in H$$

क्योंकि $xy\,x^{-1}y^{-1} \in H\ \forall\ x,\ y \in G,$ इसलिए $Hx \cdot Hy = Hy \cdot Hx\ \forall\ x,\ y \in G.$

अर्थात्, G/H आबेली है।

$[G, G]$, हमें एक अर्थ में यह बताता है कि G क्रमविनिमेय होने से कितना दूर है। जितना बड़ा $[G, G]$ होगा, उतना ही G आबेली होने से दूर होगा।

अब, ना सिर्फ $G/[G, G]$ आबेली है, आप देखेंगे कि G का $[G, G]$ सबसे छोटा ऐसा प्रसामान्य उपसमूह H है, जिसके लिए G/H आबेली है।

प्रमेय 4: मान लीजिए G एक समूह है। यदि $N \lhd G$ ऐसा है कि G/N आबेली है, तो $[G, G] \le N.$

उपपत्ति: क्योंकि G/N आबेली है, इसीलिए $Nx \cdot Ny = Ny \cdot Nx\ \forall\ x,\ y \in G.$ इस प्रकार, $Nxy = Nyx\ \forall\ x,\ y \in G$, जिससे कि $(xy)(yx)^{-1} \in N\ \forall\ x,\ y \in G.$

इस प्रकार, $xyx^{-1}y^{-1} \in N\ \forall\ x,\ y \in G.$

अतः, $[G, G] \subseteq N,$ तथा इसी लिए $[G, G] \le N.$ ■

आइए देखें कि किसी समूह के क्रमविनिमेयक उपसमूह को ज्ञात करने में प्रमेय 4 किस प्रकार सहायक है। हम इसका उपयोग उदाहरण 9 में अपनाई गई विधि से संक्षिप्त विधि द्वारा वही लक्ष्य प्राप्त करने के लिए करेंगे।

उदाहरण 10: $H = [G, G]$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $G = D_8$.

हल: आप जानते हैं कि $D_8 = < r, R \mid r^2 = I, R^4 = I, rR = R^{-1}r >.$

अब, निश्चित रूप से, $I \in H.$ साथ ही, $rRr^{-1}R^{-1} = R^2 \in [G, G].$

अतः, $< R^2 > \le [G, G]$.

क्योंकि $Z(D\ ) = < R^2 > = \{I, R^2\}$, G में $< R^2 >$ प्रसामान्य है।

साथ ही, $G/< R^2 >$ में $\bar{r}\,\bar{R} = \overline{rR} = \overline{R^{-1}r} = \overline{R^3 r} = \overline{Rr} = \bar{R}\,\bar{r}$, जिससे कि $G/< R^2 >$ आबेली है।

अतः, प्रमेय 4 से $[G, G] = < R^2 >.$

***

अब आप कुछ प्रश्नों को क्यों नहीं हल करने का प्रयास करते?

E16) D_{10} का क्रमविनिमेयक उपसमूह ज्ञात कीजिए।

E17) किसी भी समूह G के लिए, $G/[G, G]$ का क्रमविनिमेयक उपसमूह ज्ञात कीजिए।

E18) निम्नलिखित के क्रमविनिमेयक उपसमूह, तथा केन्द्र, ज्ञात कीजिएः

i) एक सरल आबेली समूह,

ii) एक सरल अन्आबेली समूह।

E19) G' ज्ञात कीजिए, जहाँ $G = Q_8$.

आइए अब विभाग समूह $G/Z(G)$ के कुछ रोचक गुणों की चर्चा करें।

आप जानते हैं कि यदि G आबेली है, तो $Z(G) = G$. अतः, $G/Z(G)$ तुच्छ समूह है, तथा इसी लिए यह आबेली है।

अब, Q_8 लीजिए। आप जानते हैं कि $Z(Q_8) = \{\pm I\}$. अतः, $Q_8/Z(Q_8)$ आबेली है (देखिए उदाहरण 3)। परंतु Q_8 आबेली नहीं है।

अतः, यदि $G/Z(G)$ आबेली है, तो हम कह नहीं सकते कि G आबेली है या नहीं। परंतु, यदि $G/Z(G)$ चक्रीय है, तो G को आबेली होना ही पड़ेगा, जैसा कि निम्नलिखित प्रमेय बताता है।

प्रमेय 5: यदि G एक ऐसा समूह है कि $G/Z(G)$ चक्रीय है, तो G आबेली होता है।

उपपत्ति: मान लीजिए $G/Z(G) = < gZ(G) >$, तथा मान लीजिए $x, y \in G$.

तब, $xZ(G) = [gZ(G)]^m = g^m Z(G)$ तथा $yZ(G) = g^n Z(G)$, किन्हीं $m, n \in \mathbb{Z}$ के लिए।

अतः, $x \in g^m Z(G), y \in g^n Z(G)$.

इसलिए, किन्हीं $z_1, z_2 \in Z(G)$ के लिए, $x = g^m z_1$ और $y = g^n z_2$.

तब, $xy = (g^m z_1)(g^n z_2) = g^m (g^n z_1) z_2$, क्योंकि $z_1 \in Z(G)$.

$$= g^{m+n} z_1 z_2 = g^{m+n} z_2 z_1 = (g^n z_2)(g^m z_1), \text{ क्योंकि } z_2 \in Z(G).$$

$$= yx.$$

अतः, G आबेली है। ■

ध्यान दीजिए कि प्रमेय 5 का अनुप्रयोग करने की एक विधि है ध्यान देना कि यदि G आबेली नहीं है, तो $G/Z(G)$ चक्रीय नहीं हो सकता। इस प्रकार, उदाहरणार्थ, हम जानते हैं कि $S_3/Z(S_3)$ चक्रीय नहीं है।

इसी प्रकार, हम जानते हैं कि $D_{2n}/Z(D_{2n})$ चक्रीय नहीं है, क्योंकि D_{2n} आबेली नहीं है।

आइए प्रमेय 5 के अनुप्रयोग के एक अन्य उदाहरण को देखें।

उदाहरण 11: मान लीजिए G एक कोटि pq वाला अन्आबेली समूह है, जहाँ p और q भिन्न-भिन्न अभाज्य संख्याएँ हैं। तब, $Z(G) = \{e\}$.

हल: क्योंकि G अन्आबेली है, इसलिए $G \neq Z(G)$.

लग्रांज के प्रमेय से, $o(Z(G) = 1, p$ या q है।

यदि $o(Z(G)),$ p या q है, यानी एक अभाज्य है, तो $o\big(G/Z(G)\big)$ एक अभाज्य, क्रमशः q या p होगा। अतः, $G/Z(G)$ को चक्रीय होना पड़ेगा, जो वह नहीं है क्योंकि G आबेली नहीं है।

अतः, $o(Z(G) = 1,$ अर्थात् $Z(G) = \{e\}$.

***

उदाहरण 11 से आप जानते हैं कि उदाहरणार्थ, $Z(D_{2p}) = \{e\}$, जहाँ p एक विषम अभाज्य संख्या है।

अब, कुछ संबंधित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E20) यदि G एक ऐसा समूह है कि $G/Z(G)$ चक्रीय नहीं है, तो क्या G को अन्आबेली होना पड़ेगा? क्यों, या क्यों नही?

E21) i) मान लीजिए G कोटि p^3 वाला एक अन्आबेली समूह है, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है। यदि $Z(G) \neq \{e\}$, तो $o(Z(G))$ ज्ञात कीजिए।

ii) उपरोक्त (i) के उपयोग से $G = D_8$ के लिए, $Z(G)$ ज्ञात कीजिए। इसी से $Z(D_8)$ और D_8' के बीच के संबंध को ज्ञात कीजिए।

हल निकालने की विधियों के बारे में, यहाँ एक व्यापक टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 8: E21 हमें इस बात का एक अन्य उदाहरण देता है कि $Z(G)$ ज्ञात करने के अनेक विभिन्न तरीके हैं। हमें उस तरीके का उपयोग करना चाहिए, जो दिए हुए प्रतिबंधों के लिए सबसे अधिक उपयुक्त हो।

आइए अब देखें कि विभाग समूहों के उपसमूह किस प्रकार के होते हैं। क्या ये प्रारंभिक समूह के उपसमूहों से किसी रूप में संबंधित हैं? आइए देखें।

प्रमेय 6: मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \lhd G$.

i) G के किसी भी उपसमूह K के लिए, $H \lhd HK$ और $HK/H \leq G/H$.

ii) विलोमतः, G/H का कोई भी उपसमूह T/H के रूप का होता है, जहाँ T H को आविष्ट करने वाला G का कोई उपसमूह है।

उपपत्तिः i) इकाई 6 से आप जानते हैं कि क्योंकि $H \lhd G$, इसलिए $HK \le G$ और $H \lhd HK$.

अब, मान लीजिए $Hx, Hy \in HK/H$, जहाँ $x, y \in HK$. तब,

$(Hx)(Hy)^{-1} = Hxy^{-1} \in HK/H$, क्योंकि $xy^{-1} \in HK$.

अतः, उपसमूह परीक्षण द्वारा, $HK/H \le G/H$.

ii) मान लीजिए $S \le G/H$, तथा $T = \{g \in G \mid gH \in S\}$.

तब, $e \in T$, क्योंकि $H \in S$, चूँकि S एक उपसमूह है।

साथ ही, $x, y \in T$ के लिए हमें $xH, yH \in S$ प्राप्त होता है, जिससे कि $(xH)(yH)^{-1} \in S$, अर्थात्, $(xy^{-1})H \in S$ है, अर्थात् $xy^{-1} \in T$.

अतः, $T \le G$.

आगे, किसी भी $h \in H$ के लिए, $hH = H \in S$. अतः, $h \in T$.

इस प्रकार, $H \subseteq T$.

क्योंकि $H \lhd G$, इसलिए $H \lhd T$. इस प्रकार, T/H सुपरिभाषित है।

अंत में, ध्यान दीजिए कि $gH \in S$ iff $gH \in T/H$. इस प्रकार, $S = T/H$. ■

अब जब आप जान गए हैं कि एक विभाग समूह के उपसमूह किस प्रकार के दिखाई देते हैं, क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि उसके प्रसामान्य उपसमूह किस प्रकार के दिखाई देंगे? क्या आपका उत्तर निम्नलिखित कथन से मेल खाता है?

प्रमेय 7: यदि G एक समूह है तथा $H \lhd G$, तो G/H का कोई भी प्रसामान्य उपसमूह T/H के रूप का होता है, जहाँ $T \lhd G$ और $H \subseteq T$.

हम इसकी उपपत्ति आपके लिए छोड़ रहे हैं। (देखिए E22)।

अब, कुछ प्रश्नों को हल करने का समय आ गया है।

E22) प्रमेय 7 को सिद्ध कीजिए।

E23) मान लीजिए G एक समूह है। यह भी मान लीजिए कि G का N एक उच्चिष्ठ प्रसामान्य उपसमूह है, अर्थात् $N \lhd G, N \ne G$ और यदि $H \lhd G$ s.t. $H \ne G$, तो $N \not\subset H$. दर्शाइए कि G/N एक सरल समूह है।

विलोमतः, यदि G का N एक ऐसा उचित प्रसामान्य उपसमूह है कि G/N सरल है, तो दर्शाइए कि G का N एक उच्चिष्ठ प्रसामान्य उपसमूह है।

E24) यदि G समुच्चय S द्वारा जनित एक समूह है और कि $H \triangleleft G$, तो G/H के जनकों का एक समुच्चय ज्ञात कीजिए।

E25) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, n \geq 2$, के सभी प्रसामान्य उपसमूह, तथा सभी उच्चिष्ठ प्रसामान्य उपसमूह, ज्ञात कीजिए।

E26) यदि G एक समूह है तथा $H \triangleleft G$, तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं?

अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

i) यदि H और G/H आबेली हैं, तो G भी आबेली है।

ii) यदि H और G/H चक्रीय हैं, तो G चक्रीय है।

iii) यदि G अन्आबेली है, तो G/H भी अन्आबेली होगा।

iv) यदि G एक परिमित समूह है तथा G/H में कोटि n वाला एक अवयव है, तो G में एक कोटि n वाला अवयव है।

E27) $Q_8/Z(Q_8)$ की केली सारणी बनाइए। इसी से निर्णय लीजिए कि $Q_8/Z(Q_8)$ और $\mathbb{Z}_4$ की समान बीजीय संरचना है या नहीं।

E26 में आपने देखा कि हालांकि समूह G का प्रसामान्य उपसमूह H और G/H, दोनों एक बीजीय गुण को संतुष्ट करते हैं, ज़रूरी नहीं कि G उस गुण को संतुष्ट करे। फिर भी, एक बहुत महत्वपूर्ण प्रमेय है जो बताता है कि कैसे हम कभी-कभी H और G/H के गुणों के उपयोग से G के किसी को जान सकते हैं। अब हम इस प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

किसी परिमित आबेली समूह, मान लीजिए $\mathbb{Z}_{10}$, पर विचार कीजिए। यह कोटि 10 का है तथा इसको विभाजित करने वाली अभाज्य संख्याएँ 2 और 5 हैं। साथ ही, $\overline{5} \in \mathbb{Z}_{10}$ कोटि 2 का है, तथा $\overline{2} \in \mathbb{Z}_{10}$ कोटि 5 का है। अतः, $\mathbb{Z}_{10}$ में कोटि 2 और कोटि 5 वाले अवयव हैं तो, प्रश्न यह है कि क्या किसी भी परिमित आबेली समूह में यह गुण है जो आपने अभी $\mathbb{Z}_{10}$ में देखा है? अर्थात्, यदि G एक परिमित समूह है तथा $p \mid o(G)$, जहाँ p अभाज्य है, तो क्या G का कोई अवयव कोटि p वाला होगा? यह सत्य है, और इस असाधारण परिणाम का श्रेय प्रसिद्ध फ्राँसीसी गणितज्ञ कौशी (Cauchy) को जाता है। इसे सिद्ध करने के लिए, आइए पहले एक प्रमेयिका (अर्थात्, ऐसा परिणाम जिसकी आवश्यकता मुख्य प्रमेय को सिद्ध करने के लिए पड़ती है) को सिद्ध करें। इस प्रमेयिका को सिद्ध करने के लिए, आपने इकाई 4 में जिन परिणामों का अध्ययन किया है, हम उनका उपयोग करेंगे।

प्रमेयिका 1: यदि G कोटि $n(>1)$ वाला एक परिमित समूह है, तो किसी अभाज्य p के लिए, जहाँ $p \mid n$, G का कोटि p वाला एक अवयव होता है।

उपपत्तिः यदि n एक अभाज्य संख्या है, तो आप जानते हैं कि G चक्रीय है, मान

लीजिए $G = <x>$, जहाँ $o(x) = n$.

अतः, आइए मान लें कि n एक अभाज्य संख्या नहीं है, तथा मान लीजिए $g \in G, g \neq e$.

तब, आप जानते हैं कि किसी $m(\neq 1)$ के लिए, $o(g) = m$ s.t. $m|n$.

यदि m एक अभाज्य संख्या है, तो g ही वह अवयव है जिसकी खोज हम कर रहे हैं।

यदि m एक अभाज्य संख्या नहीं है, तो मान लीजिए $p|m$, जहाँ एक अभाज्य संख्या है तब $m = pr$ किसी $r \in \mathbb{N}$ के लिए।

तब, $o(g^r) = p$, तथा $g^r \in G$.

आइए हम इस प्रमेयिका का उपयोग पहले बताए गए परिणाम, अर्थात् **परिमित आबेली समूहों के लिए कौशी के प्रमेय** के सिद्ध करने के लिए करें।

असल में कौशी का प्रमेय किसी भी परिमित समूह के लिए सत्य है। लेकिन हम इसे केवल आबेली समूहों के लिए सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 8: मान लीजिए G कोटि $n \geq 2$ वाला एक परिमित आबेली समूह है। n को विभाजित करने वाले प्रत्येक अभाज्य संख्या p के लिए, G में कोटि p वाला अवयव है।

उपपत्ति: हम इस कथन को गणितीय आगमन के नियम के शक्तिशाली रूप के उपयोग से सिद्ध करेंगे (देखिए प्रमेय 3′, इकाई 1)।

अब, यदि $n = 2$, तो आप इकाई 4 से जानते हैं कि G चक्रीय है। अतः, $G = <x>$, जहाँ $o(x) = 2$, तथा 2 का अभाज्य गुणनखंड केवल 2 ही है। अतः, यह प्रमेय $n = 2$ के लिए सत्य है।

अब परिकल्पना लीजिए कि यह प्रमेय कोटि $m < n$ वाले किसी भी आबेली समूह के लिए सत्य है, जहाँ $n > 2$, अर्थात् यदि A कोटि $m < n$ वाला एक आबेली समूह है, तथा एक अभाज्य $q|m$ तो A का कोटि q वाला अवयव है।

अब कोटि n वाले एक परिमित आबेली समूह G पर विचार कीजिए, तथा मान लीजिए कि $p|n$, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है। प्रमेयिका 1 द्वारा, G का कोटि q वाला एक अवयव x है, किसी अभाज्य $q|n$ के लिए।

यदि $p = q$, तो x ही वह अवयव है जिसकी हम खोज कर रहे हैं।

यदि $p \neq q$, तो $\overline{G} = G/<x>$ लीजिए।

अब, $o(\overline{G}) = \dfrac{o(G)}{o(<x>)} = \dfrac{n}{q} < n$ और $p|(n/q)$, क्योंकि $(p, q) = 1$ और $p|n$.

इस प्रकार, आगमन द्वारा, $\overline{G}$ का कोटि p वाला एक अवयव $g<x>$ है,

अर्थात् $g^p \in <x>$. ...(1)

ध्यान दीजिए कि $g \neq e$, क्योंकि $o(g<x>) = p \neq 1$.

अब, या तो $g^p = e$, या $g^p \neq e$.

यदि $g^p = e$, है, तो $g \in G$ कोटि p का है तथा उपपत्ति पूरी हुई।

यदि $g^p \neq e$, तो मान लीजिए $o(g^p) = r$.

क्योंकि $g^p \in \langle x \rangle$ तथा $o(\langle x \rangle) = q, r | q$.

परंतु q एक अभाज्य संख्या है। अतः, $r = q$, अर्थात्, $o(g^p) = q$.

$\therefore g^{pq} = e. \ \therefore o(g) | pq. \ \therefore o(g)$ का मान $1, p, q$ या pq है।

क्योंकि $g \neq e$, इसलिए $o(g) \neq 1$.

यदि $o(g) = p$, तो हमें वांछित अवयव मिल जाता है।

यदि $o(g) = q$, तब $(g\langle x \rangle)^q = g^q \langle x \rangle = \langle x \rangle$. अतः, $o(g\langle x \rangle) | q$.

परंतु (1) से, $o(g\langle x \rangle) = p$, जो q से अलग एक अभाज्य संख्या है। अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं। इसलिए, $o(g) \neq q$.

$\therefore o(g) = pq$.

अतः, इकाई 4 से आप जानते हैं कि

$$o(g^q) = \frac{pq}{(pq, q)} = p.$$

$\therefore g^q \in G$ कोटि p का है।

इस प्रकार, सभी स्थितियों में G का कोटि p का एक अवयव है, अर्थात् यह प्रमेय n के लिए सत्य है।

अतः, आगमन नियम के शक्तिशाली रूप से यह किसी भी परिमित आबेली समूह के लिए सत्य है। ■

ऊपर दी गई उपपत्ति में आपने ध्यान दिया होगा कि हमने $\langle x \rangle$ के गुण, और $G/\langle x \rangle$ के गुण, के उपयोग से G के गुण को सिद्ध किया है। अतः, विभाग समूहों का उपयोग इन तरीक़ों से भी बहुत लाभदायक है।

प्रमेय 8 से एक उपप्रमेय तुरंत निकलता है, जो निम्नलिखित परिणाम है।

उपप्रमेय 1: कोटि pq वाला कोई भी आबेली समूह चक्रीय होता है जहाँ p और q भिन्न-भिन्न अभाज्य संख्याएं हैं।

उपपत्ति: मान लीजिए G कोटि pq वाला एक आबेली समूह है। कौशी के प्रमेय द्वारा, $\exists\, x, y \in G$ s.t. $o(x) = p$ और $o(y) = q$.

अब, $(xy)^{pq} = (x^p)^q (y^q)^p$, क्योंकि G आबेली है

$$= e.$$

$\therefore o(xy) \mid pq.$ अतः, $o(xy)=1, p, q$ या $pq.$

यदि $o(xy)=1$, तो $x=y^{-1}$. $\therefore o(x)=o(y^{-1})=o(y)$, जो एक अंतर्विरोध है।

$\therefore o(xy)\neq 1.$

मान लीजिए $o(xy)=p.$ तब, $(xy)^p=e \Rightarrow y^p=e \Rightarrow q \mid p$, जो एक अंतर्विरोध है।

अतः, $o(xy)\neq p.$

इसी प्रकार, $o(xy)\neq q.$

अतः, $o(xy)=pq=o(G).$

$\therefore G=<xy>.$ ■

प्रमेय 8 के उपयोग से आप जानते हैं कि सम कोटि वाले किसी भी आबेली समूह का एक कोटि 2 वाला अवयव होता है। इसी प्रकार, आप जानते हैं कि कोटि 110 वाले आबेली समूह का कोटि 11 वाला अवयव कौशी के प्रमेय के कारण होता है।

पुनः, उपप्रमेय 1 के कारण, आप जानते हैं कि कोटि 6, या 15, या 21 वाला कोई भी आबेली समूह चक्रीय होगा ही। इसलिए, ये परिणाम परिमित समूहों के अध्ययन के लिए बहुत ही उपयोगी साधन हैं।

अब, आपके लिए कुछ संबंधित प्रश्नों को हल करने का समय आ गया है।

E28) $\mathbb{Q}(\{a_1,a_2,a_3\})$ और $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$ के लिए कौशी के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

E29) D_{10}/H के लिए कौशी के प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ $H=[D_{10}, D_{10}]$.

E30) सिद्ध कीजिए कि यदि G कोटि $n\geq 2$ वाला एक परिमित आबेली समूह है, तो n को विभाजित करने वाले प्रत्येक अभाज्य संख्या p के लिए, G का कोटि p वाला उपसमूह होता है।

आइए अभी के लिए हम विभाग समूहों पर केन्द्रित अपनी चर्चा को समाप्त करें। वैसे आप, इन बीजीय वस्तुओं का उपयोग अगली इकाई में भी करेंगे। आप इसी प्रकार के 'विभाग वस्तुओं' का उपयोग इस पाठ्यक्रम के खंड 3 और 4 में भी करेंगे, तथा पाठ्यक्रम 'रैखिक बीजगणित' में भी करेंगे।

आइए अब इस इकाई में जो हमने चर्चा की है उसका सारांश दें।

7.4 सारांश

इस इकाई में आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है।

1. विभाग समूह (जिसे गुणनखंड समूह भी कहते हैं) की परिभाषा तथा उसके उदाहरण।

2. किसी भी समूह G और $H \triangleleft G$ के लिए, G/H का गणनांक $|G:H|$ है।

   विशिष्ट रूप में, यदि G एक परिमित समूह है, तो $o(G/H) = \frac{o(G)}{o(H)}$.

3. यदि G एक आबेली समूह है, तो G/H भी आबेली होगा, $\forall\ H \triangleleft G$. परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

4. यदि G एक चक्रीय सूमह है, तो G/H भी चक्रीय समूह $\forall\ H \triangleleft G$. परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

5. किसी भी समूह G के लिए, इसका क्रमविनिमेयक उपसमूह $[G, G] \triangleleft G$, और $G/[G, G]$ आबेली हैं।

6. यदि G एक समूह है s.t. $G/Z(G)$ चक्रीय है, तो G आबेली है।

7. यदि G एक समूह है, $H \triangleleft G$ और $K \leq G$, तो $H \triangleleft HK$ और $HK/H \leq G/H$.

   विलोमतः, G/H का कोई भी उपसमूह, T/H के रूप का होता है, जहाँ T, H को आविष्ट करने वाला G का एक उपसमूह।

8. विभाग समूह G/H को कोई भी प्रसामान्य उपसमूह N/H के रूप का होता है, जहाँ N उपसमूह H को आविष्ट करने वाला G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

9. परिमित आबेली समूहों के लिए, कौशी के प्रमेय की उपपत्ति और अनुप्रयोग। प्रमेय का कथन है:

   यदि G एक परिमित आबेली समूह है तथा $o(G)$ को विभाजित करने वाली p एक अभाज्य संख्या है, तो G में कोटि p वाला अवयव होता है।

7.5 हल/उत्तर

E1) आप खुद गुणन करके देख सकते हैं कि V_4 का प्रत्येक अवयव कोटि 2 वाला है। अतः, $H = <(1\ 2)(3\ 4)> \leq V_4$.

क्योंकि $|V_4 : H| = \frac{o(V_4)}{o(H)} = 2$, इकाई 6 के प्रमेय 2 द्वारा, इसलिए $H \triangleleft V_4$.

H के V_4 में दो भिन्न-भिन्न सहसमुच्चय, H और $(1\ 3)(2\ 4)H$ हैं।

ये अलग इसलिए हैं, कि $(1\ 3)(2\ 4) \notin H$ है।

E2) क्योंकि $\{c\} \notin \wp(T)$, इसलिए $\{c\}\wp(T) \neq \wp(T)$.

साथ ही, $\left|\wp(S):\wp(T)\right| = \dfrac{o(\wp(S))}{o(\wp(T))} = \dfrac{2^3}{2^2} = 2.$

इस प्रकार, $\wp(T)$ और $\{c\}\wp(T)$ ही विभाग समूह के अवयव हैं।

E3) ध्यान दीजिए कि $o\left(\mathbb{Z}_{20}/\overline{8}\mathbb{Z}_{20}\right) = \dfrac{o(\mathbb{Z}_{20})}{o(\overline{8})} = \dfrac{20}{5} = 4.$

इसलिए, $o(\overline{3} + < \overline{8} >) = 1, 2$ या 4.

क्योंकि $\overline{3} \notin < \overline{8} >$ और $2 \cdot \overline{3} = \overline{6} \notin < \overline{8} >$, इसलिए $o(\overline{3}) = 4.$

अतः, $\mathbb{Z}_{20}\big/\overline{8}\mathbb{Z}_{20} = < \overline{3} + < \overline{8} >>.$

अब, $o\left(\mathbb{Z}_{20}/\overline{9}\mathbb{Z}_{20}\right) = \dfrac{o(\mathbb{Z}_{20})}{o(\overline{9})} = \dfrac{20}{20} = 1,$ क्योंकि $(9, 20) = 1.$

(यह बताता है कि $\mathbb{Z}_{20} = < \overline{9} >.$)

अतः, $o(\overline{3} + \overline{9}\mathbb{Z}_{20}) = 1.$ वस्तुतः, $\overline{3} + \overline{9}\mathbb{Z}_{20} = \overline{9}\mathbb{Z}_{20}$, क्योंकि $\overline{3} \in \overline{9}\mathbb{Z}_{20}$.

E4) $5\mathbb{Z} = \{5n | n \in \mathbb{Z}\}, 15\mathbb{Z} = \{15n | n \in \mathbb{Z}\} \leq 5\mathbb{Z}.$

अतः, $15\mathbb{Z} \lhd 5\mathbb{Z}.$

अब, विभाजन ऐल्गोरिद्म द्वारा, $n \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$5n = 15q + r$, किन्हीं $q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 15$ के लिए।

क्योंकि $5|5n$ और $5|15q$, इसलिए हम पाते हैं कि $5|r$, मान लीजिए $r = 5r'$,
जहाँ $0 \leq r' < 3.$

अतः $\overline{5n} = \overline{5r'}$, जहाँ $r' = 0, 1$ या 2, मोड्यूलों 15 लेने पर।

अतः, $5\mathbb{Z} = 15\mathbb{Z} \cup (5 + 15\mathbb{Z}) \cup (10 + 15\mathbb{Z}).$

इसलिए, $\left|5\mathbb{Z} : 15\mathbb{Z}\right| = 3.$

अतः, केली सारणी नीचे दिए अनुसार हैः

$+$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$

E5) $G = S_3, H = <(1\ 2\ 3)>, x = (1\ 2\ 3), y = I$ लीजिए।

तब $Hx = Hy = H$, क्योंकि $x, y \in H$. परंतु $o(x) = 3, o(y) = 1$.

E6) G/G के संबंध में टिप्पणी 4 को देखिए।

$G/\{e\} = \{g\{e\} | g \in G\} = \{\{g\} | g \in G\}$. इस गुणनखंड समूह का प्रत्येक अवयव एक एकल है।

साथ ही, $\{g_1\} = \{g_2\}$ iff $g_1 = g_2$.

अतः, $|G : \{e\}|$ ही G का गणनांक है।

E7) यदि G का H एक उपसमूह है, तो H के सहसमुच्चयों का गुणनफल तभी परिभाषित है जब $H \triangleleft G$.

इसका कारण यह है कि यदि $Hx \cdot Hy = Hxy\ \forall\ x, y \in G$, तो विशिष्ट रूप में,

$(Hx^{-1})(Hx) = Hx^{-1}x = He = H\ \forall\ x \in G$.

इसलिए, किसी भी $h \in H$ के लिए, $x^{-1}hx = ex^{-1}hx \in (Hx^{-1}) \cdot (Hx) = H$.

अर्थात् $x^{-1}Hx \subseteq H$, किसी भी $x \in G$ के लिए।

$\therefore H \triangleleft G$.

E8) क्योंकि $o(Ha) = 3$, इसलिए $a^3 \in H$, परंतु $a \notin H$ और $a^2 \notin H$.

क्योंकि $o(H) = 10$, इसलिए $(a^3)^{10} = 1$, अर्थात् $a^{30} = 1$. अतः, $o(a) | 30$.

इस प्रकार, $o(a)$ का मान $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$ या 30 हो सकता है।

परंतु $o(a) \neq 1$, क्योंकि $a \neq e$, चूँकि $a \notin H$.

पुनः, $o(a) \neq 2$, क्योंकि $a^2 = e$ का अर्थ होगा $a^2 \in H$; परंतु $a^2 \notin H$.

इसी प्रकार, यदि $o(a) = 5$, तो $a^5 = e$. अतः, $(Ha)^5 = H$, अर्थात् $Ha^2 = H$, चूंकि $Ha^3 = H$.

इसलिए, $a^2 \in H$, जो पुनः एक अंतर्विरोध है। अतः, $o(a) \neq 5$.

इसी प्रकार आपको दिखाना चाहिए कि $o(a) \neq 10$.

अतः, $o(a) = 3, 6, 15$ या 30.

E9) मान लीजिए $o(g) = r$ और $o(Hg) = m$.

क्योंकि $g^r = e$, इसलिए $(Hg)^r = H$. इस प्रकार, $m | r$.

E10) प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ s.t. $\frac{1}{n} + \mathbb{Z}$ की कोटि n है।

अतः, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ में कोटि n वाले अवयव हैं, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

परंतु $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ का प्रत्येक अवयव परिमित कोटि का नहीं है।

उदाहरणार्थ, $\sqrt{2} + \mathbb{Z}$ लीजिए। ऐसा कोई $n \in \mathbb{N}$ नहीं है जिससे कि $n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$.

E11) सत्यापन कीजिए कि $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$. अतः, $\mathbb{Q} \lhd \mathbb{C}$. अतः, $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ एक समूह है।

$\sqrt{2} + \mathbb{Q}$ और $i + \mathbb{Q}$ पर विचार कीजिए। क्योंकि $\sqrt{2} - i \notin \mathbb{Q}$, इसलिए ये अवयव भिन्न-भिन्न हैं। क्योंकि $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ और $i \notin \mathbb{Q}$, इसलिए ये गुणनखंड समूह के अतुच्छ अवयव हैं।

E12) i) सत्यापन कीजिए कि यदि $f, g \in C$, तो $f - g \in C$. अतः, $C \leq \mathcal{F}'$

क्योंकि $\mathcal{F}$ आबेली है, इसलिए $C \lhd \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}/C = \{f + C \mid f \in \mathcal{F}\}$.

$f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ के लिए, $f_1 + C = f_2 + C$ iff $f_1 - f_2$ एक अचर फलन है।

अब, प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $f_n(r) = nr^2\ \forall\ r \in \mathbb{R}$ द्वारा $f_n \in \mathcal{F}$ को परिभाषित कीजिए।

तब, $n \neq m$ के लिए, $f_n + C \neq f_m + \mathbb{C}$.

अतः, $\mathcal{F}$ में C के कम से कम उतने सहसमुच्चय हैं, जितने $\mathbb{N}$ में अवयव हैं, जो कि अपरिमित है। अतः, $\mathcal{F}/C$ अपरिमित है।

आगे, आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि $\mathcal{F}/C$ आबेली है।

ii) क्योंकि $f, g \in \text{Cont} \Rightarrow f - g \in \text{Cont}$, इसलिए $\text{Cont} \lhd \mathcal{F}$.

अतः, $\mathcal{F}/\text{Cont}$ सुपरिभाषित है।

अब, किसी भी ऐसे $f \in \mathcal{F}$ के लिए कि f संतत नहीं है, $f + f = 2f$ संतत नहीं हो सकता, जैसा कि आप 'कलन' से जानते हैं।

अतः, Cont में कोटि 2 वाला कोई अवयव नहीं है।

E13) $G = Q_8$ लीजिए, जो चतुष्टयी समूह है।

आप जानते हैं कि $H \lhd G\ \forall\ H \leq G$. साथ ही, $o(Q_8/H)$ का मान 2 या 4 है।

यदि $o(Q_8/H) = 2$, तो Q_8/H चक्रीय है।

साथ ही, Q_8/H केवल $H = \{\pm I\}$ के लिए कोटि 4 का है। तथा तब, उदाहरण 3 से आप जानते हैं कि Q_8/H आबेली है।

अतः, Q_8/H आबेली है $\forall\, H \triangleleft G, H \neq \{e\}$.

परंतु Q_8 आबेली नहीं है।

E14) मान लीजिए $G = < x >$ तथा G का G/H एक विभाग समूह है। G/H का कोई भी अवयव $Hx^n = (Hx)^n$ के रूप का है, क्योंकि G का कोई भी अवयव x^n के रूप का है। $\therefore G/H = < Hx >$. इस प्रकार, G/H चक्रीय ही होगा।

E13 से आप जानते हैं कि $Q_8/< A >$ चक्रीय है, परंतु Q_8 चक्रीय नहीं है। अतः, विलोम सत्य नहीं है।

E15) i) मान लीजिए $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. तब $G/H = \{Hg_i \mid i = 1, \ldots n\}$.

अतः, G/H परिमित है।

ii) नहीं। उदाहरणार्थ, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ परिमित है, परंतु $\mathbb{Z}$ नहीं है।

E16) $D_{10} = < r, R \mid r^2 = I, R^5 = I, rR = R^{-1}r >$.

आप जानते हैं कि $< R > \triangleleft D_{10}$ तथा $D_{10}/< R >$ आबेली है।

अतः, प्रमेय 4 द्वारा $D'_{10} \leq < R >$.

साथ ही, $[r, R^3] = R$. अतः, $R \in D'_{10}$.

इस प्रकार, $D'_{10} = < R >$.

E17) आइए $[G, G] = H$ लिखें। प्रमेयों 2 और 3 द्वारा $[G/H]' = \{H\}$.

E18) i) यदि G आबेली है, तो $Z(G) = G$ और $G' = \{e\}$, चाहे G सरल हों या नहीं।

ii) यदि G अन्आबेली है, तो $Z(G) \neq G$ और $G' \neq \{e\}$. क्योंकि G सरल है और

$Z(G) \triangleleft G, G' \triangleleft G$, इसलिए $Z(G) = \{e\}$ और $G' = G$ अवश्य होगा।

E19) क्योंकि Q_8 का प्रत्येक उपसमूह Q_8 में प्रसामान्य है तथा Q_8/H आबेली है $\forall\, H \leq Q_8, H \neq \{e\}$, इसलिए प्रमेय 4 द्वारा, Q'_8 को इन सभी में से छोटा होना चाहिए।

अतः, $Q'_8 = \{\pm I\}$.

E20) हाँ। यदि G आबेली है तो $Z(G)=G$, तथा इसीलिए $G/Z(G)$ तुच्छ रूप से चक्रीय है।

E21) i) $o(Z(G)) = p$ या p^2, लग्रांज के प्रमेय के द्वारा, क्योंकि $G \neq Z(G)$.

यदि $o(Z(G))=p^2$, तो $o\left(G/Z(G)\right)=p$. अतः, $G/Z(G)$ चक्रीय है जिससे कि G आबेली है, जो एक अंतर्विरोध है। अतः, $o(Z(G)) \neq p^2$.

अतः, $o(Z(G))=p$.

ii) (i) द्वारा, $o(Z(G))=2$. हम जानते हैं कि $I \in Z(G)$ और $r \notin Z(G)$ (क्योंकि $rR \neq Rr$). G में कोटि 2 वाला अन्य अवयव केवल R^2 है। अतः,

$$Z(G)=\{I, R^2\}=<R^2>.$$

इस प्रकार, उदाहरण 10 से, इस स्थिति में $Z(G)=G'$.

E22) मान लीजिए $N \lhd G/H$. तब, प्रमेय 6 द्वारा, किसी $T \leq G$ के लिए, जहाँ $H \subseteq T$, $N=T/H$.

अब, किसी भी $t \in T$ के लिए, $Ht \in N$.

अतः, $g \in G$ के लिए, $(Hg)^{-1}(Ht)(Hg) \in N$ अर्थात्, $H(g^{-1}tg) \in T/H$, अर्थात् $g^{-1}tg \in T$.

अतः, $T \lhd G$.

इस प्रकार, $N=T/H$, जहाँ $T \lhd G, H \subseteq T$.

E23) मान लीजिए $S \lhd G/N$ तब $S=T/N$, किसी $T \lhd G$, के लिए जहाँ $N \subseteq T$.

क्योंकि N उच्चिष्ठ है, इसलिए $T=G$ या $T=N$. अतः, $S=\{e\}$ या $S=G/N$. अर्थात् G/N सरल है।

विलोमतः, यदि G/N सरल है तथा $S \lhd G$ s.t. $N \subseteq S$, तो प्रमेय 7 द्वारा,

$S/N \lhd G/N$. अतः, $S/N=\{e\}$ या $S/N=G/N$.

इस प्रकार, $S=N$ या $S=G$, अर्थात् G का N एक उच्चिष्ठ प्रसामान्य उपसमूह है।

E24) $G=<S>=\left\{\prod_{i=1}^{r} s_i^{n_i} \,\middle|\, s_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}\right\}$.

अतः, $G/H = \left\{\prod_{i=1}^{r}(Hs_i)^{n_i} \middle| s_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}\right\}.$

इस प्रकार, $G/H = <\{Hs | s \in S\}>$.

E25) क्योंकि $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ आबेली है, इसलिए प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य उपसमूह है। प्रमेय 7 द्वारा, कोई भी प्रसामान्य उपसमूह $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ के रूप का है, जहाँ $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$. अर्थात् $m | n$.

E23 द्वारा, एक उच्चिष्ठ प्रसामान्य उपसमूह $p\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ के रूप का होगा, जहाँ $p | n$, p और एक अभाज्य संख्या है।

E26) i) असत्य। उदाहरणार्थ, $D_8/<R>$ आबेली है तथा $<R>$ चक्रीय होने के नाते आबेली है, परंतु D_8 आबेली नहीं है।

ii) असत्य। (i) का उदाहरण यहाँ, एक प्रतिउदाहरण है। (क्यों?)

iii) असत्य। पुनः, D_8 एक प्रतिउदाहरण है। (क्यों)

iv) सत्य। मान लीजिए $Hx \in G/H$ s.t. $o(Hx) = n$. तब, E9 द्वारा, $n | o(x)$. मान लीजिए $o(x) = mn, m \in \mathbb{N}$.

तब, इकाई 4 से आप जानते हैं कि $o(x^m) = n$ तथा $x^m \in G$.

E27) $Q_8 = \{\pm I, \pm A, \pm B, \pm C\}$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = AB$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

क्योंकि $AB \neq BA, AC \neq CA$, इसलिए $Z(Q_8) = \{\pm I\}$.

अतः, $Q_8/Z(Q_8) = \{\bar{I}, \bar{A}, \bar{B}, \overline{AB}\}$.

केली सारणी वही है जो उदाहरण 3 में दी है।

इस प्रकार, $Q_8/Z(Q_8)$ में कोटि 4 वाला कोई अवयव नहीं है। अतः, यह चक्रीय नहीं है। दूसरी ओर, $\mathbb{Z}_4 = <\bar{1}>$ चक्रीय है।

इस प्रकार, $Q_8/Z(Q_8)$ और $\mathbb{Z}_4$ की अलग बीजीय संरचनाएँ हैं।

E28) मान लीजिए $X = \{a_1, a_2, a_3\}$. तब $o(\wp(X)) = 8$. 8 को विभाजित करने वाली अभाज्य संख्या केवल 2 है। अब किसी भी $Y \mathbb{C} X$ के लिए, जहाँ

$Y \neq \emptyset, Y \Delta Y = \emptyset$ अतः $o(Y) = 2$ अतः, $o(\wp(X))$ के सभी शून्येतर अवयव कोटि 2 के हैं।

$o(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6) = o(\mathbb{Z}_4).o(\mathbb{Z}_6) = 24.$ संबंधित अभाज्य संख्याएं 2 और 3 हैं।

तब, $(\overline{2}, \overline{0})$ और $(\overline{0}, \overline{2})$ क्रमशः कोटियों 2 और 3 के हैं, क्योंकि

$$2(\overline{2}, \overline{0}) = 2(2 + 4\mathbb{Z}, 0 + 6\mathbb{Z})$$

$$= (4 + 4\mathbb{Z}, 0 + 6\mathbb{Z})$$

$$= (0 + 4\mathbb{Z}, 0 + 6\mathbb{Z})$$

$$= (\overline{0}, \overline{0}).$$

(ध्यान दीजिए कि $(\overline{0}, \overline{0})$ में प्रथम अवयव $\mathbb{Z}_4$ का शून्य है, तथा दूसरा अवयव $\mathbb{Z}_6$ का शून्य है।)

इसी प्रकार, $3(\overline{0}, \overline{2}) = 3(0 + 4\mathbb{Z}, 2 + 6\mathbb{Z}) = (0 + 4\mathbb{Z}, 6 + 6\mathbb{Z}) = (\overline{0}, \overline{0}).$

E29) E16 में आप देख चुके हैं कि $D'_{10} = < R >$. अतः, D_{10}/D'_{10} कोटि 2 का है, तथा यह कोटि 2, वाले अवयव $\overline{r}$ से जनित होता है। इस प्रकार, कौशी के प्रमेय का सत्यापन हो जाता है।

E30) कौशी के प्रमेय द्वारा, $\exists\, x \in G$ s.t. $o(x) = p.$

तब, $H = < x >$, G का एक कोटि p वाला उपसमूह है।

इकाई 8

समूह समाकारिताएं

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

8.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
8.2 समाकारिताएं
8.3 तुल्याकारिताएं
8.4 तुल्याकारिता प्रमेय
8.5 स्वाकारिताएं
8.6 सारांश
8.7 हल/उत्तर

8.1 प्रस्तावना

अभी तक इस पाठ्यक्रम में हमने एक समूह से दूसरे समूह तक फलनों की चर्चा नहीं की है। जैसा कि आप 'कलन' में देख चुके हैं, समुच्चय G_1 से समुच्चय G_2 तक अनेक विभिन्न फलन हो सकते हैं। इस इकाई में हम एक समूह $(G_1, *_1)$ से एक समूह $(G_2, *_2)$ तक के ऐसे फलनों का अध्ययन करेंगे जो G_1 के कुछ बीजीय गुणों को बनाए रखते हैं।

भाग 8.2 में हम समूहों के बीच उन फलनों के विभिन्न गुणों की चर्चा करेंगे जो अपने प्रांत समूहों की बीजीय संक्रियाओं को बनाए रखते हैं। ये फलन समूह समाकारिताएं कहलाते हैं। इन फलनों को नाम गणितज्ञ क्लाइन (Klein) ने 1893 में दिया था। इनका अध्ययन करते समय आपको प्रायः इकाइयों 6 और 7 में अध्ययन की गई सामग्री का इस्तेमाल करना पड़ेगा। इसलिए आपके लिए बेहतर होगा कि इस इकाई का अध्ययन करने से पहले, आप इन इकाइयों पर दोबारा नज़र दौड़ा लें।

भाग 8.3 में हम आपको एक अति महत्वपूर्ण गणितीय धारणा, अर्थात् तुल्याकारिता से परिचित कराएँगे। आप देखेंगे कि एक तुल्याकारिता एक एकैकी आच्छादक समाकारिता है। तुल्याकारिताओं का महत्व इसलिए है कि दो समूह तुल्याकारी होते हैं यदि और केवल यदि उनके पूरी तरह से समान बीजीय गुण होते हैं।

भाग 8.4 में हम समूह सिद्धांत की एक बहुत ही मौलिक प्रमेय को सिद्ध करेंगे, जो समाकारिता का मूल प्रमेय कहलाता है। इस भाग में आप इस प्रमेय से निकलने वाले कुछ महत्वपूर्ण परिणामों का भी अध्ययन करेंगे। इस प्रमेय के सबसे अधिक व्यापक रूप को 'बीजगणित की माता' एमी नोइथर (Emmy Noether) ने 1827 में दिया था। परंतु, इसके कुछ वर्षों बाद ही इस प्रमेय का, विशिष्ट रूप से समूहों के लिए प्रथम प्रकाशन, गणितज्ञ वान दर वेरडन (Van der Waerden) द्वारा लिखित अमूर्त बीजगणित की एक पाठ्यपुस्तक में हुआ।

अंत में, भाग 8.5 में हम स्वाकारिताओं पर चर्चा करेंगे, जो एक समूह से स्वयं पर तुल्याकारिताएं होती हैं। विशिष्ट रूप में, हम स्वाकारिताओं के एक विशेष उपसमूह की बात करेंगे। जैसा कि आप देखेंगे, यह उपसमूह हमें किसी भी समूह G का उसके केन्द्र से बना विभाग समूह की संरचना को समझने में मदद देता है।

'समाकारिता' और 'तुल्याकारिता' की संकल्पनाएँ के बिना समूह सिद्धांत की समझ नहीं बन सकती है। आप इनके अनुरूप संकल्पनाओं का खंड 3 तथा पाठ्यक्रम 'रैखिक बीजगणित' में अध्ययन करेंगे। अतः यह आपके लिए महत्वपूर्ण है कि आप इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह समझें। इसके लिए आपको निम्नलिखित सीखने की अपेक्षाओं को, जिन्हें ध्यान में रखकर यह इकाई बनाई गई है, प्राप्त करने की कोशिश करनी होगी।

उद्देश्य

इस इकाई की पढ़ाई के बाद, आपको निम्नलिखित करने में समर्थ हो जाना चाहिए:

- इसकी जाँच करना कि समूहों के बीच का एक फलन समाकारिता है या नहीं;
- किसी भी समाकारिता की अष्टि और प्रतिबिंब प्राप्त करना;
- इसकी जाँच करना कि समूहों के बीच का एक फलन तुल्याकारिता है या नहीं;
- समूहों के लिए समाकारिता के मूल प्रमेय का कथन देना, उसे सिद्ध करना तथा उसका अनुप्रयोग करना;
- समूहों के लिए द्वितीय त्रितीय तुल्याकारिता प्रमेयों के कथन देना, उन्हें सिद्ध करना तथा उनका अनुप्रयोग करना;
- समूह की स्वाकारिताओं के समुच्चय के कुछ महत्वपूर्ण गुणों को सिद्ध करना, तथा उनका अनुप्रयोग करना।

8.2 समाकारिताएं

आइए एक समूह से दूसरे समूह तक के फलनों की चर्चा को एक उदाहरण से प्रारंभ करें। $\mathbb{Z}_4 = <\bar{1}>$ तथा $U_4 = <i>, i = \sqrt{-1},$ की केली सारणियों पर विचार कीजिए।

सारणी 1: $\mathbb{Z}_4$ की केली सारणी

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

सारणी 2: U_4 की केली सारणी

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

अब, $f: Z_4 \to U_4 : f(\bar{m}) = i^m$ पर विचार कीजिए। आगे दी गई सारणी, सारणी 1′ को देखिए, जिसमें सारणी 1 की प्रत्येक प्रविष्टि $\bar{a}+\bar{b}$ के बदले $f(\bar{a}+\bar{b})$ दिया गया है। (ध्यान दीजिए कि सारणी 1′ एक संक्रिया सारणी **नहीं** है। इसमें हम केवल सारणी 1 के प्रत्येक $\bar{x}$ के संगत $f(\bar{x})$ दे रहे हैं।)

सारणी 1′ : सारणी 1 की प्रत्येक प्रविष्टि x को f(x) द्वारा प्रतिस्थापित किया गया है

$\cdot$	$f(\bar{0})$	$f(\bar{1})$	$f(\bar{2})$	$f(\bar{3})$
$f(\bar{0})$	$f(\bar{0})$	$f(\bar{1})$	$f(\bar{2})$	$f(\bar{3})$
$f(\bar{1})$	$f(\bar{1})$	$f(\bar{2})$	$f(\bar{3})$	$f(\bar{0})$
$f(\bar{2})$	$f(\bar{2})$	$f(\bar{3})$	$f(\bar{0})$	$f(\bar{1})$
$f(\bar{3})$	$f(\bar{3})$	$f(\bar{0})$	$f(\bar{1})$	$f(\bar{2})$

आगे, सारणी 2′ पर विचार कीजिए, जो गुणन के सापेक्ष $\{f(\bar{0}), f(\bar{1}), f(\bar{2}), f(\bar{3})\}$ के लिए, केली सारणी है।

सारणी 2′: $(\{f(\bar{0}), f(\bar{1}), f(\bar{2}), f(\bar{3})\}, \cdot)$ के लिए संक्रिया सारणी

$\cdot$	$f(\bar{0})$	$f(\bar{1})$	$f(\bar{2})$	$f(\bar{3})$
$f(\bar{0})$	$f(\bar{0})\cdot f(\bar{0})$	$f(\bar{0})\cdot f(\bar{1})$	$f(\bar{0})\cdot f(\bar{2})$	$f(\bar{0})\cdot f(\bar{3})$
$f(\bar{1})$	$f(\bar{1})\cdot f(\bar{0})$	$f(\bar{1})\cdot f(\bar{1})$	$f(\bar{1})\cdot f(\bar{2})$	$f(\bar{1})\cdot f(\bar{3})$
$f(\bar{2})$	$f(\bar{2})\cdot f(\bar{0})$	$f(\bar{2})\cdot f(\bar{1})$	$f(\bar{2})\cdot f(\bar{2})$	$f(\bar{2})\cdot f(\bar{3})$
$f(\bar{3})$	$f(\bar{3})\cdot f(\bar{0})$	$f(\bar{3})\cdot f(\bar{1})$	$f(\bar{3})\cdot f(\bar{2})$	$f(\bar{3})\cdot f(\bar{3})$

यदि आप सारणी 2′ में $m = 0, 1, 2, 3$ के लिए $f(\bar{m})$ के मान को रखें, तो आप पाएँगे कि यह सारणी 2 ही है। साथ ही, सारणियों 1′ और 2′ की प्रविष्टियों की तुलना करने पर, आप देख सकते हैं कि $f(\bar{a}+\bar{b}) = f(\bar{a})\cdot f(\bar{b}) \; \forall \; \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4$. अतः, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $f(\bar{a}+\bar{b}) = f(\bar{a})\cdot f(\bar{b}) \; \forall \; \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4$.

अब, $K_4 = \{e, a, b, ab\}$, अर्थात् क्लाइन 4-समूह की केली सारणी पर विचार कीजिए।

सारणी 3 : K_4 की केली सारणी

$\cdot$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

शब्द 'homomorphism' दो यूनानी शब्दों से मिलकर बना है। 'homos' जिसका अर्थ एक 'जैसा' है तथा 'morphe' जिसका अर्थ 'रूप' या 'संरचना' है।

फलन $g: \mathbb{Z}_4 \to K_4 : g(\bar{0}) = e, g(\bar{1}) = a, g(\bar{2}) = b, g(\bar{3}) = ab$ पर विचार कीजिए तथा उसी प्रक्रिया को अपनाइए जो आपने ऊपर f के लिए की थी। आप देखेंगे कि, उदाहरणार्थ, $g(\bar{1}+\bar{1}) = g(\bar{2}) = b$.

अब, $\bar{1}+\bar{1}$ सारणी 1 की दूसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ के प्रतिच्छेदन पर है, परंतु सारणी 3 में संगत स्थान पर अवयव e है, b नहीं। अतः, $g(\bar{1}+\bar{1}) = g(\bar{1})\cdot g(\bar{1})$ ये उदाहरण हमें निम्नलिखित परिभाषाओं की ओर ले जाते हैं।

परिभाषाएँ: i) हम कहते हैं कि समूह $(G_1, *_1)$ से समूह $(G_2, *_2)$ तक का एक फलन **संक्रिया को बनाए रखता है (preserves the operation)** यदि $f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y) \; \forall \; x, y \in G_1$.

ऐसा फलन **समूह समाकारिता (group homomorphism)** (या केवल **समाकारिता**) कहलाता है।

ii) समूह G से स्वयं तक की समाकारिता **अंतराकारिता (endomorphism)** कहलाती है।

iii) एक समूह समाकारिता जो एकैकी है, **एकैक समाकारिता (monomorphism)** कहलाती है।

iv) एक समूह समाकारिता जो आच्छादक है, **आच्छादक समाकारिता (epimorphism)** कहलाती है।

उदाहरणार्थ, ऊपर दिया हुआ $f:\mathbb{Z}_4 \to U_4$ एक समूह समाकारिता है, जबकि $g:\mathbb{Z}_4 \to K_4$ समाकारिता नहीं है।

इसके आगे, सारणियों $1, 1'$ और 2 से आपको सत्यापन करना चाहिए कि f एकैकी और आच्छदक है।

अतः, f एक एकैक समाकारिता तथा आच्छादक समाकारिता है।

आइए एक अन्य उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 1: समूहों $(\mathbb{Z}, +)$ और $(\{1, -1\}, \cdot)$ को लीजिए। आइए निम्नलिखित फलनों को परिभाषित करें:

$$f:\mathbb{Z} \to \{1, -1\} : f(n) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ -1, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$$

तथा $g:\mathbb{Z} \to \{1, -1\} : g(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ -1, & n < 0. \end{cases}$

दर्शाइए कि f एक समूह समाकारिता है, परंतु g नहीं है। क्या f एक एकैक समाकारिता है? क्या f एक आच्छादक समाकारिता है? अपने उत्तरों के लिए, कारण दीजिए।

हल: यदि a और b दोनों सम हैं या दोनों विषम हैं, तो $a+b$ सम होता है।

अतः, इन स्थितियों में $f(a+b) = 1 = f(a)\cdot f(b).$

यदि a विषम है और b सम है, तो $a+b$ विषम होता है। अतः, $f(a+b) = -I = f(a)\cdot f(b).$

इसी प्रकार, यदि a सम है और b विषम है, तो $f(a+b) = f(a)\cdot f(b).$

इस प्रकार, f सभी स्थितियों में संक्रिया को परिरक्षित करता है।

अतः, $f(a+b) = f(a)\cdot f(b)\ \forall\ a, b \in \mathbb{Z}.$

अब $f(2) = f(4) = 1$ तथा $2 \neq 4.$ अतः, f एकैकी नहीं है, अर्थात् f एकैक समाकारिता नहीं है।

क्योंकि $f(0) = 1$ और $f(1) = -1$, इसलिए f आच्छादक है। अतः, f एक आच्छादक समाकारिता है।

आगे, यदि $a=2, b=-2,$ तब $g(a+b)=g(0)=1.$ परंतु $g(a)\cdot g(b)=(1)(-1)=-1.$

इसलिए, इस स्थिति में $g(a+b)\neq g(a)g(b).$

इस प्रकार, g एक समूह समाकारिता नहीं है।

***

उपरोक्त उदाहरण से संबंधित निम्नलिखित व्यापक टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 1: यह दर्शाने के लिए कि समूह G_1 से समूह G_2 तक का फलन h एक समाकारिता **नहीं** है, ऐसे दो अवयवों $a, b \in G$ को दर्शाना काफी है जिनसे कि $h(ab)\neq h(a)h(b).$

और उदाहरणों की चर्चा करने से पहले, आइए एक समाकारिता से संबंधित दो मुख्य समुच्चयों को परिभाषित करें।

ध्यान दीजिए कि $\operatorname{Im} f \subseteq G_2$, तथा $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{e_2\}) \subseteq G_1$.

परिभाषाएँ: मान लीजिए $(G_1, *_1)$ और $(G_2, *_2)$ दो समूह हैं तथा $f: G_1 \to G_2$ एक समाकारिता है। तब,

i) f का प्रतिबिंब **(image)** का **(G_1 का समाकारी प्रतिबिंब (homomorphic image)** भी कहते हैं समुच्चय $\mathbf{Im\,f} = \{f(x) | x \in G_1\}$ है।

ii) **f की अष्टि (kernel)** को समुच्चय $\mathbf{Ker\ f} = \{x \in G_1 | f(x) = e_2\}$ है, जहाँ e_2 समूह G_2 का तत्समक है।

जैसा कि आप आगे देखेंगे, एक समाकारिता का प्रतिबिंब और उसकी अष्टि समाकारिता के व्यवहार को समझने में हमारी सहायता करते हैं।

अब, आइए समाकारिता के कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 2: समूहों $(\mathbb{R}, +)$ और $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ पर विचार करें। दर्शाइए कि फलन $\exp: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot): \exp(r) = e^r$ एक समूह समाकारिता है। साथ ही, Im exp और Ker exp ज्ञात कीजिए।

हल: सर्वप्रथम, आइए इसकी जाँच करें कि exp सुपरिभाषित है। यदि $\mathbb{R}$ में $r_1 = r_2$, तो $\mathbb{R}^*$ में $e^{r_1} = e^{r_2}$, अर्थात् $\exp(r_1) = \exp(r_2)$. अतः exp सुपरिभाषित है।

अब, किन्हीं $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ के लिए, आप जानते हैं कि $e^{r_1+r_2} = e^{r_1}\cdot e^{r_2}$.

$\therefore \exp(r_1 + r_2) = \exp(r_1)\cdot \exp(r_2).$

अतः, exp वास्तविक संख्याओं के योज्य समूह से शून्येतर वास्तविक संख्याओं के गुणनात्मक समूह तक एक समाकारिता है।

अब, $\operatorname{Im}\exp = \{\exp(r) | r \in \mathbb{R}\} = \{e^r | r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$, जो धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समूह है।

साथ ही, $\text{Ker exp} = \{r \in \mathbb{R} | e^r = 1\}$, क्योंकि $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ में 1 तत्समक 1 है।

$$= \{0\}.$$

ध्यान दीजिए कि exp $\mathbb{R}$ के तत्समक 0 को $\mathbb{R}^*$ के तत्समक 1 में ले जाता है। साथ ही, फलन exp, r के योज्य प्रतिलोम $(-r)$ को भी $\exp(r)$ के गुणात्मक प्रतिलोम e^{-r} में ले जाता है।

***

उदाहरण 3 : समूहों $(\mathbb{R}, +)$ और $(\mathbb{C}, +)$ पर विचार कीजिए।
फलन $f:(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ को $f(x+iy) = x$, अर्थात् $x+iy$ का वास्तविक भाग, द्वारा परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि f एक समाकारिता है। Im f और Ker f क्या हैं?

हलः सर्वप्रथम, क्या f सुपरिभाषित है? आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि ऐसा ही है। आगे, $\mathbb{C}$ में कोई दो अवयव $a+ib$ और $c+id$ लीजिए। तब,
$$f((a+ib)+(c+id)) = f((a+c)+i(b+d)) = a+c = f(a+ib)+f(c+id).$$

अतः, f एक समूह समाकारिता है।

$$\text{Im } f = \{f(x+iy) | x, y \in \mathbb{R}\} = \{x | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

अतः, f एक आच्छादक फलन है।

$$\text{Ker } f = \{x+iy \in \mathbb{C} | f(x+iy) = 0\} = \{x+iy \in \mathbb{C} | x = 0\}$$

$$= \{iy | y \in \mathbb{R}\}$$

$= i\mathbb{R}$, जो शुद्धतः अधिकल्पित संख्याओं और 0 का समुच्चय है।

ध्यान दीजिए कि f समुच्चय $\mathbb{C}$ के योज्य तत्समक को $\mathbb{R}$ के योज्य तत्समक में ले जाता है, तथा किसी भी $z \in \mathbb{C}$ के लिए, $(-z)$ को $-f(z)$ में ले जाता है।

***

उदाहरण 4 : जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन G_1 से G_2 तक समूह समाकारिताएं हैं या नहीं। जो फलन ऐसा है, उसके लिए आगे मालूम कीजिए कि वह एक एकैक समाकारिता और/या एक आच्छादक समाकारिता है या नहीं।

i) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{M}_3(\mathbb{C}) : f(m) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$,

ii) $f: D_8 \to \mathbb{Z}_8 : f(r) = \overline{1}, f(R_{90}) = \overline{2}, f(I) = \overline{0}$, जहाँ $D_8 = \langle r, R_{90} \rangle$,

iii) $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^* : f(z) = |z|$.

हलः उपरोक्त में से प्रत्येक फलन के लिए, सर्वप्रथम आपको जाँच करनी चाहिए कि यह सुपरिभाषित है।

i) यहाँ $f(r+s) = \begin{bmatrix} r+s & 0 & 0 \\ 0 & r+s & 0 \\ 0 & 0 & r+s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$

$k = f(r) + f(s) \forall r, s \in \mathbb{Z}.$

अतः, f एक समाकारिता है।

अब, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ को लीजिए।

तब, किसी भी $r \in \mathbb{R}$ के लिए, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$, क्योंकि $(1, 2)$ वें स्थान के अवयव भिन्न-भिन्न हैं।

इस प्रकार, किसी भी $r \in \mathbb{R}$ के लिए, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq f(r).$

$\therefore \operatorname{Im} f \neq \mathbb{M}_3(\mathbb{R}).$

अतः, f आच्छादक नहीं है।

आगे, यदि किन्हीं $r, s \in \mathbb{R}$ के लिए $f(r) = f(s)$, तो

$$\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

अतः, $r = s.$

इस प्रकार, f एकैकी है, तथा इसीलिए f एक एकैक समाकारिता है।

ii) D_8 का कोई भी अवयव $r^i R_{90}^j$ के रूप का है, जहाँ

$rR_{90} = R_{90}^{-1} r,\ r^2 = I,\ R_{90}^4 = I.$

मान लीजिए f एक समाकारिता है। तब, $\mathbb{Z}_8$ में $f(r^2) = f(r) + f(r).$

परंतु $r^2 = I,$ जिससे कि $f(r^2) = \bar{0}.$

दूसरी ओर, $f(r) + f(r) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}.$ क्योंकि $\bar{0} \neq \bar{2},$ इसलिए हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं। अतः, f एक समाकारिता नहीं है।

iii) जैसा कि आप 'कलन' से जानते हैं, $f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| = f(z_1) f(z_2).$

इस प्रकार, f एक समाकारिता है।

अब, $-1 \in \mathbb{R}^*$ पर विचार कीजिए। ऐसा कोई $z \in \mathbb{C}^*$ नहीं है जिससे कि $f(z) = |z| = -1,$ क्योंकि $|z| > 0.$

अब, f आच्छादक नहीं है।

आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि f एकैक समाकारिता भी नहीं है।

***

उदाहरण 5: दर्शाइए कि $f:\mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{C})\to\mathbb{M}_3(\mathbb{C}):f(A)=\begin{bmatrix}A\\0\end{bmatrix}$, जहाँ $\mathbf{0}$ पंक्ति सदिश (0, 0, 0) है, एक सुपरिभाषित एकैक समाकारिता है। Ker f भी ज्ञात कीजिए।

हल: सर्वप्रथम, आइए एक विशिष्ट स्थिति के माध्यम से f को समझने का प्रयास करें। मान लीजिए

$$A=\begin{bmatrix}2 & \pi & 3i\\ -1 & i & 9-i\sqrt{2}\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{C}).$$

$$\text{तब, } f(A)=\begin{bmatrix}2 & \pi & 3i\\ -1 & i & 9-i\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\0\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_3(\mathbb{C}).$$

यदि आप अब f को समझ गए हैं, तो आप सत्यापन कीजिए कि यदि $\mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{C})$ में $A=B$, तो $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ में $\begin{bmatrix}A\\\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B\\\mathbf{0}\end{bmatrix}$, अर्थात् $f(A)=f(B)$. अतः, f सुपरिभाषित है।

$$\text{आगे, } f(A+B)=\begin{bmatrix}A+B\\\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\\mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\\mathbf{0}\end{bmatrix}, \text{ क्योंकि } \mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

$$=f(A)+f(B).$$

अब, मान लीजिए $f(A)=f(B)$, जहाँ $A=[a_{ij}]$ और $B=[b_{ij}]$.

$$\text{तब, } \begin{bmatrix}A\\\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B\\\mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

अतः, $a_{ij}=b_{ij}\ \forall\ i=1,2,\ j=1,2,3.$ इसलिए $A=B.$

इस प्रकार, f एकैकी है, और इसीलिए एक एकैक समाकारिता है।

$$\text{अंत में, } \operatorname{Ker} f=\left\{A\in\mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{C})\,\middle|\,\begin{bmatrix}A\\\mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{0}_3\right\}, \text{ जहाँ } \mathbf{0}_3,\ \mathbb{M}_3(\mathbb{C}) \text{ का शून्य है।}$$

$$=\{A\in\mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{C})\mid A=\mathbf{0}_{2\times3}\}, \text{ जहाँ } \mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{C}) \text{ में } \mathbf{0}_{2\times3} \text{ शून्य है।}$$

$$=\{\mathbf{0}_{2\times3}\}.$$

***

उदाहरण 5 को व्यापकीकृत किया जा सकता है यह दर्शाने के लिए कि $\forall\ \mathbf{r \geq m, p \geq n,}\ \mathbb{M}_{\mathbf{m \times n}}(\mathbb{C})$ से $\mathbb{M}_{\mathbf{r \times p}}(\mathbb{C})$ तक **एक एकैक समाकारिता है।** इस अर्थ में हम कह सकते हैं कि, उदाहरणार्थ, $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \leq \mathbb{M}_{n+m}(\mathbb{C})\ \forall\ n, m \geq 0,$ प्रत्येक $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ में m शून्यों की पंक्तियों और स्तभों को जोड़ने पर।

हम उदाहरण 8 के बाद टिप्पणी 3 में इसका पुनः संदर्भ लेंगे।

अब आपको निम्नलिखित प्रश्नों को हल करना चाहिए। इससे आपको यह जानने में सहायता मिलेगी कि अभी तक जो आपने अध्ययन किया है उसे कितना समझा है।

E1) किसी भी समूह G के लिएए जाँच कीजिए कि $I : G \to G : I(g) = g$ एक अंतराकारिता है या नहीं। क्या यह एक एकैक समाकारिता है?

E2) दर्शाइए कि $f : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +) : f(x) = \ln x,$ x का प्राकृतिक लघुगणक, एक समूह समाकारिता है। $\text{Ker } f$ और $\text{Im } f$ भी ज्ञात कीजिए।

E3) क्या $f : (GL_2(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot) : f(A) = \det(A)$ एक समाकारिता है? यदि हाँ, तो $\text{Ker } f$ और $\text{Im } f$ प्राप्त कीजिए। अन्यथा, स्पष्ट कीजिए कि f एक समाकारिता क्यों नहीं है।

E4) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f(z) = 5z$ एक एकैक समाकारिता है।

ii) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* : f(z) = 5z$ एक एकैक समाकारिता है।

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$ एक समाकारिता है।

iv) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* : f(x) = x^2$ एक समाकारिता है।

v) यदि G एक समूह है तथा $H \leq G,$ तो G से H तक कोई समाकारिता नहीं हो सकती है।

उपरोक्त E4 के संदर्भ में, निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 2: E4(i) और (ii) में f को देखिए। ये एक ही प्रकार से परिभाषित किए गए हैं। परंतु (i) में यह एक समाकारिता है, और (ii) में नहीं है। किस वजह से यह अंतर है? वजह है प्रांत समूह और सहप्रांत समूह की संक्रियाएँ। यदि संबंधित संक्रिया बदल जाती है, तो हो सकता है कि f उसे बनाकर रख न पाए। इसलिए, जब भी आप एक समाकारिता को परिभाषित कर रहे हों, तो प्रांत समूह और सहप्रांत समूह की जिन संक्रियाओं के साथ आप कार्य कर रहे हैं उन्हें हमेशा ध्यान में रखें।

यदि आप उपरोक्त उदाहरणों को देखते हैं, तो आप इस ओर ध्यान देंगे कि समाकारिता तत्समक को तत्समक में, और प्रतिलोम को प्रतिलोम में, ले जाती है। वस्तुतः, यह गुण किसी भी समूह समाकारिता के लिए सत्य है, जैसा कि अब आप देखेंगे।

प्रमेय 1: मान लीजिए $f : (G_1, *_1) \to (G_2, *_2)$ एक समूह समाकरिता है। तब,

i) $f(e_1)=e_2$, जहाँ G_1 का तत्समक e_1 और G_2 का तत्समक e_2 है।

ii) G_1 में सभी x के लिए, $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$.

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $f(x *_1 y)=f(x) *_2 f(y) \; \forall \; x, y \in G_1$.

i) मान लीजिए $x \in G_1$. अब, $e_1 *_1 x = x$. अतः,

$f(x)=f(e_1 *_1 x)=f(e_1) *_2 f(x)$.

साथ ही, G_2 में $f(x)=e_2 *_2 f(x)$.

इस प्रकार, $f(e_1) *_2 f(x)=e_2 *_2 f(x)$.

अतः, G_2 में दाएँ निरसन नियम द्वारा, $f(e_1)=e_2$.

ii) किसी भी $x \in G_1$ के लिए, $f(x) *_2 f(x^{-1})=f(x *_1 x^{-1})=f(e_1)=e_2$, (i) से।

अतः, $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1} \; \forall \; x \in G_1$.

आपने अभी देखा कि यदि $f: G_1 \to G_2$ एक समाकारिता है, तो f समूह G_1 के तत्समक को G_2 के तत्समक में प्रतिचित्रित करता है तथा $g \in G_1$ के प्रतिलोम को $f(g) \in G_2$ के प्रतिलोम में प्रतिचित्रित करता है। क्या आपको लगता है कि इसका विलोम सत्य होगा? अर्थात्, यदि $f: G_1 \to G_2$ एक फलन है जिससे कि $f(e_1)=e_2$ और $[f(x)]^{-1}=f(x^{-1}) \forall x \in G_1$, तो क्या f एक समाकारिता होगा? आइए देखें।

उदाहरण 6: दर्शाइए कि प्रमेय 1 का विलोम असत्य है।

हल: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f(0)=0$ और $f(n)=\begin{cases} n+1 \forall n>0 \\ n-1 \forall n<0 \end{cases}$ पर विचार कीजिए।

क्योंकि $f(1+1) \neq f(1)+f(1)$, इसलिए f समाकारिता नहीं है।

परंतु $f(e_1)=e_2$, क्योंकि $e_1=e_2=0$. अतः, प्रमेय 1 (i), f के लिए सत्य है।

साथ ही, यदि $n>0$, तो $f(-n)=-n-1=-(n+1)=-f(n)$.

इसी प्रकार, आपको दिखाना चाहिए कि यदि $n<0$, तो $f(-n)=-f(n)$.

अतः, f प्रमेय 1 (ii) को भी संतुष्ट करता है।

इस प्रकार, प्रमेय 1 के विलोम का f एक प्रतिउदाहरण है। अतः, विलोम असत्य है।

***

आइए अब समाकारिताओं के कुछ और उदाहरणों को देखें। हम विभाग समूहों से समाकारिता के एक महत्वपूर्ण वर्ग को प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 7: मान लीजिए $H \triangleleft G$. फलन $p: G \to G/H : p(x)=Hx$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि p एक आच्छादक समाकारिता है। $\text{Ker}\, p$ क्या है?

उदाहरण 7 में दिया च प्राकृतिक (natural) या विहित (canonical), समूह समाकारिता कहलाता है। इसे 'प्राकृतिक' बुलाने का कारण आपको भाग 8.4 में स्पष्ट हो जाएगा।

हलः सर्वप्रथम, ध्यान दीजिए कि p एक सुपरिभाषित फलन है, क्योंकि $x = y \Rightarrow Hx = Hy \Rightarrow p(x) = p(y)$.

अब, $x, y \in G$ के लिए, $p(xy) = Hxy = Hx \cdot Hy = p(x)p(y)$. अतः, p एक समाकारिता है।

यहाँ, $\operatorname{Im} p = \{p(x) | x \in G = \{Hx | x \in G = G/H\}$. अतः p आच्छदक है। इसलिए, p एक आच्छादक समाकारिता है।

$\operatorname{Ker} p = \{x \in G | p(x) = H\}$ (याद रखिए, G/H का तत्समक H है।)

$= \{x \in G | Hx = H\}$

$= \{x \in G | x \in H\}$, इकाई 5 के प्रमेय 1 द्वारा।

$= G \cap H$

$= H.$

***

उदाहरण 7 में आप देख सकते हैं कि $\operatorname{Ker} p \triangleleft G$. आपको इसकी भी जाँच करनी चाहिए कि यहाँ प्रमेय 1 सत्य है।

समाकारिता के उदाहरणों का एक अन्य वर्ग आविष्टि फलन (inclusion map) से संबंधित है।

उदाहरण 8 में i, **आविष्टि फलन** कहलाता है। हम कभी-कभी फलन $i : H \to G$ को $H \xrightarrow{i} G$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

उदाहरण 8: मान लीजिए H समूह G का एक उपसमूह है। दर्शाइए कि फलन $i : H \to G : i(h) = h$ एक एकैक समाकारिता है। $\operatorname{Ker} i$ और $\operatorname{Im} i$ भी ज्ञात कीजिए।

हलः क्योंकि $i(h_1h_2) = h_1h_2 = i(h_1)i(h_2) \; \forall \; h_1, h_2 \in H$, इसलिए i एक समूह समाकारिता है।

साथ ही, यदि किन्हीं $h_1, h_2 \in H$ के लिए, $i(h_1) = i(h_2)$, तो $h_1 = h_2$. अतः, i एकैकी है।

अब, $\operatorname{Ker} i = \{h \in H | h = e\} = \{e\}$, तथा

$\operatorname{Im} i = \{i(h) | h \in H\} = \{h | h \in H\} = H.$

***

उदाहरण 8 के संदर्भ में, निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 3: जब उदाहरण 8 में $H = G$, तब हम तत्समक फलन I प्राप्त करते हैं, जिसे आपने E1 में एकैक समाकारिता दर्शाया था।

अब फलनों से संबंधित उदाहरणों के एक अन्य वर्ग पर विचार कीजिए।

उदाहरण 9: में ϕ_r बिंदु r पर **मूल्यांकन समाकारिता (evaluation homomorphism)** कहलाता है।

उदाहरण 9: मान लीजिए कि $\mathcal{F}$ बिंदुशः योग के सापेक्ष $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक के सभी फलनों का समूह है। मान लीजिए $r \in \mathbb{R}$ फलन।

$\phi_r : \mathcal{F} \to \mathbb{R} : \phi_r(f) = f(r)$. को परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि ϕ_r एक समाकारिता है। $\operatorname{Im} \phi_r$ और $\operatorname{Ker} \phi_r$ भी ज्ञात कीजिए।

हल: सर्वप्रथम, आइए इसकी जाँच करें कि ϕ_r सुपरिभाषित है। यदि $\mathcal{F}$ में $f = g$, तो $\mathbb{R}$ में $f(r) = g(r)$ और इसी लिए $\phi_r(f) = \phi_r(g)$. अतः, ϕ_r सुपरिभाषित है।

आगे, क्योंकि $\phi_r(f+g) = (f+g)(r) = f(r) + g(r) = \phi_r(f) + \phi_r(g)$, इसलिए ϕ_r एक समाकारिता है।

अब, किसी भी $c \in \mathbb{R}$ के लिए, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = c$ परिभाषित कीजिए।

तब, $f \in \mathcal{F}$ s.t. $\phi_r(f) = f(r) = c.$ अतः, $c \in \text{Im}\ \phi_r$. अतः, $\text{Im}\ \phi_r = R.$

$\text{Ker}\ \phi_r = \{f \in \mathcal{F} \mid \phi_r(f) = 0\} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(r) = 0\}.$

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E5) S_3 से S_3/A_3 तक प्राकृतिक समाकारिता p लीजिए, जहाँ $A_3 = <(1\ 2\ 3)>$. क्या $(1\ 2) \in \text{Ker}\ p$? क्या $(1\ 2) \in \text{Im}\ p$?

E6) मान लीजिए $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, जो एकक फलन वृत्त है। $f : (\mathbb{R}, +) \to (S^1, \cdot) : f(x) = e^{2ix}$ को परिभाषित कीजिए। क्या f एक समाकारिता है? यदि है, तो $\text{Ker} f$ ज्ञात कीजिए। यदि नहीं है, तो f की परिभाषा को इस तरह बदल दीजिए कि f एक समाकारिता बन जाए।

E7) मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \triangleleft G$. दर्शाइए कि एक ऐसा समूह G_1 तथा एक ऐसी समाकारिता $f : G \to G_1$ है जिससे कि $\text{Ker}\ f = H.$

संकेत: क्या उदाहरण 7 से कोई सहायता मिलती है?

E8) $\phi : S_3 \to <(1\ 2)> : \phi(\sigma) = \sigma(1\ 2)\sigma^{-1}$ पर विचार कीजिए। क्या ϕ एक समाकारिता है? यदि है, तो $\text{Ker}\ \phi$ ज्ञात कीजिए। यदि ϕ समाकारिता नहीं है, तो S_3 का एक उपसमूह K, तथा एक समाकारिता $\psi : S_3 \to K$, ज्ञात कीजिए।

अब, आइए दो समाकारिताओं के संयोजन पर विचार करें। आइए पहले $\mathbb{Z}$ से संबंधित एक उदाहरण पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 10: समाकारिताओं $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f(z) = 5z$ तथा $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} : p(z) = \bar{z}$ पर विचार कीजिए। क्या $p \circ f$ एक सुपरिभाषित समाकारिता है? क्यों, या क्यों नही?

हल: यदि $\mathbb{Z}$ में $z_1 = z_2$, तो $5z_1 = 5z_2$, तथा $5z_1 + 15\mathbb{Z} = 5z_2 + 15\mathbb{Z}.$

अतः, $p \circ f(z_1) = p \circ f(z_2)$. इस प्रकार, $p \circ f$ सुपरिभाषित है।

साथ ही, $p \circ f(z_1 + z_2) = 5(z_1 + z_2) + 15\mathbb{Z} = (5z_1 + 15\mathbb{Z}) + (5z_2 + 15\mathbb{Z})$

$$= p \circ f(z_1) + p \circ f(z_2).$$

इस प्रकार, $p \circ f$ एक समाकारिता है।

***

जो आपने उदाहरण 10 में देखा है, सिर्फ $\mathbb{Z}$ के लिए सत्य नहीं है। यह व्यापक रूप में सत्य है। आइए देखें क्यों।

प्रमेय 2: यदि $f:G_1 \to G_2$ और $g:G_2 \to G_3$ दो समूह समाकारिताएँ हैं, तो $g \circ f:G_1 \to G_3$ भी एक समूह समाकारिता है।

उपपत्ति: सर्वप्रथम, ध्यान दीजिए कि $g \circ f$ सुपरिभाषित है, क्योंकि $\text{Im } f \subseteq$ प्राँत g.

अब, मान लीजिए $x, y \in G_1$. तब,

$$g \circ f(xy) = g(f(xy))$$

$$= g(f(x)f(y)) \text{ क्योंकि } f \text{ एक समाकारिता है।}$$

$$= g(f(x))g(f(y)) \text{ क्योंकि } g \text{ एक समाकारिता है।}$$

$$= g \circ f(x) \cdot g \circ f(y).$$

■

इस प्रकार, $g \circ f$ एक समाकारिता है।

अब एक संबंधित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E9) दर्शाइए कि $f:\mathbb{C} \to \mathbb{R}: f(x+iy) = y$ तथा $g:\mathbb{R} \to \mathbb{C}: g(r) = ir$ का संयोजन एक समाकारिता है। $\text{Ker}(g \circ f)$ और $\text{Im}(g \circ f)$ क्या हैं? क्या $\text{Ker}(g \circ f) \subseteq \text{Ker } g$? क्या $\text{Ker}(g \circ f) \subseteq \text{Ker } f$? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

अभी तक आपने देखा है कि एक समाकारिता की अष्टि और प्रतिबिंब समूहों के उपसमुच्चय हैं। आपने जिन उदाहरणों का अभी तक अध्ययन किया है, उनमें आपने शायद ध्यान दिया होगा कि वास्तव में ये उपसमुच्चय उपसमूह हैं। अब हम यह सिद्ध करेंगे कि किसी भी समाकारिता की अष्टि एक प्रसामान्य उपसमूह होता है, तथा इसका प्रतिबिंब एक उपसमूह होता है।

प्रमेय 3: मान लीजिए $f:G_1 \to G_2$ एक समूह समाकारिता है। तब,

i) $\text{Ker } f$ समूह G_1 का एक प्रसामान्य उपसमूह है, तथा

ii) $\text{Im } f$ समूह G_2 का एक उपसमूह है।

उपपत्ति: i) $\text{Ker } f = \{x \in G_1 | f(x) = e_2\}$.

क्योंकि $f(e_1) = e_2$, इसलिए $e_1 \in \text{Ker } f$. $\therefore \text{Ker } f \neq \varnothing$.

अब, यदि $x, y \in \text{Ker } f$, तो $f(x) = e_2$ और $f(y) = e_2$.

$$\therefore f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)[f(y)]^{-1} = e_2.$$

$$\therefore xy^{-1} \in \text{Ker } f.$$

इसलिए, इकाई 3 के उपसमूह परीक्षण द्वारा, $\text{Ker } f \leq G_1$.

आगे, किसी भी $y \in G_1$ और $x \in \text{Ker } f$ के लिए,

$$f(y^{-1}xy) = f(y^{-1})f(x)f(y)$$

$= [f(y)]^{-1} e_2 f(y)$, क्योंकि $f(x) = e_2$.

$= e_2$.

$\therefore \text{Ker } f \lhd G_1$.

ii) $\text{Im} f \neq \emptyset$, क्योंकि $f(e_1) \in \text{Im } f$.

अब, मान लीजिए $x_2, y_2 \in \text{Im} f$. तब, $\exists x_1, y_1 \in G_1$ s.t. $f(x_1) = x_2$ तथा $f(y_1) = y_2$. तब, $y_2^{-1} = f(y_1^{-1})$. ■

$\therefore x_2 y_2^{-1} = f(x_1) f(y_1^{-1}) = f(x_1 y_1^{-1}) \in \text{Im} f$.

$\therefore \text{Im} f \leq G_2$.

प्रमेय 3 में आप देख चुके हैं कि $\text{Im } f \leq G_2$. इस संदर्भ में निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 4: आविष्टि फलन $i : H \to S_4$ पर विचार कीजिए, जहाँ $H = \{I, (1\ 2)\}$.

यहाँ $\text{Im } i = H$.

अब, $(2\ 4) \in S_4$ लीजिए। तब, $(2\ 4)^{-1}(1\ 2)(2\ 4) = (2\ 4)(1\ 2)(2\ 4) = (1\ 4) \notin \text{Im } i$.

इस प्रकार, $\text{Im } i \ntriangleleft S_4$.

यह उदाहरण दर्शाता है कि $\text{Im } f$ का G_2 (प्रमेय 3 के) में प्रसामान्य होना आवश्यक नहीं है।

परंतु, यदि G_2 आबेली है, तब आप जानते हैं कि $\text{Im } f \lhd G_2$.

आइए प्रमेय 3 से कुछ तुरंत निकलने वाले परिणामों पर विचार करें।

उदाहरण 11: दर्शाइए कि $\{ix \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{C}$ का एक प्रसामान्य उपसमूह है।
हल: प्रमेय 3 और उदाहरण 3 से हम देखते हैं कि $\mathbb{C}$ का $\{ix \mid x \in \mathbb{R}\}$ एक प्रसामान्य उपसमूह है।

***

उदाहरण 12: $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot) : \phi(x) = \cos x + i \sin x$ पर विचार कीजिए। $\text{Ker}\,\phi$ और $\text{Im }\phi$ ज्ञात कीजिए। इसी से दर्शाइए कि $<2\pi> \lhd \mathbb{R}^*$ और $S^1 \lhd \mathbb{C}^*$, जहाँ S^1 एकक वृत्त है।

हलः आप दर्शा सकते हैं कि $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$. इस प्रकार, ϕ एक समूह समाकारिता है।

अब, किसी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए, $\phi(x) = 1$ iff $x = 2\pi n$.

इस प्रकार, $\text{Ker}\,\phi = \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} = <2\pi>$.

अतः, प्रमेय 3 द्वारा, $<2\pi> \lhd \mathbb{R}$

इस स्थिति में, का $\text{Im }\phi$ एक उपसमूह है, और $\mathbb{C}^*$ आबेली है। अतः, $\text{Im}\,\phi \lhd \mathbb{C}^*$.

ध्यान दीजिए कि $\text{Im }\phi$ निरपेक्ष मान 1 वाले सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है, अर्थात् यह त्रिज्या 1 इकाई और केन्द्र (0, 0) वाले वृत्त पर स्थित सभी सम्मिश्र

संख्याओं का समुच्चय है, अर्थात् S^1 है।

अतः, $S^1 \lhd \mathbb{C}^*$.

***

उपरोक्त संदर्भ में, हलों के बारे में निम्नलिखित व्यापक टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 5: उपरोक्त उदाहरण में प्रश्न के शब्दों पर ध्यान दीजिए। अंतिम भाग में यह कहा गया है कि '**इसी से** दर्शाइए कि ...'। अतः, हल के पिछले स्तर पर जो आप दिखा चुके हैं, **इसी का उपयोग करते हुए** आपको सिद्ध करने की आवश्यकता है कि $<2\pi>$ और S^1 क्रमशः अपने अपने समूहों में प्रसामान्य उपसमूह हैं।

आप सीधे भी दर्शा सकते थे कि $<2\pi>$ और S^1 प्रसामान्य उपसमूह हैं, परंतु तब आप दिए गए प्रश्न का उत्तर नहीं दे रहे होते।

अब, आइए एक समाकारिता की अष्टि पर दृष्टि डालें। आपने इस ओर शायद ही ध्यान दिया होगा कि कभी-कभी यह $\{e\}$ है (जैसा उदाहरण 2 में), तथा कभी-कभी यह एक बड़ा उपसमूह होता है (जैसा उदाहरण 3 में)। क्या अष्टि की माप कुछ इंगित करती है? वस्तुतः, जैसा कि आप अब देखेंगे, समाकारिता की अष्टि जितनी बड़ी होगी, उतनी ही वह एकैकी होने से दूर रहेगी।

प्रमेय 4: मान लीजिए $f: G_1 \to G_2$ एक समूह समाकारिता है। तब, f एकैकी होता है यदि और केवल यदि $\text{Ker} f = \{e_1\}$, जहाँ e_1 समूह G_1 का तत्समक अवयव है।

उपपत्ति: सर्वप्रथम, आइए मान लें कि f एकैकी है। मान लीजिए $x \in \text{Ker}\, f$. तब, $f(x) = e_2$, अर्थात् $f(x) = f(e_1)$. परंतु f एकैकी है।

$\therefore x = e_1$.

इस प्रकार, $\text{Ker} f = \{e_1\}$.

विलोमतः, मान लीजिए $\text{Ker}\, f = \{e_1\}$.

मान लीजिए कि $x, y \in G_1$ s.t. $f(x) = f(y)$. तब,

$f(xy^{-1}) = f(x) f(y^{-1}) = f(x)[f(y)]^{-1} = f(y)[f(y)]^{-1} = e_2$.

$\therefore xy^{-1} \in \text{Ker}\, f = \{e_1\}$. $\therefore xy^{-1} = e_1$. अतः, $x = y$.

इससे प्रदर्शित होता है कि f एकैकी है।

प्रमेय 4 बहुत उपयोगी है। उदाहरणार्थ, प्रमेय 4 और उदाहरण 8 के उपयोग से हम तुरंत देख सकते हैं कि कोई भी आविष्टि $i: H \to G$ एकैकी है, क्योंकि $\text{Ker}\, i = \{e\}$.

आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 13: उदाहरण 7 की स्थिति पर विचार कीजिए। H पर किन प्रतिबंधों के अधीन p एकैकी है?

हलः $p : G \to G/H : p(x) = Hx$. आप जानते हैं कि $\text{Ker}\, p = H$.

इस प्रकार, p एकैकी है iff $H = \{e\}$.

***

उदाहरण 14: $\mathbb{R}^2$ के स्थानांतरणों (translations) के समूह T पर विचार कीजिए (देखिए उदाहरण 7, इकाई 2)। एक फलन $\phi : (\mathbb{R}^2, +) \to (T, \circ)$ को $\phi(a, b) = f_{a,b}$ द्वारा परिभाषित कीजिए, जहां $f_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b)$. दर्शाइए कि ϕ एक आच्छदक समाकारिता है, जो 1-1 भी है।

हलः आप इकाई 2 में देख चुके हैं कि $\mathbb{R}^2$ में (a, b), (c, d) के लिए

$f_{a+b, c+d} = f_{a,b} \circ f_{c,d}$,

अर्थात्, $\phi((a, b) + (c, d)) = \phi(a, b) \circ \phi(c, d)$.

इस प्रकार, ϕ समूहों की समाकारिता है।

अब, T का कोई भी अवयव $f_{a,b} = \phi(a, b)$ है। अतः, ϕ आच्छादक है।

अब, आइए देखें कि एकैकी क्यों है। ध्यान दीजिए कि T का तत्समक $f_{0,0}$ है।

मान लीजिए $(a, b) \in \text{Ker}\, \phi$. तब,

$\phi(a, b) = f_{0,0}$

$\Rightarrow f_{a,b} = f_{0,0}$

$\Rightarrow f_{a,b}(0, 0) = f_{0,0}(0, 0)$.

$\Rightarrow (a, b) = (0, 0)$.

$\therefore \text{Ker}\, \phi = \{(0, 0)\}$, अर्थात् 1-1 है प्रमेय 4 द्वारा।

अतः, इमने सिद्ध कर दिया है कि ϕ एक समाकारिता है, जो एकैकी आच्छादक है।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E10) किसी भी $n > 1$ के लिएए $\mathbb{Z}_n$ पर, तथा एक के nवें मूलों के समूह U_n परए विचार कीजिए। मान लीजिए ζ एक का एक पूर्वग nवाँ मूल है। तबए $U_n = <\zeta>$. दर्शाइए कि $f : \mathbb{Z}_n \to U_n : f(\overline{r}) = \zeta^r$ एक समूह समाकारिता है। Ker f और Im f को ज्ञात कीजिए। इसी से निर्णय लीजिए कि f एकैकी और/या आच्छादक है।

E11) मान लीजिए G एक समूह है तथा G के H और K प्रसामान्य उपसमूह हैं। फलन $f : G \to (G/H) \times (G/K) : f(g) = (Hg, Kg)$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि f एक समाकारिता है। Ker f और Im f भी ज्ञात कीजिए। आगे, बताइए कि H और K पर किन प्रतिबंधों के अधीन f एक एकैक समाकारिता होगा। क्या f आच्छादक है?

अब आइए एक आच्छादक समाकारिता के एक अति उपयोगी गुण पर दृष्टि डालें।

प्रमेय 5: यदि $f: G_1 \to G_2$ एक आच्छादक समाकारिता है और S एक समुच्चय है जो G_1 को जनित करता है, तो G_2 को $f(S)$ जनित करता है।

उपपत्तिः इकाई 4 से आप जानते हैं कि यदि S समूह G_1 को जनित करता है, तो $G_1 = <S> = \{x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_m^{r_m} \mid m \in \mathbb{N}, x_i \in S, r_i \in \mathbb{Z}$ सभी i के लिए।

हमें $G_2 = <f(S)>$ दर्शाने की आवश्यकता है।

अब, क्योंकि $S \subseteq G_1$, इसलिए $f(S) \subseteq G_2$.

अतः, $<f(S)> \le G_2$.

यह दर्शाने के लिए कि $G_2 \le <f(S)>$, मान लीजिए कि $x \in G_2$.

क्योंकि f आच्छादक है, इसलिए $\exists y \in G_1$ s.t. $f(y) = x$. क्योंकि $y \in G_1$, इसलिए किसी $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in S$ और $r_i \in \mathbb{Z}$, के लिए, जहाँ $1 \le i \le m$, $y = x_1^{r_1} \dots x_m^{r_m}$.

इस प्रकार, $x = f(y) = f(x_1^{r_1} \dots x_m^{r_m})$. ■

$= (f(x_1))^{r_1} \dots (f(x_m))^{r_m}$, क्योंकि f एक समाकारिता है।

$\Rightarrow x \in <f(S)>$, क्योंकि प्रत्येक $i = 1, 2, \dots, m$ के लिए $f(x_i) \in f(S)$.

इस प्रकार, $G_2 \le <f(S)>$. ■

अतः, $G_2 = <f(S)>$.

आइए समाकारिताओं के कुछ महत्वपूर्ण गुण जानने के लिए प्रमेय 5 का उपयोग करें। वस्तुतः, ये प्रमेय 5 के उपप्रमेय हैं।

उपप्रमेय 1: किसी भी चक्रीय समूह का समाकारी प्रतिबिंब चक्रीय होता है।

E12 में, हम आपसे इसे, तथा अगले उपप्रमेय को, सिद्ध करने के लिए कहेंगे।

उपप्रमेय 2: किसी भी परिमिततः जनित समूह का समाकारी प्रतिबिंब परिमिततः जनित होता है।

आइए अब एक विशिष्ट स्थिति पर विचार करें, जिसमें प्रमेय 5 का उपयोग होता है।

उदाहरण 15: मान लीजिए $f: D_{10} \to G$ एक समूह आच्छादक समाकारिता है। G के अवयव किस प्रकार के दिखते हैं?

हलः आप जानते हैं कि r और R द्वारा D_{10} जनित होता है, जहाँ $r^2 = I$, $R^5 = I$ तथा $rR = R^{-1}r$. अतः, G को $\{f(r), f(R)\}$ जनित करता है। साथ ही, क्योंकि f एक समाकारिता है, इसलिए $[f(r)]^2 = I = [f(R)]^5$, तथा $f(r)f(R) = [f(R)]^{-1} f(r)$.

अतः, G के अवयव $f(r)^m f(R)^n$ के रूप के हैं, जहाँ $m = 0, 1$ और $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

***

प्रमेय 5 के संदर्भ में निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 6: ध्यान दीजिए कि यदि f (प्रमेय 5 में) आच्छादक नहीं है, तो यह आवश्यक नहीं है कि $f(S)$ समूह G_2 को जनित करे। उदाहरणार्थ, आविष्टि फलन $i:<(1\ 2)> \to S_3$ लीजिए। तब, $i(<(1\ 2)>) = <(1\ 2)> \neq S_3$. अब, आइए एक अन्य मौलिक परिणाम पर विचार करें जो दर्शाता है कि किस प्रकार एक समूह के कुछ बीजीय गुणों को एक समूह समाकारिता बनाए रखता है।

प्रमेय 6: मान लीजिए $f:G_1 \to G_2$ एक समूह समाकारिता है, जहाँ G_1 आबेली है। तब, $f(G_1)$ आबेली होता है।

उपपत्ति: मान लीजिए $a, b \in f(G_1)$. तब $\exists\ x, y \in G_1$ s.t. $a = f(x)$ और $b = f(y)$. ■

अतः, $ab = f(x)f(y) = f(xy) = f(yx)$ क्योंकि G_1 आबेली है।

$= f(y)f(x)$

$= ba.$

अतः, $f(G_1)$ आबेली है।

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करते हुए, आप समूहों के समाकारी प्रतिबिंबों के कुछ महत्वपूर्ण गुणों को सिद्ध करेंगे।

E12) उपप्रमेय 1 तथा उपप्रमेय 2 को सिद्ध कीजिए।
उपप्रमेय 1 के विलोम का कथन दीजिए। क्या यह सत्य है? क्यों, या क्यों नहीं?

E13) प्रमेय 6 के विलोम का कथन दीजिए। क्या यह सत्य है? अपने उत्तरों के कारण दीजिए।

E14) प्रमेय 5 के उपयोग से सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समूह का विभाग समूह चक्रीय होता है।

अभी तक आपने समाकारिताओं के विभिन्न प्रकारों – एकैकी, आच्छादक और एकैकी आच्छादक – के उदाहरण देखें हैं। प्रमेयों 5 और 6 से आपने देख ही लिया है कि किस प्रकार समाकारिता कुछ बीजीय गुणों को, जैसे आबेली होना या परिमिततः जनित होना, बनाए रखता है। अब, आप देखेंगे कि किस प्रकार एकैकी आच्छादक समाकारिताएँ संबंधित समूहों की प्रत्येक छोटी से छोटी बीजीय सूचना को बनाए रखती हैं।

8.3 तुल्याकारिताएं

इस भाग में हम समाकारिताओं के एक महत्वपूर्ण वर्ग, अर्थात् 1-1 और आच्छादक समाकारिताओं की चर्चा करेंगे। इसलिए, आइए भाग 8.2 के प्रारंभ में दी हुई सारणियों 1 और 2 पर लौटें। वहाँ आपने देखा था कि न केवल $f:\mathbb{Z}_4 \to U_4$ एक समाकारिता है, बल्कि यह 1-1 और आच्छदक भी है। आपने यह भी देखा था कि सारणी 2 ठीक सारणी 1 जैसी दिखती थी, जहाँ $m \cdot \overline{1}$ को $i^m, m = 0, 1, 2, 3$ से प्रतिस्थापित किया था। इस प्रकार, न केवल f संक्रिया को बनाए रख रहा था कि $\mathbb{Z}_4$ **और** $\mathbf{U_4}$

शब्द (isomorphism) बना यूनानी शब्द 'isos' से बना है, जिसका अर्थ 'बराबर' है।

के अवयव क्रमशः अपनी संक्रियाओं के सापेक्ष पूरी तरह समान व्यवहार करते हैं। तथा इसी लिए $(\mathbb{Z}_4 + 4)$ और $(U_4, \cdot)$ की पूरी तरह **समान बीजीय संरचनाएं हैं**। वहाँ का f उसका उदाहरण है जिसे हम अब परिभाषित करेंगे।

परिभाषाएँ: मान लीजिए G_1 और G_2 दो समूह हैं।

i) एक समूह समाकारिता $f: G_1 \to G_2$ एक **समूह तुल्याकारिता (group isomorphism)** (या केवल **तुल्याकारिता**) कहलाती है, यदि f एकैकी (1-1) और आच्छादक है। इस स्थिति में हम कहते हैं कि **समूह G_1 समूह G_2 के तुल्याकारी (isomorphic)** है, या यह कि **G_1 और G_2 तुल्याकारी हैं।** हम इस तथ्य को $\mathbf{G_1 \simeq G_2}$, या $\mathbf{G_1 \cong G_2}$, द्वारा व्यक्त करते हैं। (हम 'के तुल्यकारी है' को व्यक्त करने के लिए '$\simeq$' का उपयोग करेंगे।)

ii) समूह G की स्वयं तक तुल्याकारिता को G की **स्वाकारिता (automorphism)** कहते हैं।

उदाहरणार्थ, तत्समक फलन $I_G : G \to G : I_G(x) = x$, G की स्वाकारिता है, तथा $\mathbb{Z}_4 \simeq U_4$ (जैसी ऊपर चर्चा की गई थी)।

साथ ही, उदाहरण 13 से आप जानते हैं कि किसी भी समूह G के लिए, $G \simeq G/\{e\}$.

आगे, उदाहरण 14 से आप जानते हैं कि $\mathbb{R}^2 \simeq T$, जो $\mathbb{R}^2$ के स्थानांतरणों का समूह है।

ध्यान दीजिए कि तुल्याकारिता एक एकैक समाकारिता तथा एक आच्छादक समाकारिता दोनों ही होती है।

आइए अब तुल्याकारी समूहों के कुछ और उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 16: दर्शाइए कि $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. का उपसमूह है।

इसके बाद, दर्शाइए कि $f : G \to \mathbb{C} : f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right) = a + ib$ एक तुल्याकारिता है।

हल: क्योंकि $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G$, इसलिए $G \neq \varnothing$.

अब, यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in G$, तो $(-A) = \begin{bmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{bmatrix} \in G$.

साथ ही, इसकी जाँच कीजिए कि किसी भी $A, B \in G$ के लिए, $A - B \in G$.

अतः, $G \le \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

अब, दूसरे भाग पर विचार कीजिए। आइए सत्यापित करें कि f सुपरिभाषित है। यदि G में $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ है, तो $a = c$ और $b = d$. अतः, $\mathbb{C}$ में $a + ib = c + id$ अर्थात्, $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}\right)$. अतः, f सुपरिभाषित है।

आगे, G में $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ के लिए,

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix}\right)=(a+c)+i(b+d)$$

$$=(a+ib)+(c+id)$$

$$=f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}\right).$$

अतः, f एक समाकारिता है।

अब,

$$\text{Ker } f=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\in G \,\middle|\, a+ib=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\in G \,\middle|\, a=0, b=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

अतः, प्रमेय 4 द्वारा, f एकैकी है।

अंत में, यह जाँच करने के लिए कि $\text{Im } f=\mathbb{C}$, है, $z\in\mathbb{C}$ लीजिए। तब, किन्हीं $a, b\in\mathbb{R}$ के लिए, $z=a+ib.$

इस प्रकार, $z=f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right)$. अतः, f आच्छादक है।

इस तरह, f एक तुल्यकारिता है। अतः, $\mathbb{C}\simeq G\le \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

***

उदाहरण 17: दर्शाइए कि

i) $S_m \le S_n \;\forall\; n\ge m,$

ii) $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \lhd \mathbb{M}_{r\times p}(\mathbb{C}) \;\forall\; r\ge m, p\ge n$ तथा

iii) $\mathbb{R}^m \lhd \mathbb{R}^n \;\forall\; m\le n.$

हल: i) $i: S_m\to S_n : i(\sigma)=\sigma'$, जहाँ $\sigma'(x)=\begin{cases}\sigma(x), & x=1,\ldots,m \text{ के लिए} \\ x, & x=m+1,\ldots,n \text{ के लिए.}\end{cases}$

आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि i एक समाकारिता है।

अतः, $i(S_m)\le S_n$.

साथ ही, क्योंकि i एकैकी है, इसलिए $S_m \simeq i(S_m)$.

इस प्रकार, हम $i(S_m)$ और S_m को एक ही मान सकते हैं तथा कह सकते हैं कि $S_m\le S_n$.

ii) उदाहरण 5 की तरह, $i:\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})\to \mathbb{M}_{r\times p}(\mathbb{C}) : i(A)=\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$, को परिभाषित कीजिए, जहाँ $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ और $\mathbf{0}_3$ क्रमशः कोटियों $m\times(p-n), (r-m)\times n$ और $(r-m)\times(p-n)$ वाले शून्य आव्यूह हैं।

उपरोक्त (i) के तर्क का उपयोग करते हुए, आप देख सकते हैं कि $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})\le \mathbb{M}_{r\times p}(\mathbb{C})$.

क्योंकि $\mathbb{M}_{r\times p}(\mathbb{C})$ आबेली है, इसलिए इसका प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य है। इस प्रकार, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

iii) $i:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : i(a_1,\ldots,a_m) = (a_1, a_2,\ldots,a_m,\underbrace{0,\ldots,0}_{(n-m)\text{ बार}})$ एक सुपरिभाषित एकैक समाकारिता है।

उपरोक्त (ii) की ही तरह, $\mathbb{R}^m \lhd \mathbb{R}^n$ है, क्योंकि $\mathbb{R}^n$ आबेली है।

***

आगे बढ़ने से पहले वाले, तुल्याकारिता की शक्ति के बारे में निम्नलिखित महत्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए।

दो तुल्याकारी समूह बीजीय रूप से समान निकाय होते हैं।

टिप्पणी 7: यदि $f:G_1 \to G_2$ एक समूह तुल्याकारिता है, तो f न केवल संक्रिया को, बल्कि G_1 की संपूर्ण बीजीय संरचना को, बनाए रखता है। इस प्रकार, G_1 और G_2 के पूरी तरह से समान बीजीय गुण होने चाहिए। यदि G_1 अपरिमित है, तो G_2 को भी अपरिमित होना चाहिए। यदि G_1 आबेली है, तो G_2 को भी आबेली होना चाहिए। यदि G_1 में कोटि n वाला एक अवयव है, तो G_2 में भी कोटि n वाला एक अवयव होना चाहिए, इत्यादि।

आइए कुछ और उदाहरणों के माध्यम से आपकी यह समझने में सहायता करें जिस पर उपरोक्त टिप्पणी में किस ओर ध्यान आकर्षित किया गया है।

उदाहरण 18: यदि G_1 और G_2 समान परिमित कोटि वाले दो समूह हैं, तो ये तुल्याकारी हैं। सत्य, या असत्य? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल: भाग 8.2 के प्रारंभ में दी हुई सारणी 1 और सारणी 3 पर विचार कीजिए। यहाँ $o(\mathbb{Z}_4) = 4 = o(K_4)$, परंतु इनकी केली सारणियाँ बिल्कुल अलग हैं। उदाहरणार्थ, सारणी 1 दर्शाती है कि $\mathbb{Z}_4$ में कोटि 4 के दो अवयव हैं। परंतु सारणी 3 दर्शाती है कि K_4 में कोई कोटि 4 का अवयव नहीं है। इस प्रकार, इनकी बीजीय संरचनाएँ अलग हैं।

वस्तुतः, $\mathbb{Z}_4$ चक्रीय है, परंतु K_4 चक्रीय नहीं है। अतः ये तुल्याकारी नहीं हैं। इस प्रकार, दिया हुआ कथन असत्य है।

***

उदाहरण 19: दर्शाइए कि $\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Q}$

'के तुल्यकारी नहीं हैं' को '$\not\simeq$' व्यक्त करता है

हल: हम जानते हैं कि $\mathbb{Z}$ चक्रीय है। साथ ही, इकाई 4 से आप जानते हैं कि चक्रीय नहीं है। अतः $\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Q}$

***

उदाहरण 19 हमें बताता है कि दो अपरिमित समूहों का तुल्याकारी होना आवश्यक नहीं है। ध्यान दीजिए कि पाठ्यक्रम वास्तविक विश्लेषण से आप जानते हैं कि $\mathbb{Q}$ गणनीय (countable) है। अतः, $\mathbb{Z}$ और $\mathbb{Q}$ के बीच में एक एकैकी आच्छादक फलन है। परंतु यह फलन संक्रिया को बनाए नहीं रखता, जैसा कि आप उदाहरण 19 से देख सकते हैं।

निम्नलिखित परिणाम भी टिप्पणी 7 में कही गई बात को स्पष्ट करता है, अर्थात् तुल्याकारी समूह बीजीय रूप से समान होते हैं।

प्रमेय 7: यदि $f: G \to H$ एक समूह तुल्याकारिता है तथा $x \in G$, तो $<x> \simeq <f(x)>$. इसके आगे,

i) यदि x परिमित कोटि का है, तो $o(x) = o(f(x))$.

ii) यदि x अपरिमित कोटि का है, तो $f(x)$ भी अपरिमित कोटि का होगा।

उपपत्ति: यदि हम f को G के किसी उपसमूह K तक सीमित रखें, तो हमें फलन $f|_K : K \to f(K)$ प्राप्त होता है। क्योंकि f एकैकी आच्छादक है, इसलिए इसका सीमित फलन $f|_K$ भी एकैकी आच्छादक होगा। अतः, G के किसी भी उपसमूह K के लिए, $K \simeq f(K)$.

विशिष्ट रूप में, किसी भी $x \in G$ के लिए, प्रमेय 5 द्वारा, $<x> \simeq f(<x>) \simeq <f(x)>$.

अब, यदि x की कोटि परिमित है, तो

अतः, (i) सिद्ध हो जाता है।

(ii) को सिद्ध करने के लिए, मान लीजिए कि x अपरिमित कोटि का है। तब, $<x>$ एक अपरिमित समूह है। इसलिए $<f(x)>$ अपरिमित समूह है, तथा इसी लिए $f(x)$ अपरिमित कोटि का है। इस प्रकार हमने (ii) को सिद्ध कर लिया है। ■

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E15) दर्शाइए कि प्रत्येक पूर्णांक n के लिए, $\mathbb{Z} \simeq n\mathbb{Z}$.

(संकेतः $f: (\mathbb{Z}, +) \to (n\mathbb{Z}, +) : f(k) = nk$ लीजिए।)

E16) उदाहरण 16 में आपने देखा था कि $\mathbb{C}$ क्यों $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. के एक उपसमूह के तुल्याकारी है। क्या आप $GL_2(\mathbb{R})$ का कोई ऐसा उपसमूह बता सकते हैं जिसके तुल्याकारी $\mathbb{R}$ है? क्या यह $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ हो सकता है?

E17) क्या $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f(x) = 0$ एक समाकारिता है? क्या f एक तुल्याकारिता है?

E18) मान लीजिए G एक समूह है। G पर किन प्रतिबंधों के अधीन, $f: G \to G : f(a) = a^{-1}$ एक तुल्याकारिता होगा?

E19) यदि $\phi: G \to H$ और $\theta: H \to K$ दो समूह तुल्याकारिताएँ हैं, तो दर्शाइए कि G से K तक $\theta \circ \phi$ एक तुल्याकारिता है।

E20) मान लीजिए $f: G_1 \to G_2$ एक समूह तुल्याकारिता है, तथा $g_1 \in G_1$. तब दर्शाइए कि $k \in \mathbb{Z}$ के लिए, समीकरण $x^k = g_1$ के G_1 में हलों की संख्या ठीक उतनी है जितनी G_2 में $x^k = f(g_1)$ के हलों की संख्या है।

E21) जाँच कीजिए कि $f:U_{15}\to U_{15}:f(\zeta)=\zeta^2$ एक तुल्याकारिता है या नहीं, जहाँ $U_{15}=<\zeta>$.

E22) किसी भी समूह G के लिए, सिद्ध कीजिए कि $G\times\{e\}\simeq G\simeq\{e\}\times G$. जहाँ e किसी समूह का तत्समक है।

आपने इस ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि तुल्याकारिता की परिभाषा से हमें केवल यह मालूम है कि समाकारिता एकैकी आच्छादक है, अर्थात् इसके प्रतिलोम का अस्तित्व है। इससे हमें इस प्रतिलोम के किसी भी बीजीय गुण के बारे में कुछ नहीं मालूम है। अगला परिणाम हमें इस बारे में कुछ बताता है।

प्रमेय 8: यदि $f:G_1\to G_2$ समूहों की तुल्याकारिता है, तो $f^{-1}:G_2\to G_1$ भी एक तुल्याकारिता है। ■

उपपत्ति: 'कलन' से आप जानते हैं कि f^{-1} एकैकी आच्छादक होता है। (इसका सत्यापन कीजिए!) अतः, हमें केवल यह दर्शाने की आवश्यकता है कि f^{-1} एक समाकारिता है।

यह देखने के लिए, मान लीजिए $a',b'\in G_2$ तथा $a=f^{-1}(a'), b=f^{-1}(b')$.

तब, $f(a)=a'$ और $f(b)=b'$.

अतः, $f(ab)=f(a)f(b)=a'b'$. लागू करने पर, हम
$f^{-1}(a'b')=ab=f^{-1}(a')f^{-1}(b')$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, f^{-1} एक समाकारिता है, तथा इसी लिए यह एक तुल्याकारिता है।

उदाहरण 14 और प्रमेय 8 से, हम तुरंत कह सकते हैं कि
$\phi^{-1}:T\to\mathbb{R}^2:\phi^{-1}(f_{a,b})=(a,b)$ एक तुल्याकारिता है।

प्रमेय 8 हमें बताता है कि यदि $G_1\simeq G_2$, तो $G_2\simeq G_1$. आइए इस परिणाम के उपयोग से अगले प्रमेय को सिद्ध करें। यह प्रमेय टिप्पणी 7 में दी गई बात को एक तरह से दोहराता है।

प्रमेय 9: '$G_1\mathbb{R}G_2$ iff $G_1\simeq G_2$', द्वारा दिए जाने वाला संबंध सभी समूहों के समुच्चय पर एक तुल्यता संबंध है। ■

उपपत्ति: पहले, मान लीजिए G एक समूह है। तब, $I:G\to G:I(x)=x$ एक तुल्याकारिता है। इसलिए, $G\simeq G$. अतः, '$\simeq$' स्वतुल्य है।

आगे, यदि G_1, G_2 समूह हैं ताकि $G_1\simeq G_2$, तो प्रमेय 8 द्वारा, $G_2\simeq G_1$. अतः, '$\simeq$' सममित है।

अंत में, यदि $G_1\simeq G_2$ और $G_2\simeq G_3$, तो E19 द्वारा आप जानते हैं कि $G_1\simeq G_3$. अतः, '$\simeq$' संक्रामक है।

इस प्रकार, '$\simeq$' एक तुल्यता संबंध है।

इकाई 1 तथा प्रमेय 9 से आप जानते हैं कि 'तुल्याकारिता' सभी समूहों के समुच्चय को असंयुक्त तुल्यता वर्गों में विभाजित कर देती है। ये वर्ग **तुल्याकारिता वर्ग (isomorphism classes)** कहलाते हैं। समूह सिद्धांत में किसी भी दिए हुए समूह के

तुल्याकारिता वर्ग को ज्ञात करने में काफी शोध और अध्ययन होता है। इसका कारण है कि यदि हम जानते हैं कि समूह G किस वर्ग में स्थित है, तो उस वर्ग में किसी भी समूह के सभी बीजीय गुण G में भी होते हैं। इससे हमें G को समझने में मदद मिलती है।

अब, जैसा कि आप पहले देख चुके हैं, एक ही तुल्याकारिता वर्ग के समूहों में समान बीजीय गुणों का होना आवश्यक है। उदाहरणार्थ, S_3 और $\mathbb{Z}_6$ को लीजिए। हालांकि दोनों कोटि 6 के हैं, परंतु ये एक ही तुल्याकारिता वर्ग में नहीं हैं, अर्थात्, $[S_3] \neq [\mathbb{Z}_6]$. (क्यों?) साथ ही, उदाहरण 19 हमें बताता है कि $[\mathbb{Z}] \neq [\mathbb{Q}]$. इससे जुड़ा एक उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 20: $\mathbb{Z}_6$ के अलावा $[\mathbb{Z}_6]$ का एक अवयव दीजिए। साथ ही, जाँच कीजिए कि $[\mathbb{R}] = [\mathbb{Q}]$ है या नहीं।

हलः $g : \mathbb{Z}_6 \to U_6 : g(\bar{1}) = \zeta$ परिभाषित कीजिए, जहाँ ζ एक का पूर्वग 6वाँ मूल है। g को इसे $\mathbb{Z}_6$ के सभी अवयवों के लिए विस्तृत कीजिए ताकि यह एक समाकारिता बन जाए, अर्थात्, $g(\bar{m}) = mg(\bar{1}) = \zeta^m$. तब, आपको दिखाना चाहिए कि g एक तुल्याकरिता है।

अतः, $U_6 \in [\mathbb{Z}_6]$.

आगे, इकाई 6 में आप देख चुके हैं कि $\mathbb{Q}$ के प्रत्येक अवयव की परिमित कोटि है, परंतु $\mathbb{R}$ के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित नहीं है। अतः, $[\mathbb{R}] \neq [\mathbb{Q}]$.

***

अब कुछ संबंधित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E23) ऐसे तीन गुणों की सूची बनाइए जो एक ही तुल्याकारिता वर्ग के समूहों में पाए जाते हैं।

E24) टिप्पणी 7 के संदर्भ में, यदि $f : G \to H$ समूहों की तुल्याकारिता है तथा G आबेली है, तो दर्शाइए कि H भी आबेली है। क्या इसका विलोम सत्य है? क्यों, या क्यों नहीं?

E25) क्या एक समूह तथा उसका उचित उपसमूह एक ही तुल्याकारिता वर्ग में हो सकते हैं? क्यों, या क्यों नहीं?

E26) जाँच कीजिए कि '$G_1 \sim G_2$ iff G_1 से G_2 तक एक समूह समाकारिता है' द्वारा दिया जाने वाला संबंध '$\sim$', सभी समूहों के समुच्चय पर एक तुल्यता संबंध है या नहीं।

E27) मान लीजिए कि A_1, A_2, B_1, B_2 ऐसे समूह हैं कि $A_1 \simeq B_1$ और $A_2 \simeq B_2$. दर्शाइए के $A_1 \times A_2 \simeq B_1 \times B_2$.

अभी तब हमने इस पर ढंग से विचार नहीं किया है कि $G_1 \neq G_2$ को किस प्रकार सिद्ध किया जाए। उदाहरण 19 में आपने तुल्याकारिता को असिद्ध करने की एक विधि देखी थी। आइए, प्रमेय 7 का उपयोग करते हुए ऐसा करने की एक अन्य विधि पर विचार करें।

उदाहरण 21: दर्शाइए कि $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ और $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ तुल्याकारी नहीं हैं।

हल: मान लीजिए, यदि संभव हो तो, कि ये तुल्याकारी हैं तथा $f:\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ एक तुल्याकारिता है। तब, प्रमेय 7 द्वारा, $o(i) = o(f(i))$. अब, $o(i) = 4$.

$\therefore o(f(i)) = 4.$

परंतु, ± 1 के अलावा किसी भी वास्तविक संख्या की कोटि अपरिमित है, तथा $o(1) = 1, o(-1) = 2.$

अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं। अतः, हम जो मानकर चले थे, वह ग़लत है। अर्थात् $\mathbb{R}^*$ और $\mathbb{C}^*$ तुल्याकारी नहीं हैं।

***

उदाहरण 21 में हमने पुनः इसी तथ्य का उपयोग किया है कि तुल्याकारी समूहों में समान बीजीय गुण होते हैं। इसका उपयोग करते हुए, निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए।

E28) दर्शाइए कि $(\mathbb{R}, +)$ के $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ तुल्याकारी नहीं है।

E29) क्या किसी $n \geq 2$ के लिए, $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ है? क्यों, या क्यों नहीं।

E30) जाँच कीजिए कि $(\mathbb{Q}, +) \simeq (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. या नहीं।

आइए अब तुल्याकारिता वर्गों के बारे में एक अति महत्वपूर्ण प्रमेय, और उसके अनुप्रयोगों पर दृष्टि डालें। खंड 3 में आप वलय सिद्धांत में इसके अनुरूप तथा रैखिक बीजगणित के कोर्स में अध्ययन करेंगे। रैखिक रूपांतरणों के लिए में भी आप इसके अनुरूप का अध्ययन करेंगे।

8.4 तुल्याकारिता प्रमेय

इकाई 7 में आपने विभाग समूहों के बारे में अध्ययन किया था। वहाँ हमने आपको यह भी बताया था कि यह संकल्पना समूह सिद्धांत के लिए अति महत्वपूर्ण है। अब आप इस टिप्पणी में दी गई बात के कारण का अध्ययन करेंगे। हम समाकारिताओं और विभाग समूहों के बीच के रिश्ते के बारे में परिणामों को सिद्ध करेंगे। इन प्रमेयों से आपको विभाग समूहों के, और इसी लिए प्रसामान्य उपसमूहों के, महत्व का कुछ अंदाजा हो जाएगा।

पहला परिणाम **समूहों के लिए समाकारिता का मूल प्रमेय (Fundamental Theorem of Homomorphism)** है। आप देखेंगे कि यह परिणाम क्यों 'मूल' कहलाता है। यह परिणाम **प्रथम तुल्याकारिता प्रमेय (First isomorphism theorem)** भी कहलाता है।

सर्वप्रथम, आइए एक विशिष्ट उदाहरण पर दृष्टि डालें। इससे आपको यह समझने में सहायता होगी कि यह प्रमेय क्या बताता है। $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} : f(m) = \bar{m}$ पर विचार कीजिए। आप जानते हैं कि f प्राकृतिक समाकारिता है तथा $\text{Im } f = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. अब, $\text{Ker } f$ क्या है?

$$\text{Ker } f = \{m \in \mathbb{Z} \mid \bar{m} = \bar{0}\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \in 6\mathbb{Z}\} = 6\mathbb{Z}.$$

अतः, आप देख सकते हैं कि इस स्थिति में $(\mathbb{Z}/\text{Ker } f) \simeq \text{Im } f$; बल्कि यहाँ $(\mathbb{Z}/\text{Ker } f) = \text{Im } f$.

क्या यह निष्कर्ष केवल इसी स्थिति के लिए सत्य है? निम्नलिखित प्रमेय इस प्रश्न का उत्तर देता है।

प्रमेय 10 (समाकारिता का मूल प्रमेय): मान लीजिए G_1 और G_2 दो समूह हैं तथा $f: G_1 \to G_2$ एक समूह समाकारिता है। तब, $(G_1/\text{Ker} f) \simeq \text{Im} f$.

विशिष्ट रूप में, यदि f आच्छादक है, तो $(G_1/\text{Ker} f) \simeq G_2$.

हम 'समाकारिता का मूल प्रमेय' को प्रायः 'FTH' लिखते हैं; जो इसके अंग्रेजी के नाम का संक्षेपण के नाम का संक्षेपण है।

उपपत्तिः मान लीजिए $\text{Ker } f = H$. आप जानते हैं कि $H \lhd G_1$. आइए फलन $\psi : (G_1/H) \to \text{Im} f : \psi(Hx) = f(x)$ को परिभाषित करें।

पहली नज़र में लगता है कि ψ की परिभाषा सहसमुच्चय के प्रतिनिधि x पर निर्भर है। यदि ऐसा है, तो हो सकता है कि फलन ψ सुपरिभाषित न हो। अतः, आइए जाँच करें कि ψ की परिभाषा सहसमुच्चय प्रतिनिधि पर निर्भर है या नहीं। अर्थात्, यदि $x, y \in G_1$ ताकि $Hx = Hy$, तो क्या $\psi(Hx) = \psi(Hy)$? आइए देखें।

अब, $Hx = Hy \Rightarrow xy^{-1} \in H = \text{Ker } f \Rightarrow f(xy^{-1}) = e_2$, G_2 का तत्समक है।

$$\Rightarrow f(x)[f(y)]^{-1} = e_2 \Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow \psi(Hx) = \psi(Hy).$$

अतः, ψ एक सुपरिभाषित फलन है।

अब, आइए जाँच करें कि क्या ψ एक समाकारिता है। $Hx, Hy \in G_1/H$ के लिए,

$$\psi((Hx)(Hy)) = \psi(Hxy)$$
$$= f(xy)$$
$$= f(x)\,f(y), \text{ क्योंकि } f \text{ एक समाकारिता है।}$$
$$= \psi(Hx)\,\psi(Hy).$$

अतः, ψ एक समूह समाकारिता है।

आगे, आइए देखें कि क्या ψ एकैकी है या नहीं।

$$\text{Ker } \psi = \{Hx \mid x \in G_1 \text{ और } f(x) = e_2\}$$
$$= \{Hx \mid x \in \text{Ker } f\}$$
$$= \{H\}, \text{ क्योंकि } \text{Ker } f = H.$$

क्योंकि G_1/H का तत्समक H है, इसलिए ψ एकैकी है (प्रमेय 4 द्वारा)।

अंत में, आइए देखें कि क्या ψ आच्छदक है या नहीं।

$\text{Im } f$ का कोई भी अवयव $f(x) = \psi(Hx)$ के रूप का है, जहाँ $x \in G_1$.

$\therefore \text{Im}\,\psi = \text{Im } f.$

अतः, हमने सिद्ध कर लिया है कि ψ एक एकैकी आच्छादक समाकारिता है, अर्थात् एक तुल्यकारिता है। इस प्रकार, $(G_1/\text{Ker } f) \simeq \text{Im } f$.

विशिष्ट रूप में, यदि f आच्छादक है, तो $\text{Im} f = G_2$. इस प्रकार, इस स्थिति में, $(G_1/\text{Ker} f) \simeq G_2$. ■

प्रमेय 10 की स्थिति को आकृति 1 में दर्शाया गया है। यहाँ p प्राकृतिक समाकारिता है।

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & G_2 \\ & G_1/\text{Ker } f \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

आकृति 1: $\psi \circ p = f$

उपरोक्त आरेख बताता है कि यदि आप G_1 के अवयवों पर पहले p लागू करें तथा फिर ψ लागू करें, तो यह उन अवयवों पर f लागू करने के समान है। अर्थात् $\psi \circ p = f$.

साथ ही, ध्यान दीजिए कि प्रमेय 10 कहता है कि **f के अंतर्गत G_1 के दो अवयवों का समान प्रतिबिंब होता है यदि और केवल यदि ये $\text{Ker } f$ के एक ही सहसमुच्चय में है।**

अब आइए समाकारिता के मूल प्रमेय के कुछ अनुप्रयोग देखें। सरलतम स्थितियों में से एक है $I_G : G \to G$, किसी भी समूह G के लिए। यहाँ प्रमेय 10 का अनुप्रयोग करने पर हम देखते हैं कि $\mathbf{G/\{e\} \simeq G}$, है, जो आप उदाहरण 13 में पहले ही देख चुके हैं। हम $G/\{e\}$ और G के इस एकीकरण का उपयोग अनेक बार करेंगे।

अब, आइए कुछ अतुच्छ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 22: आप देख चुके हैं कि $\mathbb{C} \not\simeq \mathbb{R}$ है परंतु, क्या $\mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$? क्यों, या क्यों नहीं?

हल: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : f(a+ib) = b$ परिभाषित कीजिए। तब, E9 से आप जानते हैं कि f एक समाकारिता है तथा $\text{Ker} f = \mathbb{R}$. आपको दिखाना चाहिए कि $\text{Im} f = \mathbb{R}$.

अतः, प्रमेय 10 के अनुप्रयोग से हम पाते हैं कि $\mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.

***

उदाहरण 23: $\mathbb{R}^5/\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$, को सिद्ध करने के लिए FTH का उपयोग कीजिए, जहाँ $\mathbb{R}$ की m प्रतिलिपियों का अनुलोम गुणनफल $\mathbb{R}^m$ है।

हल: $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3 : \phi[(a, b, c, d, e)] = (a, b, c)$ परिभाषित कीजिए। (हम ϕ को $\phi(a, b, c, d, e) = (b, c, d)$, या ऐसे कोई अन्य विकल्प से भी परिभाषित कर सकते थे।)

यदि $\mathbb{R}^5$ में $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, तो $a_i = b_i \; \forall \; i$.
अतः, $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$, अर्थात्,

$\phi[(a_1, \ldots, a_5)] = \phi[(b_1, \ldots, b_5)]$.

इस प्रकार, ϕ सुपरिभाषित है।

आगे, $\phi[(a_1, \ldots, a_5) + (b_1, \ldots, b_5)] = \phi[(a_1 + b_1, \ldots, a_5 + b_5)]$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$

$= \phi[(a_1,\ldots,a_5)] + \phi[(b_1,\ldots,b_5)].$

इस प्रकार, ϕ एक समूह समाकारिता है।

अब, $\text{Ker}\,\phi = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \mid (a, b, c) = (0, 0, 0)\}$

$= \{(0, 0, 0, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2,$ है, जैसा E22 में था।

इसका सत्यापन भी कीजिए कि $\text{Im}\,\phi = \mathbb{R}^3$.

अतः, FTH द्वारा, $\mathbb{R}^5/\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$.

(ध्यान दीजिए कि उदाहरण 17 की ही तरह, यहाँ $\mathbb{R}^2$ को i द्वारा $\mathbb{R}^5$ का उपसमूह माना जा सकता है।)

***

उदाहरण 24: फलन $f : \mathbb{Z} \to (\{1, -1\}, \cdot) : f(n) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ -1, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$ लीजिए।

उदाहरण 1 में आपने देखा था कि f एक समाकारिता है। $\text{Ker}\,f$ और $\text{Im}\,f$ प्राप्त कीजिए। इस स्थिति में FTH क्या कहता है?

हल: मान लीजिए $\mathbb{Z}_E$ और $\mathbb{Z}_O$ क्रमशः सम और विषम पूर्णांकों के समुच्चयों को व्यक्त करते हैं। तब, $\mathbb{Z}_E = 2\mathbb{Z}$ और $\mathbb{Z}_O = 1 + 2\mathbb{Z}$.

यहाँ, $\text{Ker}\,f = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = 1\} = 2\mathbb{Z},$ और

$\text{Im}\,f = \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, -1\}.$

इस प्रकार, FTH द्वारा, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{1, -1\}$.

ध्यान दीजिए कि इससे हमें यह भी पता चलता है कि $o(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2$. अतः, $\mathbb{Z}$ में $2\mathbb{Z}$ के दो सहसमुच्चय हैं, और ये $2\mathbb{Z}$ और $1 + 2\mathbb{Z}$ हैं।

अतः, $(\{2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\}, +) \simeq (\{1, -1\}, \cdot)$.

***

उदाहरण 25: दर्शाइए कि $GL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$, जहाँ

$SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$

हल: E3 से आप जानते हैं कि $f : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* : f(A) = \det(A)$ एक समाकारिता है, तथा $\text{Ker}\,f = SL_2(\mathbb{R})$ और $\text{Im}\,f = \mathbb{R}^*$.

इस प्रकार, प्रमेय 10 के उपयोग से, $GL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$.

(ध्यान दीजिए कि यहाँ हम अन्आबेली समूह G का एक ऐसा अन्य उदाहरण देखते हैं जिसका आबेली विभाग समूह है।)

***

उदाहरण 26: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n : f(m) = \overline{m}$ परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि f एक समाकारिता है। इस स्थिति में, मूल प्रमेय से हमें क्या मिलता है?

हल: क्योंकि $f(r+s) = \overline{r+s} = \overline{r} + \overline{s} \;\forall\; r, s \in \mathbb{Z}$, इसलिए f एक समाकारिता है।

आगे, $\mathbb{Z}_n$ का कोई भी अवयव $\bar{a}$ है जहाँ $0 \le a < n, a \in \mathbb{Z}$.

क्योंकि $\bar{a} = f(a) \in \operatorname{Im} f$, इसलिए $\mathbb{Z}_n = \operatorname{Im} f$.

अब, $\operatorname{Ker} f = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, f(m) = \bar{0}\} = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \in n\mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$.

अतः, प्रमेय 10 द्वारा, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$.

***

उदाहरण 26 हमें बताता है कि $\mathbb{Z}_n$ और विभाग समूह $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ बीजीय रूप से समान हैं। आप इसे पहले भी इकाई 7 में देख चुके हैं। आप इस तथ्य का बार-बार उपयोग करेंगे।

अब FTH के बारे में एक महत्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 8: उपरोक्त उदाहरणों से आप देख सकते हैं कि कोई भी आच्छादक समाकारिता $f : G_1 \to G_2$ वास्तव में प्राकृतिक (या प्रसामान्य) समाकारिता है। इसका कारण यह है कि FTH द्वारा, $f : G_1 \to G_2$ वास्तव में $p : G_1 \to (G_1/H)$ है, जहाँ $H = \operatorname{Ker} f$ तथा $p(x) = Hx$.

इसी कारण से उदाहरण 7 का फलन 'विहित', अर्थात् मानक, समाकारिता कहलाता है। और, यही कारण है कि प्रमेय 10 समाकारिता का **मूल** प्रमेय कहलाता है। यह हमें बताता है कि प्रत्येक समाकारिता असल में विहित है।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E31) मान लीजिए कि G एक समूह है, तथा $f : G \to G : f(g) = e$, G का तत्समक। दर्शाइए कि f एक समाकारिता है। इस स्थिति में समाकारिता का मूल प्रमेय क्या कहता है?

E32) उदाहरण 2, उदाहरण 4 (i) और (iii), उदाहरण 7 और उदाहरण 12 में FTH से हमें क्या प्राप्त होता है?

E33) मान लीजिए $m, n \in \mathbb{N}$. m और n पर किन प्रतिबंधों के अधीन $\phi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n : \phi(a + m\mathbb{Z}) = a + n\mathbb{Z}$ एक सुपरिभाषित समाकारिता होगा? और तब, इस स्थिति में FTH क्या कहता है?

E34) मान लीजिए S^1 वृत्त समूह $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ है। दर्शाइए कि $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.

[**संकेत:** देखिए कि उदाहरण 12 से आपको कुछ सहायता मिलती है।]

अब, हम एक महत्वपूर्ण परिणाम को सिद्ध करने के लिए समाकारिता के मूल प्रमेय का उपयोग करेंगे। यह हमें सभी चक्रीय समूहों के तुल्याकारिता वर्ग बताता है।

प्रमेय 11: कोई भी चक्रीय समूह $(\mathbb{Z}, +)$ या $(\mathbb{Z}_n, +)$ के तुल्याकारी होता है, जहाँ $n \in \mathbb{N}$.

उपपत्ति: मान लीजिए $G = \langle x \rangle$ एक चक्रीय समूह है।

$f : \mathbb{Z} \to G : f(n) = x^n$ परिभाषित कीजिए।

दिखाइए कि f सुपरिभाषित है।

साथ ही, f एक समाकारिता है क्योंकि

$$f(n+m) = x^{n+m} = x^n \cdot x^m = f(n)f(m) \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

आपको सत्यापित करना चाहिए कि $\operatorname{Im} f = G$.

अब, $\operatorname{Ker} f$ के लिए हमारे पास दो संभावनाएँ हैं – या तो $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, या $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.

स्थिति 1 : ($\operatorname{Ker} f = \{0\}$): इस स्थिति में f एकैकी है। अतः, f एक तुल्याकारिता है। अतः, प्रमेय 8 द्वारा, f^{-1} एक तुल्याकारिता है। अर्थात, $G \simeq (\mathbb{Z}, +)$. अतः, G अपरिमित है, तथा x की कोटि अपरिमित है।

स्थिति 2 : ($\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$): क्योंकि $\operatorname{Ker} f \leq \mathbb{Z}$, इसलिए इकाई 4 से आप जानते हैं कि किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $\operatorname{Ker} f = n\mathbb{Z}$. अतः, समाकारिता को मूल प्रमेय द्वारा, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq G$.

$\therefore G \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}_n, +)$.

यहाँ ध्यान दीजिए कि क्योंकि $< x > \simeq \mathbb{Z}_n$, इसलिए $o(x) = n$. अतः, **एक परिमित चक्रीय समूह $\mathbb{Z}_n$ के तुल्याकारी होता है, जहाँ n उस समूह की कोटि है।**

आइए प्रमेय 11 के कुछ महत्वपूर्ण उपप्रमेयों पर विचार करें।

उपप्रमेय 3: कोई भी दो अपरिमित चक्रीय समूह तुल्याकारी होते हैं। ■

उपप्रमेय 4: समान कोटि वाले कोई भी दो परिमित चक्रीय समूह तुल्याकारी होते हैं। ■

हम उपप्रमेयों की उपपत्तियाँ आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E35)।

और अब आइए प्रमेय 11 और FTH के एक अनुप्रयोग को देखें।

उदाहरण 27: यदि $(m, n) = 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. इसके आगे, यदि A और B क्रमशः कोटियों m और n वाले चक्रीय समूह हैं, जहाँ $(m, n) = 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $A \times B$ कोटि mn वाला चक्रीय समूह है।

हल: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n : f(r) = (r + m\mathbb{Z}, r + n\mathbb{Z})$ परिभाषित कीजिए।
ध्यान दीजिए कि f सुपरिभाषित है, क्योंकि यदि $\mathbb{Z}$ में $r = s$, तो $\mathbb{Z}_m$ में और $\mathbb{Z}_n$ में $\bar{r} = \bar{s}$.

अब, f एक समाकारिता है, क्योंकि

$$\begin{aligned} f(r+s) &= ((r+s) + m\mathbb{Z}, (r+s) + n\mathbb{Z}) \\ &= (r + m\mathbb{Z}, r + n\mathbb{Z}) + (s + m\mathbb{Z}, s + n\mathbb{Z}) \\ &= f(r) + f(s). \end{aligned}$$

आगे, $\operatorname{Ker} f = \{r \in \mathbb{Z} \mid (r + m\mathbb{Z}, r + n\mathbb{Z}) = (0 + m\mathbb{Z}, 0 + n\mathbb{Z})\}$

$$= \{r \in \mathbb{Z} \mid r \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}\}.$$

$= \{r \in \mathbb{Z} \mid r \in mn\mathbb{Z}\}$, क्योंकि mn, m और n का l.c.m. है (देखिए इकाई 4)

$= mn\mathbb{Z}.$

अंत में, हम दर्शाएँगे कि f आच्छादक है।

मान लीजिए $(u + m\mathbb{Z},\ v + n\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

क्योंकि $(m, n) = 1$, इसलिए $\exists\ s, t \in \mathbb{Z}$ s.t. $ms + nt = 1$ (देखिए इकाई 1)।

इस समीकरण के उपयोग से हम देखते हैं कि
$f(u(1-ms) + v(1-nt)) = (u + m\mathbb{Z},\ v + n\mathbb{Z})$ क्योंकि $vms \in m\mathbb{Z}$, और $unt \in n\mathbb{Z}$, अर्थात् $(u + m\mathbb{Z}, u + n\mathbb{Z}) \in \operatorname{Im} f$.

इस प्रकार, f आच्छादक है।

अब, हम समाकारिता का मूल प्रमेय लागू करके पाते हैं कि $(\mathbb{Z}/\operatorname{Ker} f) \simeq \operatorname{Im} f$, अर्थात् $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

अतः, $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

अब, मान लीजिए कि $A = < x >$ और $B = < y >$ जहाँ $o(x) = m$ और $o(y) = n$. तब, $A \simeq \mathbb{Z}_m$ और $B \simeq \mathbb{Z}_n$. प्रमेय 11 द्वारा।

इस प्रकार, E27 द्वारा, $A \times B \simeq \mathbb{Z}_{mn}$, अर्थात्, $A \times B$ कोटि mn का चक्रीय समूह है।

***

अब कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E35) उपप्रमेयों 3 और 4 को सिद्ध कीजिए।

E36) सभी संभव समाकारिताएँ $f : \mathbb{Z}_8 \to U_{10}$ ज्ञात कीजिए। ऐसे सभी के लिए, $\operatorname{Ker} f$ ज्ञात कीजिए।

E37) i) यदि m और n असहभाज्य पूर्णांक नहीं हैं, तो क्या $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$? क्यों, या क्यों नहीं?

ii) मान लीजिए कि ϕ इकाई 4 में परिभाषित ऑयलर फ़ाइ फलन है। सिद्ध कीजिए कि यदि $m, n \in \mathbb{Z}$ s.t. $(m, n) = 1$ तो $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

अब हम **द्वितीय तुल्याकारिता प्रमेय (second isomorphism theorem)** की चर्चा करेंगे। यह उपसमूहों के प्रतिच्छेदनों तथा गुणनफलों से संबंधित है। आइए पहले S_3 के उदाहरण के माध्यम से समझें कि यह प्रमेय हमें क्या बताएगा। मान लीजिए कि $H = < (1\ 2) >$ और $K = < (1\ 2\ 3) >$. तब, आप जानते हैं कि $K \triangleleft S_3$ है। अतः, इकाई 6 से, आप जानते हैं कि $HK \le S_3$. वस्तुतः $HK = S_3$. साथ ही, $H \cap K = \{I\}$. अब, $H/(H \cap K)$ और $HK/K (= S_3/K)$ दोनों ही एक ही कोटि, 2 के हैं। क्या इनमें कोई और रिश्ता भी है? आप द्वितीय तुल्याकारिता प्रमेय से देखेंगे कि ये दोनों समूह तुल्याकारी हैं।

प्रमेय 12 (द्वितीय तुल्याकारिता प्रमेय): यदि H और K किसी समूह G के उपसमूह हैं, जहाँ G में K प्रसामान्य है, तो $(H/(H \cap K)) \simeq (HK/K)$.

उपपत्ति: सर्वप्रथम, हमें इसका सत्यापन करना चाहिए कि विभाग समूह $H/(H \cap K)$ और $(HK)/K$ सुपरिभाषित हैं। E25, इकाई 6 से आप जानते हैं कि $H \cap K \lhd H.$ साथ ही, प्रमेय 4 और इकाई 6 के E27 से आप जानते हैं कि $HK \leq G$ तथा यह कि $K \lhd HK.$

इस प्रकार, दिए हुए विभाग समूह अर्थपूर्ण हैं।

अब, हम अष्टि $H \cap K$ वाले एक आच्छादक समाकारिता $f: H \to (HK)/K$ ज्ञात करना चाहते हैं। इसके बाद हम वाँछित परिणाम प्राप्त करने के लिए, समाकारिता के मूल प्रमेय को लागू कर सकते हैं।

अतः, आइए $f: H \to (HK)/K : f(h) = hK$ परिभाषित करें।

आपको सत्यापित चाहिए कि f सुपरिभाषित है।

अब, $x, y \in H$ के लिए,

$$f(xy) = xyK = (xK)(yK) = f(x)f(y).$$

अतः, f एक समाकारिता है।

$$\operatorname{Im} f = \{f(h) \mid h \in H\} = \{hK \mid h \in H\}.$$

हम दर्शाएँगे कि $\operatorname{Im} f = (HK)/K.$

इसके लिए, कोई भी अवयव $hK \in \operatorname{Im} f$ लीजिए। क्योंकि $h \in H,$ इसलिए $h \in HK.$

$\therefore hK \in (HK)/K.$

$\therefore \operatorname{Im} f \subseteq (HK$ ...(1)

दूसरी ओर, $(HK)/K$ का कोई भी अवयव $hkK = hK$ के रूप का होता है, जहाँ $h \in H, k \in K;$

$\therefore hkK = f(h) \in \operatorname{Im} f.$

$\therefore ((HK)/K) \subseteq \operatorname{Im} f.$ ...(2)

(1) और (2) से, हम $\operatorname{Im} f = ((HK)/K)$ प्राप्त करते हैं।

अंत में,
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{h \in H \mid f(h) = K\} \\ &= \{h \in H \mid hK = K\} \\ &= \{h \in H \mid h \in K\} \\ &= H \cap K \end{aligned}$$

इस प्रकार, मूल प्रमेय के उपयोग से, हम $(H/(H \cap K)) \simeq (HK/K)$ प्राप्त करते हैं। ■

प्रमेय 12 आबेली समूहों के लिए क्या कहता है? इसके बारे में हम यहाँ एक टिप्पणी देना चाहेंगे।

टिप्पणी 9: यदि H और K, $(G, +)$ के उपसमूह हैं, तो प्रमेय 12 कहता है कि $((H+K)/K) \simeq (H/(H \cap K))$.

प्रमेय 12 किस प्रकार उपयोगी है, आइए इसका एक उदाहरण देखें। इस परिणाम के माध्यम से आंतरिक अनुलोम गुणनफलों और विभाग समूहों के बीच के संबंध को देखेंगे।

प्रमेय 13: मान लीजिए H और K समूह G के प्रसामान्य उपसमूह हैं कि जिससे कि $G = H \times K$. तब, $(G/H) \simeq K$ तथा $(G/K) \simeq H$.

उपपत्ति: परिभाषा द्वारा, $G = HK$ और $H \cap K = \{e\}$. अतः,

$$G/H = HK/H \simeq K/H \cap K = K/\{e\} \simeq K.$$

इसी प्रकार, आप सिद्ध कर सकते हैं कि $(G/K) \simeq H$. ■

अब, हम एक परिणाम को दे रहे हैं, जो तुरंत ही प्रमेय 13 से निकलता है।

उपप्रमेय 5: मान लीजिए G एक परिमित समूह है तथा H और K इसके ऐसे प्रसामान्य उपसमूह हैं जिनसे कि $G = H \times K$. तब, $o(G) = o(H)o(K)$. ■

अब क्यों नहीं आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने के लिए प्रमेयों 12 और 13 का प्रयोग करते?

E38) उपप्रमेय 5 को सिद्ध कीजिए।

E39) मान लीजिए H और K एक परिमित समूह G के उपसमूह हैं तथा $H \lhd G$. प्रमेय 12 के उपयोग से $o(HK) = \dfrac{o(H)\,o(K)}{o(H \cap K)}$. (आप इसे इकाई 3 में पहले ही सिद्ध कर चुके हैं।)

E40) दर्शाइए कि $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_4$.

(संकेत: $H = 3\mathbb{Z}$ और $K = 4\mathbb{Z}$ लीजिए।)

E41) सिद्ध कीजिए कि यदि G_1 और G_2 समूह हैं, तो

$((G_1 \times G_2)/(G_1 \times \{e_2\}) \simeq G_2$.

E42) सिद्ध कीजिए कि $(\mathbb{Q}^3/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^2$.

और अब आइए तृतीय तुल्याकरिता प्रमेय को देखें। यह भी वास्तव में FTH का एक सीधा अनुप्रयोग है।

प्रमेय 14 (तृतीय तुल्याकारिता प्रमेय): मान लीजिए H और K समूह G के ऐसे प्रसामान्य उपसमूह हैं ताकि $K \subseteq H$.

तब, $\dfrac{(G/K)}{(H/K)} \simeq G/H$.

उपपत्ति: सर्वप्रथम, प्रमेय 7, इकाई 7 से आप जानते हैं कि $(H/K) \lhd (G/K)$. अतः,

प्रमेय के कथन में दिए गए विभाग समूह सुपरिभाषित हैं।

अब, प्रमेय 10 के अनुप्रयोग के लिए, हमें G/K से G/H तक की एक समाकारिता को परिभाषित करने की आवश्यकता है, जिसकी अष्टि H/K निकलती है।

एक ऐसा फलन तो जाहिर है, यानि $f: G/K \to G/H : f(Kx) = Hx.$

f सुपरिभाषित है, क्योंकि $x, y \in G$ के लिए,

$\Rightarrow xy^{-1} \in K \subseteq H \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow Hx = Hy \Rightarrow f(Kx) = f(Ky).$

अब, हम उपपत्ति का शेष भाग आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E43)। ■

E43) दर्शाइए कि प्रमेय 14 की उपपत्ति में परिभाषित f एक आच्छादक समाकारिता है, तथा $\text{Ker} f = H/K$. इस तरह प्रमेय 14 की उपपत्ति को पूरा कीजिए।

E44) सिद्ध कीजिए कि $(\mathbb{Z}_{10}/<\overline{5}>) \simeq \mathbb{Z}_5$.

आइए अब समूह की स्वयं पर तुल्याकारिताओं की चर्चा करें।

8.5 स्वाकारिताएं

समूह सिद्धांत में स्वाकारिताओं का अनेक बार उपयोग किया जाता है। वस्तुतः, समूह की स्वाकारिताओं के समुच्चय के कुछ विशेष गुण होते हैं। इसलिए इनकी चर्चा के लिए हमने एक अलग भाग समर्पित किया है। इस भाग में सर्वप्रथम आप देखेंगे कि समूह की सभी स्वाकारिताओं का समुच्चय से एक समूह क्यों बनता है। इसके बाद हम इसी समूह के एक विशेष उपसमूह को परिभाषित करेंगे, तथा देखेंगे कि यह क्यों महत्वपूर्ण है।

स्वाकारिताएँ आपके लिए नई नहीं हैं। आप किसी भी समूह G के लिए, एक मौलिक स्वाकारिता $I_G : G \to G$ से पहले से परिचित हैं। आप यह भी जानते हैं कि $\phi : G \to G : \phi(g) = g^{-1}$ सूमह G की एक स्वाकारिता है यदि और केवल यदि G आबेली है।

अब आइए किसी समूह G की स्वाकारिताओं के समुच्चय, पर विचार करें।

$\textbf{Aut G} = \{f : G \to G | f$ एक तुल्याकारिता है$\}$ को देखें।

आपने अभी देखा कि $\text{Aut}\, G \neq \varnothing$, क्योंकि $I_G \in \text{Aut G}.$

E19 से आप जानते हैं कि Aut G संयोजन की द्विआधारी संक्रिया के सापेक्ष संवृत है। साथ ही, प्रमेय 8 बताता है कि यदि $f \in \text{Aut}\, G$, तो $f^{-1} \in \text{Aut}\, G.$

इस प्रकार, हमने अभी निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध कर लिया है।

प्रमेय 15: मान लीजिए G एक समूह है। G की स्वाकारिताओं का समुच्चय, Aut G फलनों के संयोजन के सापेक्ष एक समूह है। ■

आइए Aut G के कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 28: दर्शाइए कि $\text{Aut}\, \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2.$

हल: मान लीजिए कि $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ एक स्वाकारिता है, और $f(1) = n.$ हम दर्शाएँगे कि $n = 1$ या $-1.$

क्योंकि f आच्छादक है तथा $1 \in \mathbb{Z}$, इसलिए $\exists\ m \in \mathbb{Z}$ s.t. $f(m) = 1$, अर्थात्, $mf(1) = 1$, अर्थात्, $mn = 1$.

$\therefore n = 1$ या $n = -1$.

यदि $n = 1$, तो $f(m) = m\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$, अर्थात्, $f = I$.

यदि $n = -1$ तो $f(m) = -m\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$ अर्थात्, $f = -I$.

इस प्रकार, Aut $\mathbb{Z}$ में केवल दो अवयव हैं I और $-I$.

इसलिए, प्रमेय 11 द्वारा, $\text{Aut}\,\mathbb{Z} = \langle -I \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$.

***

अब, अगले उदाहरण में किसी समूह G का एक अवयव दिया रहने पर इसके संगत G की एक स्वाकारिता परिभाषित करेंगे।

उदाहरण 29: मान लीजिए G एक समूह है तथा $g \in G$.
$f_g : G \to G : f_g(x) = gxg^{-1}$ परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि f_g, G की स्वाकारिता है। (अवयव $gxg^{-1} \in G$ को g द्वारा x का **संयुग्मी (conjugate)** कहते हैं।)

हल: हम दर्शाएँगे कि G की संक्रिया को f_g बनाए रखता है, तथा यह एक एकैकी आच्छादक फलन है।

f_g सुपरिभाषित है: यदि G में $x = y$, तो $gxg^{-1} = gyg^{-1}$, अर्थात्, $f_g(x) = f_g(y)$.

इस प्रकार, f_g सुपरिभाषित है।

f_g एक समाकारिता है: यदि $x, y \in G$, तो

$$\begin{aligned} f_g(xy) &= g(xy)g^{-1} \\ &= gx(g^{-1}g)yg^{-1}, \text{ क्योंकि } g^{-1}g = e, \ G \text{ का तत्समक।} \\ &= (gxg^{-1})(gyg^{-1}) \\ &= f_g(x)f_g(y). \end{aligned}$$

इस प्रकार, $\forall\ g \in G$, f_g एक समाकारिता है।

f_g एकैकी है: $$\begin{aligned} \text{Ker } f_g &= \{x \in G \mid f_g(x) = e\} = \{x \in G \mid gxg^{-1} = e\} \\ &= \{x \in G \mid x = e\} \\ &= \{e\}. \end{aligned}$$

अतः, $\forall\ g \in G$, f_g एकैकी है।

f_g आच्छादक है: यदि $y \in G$, तो

$$\begin{aligned} y &= (gg^{-1})\,y(gg^{-1}) = g(g^{-1}yg)\,g^{-1} \\ &= f_g(g^{-1}yg) \in \text{Im} f_g, \text{ क्योंकि } g^{-1}yg \in G. \end{aligned}$$

अतः, $\forall\ g \in G$, f_g आच्छादक फलन है।

इस प्रकार, $\forall\ g \in G$, G की f_g एक स्वाकारिता है।

***

संयुग्मता के संदर्भ में निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 10: यदि G एक आबेली समूह है, तो

$f_g(x) = g + x - g = x\ \forall\ g \in G.$

इस प्रकार, $f_g = I\ \forall\ g \in G.$

हम उदाहरण 29 की स्वाकारिता को एक विशिष्ट नाम देते हैं।

परिभाषा: मान लीजिए G एक समूह है तथा $g \in G.$ स्वाकारिता $f_g : G \to G : f_g(x) = gxg^{-1}$, को G **के अवयव g द्वारा प्रेरित** G की **आंतर स्वाकारिता (inner automorphism)** कहते हैं।

G की सभी आंतर स्वाकारिताओं से बना $\text{Aut } G$ के उपसमुच्चय को **$\text{Inn } G$** से प्रकट करते हैं।

आइए आंतर स्वाकारिताओं के कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 30: S_3 लीजिए। $f_g(I), f_g((1\ 3))$ और $f_g((1\ 2\ 3))$ को परिकलित कीजिए, जहाँ $g = (1\ 2).$ साथ ही, सत्यापन कीजिए कि $\text{Im } f_g = S_3$ तथा $\text{Ker } f_g = \{I\}.$

हल: ध्यान दीजिए कि $(1\ 2)^{-1} = (1\ 2).$ इसलिए, $g^{-1} = g.$

अब, $f_g(I) = g \circ I \circ g^{-1} = I,$

$f_g((1\ 3)) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2) = (2\ 3),$ तथा $f_g((1\ 2\ 3)) = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2).$

[इन सभी स्थितियों में, ध्यान दीजिए कि यदि $\sigma \in S_3$ लंबाई 2 (या 3) वाला चक्र है, तो $g\sigma g^{-1}$ भी लंबाई 2 (या क्रमशः 3) वाला चक्र है। इकाई 9 में आप इसका कारण देखेंगे।],

ध्यान दें कि $\text{Im } f_g = \{f_g(\sigma) \mid \sigma \in S_3\} = \{g\sigma g^{-1} \mid \sigma \in S_3\}.$

आपको इसका सत्यापन करना चाहिए कि $f_g((2\ 3)) = (1\ 3), f_g((1\ 2)) = (1\ 2)$ तथा $f_g(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3).$

अतः, $\text{Im } f_g = S_3$, तथा $\text{Ker } f_g = \{\sigma \in S_3 \mid g\sigma g^{-1} = I\} = \{I\}.$

***

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने में आपको आंतर स्वाकारिताओं को प्राप्त करने में कुछ अभ्यास मिलेगा।

E45) मान लीजिए G एक समूह है तथा $g \in G.$ $f : G \to G : f(x) = gx$ परिभाषित कीजिए। क्या $f \in \text{Aut } G$? क्यों, या क्यों नहीं?

E46) क्या प्रत्येक G के लिए, $\text{Inn } G$ आबेली है? यदि G अन्आबेली है, तो क्या $\text{Aut } G$ अन्आबेली है? अपने उत्तरों के कारण दीजिए।

E47) मान लीजिए G एक समूह है तथा $H \le G$. दर्शाइए कि $f_g(H) \subseteq H \ \forall \ g \in G$ iff $H \lhd G$ विशिष्ट रूप में, यदि $x \in G$ है s.t. $f_g(x) = x \, \forall \, g \in G$, तो दर्शाइए कि $< x > \lhd G$.

E48) सत्यापन कीजिए कि $f_g \in \text{Inn}G$ का प्रतिबिंब G है, जहाँ

i) $G = GL_2(\mathbb{R})$ और $g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

ii) $G = \mathbb{Z}$ और $g = 3$,

iii) $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ और $g = \overline{4}$,

iv) $G = Q_8$ और $g = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$. (उदाहरण 5, इकाई 5 को देखिए।)।

E49) क्या $|G| = |\text{Inn } G| \ \forall \ G$? क्यों?

अब $\text{Aut } G$ का एक उपसमूच्चय $\text{Inn } G$ है जो $f_g \mapsto g$ द्वारा G के साथ 1-1 संगति में प्रतीत होता है। परंतु, आप E49 में दर्शा चुके हैं कि यह 1-1 संगति नहीं है। अतः, प्रश्न उठता है – क्या G और $\text{Inn } G$ के बीच कोई संबंध है? इसे समझने के लिए, आइए पहले देखें कि क्या $\text{Inn } G$ पर कोई समूह संरचना है। वास्तव में, आप देखेंगे कि न केवल $\text{Inn } G$ एक समूह है, बल्कि उससे कुछ ज्यादा भी है!

प्रमेय 16: किसी भी समूह G के लिए, $\text{Aut } G$ का $\text{Inn } G$ एक प्रसामान्य उपसमूह है।

उपपत्ति: $\text{Inn } G$ अरिक्त है क्योंकि $I_G = f_e \in \text{Inn } G$, जहाँ G में e तत्समक है।

अब आइए देखें कि $g, h \in G$ के लिए, क्या $f_g \circ f_h \in \text{Inn } G$.

किसी भी $x \in G$ के लिए, $f_g \circ f_h(x) = f_g(hxh^{-1}) = g(hxh^{-1})g^{-1}$

$$= (gh)x(gh)^{-1} = f_{gh}(x).$$

इस प्रकार, $f_g \circ f_h = f_{gh}$. ...(3)

अतः, $\text{Inn } G$ संयोजन के सापेक्ष संवृत है।

साथ ही, $\text{Inn } G$ में $f_e = I_G$ तत्समक है।

अब, $f_g \in \text{Inn } G$ के लिए, $\exists \ f_{g^{-1}} \in \text{Inn } G$ s.t.

$f_g \circ f_{g^{-1}} = f_{gg^{-1}} = f_e = I_G$, (3) के उपयोग से।

इस प्रकार, $f_{g^{-1}} = (f_g)^{-1}$, अर्थात्, $\text{Inn } G$ के प्रत्येक अवयव का $\text{Inn } G$ में एक प्रतिलोम है।

इस प्रकार, $\text{Inn } G \le \text{Aut } G$.

अब, यह सिद्ध करने के लिए कि $\text{Inn } G \lhd \text{Aut } G$, मान लीजिए कि $\phi \in \text{Aut } G$ और $f_g \in \text{Inn } G$.

तब, किसी भी $x \in G$ के लिए,

$\phi^{-1} \circ f_g \circ \phi(x) = \phi^{-1} \circ f_g(\phi(x))$

$$= \phi^{-1}(g\phi(x)g^{-1})$$

$$= \phi^{-1}(g)\phi^{-1}(\phi(x))\phi^{-1}(g^{-1})$$

$$= \phi^{-1}(g)x[\phi^{-1}(g)]^{-1}$$

$= f_{\phi^{-1}(g)}(x)$. (ध्यान दीजिए कि $\phi^{-1}(g) \in G$.)

$\therefore \phi^{-1} \circ f_g \circ \phi = f_{\phi^{-1}(g)} \in \text{Inn } G \ \forall \ \phi \in \text{Aut } G$ और $f_g \in \text{Inn } G$.

$\therefore \text{Inn } G \lhd \text{Aut } G$. ■

आइए कुछ स्थितियों में Inn G ज्ञात करें, जिससे आपको इस प्रसामान्य उपसमूह की बेहतर समझ बन जाए।

उदाहरण 31: $\text{Inn } \mathbb{R}$ और $\text{Inn } \mathbb{Z}_n, \forall \ n \in \mathbb{N}$, ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि $\mathbb{R}$ और $\mathbb{Z}_n$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$, आबेली हैं, इसलिए टिप्पणी 10 द्वारा, $\text{Inn } \mathbb{R} = \{I\}$ तथा $\text{Inn } \mathbb{Z}_n = \{I\} \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

***

और उदाहरणों को देखने से पहले, आइए एक ऐसे महत्वपूर्ण प्रमेय पर विचार करें जो हमें Inn G को अन्आबेली G के लिए ज्ञात करने में सहायता करेगी। यदि आप टिप्पणी 10 को अब दोबारा देखें, तो इससे लगता है कि Inn G की माप बताती है कि G क्रमविनिमेय होने से कितनी दूर है। याद कीजिए, यही वह बात है जो $G/Z(G)$ हमें बताता है, जहाँ G का $Z(G)$ केन्द्र है। अतः, क्या गुणनखंड समूह $G/Z(G)$ और समूह Inn G के बीच कोई संबंध है? निम्नलिखित प्रमेय इस प्रश्न का उत्तर देगा।

प्रमेय 17: मान लीजिए कि G एक समूह है। तब, $(G/Z(G)) \simeq \text{Inn } G$.

उपपत्ति: जैसा कि आपने अनुमान लगा लिया होगा, हम इस परिणाम को सिद्ध करने के लिए शक्तिशाली समाकारिता के मूल प्रमेय का उपयोग करेंगे। ऐसा करने के लिए, आइए, $f: G \to \text{Inn } G : f(g) = f_g$ परिभाषित करें, जो स्वाभाविक विकल्प है।

f सुपरिभाषित है: यदि G में $g_1 = g_2$, तो $g_1 x g_1^{-1} = g_2 x g_2^{-1} \ \forall \ x \in G$.

अतः, $f_{g_1}(x) = f_{g_2}(x) \ \forall \ x \in G$, अर्थात् $f_{g_1} = f_{g_2}$.

f एक समाकारिता है: $g, h \in G$ के लिए,

$f(gh) = f_{gh}$

$= f_g \circ f_h$, जैसा प्रमेय 16 की उपपत्ति के (3) में दिखाया गया था।

$= f(g) \circ f(h)$.

f आच्छादक है: $\text{Im } f = \{f_g \mid g \in G\} = \text{Inn } G$.

Ker f ज्ञात करना: $\text{Ker } f = \{g \in G \mid f_g = I_G\}$

$$= \{g \in G | f_g(x) = x \,\forall\, x \in G\}$$

$$= \{g \in G | gxg^{-1} = x \,\forall\, x \in G\}$$

$$= \{g \in G | gx = xg \,\forall\, x \in G\}$$

$$= Z(G).$$

अतः, समाकारिता के मूल प्रमेय द्वारा,

$(G/Z(G)) \simeq \text{Inn } G.$ ■

तो हमने पहले कि G और $\text{Inn } G$ के बीच एक संभव 1-1 संगति की बात की थी, प्रमेय 17 कहता है कि यह तभी संभव है जब $Z(G) = \{e\}$.

अब आइए G के कुछ अन्आबेली उदाहरणों के लिए, प्रमेय 17 का उपयोग करें।

उदाहरण 32: $\text{Inn } S_3$ और $\text{Inn } Q_8$ ज्ञात कीजिए।

हल: आप पहले देख चुके हैं कि $Z(S_3) = \{e\}$. अतः, प्रमेय 17 द्वारा, $\text{Inn } S_3 \simeq S_3$.

आप इकाई 6 में यह भी देख चुके हैं कि $Z(Q_8) = \{\pm I\}$. अतः,
$\text{Inn } Q_8 \simeq (Q_8 / < -I >)$, जिसकी कोटि 4 है।

साथ ही, $f_I, f_A, f_B, f_{AB} (= f_C) \in \text{Inn } Q_8$, जहाँ $f_A^2 = I = f_B^2 = f_C^2$.

अतः, $\text{Inn } Q_8 = < f_A > \times < f_B >$, जो क्लाइन 4-समूह है।

***

अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने के लिए प्रमेय 17 का उपयोग करें।

E50) $G = D_8$ और $G = D_{10}$ के लिए, $\text{Inn } G$ ज्ञात कीजिए। अधिक व्यापक रूप से $\text{Inn } D_{2n}$ क्या है?

E51) यदि G अपरिमित है, तो क्या $\text{Inn } G$ का अपरिमित होना आवश्यक है? क्यों, या क्यों नहीं?

इसके साथ ही हम सभी प्रकार की समूह समाकारिताओं की इस चर्चा के अंत तक पहुँच गए हैं। जैसा कि हम पहले बता चुके हैं, आप इनके साथ आगे भी कार्य करते रहेंगे।

आइए अब इस इकाई में जो आपने अध्ययन किया है, उस पर एक संक्षिप्त दृष्टि डालें।

8.6 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर चर्चा की है।

1. समूह समाकारिता की परिभाषा, और उसके उदाहरण।

2. मान लीजिए $f : G_1 \to G_2$ एक समूह समाकारिता है। तब,

   i) $f(e_1) = e_2$,

ii) $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}) \ \forall \ x \in G_1$,

iii) $\text{Im } f \le G_2$,

iv) $\text{Ker } f \triangleleft G_1$.

3. एक समाकारिता 1-1 होती यदि और केवल यदि इसकी अष्टि तुच्छ उपसमूह हो।

4. समूह तुल्याकारिता की परिभाषा, और उसके उदाहरण।

5. दो समूह तुल्याकारी होते हैं यदि और केवल यदि उनकी पूरी तरह से समान बीजीय संरचनाएँ और गुण हों।

6. समूह समाकारिताओं (क्रमशः तुल्याकारिताओं) का संयोजन एक समूह समाकारिता (क्रमशः तुल्याकारिता) है।

7. समाकारिता के मूल प्रमेय (FTH) की उपपत्ति तथा उसके अनेक अनुप्रयोग। यह प्रमेय कहता है कि यदि $f : G_1 \to G_2$ एक समूह समाकारिता है, तो $(G_1/\text{Ker } f) \simeq \text{Im } f$.

8. FTH के कारण, कोई भी समूह समाकारिता $f : G_1 \to G_2$ आवश्यक रूप से प्राकृतिक समाकारिता $p : G_1 \to (G_1/\text{Ker } f)$ है। इसी कारण से फलन प्राकृतिक, या विहित, फलन कहलाता है।

9. कोई भी अपरिमित चक्रीय समूह $(\mathbb{Z}, +)$ के तुल्याकारी होता है। $n \in \mathbb{N}$ के लिए, कोटि n का कोई भी परिमित समूह $(\mathbb{Z}_n, +)$ के तुल्याकारी होता है।

10. मान लीजिए G एक समूह है, $H \le G, K \triangleleft G$. तब, $H/(H \cap K) \simeq (HK)/K$.

11. मान लीजिए G एक समूह है, $H \le G, K \triangleleft G$ और $K \subseteq H$. तब, $\dfrac{(G/K)}{(H/K)} \simeq G/H$.

12. समूह G की स्वाकारिताओं का समुच्चय, $\text{Aut}\, G$ फलनों के संयोजन के सापेक्ष एक समूह है।

13. आंतर स्वाकारिता की परिभाषा, और उसके उदाहरण।

14. किसी भी समूह G के लिए, $\text{Inn } G \triangleleft \text{Aut } G$ होता है।

15. किसी भी समूह G के लिए, $(G/Z(G)) \simeq \text{Inn } G$.

8.7 हल / उत्तर

E1) $I(gh) = gh = I(g)I(h) \ \forall \ g, h \in G$. अतः, I एक अंतराकारिता है। साथ ही, $I(g) = I(h) \Rightarrow g = h$. अतः, I एकैकी है।

इस प्रकार, I एक समूह एकैक समाकारिता है।

E2) सर्वप्रथम, यदि $\mathbb{R}^+$ में $x = y$, तो $\ln x = \ln y$, अर्थात्, $f(x) = f(y)$. अतः, f सुपरिभाषित है।

किन्हीं $x, y \in \mathbb{R}^+$ के लिए, $f(xy) = \ln(xy) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y)$.

$\therefore f$ एक समूह समाकारिता है।

$\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) = 0\} = \{1\}$.

$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^*\} = \{\ln x \mid x \in \mathbb{R}^+\}$.

$= \mathbb{R}$ (क्योंकि किसी भी $r \in \mathbb{R}$ के लिए, $f(e^r) = \ln(e^r) = r$.)

E3) किन्हीं $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ के लिए s.t. $A = B$, $\det(A) = \det(B)$, अर्थात्, $f(A) = f(B)$. इस प्रकार, f सुपरिभाषित है।

आगे, $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ के लिए,

$f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)\, f(B)$.

$\therefore f$ एक समाकारिता है।

$\text{Ker } f = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid f(A) = 1\} = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

$= SL_2(\mathbb{R})$.

$\text{Im } f = \{\det(A) \mid A \in GL_2(\mathbb{R})\}$

$= \mathbb{R}^*$ (क्योंकि किसी भी $r \in \mathbb{R}^*$ के लिए, $\exists\, A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ s.t. $\det(A) = r$).

E4) i) $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$f(z_1 + z_2) = 5(z_1 + z_2) = 5z_1 + 5z_2 = f(z_1) + f(z_2)$.

साथ ही, $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow 5z_1 = 5z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$.

इस प्रकार, f एक एकैकी समाकारिता है।

इसलिए, दिया हुआ कथन सत्य है।

ii) असत्य। ध्यान दीजिए कि $\mathbb{R}^*$ गुणन के सापेक्ष एक समूह है। $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^*$ के लिए, $f(r_1 r_2) = 5r_1 r_2 \neq f(r_1) \cdot f(r_2)$.

अतः, f एक समाकारिता नहीं है। इसलिए, यह एक एकैक समाकारिता नहीं है।

iii) दिखाइए कि $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$.

अतः, यह असत्य है।

iv) $x, y \in \mathbb{R}^*$ के लिए, $f(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2$, क्योंकि $\mathbb{R}^*$ आबेली है।

अतः, f एक समाकारिता है।

v) असत्य। उदाहरणार्थ, $f : \mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z} : f(z) = 5z$ पर विचार कीजिए। (i) में आप दर्शा चुके हैं कि यह एक समाकारिता है।

E5) $p : S_3 \to S_3/A_3 : p(x) = A_3 x$.

ध्यान दीजिए कि $A_3 = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

अब, उदाहरण 7 से आप जानते हैं कि $\text{Ker } p = A_3$.

$\therefore (1\ 2) \notin \text{Ker } p$.

$\text{Im } p = \{A_3 x \mid x \in S_3\} \quad \therefore (1\ 2) \notin \text{Im } p$.

E6) किन्हीं भी $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए, $f(x+y) = e^{2i(x+y)} = e^{2ix} \cdot e^{2iy}$

$$= f(x) \cdot f(y).$$

$\therefore f$ एक समाकारिता है।

$\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{2ix} = 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \in 2\pi\mathbb{Z}\}$, जैसा कि आप 'कलन' की इकाई 4 से जानते हैं।

$= \pi\mathbb{Z}$.

E7) उदाहरण 7 से आप जानते हैं कि यदि हम $G_1 = G/H$ लें, तथा f को प्राकृतिक समाकारिता $p : G \to (G/H)$ लें, तो $\text{Ker } f = H$.

E8) ϕ सुपरिभाषित नहीं है। उदाहरणार्थ, $\phi((1\ 3)) = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) = (2\ 3) \notin H$. इस प्रकार, ϕ, S_3 से $<(1\ 2)>$ तक एक समाकारिता नहीं हो सकती।

दूसरी ओर, K को $<(1\ 2\ 3)>$ लीजिए ψ को $\psi(\sigma) = \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1}$ से परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि ψ एक समाकारिता है। यहाँ आप K को $\{e\}$ या S_3 भी ले सकते थे, और ψ को इसके अनुरूप परिभाषित कर सकते थे। तब भी ψ एक समाकारिता होता।

E9) सर्वप्रथम, जाँच कीजिए कि दोनों f और g समाकारिताएँ हैं।

अब, $g \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : g \circ f(x+iy) = iy$. अतः,

$g \circ f[(x+iy)+(a+ib)] = g \circ f[(x+a)+i(y+b)] = i(y+b) = iy + ib$

$= g \circ f(x+iy) + g \circ f(a+ib)$, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ के लिए।

$\therefore g \circ f$ एक समाकारिता है।

जाँच कीजिए कि $\text{Ker } f = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\text{Ker } g = \{0\}$ और $\text{Ker } (g \circ f) = \mathbb{R}$.

अतः, $\text{Ker } (g \circ f) \subseteq \text{Ker } f$ तथा $\text{Ker } (g \circ f) \not\subset \text{Ker } g$.

साथ ही, $\text{Im } (g \circ f) = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.

E10) किसी भी $\overline{r}, \overline{s} \in \mathbb{Z}_n$ के लिए,

$f(\overline{r}+\overline{s}) = f(\overline{r+s}) = \zeta^{r+s} = \zeta^r \cdot \zeta^s = f(\overline{r}) \cdot f(\overline{s})$.

$\therefore f$ एक समाकारिता है।

$\text{Ker } f = \{\overline{r} \mid \zeta^r = 1\} = \{\overline{0}\}$. इस प्रकार, f एकैकी है।

$\text{Im } f = \{f(\overline{r}) \mid \overline{r} \in \mathbb{Z}_n\}$

$= \{\zeta^r \mid 0 \le r \le n-1\}$

$= U_n$.

अतः, f आच्छादक है।

E11) **f सुपरिभाषित है:** यदि $g_1 = g_2$, तो $Hg_1 = Hg_2$ और $Kg_1 = Kg_2$. इस प्रकार, $(Hg_1, Kg_1) = (Hg_2, Kg_2)$. अर्थात् $f(g_1) = f(g_2)$.

f समाकारिता है: मान लीजिए $g_1, g_2 \in G$. तब,

$f(g_1g_2) = (Hg_1g_2, Kg_1g_2) = (Hg_1 \cdot Hg_2, Kg_1 \cdot Kg_2) = (Hg_1, Kg_1) \cdot (Hg_2, Kg_2)$
$= f(g_1) \cdot f(g_2)$.

$\text{Ker } f = \{g \in G \mid Hg = H \text{ और } Kg = K\} = \{g \in G \mid g \in H \text{ और } g \in K\}$

$= H \cap K$.

$\text{Im } f = \{f(g) \mid g \in G\} = \{(Hg, Kg) \mid g \in G\}$.

f एकैकी समाकारिता होगी iff $\text{Ker } f = \{e\}$, अर्थात् iff $H \cap K = \{e\}$.

f आच्छादक **नहीं** है, क्योंकि किसी $(Hg_1, Kg_2) \in G/H \times G/K$ के लिए, जहाँ $g_1 \ne g_2$ हो सकता है कि कोई $g \in G$ न हो s.t. $Hg = Hg_1$ और $Kg = Kg_2$.

उदाहरणार्थ, यदि $H = \{e_1\}$ और $K = \{e_2\}$, तो $Hg = Hg_1$ iff $g = g_1$. इसी प्रकार, $Kg = Kg_2$ iff $g = g_2$.

E12) **उपप्रमेय 1 की उपपत्ति:** मान लीजिए $G = \langle x \rangle$ तथा $f : G \to G'$ एक समाकारिता है। तब, $f : G \to f(G)$ एक आच्छादक समाकारिता है। अतः, प्रमेय 5 द्वारा, $f(G) = \langle f(x) \rangle$. अर्थात् $f(G)$ चक्रीय है।

उपप्रमेय 2 की उपपत्ति: मान लीजिए $G = \langle S \rangle$, जहाँ S एक परिमित समुच्चय है तथा मान लीजिए $f : G \to G'$ एक समाकारिता है। तब, $f(G)$, G का समाकारी प्रतिबिंब है। अतः, प्रमेय 5 द्वारा, $f(G) = \langle f(S) \rangle$, जहाँ $f(S)$ एक परिमित समुच्चय है।

इस प्रकार, $f(G)$ परिमिततः जनित है।

उपप्रमेय 1 का विलोम: यदि किसी समूह का समाकारी प्रतिबिंब चक्रीय है, तो वह समूह चक्रीय होगा।

यह असत्य है। उदाहरणार्थ, $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f(x, 0) = x$ लीजिए।

आप देख चुके हैं कि f एक आच्छादक समाकारिता है। साथ ही, $\mathbb{Z}$ चक्रीय है, परंतु $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ चक्रीय नहीं है (जैसा कि आप इकाई 4 में देख चुके हैं)।

E13) **कथन:** यदि $f : G_1 \to G_2$ एक समूह समाकारिता है कि $f(G_1)$ आबेली है, तो G_1 आबेली होगा।

यह असत्य है। E5 की स्थिति पर विचार कीजिए। वहाँ, $p(S_3) = (S_3/A_3)$, जो कोटि 2 का है। अतः, $p(S_3)$ चक्रीय है, तथा इसी लिए आबेली है। परंतु जैसा कि आप जानते हैं, S_3 आबेली नहीं है।

E14) मान लीजिए G एक चक्रीय समूह है तथा G का G/H एक विभाग समूह है। तब, उदाहरण 7 और उपप्रमेय 1 द्वारा, G/H चक्रीय है।

E15) फलन $f:\mathbb{Z}\to n\mathbb{Z}: f(k)=nk$ सुपरिभाषित है। अब,

$f(m+r)=n(m+r)=nm+nr=f(m)+f(r)\ \forall\ m, r\in\mathbb{Z}.$

$\therefore f$ एक समाकारिता है।

$\text{Ker } f=\{0\}$. $\therefore f$ एकैकी है।

$\text{Im } f=n\mathbb{Z}$. $\therefore f$ आच्छादक है।

$\therefore f$ एक तुल्याकारिता है, और $\mathbb{Z}\simeq n\mathbb{Z}$.

E16) पहले, आप दिखाइए कि $G=\left\{\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}\le GL_2(\mathbb{R})$.

अब, $f:\mathbb{R}\to G: f(x)=\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ परिभाषित कीजिए।

दिखाइए कि f एक सुपरिभाषित आच्छादक समाकारिता है।

ध्यान दीजिए कि $\text{Ker } f=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}=\{0\}$.

अतः, f एकैकी है। इस प्रकार, $\mathbb{R}\simeq G$.

E17) दर्शाइए कि f एक समाकारिता है, परंतु 1-1 नहीं है। इसलिए f एक तुल्याकारिता नहीं है।

E18) यदि f समाकारिता है, तो $f(ab)=f(a)f(b)$, अर्थात्

$(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}\ \forall\ a, b\in G.$

अतः, $b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}\ \forall\ a, b\in G$, अर्थात् G को आबेली होना चाहिए।

जाँच कीजिए कि f एकैकी और आच्छादक है।

अतः, f एक तुल्याकारिता तभी है, जब G आबेली है।

E19) प्रमेय 2 द्वारा, $\theta\circ\phi$ एक समाकारिता है।

अब, मान लीजिए $x\in\text{Ker }(\theta\circ\phi)$.

तब, $(\theta\circ\phi)(x)=0$

$\Rightarrow \theta(\phi(x))=0$

$\Rightarrow \phi(x)=0$, क्योंकि θ एकैकी है।

$\Rightarrow x=0$, क्योंकि ϕ एकैकी है।

$\therefore \text{Ker}(\theta\circ\phi)=\{0\}$. $\therefore \theta\circ\phi$ एकैकी है।

अंत में, कोई भी $k \in K$ लीजिए। तब, $k = \theta(h)$, किसी $h \in H$ के लिए, क्योंकि θ आच्छादक है।

अब, किसी $g \in G$ के लिए $h = \phi(g)$,

क्योंकि ϕ आच्छादक है।

$\therefore k = \theta \circ \phi(g)$. $\therefore \theta \circ \phi$ आच्छादक है।

$\therefore \theta \circ \phi$ एक तुल्याकारिता है।

E20) $\alpha \in G_1$ समीकरण $x^k = g_1$ का एक हल है

$\Leftrightarrow \alpha^k = g_1$

$\Leftrightarrow [f(\alpha)]^k = f(g_1)$

$\Leftrightarrow f(\alpha) \in G_2$ समीकरण $x^k = f(g_1)$ का एक हल है।

इस प्रकार, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E21) इकाई 4 से आप जानते हैं कि $o(\zeta^2) = \dfrac{15}{(15, 2)} = 15$. अतः, $U_{15} = <\zeta^2>$.

अब, $f(\zeta^r \zeta^s) = \zeta^{2(r+s)} = \zeta^{2r} \cdot \zeta^{2s} = f(\zeta^r) f(\zeta^s)$.

अतः, f एक समाकारिता है।

साथ ही, $\text{Ker } f = \{\zeta^r \in U_{15} \mid \zeta^{2r} = 1\} = \{\zeta^r \in U_{15} \mid 15 \mid 2r\}$

$= \{\zeta^r \in U_{15} \mid 15 \mid r\}$, क्योंकि $(15, 2) = 1$.

$= \{\zeta^{15}\}$

$= \{1\}$.

अंत में, क्योंकि $U_{15} = <\zeta^2>$, इसलिए U_{15} का कोई भी अवयव $\zeta^{2r} = f(\zeta^r)$ के रूप का है, किसी $r = 1, \ldots, 15$ के लिए।

अतः, $\text{Im } f = U_{15}$.

इस प्रकार, f एक तुल्याकारिता है।

E22) मान लीजिए $f : G \to G \times \{e\} : f(x) = (x, e)$. तब, सत्यापन कीजिए कि f एक सुपरिभाषित समूह समाकारिता है।

$\text{Ker } f = \{e'\}$, जहाँ G का e' तत्समक है।

साथ ही, $\text{Im } f = G \times \{e\}$.

अतः, f एक तुल्याकारिता है।

इसी प्रकार, दर्शाइए कि $\{e\} \times G \simeq G$.

E23) उदाहरणार्थ, चक्रीय होना उनका गणनांक, उनके अलग-अलग उपसमूहों की संख्या। कई अन्य गुण हैं, जिन्हें आपको इनमें जोड़ना चाहिए।

E24) प्रमेय 6 द्वारा, H आबेली है।

विलोम है: यदि $f:G\to H$ एक तुल्याकारिता है और H आबेली है, तो G भी ऐसा ही होगा।

यह सत्य है, क्योंकि प्रमेय 8 द्वारा, f^{-1} भी एक तुल्याकारिता है।

E25) हाँ, जैसा कि आप E15 में देख चुके हैं।

E26) $\sim$ स्वतुल्य है क्योंकि किसी भी समूह G के लिए, $I_G:G\to G$ एक समाकारिता है। $\sim$ सममित है क्योंकि किसी भी समूह से दूसरे समूह तक शून्य समाकारिता परिभाषित है।

$\sim$ संक्रामक है क्योंकि समाकारिताओं का संयोजन एक समाकारिता है।

E27) मान लीजिए $f:A_1\to B_1$ और $g:A_2\to B_2$ तुल्याकारिताएँ हैं। $\theta:A_1\times A_2\to B_1\times B_2:\theta((x, y))=(f(x), g(y))$ परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि θ एक सुपरिभाषित समाकारिता है। इसका भी सत्यापन कीजिए कि $\text{Ker }\theta=\text{Ker }f\times\text{Ker }g$

$=\{(e_1, e_2)\}$, जहाँ e_1, e_2 क्रमशः A_1, A_2 के तत्समक हैं।

आगे, दिखाइए कि $\text{Im }\theta=\text{Im }f\times\text{Im }g=B_1\times B_2$.

अतः, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E28) मान लीजिए, यदि संभव हो तो, कि $\mathbb{C}^*\simeq\mathbb{R}$ तथा $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{R}$ एक तुल्याकारिता है। तब, $o(f(i))=4$. परंतु, 0, को छोड़ कर, $(\mathbb{R}, +)$ का प्रत्येक अवयव अपरिमित कोटि का है तथा $o(0)=1$.

अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं। इसलिए, $\mathbb{C}^*$ और $\mathbb{R}$ तुल्याकारी नहीं हैं।

E29) क्योंकि $\mathbb{Z}$ अपरिमित है तथा $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ परिमित है, इसलिए ये दोनों समूह तुल्याकारी नहीं हो सकते हैं।

E30) ध्यान दीजिए कि 0 ही $\mathbb{Q}$ का अवयव है जो परिमित कोटि का है और इसकी कोटि 1 है। परंतु $\mathbb{Q}^*$ में (-1) कोटि 2 का है। अतः, $\mathbb{Q}\neq\mathbb{Q}^*$.

E31) ध्यान दीजिए कि f सुपरिभाषित है। दिखाइए कि

$f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$.

साथ ही, $\text{Ker }f=G$ और $\text{Im }f=\{e\}$.

इस प्रकार, $(G/G)\simeq\{e\}$.

आप इकाई 7 में पहले ही $(G/G)=\{G\}$ (जो तत्समक है) देख चुके हैं, और इसका अनुप्रयोग कर चुके हैं।

E32) उदाहरण 2 के संदर्भ में, $\text{Im exp}=\mathbb{R}^+$ और $\text{Ker exp}=\{0\}$.

अतः समाकारिता के मूल प्रमेय द्वारा, तथा तथ्य $(\mathbb{R}/\{0\})\simeq\mathbb{R}^+$ द्वारा $\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}^+$.

उदाहरण 4(i) के संदर्भ में, $\text{Im } f = <I_3>$, जहाँ

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ और } \text{Ker } f = \{0\}.$$

इस प्रकार, FTH द्वारा, $\mathbb{Z} \simeq <I_3>$.

उदाहरण 4(iii) का संदर्भ में, $\text{Ker } f = \{z \in \mathbb{C}^* \,\|z| = 1\} = S^1$, जो एकक इकाई वृत्त है।

$\text{Im } f = \mathbb{R}^+$.

इस प्रकार, FTH द्वारा, $(\mathbb{C}^*/S^1) \simeq \mathbb{R}^+$.

उदाहरण 7 के संदर्भ में, हम पाते हैं कि $(G/H) \simeq (G/H)$.

उदाहरण 12 के संदर्भ में, हम पाते हैं कि $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \simeq S^1$.

E33) यदि $a, b \in \mathbb{Z}$ के लिए, $a + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$, तो $m|(a-b)$.

ϕ को सुपरिभाषित होने के लिए, हमें $n|(a-b)$ की आवश्यकता है। यह सत्य होगा यदि $n|m$. और तब, $\mathbb{Z}_n$ में $\bar{a} = \bar{b}$, अर्थात्, $\phi(\bar{a}) = \phi(\bar{b})$.

[ध्यान दीजिए कि यदि $m|n$, तो इसका सत्य होना ज़रूरी नहीं।]

उदाहरणार्थ, $\phi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6$ को लीजिए। तब, $\mathbb{Z}_2$ में $\bar{1} = \bar{3}$, परंतु $\mathbb{Z}_6$ में ऐसा नहीं है।,

अतः, अब हम मान लें कि $n|m$. तब

$$\phi(\bar{a} + \bar{b}) = \phi(\overline{a+b}) = (a+b) + n\mathbb{Z}$$

$$= (a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z})$$

$$= \phi(a + m\mathbb{Z}) + \phi(b + m\mathbb{Z}).$$

इस प्रकार, ϕ एक समाकारिता है।

$\text{Ker } \phi = \{a + m\mathbb{Z} | \bar{a} = \bar{0}, \mathbb{Z}_n \text{ में } \} = \{a + m\mathbb{Z} | a \in n\mathbb{Z}\}$

$= n\mathbb{Z}_m$.

$\text{Im } \phi = \mathbb{Z}_n$, क्योंकि किसी भी $a + n\mathbb{Z}$ के लिए, $\exists\, a + m\mathbb{Z}$ s.t. $\phi(a + m\mathbb{Z}) = a + n\mathbb{Z}$.

अतः FTH द्वारा, $(\mathbb{Z}_m / <n>) \simeq \mathbb{Z}_n$.

इस प्रकार, $\mathbb{Z}_m/_{n\mathbb{Z}_m} \simeq \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, जहाँ $n|m$.

E34) $f : \mathbb{R} \to S^1 : f(x) = e^{2\pi i x}$ परिभाषित कीजिए। तब, f सुपरिभाषित है क्योंकि $e^{2\pi i x} \in S^1 \;\forall\; x \in \mathbb{R}$, चूँकि $|e^{2\pi i x}| = |\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x| = 1$.

अब, $f(x+y) = e^{2\pi i (x+y)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y} = f(x) f(y)$.

$\therefore f$ एक समाकारिता है।

ध्यान दीजिए कि S^1 का कोई भी अवयव

$\cos\theta + i\sin\theta = \cos 2\pi\frac{\theta}{2\pi} + i\sin 2\pi\frac{\theta}{2\pi} = f\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$ के रूप का है, जहाँ $\theta \in \mathbb{R}$.

$\therefore f$ आच्छादक है।

साथ ही, $\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{R} | e^{2\pi i x} = 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} | \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x = 1\}$

$= \mathbb{Z}$, क्योंकि $\cos\theta + i\sin\theta = 1$ iff $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

अतः, समाकारिता के मूल प्रमेय द्वारा, $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \simeq S^1$.

E35) **उपप्रमेय 3 की उपपत्तिः** मान लीजिए कि A और B अपरिमित चक्रीय समूह हैं। तब, प्रमेय 11 द्वारा $A \simeq \mathbb{Z}$ और $B \simeq \mathbb{Z}$ है। अतः प्रमेय 9 द्वारा $A \simeq B$.

उपप्रमेय 4 की उपपत्तिः मान लीजिए A और B कोटि n वाले चक्रीय समूह हैं। तब, $A \simeq \mathbb{Z}_n$ और $B \simeq \mathbb{Z}_n$. इस प्रकार, प्रमेय 9 द्वारा, $A \simeq B$.

E36) प्रमेय 11 द्वारा, $U_{10} \simeq \mathbb{Z}_{10}$

अब, यदि $\exists f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{10}$, तो FTH द्वारा, $(\mathbb{Z}_8/\text{Ker } f) \simeq \text{Im } f \le \mathbb{Z}_{10}$.

अतः, $o(\mathbb{Z}_8/\text{Ker } f) = 1, 2, 5$ या 10, लग्रांज के प्रमेय द्वारा।

साथ ही, $o(\mathbb{Z}_8/\text{Ker } f) = \dfrac{8}{o(\text{Ker } f)}$. अतः, $o(\mathbb{Z}_8/\text{Ker } f) = 1, 2, 4$ या 8.

इन दोनों संभावनाओं को साथ रखने पर, हम $o(\mathbb{Z}_8/\text{Ker } f) = 1$ या 2 प्राप्त करते हैं, जिससे कि $o(\text{Ker } f) =$ क्रमशः 8 या 4.

यदि $o(\text{Ker } f) = 8$, तो $\text{Ker } f = \mathbb{Z}_8$, अर्थात्, $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{10} : f(\overline{m}) = \overline{0}$.

यदि $o(\text{Ker} f) = 4$, तो $\text{Ker } f = <\overline{2}>$. अतः, $\text{Im } f$ कोटि 2 वाले अवयव से जनित होगा चाहिए। अतः, $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{10} : f(1(\text{mod } 8)) = 5(\text{mod } 10)$ परिभाषित कीजिए तथा f को समाकारिता बनाने के लिए विस्तृत कीजिए। आपको दिखाना चाहिए कि f सुपरिभाषित है अर्थात् यदि $\mathbb{Z}_8$ में $\overline{x} = \overline{y}$, तो $\mathbb{Z}_{10}$ में $\overline{5x} = \overline{5y}$.

अतः, संभावनाएँ हैं $f : \mathbb{Z}_8 \to U_{10} : f(\overline{m}) = 1$ और $g : \mathbb{Z}_8 \to U_{10} : g(\overline{m}) = \zeta^{5m}$.

E37) i) नहीं। उदाहरणार्थ, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ चक्रीय नहीं है। यह $(\overline{1}, \overline{0})$ और $(\overline{0}, \overline{1})$ द्वारा जनित होता है। परंतु $\mathbb{Z}_4$ चक्रीय है।

अतः, ये तुल्याकारी नहीं हैं।

ii) इकाई 4 से आप जानते हैं कि $\phi(mn)$ $\mathbb{Z}_{mn}$ के भिन्न-भिन्न जनकों की संख्या है। साथ ही, उदाहरण 27 से, $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, इसके आगे, $\mathbb{Z}_m$ के प्रत्येक जनक $\overline{x}$ और $\mathbb{Z}_n$ के प्रत्येक जनक $\overline{y}$ के लिए,

$\{(\bar{x}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{y})\}$, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ का एक जनक समुच्चय है और ये जनक समुच्चय अलग-अलग हैं।

अतः, $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

E38) क्योंकि $(G/H) \simeq K$ है, इसलिए $o(G/H) = o(K)$, अर्थात्, $\frac{o(G)}{o(H)} = o(K)$.

$\therefore o(G) = o(H) \cdot o(K)$.

E39) प्रमेय 12 द्वारा, $(HK/H) \simeq (K/(H \cap K))$.

$\therefore \frac{o(HK)}{o(H)} = \frac{o(K)}{o(H \cap K)}$, अर्थात्, $o(HK) = \frac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)}$.

E40) मान लीजिए $H = 3\mathbb{Z}$ और $K = 4\mathbb{Z}$. प्रमेय 12 द्वारा, हम जानते हैं कि $((H+K)/K) \simeq (H/(H \cap K))$.

अब, $H + K = 3\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, क्योंकि $(3, 4) = 1$ (देखिए इकाई 4)।

साथ ही, $H \cap K = 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$, क्योंकि l.c.m $(3, 4) = 12$ (देखिए इकाई 4)।

इस प्रकार, प्रमेय 12 द्वारा, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

आप यह भी जानते हैं कि $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_4$.

$\therefore 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_4$.

E41) $G_1 \times G_2 \simeq (G_1 \times \{e_2\}) \times (\{e_1\} \times G_2)$, जैसा आप उदाहरण 11, इकाई 6 में देख चुके हैं।

अतः, प्रमेय 13 से, $(G_1 \times G_2)/G_1 \times \{e_2\} \simeq \{e_1\} \times G_2 \simeq G_2$, E22 से।

E42) $\mathbb{Q}^3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ तथा $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

$f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2 : f[(a, b, c)] = (a, b)$ को परिभाषित कीजिए।

जाँच कीजिए कि f सुपभिाषित है।

अब, $\mathbb{Q}^3$ में (a, b, c) और (p, q, r) के लिए,

$$\begin{aligned} f[(a, b, c) + (p, q, r)] &= f[(a+p, b+q, c+r)] = (a+p, b+q) \\ &= (a, b) + (p, q) \\ &= f[(a, b, c)] + f[(p, q, r)]. \end{aligned}$$

अतः, f एक समाकारिता है।

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid (a, b) = (0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{Q}\} \\ &\simeq \mathbb{Q}, \text{ जैसा E22 में था।} \end{aligned}$$

साथ ही, $\text{Im} f = \mathbb{Q}^2$, क्योंकि किसी भी $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$ के लिए,

$(p, q) = f[(p, q, 0)]$.

इस प्रकार, उदाहरण 17 और FTH द्वारा, $(\mathbb{Q}^3/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Q}^3/\text{Ker } f) \simeq \mathbb{Q}^2$.

E43) G/K में किसी भी Kx, Ky के लिए,

$f((Kx)(Ky)) = f(Kxy) = Hxy = (Hx)(Hy) = f(Kx)f(Ky)$.

$\therefore f$ एक समाकारिता है।

अब, G/H का कोई भी अवयव Hx के रूप का होता है। साथ ही,
$Hx = f(Kx) \in \text{Im } f$.

$\therefore \text{Im } f = G/H$.

अंत में,
$$\begin{aligned}\text{Ker} f &= \{Kx \in G/K \mid f(Kx) = H\}\\ &= \{Kx \in G/K \mid Hx = H\}\\ &= \{Kx \in G/K \mid x \in H\}\\ &= H/K\end{aligned}$$

अतः, प्रमेय 10 द्वारा, $(G/K)/(H/K) \simeq G/H$.

E44) ध्यान दीजिए कि $10\mathbb{Z} \leq 5\mathbb{Z}$.

अतः, प्रमेय 14 द्वारा, $\dfrac{(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})}{(5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})} \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

साथ ही, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_5$ और $5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} = \bar{5}\mathbb{Z}_{10}$.

इस तरह परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E45) यदि f एक समाकारिता है, तो आप प्रमेय 1 से जानते हैं कि $f(e) = e$. परंतु यहाँ, $f(e) = g$.

अतः, $f \in \text{Aut } G$ iff $g = e$, है तथा तब $f = I_G$.

E46) यदि G आबेली है, तो $\text{Inn } G = \{I\}$. अतः, $\text{Inn } G$ तुच्छतः आबेली है।

अब, मान लीजिए G आबेली नहीं है, और मान लीजिए $g, h \in G$ s.t.
$gh \neq hg$.

अब, $(f_g \circ f_h)(x) = f_g(hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = f_{gh}(x) \ \forall \ x \in G$.

अतः, $f_g \circ f_h = f_{gh}$ और $f_h \circ f_g = f_{hg} \neq f_{gh}$.

इस प्रकार, $f_g \circ f_h \neq f_h \circ f_g$, अर्थात् $\text{Inn } G$ आबेली नहीं है।

अतः, इस स्थिति में $\text{Aut } G$ आबेली नहीं है।

E47) किसी भी $h \in H$ और $g \in G$ के लिए,

$f_g(h) \in H \Leftrightarrow ghg^{-1} \in H \Leftrightarrow H \lhd G$.

E48) i) $f_g : GL_2(\mathbb{R}) \to GL_2(\mathbb{R}) : f_g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = g\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} g^{-1}$

अब, $g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. $\therefore g^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\therefore g\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} g^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

अब, किसी भी $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ के लिए, $\exists \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$

s.t. $f_g\left(\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$\therefore f_g(GL_2(\mathbb{R})) = GL_2(\mathbb{R})$.

ii) $f_g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f_g(x) = g + x + (-g) = x$.

$\therefore f_g = I$. $\therefore f_g(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

iii) यहाँ भी, क्योंकि G आबेली है, इसलिए $f_g = I$. इस प्रकार, $\text{Im } f_g = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

iv) $C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, C^{-1} = C^3 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$.

अब, $f_C(\pm I) = \pm I$.

साथ ही, $f_C(A) = CAC^{-1} = -A,\ f_C(-A) = A,$

$f_C(\pm B) = \mp B,\ f_C(\pm C) = \mp C$.

अतः, $\text{Im } f_C = Q_8$.

E49) यदि $G = \mathbb{Z}$, तो $\text{Inn } G = \{I\}$. अतः, G अपरिमित है, परंतु $|\text{Inn } G| = 1$.

अतः, इनके गणनांक हमेशा बराबर नहीं होते।

E50) आप E21, इकाई 7, में दर्शा चुके हैं कि $Z(D_8) = \langle R^2 \rangle$. अतः, $o(Z(D_8)) = 2$.

इसलिए, $o(\text{Inn } Q_8) = \dfrac{o(D_8)}{2} = 4$.

साथ ही, $\text{Inn } D_8$ चक्रीय नहीं है, क्योंकि प्रमेय 5, इकाई 7 से, $D_8/Z(D_8)$ चक्रीय नहीं है। आप इसका सत्यापन कीजिए कि D_8 क्लाइन 4-समूह $\{I, f_r, f_{R^2}, f_{rR^2}\}$ है।

$Z(D_{10}) = \{e\}$. अतः, $\text{Inn } D_{10} \simeq D_{10}$.

व्यापक रूप से, $Z(D_{2n}) = \{I, R_{n/2}\}$, यदि n सम है, तथा $Z(D_{2n}) = \{e\}$, यदि n विषम है।

इस प्रकार, यदि n सम है, तो $\text{Inn } D_{2n}$ कोटि n वाला अचक्रीय समूह है। यदि n विषम है, तो $\text{Inn } D_{2n} \simeq D_{2n}$.

E51) नहीं, उदाहरणार्थ, $\text{Inn } \mathbb{Z} = \{I\}$.

इकाई 9

क्रमचय समूह

इकाई की रूपरेखा

पृष्ठ संख्या

9.1 प्रस्तावना

उद्देश्य

9.2 प्रारंभिक संकल्पनाएँ

9.3 S_n में क्रमचयों के गुण

9.4 एकांतर समूह

9.5 केली का प्रमेय

9.5 सारांश

9.6 हल/उत्तर

9.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम विस्तार से उस समूह के बारे में चर्चा करेंगे जिसका आपने भाग 1.5, इकाई 1 और उपभाग 2.4.2, इकाई 2 में संक्षिप्त रूप से अध्ययन किया था। यह सममित समूह है। जैसा कि आप पिछली इकाइयों में प्रायः देख चुके हैं सममित समूह S_n तथा उसके उपसमूहों से हमें अनेक उदाहरण प्राप्त हुए हैं। जैसा कि आप जानते हैं, सममित समूहों और उनके उपसमूहों को क्रमचय समूह कहते हैं। ऐतिहासिक तौर पर देखा जाए, तो क्रमचय समूहों तथा रूपातरणों को समूहों के अध्ययन से ही, समूह सिद्धांत का आधार बना है। 18वीं शताब्दी में अनेक यूरोप के गणितज्ञों ने क्रमचयों पर शोध कार्य किया था। परंतु, इस सिद्धांत का आधार, तथा जिस संकेतन का आप अध्ययन करेंगे, उसका मुख्य श्रेय फ़्राँसीसी गणितज्ञ ऑगस्तीन-लूई कौशी (Augustin- Louis Cauchy) को जाता है।

आकृति 1: कौशी (1789–1857)

भाग 9.2 में हम आपको याद दिलाएंगे कि आपने इकाइयों 1 और 2 में क्रमचयों और क्रमचय समूहों के बारे में क्या अध्ययन किया था।

भाग 9.3 में हम S_n के अवयवों के अनेक गुणों पर दृष्टि डालेंगे। विशिष्ट रूप से, आप देखेंगे कि S_n का प्रत्येक अवयव एक चक्र या असंयुक्त चक्रों का एक गुणनफल क्यों है। फिर, आप अध्ययन करेंगे कि $n \geq 2$ के लिए, S_n को 2-चक्र क्यों जनित करते हैं।

भाग 9.4 में हमारा ध्यान कुछ खास क्रमचयों पर केन्द्रित होगा। इन्हें सम क्रमचय कहते हैं। आप देखेंगे कि S_n में सम क्रमचयों का समुच्चय S_n का एक प्रसामामन्य उपसमूह क्यों है। इस उपसमूह को एकांतर समूह कहते हैं। एकांतर समूह के अनेक रोचक गुण हैं, जिनका आप अध्ययन भी करेंगे।

अंत में, भाग 9.5 में आप प्रसिद्ध गणितज्ञ केले (Cayley) द्वारा दिए गए एक परिणाम का अध्ययन करेंगे, जो कहता है कि प्रत्येक समूह एक क्रमचय समूह के तुल्याकारी है। इस

प्रकार, समूहों के प्रत्येक तुल्याकारिता वर्ग को एक क्रमचय समूह द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इसी परिणाम के कारण क्रमचय समूह इतना महत्व रखते हैं।

कृपया इस इकाई को ध्यान से पढ़ें, क्योंकि यह समूह सिद्धांत के अध्ययन और समझ के लिए आपको एक ठोस आधार देता है। हमारा सुझाव है कि इस इकाई की पढ़ाई करने से पहले, आप भाग 1.5 और उपभाग 2.4.2 का पुनः अध्ययन कर लें।

उद्देश्य

इस इकाई की पढ़ाई के बाद, आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो जाएँगे:

- S_n में किसी भी क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में, और पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में, व्यक्त करना;
- ज्ञात करना कि S_n का कोई अवयव विषम है या सम है;
- सिद्ध करना कि घात n वाला एकांतर समूह A_n, S_n में प्रसामान्य है, तथा इसकी कोटि $\frac{n!}{2}$;
- यह सिद्ध करना कि $\forall\, n \geq 5$, A_n सरल है, और इसका अनुप्रयोग करना;
- केली के प्रमेय का कथन देना और उसे सिद्ध करना।

9.2 प्रारंभिक संकल्पनाएँ

भाग 1.5 (इकाई 1) और उपभाग 2.4.2 (इकाई 2) से आप जानते हैं कि एक अरिक्त समुच्चय X पर कोई क्रमचय X से X तक एक एकैकी आच्छादक फलन होता है। हम X पर सभी क्रमचयों के समुच्चय को $S(X)$ द्वारा व्यक्त करते हैं। अब, आइए ऐसे कुछ तथ्यों को एकत्रित करें जिनका अध्ययन आपने उपभाग 2.4.2 में किया था। मान लीजिए X एक परिमित समुच्चय है जिसमें n अवयव हैं। सरलता के लिए, हम इन अवयवों को प्रतीकों $1, 2, \ldots, n$ से व्यक्त करते हैं। तब, आप जानते हैं कि इन n प्रतीकों के सभी क्रमचयों के समुच्चय को S_n द्वारा व्यक्त किया जाता है।

आप यह भी जानते हैं कि हम किसी भी $f \in S_n$ को 2-पंक्ति रूप में

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix} \qquad \ldots(1)$$

से व्यक्त करते हैं।

S_n में कितने अवयव होंगे, आपके हिसाब से? यह गिनने के लिए, उपरोक्त (1) में f को देखिए। अब, $f(1)$ के लिए n संभावनाएँ हैं, यानी $1, 2, \ldots, n$. एक बार $f(1)$ निर्धारित हो जाए, तो $f(2)$ के लिए $(n-1)$ संभावनाएँ हैं, यानी $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{f(1)\}$, क्योंकि f एकैकी और आच्छादक है। इस तरह, $f(1)$ और $f(2)$ को $n(n-1)$ तरीकों से चुना जा सकता है। इसी प्रक्रिया को जारी रखने पर, आप देख सकते हैं कि $f \in S_n$ के लिए $n!$ विभिन्न संभावनाएँ हैं। अतः, **S_n में $n!$ अवयव होते हैं।**

अब, आइए किसी भी समुच्चय X के लिए, $S(X)$ की बीजिए संरचना पर दृष्टि डालें। 'कलन' से आप जानते हैं कि X से X तक एकैकी आच्छादक फलनों का संयोजन X से X तक एक एकैकी आच्छादक फलन होता है। अतः, यदि $f, g \in S(X)$, तो $f \circ g \in S(X)$. अतः, $S(X)$ पर संयोजन एक द्वि-आधारी संक्रिया है। क्रमचयों के संयोजन को परिकलित करने में अभ्यास प्राप्त करने में आपकी सहायता के लिए, एक उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 1: $f \circ g$ ज्ञात कीजिए, जहाँ S_4 में $f = (1\,2\,4\,3)$ और $g = (1\,4\,2)$.

हल: इकाई 2 से आप जानते हैं कि $f = (1\,2\,4\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, तथा

$g = (1\,4\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

तब, $f \circ g$ को प्राप्त करने के लिए, हम पहले g को लागू करते हैं, और फिर f को लागू करते हैं।

$\therefore f \circ g(1) = f(g(1)) = f(4) = 3$,

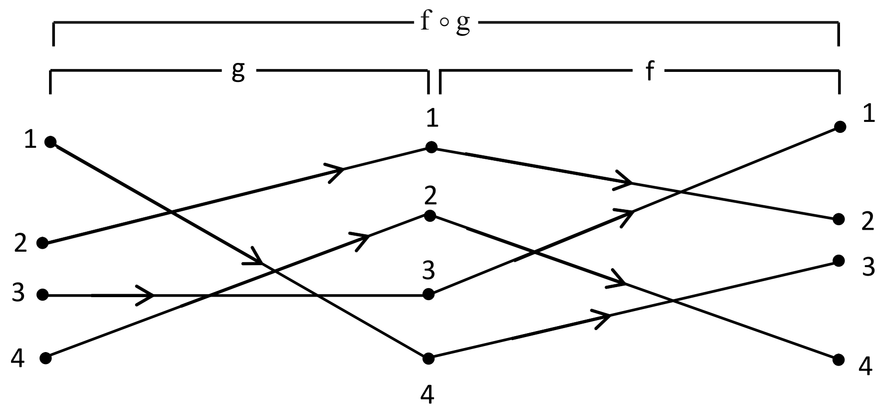
$f \circ g(2) = f(g(2)) = f(1) = 2$,

$f \circ g(3) = f(g(3)) = f(3) = 1$, तथा

$f \circ g(4) = f(g(4)) = f(2) = 4$.

$\therefore f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

हम इस प्रक्रिया को आरेख के रूप में आकृति 2 में दर्शा रहे हैं।



आकृति 2: S_4 में $(1\,2\,4\,3) \circ (1\,4\,2)$

***

अब, आइए हम $S(X)$ पर वापस आ जाएँ किसी समुच्चय X के लिए $S(X)$। आप उपभाग 2.4.2 में निम्नलिखित परिणाम की उपपत्ति का अध्ययन कर चुके हैं।

प्रमेय 1: मान लीजिए X एक अरिक्त समुच्चय है। तब $(S(X), \circ)$ एक समूह है, जो **X पर क्रमचय समूह** कहलाता है।

इस प्रकार, S_n कोटि $n!$ वाला एक समूह है। इकाई 2 से याद कीजिए कि S_n को **घात n वाला सममित समूह** कहते हैं।

अब, इकाई 2 से आप यह भी जानते हैं कि यदि $f \in S_n$, तो

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

उपरोक्त दोहराव के बाद, तथा पिछली इकाइयों से प्राप्त अनुभव से, अब आपको निम्नलिखित प्रश्नों को हल करना चाहिए।

E1) दर्शाइए कि $n \geq 3$ के लिए, $(S_n, \circ)$ एक अक्रमविनिमेय समूह है।

E2) दर्शाइए कि $S_m \leq S_n$, यदि $m \leq n.$

E3) मान लीजिए G एक समूह है तथा $g \in G.$ दर्शाइए कि $f: G \to G: f(x) = gx,$ $S(G)$ में है। (f को G का g द्वारा **वाम नियमित (left regular representation) निरूपण** कहते हैं।)

यहाँ, हम शब्दावली और संकेतन के बारे में एक टिप्पणी देना चाहेंगे।

टिप्पणी 1: इकाई 2 की टिप्पणी 5 के अनुसार, आगे से हम क्रमचयों के संयोजन को क्रमचयों का गुणन कहेंगे। साथ ही, हम संयोजन के चिह्न को नहीं रखेंगे। इस प्रकार, **हम सामान्यतः $f \circ g$ को fg लिखेंगे**, जब तक हमें संबद्ध संक्रिया पर बल न देना हो।

परिमित समुच्चय के क्रमचय के लिए हमारे द्वारा उपयोग किया गया दो-पंक्ति संकेतन थोड़ा जटिल है। आइए देखें कि क्या कोई संक्षिप्त संकेतन है। यदि क्रमचय एक चक्र है, तो आप जानते हैं कि हम इसे केवल एक पंक्ति में व्यक्त कर सकते हैं, जैसा कि उदाहरण 1 में किया है।

आइए पहले याद करें कि एक चक्र को 2-पंक्ति रूप से एक पंक्ति में कैसे लिखा जाता है।

S_4 में क्रमचय $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ लीजिए। प्रतीकों में से किसी एक को चुनिए, मान लीजिए 1 को चुना है।

अब, हम बायाँ कोष्ठक लिखने के बाद 1 लिखते हैं: $(1$

क्योंकि f, 1 को 3 में ले जाता है, इसलिए

हम 1 के बाद 3 लिखते हैं : $(1\ 3$

क्योंकि f, 3 को 4 में ले जाता है, इसलिए

हम 3 के बाद 4 लिखते हैं: $(1\ 3\ 4$

क्योंकि f, 4 को 2 में ले जाता है, इसलिए

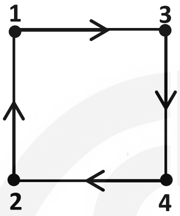
हम 4 के बाद 2 लिखते हैं: $(1\ 3\ 4\ 2$

क्योंकि f, 2 को 1 में ले जाता है (जिस प्रतीक से हमने प्रारंभ किया था), इसलिए हम 2 के बाद कोष्ठक बंद कर देते हैं: $(1\ 3\ 4\ 2)$

अब, क्योंकि f में कोई प्रतीक शेष नहीं बचा है, इसलिए हम $f = (1\ 3\ 4\ 2)$ लिखते हैं।

इसका अर्थ है कि एक चक्र प्रत्येक प्रतीक को उसके दाईं ओर के प्रतीक में ले जाता है, कोष्ठकों में अंतिम प्रतीक को छोड़कर, जिसे चक्र प्रथम प्रतीक में ले जाता है।

यदि हमने अपना प्रथम प्रतीक 3 चुना होता, तो हमें $f = (3\ 4\ 2\ 1)$ प्राप्त हुआ होता। ध्यान दीजिए कि यह चक्र $(1\ 3\ 4\ 2)$ ही है, क्योंकि दोनों चक्र $f(i), i = 1, 2, 3, 4$ के लिए समान मान दर्शाते हैं। अतः, ये दोनों उस क्रमचय को व्यक्त करते हैं जिसे हमने आरेखीय रूप से आकृति 3 में दिखाया है। यह एक 4-चक्र, अर्थात् लंबाई 4 वाले चक्र का उदाहरण है। आकृति 3 से शायद आपको कुछ अंदाजा हो गया होगा है कि हम इस फलन को चक्र क्यों कहते हैं।



आकृति 3: **(1 3 4 2).**

अब, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ लीजिए। आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि $g = (1\ 2\ 4)$.

परंतु 3 को क्या हो गया? क्योंकि $g(3) = 3$, अर्थात् 3 को g नियत करता है, इसलिए हम इसे g के चक्र निरूपण में शामिल नहीं करते हैं।

अधिक व्यापक रूप में, हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त है।

यदि $f(s) = s$, तो हम कहते हैं कि s को f **नियत (fix) करता है।** यदि $f(s) \neq s$, तो हम कहते हैं कि s को f **गतिमान करता (moves)** है।

परिभाषा: $r \leq n$ के लिए, एक क्रमचय $f \in S_n$ एक r-चक्र (r-cycle) (या **लंबाई r वाला चक्र (cycle of length r)**) कहलाता है, यदि 1 और n के बीच में r भिन्न-भिन्न पूर्णांक $x_1, x_2, \ldots, x_r$ स्थित हों जिनसे कि

$f(x_i) = x_{i+1}\ \forall\ i = 1, \ldots, r-1,\ f(x_r) = x_1,$

तथा $f(k) = k\ \forall\ k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

तब, हम $\mathbf{f = (x_1\ x_2 \ldots x_r)}$ लिखते हैं।

विशिष्ट रूप से, एक 2-चक्र को **पक्षांतरण (transposition)** कहते हैं।

उदाहरणार्थ, क्रमचय $f = (2\ 3) \in S_3$ एक पक्षांतरण है। यहाँ

$f(1) = 1, f(2) = 3$ और $f(3) = 2.$

ध्यान दीजिए कि यदि $f = (2\ 3) \in S_7$, तो $f(2) = 3, f(3) = 2$ तथा $k = 1, 4, 5, 6, 7$ के लिए $f(k) = k.$

अगले भाग में आप देखेंगे कि क्रमचयों के सिद्धांत में पक्षांतरण एक अति महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं।

1-चक्रों के बारे में निम्नलिखित महत्वपूर्ण प्रेक्षण पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 2: S_4 में कोई 1-चक्र लीजिए, मान लीजिए (3), 3 को 3 में ही ले जाता है, तथा $1, 2$ और 4 को क्रमशः $1, 2$ और 4 में ले जाता है। इस प्रकार,

$(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I$ जो तत्समक क्रमचय है। इस प्रकार, S_n **में कोई भी 1–चक्र (i) तत्समक क्रमचय** $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ है, क्योंकि यह i को i में, तथा अन्य $(n-1)$ प्रतीकों को स्वयं में, ले जाता है।

आप पहले से ही S_3 में चक्रों से परिचित हैं। आप जानते हैं कि यहाँ दो 3-चक्र हैं, $(1\,2\,3)$ और $(1\,3\,2)$. S_3 में तीन पक्षांतरण भी हैं, यानी $(1\,2), (1\,3)$ और $(2\,3)$. आप पिछली इकाइयों के अनेक उदाहरणों और प्रश्नों में इन चक्रों के साथ कार्य कर चुके हैं। अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करते समय अन्य चक्रों के साथ कार्य कर सकते हैं।

E4) S_7 में 2 भिन्न-भिन्न पक्षांतरण, 2 भिन्न-भिन्न 3-चक्र तथा 2 भिन्न-भिन्न 7-चक्र लिखिए। अपने विकल्पों की पुष्टि कीजिए।

E5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ को एक चक्र के रूप में लिखिए।

E6) i) दर्शाइए कि S_8 में $(1\,2)^{-1} = (1\,2), (1\,2\,3)^{-1} = (3\,2\,1)$ तथा $(2\,5\,6\,8)^{-1} = (8\,6\,5\,2)$.

ii) यदि $f = (i_1\ i_2 \dots i_r) \in S_n, n \geq r$, तो दर्शाइए कि $f^{-1} = (i_r\ i_{r-1} \dots i_2\ i_1)$.

E7) $[G, G]$ के दो भिन्न-भिन्न अवयव दीजिए, जहाँ $G = S_4$.

अब तक हमने क्रमचयों से संबंधित मौलिक संकल्पनाओं का पुनरवलोकन कर लिया है। आगे, हम S_n के अवयवों के महत्वपूर्ण गुणों की चर्चा करेंगे।

9.3 S_n में क्रमचयों के गुण

पिछले भाग में जो आपने अध्ययन किया है, उससे शायद आप सोचें कि हम किसी भी क्रमचय को एक चक्र के रूप में लिख सकते हैं। परंतु S_5 में निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

मान लीजिए $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

आइए हम प्रतीक 1 से प्रारंभ करें, तथा g पर चक्र प्राप्त करने की प्रक्रिया लागू करें। हम तीन चरणों के बाद $(1\,3\,4)$ प्राप्त करते हैं क्योंकि g, 4 को 1 में ले जाता है, और इसलिए हम कोष्ठकों को बंद कर देते हैं, हालांकि अभी तक हमने g में सभी प्रतीकों को नहीं लिखा है। अतः, क्या बचे हुए प्रतीकों 2 और 5 को g ने नियत कर रखा है? नहीं। हम देखते हैं कि $g(2) \neq 2$ और $g(5) \neq 5$.

इसलिए, अगले चरण के रूप में, हम ऐसे प्रतीक को चुनते हैं जो अभी तक प्रकट नहीं हुआ है तथा चक्र लिखने की प्रक्रिया को पुनः प्रारंभ करते हैं। इस प्रकार, हमें एक अन्य

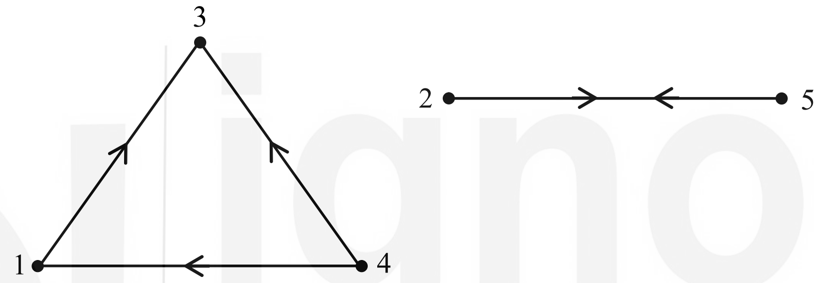
चक्र $(2\ 5)$ प्राप्त होता है। अब, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ के सभी प्रतीक समाप्त हो गए हैं। अतः, इसे चक्रों के पदों में हम g को कैसे लिखें? आइए देखें।

यदि हम $(1\ 3\ 4)(2\ 5)$ को दो-पंक्ति रूप में लिखें, तो हमें क्या प्राप्त होता है?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$ जो g ही है।

$\therefore g = (1\ 3\ 4)(2\ 5).$

हम g के इस निरूपण को, जो दो विभिन्न प्रतीकों को गतिमान करने वाले चक्रों का गुणनफल है, g का **चक्रीय वियोजन (cycle decomposition)** कहते हैं। आकृति 4 में हम इसे एक आरेख द्वारा निरूपित कर रहे हैं जिसमें वियोजन स्पष्ट रूप से दिखता है।



आकृति 4: $g = (1\ 3\ 4)\ (2\ 5)$

ध्यान दीजिए कि g में शामिल दोनों चक्रों के प्रतीक असंयुक्त समुच्चय $\{1, 3, 4\}$ और $\{2, 5\}$ बनाते हैं। इसके आगे, प्रत्येक चक्र का प्रारंभ हम अलग-अलग प्रतीकों से कर सकते हैं, जिस कारण g को व्यक्त करने की अनेक विधियाँ हैं। उदाहरण के लिए,

$$g = (4\ 1\ 3)(2\ 5) = (2\ 5)(1\ 3\ 4) = (5\ 2)(3\ 4\ 1).$$

परंतु, **प्रत्येक चक्र के अंदर एक ही क्रम रखना पड़ता है।** उदाहरणार्थ, हम $(4\,1\,3)$ के बदले $(4\ 3\ 1)$ नहीं लिख सकते, क्योंकि $h = (4\ 3\ 1)(2\ 5)$ और g अलग फलन हैं। क्यों? ध्यान दीजिए कि $g(1) = 3$, परंतु $h(1) = 4$.

अतः, हम असंयुक्त प्रतीकों वाले अलग चक्रों के गुणनफल को किसी भी क्रम में लिख सकते हैं। प्रत्येक चक्र में प्रारंभिक अवयव का चुनाव स्वेच्छिक है, लेकिन यह सुनिश्चित करना है कि प्रत्येक चक्र एक ही फलन को निरूपित करता है।

अतः, आप देखते हैं कि इस स्थिति में g को चक्र के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, अपितु ऐसे चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है, जिसे हम अब परिभाषित करेंगे।

परिभाषा: दो चक्र **असंयुक्त (disjoint)** कहलाते हैं यदि उनमें कोई सार्व प्रतीक न हो।

इस प्रकार, लंबाई 2 या अधिक वाले असंयुक्त चक्र प्रतीकों के असंयुक्त समुच्चयों को गतिमान करते हैं। अतः, उदाहरणार्थ, S_4 में चक्र $(1\,2)$ और $(3\,4)$ असंयुक्त हैं। परंतु $(1\,2)$ और $(1\,4)$ असंयुक्त नहीं हैं, क्योंकि ये दोनों 1 को गतिमान करते हैं। अब, आइए एक और उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 2: $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ को एक चक्र या असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

हल: जैसे हमने ऊपर g के लिए किया था, हम प्रतीक 1 से प्रारंभ करते हैं लेकिन 1, h द्वारा नियत है। इसलिए, हम 1 को छोड़ देते हैं, और 2 की ओर बढ़ते हैं। हमें चक्र $(2\ 3)$ प्राप्त होता है। अब, 4 लेते हैं, और हम चक्र $(4\ 5)$ प्राप्त करते हैं, अब सभी प्रतीक समाप्त हो गए हैं, अतः, $h = (2\ 3)(4\ 5)$.

ध्यान दीजिए कि नियम अनुसार, हम h के निरूपण में 1-चक्र को शामिल नहीं करते हैं, जब तक कि हम इस चक्र पर बल नहीं देना चाहते हैं, क्योंकि यह केवल तत्समक क्रमचय है। इस प्रकार, हम (1) को छोड़ते हुए, $h = (2\ 3)(4\ 5)$, या $h = (4\ 5)(2\ 3)$ लिखते हैं।

***

अब आइए जो हमने ऊपर असंयुक्त चक्रों के बारे में देखा है, उसे व्यापकीकृत करें।

प्रमेय 2: यदि σ_1 और $\sigma_2 \in S_n$ असंयुक्त चक्र हैं, तो $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

उपपत्ति: मान लीजिए $\sigma_1 = (a_1\ a_2 \ldots a_r)$ और $\sigma_2 = (b_1\ b_2 \ldots b_s)$ जहाँ $r + s \le n$ और $\{a_1, \ldots, a_r\} \cap \{b_1, \ldots, b_s\} = \varnothing$.

मान लीजिए $\{1, 2, \ldots, n\} = \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. जहाँ $k = n - (r + s) \ge 0$, और $\sigma_1(c_i) = c_i = \sigma_2(c_i)\ \forall\ i = 1, \ldots, k$.

अब, $\sigma_1\sigma_2(a_i) = \sigma_1(a_i)$, क्योंकि $\sigma_2(a_i) = a_i\ \forall\ i = 1, \ldots, r$.

$= a_{i+1}\ \forall\ i = 1, \ldots, r$, तथा $a_{r+1} = a_1$ रखने पर।

साथ ही, $\sigma_2\sigma_1(a_i) = \sigma_2(a_{i+1}) = a_{i+1}\ \forall\ i = 1, \ldots, r$.

इसी प्रकार, आप दर्शा सकते हैं कि $\sigma_1\sigma_2(b_i) = \sigma_2\sigma_1(b_i)\ \forall\ i = 1, \ldots, s$, $b_{s+1} = b_1$ रखने पर।

अंत में, $\sigma_1\sigma_2(c_i) = \sigma_1(c_i) = c_i$ तथा $\sigma_2\sigma_1(c_i) = c_i\ \forall\ i = 1, \ldots, k$.

इस प्रकार, $\sigma_1\sigma_2(x) = \sigma_2\sigma_1(x)\ \forall\ x \in \{1, \ldots, n\}$.

अतः, $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. ■

प्रमेय 2 के कारण ही हमने पहले देखा था कि $g = (1\ 3\ 4)(2\ 5) = (2\ 5)(1\ 3\ 4)$. पहले जिस प्रक्रिया का हम g (तथा उदाहरण 2 में h) को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखने के लिए उपयोग कर चुके हैं, उसे किसी भी ऐसे क्रमचय को इसी तरह लिखने के लिए किया जा सकता है, जो प्रतीकों के परिमित समुच्चय को गतिमान करता है।

प्रमेय 3: (चक्र वियोजन): किसी भी परिमित समुच्चय का प्रत्येक क्रमचय या तो एक चक्र होता है, या असंयुक्त चक्रों का गुणनफल।

उपपत्ति: ध्यान दीजिए कि तत्समक क्रमचय को तुच्छ रूप से 1-चक्र या 1-चक्रों के गुणनफल के रूप में देखा जा सकता है।

अब, $S_1 = \{I\}, S_2 = \{I, (1\ 2)\}$, तथा आप देख चुके हैं कि S_3 का प्रत्येक अवयव एक चक्र है।

अतः, आइए मान लें कि $n \geq 4$ तथा $\sigma \in S_n$ एक चक्र नहीं है। इसका अर्थ है कि $\sigma \neq I$.

मान लीजिए $x_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ s.t. x_1 को σ गतिमान करता है, तथा $\sigma(x_1) = x_2$ लीजिए।

फिर मान लीजिए $x_3 = \sigma(x_2) = \sigma(\sigma(x_1)) = \sigma^2(x_1), x_4 = \sigma(x_3) = \sigma^3(x_1)$, इत्यादि। क्योंकि $\{1, 2, \ldots, n\}$ परिमित है, इसलिए इस प्रक्रिया द्वारा किसी चरण पर प्रतीकों की पुनरावर्ती होने लगेगी। मान लीजिए कि किसी $i < j$ के लिए, $\sigma^i(x_1) = \sigma^j(x_1)$.

यदि $r = j - i$, तो $x_1 = \sigma^r(x_1)$.

मान लीजिए m सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक है जिससे कि $\sigma^m(x_1) = x_1$.

तब $\sigma_1 = (x_1\ x_2 \ldots x_m)$ एक चक्र है, तथा $\sigma(x_i) = \sigma_1(x_i)\ \forall\ i = 1, \ldots, m$.

अब $y_1 \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ लीजिए, जहाँ y_1 को σ गतिमान करता है। ऐसा y_1 है, क्योंकि σ एक चक्र नहीं है।

तब, उपरोक्त प्रक्रिया का उपयोग करते हुए, हम किसी $s \geq 2$ के लिए, $\sigma_2 = (y_1\ y_2 \ldots y_s)$ प्राप्त करते हैं, जहाँ $i = 1, \ldots, s$ के लिए, $y_i = \sigma^{i-1}(y_1)$.

क्या σ_1 और σ_2 असंयुक्त हैं? मान लीजिए, यदि संभव हो तो, कि ऐसा नहीं है। तब, किन्ही i और j के लिए, हम $x_i = y_j$ प्राप्त करते हैं, अर्थात् $\sigma^{i-1}(x_1) = \sigma^{j-1}(y_1)$, अर्थात् $\sigma^{i-j}(x_1) = y_1$ अर्थात् $y_1 = x_{i-j+1}$, जो y_1 को चुनने के तरीके का अंतर्विरोध करता है।

अतः, σ_1 और σ_2 असंयुक्त हैं।

हम इस प्रक्रिया को, जिसके द्वारा हमने σ_1 और σ_2 प्राप्त किए थे, आगे जारी रख सकते हैं जब तक कि σ द्वारा गतिमान किए गए सभी प्रतीक समाप्त न हो जाएँ। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक ऐसे $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ के लिए s.t. $\sigma(i) = i$, 1-चक्र (i) = I. इसलिए हम इसे वियोजन में शामिल नहीं करते हैं। इस प्रकार, अंत में हम 1 से बड़ी लंबाइयों वाले t असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_t$ प्राप्त करते हैं। ■

प्रमेय 3 के कारण, S_n में किसी भी 2-पंक्ति के रूप में लिखे क्रमचय को अधिक सुविधाजनक रूप से क्रमचय वियोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। क्या आप इससे सहमत हैं? साथ ही, प्रमेय 2 के कारण, वियोजन में चक्र किस क्रम में लिखे गए हैं उससे कोई अंतर नहीं पड़ता है।

यदि आपने अभी तक की चर्चा को समझ लिया है, तो आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर पाएँगे।

E8) निम्नलिखित में से प्रत्येक क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$,

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

E9) $(1\ 4)(2\ 3) \in S_4$, $(6\ 5\ 2\ 4)(3\ 1) \in S_8$ और $(3\ 1\ 2)(4\ 6)(5\ 7) \in S_8$ को दो-पंक्ति रूप में लिखिए।

E10) क्या S_6 में चक्र $(1\ 3)$ और $(1\ 5\ 4)$ क्रमविनिमय करते हैं? अपने उत्तर के कारण दीजिए।

E11) यदि f एक r-चक्र है, तो दर्शाइए कि $o(f) = r$, अर्थात् $f^r = I$ और $f^s \neq I$, यदि $s < r$.

(संकेत: यदि $f = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_r)$, तो $f(i_1) = i_2$, $f^2(i_1) = i_3, \ldots, f^{r-1}(i_1) = i_r$.)

E11 से आप जानते हैं कि एक चक्र की कोटि क्या है। अतः, इस तथ्य का, तथा S_n के अवयव के चक्र वियोजन का, उपयोग करते हुए, क्या हम S_n के किसी भी अवयव की कोटि आसानी से प्राप्त कर सकते हैं? एक उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 3: $o(g)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ S_5 में $g = (1\ 3\ 4)(2\ 5)$.

हल: मान लीजिए $\sigma_1 = (1\ 3\ 4)$ और $\sigma_2 = (2\ 5)$.

तब $o(\sigma_1) = o((1\ 3\ 4)) = 3$, तथा $o(\sigma_2) = o((2\ 5)) = 2$.

अब, जैसा कि प्रमेय 2 में देखा था, $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

अतः, $g^2 = (\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2 \neq I$, क्योंकि $o(\sigma_1) = 3$ और $o(\sigma_2) = 2$.

साथ ही, $g^3 = \sigma_1^2 g = \sigma_1^3\sigma_2 = \sigma_2$, क्योंकि $o(\sigma_1) = 3$.

$\neq I$, क्योंकि $o(\sigma_2) = 2$.

इसी प्रकार, आपको सत्यापन करना चाहिए कि

$g^4 \neq I$, $g^5 \neq I$, $g^6 = \sigma_1^6\sigma_2^6 = (\sigma_1^3)^2(\sigma_2^2)^3 = I$.

इस प्रकार, $o(g) = 6 = \text{l.c.m}(o(\sigma_1), o(\sigma_2))$

$= \sigma_1$ और σ_2 की लंबाईयों का l.c.m.

***

उपरोक्त उदाहरण में जो आपने g के लिए प्राप्त किया है, वह व्यापक रूप से सत्य है। यही निम्नलिखित प्रमेय हमें बताती है, जिसे इतालवी गणितज्ञ पाओलो रूफ़ीनी (Paolo Ruffini) ने सिद्ध किया था।

आकृति 5: पाओलो रुफ़ीनी (1765–1822)

प्रमेय 4: मान लीजिए $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$ के लिए, मान लीजिए कि असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में, $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_r$. तब $o(\sigma)$ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ की लंबाइयों का लघुतम समापवर्त्य (l.c.m) है।

उपपत्ति: E11 में आप सिद्ध कर चुके हैं कि लंबाई p वाले चक्र की कोटि p होती है। अब, $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ लीजिए, जहाँ σ_1 और σ_2 क्रमशः लंबाइयों r और s वाले असंयुक्त चक्र हैं। इस प्रकार, $o(\sigma_1) = r$ तथा $o(\sigma_2) = s$. मान लीजिए $o(\sigma) = t$ तथा $\text{l.c.m}\,(r, s) = m$.

क्योंकि $r|m$ और $s|m$, इसलिए $\sigma_1^m = I = \sigma_2^m$.

$\therefore \sigma^m = \sigma_1^m\sigma_2^m$, क्योंकि $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

$= I.$

क्योंकि $t = o(\sigma)$, इसलिए t/m. ...(2)

साथ ही, $I = \sigma^t = \sigma_1^t\sigma_2^t$, इसलिए $\sigma_1^t = \sigma_2^{-t} = (\sigma_2^{-1})^t$.

क्योंकि σ_1 और σ_2 असंयुक्त हैं, इसलिए σ_1 और σ_2^{-1} भी असंयुक्त हैं, तथा इसी लिए, σ_1^t और σ_2^{-t} असंयुक्त हैं। इस प्रकार, ये बराबर तभी हो सकते हैं, जब $\sigma_1^t = I = \sigma_2^{-t}$ हो।

अतः, $r|t$ और $s|t$.

इस प्रकार, $m|t$. ...(3)

(2) और (3) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $m = t$.

आइए अब गुणनफल में असंयुक्त चक्रों की संख्या पर आगमन का नियम लागू करें।

यदि σ एक चक्र है, या 2 चक्रों का गुणनफल है, तो आप देख चुके हैं कि प्रमेय सत्य है।

मान लीजिए कि यह प्रमेय उन सभी क्रमचयों के लिए सत्य है जो $(r-1)$ चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखे जाते हैं।

अब, मान लीजिए $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_r$, r असंयुक्त चक्रों का गुणनफल है। तब, $\sigma = \rho\sigma_r$, जहाँ $\rho = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{r-1}$.

अतः, $o(\rho) = m = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r-1}$ की लंबाइयां क्रमशः $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r$ का l.c.m है।

अब, मान लीजिए σ_r की लंबाई ℓ_r है तथा $o(\sigma) = t$.

तब, जैसा कि ऊपर $r = 2$ की स्थिति में था, आप दर्शा सकते हैं कि
$t = \text{l.c.m}(m, \ell_r) = \text{l.c.m}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r).$

अतः, प्रमेय का कथन r असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के लिए सत्य है।

इस प्रकार, आगमन नियम द्वारा, प्रमेय व्यापक रूप में सत्य है। ■

प्रमेय 4 के उपयोग से आप S_n में अवयवों की कोटियाँ सरलता से ज्ञात कर सकते हैं। आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 4: S_{10} में $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ की कोटि ज्ञात कीजिए।

हल: ध्यान दीजिए कि $\sigma = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 5)(4\ 6)$.

इस प्रकार, $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$, $\ell(\sigma_1) = 4$, $\ell(\sigma_2) = 2 = \ell(\sigma_3)$, जहाँ $\ell(\sigma) =$ लम्बाई (σ).

अतः, $o(\sigma) = \text{l.c.m}(4, 2, 2) = 4$.

***

आप देख सकते हैं कि किस प्रकार चक्र वियोजन S_n के अवयव की कोटि ज्ञात करने की प्रक्रिया को सरल बना देता है। इसके अलावा, यह निरूपण S_n के क्रमचय का एक सुंदर निरूपण भी है।

अब, एक चक्र, या असंयुक्त चक्रों के गुणनफल, के एक महत्वपूर्ण गुण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 5(i) दर्शाता है कि **एक r-चक्र का संयुग्मी एक r-चक्र होता है। उदाहरण 5 (ii) बताता है कि संयुग्मता क्रमचय की चक्र संरचना को बनाए रखता है।**

उदाहरण 5: इकाई 6 से आप जानते हैं कि $\alpha, \beta \in S_n$ संयुग्मी होते हैं यदि $\exists\ \sigma \in S_n$ s.t. $\alpha = \sigma\beta\sigma^{-1}$. $\sigma \in S_n$ के लिए, दर्शाइए कि

i) यदि S_n में $\beta = (x_1\ x_2 \ldots x_r)$, तो

$\sigma\beta\sigma^{-1} = (\sigma(x_1)\ \sigma(x_2)\ldots\sigma(x_r))$.

ii) यदि S_n $\rho = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_s$ में असंयुक्त चक्रों का गुणनफल है, तो S_n में $\sigma\rho\sigma^{-1} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s$ असंयुक्त चक्रों का गुणनफल है, जहाँ लंबाई $(\alpha_i) =$ लंबाई $(\sigma_i)\ \forall\ i = 1,\ldots,s$.

हल: i) ध्यान दीजिए $\sigma\beta\sigma^{-1}(\sigma(x_i)) = \sigma\beta(x_i) = \sigma(x_{i+1})\ \forall\ i = 1,\ldots,r$, $x_{r+1} = x_1$ लेते हुए।

साथ ही, मान लीजिए $y \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_r)\}$.

तब, $y = \sigma(z)$, किसी $z \neq x_i$ के लिए, $\forall\ i = 1,\ldots,r$ के लिए है, क्योंकि σ $\{1,\ldots,n\}$ का एक एकैकी फलन है।

अतः, $\sigma\beta\sigma^{-1}(y) = \sigma\beta\sigma^{-1}(\sigma(z)) = \sigma(z)$, क्योंकि $\beta(z) = z$.

$\therefore \sigma\beta\sigma^{-1} = (\sigma(x_1)\ \sigma(x_2)\ldots\sigma(x_r))$, जो लंबाई r वाला चक्र है।

ii) मान लीजिए कि असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में $\rho = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_s$. तब, उदाहरण 29, इकाई 8 से, आप जानते हैं कि σ द्वारा संयुग्मता आंतर स्वाकारिता f_σ है।

$$\therefore \sigma\rho\sigma^{-1} = (\sigma\sigma_1\sigma^{-1})(\sigma\sigma_2\sigma^{-1})\ldots(\sigma\sigma_s\sigma^{-1}) \qquad \ldots(4)$$

साथ ही, (i) द्वारा, $\sigma\sigma_i\sigma^{-1}$ केवल उसे गतिमान करता है जिसे σ_i गतिमान करता है।

अतः, S_n (4) $\sigma\rho\sigma^{-1}$ का असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में निरूपण है, जहाँ लंबाई $(\sigma\sigma_i\sigma^{-1}) =$ लंबाई (σ_i) ।

***

जो उदाहरण 5 में सिद्ध किया गया है वह बहुत उपयोगी है, तथा इस इकाई में इसका उपयोग अनेक बार किया जाएगा।

कुछ संबंधित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E12) $o(\sigma)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 7 & 9 & 2 & 10 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$.

E13) ऐसे चक्रों σ_1 और $\sigma_2 \in S_n$ का उदाहरण दीजिए, जहाँ $o(\sigma_1\sigma_2) \neq \text{l.c.m}(\ell(\sigma_1), \ell(\sigma_2))$. क्या इससे प्रमेय 4 असत्य हो जाता है? क्यों, या क्यों नहीं?

E14) यदि $\sigma \in S_n$, तो क्या $o(\sigma) \leq n$ अवश्य होना चाहिए? क्या $o(\sigma) | n$ अवश्य होना चाहिए? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

अब, आइए पक्षांतरणों की चर्चा करें। S_5 में चक्र $(1\,5\,3)$ पर विचार कीजिए। आपको इसका सत्यापन करना चाहिए कि यह गुणनफल $(1\,3)(1\,5)$ के समान है। आपको इसका भी सत्यापन करना चाहिए कि $(1\,5\,3) = (1\,5)(5\,3)$. ध्यान दीजिए कि दोनों गुणनफलों में पक्षांतरण असंयुक्त नहीं हैं।

इसी प्रक्रिया को यह दर्शाने के लिए उपयोग किया जा सकता है कि **कोई भी r-चक्र $(i_1\ i_2 \ldots i_r) = (i_1\ i_r)\,(i_1\, i_{r-1}) \ldots (i_1\ i_2)$, पक्षांतरणों का एक गुणनफल।**

साथ ही, $(i_1\ i_2 \ldots i_r) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3) \ldots (i_{r-1}\ i_r)$, पुनः पक्षांतरणों **का गुणनफल।**

ध्यान दीजिए कि क्योंकि पक्षांतरण असंयुक्त नहीं हैं, इसलिए ये क्रमविनिमय नहीं करते हैं (देखिए E16)। आगे, जैसा आप ऊपर देख चुके हैं, एक चक्र का पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में निरूपण अद्वितीय नहीं होता है।

पक्षांतरणों के महत्व की चर्चा करने से पहले, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E15) S_5 में निम्नलिखित चक्रों को पक्षांतरणों के गुणनफलों के रूप में लिखिए।

i) $(1\ 3\ 4)$, ii) $(4\ 3\ 1)$, iii) $(2\ 4\ 5\ 3)$.

E16) दर्शाइए कि किन्हीं तीन अलग प्रतीकों i, j, k के लिए, $S_n, n \geq 3$, में $(i\ j)(j\ k) \neq (j\ k)(i\ j)$.

अब आइए किसी क्रमचय के चक्र वियोजन का उपयोग एक ऐसे परिणाम को सिद्ध करने के लिए करें जो दर्शाता है कि क्रमचयों के सिद्धांत में पक्षांतरण इतने महत्वपूर्ण क्यों है।

प्रमेय 5: $n \geq 2$ के लिए S_n में प्रत्येक क्रमचय को पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

उपपत्ति: प्रमेय 3 द्वारा आप जानते हैं कि प्रत्येक क्रमचय एक या अधिक असंयुक्त चक्रों का गुणनफल होता है। साथ ही, आपने अभी देखा कि प्रत्येक चक्र पक्षांतरणों का एक गुणनफल होता है। अतः, प्रत्येक क्रमचय एक या अधिक पक्षांतरणों का एक गुणनफल होता है।

ध्यान दीजिए कि $I=(1\ 2)(1\ 2)$. इस प्रकार, I भी पक्षांतरणों का गुणनफल है। ■

आइए एक उदाहरण द्वारा देखें कि प्रमेय 5 व्यवहारिक रूप से किस प्रकार कार्य करता है।

उदाहरण 6: $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 7\end{pmatrix}$ को पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

हल: $\sigma=(1\ 3\ 4)(2\ 6\ 5)$, असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में।

$=(1\ 4)(1\ 3)(2\ 5)(2\ 6)$.

***

यहाँ निम्नलिखित महत्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 3: ध्यान दीजिए कि यदि पक्षातंरणों के गुणनफल के रूप में, $\sigma=\tau_1\tau_2\ldots\tau_t$, तो आप यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते कि $o(\sigma)=2$. प्रमेय 4 यहाँ लागू नहीं किया जा सकता है। यह प्रमेय केवल असंयुक्त चक्र वियोजन के लिए लागू होता है, तथा यहाँ τ_i असंयुक्त नहीं हैं।

अब, प्रमेय 5 में आप देख चुके हैं कि **S_n में पक्षांतरणों का समुच्चय S_n को जनित करता है।** वस्तुतः इससे छोटा एक समुच्चय S_n को जनित करता है। इकाई 4 से याद कीजिए कि समुच्चय S किसी समूह G को जनित करता है, यदि G का प्रत्येक अवयव $s_1^{r_1}s_2^{r_2}\ldots s_n^{r_n}$ के रूप का है, जहाँ $s_i\in S$ तथा $r_i\in\mathbb{Z}$.

प्रमेय 6: S_n को $\{(1\ 2),(1\ 3),\ldots,(1\ n)\}$ जनित करता है।

उपपत्ति: प्रमेय 5 से आप जानते है कि कोई भी $\sigma\in S_n$ पक्षांतरणों का गुणनफल होता है। अब, कोई भी पक्षांतरण $(i\ j)\in S_n$ लीजिए। तब, $(i\ j)=(1\ i)(1\ j)(1\ i)$.

अतः, कोई भी $\sigma\in S_n$ किन्हीं $\in\{1,\ldots,n\}$ के लिए, $(1\ r)$ के रूप के पक्षांतरणों का गुणनफल है।

इस प्रकार, S_n को $\{(1\ 2),(1\ 3),\ldots,(1\ n)\}$ जनित करता है। ■

वस्तुतः, प्रमेय 6 में दिए समुच्चय से छोटा समुच्चय, यानी $\{(1\ 2),(1\ 2\ldots n)\}$ भी $n\geq 3$ के लिए, S_n को जनित करता है। परंतु, यहाँ हम इसे सिद्ध नहीं करेंगे।

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E17) E8(ii) में दिए क्रमचयों को पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

E18) $(1\ 3\ 4)(5\ 7)(2\ 6\ 8)\in S_8$ को $(1\ i)$, जहाँ $i\in\{1,\ldots,8\}$ के रूप के पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

E19) दर्शाइए कि $(1\ 2)(2\ 3)\ldots(9\ 10)=(1\ 10)(1\ 9)\ldots(1\ 2)$.

E20) क्या S_n में सभी पक्षांतरणों का समुच्चय S_n का एक उपसमूह है? क्यों, या क्यों नहीं?

प्रमेय 5 में दिया गया वियोजन हमें S_n के एक ऐसे विशेष महत्वपूर्ण उपसमूह की ओर ले जाता है जिसकी अब हम चर्चा करेंगे।

9.4 एकांतर समूह

आप देख चुके हैं कि S_n में किसी भी क्रमचय को पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। आप यह भी देख चुके हैं कि इस गुणनफल में गुणनखंड अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं होते हैं। केवल यही नहीं, गुणनफल में गुणनखंडों की संख्या तक में अंतर हो सकता है। उदाहरणार्थ, S_4 में $(1\ 2)(3 4)(1\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 4)(3\ 2)$. यहाँ LHS में 3 पक्षांतरण हैं तथा RHS में 5 पक्षांतरण हैं। क्या RHS में 4, या 6, पक्षांतरण हो सकते हैं? ऐसा कोई निरूपण ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

वास्तव में, पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में सभी निरूपणों में एक बात देखने को मिलती है – यदि S_n को कोई क्रमचय ऐसे एक निरूपण में पक्षांतरणों का विषम संख्या में गुणनफल है, तो वह ऐसे किसी भी निरूपण में पक्षांतरणों का विषम संख्या में गुणनफल होगा। इसी प्रकार, यदि $f \in S_n$ एक निरूपण में पक्षांतरणों का सम संख्या में गुणनफल है, तो f ऐसे किसी भी निरूपण में पक्षांतरणों का सम संख्या में गुणनफल होगा। इस बात को देखने के लिए, हमें सर्वप्रथम एक संकल्पना को परिभाषित करने की आवश्यकता है।

$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$

परिभाषाः $f \in S_n (n \geq 2)$ के **चिह्नक (signature)** को

$$\textbf{sign f} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{f(j)-f(i)}{j-i}$$ से परिभाषित करते हैं।

उदाहरणार्थ, $f = (1\ 2\ 3) \in S_3$ के लिए,

$$\text{sign} f = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \cdot \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \cdot \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

$$= \left(\frac{3-2}{1}\right)\left(\frac{1-2}{2}\right)\left(\frac{1-3}{1}\right) = 1.$$

इसी प्रकार, यदि $f = (1\ 2) \in S_3$, तो f का चिह्नक प्राप्त करने के लिए, हमें $f(3)$ से संबद्ध गुणनखंडों को भी शामिल करना होगा।

अतः, $\text{sign } f = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} . \frac{f(3)-f(1)}{3-1} . \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$ (ध्यान दीजिए कि यहाँ $f(3) = 3$।)

$$= \left(\frac{1-2}{1}\right)\left(\frac{3-2}{2}\right)\left(\frac{3-1}{1}\right) = -1.$$

अब, क्रमचय के चिह्नक के आदी होने के लिए, आप कुछ सरल प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E21) $I \in S_n$ का चिह्नक क्या है?

E22) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$ का चिह्नक ज्ञात कीजिए।

अभी तक जो आपने उदाहरण देखे हैं, उनसे आपने शायद यह निष्कर्ष निकाल लिया होगा कि चिह्नक S_n से $\mathbb{Z}$ तक एक फलन है। आप देखेंगे कि यह वास्तव में S_n से $(\{1, -1\}, \cdot)$ तक एक समाकारिता है। आइए सर्वप्रथम दर्शाएं कि sign संक्रिया को बनाए रखता है।

प्रमेय 7: $\text{sign}: S_n \to \mathbb{Q}^*$ एक सुपरिभाषित समाकारिता है, जहाँ $n \geq 2$.

उपपत्ति: परिभाषा द्वारा, यदि $f, g \in S_n$ s.t. $f = g$, तो $f(i) = g(i) \ \forall \ i = 1, \ldots, n.$

$\therefore$ $\mathbb{Q}^*$ में $\text{sign} f = \text{sign } g.$

इस प्रकार, sign सुपरिभाषित है।

आगे, sign $(f \circ g) = \prod\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{f(g(j)) - f(g(i))}{j - i}$

$$= \prod_{\substack{i,j \\ i<j}} \frac{f(g(j)) - f(g(i))}{g(j) - g(i)} \cdot \prod_{\substack{i,j \\ i<j}} \frac{g(j) - g(i)}{j - 1}. \qquad \ldots(5)$$

अब, जैसे जैसे i और j, 1 से n तक भिन्न-भिन्न मानों के सभी संभव युग्मों को ग्रहण करते हैं, वैसे वैसे $g(i)$ और $g(j)$ भी ऐसा ही करते हैं, क्योंकि g एकैकी आच्छादक फलन है। इसलिए, f को $\{g(1), \ldots, g(n)\}$ का एक क्रमचय माना जा सकता है।

$$\therefore \prod_{i<j} \frac{f(g(j)) - f(g(i))}{g(j) - g(i)} = \text{sign} f.$$

$\therefore$ (5) हमें बताता है कि $\text{sign } (f \circ g) = (\text{sign } f) \ (\text{sign } g).$ ■

प्रमेय 7 द्वारा, हम जानते हैं कि, उदाहरणार्थ,

$\text{sign}(1\ 2\ 3\ 4) = \ \text{sign}((1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)) \ \text{sign}\ (1\ \ 2) \cdot \ \text{sign}\ (2\ \ 3) \cdot \ \text{sign}\ (3\ \ 4).$

आप शायद सोच हैं कि $\text{sign}(1\ 2\ 3\ 4)$ प्राप्त करने की यह विधि इसे प्रत्यक्ष विधि से ज्ञात करने की तुलना में अधिक लंबी है। परंतु निम्नलिखित प्रमेय, और प्रमेय 7, हमें चिह्नक फलन के ऐसे गुण बताते हैं जो इस प्रक्रिया को छोटा कर देते हैं। निस्संदेह, हमें इस सभी में प्रमेय 5 की अति महत्त्वपूर्ण भूमिका को भूलना नहीं चाहिए।

प्रमेय 8: $\text{sign}: S_n \to \mathbb{Q}^*, n \geq 2,$ पर विचार कीजिए।

i) यदि $t \in S_n$ एक पक्षांतरण है, तो $\text{sign}\, t = -1.$

ii) $\text{Im (sign)} = \{1, -1\}.$

उपपत्ति: i) मान लीजिए $t = (p\ q),$ जहाँ $1 \leq p < q \leq n.$ [आपको उपपत्ति को समझने में सहायता के लिए, इसे पढ़ते समय आप साथ-साथ $(1\ 2) \in S_n$ को $(p\ q)$ मानकर कार्य कर सकते हैं।,

अब, $\text{sign}\, t$ के केवल एक गुणनखंड में p और q दोनों आते हैं, अर्थात्

$$\frac{t(q)-t(p)}{q-p} = \frac{p-q}{q-p} = -1. \quad \text{...(6)}$$

$\text{sign}\, t$ का प्रत्येक गुणनखंड, जिसमें p या q नहीं आता है, 1 के बराबर है, क्योंकि $\frac{t(i)-t(j)}{i-j} = \frac{i-j}{i-j} = 1$, यदि $i, j \neq p, q$. ...(7)

शेष गुणनखंडों में या तो p होता है या q होता है, परंतु दोनों नहीं होते। इनके युग्म बना कर हमें निम्नलिखित गुणनफल में से एक गुणनफल प्राप्त होता है:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{t(i)-t(p)}{i-p}\frac{t(i)-t(q)}{i-q} = \frac{i-q}{i-p}\frac{i-p}{i-q} = 1, \text{ यदि } i > q,\\
&\frac{t(i)-t(p)}{i-p}\frac{t(q)-t(i)}{q-i} = \frac{i-q}{i-p}\frac{p-i}{q-i} = 1, \text{ यदि } q > i > p,\\
&\frac{t(p)-t(i)}{p-i}\frac{t(q)-t(i)}{q-i} = \frac{q-i}{p-i}\frac{p-i}{q-i} = 1, \text{ यदि } i < p.
\end{aligned}\right\} \text{...(8)}$$

इस प्रकार, (6), (7), और (8) से $\text{sign}\, t$ के सभी गुणनखंडों के मानों को लेने पर, आप देख सकते हैं कि $\text{sign}\, t = -1$.

ii) मान लीजिए $f \in S_n$. प्रमेय 5 से आप जानते हैं कि $f = t_1 t_2 \dots t_r$, S_n में किन्हीं पक्षांतरणों $t_1, \dots, t_r$ के लिए।

$\therefore \text{sign}\, f = \text{sign}(t_1\, t_2 \dots t_r)$

$= (\text{sign}\, t_1)\,(\text{sign}\, t_2) \dots (\text{sign}\, t_r)$ है, प्रमेय 7 द्वारा।

$= (-1)^r$, उपरोक्त (ii) द्वारा।

$\therefore \text{sign}\, f = 1$ या -1, जो इस पर निर्भर है कि r सम है या विषम है।

अतः, $\text{Im (sign)} \subseteq \{1, -1\}$.

आप यह भी जानते हैं कि किसी भी पक्षांतरण t के लिए, $\text{sign}\, t = -1$, तथा $\text{sign}\, I = 1$.

$\therefore \{1, -1\} \subseteq \text{Im (sign)}$.

$\therefore \text{Im (sign)} = \{1, -1\}$. ■

अतः, प्रमेय 7 और 8 हमें बताते हैं कि $n \geq 2$ के लिए,
$\text{sign}: S_n \to \{1, -1\}$ एक आच्छादक समाकारिता है।

अब, हम उसे सिद्ध करने की स्थिति में, जिसके बारे में हमने इस भाग के प्रारंभ में कहा था।

प्रमेय 9: मान लीजिए $f \in S_n$ तथा $f = t_1 t_2 \dots t_r = t'_1\, t'_2 \dots t'_s$ फलन f के पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में दो गुणनखंडन हैं। तब, या तो r और s दोनों सम पूर्णांक हैं, या दोनों विषम पूर्णांक हैं।

उपपत्तिः आइए फलन $\text{sign}: S_n \to \{1, -1\}$ को $f = t_1 t_2 \dots t_r$ पर लागू करें। प्रमेय 8 से आप जानते हैं कि

$$\text{sign } f = (\text{sign } t_1)\,(\text{sign } t_2)\dots(\text{sign } t_r) = (-1)^r. \qquad \dots(9)$$

साथ ही, $f = t'_1 t'_2 \dots t'_s$.

इसलिए, $\text{sign } f = (-1)^s.$ ...(10)

(9) और (10) से हम $(-1)^r = (-1)^s$ प्राप्त करते हैं।

यह तभी हो सकता है, जब s और r दोनों सम हों या दोनों विषम हों। ■

इस तरह f के पक्षांतरणों वाले किसी भी गुणनखंडन में गुणनखंडों की संख्या हमेशा या तो सम होगी, या हमेशा विषम होगी।

उपरोक्त प्रमेय हमें निम्नलिखित परिभाषा तक ले जाती है।

परिभाषाः क्रमचय $f \in S_n$ **सम (even)** कहलाता है यदि इसे सम संख्या वामें पक्षांतरणों के एक गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। f **विषम (odd)** कहलाता है, यदि इसे विषम संख्या में पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरणार्थ, $(1\ 2) \in S_3$ एक विषम क्रमचय है। वस्तुतः, कोई भी पक्षांतरण एक विषम क्रमचय होता है। दूसरी ओर, कोई भी 3-चक्र एक सम क्रमचय होता है, क्योंकि $(i\ j\ k) = (i\ k)(i\ j)$. अतः, $\text{sign } (i\ j\ k) = (-1)(-1) = 1.$

इस संदर्भ में निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 4: प्रमेय 8 और 9 हमें बताते हैं कि $f \in S_n$ विषम है iff $\text{sign } f = (-1)$. इस प्रकार, $f \in S_n$ सम है iff $\text{sign} f = 1$.

अब, आपके लिए विषम और सम क्रमचयों के साथ कार्य करने का एक अवसर है।

E23) E15 और E18 में कौन-से क्रमचय विषम हैं?

E24) यदि $f, g \in S_n$ विषम हैं, तो क्या $f \circ g$ भी विषम होगा? क्यों?

E25) तत्समक क्रमचय विषम है या सम है? क्यों?

अब, हम S_n के एक महत्वपूर्ण उपसमुच्चय, अर्थात् $\mathbf{A_n} = \{f \in S_n \mid f \text{ सम है}\}$ पर विचार करेंगे। आप देखेंगे कि $A_n \triangleleft S_n$.

प्रमेय 10: S_n में सम क्रमचयों का समुच्चय A_n कोटि $\dfrac{n!}{2}$ वाला S_n का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

उपपत्तिः आप पहले ही देख चुके हैं कि चिह्नक फलन, $\text{sign}: S_n \to \{1, -1\}$ एक आच्छादक समाकारिता है।

अब, $\text{Ker}(\text{sign}) = \{f \in S_n \mid \text{sign } f = 1\}$

$$= \{f \in S_n \mid f \text{ सम है}\}$$

$$= A_n.$$

इस प्रकार, $A_n \triangleleft S_n$.

साथ ही, समाकारिता के मूल प्रमेय द्वारा,

$(S_n/A_n) \simeq \{1, -1\}$.

$\therefore o(S_n/A_n) = 2$, अर्थात् $\dfrac{o(S_n)}{o(A_n)} = 2.$

$\therefore o(A_n) = \dfrac{o(S_n)}{2} = \dfrac{n!}{2}.$ ■

प्रमेय 10 से जुड़ी निम्नलिखित महत्वपूर्ण टिप्पणियों पर ग़ौर करें।

टिप्पणी 5: ध्यान दीजिए कि प्रमेय 10 हमें बताता है कि

i) **S_n में सम क्रमचयों की संख्या S_n में विषम क्रमचयों की संख्या के बराबर होती है, और**

ii) S_n में A_n के केवल दो सहसमुच्चय हैं — A_n और σA_n, जहाँ σ, S_n में कोई भी विषम क्रमचय है। इस प्रकार,

$S_n = A_n \cup (1\ 2)A_n$.

प्रमेय 10 हमें निम्नलिखित परिभाषा तक पहुँचाती है।

परिभाषा: S_n में सम क्रमचयों का समूह **A_n घात n वाला एकांतर समूह (alternating group of degree n) कहलाता है।**

आइए देखें कि A_3 के अवयव क्या हैं। प्रमेय 10 बताता है कि $o(A_3) = \dfrac{3!}{2} = 3.$

चूंकि $(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$, इसलिए $(1\ 2\ 3) \in A_3$. इसी प्रकार, $(1\ 3\ 2) \in A_3$. निस्संदेह, $I \in A_3$. साथ ही, $(1\ 2) \notin A_3$. इसी प्रकार, $(2\ 3)$ और $(1\ 3)$ भी A_3 में नहीं हैं।

$\therefore A_3 = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

पिछली इकाइयों के अनेक उदाहरणों में आप S_3 के इस उपसमूह से परिचित हैं।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए।

E26) सिद्ध कीजिए कि एक r-चक्र विषम होता है यदि r सम है, तथा सम होता है यदि r विषम है।

E27) A_4 के सभी अवयवों को लिखिए। क्या A_4 आबेली है? क्यों?

E28) S_5/A_5 के दोनों अवयव दीजिए।

E29) जाँच कीजिए कि $n \geq 3$ के लिए, S_n में सभी विषम क्रमचयों से S_n का एक उपसमूह बनता है या नहीं।

अब, एक क्षण के लिए आइए इकाई 5 और लग्रांज के प्रमेय पर वापस जाएँ। इस प्रमेय के अनुसार परिमित समूह के उपसमूह की कोटि उस समूह की कोटि को विभाजित

करती है। परंतु, वहाँ हमने यह दर्शाने के लिए कोई उदाहरण नहीं दिया था कि इसका विलोम क्यों सत्य नहीं है। अब क्योंकि आप A_4 से परिचित हो गए हैं, इसलिए हम विलोम को असिद्ध करने की स्थिति में हैं।

परिमित समूहों के लिए लग्रांज के प्रमेय का विलोम सत्य नहीं है।

उदाहरण 7: दर्शाइए कि $6 | o(A_4)$, परंतु A_4 का कोटि 6 वाला कोई उपसमूह नहीं है।

हल: मान लीजिए, यदि संभव हो, कि A_4 का कोटि 6 वाला एक उपसमूह H है। तब, $o(H) = 6$ और $(A_4) = 12$. $\therefore |A_4 : H| = 2$. $\therefore H \triangleleft A_4$.
(देखिए प्रमेय 2, इकाई 6)।

इस प्रकार, A_4/H कोटि 2 वाला एक विभाग समूह है, और इसी लिए यह चक्रीय है। मान लीजिए $A_4/H = < Hg >$.

तब, $(Hg)^2 = H \ \forall \ g \in A_4$. (याद कीजिए कि A_4/H का तत्समक H है।)

$\therefore g^2 \in H \ \forall \ g \in A_4$.

क्योंकि $(1\ 2\ 3) \in A_4$, इसलिए $(1\ 2\ 3)^2 = (1\ 3\ 2) \in H$.

इसी प्रकार, $(1\ 3\ 2)^2 = (1\ 2\ 3) \in H$.

इसी तर्क के प्रयोग से, A_n में सभी 3-चक्र H में हैं।

इस प्रकार, $(1\ 4\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3), (1\ 3\ 4), (2\ 3\ 4)$ और $(2\ 4\ 3)$ भी H के भिन्न-भिन्न अवयव हैं। निस्संदेह, $I \in H$.

इस प्रकार, H में कम से कम 9 अवयव हैं।

$\therefore o(H) \geq 9$. यह हमारी परिकल्पना कि $o(H) = 6$, का अंतर्विरोध करता है।

अतः, A_4 का कोटि 6 वाला कोई उपसमूह नहीं है।

***

हम एक अन्य प्रतिउदाहरण पाने के लिए भी A_4 का उपयोग करेंगे। (देखा, A_4 कितना उपयोगी है!)। इकाई 6 में आपने सीखा था कि यदि $H \triangleleft N$ और $N \triangleleft G$, तो G में H का प्रसामान्य होना आवश्यक नहीं है। तो लीजिए, यहाँ एक प्रश्न के रूप में आपके लिए एक उदाहरण है (देखिए E30)।

'$\triangleleft$' एक संक्रामक संबंध नहीं है।

E30) A_4 का उपसमुच्चय $V_4 = \{I, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3)(2\ 4)\}$ लीजिए। दर्शाइए कि $V_4 \triangleleft A_4$. यह भी दर्शाइए कि V_4 का $H = \{I, (1\ 2)(3\ 4)\}$ एक प्रसामान्य उपसमूह है, परंतु $H \ntriangleleft A_4$.

(इस तरह, हम पाते हैं कि $H \triangleleft V_4$.और $V_4 \triangleleft A_4$, परंतु $H \ntriangleleft A_4$.)

E31) A_5 में निम्नलिखित कोटि के कितने अवयव हैं?

i) 2 ii) 3 iii) 5 iv) 15

अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

अब, आइए A_n के लिए एक जनक समुच्चय ज्ञात करें। आप पहले ही देख चुके हैं कि S_n को $S=\{(1\ i)|2\leq i\leq n\}$ जनित करता है। क्योंकि A_n में कोई पक्षांतरण नहीं है, इसलिए $S\cap A_n=\varnothing$. अतः, A_n के लिए जनक समुच्चय क्या हो सकता है, स्वयं समुच्चय A_n के अलावा?

प्रमेय 11: $n\geq 3$ के लिए, S_n में सभी 3-चक्रों का समुच्चय A_n, को जनित करता है।

उपपत्ति: मान लीजिए कि S_n में 3-चक्रों का समुच्चय S है। क्योंकि कोई भी 3-चक्र एक सम क्रमचय होता है, इसलिए $<S>\subseteq A_n$.

अब, प्रमेय 6 में आप देख चुके हैं कि S_n को $\{(1\ i)|1<i\leq n\}$ जनित करता है। अतः, मान लीजिए $\sigma\in A_n$. तब, $\sigma\in S_n$.

अतः, $\sigma=(1\ i_1)(1\ i_2)\dots(1\ i_r)$, जहाँ i_j ओं का भिन्न-भिन्न होना आवश्यक नहीं है। परंतु, किसी $m\in\mathbb{N}$ के लिए, $r=2m$, क्योंकि $\sigma\in A_n$.

साथ ही, यदि $i_j=i_{j+1}$, तो $(1\ i_j)(1\ i_{j+1})=I$.

अतः, आइए मान लें कि $i_j\neq i_{j+1}\ \forall\ j=1,\dots,r-1$.

अब, $(1\ i_1)(1\ i_2)=(1\ i_2\ i_1)$.

इसी प्रकार, $(1\ i_3)(1\ i_4)=(1\ i_4\ i_3)$.

इस विधि से बगल के पक्षांतरणों की जोड़ियों को लेते हुए, हम $(1\ i\ j), i, j=2,\dots,n, i\neq j$ के रूप के m 3-चक्रों के गुणनफल के रूप में σ को प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, $\sigma\in<S>$.

$\therefore A_n=<S>$. ■

आइए प्रमेय 11 के एक अनुप्रयोग पर विचार करें।

उदाहरण 8: मान लीजिए $H\lhd A_n, n\geq 3$ के लिए, तथा मान लीजिए $(1\ 2\ 3)\in H$. दर्शाइए कि $(1\ 3\ 2)\in H$. साथ ही, दर्शाइए कि $i\in\{1, 2,\dots,n\}\setminus\{1, 3\}$ के लिए, $(1\ i\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ 3\ i)\in H$.

हल: क्योंकि $(1\ 3\ 2)=(1\ 2\ 3)^{-1}$ तथा $H\leq A_n$, इसलिए $(1\ 3\ 2)\in H$. आगे, $(1\ i\ 3)\in A_n$ तथा $H\lhd A_n$. अतः,

$$(1\ i\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ i\ 3)^{-1}=(1\ i\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ 3\ i)\in H.$$

***

अब, एक ऐसे प्रश्न को हल कीजिए, जिसकी आवश्यकता हमें प्रमेय 11 के एक महत्वपूर्ण उपप्रमेय को सिद्ध करने के लिए पड़ेगी।

E32) मान लीजिए $H\lhd A_n, n\geq 3$, तथा $(1\ 2\ 3)\in H$. निम्नलिखित परिकलित कीजिए:

i) $(1\ i\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ 3\ i)$,

ii) $(j\ 1\ i)(1\ i\ 2)(j\ i\ 1)$,

iii) $(1\ 2\ k)(j\ 2\ i)(1\ k\ 2)$,

जहाँ $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ भिन्न-भिन्न हैं तथा इस प्रकार हैं कि उपरोक्त गुणनफलों में सभी 3-चक्र परिभाषित हैं।

दर्शाइए कि ऊपर आपके द्वारा परिकलित सभी अवयव H में हैं। इसी से दर्शाइए कि $H = A_n$.

अब, आइए प्रमेय 11 के एक उपप्रमेय को सिद्ध करने के लिए E32 का उपयोग करें।

उपप्रमेय 1: मान लीजिए $H \triangleleft A_n, n \geq 3$. यदि H में एक 3-चक्र है, तो $H = A_n$.

उपपत्ति: उदाहरण 5 से आप जानते हैं कि 3-चक्र का प्रत्येक संयुग्मी एक 3-चक्र होता है, तथा संयुग्मता A_n की संक्रिया को बनाए रखता है।

अब, मान लीजिए $(i\ j\ k) \in H$ तथा $(r\ s\ t)$ कोई 3-चक्र है। जैसे E32 में किया था, $\sigma_1 = (i\ r\ k), \sigma_2 = (s\ i\ r)$ और $\sigma_3 = (j\ t\ i)$ लेकर, आपको सत्यापन करना चाहिए कि $\sigma_3\sigma_2\sigma_1(i\ j\ k)(\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^{-1} = (r\ s\ t)$.

अतः, $(r\ s\ t) \in H$.

इस प्रकार, सभी 3-चक्र H में हैं। अतः, प्रमेय 11 द्वारा, $H = A_n$. ■

उपरोक्त परिणाम के असर पर विचार कीजिए। यह कहता है कि यदि A_n के किसी भी प्रसामान्य उपसमूह में एक 3-चक्र है, तो यह उपसमूह पूरा A_n ही है। जब हम A_n की सरलता की चर्चा करेंगे, तब आप देखेंगे कि इस प्रमेय का कैसे लागू कर सकते हैं।

$i = 1, 2, 3$ के लिए, A_i सरल है। क्यों? ऐसा है, $A_1 = \{I\}; A_2 = \{I\}$; $A_3 = <(1\ 2\ 3)>$, जो कोटि 3 का है, और इसी लिए सरल है (देखिए इकाई 6)। साथ ही, E30 में आपने देखा था कि A_4 सरल नहीं है। A_5 के बारे में क्या कह सकते हैं? निम्नलिखित प्रमेय इसका उत्तर देता है। यह प्रमेय युवा गणितज्ञ गैलोआ को ज्ञात थी। परंतु, इसकी प्रथम औपचारिक उपपत्ति फ्रॉंसीसी विश्लेषक और बीजगणितज्ञ कमील ज़ोर्दा (Camille Jordan) द्वारा 1870 में दी गई थी।

प्रमेय 12: $n \geq 5$ के लिए, A_n सरल होता है।

उपपत्ति: मान लीजिए $n \geq 5$. मान लीजिए, यदि संभव हो, कि A_n का एक अतुच्छ प्रसामान्य उपसमूह H है।

क्योंकि $H \neq \{I\}$, इसलिए $\exists\, \sigma' \in H, \sigma' \neq I$. ऐसे सभी σ' में से वह $\sigma \in H$ चुनिए जो 1 से n में से सब से कम संख्या में पूर्णांकों को गतिमान करता है, मान लीजिए k पूर्णांकों को σ गतिमान करता है।

सर्वप्रथम, $k \neq 1$, क्योंकि यदि σ एक अवयव को गतिमान करता है, तो उसे कम से कम 2 अवयवों को गतिमान करना होगा क्योंकि यह एक अतत्समक एकैकी आच्छादक फलन है।

परंतु $k \neq 2$, क्योंकि $\sigma \in A_n$, और इसी लिए σ एक पक्षांतरण नहीं हो सकता। यदि $k = 3$, तो σ को एक 3-चक्र होना चाहिए। तब, उपप्रमेय 1 द्वारा, $H = A_n$.

अब, मान लीजिए $k \geq 4$, तथा मान लीजिए, यदि संभव हो, कि $\sigma = (x_1\ x_2 \ldots x_r)\rho$ एक असंयुक्त गुणनफल है, जहाँ $3 \leq r < k$.

अब, हम $\alpha = (x_1\ x_2\ x_3)$ लेते हैं, और $\beta = \sigma^{-1}\alpha\sigma\alpha^{-1}$.

क्योंकि $H \triangleleft A_n$, इसलिए $\alpha\sigma\alpha^{-1} \in H$. अतः, $\beta \in H$.

अब, यदि ρ किसी अवयव को गतिमान करता है, तो उसे कम से कम एक से अधिक अवयवों को गतिमान करना होगा।

मान लीजिए $\rho(x_{r+1}) = y_1 \neq x_{r+1}$ तथा $\rho(x_{r+2}) = y_2 \neq x_{r+2}$, जहाँ x_{r+1}, x_{r+2}, y_1 और y_2. $i = 1, \ldots, r$ के लिए, कोई भी x_i नहीं है।

तब, $\sigma(x_{r+1}) = y_1$ और $\sigma(x_{r+2}) = y_2$.

अब, $\beta(x_{r+1}) = \sigma^{-1}\alpha\sigma\alpha^{-1}(x_{r+1}) = \sigma^{-1}\alpha\sigma(x_{r+1})$, क्योंकि x_{r+1} को α नियत करता है।

$= \sigma^{-1}\alpha(y_1) = \sigma^{-1}(y_1)$, क्योंकि y_1 को α नियत करता है।

$= x_{r+1}$.

साथ ही, $\beta(x_1) = \sigma^{-1}\alpha\sigma(x_3) = \sigma^{-1}\alpha(x_4) = \sigma^{-1}(x_4) = x_3 \neq x_1$.

अतः, $\beta \neq I$.

आगे, σ द्वारा नियत किसी t के लिए, $t \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. अतः, β भी t को नियत करता है।

इसलिए, $\beta \in H$ और β, σ की तुलना में एक अवयव कम गतिमान करता है (क्योंकि $\beta(x_{r+1}) = x_{r+1}$)। यह उस विधि का अंतविर्रोध है जिससे हमने σ का चुनाव किया था। अतः, हमारी परिकल्पना कि σ को हम ऐसे असंयुक्त गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं जिसमें एक गुणनखंड लंबाई ≥ 3 वाला चक्र है, संभव नहीं है।

अतः, अब हमारे पास एक ही संभावना बची है, और वह है कि $k \geq 4$ तथा σ असंयुक्त पक्षांतरणों का गुणनफल है, मान लीजिए

$\sigma = (x_1\ x_2)(x_3\ x_4)\rho$, जहाँ ρ एक सम संख्या में असंयुक्त पक्षांतरणों का गुणनफल है।

अब $\gamma = (x_1\ x_2\ x_3)$ और $\delta = \sigma^{-1}\gamma\sigma\gamma^{-1}$ लीजिए। तब, आपको दर्शाना चाहिए कि क्यों $\delta \in H$. साथ ही, आपको दिखाना चाहिए कि

$\delta = (\sigma^{-1}(x_1)\ \sigma^{-1}(x_2)\ \sigma^{-1}(x_3))(x_3\ x_2\ x_1) = (x_2\ x_1\ x_4)(x_3\ x_2\ x_1) = (x_3\ x_1)(x_2\ x_4)$

अतः, $(x_3\ x_1)(x_2\ x_4) \in H$.

अब, क्योंकि $\mathbf{n \geq 5}$, इसलिए $\{1, 2, \ldots, n\}$ में $\exists\, i \neq x_1, x_2, x_3, x_4$.

मान लीजिए $\mu = (x_1\ x_3\ i)$. तब, $\mu^{-1} = (i\ x_3\ x_1)$.

पुनः आपको दिखाना चाहिए कि $\mu^{-1}\delta\mu\delta \in H$.

अब, $\mu^{-1}\delta\mu\delta = (\mu^{-1}(x_3)\ \mu^{-1}(x_1))(\mu^{-1}(x_2)\ \mu^{-1}(x_4))(x_3\, x_1)(x_2\, x_4)$

$= (x_1\ i)(x_2\ x_4)(x_3\ x_1)(x_2\ x_4)$

$= (x_1\ i)(x_1\ x_3) = (x_1\ x_3\ i)$

$= \mu.$

इस प्रकार, $\mu \in H.$

अतः, $k = 3$ की स्थिति की तरह, $H = A_n.$

अतः, सभी स्थितियों में, यदि $H \triangleleft A_n$, तो $H = \{I\}$ या $H = A_n.$

इस प्रकार, $n \ge 5$ के लिए, A_n सरल है।

आपको शायद उपरोक्त उपपत्ति कुछ उलझी हुई लग सकती है, लेकिन इसका प्रत्येक चरण को स्वयं करते हुए, सावधानीपूर्वक अध्ययन कीजिए।

प्रमेय 12 के उपयोग से हम अब S_n के सभी अतुच्छ प्रसामान्य उपसमूह मालूम कर सकते हैं। आप देख चुके हैं कि $S_1 = \{I\}$, और यह भी कि $S_2 = \{I, (1\ 2)\}$ सरल है। आप यह भी जानते हैं कि S_3 का अतुच्छ प्रसामान्य उपसमूह केवल A_3 है।

आप देख चुके हैं कि S_4 के न्यूनतम दो प्रसामान्य उपसमूह, V_4 और A_4 है।

$n \ge 5$ के लिए, S_n के बारे में क्या कह सकते हैं? आप जानते हैं कि $A_n \triangleleft S_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. क्या कोई अन्य प्रसामान्य उपसमूह भी हैं, जैसे S_4 में हैं? निम्नलिखित परिणाम पर विचार कीजिए।

प्रमेय 13: $\forall\ n \ge 5$, S_n का अतुच्छ उचित प्रसामान्य उपसमूह केवल A_n है।

उपपत्ति: $n \ge 5$ के लिए, मान लीजिए S_n का H एक अतुच्छ प्रसामान्य उपसमूह है। तब, $H \cap A_n \triangleleft A_n.$

अतः, प्रमेय 12 द्वारा, $H \cap A_n = \{I\}$ या $H \cap A_n = A_n.$

यदि $H \cap A_n = A_n$, तो $A_n \subseteq H \subseteq S_n.$

अतः, $(H/A_n) \triangleleft (S_n/A_n)$ तथा $o(S_n/A_n) = 2.$

इसलिए, $(H/A_n) = \{I\}$ या $(H/A_n) = (S_n/A_n).$

इस प्रकार, $H = A_n$ या $H = S_n.$

यदि $H \cap A_n = \{I\}$, तो H का I के अतिरिक्त कोई सम क्रमचय नहीं होगा।

अतः, यदि $\sigma \in H, \sigma \ne I$, तो σ एक विषम क्रमचय है।

अब, मान लीजिए H के दो अलग अतुच्छ अवयव σ_1 और σ_2 हैं। तब, ये दोनों विषम हैं। इसलिए $\sigma_1\sigma_2$ सम होगा। साथ ही, $\sigma_1\sigma_2 \in H$, क्योंकि $H \le S_n.$

अतः, $\sigma_1\sigma_2 \in H \cap A_n = \{I\}.$

इस प्रकार, $\sigma_2 = \sigma_1^{-1}$. अतः, $H = <\sigma_1>$, जहाँ $o(\sigma_1) = 2.$ मान लीजिए $\sigma_1 = (i\ j).$

क्योंकि $n \ge 5$, इसलिए $\exists\ k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$

तब, क्योंकि $H \triangleleft S_n$. इसलिए $(i\,k)(i\,j)(i\,k)^{-1} \in H$ अर्थात् $(j\,k) \in H$, जो एक अंतर्विरोध है क्योंकि $H = \{I, \sigma_1\}$. अतः, $H \cap A_n \neq \{I\}$, अर्थात्, $H \cap A_n = A_n$.

इस प्रकार, S_n के उचित प्रसामान्य उपसमूह केवल $\{I\}$ और A_n हैं। ■

प्रमेयों 12 और 13 दोनों की उपपत्तियों में, हमने जाँच करने के लिए अनेक चरण आपके लिए छोड़ दिए हैं। कृपया प्रत्येक चरण को स्वयं पूरा कीजिए।

आइए यह जानने के लिए एक उदाहरण पर विचार करें कि किस तरह प्रमेय 12 और 13 हमारी सहायता करते हैं।

उदाहरण 9: S_6 से $\mathbb{Z}_7$ तक सभी संभव समूह समाकारिताओं को ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए $f: S_6 \to \mathbb{Z}_7$ एक समाकारिता है।

तब, $\text{Ker } f \triangleleft S_6$. अतः $\text{Ker } f = \{I\}$, या $\text{Ker } f = A_6$, या $\text{Ker } f = S_6$.

यदि $\text{Ker } f = \{I\}$, तो $S_6 \simeq \text{Im } f \leq \mathbb{Z}_7$. परंतु $o(S_6) > 7 = o(\mathbb{Z}_7)$.

अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचाते हैं। $\therefore \text{Ker } f \neq \{I\}$.

यदि $\text{Ker } f = A_6$. तो $S_6/A_6 \simeq \text{Im } f \leq \mathbb{Z}_7$. यहाँ $o(\text{Im } f) = o(S_6/A_6) = 2$.

परंतु $2 \nmid o(\mathbb{Z}_7)$. अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचाते हैं। $\therefore \text{Ker } f \neq A_6$.

इस प्रकार, केवल एक ही संभावना $\text{Ker } f = S_6$, अर्थात्, $f(\sigma) = \overline{0}\ \forall\ \sigma \in S_6$ अर्थात् f शून्य फलन है।

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E33) मान लीजिए $f: A_7 \to G$ एक समूह समाकारिता है। दर्शाइए कि $o(G) \geq 2520$ या $f(x) = e\ \forall\ x \in A_7$.

E33) S_5 से U_5 तक संभव सभी समूह समाकारिताएँ क्या हैं, और क्यों?

[**संकेत:** ऐसे प्रत्येक f के लिए, $\text{Ker } f$ की संभावनाओं का विश्लेषण कीजिए।],

---

और अब आइए देखें कि समूह सिद्धांत में क्रमचय समूह इतने महत्वपर्ण क्यों हैं।

9.5 केली का प्रमेय

इस पाठ्यक्रम में, आपने सभी प्रकार के समूहों – परिमित, अपरिमित, आबेली, अन्आबेली, चक्रीय और अचक्रीय, का अध्ययन किया है। आपने $\mathbb{C}$ और $\mathbb{C}^*$ के उपसमूहों, $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, के उपसमूहों, D_{2n}, S_n, U_n के उपसमूहों, तथा अन्य अनेक समूहों के उपसमूहों का अध्ययन किया है। आप यह भी देख चुके हैं कि समूहों के अनंततः अनेक तुल्याकारिता वर्ग हैं। और फिर भी, यह अद्भुत बात है कि इन तुल्याकारिता वर्गों में से प्रत्येक में एक क्रमचय समूह अवश्य होता है। इस तथ्य का अनुभव सबसे पहले अंग्रेज़ गणितज्ञ, आर्थर केली (Arthur Cayley) ने किया था, और उन्होंने ही इस सिद्ध किया

था। इनका ही नाम समूह संक्रिया सारणियों को दिया गया है, जिनको आपने बार-बार उपयोग किया है। आइए देखें कि केली का प्रमेय क्या कहता है।

प्रमेय 14 (केली): कोई भी समूह G क्रमचय समूह $S(G)$ के एक उपसमूह के तुल्याकारी होता है। इस प्रकार, G को एक क्रमचय समूह के रूप में देखा जा सकता है।

याद कीजिए कि $S(G)$, G से G तक के सभी एकैकी आच्छादक फलनों का समूह है।

उपपत्तिः $a \in G$ के लिए, हम वाम नियमित निरूपण $f_a : G \to G : f_a(x) = ax$ परिभाषित करते हैं।

E3 में आप दर्शा चुके हैं कि $f_a \in S(G) \ \forall \ a \in G$.

अब, आइए एक फलन $f : G \to S(G) : f(a) = f_a$ परिभाषित करें।

f सुपरिभाषित है: यदि G में $a = b,$ तो $ax = bx \ \forall \ x \in G.$ अतः, $S(G)$ में $f_a = f_b.$

f एक समाकारिता है: इसे सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि

$$(f_a \circ f_b)\ (x) = f_a(bx) = abx = f_{ab}(x) \ \forall \ a, b \in G.$$

$$\therefore f(ab) = f_{ab} = f_a \circ f_b = f(a) \circ f(b) \ \forall \ a, b \in G.$$

f एकैकी है: इसे सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित पर विचार कीजिएः

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{a \in G \mid f_a = I_G\} \\ &= \{a \in G \mid f_a(x) = x \ \forall \ x \in G\} \\ &= \{a \in G \mid ax = x \ \forall \ x \in G\} \\ &= \{e\}, \text{ वाम निरसन द्वारा।} \end{aligned}$$

इस प्रकार, समाकारिता के मूल प्रमेय द्वारा,

$$G/\text{Ker } f \simeq \text{Im} f \le S(G).$$

अर्थात् $G \simeq \text{Im } f \le S(G),$ क्योंकि $G \simeq (G/\{e\})$.

अर्थात्, $G,$ $S(G)$ के उपसमूह के तुल्याकारी है। ■

प्रमेय 14 के महत्व पर बल देने की आवश्यकता है। इस संदर्भ में, निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 6: यदि हम उपरोक्त प्रमेय 14 को इकाई 8 के प्रमेय 9 के साथ रखें, तो आप क्या देखते हैं? हम पाते हैं कि यहाँ उतने ही अतुल्याकारी (non-isomorphic) समूह हैं, जितने कि अतुल्याकारी वर्ग $[H]$ हैं, जहाँ $H \le S(X),$ किसी X के लिए।

आइए केली के प्रमेय का उपयोग करते हुए किसी समूह को निरूपित करने के एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 10: S_4 का वह उपसमूह ज्ञात कीजिए जिसके तुल्याकारी क्लाइन 4-समूह K_4 है।

हलः K_4 के लिए गुणन सारणी पर विचार कीजिए:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

अब, वाम निरूपण फलन का उपयोग करते हुए, आइए देखें कि हमें $\text{Im}\, f$ (प्रमेय 14 में) क्या देता है। इस सारणी के उपयोग से, आप देख सकते हैं कि $f_e = I$, क्योंकि $f_e(x) = x \ \forall \ x \in G$.

आगे, सारणी की दूसरी पंक्ति को देखने पर, हम पाते हैं कि
$f_a(e) = a,\ f_a(a) = e,\ f_a(b) = c,\ f_a(c) = b.$

अतः, $f_a = (e\ a)(b\ c).$

इसी प्रकार, आपको दर्शाना चाहिए कि $f_b = (e\ b)(a\ c)$ और $f_c = (e\ c)(a\ b).$

अतः, $K_4 \simeq \{I, (e\ a)(b\ c), (e\ b)(a\ c), (e\ c)(a\ b)\}.$

अब, प्रतीकों e, a, b, c को $1, 2, 3, 4$ द्वारा प्रतिस्थापित कर दीजिए, और फिर आप $\text{Im}\ f = V_4$ (E30 में) प्राप्त करेंगे जो S_4 में है।

$\therefore K_4 \simeq V_4.$

***

उपरोक्त उदाहरण से जुड़ा निम्नलिखित प्रेक्षण को देखिए।

टिप्पणी 7: ध्यान दीजिए कि $S(G)$ के उपसमूह में $S(G)$ के सभी बीजीय गुणों का होना आवश्यक नहीं है। उदाहरण यदि G कोटि 6 वाला एक आबेली समूह है, तो $S(G)$ अन्आबेली होगा, परंतु $S(G)(= S_6$ यहाँ) का वह उपसमूह जिसके तुल्याकारी G है आबेली होगा ही। इस प्रकार, उदाहरण 10 में, S_4 अन्आबेली है, परंतु $K_4 \simeq V_4$, जो आबेली है।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E35) S_4 का वह उपसमूह प्राप्त कीजिए जिसके तुल्याकारी $\mathbb{Z}_4$ है। क्या $\mathbb{Z}_4 \simeq A_4$? क्यों, या क्यों नहीं?

E36) यदि G कोटि n वाला एक परिमित समूह है, तो दर्शाइए कि G, S_n के एक उपसमूह के तुल्याकारी है।

E37) निम्नलिखित समूहों में से प्रत्येक के लिए S_8 का एक उपसमूह ज्ञात कीजिए जिसके वह तुल्याकारी है:

i) D_8, ii) $\mathbb{Z}_8$, iii) U_8, iv) Q_8.

इसके साथ ही हम क्रमचयों पर अपनी चर्चा को समाप्त करते हैं। हम समूह सिद्धांत पर भी अपनी चर्चा को समाप्त करते हैं। अगले खंड में, आप वलय सिद्धांत का अध्ययन प्रारंभ करेंगे। निस्संदेह, आपने जो प्रथम दो खंडों में सीखा है, उसका भी आप उपयोग करते रहेंगे, क्योंकि प्रत्येक वलय एक समूह भी होता है, जैसा कि आप देखेंगे।

तो आइए देखें कि इस इकाई में आपने क्या अध्ययन किया है।

9.6 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर चर्चा की है।

1. क्रमचयों के बारे में, विशिष्ट रूप से समूह $(S_n, \circ)$ के बारे में जो आपने पहले सीखा है उसका संक्षिप्त में दोहराव $n \geq 3$ के लिए, S_n कोटि $n!$ का एक परिमित अन्आबेली समूह है।

2. चक्रों और पक्षांतरणों की परिभाषा, और उनके कुछ गुण।

3. S_n में किसी भी अतत्समक क्रमचय को चक्रों के एक असंयुक्त गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

4. सभी पक्षांतरणों का समुच्चय S_n को जनित करता है, जहाँ $n \geq 2.$ साथ ही, S_n को $\{(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1,\ n)\}$ जनित करता है, जहाँ $n \geq 2.$

5. $n \geq 2$ के लिए, फलन $\text{sign}: S_n \to \{1, -1\} : f(\sigma) = \prod\limits_{\substack{i,\ j=1 \\ i<j}}^{n} \dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{(j-i)}$ एक आच्छादक समाकारिता है।

6. विषम और सम क्रमचय।

7. $n \geq 2$ के लिए, S_n में सम क्रमचयों का समुच्चय A_n कोटि $\frac{n!}{2}$ वाला S_n का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

8. $n \geq 3$ के लिए, S_n में सभी 3-चक्रों के समुच्चय द्वारा A_n जनित होता है।

9. $n \geq 5$ के लिए, A_n सरल है।

10. $S_n (n \geq 5)$ का अतुच्छ उचित प्रसामान्य उपसमूह केवल A_n है।

11. **केली का प्रमेयः** प्रत्येक समूह किसी क्रमचय समूह के तुल्याकारी होता है।

9.7 हल/उत्तर

E1) इकाई 2 में आप देख चुके हैं कि $(S_n, \circ)$ एक समूह है, $\forall\, n \in \mathbb{N}.$

क्योंकि $S_1 = \{I\}$ और $o(S_2) = 2,$ इसलिए ये समूह आबेली हैं। अब, आइए S_3 पर दृष्टि डालें।

क्योंकि $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ तथा

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ इसलिए ये दोनों क्रमचय क्रमविनिमय नहीं करते हैं।

$\therefore S_3$ अन्आबेली है।

अब किसी भी $S_n, n \geq 3$ के लिए, पर विचार कीजिए। क्योंकि S_n में $(1\,2\,3)$ और $(1\,3)$ हैं, इसलिए ऊपर दी तर्क से ही यह प्रदर्शित होता है कि S_n अन्आबेली है $\forall\ n \geq 3$.

E2) उदाहरण 17, इकाई 8 देखिए।

E3) यदि G में $x = y$, तो $gx = gy$, अर्थात् $f(x) = f(y)$. अतः, f सुपरिभाषित है।

आगे f एकैकी है, क्योंकि $f(x) = f(y) \Rightarrow gx = gy \Rightarrow x = y$, वाम निरसन नियम द्वारा।

साथ ही, किसी भी $x \in G$ के लिए, $f(g^{-1}x) = x$. अतः f आच्छादक है। इसलिए $f \in S(G)$.

E4) यहाँ अनेक उत्तर हो सकते हैं।

हमारा उत्तर $(1\,2)$ और $(2\,4)$, $(1\,3\,5)$ और $(1\,2\,3)$, $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ और $(2\,1\,3\,4\,5\,6\,7)$ है।

ध्यान दीजिए कि $(1\,2) \neq (2\,4)$, क्योंकि $(1\,2)$, 2 को 1 में ले जाता है तथा $(2\,4)$, 2 को 4 में ले जाता है।

इसी प्रकार, स्पष्ट कीजिए कि आपके उत्तर में क्रमचय भिन्न-भिन्न क्यों है।

E5) यहाँ $1 \to 5, 5 \to 4, 4 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3$. इस प्रकार यह चक्र $(1\,5\,4)$ है।

E6) i) $(1\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \ldots & 8 \end{pmatrix}$, $(1\,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & \ldots & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 8 \end{pmatrix}$, अर्थात्

$(1\,2)^{-1} = (2\,1) = (1\,2)$.

$$(1\,2\,3) \circ (3\,2\,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & \ldots & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & \ldots & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 8 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 8 \end{pmatrix} = I.$$

अतः, $(1\,2\,3)^{-1} = (3\,2\,1)$.

ii) $f(i_k) = i_{k+1}$ तथा $f(x) = x\ \forall\ x \neq i_k$, जहाँ $k = 1, \ldots, r \quad i_{r+1} = i_1$, रखते हुए।

अतः, $f^{-1}(i_{k+1}) = i_k$ और $f^{-1}(x) = x\ \forall\ x \neq i_k$, जहाँ $k = 1, \ldots, r$.

इस प्रकार, $f^{-1} = (i_r\ i_{r-1} \ldots i_2\ i_1)$.

E7) $g^{-1}h^{-1}gh$ लीजिए, जहाँ $g = (1\ 2), h = (1\ 3)$ तथा $g = (2\ 3), h = (2\ 4)$. तब, आप इसका सत्यापन कीजिए कि $(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) = (3\ 1\ 2)$ तथा $(2\ 3)(2\ 4)(2\ 3)(2\ 4) = (4\ 2\ 3)$. ध्यान दें कि $(3\ 1\ 2) \neq (4\ 2\ 3)$, क्योंकि, उदाहरणार्थ, $(3\ 1\ 2)$, 4 को 4 में ले जाता है तथा $(4\ 2\ 3)$, 4 को 2 में ले जाता है।

E8) i) $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$.

ii) यहाँ $1 \to 8 \to 5 \to 1$. अभी तक सभी प्रतीक नहीं लिए गए हैं, उदाहरणार्थ, 2 छूट गया है। इसलिए, हम 2 को लेते हैं। हम $2 \to 4 \to 2$ प्राप्त करते हैं।

अभी भी सभी प्रतीक पूरे नहीं हुए हैं, जैसे कि 3। अतः, हम 3 लेते हैं। हम $3 \to 7 \to 6 \to 3$ प्राप्त करते हैं।

अब, सभी प्रतीक ले लिए गए हैं। अतः, क्रमचय गुणनफल $(1\ 8\ 5)(2\ 4)(3\ 7\ 6)$ है।

iii) $(1\ 4)(2\ 5)$.

E9) $(1\ 4)(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$(6\ 5\ 2\ 4)(3\ 1) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

$(3\ 1\ 2)(4\ 6)(5\ 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

E10) नहीं। क्योंकि $(1\ 3)(1\ 5\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ तथा

$(1\ 5\ 4)(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

क्योंकि, उदाहरणार्थ, $(1\ 3)(1\ 5\ 4)$, 3 को 1 में ले जाता है, और $(1\ 5\ 4)(1\ 3)$, 3 को 5 में ले जाता है, ये दोनों भिन्न-भिन्न फलन हैं।

E11) मान लीजिए $f = (i_1\ i_2 \ldots i_r)$. तब, जैसा कि आपने प्रमेय 3 की उपपत्ति में देखा था, $f(i_1) = i_2,\ f(i_2) = f^2(i_1) = i_3, \ldots, f^{r-1}(i_1) = i_r,\ \ f^r(i_1) = f(i_r) = i_1$.

इसी प्रकार, $f^r(i_k) = i_k\ \forall\ k = 2, \ldots, r$.

$\therefore f^r = I$.

साथ ही, $s < r$ के लिए, $f^s(i_1) = i_{s+1} \neq i_1\ \ \therefore f^s \neq I$.

$\therefore o(f) = r$.

E12) $\sigma = (1\ 3\ 6\ 9)(2\ 5\ 7)(8\ 10)$.

$\therefore o(\sigma) = \text{l.c.m}\ (4, 3, 2)$

$= 12$.

E13) S_3 में, $\sigma_1 = (1\ 2) = \sigma_2$ पर विचार कीजिए। तब, $\sigma_1\sigma_2 = I$.

इसलिए, $o(\sigma_1\sigma_2) = 1$.

परंतु, $\text{l.c.m}(2, 2) = 2$.

यहाँ, प्रमेय 4 असफल नहीं माना जा सकता है क्योंकि इस स्थिति में यह लागू ही नहीं होता। यह सिर्फ़ **असंयुक्त चक्रों** के गुणनफल के लिए लागू होता है। यहाँ σ_1 और σ_2 असंयुक्त नहीं हैं।

E14) नहीं, उदाहरणार्थ, दोनों प्रश्नों के लिए E12 देखिए।

E15) i) $(1\ 4)(1\ 3)$.

ii) $(4\ 1)(4\ 3)(= (1\ 4)(3\ 4))$.

iii) $(2\ 3)(2\ 5)(2\ 4)$.

E16) $(i\ j)(j\ k) = (i\ j\ k)$ तथा $(j\ k)(i\ j) = (i\ k\ j) \neq (i\ j\ k)$.

E17) $(1\ 5)(1\ 8)(2\ 4)(3\ 6)(3\ 7)$.

E18) $(1\ 3\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)$, $(5\ 7) = (1\ 5)(1\ 7)(1\ 5)$,
$(2\ 6\ 8) = (2\ 8)(2\ 6) = (1\ 2)(1\ 8)(1\ 2)(1\ 2)(1\ 6)(1\ 2) = (1\ 2)(1\ 8)(1\ 6)(1\ 2)$,
क्योंकि $(12)(12) = I$.

$\therefore (1\ 3\ 4)(5\ 7)(2\ 6\ 8) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 5)(1\ 7)(1\ 5)(1\ 2)(1\ 8)(1\ 6)(1\ 2)$.

E19) किन्हीं तीन प्रतीकों i, j और k के लिए,

$(i\ j)(j\ k) = (i\ j\ k)$.

तब, यदि m एक अन्य प्रतीक है, तो

$(i\ j\ k)(k\ m) = (i\ j\ k\ m)$, इत्यादि।

$\therefore (1\ 2)(2\ 3)\ldots(9\ 10) = (1\ 2\ 3)(3\ 4)\ldots(9\ 10)$

$= (1\ 2\ 3\ 4)\ldots(9\ 10)$

$= (1\ 2\ 3\ldots10)$

$= (1\ 10)(1\ 9)\ldots(1\ 2)$.

E20) नहीं। क्योंकि I एक पक्षांतरण नहीं है, इसलिए यह इस समुच्चय में नहीं है।

E21) $$\text{sign } I = \prod_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n} \frac{I(j)-I(i)}{j-1} = \prod_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n} \frac{j-i}{j-i} = 1.$$

E22) $\text{sign}\,\sigma = \frac{\sigma(2)-\sigma(1)}{2-1}\cdot\frac{\sigma(3)-\sigma(1)}{3-1}\cdot\frac{\sigma(3)-\sigma(2)}{3-2}\cdot\frac{\sigma(4)-\sigma(3)}{4-3}\cdot\frac{\sigma(4)-\sigma(2)}{4-2}$

$\cdot\frac{\sigma(4)-\sigma(1)}{4-1}\cdot\frac{\sigma(5)-\sigma(4)}{5-4}\cdot\frac{\sigma(5)-\sigma(3)}{5-3}\cdot\frac{\sigma(5)-\sigma(2)}{5-2}\cdot\frac{\sigma(5)-\sigma(1)}{5-1}$

$=\frac{3-4}{1}\cdot\frac{2-4}{2}\cdot\frac{2-3}{1}\cdot\frac{1-2}{1}\cdot\frac{1-3}{2}\cdot\frac{1-4}{3}\cdot\frac{5-1}{1}\cdot\frac{5-2}{2}\cdot\frac{5-3}{3}\cdot\frac{5-4}{4}=1.$

E23) E15(iii) में क्रमचय विषम है, क्योंकि यह 3 पक्षांतरणों का एक गुणनफल है। इसी प्रकार, स्पष्ट कीजिए कि अन्य क्यों विषम हैं या नहीं हैं।

E24) $\text{sign}(f) = \text{sign}(g) = -1.$

$\therefore \text{sign}(f \circ g) = (-1)(-1) = 1.$

$\therefore f \circ g$ सम है।

E25) $\text{sign}\, I = 1.\ \therefore I$ सम है।

आप यह भी तर्क दे सकते थे कि $I = (1\ 2)(1\ 2)$ और इसलिए I सम है।

E26) आप देख चुके हैं कि $\sigma = (i_1\ i_2 \ldots i_r) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3)\ldots(i_{r-1}\ i_r)$, जो $(r-1)$ पक्षांतरणों का गुणनफल है।

इस प्रकार, σ विषम है यदि r सम है, तथा σ सम है यदि r विषम है।

E27) आप जानते हैं कि $o(A_4) = \frac{4!}{2} = 12.$

अब, $I \in A_4$. फिर सभी 3-चक्र A_4 में हैं।

अतः, (1 2 3), (1 3 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 3 4), (1 4 3), (2 3 4), (2 4 3), A_4 में हैं।

और फिर, दो पक्षांतरणों के सभी संभव गुणनफल भी A_4 में प्राप्त हैं। ये हैं (1 2)(3 4), (1 3)(4 2), (1 4)(2 3).

अतः, हमने A_4 के सभी 12 अवयव प्राप्त कर लिए हैं।

जहाँ तक क्रमविनिमेयता का प्रश्न है, ध्यान दीजिए कि

$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4) = (1\ 3)(2\ 4)$ तथा $(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 3) = (1\ 4)(2\ 3).$

इस प्रकार, $(1\ 2\ 3)$ और $(1\ 2\ 4)$ क्रमविनिमय नहीं करते हैं। अतः, A_4 आबेली नहीं है।

E28) $o(S_5/A_5) = 2.$ एक अवयव सहसमुच्चय A_5 है, तथा दूसरा अवयव $(1\ 2)A_5$ है क्योंकि $(1\ 2) \notin A_5.$

ध्यान दीजिए कि S_n में किसी भी विषम σ के लिए, $(1\ 2)A_5 = \sigma A_5$ क्योंकि $\sigma^{-1}(1\ 2) \in A_5.$

E29) S_n में $(1\ 2)$ और $(1\ 3)$ विषम क्रमचय हैं, परंतु $(1\ 2)(1\ 3)$ एक सम क्रमचय है। अतः, यह समुच्चय S_n का उपसमूह नहीं है।

आप यह तर्क भी दे सकते थे कि I सम है और इसलिए इस समुच्चय में नहीं है। अतः, यह समुच्चय S_n का उपसमूह नहीं है।

E30) उदाहरण 5 से आप जानते हैं कि $\sigma\nu\sigma^{-1}$ का वही असंयुक्त चक्र वियोजन संरचना है जो ν को $\forall\ \nu \in V_4$ और $\sigma \in A_4$.

साथ ही, V_4 में वे सभी अवयव हैं जो S_4 में दो असंयुक्त पक्षांतरणों के गुणनफल हैं। अतः, $\sigma\nu\sigma^{-1} \in V_4\ \forall\ \sigma \in A_4, \nu \in V_4$.

इस प्रकार, $V_4 \lhd A_4$.

क्योंकि $|V_4 : H| = 2$. इसलिए $H \lhd V_4$.

अब, $(1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 4)(2\ 3) \notin H$. अतः, $H \ntriangleleft A_4$.

E31) हम इसे ज्ञात करने के लिए गिनती के तर्क का उपयोग करेंगे। A_5 के अवयव 3-चक्र, 5-चक्र तथा 2 असंयुक्त पक्षांतरणों के गुणनफल हैं।

i) S_5 में कोटि 2 वाले सम क्रमचय केवल 4 भिन्न-भिन्न प्रतीकों का उपयोग करते हुए, $(1\ 2)(3\ 4)$ के रूप के हैं।

साथ ही, $(1\ 2) = (2\ 1)$ तथा $(1\ 2)(3\ 4) = (3\ 4)(2\ 1)$.

अतः, A_5 मे ऐसे अवयवों की कुल संख्या है $\frac{1}{2}\left[\frac{5\times4}{2}\ \frac{3\times2}{2}\right] = 15.$

ii) कोटि 3 वाले सम क्रमचय केवल 3-चक्र हैं।

साथ ही, $(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2)$.

अतः, S_5 में भिन्न-भिन्न 3-चक्रों की संख्या है $\frac{1}{3}(5\times4\times3) = 20.$

iii) यह S_5 में भिन्न-भिन्न 5-चक्रों की संख्या है, अर्थात्

$\frac{1}{5}(5\times4\times3\times2\times1) = 24.$

iv) क्योंकि हम A_5 के 59 अवयव पहले ही ज्ञात कर चुके हैं, और $o(A_5) = 60$, इसलिए ये ही A_5 के अतुच्छ अवयव हैं। इसलिए, A_5 में कोटि 15 का कोई अवयव नहीं है।

E32) अवयवों को परिकलित करने के लिए, हम उदाहरण 5 का उपयोग करेंगे।

i) मान लीजिए $i \neq 2$. यदि $\sigma_1 = (1\ i\ 3)$, तो दिया हुआ अवयव है $\sigma_1(1\ 2\ 3)\sigma_1^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3))$, उदाहरण 5 से।

$= (i\ 2\ 1) \in H$, क्योंकि $H \lhd A_n$ और $\sigma_1 \in A_n$.

यदि $i = 2$ है तो, $\sigma_1 = (1\ 2\ 3)$. अतः, $\sigma_1(1\ 2\ 3)\sigma_1^{-1} = (1\ 2\ 3) \in H$.

ii) यहाँ, $\sigma_2 = (j\,1\,i)$ तथा दिया हुआ अवयव है:

$\sigma_2 (1\ i\ 2)\sigma_2^{-1} = (i\ j\ 2) \in H,$

उपरोक्त (ii) से, तथा क्योंकि $\sigma_2 \in A_n$.

यहाँ हमने माना है कि $j \neq 1, 2.$

(i) की तरह, यदि $j = 2,$ तो $\sigma_2 = (1\ i\ 2),$ जिससे
$\sigma_2 (1\ i\ 2)\sigma_2^{-1} = (1\ i\ 2) \in H.$

iii) यहाँ $\sigma_3 = (1\ 2\ k)$ तथा दिया हुआ अवयव है $\sigma_3 (i\ j\ 2)\sigma_3^{-1} = (i\ j\ k) \in H,$
उपरोक्त (ii) से, तथा क्योंकि $\sigma_3 \in A_n$.

यहाँ भी $i, j, k \neq 1, 2.$

अतः, किसी भी $(i\ j\ k) \in A_n$ के लिए, (i), (ii) और (iii) हमें बताते हैं कि
$(i\ j\ k) = (\sigma_3\sigma_2\sigma_1)(1\ 2\ 3)(\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^{-1} \in H.$

इस प्रकार, प्रत्येक 3-चक्र H में स्थित है। अतः, प्रमेय 11 से, $H = A_n$.

E33) $\text{Ker } f \triangleleft A.$ अतः $\text{Ker } f = \{I\}$ या $\text{Ker } f = A_7$.

यदि $\text{Ker } f = \{I\}$, तो f एकैकी है तथा $f(A_7) \leq G,$ जहाँ
$o(f(A_7)) = o(A_7) = 2520.$

$\therefore o(G) \geq 2520.$

यदि $\text{Ker } f = A_7,$ तो $f(x) = I\ \forall\ x \in A_7$.

E34) मान लीजिए $f : S_5 \to U_5$ एक समूह समाकारिता है।

तब, $\text{Ker } f \triangleleft S_5$. अतः, $\text{Ker } f = \{I\}$, या $\text{Ker } f = A_5$ या $\text{Ker } f = S_5$.

यदि $\text{Ker } f = \{I\}$, तो $S_5 \simeq \text{Im } f \leq U_5$.

परंतु तब, $o(\text{Im } f) = 5!,$ तथा $o(U_5) = 5.$

अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं।

इसलिए, $\text{Ker } f \neq \{I\}$.

यदि $\text{Ker } f = A_5$, तो $\text{Im } f \simeq (S_5/A_5)$. अतः, $\text{Im } f$, U_5 का कोटि 2 वाला उपसमूह है। परंतु $2 \nmid o(U_5)$. इसलिए, लग्रांज के प्रमेय से, यह स्थिति संभव नहीं है।

अतः, केवल $\text{Ker } f = S_5$ ही संभव है, अर्थात् $f : S_5 \to U_5 : f(\sigma) = 1$.

E35) आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}_4 = <\bar{1}>$ और $o(\bar{1}) = 4$. अतः, $\mathbb{Z}_4$ के तुल्याकारी S_4 के उपसमूह को कोटि 4 वाला चक्रीय समूह होना चाहिए।

और, यह क्रमचय $f_{\bar{1}}$ द्वारा जनित है।

अब, $f_{\bar{1}}(x) = \bar{1} + x\ \forall\ x \in \mathbb{Z}_4$.

$\therefore f_{\bar{1}} = (\bar{1}\ \ \bar{2}\ \ \bar{3}\ \ \bar{0})$, जो चक्र $(1\ 2\ 3\ 4)$ ही है।

$\therefore \mathbb{Z}_4 \simeq <(1\ 2\ 3\ 4)>$, जो A_5 के तुल्याकारी नहीं है क्योंकि $(1\ 2\ 3\ 4) \notin A_4$. साथ ही, ध्यान दीजिए कि A_4 चक्रीय नहीं है। (क्यों?)

E36) मान लीजिए $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. तब $S(G)$, n प्रतीकों पर क्रमचयों का समुच्चय है। अतः $S(G) = S_n$. इस प्रकार, $G \simeq \text{Im } f \le S_n$, जहाँ f केली के प्रमेय की उपपत्ति में जैसा है।

E37) i) $D_8 = <\{r, R \mid r^2 = I, R^4 = I, rR = R^{-1}r\}>$.

अतः, D_8 को $\{\sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1^2 = I, \sigma_2^4 = I, \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2^{-1}\sigma_1\}$ द्वारा जनित उपसमूह के तुल्याकारी होना चाहिए।

साथ ही, इकाई 2 से याद कीजिए कि यदि हम त और R को वहाँ दिए गए आकृति 3 में दर्शाए क्रमशः परावर्तन और घूर्णन मानें, तो $\sigma_1 = (2\ 4)$ और $\sigma_2 = (1\ 2\ 3\ 4)$.

आपको इसकी भी जाँच करनी चाहिए कि सभी वाँछित प्रतिबंध संतुष्ट हो रहे हैं। अतः, $D_8 \simeq <(2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)> \le S_8$.

ii) E35 की तरह, $\mathbb{Z}_8 \simeq <(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)> \le S_8$.

iii) क्योंकि $U_8 \simeq \mathbb{Z}_8$, इसलिए $U_8 \simeq <(1\ 2 \ldots 8)> \le S_8$.

iv) सत्यापन कीजिए कि Q_8 की केली सारणी नीचे दिए अनुसार है:

$\cdot$	I	$-I$	A	$-A$	B	$-B$	C	$-C$
I	I	$-I$	A	$-A$	B	$-B$	C	$-C$
$-I$	$-I$	I	$-A$	A	$-B$	B	$-C$	C
A	A	$-A$	$-I$	I	C	$-C$	$-B$	B
$-A$	$-A$	A	I	$-I$	$-C$	C	B	$-B$
B	B	$-B$	$-C$	C	$-I$	I	A	$-A$
$-B$	$-B$	B	C	$-C$	I	$-I$	$-A$	A
C	C	$-C$	B	$-B$	$-A$	A	$-I$	I
$-C$	$-C$	C	$-B$	B	A	$-A$	I	$-I$

अतः, इस सारणी की प्रत्येक पंक्ति को देखने पर, आप देख सकते हैं कि:

$f_I = I_G$;

$f_{-I}(x) = -x \forall x \in \mathbb{Q}_8$. अतः,

$f_{-I} = (I\ -I)(A\ -A)(B\ -B)(C\ -C)$.

यदि हम f_{-I} में $I, -I, A, -A, B, -B, C$ और $-C$ को क्रमशः $1, 2, \ldots, 7$ और 8 से प्रतिस्थापित करें, तो हम $f_{-I} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$ प्राप्त करते हैं।

इसी प्रकार, आपको जाँच करनी चाहिए कि

$$f_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8),$$

$$f_{-A} = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 8\ 6\ 7),$$

$$f_B = (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 8\ 4\ 7),$$

$$f_{-B} = (1\ 6\ 2\ 5)(3\ 7\ 4\ 8),$$

$$f_C = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 5\ 4\ 6),$$

$$f_{-C} = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 6\ 4\ 5).$$

$$\therefore Q_8 \simeq \{f_x \mid x \in Q_8\} \leq S_8.$$