इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-134
बीजगणित

किताब-II
वलय सिद्धांत

इकाई अनुसार पाठ्यक्रम रूपरेखा

किताब I समूह सिद्धांत

खंड 1 प्रारंभिक समूह सिद्धांत

इकाई 1: कुछ प्रारंभिक संकल्पनाएँ

इकाई 2: समूह

इकाई 3: उपसमूह

इकाई 4: चक्रीय समूह

खंड 2 प्रसामान्य उपसमूह और समूह समाकारिताएँ

इकाई 5: लग्रांज का प्रमेय

इकाई 6: प्रसामान्य उपसमूह

इकाई 7: विभाग समूह

इकाई 8: समूह समाकारिताएँ

इकाई 9: क्रमचय समूह

किताब II वलय सिद्धांत

खंड 3 वलयों से परिचय

इकाई 10: वलय

इकाई 11: उपवलय

इकाई 12: गुणजावलियाँ

इकाई13: वलय समाकारिताएँ

खंड 4 पूर्णांकीय प्राँत

इकाई 14: पूर्णांकीय प्राँत और क्षेत्र

इकाई 15: बहुपद वलय

इकाई16: बहुपदों के मूल और गुणनखंड

मार्च, 2021

ISBN-8]-

इंदिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली–110068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in *से प्राप्त की जा सकती है।*

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. सुजाता वर्मा, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-134
बीजगणित

खंड
3
वलयों से परिचय

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति*

प्रो. रश्मी भारद्वाज
जी.जी.एस इंद्रप्रस्थ विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अम्बर हबीब
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पुणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन. आई. एस. ई. आर, भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई. आई. एस. ई. आर, मोहाली

प्रो. अपर्णा मेहरा
आई आई टी, दिल्ली

प्रो. राहुल राय
भारतीय सांख्यिकी संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शचि श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. जुगल वर्मा
आई. आई. टी, मुंबई

संकाय सदस्य
विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू
प्रो. एम. एस नाथावत (निदेशक)
डॉ. दीपिका
प्रो. परवीन सिंक्लेयर
श्री पवन कुमार
प्रो. पूर्णिमा मित्तल
प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. एस. वेंकटरामन

* इस समिति की अगस्त 2016 में बैठक हुई थी। यह पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम विशेषज्ञ समिति के सुझावों तथा यूजीसी–सीबीसीएस. के सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. परवीन सिंक्लेयर (*संपादक और लेखक*)
विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू

पाठ्यक्रम समन्वयक: प्रो. परवीन सिंक्लेयर (email: sos@ignou.ac.in)

आभार:

i) **प्रो. पार्वती शास्त्री**, मुम्बई विश्वविद्यालय, और **डॉ. इन्द्राक्षी दत्ता**, जीज़स एंड मेरी कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, के प्रति, उनकी विस्तृत टिप्पणियों के लिए।

ii) इग्नू के पूर्व स्नातक पाठ्यक्रम, अमूर्त बीजगणित (एम. टी. ई-06), की कुछ सामग्री का इस खंड में उपयोग किया गया है।

खंड प्रस्तावना

इस पाठ्यक्रम के पहले दो खंडों में आपने समूह सिद्धांत के विभिन्न पहलुओं पर पढ़ाई की है। इस खंड की चार इकाइयों में हम एक अन्य बीजीय संरचना से आपको परिचित कराएंगे। इस संरचना में एक समुच्चय होता है और उस पर परिभाषित **दो** द्वि-आधारी संक्रियाएँ होती हैं। यदि ऐसा निकाय कुछ अभिगृहीतों को संतुष्ट करता हो, जिन्हें हमने इकाई 10 में दिया है, तो हम इसे **वलय** कहेंगे।

गणितज्ञ रिचर्ड डेडिकिण्ड (Dedekind) (1831-1916) और लियोपोल्ड क्रॉनेकर (Kronecker) (1823-1891) ने सबसे पहले वलय की संकल्पना प्रस्तुत की थी। क्रॉनेकर ने इस प्रकार के निकाय को 'ऑर्डर' कहा था। गणितज्ञ डेविड हिल्बर्ट (Hilbert) ने इस बीजीय निकाय को 'वलय' नाम 1897 में दिया था। अमूर्त वलय की जो परिभाषा आज के दौर में दी जा रही है, वह 'बीजगणित की माता' एमी नोयथर (Emmy Noether) की देन मानी जाती है। उन्होंने 1921 में प्रकाशित अपने शोध पत्र में इसका काफ़ी प्रयोग किया था।

इस खंड को पढ़ते समय आप देखेंगे कि वलय एक आबेली समूह है, जिसमें कुछ और विशेष गुण हैं। आप जानेंगे कि समूह सिद्धांत की अनेक संकल्पनाओं के अनुरूप वलय सिद्धांत में होते हैं। इसलिए समूहों के बारे में जो कुछ भी आपने पढ़ा है, वह इस खंड, तथा अगले खंड, का अध्ययन करते समय सहायक सिद्ध होगा।

हम वलय सिद्धांत का प्रस्तुतीकरण ठीक उसी तरह करेंगे जैसे हमने आपका परिचय समूह सिद्धांत से किया है। सबसे पहले हम विभिन्न प्रकार के वलयों की परिभाषा देंगे। इसके बाद आपका परिचय उपवलयों (जो कि उपसमूहों के अनुरूप हैं) और गुणजावलियों (जो कि प्रसामान्य उपसमूहों के अनुरूप हैं) से होगा। इकाई 7 की तरह, इससे आप विभाग समूहों के अनुरूप विभाग वलय की समझ बना सकेंगे। इस खंड की अंतिम इकाई में हम वलय समाकारिताओं और तुल्याकारिताओं पर चर्चा करेंगे। आप देखेंगे कि समूहों से संबंधित अति उपयोगी तुल्याकारिता प्रमेयों के अनुरूप वलय सिद्धांत में भी तीन प्रमेय हैं जो वलय तुल्याकारिताओं पर लागू होते हैं। इनसे हमें वलयों की संरचना का विश्लेषण करने में बहुत सहायता मिलती है।

पिछले खंडों की तरह इस खंड में भी हमने अनेक उदाहरण और प्रश्न दिए हैं जिससे आप पाठ्य सामग्री को आसानी से समझ सकें। इकाई में दिए गए प्रश्नों का उतना ही महत्व है जितना कि शेष पाठ्य सामग्री का। इसलिए जब भी आप किसी प्रश्न पर पहुँचते हैं, आप उसे हल करके ही आगे बढ़ें।

पिछले खंडों की तरह हमने आपको खंड के अंत में कई विविध उदाहरण और प्रश्न दिए हैं। ये सवाल इस खंड में, और पिछले खंडों में, दी गई पाठ्य सामग्री पर आधारित हैं। इन सवालों को हल करने से आपकी वलय सिद्धांत की समझ बेहतर हो जाएगी। हाँ, आपको इन्हें हल करने में मज़ा भी आएगा!

संकेत और प्रतीक (खंड 3 में प्रयोग होने वाले)

खंड 1 और 2 में **दिए संकेतों और प्रतीकों को भी दोबारा देख लीजिए।**

$(R, +, \cdot)$	संक्रियाएं + और $\cdot$ के सापेक्ष वलय R
$C[a, b]$	$[a, b]$ से $\mathbb{R}$ तक सभी संतत फलनों का वलय
End A	समूह A की अंतराकारिताओं का वलय
$U(R)$	वलय R की मात्रकों का समूह
$\mathbb{H}$	वास्तविक चतुष्टयिओं का वलय
$C(R)$	वलय R का केंद्र
$< a >$	a से जनित मुख्य गुणजावली
$< a_1, \ldots, a_n >$	$a_1, a_2, \ldots, a_n$ से जनित गुणजावली

इकाई 10

वलय

इकाई की रूपरेखा

10.1 प्रस्तावना

इस पाठ्यक्रम में अभी तक, आपने समूहों के विभिन्न प्रकारों तथा उनके गुणों के बारे में अध्ययन किया है। कुछ समूहों पर अन्य द्वि-आधारी संक्रियाएँ भी परिभाषित हैं। उदाहरणार्थ, $(\mathbb{C}, +)$ एक समूह है, और $\mathbb{C}$ पर गुणन की द्वि-आधारी संक्रिया भी परिभाषित है। इस इकाई में, आप ऐसे समुच्चयों का अध्ययन प्रारंभ करेंगे जिन पर दो द्वि-आधारी संक्रियाएँ परिभाषित हैं, जिनमें से प्रत्येक कुछ गुणों को संतुष्ट करता है। $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ और $\mathbb{R}$ ऐसे बीजीय निकाय के उदाहरण हैं, जैसा कि आप देखेंगे।

अब, आप जानते हैं कि योग और गुणन दोनों $\mathbb{R}$ पर द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं। साथ ही, आप देख चुके हैं कि $\mathbb{R}$ योग के अधीन एक आबेली समूह है, हालांकि यह गुणन के सापेक्ष एक समूह नहीं है। परंतु, $\mathbb{R}$ में गुणन साहचर्य है। साथ ही, योग और गुणन, बंटन नियमों से संबद्ध हैं, अर्थात् $a(b+c) = ab+ac$ तथा $(a+b)c = ac+bc$ सभी वास्तविक संख्याओं a, b और c के लिए।

$\mathbb{R}$ पर द्वि-आधारी संक्रियाओं के इन्हीं गुणों को व्यापकीकृत करके, हम भाग 10.2 में एक बीजीय निकाय को परिभाषित करते हैं, जो वलय कहलाता है। इस परिभाषा का श्रेय प्रसिद्ध बीजगणितज्ञ ऐमी नॉइदर (Emmy Noether) को जाता है, जिन्हें 'बीजगणित की माता' भी कहा जाता है।

भाग 10.3 में, आप वलयों के अनेक ऐसे गुणों का अध्ययन करेंगे, जो सीधे परिभाषा से प्राप्त हो जाते हैं।

आकृति 1: ऐमी नॉइदर (1882-1935)

इन सभी भागों में, आप वलयों के अनेक उदाहरणों पर विचार करेंगे। परंतु, भाग 10.4 में, विशिष्ट रूप से हम वलयों के कुछ व्यापक वर्गों, जैसे आव्यूह वलयों और बहुपद वलयों पर ख़ास ध्यान देंगे। वैसे तो, अगले खंड में आप बहुपद वलयों के बारे में विस्तृत रूप से अध्ययन करेंगे ही।

जैसा कि पाठ्यवस्तु से मालूम होता है, यह इकाई इस पाठ्यक्रम के शेष भाग के लिए एक आधार है। इसलिए, इसका अध्ययन सावधानीपूर्वक करें। जैसे जैसे कोई प्रश्न आपके सम्मुख आए, उसे वैसे वैसे हल करने का प्रयास करें। इससे आप सुनिश्चित हो जाएँगे कि आपने इस इकाई के निम्नलिखित सीखने के उद्देश्यों को प्राप्त कर लिया है।

उद्देश्य

इस इकाई की पढ़ाई के बाद, आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो जाएँगे:

- वलयों को परिभाषित करना तथा उनके उदाहरण देना;
- वलय को परिभाषित करने वाले अभिगृहीतों से वलयों के कुछ प्रारंभिक गुणों को प्राप्त करना;
- निर्धारित करना कि कोई वलय क्रमविनिमेय है या नहीं, तथा/या उसका तत्समक है या नहीं।

10.2 वलय क्या है?

आप पूर्णांकों के समुच्चय $\mathbb{Z}$ से परिचित हैं। आप यह भी जानते हैं कि यह योग के सापेक्ष एक समूह है। क्या यह गुणन के सापेक्ष भी एक समूह है? नहीं, परंतु यह गुणन के सापेक्ष एक सामिसमूह है, क्योंकि गुणन साहचर्य है। साथ ही, $\mathbb{Z}$ में गुणन योग पर बंटित होता है। पूर्णांकों के योग और गुणन के इन गुणों की वजह से हम कहते हैं कि निकाय $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ एक वलय है, निम्नलिखित परिभाषा के अनुसार।

इस बीजीय निकाय का अंग्रेजी नाम 'ring' प्रसिद्ध गणितज्ञ डेविड हिबर्ट (David Hilbert) द्वारा 1897 में दिया गया था।

परिभाषा: एक बीजीय निकाय $(R, +, \cdot)$, जहाँ R एक अरक्ति समुच्चय है, जिस पर दो द्वि-आधारी संक्रियाएं परिभाषित हैं जिन्हें प्रायः योग (+ द्वारा व्यक्त) और गुणन (· द्वारा व्यक्त) कहा जाता है, एक **वलय (ring)** कहलाता है यदि निम्नलिखित अभिगृहीत संतुष्ट होते हैं:

R1) R में सभी a, b के लिए, $a+b=b+a$, अर्थात् योग क्रमविनिमेय है।

R2) R में सभी a, b, c के लिए, $(a+b)+c=a+(b+c)$, अर्थात् योग R में साहचर्य है।

R3) R में एक अवयव है (जिसे 0 से व्यक्त करते हैं) जिससे कि R में सभी a के लिए, $a+0=a=0+a$, अर्थात् R का एक योज्य तत्समक होता है।

R4) R में प्रत्येक a के लिए, R में एक अवयव x जिससे कि $a+x=0=x+a$, अर्थात् R के प्रत्येक अवयव का एक योज्य प्रतिलोम होता है।

R5) R में सभी a, b, c के लिए, $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$, अर्थात् R में गुणन साहचर्य है।

R6) **(बंटन नियम):** R में सभी a, b, c के लिए,

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (वाम बंटन नियम), तथा

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (दक्षिण बंटन नियम)।

अर्थात्, बाएँ और दाएँ दोनों तरफ़ से गुणन योग पर **बंटता** है।

अब, अभिगृहीतों R1 से R4 को ध्यान से देखें। ये हमें $(R, +)$ के बारे में क्या बताते हैं? क्या ये नहीं बताते हैं कि $(R, +)$ एक आबेली समूह है? अतः, इकाई 2 से आप जानते हैं कि योज्य तत्समक 0 अद्वितीय है तथा R के प्रत्येक अवयव का एक अद्वितीय प्रतिलोम है (जिसे हम $-a$ द्वारा व्यक्त करते हैं)। हम अवयव 0 को इस वलय का **शून्य अवयव** (**zero element**) कहते हैं।

अब, इकाई 2 अभिगृहीत R5 के बारे में आपको क्या बताता है? क्या यह हमें यह नहीं बताता कि $(R, \cdot)$ एक सामिसमूह है? अतः, हम एक वलय की परिभाषा में $R1-R6$ को निम्नलिखित रूप में संक्षिप्त कर सकते हैं:

परिभाषा: एक बीजीय निकाय $(R, +, \cdot)$ एक **वलय** कहलाता है यदि:

R1′) $(R, +)$ एक आबेली समूह है,

R2′) $(R, \cdot)$ एक सामिसमूह है, तथा

R3′) R में सभी a, b, c के लिए,

$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ तथा $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त R1′ के लिए यह आवश्यक है कि R को एक अरिक्त समुच्चय होना चाहिए तथा R पर '+' एक द्वि-आधारी संक्रिया होनी चाहिए। इसी प्रकार, R2′ की यह आवश्यकता है कि R पर '$\cdot$' एक द्वि-आधारी संक्रिया हो।

आगे बढ़ने से पहले, हम संकेतन के बारे में एक टिप्पणी करना चाहेंगे।

टिप्पणी 1: याद कीजिए कि समूहों के संदर्भ में, हमने तय किया था कि सुविधा के लिए $(G, *)$ को केवल संकेत G से दर्शाएंगे। यहाँ भी, भविष्य में हम सुविधा के लिए **$(R, +, \cdot)$** के लिए, केवल संकेत **R** का उपयोग करेंगे यदि '+' और '$\cdot$' का मतलब साफ़ हो। साथ ही, हम R के दो अवयवों a और b के गुणनफल को भी प्रायः $a\cdot b$ के स्थान पर ab द्वारा व्यक्त करेंगे।

आइए अब वलयों के कुछ उदाहरणों पर विचार करें। आप यह पहले ही देख चुके हैं कि $\mathbb{Z}$ एक वलय है। भाग 10.1 में, हमारी संक्षिप्त चर्चा बताती है कि $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ एक वलय क्यों है। समुच्चयों $\mathbb{Q}$ और $\mathbb{C}$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ और $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ अभिगृहीतों $R1-R6$ (या $R1'-R3'$) को संतुष्ट करते हैं? आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि वे संतुष्ट करते हैं। अतः, ये निकाय वलय हैं।

अब, एक चेतावनी!

टिप्पणी 2: ध्यान दीजिए कि वलय R पर जो दो संक्रियाएँ परिभाषित हैं, उनका क्रम महत्वपूर्ण है। इस प्रकार, यदि $(R, +, \cdot)$ एक वलय है, तो **इसका अर्थ यह नहीं है** कि $(R, \cdot, +)$ एक वलय होगा। उदाहरणार्थ, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ एक वलय है, परंतु $(\mathbb{Z}, \cdot, +)$ एक वलय नहीं है क्योंकि, उदाहरण के तौर पर, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ अभिगृहीत R1′ को संतुष्ट नहीं करता है। (क्यों?)
आइए अब कुछ ऐसे उदाहरणों को देखें जो हमें वास्तव में वलयों के अन्ततः अनेक उदाहरण प्रदान करते हैं।

उदाहरण 1: दर्शाइए कि $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ एक वलय है, जहाँ $n \in \mathbb{Z}$.

हल: खंड 1 से आप जानते हैं कि $n\mathbb{Z} = \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$ योग के सापेक्ष एक आबेली समूह है। इस प्रकार, R1′ को $n\mathbb{Z}$ संतुष्ट करता है।
आप यह भी जानते हैं कि $n\mathbb{Z}$ में गुणन साहचर्य होता है। इस प्रकार, R2′ को $n\mathbb{Z}$ संतुष्ट करता है।

अंत में, $n\mathbb{Z}$ में गुणन दाएँ से और बाएँ से, दोनों तरफ़ से योग पर बंटित है। इस प्रकार, $R3'$ को $n\mathbb{Z}$ संतुष्ट करता है।
अतः, $n\mathbb{Z}$ पूर्णांकों के सामान्य योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय है।

***

उदाहरण 2: दर्शाइए कि $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ एक वलय है।

हल: आप पहले से जानते हैं कि $(\mathbb{Z}_n, +)$ एक आबेली समूह है, तथा $\mathbb{Z}_n$ में गुणन साहचर्य होता है। इस प्रकार, $R1'$ और $R2'$ को $\mathbb{Z}_n$ संतुष्ट करता है।
अब, किन्हीं $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ के लिए,
$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a \cdot (b+c)} = \overline{a \cdot b + a \cdot c} = \overline{a \cdot b} + \overline{a \cdot c} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$
इस प्रकार, $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$
इसी तरह, $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c} \ \forall \ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n.$
अतः, $R3'$ को $\mathbb{Z}_n$ संतुष्ट करता है।

इस प्रकार, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ अभिगृहीतों $R1' - R3'$ को, या $R1 - R6$ को, संतुष्ट करता है। इसलिए, यह एक वलय है।

***

उदाहरण 3: समुच्चय $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{m + in \mid m$ और n पूर्णांक हैं$\}$, जहाँ, $i^2 = -1$ को लीजिए।
हम $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ पर '+' और '·' सम्मिश्र संख्याओं के सामान्य योग और गुणन ही परिभाषित करते हैं। इस प्रकार, $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ में $m + in$ और $s + it$ के लिए,
$(m + in) + (s + it) = (m + s) + i(n + t),$ तथा
$(m + in) \cdot (s + it) = (ms - nt) + i(mt + ns).$
सिद्ध कीजिए कि इस योग और गुणन के सापेक्ष $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ एक वलय है।
इस वलय को गणितज्ञ कार्ल फ्रेड्रिक गाऊस (Carl Friedrich Gauss) के नाम पर **गाउसीय पूर्णांकों (Gaussian integers)** का वलय कहते हैं।

हल: आपको यह सिद्ध करना चाहिए कि $(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ का उपसमूह है। इस प्रकार, अभिगृहीत $R1 - R4$ (या $R1'$) संतुष्ट हो रहे हैं।

आप यह भी जानते हैं कि $\mathbb{C}$ में गुणन साहचर्य है। इसलिए, यह $\mathbb{Z}[i]$ में भी साहचर्य है। इससे प्रदर्शित होता है कि $R5$ (या $R2'$) भी संतुष्ट हो रहा है।

अंत में, क्योंकि $\mathbb{C}$ के लिए दक्षिण और वाम बंटन नियम सत्य हैं, इसलिए ये $\mathbb{Z}[i]$ के लिए भी सत्य हैं।

इस प्रकार, $(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}, +, \cdot)$ एक वलय है।

***

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 3 में हमने कैसे $\mathbb{C}$ पर द्वि-आधारी संक्रियाओं के गुणों के उपयोग से उसके उपसमुच्चय $\mathbb{Z}[i]$ पर दोनों संक्रियाओं के गुणों को सिद्ध किया है। ध्यान दें कि ये संक्रियाएँ $\mathbb{Z}[i]$ पर संवृत हैं।

उपरोक्त उदाहरणों में आप देख सकते हैं कि $\mathbb{Z}_n$ परिमित है, जबकि $n\mathbb{Z}$ अपरिमित है। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा तक पहुँचते हैं, जिससे आपको हैरानी नहीं होना

चाहिए।

परिभाषा: वलय $(R, +, \cdot)$ **परिमित (finite)** कहलाता है यदि R एक परिमित समुच्चय है, अन्यथा **अपरिमित (infinite)** कहलाता है।

क्या $\mathbb{Z}_n$ के अतिरिक्त कोई परिमित वलय होते हैं? निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए।

उदाहरण 4: जाँच कीजिए कि $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ सामान्य आव्यूह योग और गुणन के सापेक्ष एक परिमित वलय है या नहीं।

हल: सर्वप्रथम, इकाई 2 में आप देख चुके हैं कि $n \geq 1$ के लिए, $(\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_n), +)$ एक आबेली समूह है।

साथ ही, इकाई 1 में आप देख चुके हैं कि आव्यूह गुणन साहचर्य है।

आगे, मान लीजिए कि $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ के कोई तीन अवयव $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ और $C = [c_{ij}]$ हैं। तब,
$A \cdot (B + C) = [a_{k\ell}] \cdot [(b_{ij} + c_{ij})] = [d_{kj}]$, जहाँ k, ℓ, i और j के मान 1, 2 या 3 हो सकते हैं, तथा

$$d_{kj} = a_{k1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{k2}(b_{2j} + c_{2j}) + a_{k3}(b_{3j} + c_{3j})$$
$$= (a_{k1}b_{1j} + a_{k2}b_{2j} + a_{k3}b_{3j}) + (a_{k1}c_{1j} + a_{k2}c_{2j} + a_{k3}c_{3j})$$

= AB और AC के (k, j) वें अवयवों का योग।

अतः, $A(B + C) = AB + AC$.

इसी प्रकार, आपको सिद्ध करना चाहिए कि
$(A + B)C = AC + BC \ \forall \ A, B, C \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$.

इस प्रकार, बंटन नियम संतुष्ट हैं।

अतः, $(\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4), +, \cdot)$ एक वलय है।

अंत में, $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ के प्रत्येक अवयव में 9 प्रविष्टियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक $\mathbb{Z}_4$ का एक अवयव है। अतः, इनमें से प्रत्येक प्रविष्टि के लिए 4 संभावनाएँ, $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ और $\overline{3}$ हैं। इस प्रकार, $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ में अवयवों की कुल संख्या 4^9 है। अतः, $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ एक परिमित वलय है।

***

अगला उदाहरण इकाई 2 के उदाहरण 10 से संबंधित है। इसमें जिन संक्रियाओं पर हम विचार कर रहे हैं, वे सामान्य योग और गुणन नहीं हैं।

उदाहरण 5: मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है, X के सभी उपसमुच्चयों का संग्रह $\wp(X)$ है तथा Δ सममित अंतर संक्रिया को व्यक्त करता है। दर्शाइए कि $(\wp(X), \Delta, \cap)$ एक वलय है।

हल: X के किन्हीं दो उपसमुच्चयों A और B के लिए, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

इकाई 2 के उदाहरण 10 में आप सीख चुके हैं कि $(\wp(X), \Delta)$ एक आबेली समूह है।
आप यह भी जानते हैं कि $\cap$ साहचर्य है।
अब, आइए देखें कि क्या Δ पर $\cap$ बंटित है।
मान लीजिए कि $A, B, C \in \wp(X)$. तब,

$$A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)]$$
$$= [A \cap (B \setminus C)] \cup [A \cap (C \setminus B)],$$ क्योंकि $\cup$ पर $\cap$ बंटित है।
$$= [(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B)],$$ क्योंकि $\cap$ पूरकीकरण पर वितरित है।
$$= (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

अतः, वाम बंटन नियम सत्य है।
इसी प्रकार, आपको जाँच करनी चाहिए कि दक्षिण बंटन नियम भी सत्य है।
अतः, $(\wp(X), \Delta, \cap)$ एक वलय है।

अब, यदि X परिमित है, मान लीजिए $|X| = 10$, तो $|\wp(X)| = 2^{10}$. इसलिए,
$(\wp(X), \Delta, \cap)$ एक परिमित वलय है।
परंतु, यदि X अपरिमित है, तो $(\wp(X), \Delta, \cap)$ एक अपरिमित वलय है।

***

अब, जबकि आप वलयों के अनेक उदाहरणों का अध्ययन कर चुके हैं, आइए वलय की परिभाषा के R6 को फिर देखें। इस अभिगृहीत में हमने दो समीकरणों को लिखा है। इन दोनों की जाँच करने की आवश्यकता क्यों है? यदि $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, तो क्या इससे यह निष्कर्ष नहीं निकलता कि $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$? अर्थात्, यदि वाम बंटन नियम सत्य है, तो क्या इससे दक्षिण बंटन नियम की सत्यता तय नहीं है? इसके बारे में, निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 3: अभी तक आप अनेक वलयों के उदाहरण देख चुके हैं। क्या वलय पर परिभाषित दोनों संक्रियाएँ क्रमविनिमेय हैं? उदाहरण 4 में क्या ऐसा है? उदाहरणार्थ, क्या
$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}?$$ ऐसा नहीं है। इस प्रकार, $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ में गुणन क्रमविनिमेय नहीं है। वस्तुतः, अधिक व्यापक रूप में, **$n \geq 2$ के लिए, $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ पर गुणन क्रमविनिमेय नहीं है**। इसलिए, इस स्थिति में, हम यह परिकल्पना नहीं कर सकते कि यदि वाम बंटन नियम सत्य है, तो दक्षिण बंटन नियम भी सत्य है। हमें दोनों नियमों की वैधता की अलग रूप से जाँच करने की आवश्यकता है।

टिप्पणी 3 से जुड़ी हैं निम्नलिखित परिभाषाएँ।

परिभाषाएँ: 1) एक वलय $(R, +, \cdot)$ के दो अवयव a और b गुणन के सापेक्ष **एक दूसरे से क्रमविनिमेय करते हैं** यदि $a.b = b.a$.

2) कोई वलय $(R, +, \cdot)$ एक **क्रमविनिमेय वलय (commutative ring)** कहलाता है यदि R पर '$\cdot$' क्रमविनिमेय है, अर्थात् सभी $a, b \in R$ के लिए, $a.b = b.a$.
अतः, एक वलय R क्रमविनिमेय है यदि और केवल यदि सभी $a, b \in R$ के लिए a और b $\cdot$ के सापेक्ष एक दूसरे से क्रमविनिमेय करते हैं।

उदाहरणार्थ, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ और $\mathbb{R}$ क्रमविनिमेय वलय हैं, जबकि $n \geq 2$ के लिए $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ नहीं है। एक अन्य विस्तृत उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 6: दर्शाइए कि $(\wp(X), \Delta, \cap)$ एक क्रमविनिमेय वलय है, जहाँ X एक अरिक्त समुच्चय है।

हल: उदाहरण 5 में आप अध्ययन कर चुके हैं कि $(\wp(X), \Delta, \cap)$ एक वलय क्यों है। अब, कलन पाठ्यक्रम से, आप जानते हैं कि $A \cap B = B \cap A \ \forall \ A, B \in \wp(X)$.
इस प्रकार, $\cap$ क्रमविनिमेय है।
अतः, $(\wp(X), \Delta, \cap)$ एक क्रमविनिमेय वलय है।

***

अब, निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए, जो टिप्पणी 3 में कही गई बात को आगे बढ़ाती है।

टिप्पणी 4: मान लीजिए कि R एक समुच्चय है, जिस पर द्वि-आधारी संक्रियाएँ + और $\cdot$ परिभाषित हैं। मान लीजिए कि R पर $\cdot$ क्रमविनिमेय है। तब, इसकी जाँच करने के लिए कि $(R, +, \cdot)$ के लिए R6 सत्य है या नहीं, केवल एक बंटन नियम की जाँच करना ही काफ़ी है। क्यों? इसलिए कि यदि $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \ \forall \ a, b, c \in R$, तो
$(a+b) \cdot c = c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b = a \cdot c + b \cdot c \ \forall \ a, b, c \in R$.
अतः, इस स्थिति में दूसरा बंटन नियम भी सत्य है।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) $\mathbb{Z}_6$ के शून्येतर अवयवों के समुच्चय $\mathbb{Z}_6^*$ में योग और गुणन के लिए केली सारणियाँ लिखिए। इन सारणियों को देख कर निर्धारित कीजिए कि $(\mathbb{Z}_6^*, +, \cdot)$ एक वलय है या नहीं।

E2) दर्शाइए कि $\{0\}$ सामान्य योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय है। (यह एक **तुच्छ वलय (trivial ring)** कहलाता है।)
साथ ही, दर्शाइए कि यदि कोई एकल (singleton), वलय है, तो वह $\{0\}$ होगा।

E3) दर्शाइए कि समुच्चय $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} = \{p + \sqrt{2}q \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ वास्तविक संख्याओं के योग और गुणन के सापेक्ष एक क्रमविनिमेय वलय है।

E4) मान लीजिए कि $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. दर्शाइए कि आव्यूह योग और गुणन के सापेक्ष R एक वलय है। क्या R एक क्रमविनिमेय वलय है? क्यों, या क्यों नहीं?

E5) मान लीजिए कि $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \text{ वास्तविक संख्याएँ हैं} \right\}$. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह योग और गुणन के सापेक्ष R एक वलय है। क्या R एक क्रमविनिमेय वलय है? क्यों?

E6) निम्नलिखित में वलय कौन-से हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

i) $(\wp(X), \cup, \cap)$, जहाँ X एक अरिक्त समुच्चय है,

ii) $(\mathbb{R}^*, \cdot, +)$,

iii) $\mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$, आव्यूह योग और गुणन के सापेक्ष।

E7) मान लीजिए कि $(R, +, \cdot)$ एक वलय है, जहाँ $R = \{a, b, c\}$. नीचे दी हुई केली सारणियों को पूरा कीजिए। हर नई प्रविष्टि लिखने के पीछे अपने तर्क को स्पष्ट कीजिए।

+	a	b	c
a	a		
b		c	
c			b

·	a	b	c
a			
b		a	
c			

E8) जाँच कीजिए कि $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ एक वलय है या नहीं, जहाँ

$\oplus(m, n) = g.c.d(m, n)$ तथा $\odot(m, n) = l.c.m(m, n)\ \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$.

आइए अब उन वलयों को देखें जिनके अवयव ऐसे फलन हैं जिनका आप 'कलन' में अध्ययन कर चुके हैं।

C[0, 1], **[0, 1]** पर **संतत फलनों का वलय** कहलाता है।

उदाहरण 7: संवृत अंतराल [0, 1] पर परिभाषित सभी संतत वास्तविक-मान फलनों के समुच्चय C[0, 1] पर विचार कीजिए। C[0, 1] में f और g के लिए, तथा $x \in [0, 1]$ के लिए, हम $f + g$ और $f.g$ को निम्नलिखित द्वारा परिभाषित करते हैं:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (अर्थात् बिंदुशः योग), तथा

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ (अर्थात् बिंदुशः गुणन)।

दर्शाइए कि + और · के सापेक्ष C[0, 1] एक वलय है।

हल: 'कलन' से आप जानते हैं कि यदि f और $g \in C[0, 1]$, तो $f + g$ और $f \cdot g$ दोनों C[0, 1] में होते हैं।

आगे, इस तथ्य का उपयोग करते हुए कि $\mathbb{R}$ में योग साहचर्य और क्रमविनिमेय होता है, आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि R1 और R2 को C[0, 1] संतुष्ट करता है।

C[0, 1] का योज्य तत्समक $\mathbf{0} : [0, 1] \to \mathbb{R} : \mathbf{0}(x) = 0$ है।

$f \in C[0, 1]$ का योज्य प्रतिलोम $(-f)$ है, जहाँ $(-f)(x) = -f(x)\ \forall\ x \in [0, 1]$.

इस प्रकार, (C[0, 1], +) एक आबेली समूह है।

पुनः, इसका सत्यापन करने के लिए कि C[0, 1] में गुणन R5 को संतुष्ट करता है, आपको इस तथ्य का उपयोग करना चाहिए कि $\mathbb{R}$ में गुणन साहचर्य है।

अब, आइए देखें कि क्या अभिगृहीत R6 सत्य है।

$f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$ को सिद्ध करने के लिए, हम $(f \cdot (g + h))(x)$ को लेते हैं, जहाँ $x \in [0, 1]$.

अब, $(f \cdot (g + h))(x) = f(x)(g + h)(x)$

$= f(x)(g(x) + h(x))$

$= f(x)g(x) + f(x)h(x)$, क्योंकि $\mathbb{R}$ में + पर $\cdot$ बंटित होता है।

$= (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x)$

$= (f \cdot g + f \cdot h)(x)$

अतः, $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$.

क्योंकि गुणन $\mathbb{R}$ में क्रमविनिमेय है, इसलिए यह $C[0, 1]$ में क्रमविनिमेय है। अतः, टिप्पणी 4 द्वारा, दूसरा बंटन नियम भी सत्य है। इस प्रकार, $C[0, 1]$ के लिए R6 सत्य है।

अतः, $(C[0, 1], +, \cdot)$ एक वलय है।

***

अगला उदाहरण हमें एक दिए हुए आबेली समूह से एक वलय को परिभाषित करने की एक विधि को दर्शाता है।

उदाहरण 8: मान लीजिए कि $(A, +)$ एक आबेली समूह है। A की सभी अंतराकारिताओं के समुच्चय End A पर विचार कीजिए। $f, g \in \text{End } A$ के लिए, तथा $a \in A$ के लिए, निम्नलिखित द्वारा $f + g$ और $f \cdot g$ को परिभाषित कीजिए:

$$\left.\begin{array}{l}(f+g)(a) = f(a) + g(a), \text{ और} \\ (f \cdot g)(a) = f \circ g(a) = f(g(a)).\end{array}\right\} \quad \ldots(1)$$

दर्शाइए कि $(\text{End } A, +, \cdot)$ एक वलय है। (यह वलय **A का अंतराकारिता वलय (endomorphisms ring)** कहलाता है।)

हल: इकाई 8 से आप जानते हैं कि

$\text{End } A = \{f : A \to A \mid f(a+b) = f(a) + f(b) \ \forall \ a, b \in A\}$.

आइए पहले इसकी जाँच करें कि (1) में परिभाषित '+' और '·' End A पर द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं।

सभी $a, b \in A$ के लिए,

$(f+g)(a+b) = f(a+b) + g(a+b)$

$= (f(a) + f(b)) + (g(a) + g(b))$, क्योंकि $f, g \in \text{End } A$.

$= (f(a) + g(a)) + (f(b) + g(b))$

$= (f+g)(a) + (f+g)(b)$, तथा

$(f \cdot g)(a+b) = f(g(a+b))$

$= f(g(a) + g(b))$, क्योंकि $g \in \text{End } A$.

$= f(g(a)) + f(g(b))$, क्योंकि $f \in \text{End } A$.

$= (f \cdot g)(a) + (f \cdot g)(b)$.

इस प्रकार, $f + g$ और $f \cdot g$ दोनों End A में हैं।

अब, आइए देखें कि क्या $(\text{End } A, +, \cdot)$ अभिगृहीतों $R1 - R6$ तक को संतुष्ट करता है।

क्योंकि आबेली समूह A में योग क्रमविनिमेय और साहचर्य है, इसलिए End A में भी योग ऐसा ही है।

A पर शून्य अंतराकारिता End A का शून्य अवयव है।

$f \in \text{End } A$ का योज्य प्रतिलोम $(-f)$ है, जहाँ $(-f)(a) = -f(a) \ \forall \ a \in A$.

इस प्रकार, $(\text{End } A, +)$ एक आबेली समूह है।

आप यह भी जानते हैं कि व्यापक रूप में, फलनों का संयोजन एक साहचर्य संक्रिया है, और इसीलिए यह End A में भी ऐसा ही है।

अंत में, R6 की जाँच करने के लिए, हम किन्हीं $f, g, h \in \text{End } A$ के लिए, $f \cdot (g+h)$ को देखते हैं।
किसी भी $a \in A$ के लिए,

$$\begin{aligned}[f \cdot (g+h)](a) &= f((g+h)(a)) \\ &= f(g(a)+h(a)) \\ &= f(g(a))+f(h(a)), \text{ क्योंकि } f \in \text{End } A. \\ &= (f \cdot g)(a)+(f \cdot h)(a) \\ &= (f \cdot g + f \cdot h)(a).\end{aligned}$$

$\therefore f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h.$
इसी तरह आपको सिद्ध करना चाहिए कि $(f+g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h.$
यहाँ ध्यान दीजिए कि End A में $\cdot$ क्रमविनिमेय नहीं है, क्योंकि $f, g \in \text{End } A$ के लिए, $f \circ g$ और $g \circ f$ का बराबर होना आवश्यक नहीं है।

इस प्रकार, End A के लिए R1 – R6 सत्य हैं।
अतः, $(\text{End } A, +, \cdot)$ एक वलय है।

***

अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करें।

E9) मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है तथा $(R, +, \cdot)$ एक वलय है। यह भी मान लीजिए कि X से R तक के सभी फलनों का समुच्चय $\text{Map}(X, R)$ है, अर्थात् $\text{Map}(X, R) = \{f \mid f : X \to R\}$.
$\text{Map}(X, R)$ पर + और $\cdot$ को बिंदुशः योग और गुणन द्वारा परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि $(\text{Map}(X, R), +, \cdot)$ एक वलय है।
X और R पर किन प्रतिबंधों के अधीन $\text{Map}(X, R)$ एक क्रमविनिमेय वलय होगा?

E10) आप जानते हैं कि $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ एक वलय है। अब जाँच कीजिए कि $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ एक वलय है या नहीं, जहाँ $\oplus$ और $\odot$, सभी $a, b \in \mathbb{R}$ के लिए निम्न द्वारा परिभाषित हैं: $a \oplus b = a + b + 1$, और $a \odot b = a \cdot b + a + b$.
(यहाँ + और $\cdot$ वास्तविक संख्याओं के सामान्य योग और गुणन को व्यक्त करते हैं।)

E10 हमें बताता है कि एक दिए हुए समुच्चय से अनेक विभिन्न वलय परिभाषित हो सकते हैं।

E11) मान लीजिए कि R एक वलय है। सिद्ध कीजिए कि आव्यूह योग और गुणन के सापेक्ष $\mathbb{M}_2(R)$ एक वलय है। (वास्तव में, $\mathbb{M}_n(R)$ एक वलय है $\forall\ n \in \mathbb{N}$)

अब, इकाई 2 में आप देख चुके हैं कि समूहों का कार्तीय गुणनफल एक समूह है, जो उनका अनुलोम गुणनफल कहलाता है। आइए देखें कि ऐसा ही वलयों के कार्तीय गुणनफल के साथ होता है या नहीं।

उदाहरण 9: मान लीजिए कि $(A, +, \cdot)$ और $(B, \boxplus, \boxdot)$ दो वलय हैं। दर्शाइए कि निम्नलिखित द्वारा परिभाषित $\oplus$ और $*$ के सापेक्ष इनका कार्तीय गुणनफल $A \times B$ एक

वलय है :

$(a, b) \oplus (a', b') = (a + a', b \boxplus b')$, और

$(a, b) * (a', b') = (a \cdot a', b \boxdot b')$,

$A \times B$ में सभी $(a, b), (a', b')$ के लिए।

[वलय $(A \times B, \oplus, *)$ वलयों $(A, +, \cdot)$ और $(B, \boxplus, \boxdot)$ का **बाह्य अनुलोम गुणनफल (external direct product)** (या केवल **अनुलोम गुणनफल**) कहलाता है।]

हल: इकाई 2 में आप देख चुके हैं कि $(A \times B, \oplus)$ एक समूह है। आगे, यह एक आबेली समूह है, क्योंकि $(A, +)$ और $(B, \boxplus)$ आबेली समूह हैं।

क्योंकि A और B में गुणन साहचर्य हैं, इसलिए $A \times B$ में $*$ साहचर्य है।

पुनः, इस तथ्य का उपयोग करते हुए कि A और B के लिए R6 सत्य है, आपको यह सिद्ध करना चाहिए कि $A \times B$ के लिए R6 सत्य है।

इस प्रकार, $(A \times B, \oplus, *)$ एक वलय है।

***

यदि आपने उपरोक्त उदाहरण को समझ लिया है, तो आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

E12) अनुलोम गुणनफल $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ के लिए योग और गुणन सारणियों को लिखिए। इस तरह निर्धारित कीजिए कि क्या यह वलय क्रमविनिमेय है या नहीं।

E13) दर्शाइए कि $\mathbb{R}^2$ और $\mathbb{C}^3$ वलय हैं।

E13 के व्यापकीकरण से आप देख सकते हैं कि $\forall\, n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ और $\mathbb{C}^n$ वलय क्यों हैं। अब तक आप वलयों के अनेक उदाहरणों से परिचित हो गए होंगे। अतः, आइए वलयों के कुछ मौलिक गुणों की चर्चा करना प्रारंभ करें।

10.3 प्रारंभिक गुण

इस भाग में, हम वलयों के कुछ मौलिक गुणों को सिद्ध करेंगे तथा उनका अनुप्रयोग करेंगे। ये गुण वलय की परिभाषा के सीधे परिणाम हैं। आगे बढ़ते हुए आपको नहीं भूलना चाहिए कि किसी भी वलय R के लिए, $(R, +)$ एक आबेली समूह होता है। अतः, इस पाठ्यक्रम की पिछली इकाइयों में इस्तेमाल किए गए संकेत और समूहों के लिए प्राप्त परिणाम आबेली समूह $(R, +)$ के लिए भी लागू हैं। विशेष तौर पर, ध्यान दीजिए कि

i) योज्य तत्समक 0 अद्वितीय है, तथा किसी भी अवयव $a \in R$ का योज्य प्रतिलोम $(-a)$ है;

ii) $-(-a) = a \ \forall\ a \in R$;

iii) योग के लिए निरसन नियम लागू होता है, अर्थात् $\forall\ a, b, c \in R,\ a + c = b + c \Rightarrow a = b$;

iv) $a - b = a + (-b) \ \forall\ a, b \in R$.

इस भाग में, कुछ मौलिक परिणामों को सिद्ध करते समय, हम उपरोक्त तथ्यों का बीच-बीच में उपयोग करेंगे।

अतः, आइए कुछ ऐसे गुणों से प्रारंभ करें जो मुख्य रूप से अभिगृहीत R6 से प्राप्त होते हैं। आप जानते हैं कि किन्हीं $m, n \in \mathbb{Z}$ के लिए, $m \cdot 0 = 0$ तथा
$m(-n) = -mn = (-m)n.$

निम्नलिखित प्रमेय हमें बताता है कि ये गुण, तथा कुछ अन्य गुण, किसी भी वलय R के लिए सत्य हैं।

प्रमेय 1: मान लीजिए कि R एक वलय है। तब, किन्हीं $a, b, c \in R$ के लिए,

i) $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a,$

ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab),$

iii) $(-a)(-b) = ab,$

iv) $a(b-c) = ab - ac$ और $(b-c)a = ba - ca.$

उपपत्ति: i) अब, $0 + 0 = 0$

$\Rightarrow a(0+0) = a \cdot 0,$ किसी भी $a \in R$ के लिए।

$\Rightarrow (a \cdot 0) + (a \cdot 0) = a \cdot 0,$ वाम बंटन नियम के अनुप्रयोग से।

$= a \cdot 0 + 0,$ क्योंकि 0 योज्य तत्समक है।

$\Rightarrow a \cdot 0 = 0,$ $(R, +)$ के लिए निरसन नियम द्वारा।

दक्षिण बंटन नियम का उपयोग करते हुए, आपको इसी प्रकार दर्शाना चाहिए कि $0 \cdot a = 0.$ (ध्यान दीजिए कि हम यह मान कर नहीं चल सकते कि $0 \cdot a = a \cdot 0,$ क्योंकि हो सकता है कि R क्रमविनिमेय वलय नहीं है।)

इस प्रकार, $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a,$ सभी $a \in R$ के लिए।

ii) $a, b \in R$ के लिए,

$0 = a \cdot 0,$ उपरोक्त (i) से।

$= a(b + (-b)),$ क्योंकि $0 = b + (-b).$

$= ab + a(-b),$ बंटन द्वारा।

अब, $ab + [-(ab)] = 0$ और $ab + a(-b) = 0.$

परंतु, जैसा कि आप जानते हैं, अवयव का योज्य प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

अतः, हम $[-(ab)] = a(-b)$ प्राप्त करते हैं।

इसी प्रकार, $a + (-a) = 0$ का उपयोग करते हुए कि आपको यह दर्शाना चाहिए कि $[-(ab)] = (-a)b.$

इस प्रकार, $a(-b) = (-a)b = -(ab),$ सभी $a, b \in R$ के लिए।

iii) $a, b \in R$ के लिए,

$(-a)(-b) = -(a(-b)),$ उपरोक्त (ii) से।

$= -[-(ab)],$ उपरोक्त (ii) से।

$= ab,$ क्योंकि $-(-x) = x,$ सभी $x \in R$ के लिए।

iv) $a, b, c \in R$ के लिए,

$a(b-c) = a(b + (-c))$

$= ab + a(-c),$ बंटन द्वारा।

$= ab + (-(ac)),$ उपरोक्त (ii) से।

$= ab - ac.$

इसी प्रकार आपको सिद्ध करना चाहिए कि $(b-c)a = ba - ca.$ ■

इन गुणों के उपयोग से अब आप कुछ प्रश्नों को हल कीजिए।

E14) सिद्ध कीजिए कि यदि किसी वलय R में दोनों संक्रियाएँ बराबर होती हैं (अर्थात्, $a+b=ab \ \forall\ a, b\in R$), तो R तुच्छ वलय होगा।

E15) मान लीजिए कि R एक वलय है। $a_1, a_2,\ldots,a_n \in R$ के लिए, $(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, को निम्न तरीक़े से परिभाषित कीजिए:
जहाँ $n\in \mathbb{N}$, $(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(a_1+\cdots+a_{n-1})+a_n$, अर्थात् पुनरावर्ती तरीक़े से।
अब, आगमन के सिद्धांत का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि यदि $a, b_1,\ldots,b_n\in R$, जहाँ $n\in \mathbb{N}$, तो
$a(b_1+b_2+\cdots+b_n)=ab_1+ab_2+\cdots+ab_n$, तथा
$(b_1+b_2+\cdots+b_n)a=b_1a+b_2a+\cdots+b_na.$

जो आपने E15 में किया है, आइए उसका विस्तार करें। हम वलय के तीन या अधिक अवयवों के योग और गुणनफल को देखेंगे। हम इन्हें पुनरावर्ती रूप में परिभाषित करेंगे, जैसा कि हमने समूहों की स्थिति में किया था (देखिए इकाई 2)।

परिभाषाएं: यदि $k\in \mathbb{N}, k\geq 2$, ऐसा है कि एक वलय R में k अवयवों का योग परिभाषित है, तो हम $(k+1)$ **अवयवों** $a_1, a_2,\ldots,a_{k+1}$ **के योग को** इसी क्रम में लेकर निम्न रूप में परिभाषित करते हैं,
$a_1+\cdots+a_{k+1}=(a_1+\cdots+a_k)+a_{k+1}.$
इसी प्रकार, यदि $k\in\mathbb{N},\ k\geq 2$, ऐसा है कि R में k अवयवों का गुणनफल परिभाषित है, तो हम $(k+1)$ **अवयवों** $a_1, a_2,\ldots,a_{k+1}$ **के गुणनफल** को (इसी क्रम में लेते हुए) निम्न रूप में परिभाषित करते हैं: $a_1\cdot a_2\ldots a_{k+1}=(a_1\cdot a_2\ldots a_k)\cdot a_{k+1}.$

जैसा कि हमने इकाई 2 में समूहों के लिए किया था, आप + और · दोनों के सापेक्ष वलयों के लिए भी घातांकों के नियम प्राप्त कर सकते हैं। वैसे, आपको किसी भी वलय R के लिए, निम्नलिखित परिणामों को सिद्ध करना चाहिए।

LI 1) यदि m और n **धनात्मक** पूर्णांक हैं तथा $a\in R$, तो
$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ और $(a^m)^n=a^{mn}.$

LI 2) $m, n\in \mathbb{Z}$ और $a, b\in R$ के लिए,
i) $(n+m)a=na+ma,$
ii) $(nm)a=n(ma)=m(na),$
iii) $n(a+b)=na+nb,$
iv) $m(ab)=(ma)b=a(mb),$ तथा
v) $(ma)(nb)=mn(ab)=(mna)b.$

LI 3) (व्यापकीकृत बंटन नियम): $m, n\in \mathbb{N}$ के लिए, यदि
$a_1, a_2,\ldots,a_m, b_1,\ldots,b_n\in R,$ तो
$(a_1+\cdots+a_m)(b_1+\cdots+b_n)$
$=a_1b_1+\cdots+a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_2b_n+\cdots+a_mb_1+\cdots+a_mb_n,$
तथा योग के क्रम को बदला जा सकता है क्योंकि R में योग क्रमविनिमेय है।

अब, कुछ संबंधित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E16) यदि R एक वलय है तथा $a, b \in R$ ऐसे हैं कि $ab = ba$, तो निम्नलिखित **द्विपद प्रसार** (**binomial expansion**) को सिद्ध करने के लिए, $n \in \mathbb{N}$ पर आगमन का उपयोग कीजिए :
$(a+b)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}^nC_ka^{n-k}b^k + \cdots + {}^nC_{n-1}ab^{n-1} + b^n$, जहाँ ${}^nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

E17) LI 1, अर्थात् $a^m \cdot a^n = a^{m+n}\ \forall\ a \in R,\ m, n \in \mathbb{N}$ को सिद्ध कीजिए, जहाँ R एक वलय है। क्या यह तब भी सत्य होगा अगर $m, n \le 0$? क्यों, या क्यों नहीं?

E18) यदि R एक वलय है, तो LI 2(v), अर्थात
$(ma)(nb) = mn(ab)\ \forall\ m, n \in \mathbb{Z},\ a, b \in R$, को सिद्ध कीजिए।

वलयों के अन्य अनेक गुण हैं जिनकी चर्चा हम इस खंड में आगे करते रहेंगे। अभी के लिए, आइए हम कुछ ऐसे वलयों पर ध्यान दें जो उन पर परिभाषित गुणन के गुणों के अनुसार वर्गीकृत किए जाते हैं।

10.4 तत्समकी वलय

वलय की परिभाषा यह गारंटी देती है कि द्वि-आधारी संक्रिया गुणन साहचर्य होती है। हम यह भी जानते हैं कि · और + बंटन नियमों को संतुष्ट करते हैं। गुणन के गुणों के बारे में इससे अधिक कुछ नहीं कहा जाता है। यदि हम इस संक्रिया पर कुछ प्रतिबंध लगा दें, तो हमें अनेक प्रकारों के वलय प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ, आप जानते हैं कि यदि गुणन क्रमविनिमेय है, तो हमें एक क्रमविनिमेय वलय प्राप्त होता है। आइए देखें कि क्या होता है, यदि हम प्रतिबंध लगाएं कि $(R, \cdot)$ इकाई 2 के भाग 2.2 के G2 को संतुष्ट करे।

परिभाषा: वलय $(R, +, \cdot)$ एक **तत्समकी वलय** (**ring with identity** or **ring with unity**) कहलाता है, यदि गुणन के सापेक्ष R का एक तत्समक अवयव हो, अर्थात् यदि R में एक ऐसा अवयव e है, जिससे कि सभी $a \in R$ के लिए $ae = ea = a$.

क्या आपकी नज़र में ऐसा कोई वलय है? क्या $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ और $\mathbb{R}$ तत्समकी वलय के उदाहरण नहीं हैं? प्रत्येक स्थिति में, अवयव 1 एक ऐसा तत्समक है।

इन सभी उदाहरणों को देखते हुए आप शायद सोच रहे होंगे कि प्रत्येक वलय एक तत्सकी वाला वलय होता है। अब, निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 10: दर्शाइए कि वलय $5\mathbb{Z}$ एक तत्समकी वलय नहीं है।

हल: हम इसे अंतर्विरोध द्वारा सिद्ध करेंगे। मान लीजिए कि $5\mathbb{Z}$ का एक तत्समक e है। तब, किसी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए, $e = 5n$.
अब, $5e = 5 \Rightarrow 5 \cdot 5n = 5$, जो संभव नहीं है, क्योंकि $n \in \mathbb{Z}$.
अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं।
इस प्रकार, $5\mathbb{Z}$ एक तत्समकी वलय नहीं है।

***

इससे पहले कि हम अगली परिभाषा पर जाएँ, आप कुछ छोटे प्रश्नों को हल कर लीजिए।

E19) सिद्ध कीजिए कि यदि किसी वलय R का गुणन के सापेक्ष एक तत्समक अवयव है, तो यह **तत्समक अद्वितीय होता है।** (हम प्रायः R में इस **अद्वितीय तत्समक अवयव** को प्रतीक **1** द्वारा व्यक्त करते हैं।)

E20) जाँच कीजिए कि $n\mathbb{Z}$ एक तत्समकी वलय है या नहीं, जहाँ $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

अब, $\mathbb{Z}$ पर विचार कीजिए। आप देख चुके हैं कि $\mathbb{Z}$ एक तत्समकी वलय है तथा क्रमविनिमेय है। इस प्रकार, $\mathbb{Z}$ एक ऐसे प्रकार के वलय का उदाहरण है जिसे अब हम परिभाषित करेंगे। इसे जो नाम दिया गया है, उससे आपको कोई हैरानी नहीं होगी!

परिभाषा: वलय $(R, +, \cdot)$ एक **क्रमविनिमेय तत्समकी (commutative ring with identity) वलय** कहलाता है यदि वह एक क्रमविनिमेय वलय है तथा उसका गुणनात्मक तत्समक होता है।

इस प्रकार, वलय $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ और $\mathbb{C}$ सभी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय हैं। इन सभी वलयों में पूर्णांक 1 तत्समक, अर्थात् गुणनात्मक तत्समक है। आइए विस्तृत रूप से एक उदाहरण पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 11: दर्शाइए कि $S = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, निम्नलिखित रूप से परिभाषित योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय है :

$(a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) = (a + c) + \sqrt{5}(b + d)$, तथा

$(a + b\sqrt{5}) \cdot (c + d\sqrt{5}) = (ac + 5bd) + \sqrt{5}(ad + bc)$.

आगे, क्या S क्रमविनिमेय है? क्या S का तत्समक है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

हल: गाउसीय पूर्णांकों की स्थिति की तरह, आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि S पर योग और गुणन दोनों ही द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं, तथा वही संक्रियाएँ हैं जो $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ पर परिभाषित हैं।

आगे, इस तथ्य का उपयोग करते हुए कि R1 और R2 को $\mathbb{Z}$ संतुष्ट करता है, आपको सिद्ध करना चाहिए कि R1 और R2 को S संतुष्ट करता है।

साथ ही, $0 \in S$ योज्य तत्समक है, तथा $a + \sqrt{5}b$ का योज्य प्रतिलोम $(-a) + \sqrt{5}(-b)$ है।

इस प्रकार, $(S, +)$ एक आबेली समूह है।

साथ ही, क्योंकि $\mathbb{R}$ में गुणन साहचर्य और क्रमविनिमेय है, इसलिए यह S में भी साहचर्य और क्रमविनिमेय है।

अंत में, $a + b\sqrt{5}, c + d\sqrt{5}, m + n\sqrt{5} \in S$ के लिए,

$$(a + b\sqrt{5})[(c + d\sqrt{5}) + (m + n\sqrt{5})]$$
$$= (a + b\sqrt{5})[(c + m) + \sqrt{5}(d + n)]$$
$$= a(c + m) + 5b(d + n) + \sqrt{5}[a(d + n) + b(c + m)]$$
$$= [ac + 5bd + \sqrt{5}(ad + bc)] + [am + 5bn + \sqrt{5}(an + bm)]$$
$$= (a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) + (a + b\sqrt{5})(m + n\sqrt{5}).$$

इस प्रकार, वाम बंटन नियम सत्य है।

क्योंकि S में गुणन क्रमविनिमेय है, इसलिए दक्षिण बंटन नियम भी सत्य है।

इस प्रकार, $(S, +, \cdot)$ एक क्रमविनिमेय वलय है।

अंत में, $1 \in S$ ऐसा है कि $(a+b\sqrt{5}) \in S$ के लिए, $(a+b\sqrt{5}) \cdot 1 = a+b\sqrt{5}$.
अतः, S तत्समक 1 वाला एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है।

***

जो आपने उदाहरण 11 में देखा है, वह अधिक व्यापक तौर पर भी सत्य है। अर्थात्, किसी भी पूर्णांक n के लिए जो एक वर्ग नहीं है, $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \mathbb{Z} + \sqrt{n}\mathbb{Z}$, एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है। [निःसंदेह, यदि n एक वर्ग है मान लीजिए $n = m^2$, $m \in \mathbb{Z}$, तो $\sqrt{n} = \pm m$. तब $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.]
इस प्रकार, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ सभी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय हैं।

हम ऐसे भी क्रमविनिमेय वलय ज्ञात कर सकते हैं, जो तत्समकी वलय नहीं हैं। उदाहरणार्थ, उदाहरण 10 का वलय क्रमविनिमेय है, परंतु इसका कोई गुणनात्मक तत्समक नहीं है। इसके विलोम के बारे में क्या कह सकते हैं? अर्थात्, यदि R तत्समकी वलय है, तो क्या यह क्रमविनिमेय होगा? आइए देखें।

उदाहरण 12: क्या प्रत्येक तत्समकी वलय क्रमविनिमेय होता है? क्यों, या क्यों नहीं?

हल: $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ पर विचार कीजिए। क्योंकि $A\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}A \ \forall\ A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$,
इसलिए $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ का तत्मसक $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ है।
परंतु यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ तो

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}, \text{ तथा}$$

$$BA = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 0\end{bmatrix}.$$

इस प्रकार, $AB \neq BA$.
अतः, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ क्रमविनिमेय नहीं है।

***

अब, आइए उदाहरण 9 में दिए वलय को फिर देखें। क्रमविनिमेयता और गुणनात्मक तत्समक के संदर्भ में इसके बारे में हम क्या कह सकते हैं? आइए देखें।

उदाहरण 13: मान लीजिए कि A और B वलय हैं। दर्शाइए कि
i) $A \times B$ क्रमविनिमेय है यदि और केवल यदि दोनों वलय A और B क्रमविनिमेय हैं।
ii) $A \times B$ का तत्समक है यदि और केवल यदि दोनों A और B के तत्समक हैं।

हम कहते हैं कि किसी वलय R का **तत्समक है,** यदि यह तत्समकी है।

हल: सुविधा के लिए हम तीनों वलयों A, B और $A \times B$ में संक्रियाओं को + और $\cdot$ द्वारा व्यक्त करेंगे।
i) मान लीजिए कि (a, b) और $(a', b') \in A \times B$. तब,
$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)$

$\Leftrightarrow (a \cdot a', b \cdot b') = (a' \cdot a, b' \cdot b)$

$\Leftrightarrow a \cdot a' = a' \cdot a$ और $b \cdot b' = b' \cdot b.$

इस प्रकार, $A \times B$ क्रमविनिमेय है यदि और केवल यदि दोनों A और B क्रमविनिमेय वलय हैं।

ii) आपको इसी प्रकार दर्शाना चाहिए कि $A \times B$ तत्समकी है यदि और केवल यदि दोनों A और B तत्समकी हैं। यदि A और B के तत्समक क्रमशः e_1 और e_2 हैं, तो $A \times B$ का तत्समक (e_1, e_2) है।

***

अब आप एक प्रश्न को हल क्यों नहीं कर लेते?

E21) उदाहरणों 2 से 8 में, कौन-कौन से वलय तत्समकी वलय हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

अब, क्या तुच्छ वलय तत्समकी वलय हो सकता है? लगता है कि ऐसा नहीं है, क्योंकि हमारे दिमाग़ में बैठा है कि $\mathbb{Z}$ में $0 \neq 1$ होता है।

परंतु, $0 \cdot 0 = 0$.

अतः, इस वलय के लिए 0 गुणनात्मक तत्समक भी है।

इस प्रकार, **तुच्छ वलय एक तत्समकी वलय है, जिसमें योज्य और गुणनात्मक तत्समक एक ही हैं।**

परंतु, यदि R एक तुच्छ वलय नहीं है, तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त है।

प्रमेय 2: मान लीजिए कि R तत्समक 1 वाला एक वलय है। यदि $R \neq \{0\}$, तो अवयव 0 और 1 अलग हैं।

उपपत्ति: क्योंकि $R \neq \{0\}$, इसलिए $\exists\, a \in R$ s.t. $a \neq 0$.

अब, मान लीजिए कि $0 = 1$.

तब, $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0,$ प्रमेय 1 द्वारा।

अर्थात्, $a = 0,$ जो एक अंतर्विरोध है।

अतः, जो हम मान कर चले थे, वह है।

अतः, $0 \neq 1$. ■

अब, आपके लिए कुछ संबंधित प्रश्न हैं।

E22) जाँच कीजिए कि E10 में दिया गया वलय एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है या नहीं।

E23) जाँच कीजिए कि $X = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ सामान्य आव्यूह योग और गुणन के सापेक्ष एक क्रमविनिमेय तत्ससमकी वलय है या नहीं।

E24) मान लीजिए कि R एक अतुच्छ **बूलीय वलय (Boolean ring)** (अर्थात्, $a^2 = a \ \forall\ a \in R$). दर्शाइए कि $a = -a \ \forall\ a \in R$. इससे दर्शाइए कि R क्रमविनिमेय होगा ही।

अब आइए एक अक्रमविनिमेय तत्समकी वलय के एक महत्वपूर्ण उदाहरण पर विचार करें। यह **वास्तविक चतुष्टयिओं** (**real quaternions**) का वलय है। इसकी सर्वप्रथम व्याख्या आयरलैंड के गणितज्ञ विलियम रोअन हैमिल्टन (William Rowan Hamilton) (1805-1865) द्वारा की गई थी। यह वलय ज्यामिति, संख्या सिद्धांत तथा यांत्रिकी के अध्ययन में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। बाद में, टिप्पणी 5 में, हम इस वलय चतुष्टयिओं के समूह Q_8 से संबंध पर विचार करेंगे। (याद कीजिए कि आपने पिछली इकाइयों में Q_8 का अध्ययन किया था।)

आकृति 2: वि.रो. हैमिल्टन

उदाहरण 14: मान लीजिए कि $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, जहाँ i, j, k ऐसे प्रतीक हैं जो $i^2 = -1 = j^2 = k^2$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ और $ki = j = -ik$ को संतुष्ट करते हैं।

हम $\mathbb{H}$ में योग और गुणन को निम्नलिखित द्वारा परिभाषित करते हैं :

$(a + bi + cj + dk) + (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)$
$= (a + a_1) + (b + b_1)i + (c + c_1)j + (d + d_1)k$, तथा
$(a + bi + cj + dk) \cdot (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1) +$
$(ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1)i + (ac_1 - bd_1 + ca_1 + db_1)j + (ad_1 + bc_1 - cb_1 + da_1)k.$

$\mathbb{H}$ के अवयव $\mathbb{H}$ के रचयिता के नाम पर **वास्तविक हेमिल्टोनियम** कहलाते हैं।

(देखने में यह गुणन कुछ जटिल लग सकता है। परंतु ऐसा है नहीं। आप इसे i, j और k के बीच क्या संबंधों को ध्यान में रखकर 'कलन' में बहुपदों के गुणन की तरह कर सकते हैं।)

दर्शाइए कि $\mathbb{H}$ एक अक्रमविनिमेय तत्समकी वलय है।

हल: आपको सिद्ध करना चाहिए कि

i) $(\mathbb{H}, +)$ एक आबेली समूह है, जिसमें योज्य तत्समक $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$ है,

ii) $\mathbb{H}$ में गुणन साहचर्य है, (यह कुछ उलझा हुआ हो सकता है, परंतु इसे छोड़िए मत!)

iii) बंटन नियम सत्य हैं, तथा

iv) $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$ $\mathbb{H}$ में तत्समक है।

इस प्रकार, $\mathbb{H}$ एक तत्समकी वलय है।

क्या आप इससे सहमत होंगे कि $\mathbb{H}$ एक क्रमविनिमेय वलय नहीं है? ज़रूर होंगे यदि आपको याद होगा कि $ij \neq ji$, उदाहरण के तौर पर।

***

अब, चतुष्टयिओं के बारे में निम्नलिखित महत्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 5: इकाई 2 के E29 में, आपका परिचय चतुष्टयी समूह Q_8 से कराया गया था। वहाँ, यदि हम $i = A$, $j = B$, $k = C$ और $1 = I$ रखें, तो आप देखेंगे कि i, j, k उन्हीं संबंधों को सतुंष्ट करते हैं जिन्हें A, B, C संतुष्ट करते हैं।

अतः, $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ समुच्चय $\mathbb{H}$ का एक उपसमुच्चय है, जहाँ उदाहरण 14 में दिए संबंधों को i, j, k संतुष्ट करते हैं।

वस्तुतः, जैसा कि आप खंड 2 में देख चुके हैं, $Q_8 = \langle i \rangle \times \langle j \rangle$.

दूसरी ओर, समूह $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

इस प्रकार, चतुष्टयी समूह $(\mathbb{H}, +)$ **नहीं** है।

साथ ही, $Q_8 \not< \mathbb{H}$, क्योंकि Q_8 गुणन के सापेक्ष एक समूह है, जबकि $\mathbb{H}$ योग के सापेक्ष एक समूह है।

अब, आइए तत्समकी वलयों के एक रोचक पहलू पर विचार करें। ऐसे वलयों में कुछ अवयव गुणन के सापेक्ष व्युत्क्रमणीय (invertible) होते हैं। उदाहरणार्थ, $\mathbb{Z}$ पर विचार कीजिए। यहाँ $1 \cdot 1 = 1$ तथा $(-1) \cdot (-1) = 1$. इस प्रकार, 1 और (-1) दोनों व्युत्क्रमणीय हैं। परंतु $\mathbb{Z}$ का कोई अन्य अवयव व्युत्क्रमणीय नहीं है, क्योंकि यदि किसी $y \in \mathbb{Z}$ के लिए, $x \in \mathbb{Z}$ ऐसा है कि $xy = 1$, तो $x = 1$ या $x = -1$.

दूसरी ओर, $\mathbb{R}$ एक ऐसा तत्समकी वलय है जिसमें $\mathbb{R}^*$ का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय है।

ये उदाहरण हमें निम्नलिखित परिभाषा पर ले जाते हैं।

परिभाषा: मान लीजिए कि $(R, +, \cdot)$ एक तत्समकी वलय है। R का एक अवयव r एक **मात्रक** (**unit**) कहलाता है यदि ऐसा $s \in R$ है जिससे कि $rs = 1 = sr$. इस स्थिति में, s को r का एक **प्रतिलोम** (**inverse**) कहते हैं। (ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में s भी एक मात्रक है!)

उपरोक्त परिभाषा हमें बताती है कि एक मात्रक एक तत्समकी वलय का एक व्युत्क्रमणीय अवयव होता है। उदाहरणार्थ, प्रत्येक तत्समकी वलय में तत्समक एक मात्रक होता है, क्योंकि $1 \cdot 1 = 1$. इसी प्रकार, $\mathbb{C}$ का प्रत्येक शून्येतर अवयव एक मात्रक है। अतः, एक तत्समकी वलय में अनेक मात्रक हो सकते हैं। इस संबंध में निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 6: 'मात्रक' और 'तत्समक' के अंतर को ध्यानपूर्वक देखिए। एक मात्रक कोई भी व्युत्क्रमणीय अवयव होता है, जबकि तत्समक अद्वितीय है तथा संबंधित वलय में यह गुणनात्मक तत्समक है। इस प्रकार, एक तत्समकी वलय में, तत्समक एक मात्रक है, परंतु वलय में तत्समक के अतिरिक्त अनेक मात्रक हो सकते हैं।

अब, जैसे कि एक योज्य प्रतिलोम अद्वितीय होता है, क्या एक मात्रक का गुणनात्मक प्रतिलोम अद्वितीय होगा? आइए देखें।

प्रमेय 3 : यदि एक तत्समकी वलय R में r एक मात्रक है, तो एक **अद्वितीय** $s \in R$ है जिससे कि $rs = 1$, अर्थात् R में r का एक अद्वितीय प्रतिलोम होता है।

इसकी उपपत्ति इकाई 2 में प्रमेय 2 की उपपत्ति की तरह ही है। हम इसे आपको सिद्ध करने के लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E25). ■

आप देख चुके हैं कि किसी तत्समकी वलय में मात्रकों का समुच्चय परिमित या अपरिमित हो सकता है। वस्तुतः, मात्रक के और अधिक गुण हैं, जैसा कि निम्नलिखित प्रमेय हमें बताता है।

प्रमेय 4: मान लीजिए कि R एक तत्समकी वलय है। R में मात्रकों का समुच्चय गुणन के सापेक्ष एक समूह होता है। (यह समूह **R के मात्रकों का समूह** (group of units of R) कहलाता तथा इसे **U(R)** द्वारा व्यक्त करते हैं।)

उपपत्ति: सर्वप्रथम, क्योंकि $1 \in U(R)$, इसलिए $U(R) \neq \emptyset$.

आगे, यदि $r_1, r_2 \in U(R)$, तो $\exists\, s_1, s_2 \in R$ s.t. $r_1 s_1 = s_1 r_1 = 1$, तथा $r_2 s_2 = s_2 r_2 = 1$.
अतः, $(r_1 r_2)(s_2 s_1) = r_1 (r_2 s_2) s_1 = r_1 \cdot 1 \cdot s_1 = r_1 s_1 = 1$.
इस प्रकार, $U(R)$ में गुणन संवृत है।
साथ ही, $1 \in U(R)$ तत्समक है।
आगे, किसी भी $r \in U(R)$ के लिए, वह अद्वितीय $s \in U(R)$, जिससे कि $rs = 1 = sr$ R का प्रतिलोम है।
अतः, $(U(R), \cdot)$ एक समूह है। ■
आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 15: $U(R)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ R निम्नलिखित है :
i) $\mathbb{Z}[i]$, ii) $C[0, 1]$.

हल: i) $\mathbb{Z}[i]$ में $a + ib$ एक मात्रक है iff $\exists\, c + id \in \mathbb{Z}[i]$ s.t. $(a + ib)(c + id) = 1$,
अर्थात् $(ac - bd) + i(ad + bc) = 1$,
अर्थात्, $ac - bd = 1$ तथा $ad + bc = 0$. …(2)
अब, यदि $a = 0$, तो (2) से $bd = -1$ और $bc = 0$ निकलता है।
अतः, $c = 0$ तथा $b, d \in U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$.
अतः, $a = 0 \Rightarrow b = \pm 1$. …(3)
यदि $a \neq 0$, तो
$a = a \cdot 1 = a(ac - bd)$, (2) द्वारा।
$= a^2 c - bad = (a^2 + b^2)c$, क्योंकि (2) से $ad = -bc$ प्राप्त होता है।
अतः, $(a^2 + b^2) \mid a$.
यह तभी संभव है जब $b = 0$ और $a^2 = |a|$, क्योंकि $a^2 \geq a$.
$\therefore ad = 0$ तथा $a^2 = \pm a \neq 0$. इस प्रकार, $d = 0$, जिससे (2) द्वारा $ac = 1$ प्राप्त होता है।
इस प्रकार, $a = \pm 1$, जिससे $c = \pm 1$.
अतः, $a \neq 0 \Rightarrow a = \pm 1$ और $b = 0$. …(4)
(3) से, हम $\pm i \in U(\mathbb{Z}[i])$ प्राप्त करते हैं।
(4) से, हम $\pm 1 \in U(\mathbb{Z}[i])$ प्राप्त करते हैं।
केवल ये ही संभावनाएँ हैं।
अतः, $U(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$.

ii) $f \in U(C[0, 1])$
$\Leftrightarrow \exists\, g \in C[0, 1]$ s.t. $f(x)g(x) = 1\ \forall\ x \in [0, 1]$
$\Leftrightarrow f(x) \neq 0\ \forall\ x \in [0, 1]$.
अतः, $U(C[0, 1]) = \{f \in C[0, 1] \mid f(x) \neq 0\ \forall\ x \in [0, 1]\}$.

***

उदाहरण 16: मान लीजिए कि $\mathbb{R}[x]$ उन बहुपदों का समुच्चय है जिनके गुणांक $\mathbb{R}$ में हैं (खंड 1, 'कलन' को देखिए)। दर्शाइए कि $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है। साथ ही, $U(\mathbb{R}[x])$ भी ज्ञात कीजिए।

आप बहुपद वलयों का अध्ययन विस्तृत रूप से खंड 4 में करेंगे।

हल: सर्वप्रथम, 'कलन' से याद कीजिए कि $\mathbb{R}[x]$ में $f(x)$ और $g(x)$ के लिए,
$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_rx^r$ तथा $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_sx^s$, किन्हीं ऋणेतर पूर्णांकों r और s के लिए तथा $a_i, b_j \in \mathbb{R}\ \forall\ i = 1,\ldots,r,\ j = 1,\ldots,s$ के लिए।

अब, या तो $r \le s$ या $r \ge s$. बिना कुछ खोए, हम मान लेते हैं कि $r \ge s$. तब,

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_s + b_s)x^s + a_{s+1}x^{s+1} + \cdots + a_rx^r \in \mathbb{R}[x],$$

तथा $f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \cdots + \left(\sum_{i+j=k} a_ib_j\right)x^k + \cdots + a_rb_sx^{r+s} \in \mathbb{R}[x].$

इस प्रकार, $\mathbb{R}[x]$ पर + और · द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं।

आपको सिद्ध करना चाहिए कि $(\mathbb{R}[x], +)$ एक आबेली समूह है, जिसमें योज्य तत्समक 0 है तथा $\sum_{i=0}^{m} a_ix^i$ का योज्य प्रतिलोम $\sum_{i=0}^{m}(-a_i)x^i$ है।

आगे, आपको यह दर्शाना चाहिए कि $\mathbb{R}[x]$ में गुणन साहचर्य है। (यह शायद आपको कुछ उलझा हुआ लगे, परंतु इसे पहले घात 3 तक के बहुपदों के लिए दिखाने का प्रयास कीजिए, ताकि आपको अनुमान लगे कि हो क्या रहा है।)

अंत में, आइए सिद्ध करें कि बंटन नियम संतुष्ट हो रहे हैं। मान लीजिए कि $f(x) = \sum_{i=0}^{r} a_ix^i,\ g(x) = \sum_{j=0}^{s} b_jx^j$ तथा $h(x) = \sum_{k=0}^{t} c_kx^k$. साथ ही, बिना कुछ खोए, यह मान लेते हैं कि $t \le s$ तथा $c_{t+1} = c_{t+2} = \cdots = c_s = 0.$

तब, $f(x)(g(x) + h(x)) = \left(\sum_{i=0}^{r} a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}(b_j + c_j)x^j\right)$

$$= \sum_{k=0}^{r+s}\left[\sum_{i+j=k} a_i(b_j + c_j)\right]x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{r+s}\left[\sum_{i+j=k}(a_ib_j + a_ic_j)\right]x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{r+s}\left(\sum_{i+j=k} a_ib_j\right)x^k + \sum_{k=0}^{r+s}\left(\sum_{i+j=k} a_ic_j\right)x^k$$

$$= f(x)g(x) + f(x)h(x).$$

अतः, वाम बंटन नियम $\mathbb{R}[x]$ के लिए सत्य है।

ध्यान दीजिए कि क्योंकि $\mathbb{R}$ एक क्रमविनिमेय वलय है, इसलिए $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ $\forall\ f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. इस प्रकार, $\mathbb{R}[x]$ में गुणन क्रमविनिमेय है। अतः, $\mathbb{R}[x]$ के लिए दक्षिण बंटन नियम भी सत्य है।

इसलिए, $\mathbb{R}[x]$ एक क्रमविनिमेय वलय है।

साथ ही, $\mathbb{R}[x]$ में तत्समक अचर बहुपद $1 \in \mathbb{R}[x]$ है, क्योंकि
$1 \cdot f(x) = f(x)\ \forall\ f(x) \in \mathbb{R}[x]$.
अतः, $\mathbb{R}[x]$ तत्समकी है।
अब, यदि $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ एक मात्रक है, तो $\exists\ g(x) \in \mathbb{R}[x]$ s.t. $f(x)g(x) = 1$.

अतः, $\deg f(x) + \deg g(x) = \deg 1 = 0.$ …(5)

परंतु, $\deg f(x) \geq 0, \deg g(x) \geq 0.$

अतः, (5) हमें बताता है कि $\deg f(x) = 0 = \deg g(x).$

इस प्रकार, $f(x) \in \mathbb{R}^*, g(x) \in \mathbb{R}^*.$

इस प्रकार, $U(\mathbb{R}[x]) = U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*.$

***

अब, आपको कुछ प्रश्न हल करने चाहिए।

E25) प्रमेय 3 को सिद्ध कीजिए।

E26) दर्शाइए कि $U(\mathbb{M}_2(\mathbb{C})) = GL_2(\mathbb{C}).$

(**संकेत:** सारणिक फलन का उपयोग कीजिए।)

E27) $U(\mathbb{Z}[x])$ को ज्ञात कीजिए।

E28) यदि R एक तत्समकी वलय है, तो क्या

i) $(U(R), +)$ एक समूह है?

ii) $(U(R), \cdot)$ एक आबेली समूह है?

किसी क्रमविनिमेय वलय R में एक अवयव a एक अवयव b को **विभाजित करता है,** यदि $\exists c \in R$ s.t. $a = bc$. इसे $\mathbf{a|b}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

E29) दर्शाइए कि यदि R एक तत्समकी वलय है तथा $a \in R$ एक मात्रक है, तो $a|r \; \forall \; r \in R$.

क्या इसका विलोम सत्य है? अर्थात्, यदि $\exists \, a \in R$ s.t. $a|r \; \forall \; r \in R$, तो क्या a एक मात्रक होगा ही? क्यों, या क्यों नहीं?

E30) दर्शाइए कि $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक के सभी अवकलनीय फलनों का समुच्चय बिंदुशः योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय है। क्या यह एक तत्समकी वलय है? क्या यह क्रमविनिमेय है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

अब तक इस इकाई में हमने विभिन्न प्रकारों के वलयों की चर्चा की है। आप क्रमविनिमेय और अक्रमविनिमेय वलयों तथा तत्समकी और बिना तत्समक के वलयों के उदाहरणों को देख चुके हैं। हम इस चर्चा को अगली इकाई में जारी रखेंगे, जहाँ हम वलयों के लिए उपसमूहों के अनुरूप पर बात करेंगे।

अब, आइए संक्षिप्त में देखें कि इस इकाई में आपने क्या अध्ययन किया है।

10.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर चर्चा की है।

1. वे अभिगृहीत जो एक वलय को परिभाषित करते हैं, तथा इस बीजीय निकाय के कुछ उदाहरण। विशिष्ट रूप में, वलयों के बाह्य अनुलोम गुणनफल का उदाहरण।

2. वलयों के कुछ प्रारंभिक गुण, जैसे

$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a,$

$a(-b) = -(ab) = (-a)b,$

$(-a)(-b) = ab,$

$a(b-c) = ab - ac,$

$(b-c)a = ba - ca$ है।

जहाँ a, b, c वलय R के अवयव हैं।

3. वलय में योग और गुणन के लिए घातांकों के नियम, तथा व्यापक बंटन नियम।
4. क्रमविनिमेय वलय, तत्समकी वलय तथा क्रमविनिमेय तत्समकी वलय की परिभाषाएँ, तथा उनके उदाहरण।
5. एक अतुच्छ तत्समकी वलय में योज्य और गुणन तत्समक अलग हैं।
6. एक तत्समकी वलय में मात्रक की परिभाषा, और उदाहरण।
7. एक तत्समकी वलय R के सभी मात्रकों का समुच्चय गुणन के सापेक्ष एक समूह होता है। इस समूह को $U(R)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

10.6 हल / उत्तर

E1) $\mathbb{Z}_6^*$ में योग

$+$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

$\mathbb{Z}_6^*$ में गुणन

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

उपरोक्त सारणियों से आप देख सकते हैं कि $\mathbb{Z}_6^*$ में न तो योग और न ही गुणन द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं, क्योंकि $\overline{0} \notin \mathbb{Z}_6^*$. इस प्रकार, $(\mathbb{Z}_6^*, +, \cdot)$ एक वलय नहीं हो सकता है।

E2) ध्यान दीजिए कि $\{0\}$ पर + और $\cdot$ द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं। अभिगृहीत R1 – R6 तुच्छीय रूप से $(\{0\}, +, \cdot)$ द्वारा संतुष्ट होते हैं, जिसका आपको सत्यापन करना चाहिए।

अब, मान लीजिए कि एक एकल $\{a\}$ एक वलय है। तब, इसमें योज्य तत्समक 0 को अंतर्विष्ट होना चाहिए। परंतु $\{a\}$ में केवल एक ही अवयव है। इस प्रकार, $a = 0$. अतः, $\{a\} = \{0\}$.

E3) हम $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ में योग और गुणन को निम्नलिखित द्वारा परिभाषित करते हैं :

$(a+\sqrt{2}b)+(c+\sqrt{2}d) = (a+c)+\sqrt{2}(b+d)$, तथा

$(a+\sqrt{2}b)\cdot(c+\sqrt{2}d) = (ac+2bd)+\sqrt{2}(ad+bc) \ \forall\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

क्योंकि $\mathbb{R}$ में + साहचर्य और क्रमविनिमेय है, इसलिए $\mathbb{Q}+\sqrt{2}\mathbb{Q}$ में भी + के लिए यह सत्य है।

यहाँ, $0 = 0+\sqrt{2}\cdot 0$ योज्य तत्समक है, तथा $a+\sqrt{2}b$ का योज्य प्रतिलोम $(-a)+\sqrt{2}(-b)$ है।

इस प्रकार, $R1'$ (या R1 – R4) को $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ संतुष्ट करता है।

(ध्यान दीजिए कि आप $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ को $(\mathbb{R}, +)$ का उपसमूह दर्शा कर भी दिखा सकते थे कि $R1'$ को $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ संतुष्ट करता है।)

क्योंकि $\mathbb{R}$ में गुणन साहचर्य है, इसलिए $\mathbb{Q}+\sqrt{2}\mathbb{Q}$ के लिए R5 (या R2′) सत्य है।

क्योंकि $\mathbb{R}$ में गुणन योग पर बंटित है, इसलिए $\mathbb{Q}+\sqrt{2}\mathbb{Q}$ में भी ऐसा ही है।

अतः, R6 (या R3′) को $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ संतुष्ट करता है।

इस प्रकार, $(\mathbb{Q}+\sqrt{2}\mathbb{Q}, +, \cdot)$ एक वलय है।

आगे, क्योंकि $\mathbb{R}$ पर $\cdot$ क्रमविनिमेय है, इसलिए यह $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ पर भी क्रमविनिमेय है। अतः, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ एक क्रमविनिमेय वलय है।

E4) जैसा कि आप जानते हैं, R पर + और · सुपरिभाषित द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं।

अब, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in R$ के लिए, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{bmatrix} \in R.$

इस प्रकार, $(R, +) \le \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

अतः, $(R, +)$ एक आबेली समूह है।

साथ ही, जैसा कि आप इकाई 1 से जानते हैं, $(R, \cdot)$ एक सामिसमूह है।

इकाई 1 से आप यह भी जानते हैं कि $(R, +, \cdot)$, R6 को संतुष्ट करता है।

अतः, R एक वलय है।

अब, किन्हीं $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in R$ के लिए,

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & 0 \\ 0 & db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

अतः, R क्रमविनिमेय वलय है।

E5) आपको दर्शाना चाहिए कि R पर + और · द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं। आपको इसकी E4 की तरह ही यह भी दर्शाना चाहिए कि R1 – R6 को $(R, +, \cdot)$ संतुष्ट करता है।

परंतु, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, एक उदाहरण के तौर पर।

अतः, R एक क्रमविनिमेय वलय नहीं है।

E6) i) $\wp(X)$ पर $\cup$ और $\cap$ सुपरिभाषित द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं। परंतु, किसी भी $A \subseteq X, A \neq \emptyset$ के लिए, ऐसा कोई $B \subseteq X$ नहीं है जिससे कि $A \cup B = \emptyset$, जो $\cup$ के सापेक्ष तत्समक है।

अतः, $(\wp(X), \cup, \cap)$ एक वलय नहीं है।

ii) क्योंकि $\mathbb{R}^*$ पर + एक द्वि-आधारी संक्रिया नहीं है, इसलिए यह वलय नहीं है।

iii) जैसा कि आप इकाई 1 से जानते हैं, $\mathbb{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ पर गुणन एक द्वि-आधारी संक्रिया नहीं है। अतः, यह वलय नहीं है।

E7)

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

क्योंकि $b+b=c\neq b$, इसलिए b योज्य तत्समक नहीं है। इसी प्रकार, c भी योज्य तत्समक नहीं है। अतः, a ही शून्य अवयव है। अतः, उपरोक्त सारणी में प्रथम पंक्ति और स्तंभ को इस वजह से ऐसा भरा गया है।

अब, याद रखिए कि क्योंकि $(R,+)$ एक समूह है, इसलिए सारणी की प्रत्येक पंक्ति और प्रत्येक स्तंभ में R का प्रत्येक अवयव एक और केवल एक बार आना चाहिए।

अतः, क्योंकि $b+c=c+b,$ तथा दूसरी पंक्ति में केवल अवयव a नहीं दिखाया है, इसलिए $b+c=a=c+b.$

इस प्रकार, उपरोक्त सारणी को इस प्रकार भरा गया है।

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

क्योंकि $b\cdot b=a$ और $a+b=b,$ इसलिए $b\cdot b=(a+b)\cdot b=a\cdot b+b\cdot b.$

इस प्रकार, $a\cdot b$ शून्य अवयव, अर्थात् a है।

इसी प्रकार, आपको $b+b=c$ का उपयोग करते हुए, देखना चाहिए कि $c\cdot b=a$ क्यों है। अतः, उपरोक्त गुणन सारणी के दूसरे स्तंभ के प्रत्येक प्रकोष्ठ में a है।

अब, $a\cdot a=a\cdot(b\cdot b)=(a\cdot b)\cdot b=a\cdot b=a.$

इसी प्रकार, आपको स्पष्ट करना चाहिए कि क्यों

$b\cdot a=a,\ c\cdot a=a,\ a\cdot c=a,\ b\cdot c=a$ और $c\cdot c=a.$

अतः, उपरोक्त सारणी को इसी प्रकार भरा गया है।

E8) इकाई 1 से आप जानते हैं कि $(m, n)\in\mathbb{Z}$ और $[m, n]\in\mathbb{Z}\ \forall\ m, n\in\mathbb{Z}.$
इस प्रकार, $\mathbb{Z}$ पर $\oplus$ और $\odot$ द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं। परंतु, $(\mathbb{Z},\oplus)$ एक समूह नहीं है। इसका कारण यह है कि 0 तत्समक है, परंतु $m\in\mathbb{Z}^*$ दिया होने पर, कोई ऐसा $n\in\mathbb{Z}$ नहीं है जिससे कि $(m, n)=0.$ उदाहरणार्थ, किसी भी $n\in\mathbb{Z}$ के लिए, $(1, n)\neq 0.$

E9) क्योंकि R अभिगृहीतों $R1, R2, R5$ और $R6$ को संतुष्ट करता है, इसलिए $Map(X, R)$ भी ऐसा ही करता है।
शून्य अवयव $\mathbf{0}:X\to R:\mathbf{0}(x)=0$ है।
$f:X\to R$ का योज्य प्रतिलोम $(-f):X\to R:(-f)(x)=-f(x)$ है।
इस प्रकार, $(Map(X, R), +, \cdot), R1-R6$ को संतुष्ट करता है। अतः, यह एक वलय है।
किसी भी X के लिए, $Map(X, R)$ क्रमविनिमेय होगा iff R क्रमविनिमेय हो,
क्योंकि $f\cdot g=g\cdot f\Leftrightarrow(f\cdot g)(x)=(g\cdot f)(x)\Leftrightarrow f(x)g(x)=g(x)f(x)\ \forall\ x\in X.$

E10) सर्वप्रथम आपको इसका सत्यापन करना चाहिए कि $\mathbb{R}$ पर $\oplus$ और $\odot$ सुपरिभाषित द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं।
आगे, आइए इसकी जाँच करें कि $R1-R6$ को $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ संतुष्ट करता है या नहीं।
अब, $\forall\ a, b, c\in\mathbb{R},$

R1: $a\oplus b=a+b+1=b+a+1=b\oplus a.$

R2: $(a \oplus b) \oplus c = (a+b+1) \oplus c = a+b+1+c+1$
$= a + (b+c+1) + 1$
$= a \oplus (b \oplus c).$

R3: $a \oplus (-1) = a - 1 + 1 = a.$
इस प्रकार, $\oplus$ के सापेक्ष (-1) तत्समक है।

R4: $a \oplus (-a-2) = a + (-a-2) + 1 = -1.$
इस प्रकार, $-a-2$ $\oplus$ के सापेक्ष a का प्रतिलोम है।

R5: $(a \odot b) \odot c = (ab+a+b) \odot c = (ab+a+b)c + (ab+a+b) + c$
$= a(bc+b+c) + a + (bc+b+c)$
$= a \odot (b \odot c).$

R6: $a \odot (b \oplus c) = a \odot (b+c+1) = a(b+c+1) + a + (b+c+1)$
$= (ab+a+b) + (ac+a+c) + 1$
$= (a \odot b) \oplus (a \odot c).$

क्योंकि $a \odot b = b \odot a$, दक्षिण बंटन नियम भी संतुष्ट होता है।
इस प्रकार, $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ एक वलय है।

E11) यह दर्शाने के लिए कि $\mathbb{M}_2(R)$ अभिगृहीतों $R1-R6$ को संतुष्ट करता है, इस तथ्य का उपयोग कीजिए कि $R1-R6$ को $(R,+,\cdot)$ संतुष्ट करता है।
उदाहरणार्थ, R6 की जाँच करने के लिए, निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(a_1+a_2)+b(c_1+c_2) & a(b_1+b_2)+b(d_1+d_2) \\ c(a_1+a_2)+d(c_1+c_2) & c(b_1+b_2)+d(d_1+d_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aa_1+bc_1 & ab_1+bd_1 \\ ca_1+dc_1 & cb_1+dd_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aa_2+bc_2 & ab_2+bd_2 \\ ca_2+dc_2 & cb_2+dd_2 \end{bmatrix},$$ क्योंकि R1 और R6 को R संतुष्ट करता है।

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix},$$

$\mathbb{M}_2(R)$ में $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ के लिए।

E12) $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}, \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}.$
$\therefore \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})\}.$
ध्यान दीजिए कि $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ के प्रत्येक अवयव में, प्रथम घटक 'mod 2' है तथा दूसरा घटक 'mod 3' है।

इस प्रकार, सारणियाँ हैं :

$+$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$
$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$
$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$

$\cdot$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$
$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{1})$

उपरोक्त गुणन सारणी पर दृष्टि डालिए। इसमें प्रविष्टियाँ $(\bar{0}, \bar{0})\cdot(\bar{0}, \bar{0})$ से $(\bar{1}, \bar{2})\cdot(\bar{1}, \bar{2})$ तक सारणी के विकर्ण के प्रति सममित हैं।

इस प्रकार, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ एक क्रमविनिमेय वलय है।

E13) क्योंकि $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, इसलिए उदाहरण 9 की तरह यह घटक-अनुसार योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय है।

इसी प्रकार, $\mathbb{C}^2$ एक वलय है। अतः, $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2\times\mathbb{C}$ एक वलय है।

E14) हम जानते हैं कि $a+0=a \ \forall \ a\in R$.

क्योंकि $a+0=a\cdot 0$, इसलिए हम पाते हैं कि $a\cdot 0=a \ \forall \ a\in R$.

परंतु, प्रमेय 1 द्वारा आप जानते हैं कि $a\cdot 0=0$.

इस प्रकार, $a=0 \ \forall \ a\in R$, अर्थात् $R=\{0\}$.

E15) मान लीजिए $P(n)$ निम्नलिखित विधेय है :

$a(b_1+\cdots+b_n)=ab_1+\cdots+ab_n$, $a, b_1,\ldots,b_n\in R$ के लिए।

अब $P(1)$ सत्य है, क्योंकि $a(b_1)=ab_1$.

मान लीजिए कि किसी $k\in\mathbb{N}$ के लिए, $P(k)$ सत्य है।

अब निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$a(b_1+\cdots+b_k+b_{k+1})=a[(b_1+\cdots+b_k)+b_{k+1}]$, परिभाषा द्वारा।

$=a(b_1+\cdots+b_k)+ab_{k+1}$, R6 द्वारा।

$=(ab_1+\cdots+ab_k)+ab_{k+1}$, क्योंकि $P(k)$ सत्य है।

$=ab_1+\cdots+ab_k+ab_{k+1}$, परिभाषा द्वारा।

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है।

अतः, $P(n)$ प्रत्येक $n\in\mathbb{N}$ के लिए सत्य है।

इसी प्रकार आपको दूसरी समिका सिद्ध करनी चाहिए।

E16) क्योंकि $(a+b)^1=a^1+b^1$, इसलिए दिया हुआ प्रसार $n=1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए कि यह प्रसार किसी $m\in\mathbb{N}$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$(a+b)^m = a^m + {}^mC_1 a^{m-1}b + \cdots + {}^mC_{m-1}ab^{m-1} + b^m$.

अब, $(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{m} {}^mC_k a^{m-k}b^k\right)$

$= \sum_{k=0}^{m} {}^mC_k a^{m-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{m} {}^mC_k a^{m-k}b^{k+1}$, बंटन द्वारा।

$= (a^{m+1} + {}^mC_1 a^{m+1-1}b + {}^mC_2 a^{m+1-2}b^2 + \cdots + {}^mC_m ab^m)$

$+({}^mC_0 a^m b + {}^mC_1 a^{m-1}b^2 + \cdots + {}^mC_{m-1}ab^m + b^{m+1})$

$= a^{m+1} + ({}^mC_1 + {}^mC_0)a^{m+1-1}b + \cdots + ({}^mC_k + {}^mC_{k-1})a^{m+1-k}b^k + \cdots + b^{m+1}$

$= a^{m+1} + {}^{m+1}C_1 a^{m+1-1}b + \cdots + {}^{m+1}C_k a^{m+1-k}b^k + \cdots + {}^{m+1}C_m ab^m + b^{m+1}$

(क्योंकि ${}^mC_k + {}^mC_{k-1} = {}^{m+1}C_k$).

इस प्रकार, यह समिका $n = m+1$ के लिए भी सत्य है।

अतः, आगमन के सिद्धांत द्वारा, यह सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए सत्य है।

E17) परिभाषा द्वारा, $a^m = a \cdot a \ldots a (m$ बार)।

अब आइए $m \in \mathbb{N}$ को नियत करें, तथा मान लें कि $p(n)$ विधेय

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ है, $n \in \mathbb{N}$ के लिए।

तब, परिभाषा द्वारा, $P(1)$ सत्य है।

मान लीजिए कि किसी $k \in \mathbb{N}$ के लिए, $P(k)$ सत्य है।

तब, $a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a)$, परिभाषा द्वारा।

$= (a^m \cdot a^k) \cdot a$, R5 द्वारा।

$= a^{m+k} \cdot a$, क्योंकि $P(k)$ सत्य है।

$= a^{m+(k+1)}$ है, परिभाषा द्वारा।

अतः, $P(k+1)$ सत्य है।

इस प्रकार, PMI द्वारा $P(n)$ सत्य है $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

क्योंकि $(R, \cdot)$ एक समूह नहीं है, इसलिए हो सकता है कि a^0 या a^{-1} परिभाषित नहीं हों। उदाहरणार्थ, $\mathbb{Z}$ में 2^{-1} है। इसी प्रकार, $2\mathbb{Z}$ में $a^0 = 1$ नहीं है। अतः, यदि $m, n \le 0$, तो ज़रूरी नहीं कि a^m और a^n R में हों। इसलिए, इस समिका का $m, n \le 0, m, n \in \mathbb{Z}$, के लिए विस्तार नहीं किया जा सकता है।

E18) मान लीजिए कि $m, n > 0$. तब,

$ma = a + a + \cdots + a (m$ बार) और $nb = b + \cdots + b (n$ बार)।

अतः, बंटन के व्यापक नियम से E15 को विस्तृत करने पर,

$(ma)(nb) = (a + \cdots + a)(b + \cdots + b) = ab(mn$ बार)

$= mn(ab)$. …(6)

अब, मान लीजिए कि $m < 0$ और $n > 0$. तब, $-m > 0$.

साथ ही, $(-m)(-a) = (-a) + (-a) + \cdots + (-a)[(-m)$ बार]।

अतः, $(-m)(-a)(nb) = (-mn)(-ab)$, प्रमेय 1 और (6) द्वारा।

$= -(-mn)(ab)$, प्रमेय 1 द्वारा।

$= (mn)(ab)$.

इसी प्रकार, आपको स्थितियों $m<0, n<0$ और $m>0, n<0$ को सिद्ध करना चाहिए।

E19) इसे इकाई 2 के प्रमेय 2 जैसे ही सिद्ध किया जा सकता है।

E20) उदाहरण 10 की तरह, दर्शाइए कि $n \geq 2$ के लिए, $n\mathbb{Z}$ का तत्समक नहीं हो सकता है।

E21) $\mathbb{Z}_n$ का तत्समक $\bar{1}$ है, क्योंकि $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a} = \bar{1} \cdot \bar{a} \ \forall \ \bar{a} \in \mathbb{Z}_n$.

$\mathbb{Z}[i]$ का तत्समक $1+i0$ है। (क्यों?)

$\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ का तत्समक $I = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ है, क्योंकि

$AI = IA = A \ \forall \ A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_4)$.

$\wp(X)$ का तत्समक X है, क्योंकि $A \cap X = A = X \cap A \ \forall \ A \subseteq X$.

$C[0, 1]$ का तत्समक $g : [0, 1] \to \mathbb{R} : g(x) = 1$ है, क्योंकि

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x)$ तथा $(g \cdot f)(x) = f(x) \ \forall \ x \in [0, 1]$.

ध्यान दीजिए कि $[0, 1]$ पर g संतत है, क्योंकि यह एक अचर फलन है।

End A का तत्समक $I_A : A \to A : I_A(x) = x$ है। (क्यों?)

E22) क्योंकि $a \odot b = b \odot a \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$. इसलिए $\odot$ क्रमविनिमेय है।

साथ ही, $a \odot 0 = a \ \forall \ a \in \mathbb{R}$.

इस प्रकार, 0 गुणनात्मक तत्समक है। (ध्यान दीजिए कि यहाँ योज्य तत्समक शून्य नहीं है।)

अतः, $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है।

E23) आपको पहले दर्शाना चाहिए कि X पर + और · संवृत हैं। तब, जाँच कीजिए कि $R1 - R6$ को X संतुष्ट करता है या नहीं।

ध्यान दीजिए कि $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ योज्य तत्समक है।

फिर आपको दिखाना चाहिए कि किन्हीं दो अवयवो A और B के लिए, $AB = BA$.

इस प्रकार, यह वलय क्रमविनिमेय है।

इसका तत्समक $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ है, जिसे आपको सिद्ध करना चाहिए।

E24) किसी $a \in R$ के लिए, $a^2 = a$. विशिष्ट रूप में,

$(2a)^2 = 2a$

$\Rightarrow 4a^2 = 2a \Rightarrow 4a = 2a$, क्योंकि $a^2 = a$.

$\Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a + a = 0$

$\Rightarrow a = -a.$ ...(7)

अब, किन्हीं $a, b \in R$ के लिए, $a + b \in R$.

$\therefore (a+b)^2 = a + b$

$\Rightarrow a^2 + ab + ba + b^2 = a + b$

$\Rightarrow a + ab + ba + b = a + b$, क्योंकि $a^2 = a$ और $b^2 = b$.
$\Rightarrow ab = -ba$, निरसन द्वारा।
$\Rightarrow ab = ba$, क्योंकि (7) से $-ba = ba$ प्राप्त है।
इस प्रकार, R क्रमविनिमेय है।

E25) परिभाषा द्वारा, $\exists\, s \in R$ s.t. $rs = 1 = sr$.
अब मान लीजिए कि $\exists\, t \in R$ s.t. $rt = 1 = tr$.
तब, $s = s \cdot 1 = s(rt) = (sr)t = 1 \cdot t = t$.
इस प्रकार, प्रतिलोम अद्वितीय है।

E26) उदाहरण 12 की तरह, $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ का तत्समक $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।
अब, $A \in U(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))$ iff $\exists\, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ s.t. $AB = I$.
तब, $\det(AB) = \det(I) = 1$.
इस प्रकार, $\det(A)\det(B) = 1$.
अतः, $\det(A) \neq 0$, अर्थात्, $A \in GL_2(\mathbb{C})$.
इसलिए, $U(\mathbb{M}_2(\mathbb{C})) \subseteq GL_2(\mathbb{C})$. …(7)

विलोमतः, यदि $A \in GL_2(\mathbb{C})$, तो $\exists\, B$ s.t. $AB = I = BA$, क्योंकि $(GL_2(\mathbb{C}), \cdot)$ एक समूह है।
इस प्रकार, $A \in U(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))$.
अतः, $GL_2(\mathbb{C}) \subseteq U(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))$.
(8) और (9) से, $U(\mathbb{M}_2(\mathbb{C})) = GL_2(\mathbb{C})$.

E27) उदाहरण 16 की ही तरह, दर्शाइए कि यदि $f(x) \in U(\mathbb{Z}[x])$, तो $f(x) \in \mathbb{Z}$ तथा $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ s.t. $f(x) \cdot n = 1$.
इस प्रकार, $f(x) = \pm 1$.
अतः, $U(\mathbb{Z}[x]) = \{\pm 1\}$.

E28) i) नहीं। उदाहरणार्थ, $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ योग के सापेक्ष समूह नहीं है। (क्यों?)
ii) प्रमेय 4 द्वारा, $(U(R), \cdot)$ एक समूह है। परंतु इसका आबेली होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, यदि $R = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, तो $U(R) = GL_2(\mathbb{C})$, जो आबेली नहीं है।

E29) क्योंकि $a \in U(R)$, इसलिए $\exists\, b \in R$ s.t. $ab = 1$.
तब, $r = 1 \cdot r = (ab)r = a(br)$.
इस प्रकार, $a \mid r$.
विलोमतः, यदि $a \in R$ s.t. $a \mid r \; \forall\, r \in R$, तो $a \mid 1$.
अतः, $\exists\, b \in R$ s.t. $ab = 1$. इस प्रकार, $a \in U(R)$.

E30) मान लीजिए कि $\mathcal{D} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ अवकलनीय है$\}$.
'कलन' से आप जानते हैं कि अवकलनीय फलनों का योग और गुणनफल अवकलनीय होता है। इसलिए, $\mathcal{D}$ पर + और $\cdot$ द्वि-आधारी संक्रियाएं हैं। यह

सिद्ध करने के लिए कि $\mathcal{D}$ अभिगृहीतों R1, R2, R5 और R6 को संतुष्ट करता है, इस तथ्य का उपयोग कीजिए कि $\mathbb{R}$ इन अभिगृहीतों को संतुष्ट करता है।
फिर, दर्शाइए कि शून्य फलन $\mathbf{0}$ योज्य तत्समक है तथा $f \in \mathcal{D}$ का $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ योज्य प्रतिलोम है।
अतः, $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ एक वलय है।
$\mathcal{D}$ में अचर फलन $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = 1$ है, तथा यह तत्समक है। (क्यों?)
क्योंकि $\mathbb{R}$ एक क्रमविनिमेय वलय है, इसलिए $\mathcal{D}$ भी क्रमविनिमेय वलय है।

इकाई 11

उपवलय

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

11.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम वलयों की चर्चा को और आगे ले जाएंगे। जो आपने इकाई 3 में सीखा था, यहाँ हम उसी के अनुरूप वलय सिद्धांत की संकल्पना पर ध्यान केंद्रित करेंगे। दूसरे शब्दों में, यहाँ समूह के उपसमूह के संगत संकल्पना, उपवलय के विभिन्न पहलुओं पर चर्चा की जाएगी। जैसा कि आप देख चुके हैं, वलय एक समूह भी होता है। अतः, आपको यह सुनकर आश्चर्य नहीं होना चाहिए कि उपवलय एक उपसमूह भी होता है। इसी कारण से आप पाएँगे कि उपवलयों की चर्चा करते समय इकाई 3 का संदर्भ कई बार लिया जाएगा। इसलिए यह अच्छा रहेगा कि इस इकाई का अध्ययन प्रारंभ करने से पहले इकाई 3 का शीघ्रता से पुनावलोकन कर लें।

हमारी चर्चा भाग 11.2 से प्रारंभ होगी। यहाँ हम आपका परिचय कराएँगे उपवलय की संकल्पना से। हमेशा की ही तरह, आप उपवलयों के अनेक उदाहरणों का अध्ययन भी करेंगे।

अगले भाग, 11.3 में आप विभिन्न परीक्षण सीखेंगे जिन्हें लागू करके मालूम होगा कि वलय का कोई उपसमुच्चय का उपवलय है या नहीं। यहाँ हम उस पाठ्यसामग्री का उपयोग करेंगे जिसका आपने भाग 3.3, इकाई 3 में अध्ययन किया था। इस भाग में आप यह भी देखेंगे कि किसी वलय के उपवलय में वलय के अनेक बीजीय गुण होते हैं। जैसा आप जानेंगे, उपवलय बीजीय रूप से वलय से अनेक पहलुओं में अलग भी हो सकता है।

अंत में, भाग 11.4 में आप इस बारे में अध्ययन करेंगे कि किसी वलय के उपवलयों का प्रतिच्छेदन, सम्मिलिन, योग और कार्तीय गुणनफल वलय होता है या नहीं। यहाँ पर भी

आप इकाई 3 में उपसमूहों पर समुच्चय संक्रियाओं के परिणामों पर की गई चर्चा में काफ़ी समानता पाएँगे।

हमने नीचे वे सीखने के उद्देश्य दिए हैं, जिनके इर्द-गिर्द इस इकाई को बनाया गया है। यदि आप भागों का सावधानीपूर्वक अध्ययन करेंगे, तथा प्रश्नों को स्वयं हल करेंगे, तो आप इन उद्देश्यों को प्राप्त कर पाएँगे। केवल तब ही आप इस पाठ्यक्रम की अगली इकाइयों को समझने में सुविधा पाएँगे।

उद्देश्य

इस इकाई की पढ़ाई के बाद, आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो जाएँगे :

- वलय के एक उपवलय को परिभाषित करना, तथा उसके उदाहरण देना;
- जाँच करना कि वलय का एक उपसमुच्चय एक उपवलय है या नहीं;
- वलय के उपवलयों के प्रतिच्छेदन, सम्मिलन, योग या कार्तीय गुणनफल के उपवलय होने के लिए प्रतिबंधों को सिद्ध करना, तथा उनका अनुप्रयोग करना;
- सिद्ध करना कि उपवलयों का अनुलोम गुणनफल संबंधित वलयों के अनुलोम गुणनफल का एक उपवलय होता है।

11.2 उपवलय क्या होता है?

जब आप शब्द 'उपवलय' सुनते हैं, तो आपको क्या ख़्याल आता है? खंड 1 और इकाई 10 के अनुभव से, आप शायद यह ही सोचेंगे कि यह एक वलय का ऐसा उपसमुच्चय है जो स्वयं एक वलय है। यदि ऐसा है, तो आप सही हैं।

पिछली इकाई में आपने देखा था कि न केवल $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ अपितु $\mathbb{Z}$ और $\mathbb{Q}$ **समान संक्रियाओं** के सोपक्ष वलय हैं। इससे पता चलता है कि $\mathbb{Q}$ का $\mathbb{Z}$ एक उपवलय है, जैसा कि अब आप देखेंगे।

परिभाषा : मान लीजिए कि $(R, +, \cdot)$ एक वलय है तथा R का S एक अरिक्त उपसमुच्चय है। हम S को R का एक **उपलवय (subring)** कहते हैं, यदि $(S, +, \cdot)$ स्वयं एक वलय हो, अर्थात् S उन संक्रियाओं के सापेक्ष एक वलय हो जिनके सापेक्ष R एक वलय है।

अतः, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ का एक उपवलय है। साथ ही, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ का एक उपवलय है। आगे, इकाई 10 के उदाहरण 1 के से आप देख सकते हैं कि सम पूर्णांकों का समुच्चय $2\mathbb{Z}$ उन संक्रियाओं के सापेक्ष एक वलय है जो $\mathbb{Z}$ को एक वलय बनाते हैं। अतः, $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ का एक उपवलय है।

इसी प्रकार, इकाई 10 के उदाहरण 11 से आप देख सकते हैं कि $(\mathbb{Z}[\sqrt{5}], +, \cdot)$ और $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}], +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ के उपलवय हैं।

इस संकल्पना से संबंधित निम्नलिखित टिप्पणियों पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 1 : यदि $(R, +, \cdot)$ का $(S, +, \cdot)$ एक उपवलय है, तो हम केवल कहेंगे कि R का S एक उपवलय है, जब तक कि संबंधित संक्रियाओं पर ज़ोर देना आवश्यक न हो।

टिप्पणी 2 : ध्यान दीजिए कि **S और R की संक्रियाओं को एक ही होना चाहिए,** यदि S को R का एक उपलवय होना है। उदाहरणार्थ, इकाई 10 के E10 का $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ का एक उपलवय **नहीं** है, क्योंकि $+$ और $\cdot$ क्रमशः $\oplus$ और $\odot$ से भिन्न-भिन्न हैं।

और उदाहरण देने से पहले, आइए एक वलय की परिभाषा का विश्लेषण करें। यह परिभाषा कहती है कि एक वलय R का एक उपवलय उन्हीं संक्रियाओं के सापेक्ष एक वलय होता है जिनके तहत R एक वलय है। अब, इन संक्रियाओं के लिए बंटन नियम, क्रमविनिमेय नियम और साहचर्य नियम R पर लागू होते हैं। इसलिए ये R के किसी भी उपसमुच्चय पर भी लागू होते हैं। अतः, यह सिद्ध करने के लिए कि R का कोई उपसमुच्चय S एक वलय है, हमें S के लिए छहों अभिगृहितों $R1\text{-}R6$ (इकाई 10 के) की जाँच करने की आवश्यकता नहीं है। यह जाँच करना काफी होगा कि

i) $+$ और $\cdot$ दोनों के अधीन S संवृत्त है,

ii) $0 \in S$, तथा

iii) प्रत्येक $a \in S$ के लिए, $-a \in S$.

यदि S इन तीन प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, तो R का S एक उपवलय होता है। अतः, हमें एक उपवलय के लिए निम्नलिखित बदली हुई परिभाषा प्राप्त होती है।

परिभाषा : मान लीजिए कि S वलय $(R, +, \cdot)$ का एक अरिक्त उपमुच्च्य है। S को R का एक **उपवलय** कहते हैं, यदि

S1) $+$ और $\cdot$ के सापेक्ष S संवृत है, अर्थात्, $a+b, a \cdot b \in S$, जब भी $a, b \in S$;

S2) $0 \in S$; तथा

S3) प्रत्येक $a \in S$ के लिए, $-a \in S$.

ध्यान दीजिए कि S1-S3, और काई 3 का प्रमेय 1 हमें बताते हैं कि R का एक उपसमुच्चय S, R का एक उपवलय होता है यदि $(S, +) \leq (R, +)$, तथा S पर $\cdot$ एक द्वि-आधारी संक्रिया है।

आइए अब उपवलयों के कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : मान लीजिए कि R एक वलय है। दर्शाइए कि $\{0\}$ और R, R के उपवलय हैं। (तुच्छ वलय $\{0\}$, R का **तुच्छ उपवलय** कहलाता है।)

हल : क्योंकि $+$ और $\cdot$ के सापेक्ष $\{0\}$ संवृत्त है, तथा $-0=0$, इसलिए उपरोक्त परिभाषा के S1-S3 को $\{0\}$ संतुष्ट करता है। अतः, $\{0\}$, R का एक उपवलय है।

क्योंकि $(R, +, \cdot)$ एक वलय है तथा $R \subseteq R$, इसलिए R का R एक उपवलय है।

***

उदाहरण 1 हमें निम्नलिखित परिभाषाओं की ओर ले जाता है, जो उपसमूहों के लिए ऐसी ही परिभाषाओं के अनुरूप हैं।

परिभाषाएँ : मान लीजिए कि R एक वलय है। R का उपवलय S

i) एक **उचित (proper) उपवलय** कहलाता है, यदि $S \neq R$;

ii) एक **अतुच्छ (non-trivial) उपवलय** कहलाता है, यदि $S \neq \{0\}$.

अब, आइए उचित अतुच्छ उपवलयों के कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{R}$ का एक उपवलय है, जहाँ p एक वर्ग-मुक्त पूर्णांक (square-free integer) है।

हल : सर्वप्रथम, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$. अतः $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] \neq \emptyset$.

दूसरे, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ के लिए,

$(a + b\sqrt{p}) + (c + d\sqrt{p}) = (a + c) + \sqrt{p}(b + d) \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, तथा

$(a + b\sqrt{p}) \cdot (c + d\sqrt{p}) = (ac + pbd) + \sqrt{p}(ad + bc) \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.

इस प्रकार, S1 को $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ संतुष्ट करता है।

आगे, $0 = 0 + 0\sqrt{p} \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$. अतः, S2 को $Q[\sqrt{p}]$ संतुष्ट करता है।

अंत में, $a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ के लिए, $(-a) + (-b)\sqrt{p} \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ ऐसा है कि $(a + b\sqrt{p}) + [(-a) + (-b)\sqrt{p}] = 0$.

इस प्रकार, S3 को $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ संतुष्ट करता है।

अतः, परिभाषा द्वारा $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, $\mathbb{R}$ के एक उपवलय है।

***

उदाहरण 3 : जाँच कीजिए कि $C[0,1]$ बिंदुशः योग और गुणन के सापेक्ष $[0,1]$ से $\mathbb{R}$ तक के सभी फलनों के वलय $\mathcal{F}$ का एक उपवलय है या नहीं।

हल : इकाई 10 के उदाहरण 7 से आप जानते हैं कि $C[0,1]$ बिंदुशः योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय है।

साथ ही, $C[0,1] \subseteq \mathcal{F}$.

अतः, $C[0,1]$, $\mathcal{F}$ का एक उपवलय है।

***

उदाहरण 4 : $\mathbb{Z}$ के सभी उपवलयों को ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $\mathbb{Z}$ का S एक उपवलय है। तब, $(S, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$.

अतः, इकाई 4 से आप जानते हैं कि किसी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए, $S = n\mathbb{Z}$.

विलोमतः, इकाई 10 के उदाहरण 1 से आप जानते हैं कि $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ का उपवलय है $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

इस प्रकार, $\mathbb{Z}$ के सभी उपवलय $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, हैं।

***

अब, कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) क्या $n \geq 2$ के लिए $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, $\mathbb{Z}$ का उपवलय है? क्यों, या क्यों नहीं?

E2) दर्शाइए कि $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{C}$ का उपवलय है।

E3) जाँच कीजिए कि $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$, $\mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$ का उपवलय है या नहीं।

E4) क्या $\mathbb{Z}$ में गुणांकों वाले सभी बहुपदों का समुच्चय, $\mathbb{Z}[x]$, वास्तविक बहुपदों वाले वलय $\mathbb{R}[x]$ का उपवलय है? क्यों, या क्यों नहीं?

E5) यह दर्शाने के लिए कि उपवलय की परिभाषा में प्रतिबंध S1 और S3 आवश्यक हैं, उदाहरण दीजिए। क्या S2 आवश्यक है? क्यों, या क्यों नहीं?

किसी उपसमुच्चय के एक उपवलय होने के लिए, 'उपवलय' की परिभाषा के तीन प्रतिबंधों की जाँच करना आपके लिए आवश्यक है। क्या इन सभी की वास्तव में आवश्यकता है? जैसा कि आप E5 में देख चुके हैं, S2 की आवश्यकता S1 और S3 से पूरी हो जाती है। तो क्या प्रतिबंधों की संख्या को कम किया जा सकता है? अब इसी बात पर हम चर्चा करने जा रहे हैं।

11.3 उपवलय परीक्षण

पिछले भाग में उपवलय की परिभाषा में दिए प्रतिबंधों S1-S3 में सुधार किया जा सकता है। इसके लिए इकाई 3 से याद कीजिए कि किसी वलय R के एक अरिक्त उपसमुच्चय S के लिए, $(S,+) \leq (R,+)$ iff $a - b \in S$ जब भी $a, b \in S$. इस वजह से हम एक उपसमुच्चय के उपवलय होने के प्रतिबंधों की संख्या में कटौती कर सकते हैं। निम्नलिखित प्रमेय पर विचार कीजिए।

प्रमेय 1 (उपवलय परीक्षण) : मान लीजिए कि S, $(R, +, \cdot)$ का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। तब, S, R का एक उपवलय होता है यदि और केवल यदि

i) $x - y \in S\ \forall\ x, y \in S$; तथा

ii) $xy \in S\ \forall\ x, y \in S$.

उपपत्ति : सर्वप्रथम, आइए मान लें कि S, R का एक उपवलय है, अर्थात् S, S1-S3 को संतुष्ट करता है। अब, यदि $x, y \in S$, तो $x, (-y) \in S$, S3 द्वारा।

अतः, $x+(-y)=x-y\in S$, S1 द्वारा, अर्थात् (i) को S संतुष्ट करता है।

साथ ही, S द्वारा (ii) भी S1 के कारण संतुष्ट हो रहा है।

विलोमतः, मान लीजिए कि S, (i) और (ii) को संतुष्ट करता है, तथा मान लीजिए कि $x, y\in S$.

(i) द्वारा, $x-x=0\in S$. अतः, S2 को S संतुष्ट करता है।

पुनः, (i) द्वारा, $0-x=-x\in S$. अतः, S3 को S संतुष्ट करता है।

साथ ही, $x, y\in S$ के लिए $x+y=x-(-y)\in S$, (i) द्वारा।

आगे, (ii) द्वारा, S गुणन के सापेक्ष संवृत्त है।

इस प्रकार, S1 को S संतुष्ट करता है, तथा इसीलिए, एक उपवलय की परिभाषा को संतुष्ट करता है। अतः, प्रमेय सिद्ध हो जाता है। ■

प्रमेय 1 में दिए निकष हमें यह जाँच करने की एक आसान विधि प्रदान करते हैं कि कोई उपसमुच्चय एक उपवलय है या नहीं।

आइए कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

आप पहले ही यह जान चुके हैं कि $\mathbb{Q}$ का $\mathbb{Z}$ एक उपवलय है। वस्तुतः, आप इसकी जाँच करने के लिए कि $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ और $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ (n वर्ग नहीं है, $n\in\mathbb{Z}$) का $\mathbb{Z}$ एक उपवलय है, प्रमेय 1 का उपयोग कर सकते हैं। अब, कुछ विस्तृत उदाहरण देखें।

उदाहरण 5 : दर्शाइए कि $3\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_6$ का एक उपवलय है।

हल : सर्वप्रथम, क्या आप इससे सहमत हैं कि $3\mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\overline{3}\}$? याद कीजिए कि $3\mathbb{Z}_6=\{3\cdot\overline{0},3\cdot\overline{1},.....,3\cdot\overline{5}\}$, तथा $\overline{6}=\overline{0},\overline{9}=\overline{3}$, इत्यादि।

अब $\overline{0}-\overline{3}=-\overline{3}=\overline{3}$.

इस प्रकार, $x-y\in 3\mathbb{Z}_6\ \forall\ x,y\in 3\mathbb{Z}_6$.

अतः, प्रमेय 1 द्वारा, $3\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6$ का एक उपवलय है।

***

उदाहरण 6 : दिए गए इकाई 10 के उदाहरण 5 में वलय $\wp(X)$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि $S=\{\emptyset,X\}$, $\wp(X)$ का एक उपवलय है।

हल : ध्यान दीजिए कि $A\Delta A=\emptyset\ \forall\ A\in\wp(X)$. $\therefore \wp(X)$ में $A=-A$ है।

अब, प्रमेय 1 का अनुप्रयोग करने के लिए, हम पहले नोट करते हैं कि S अरिक्त है।

आगे, $\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset \in S$, $X \Delta X = \emptyset \in S$, $X \Delta \emptyset = \emptyset \Delta X = X \in S$,
$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \in S$, $X \cap X = X \in S$, $\emptyset \cap X = X \cap \emptyset = \emptyset \in S$.

इस प्रकार, प्रमेय 1 द्वारा, $\wp(X)$ का S एक उपवलय है।

***

निम्नलिखित प्रश्नों का हल करने से आपको उपलवयों के कुछ उदाहरण प्राप्त होंगे।

E6) दर्शाइए कि

i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ का एक उपवलय है,

ii) $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{C}$ का एक उपवलय है, तथा

iii) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{R}$ का एक उपवलय है।

E7) मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है, $A \subsetneq X, A \neq \emptyset$. दर्शाइए कि $\wp(X)$ का $S = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ एक उपवलय है। क्या $\wp(A)$, $\wp(X)$ का एक उपवलय है?

E8) दर्शाइए कि यदि A, B का एक उपवलय है और B, C का एक उपवलय है, तो A, C का एक उपवलय होगा। इस प्रकार, एक वलय के उपवलयों के समुच्चय पर संबंध 'का उपवलय है' संक्रामक है। क्या यह संबंध सममित है? क्या यह स्वतुल्य है? क्यों, या क्यों नहीं?

E9) जाँच कीजिए कि $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ का $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ एक उपवलय है या नहीं।

आप पहले ही देख चुके हैं कि $\mathbb{Z}$ के अनंततः अनेक उपवलय हैं, जो कि $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ हैं। अतः, एक अपरिमित वलय के अनंततः अनेक उपवलय हो सकते हैं।

साथ ही, उदाहरण 6 और E7 हमें दर्शाते हैं कि एक समुच्चय X के प्रत्येक उचित उपसमुच्चय के लिए, हमें $\wp(X)$ का एक उचित अतुच्छ उपवलय प्राप्त होता है। अतः, यदि X में n अवयव हैं, तो $\wp(X)$ में 2^n अवयव होते हैं। X के अलावा, X के इन उपसमुच्चयों में से प्रत्येक के लिए, $\wp(X)$ में इसके संगत एक उचित उपवलय है। इस प्रकार, एक परिमित वलय के अनेक उचित अतुच्छ अपवलय हो सकते हैं।

आइए अब एक तत्समकी वलय के उपवलयों के व्यवहार पर विचार करें।

उदाहरण 7 : दर्शाइए कि यदि R एक तत्समकी वलय है, तो ज़रूरी नहीं है कि R का उपवलय तत्समकी हो।

हल : $\mathbb{Z}$ पर विचार कीजिए। यह तत्समक 1 वाला तत्समकी वलय है, परंतु इसके उपवलय $2\mathbb{Z}$ का कोई गुणनात्मक तत्समक नहीं है।

दूसरी ओर, आप देख चुके हैं कि $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ का एक उपवलय है, तथा इन दोनों का ही तत्समक 1 है।

***

उदाहरण 8 : क्या किसी तत्समकी वलय का उपवलय तत्समकी है, तो क्या दोनों के तत्समकों का बराबर होना आवश्यक है? क्यों, या क्यों नहीं?

हल : E7 से आप जानते हैं कि $\wp(X)$ का $\wp(A)$ एक उपवलय है। आप इकाई 10 के उदाहरण 5 से यह भी जानते हैं कि A और X क्रमशः $\wp(A)$ और $\wp(X)$ के तत्समक हैं।

अतः, यदि $A \neq X$, जैसा E7 में है, तो दोनों तत्समक बराबर नहीं होंगे।

***

अब, आइए एक ऐसे उदाहरण पर दृष्टि डालें, जो इस तथ्य को व्यापकीकृत करता है कि $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ का एक उपवलय है $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

उदाहरण 9 : मान लीजिए कि R एक वलय है तथा $a \in R$. दर्शाइए कि $aR = \{ax \mid x \in R\}$, R का एक उपवलय है।

हल : क्योंकि $R \neq \emptyset$, इसलिए $aR \neq \emptyset$.

अब, aR के किन्हीं दो अवयवों ax और ay के लिए,

$ax - ay = a(x-y) \in aR$, तथा $(ax)(ay) = a(xay) \in aR$ (क्योंकि $xay \in R$).

इस प्रकार, प्रमेय 1 द्वारा, aR, R का एक उपवलय है।

***

उदाहरण 9 का उपयोग करते हुए, उदाहरणार्थ, हम तुरंत कह सकते हैं कि $\overline{m}\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_n$ का एक उपवलय है $\forall\, \overline{m} \in \mathbb{Z}_n$. हाँ, यह ज़रूर है कि इन उपवलयों का भिन्न-भिन्न होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, $\overline{3}\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$ और $\overline{2}\mathbb{Z}_6 = \overline{4}\mathbb{Z}_6$.

अगले उदाहरण में, आप एक विशेष उपवलय का अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 10: मान लीजिए कि R एक वलय है तथा $C(R) = \{x \in R \mid rx = xr\ \forall\, r \in R\}$. दर्शाइए कि $C(R)$, R का एक उपवलय है। ($C(R)$ को R का **केंद्र (centre)** कहते हैं)।

हल : सर्वप्रथम, क्योंकि $0 \in C(R)$, इसलिए $C(R) \neq \emptyset$.

आगे, $x, y \in C(R)$ और $r \in R$ के लिए, $xr = rx$ और $yr = ry$.

अतः, $r(x-y) = rx - ry = xr - yr = (x-y)r$.

इस प्रकार, $x - y \in C(R)$.

साथ ही, $(xy)r = x(yr) = x(ry) = (xr)y = (rx)y = r(xy)$.

इस प्रकार, $xy \in C(R)$.

अतः, R का $C(R)$ एक उपवलय है।

***

अब, आप कुछ संबंधित प्रश्नों को हल क्यों नहीं कर लेते?

E10) $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$, के सभी उपवलयों को ज्ञात कीजिए। इनमें से कितने तत्समकी हैं?

E11) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ के उपवलय हैं या नहीं :

i) $S = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$,

ii) $T = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$.

यदि ये उपवलय हैं, तो क्या इनके तत्समक हैं? यदि हाँ, तो क्या इनके तत्समक $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ के तत्समक के बराबर हैं?

E12) किसी वलय R के एक ऐसे उपसमुच्चय का, पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए, जो $(R, +)$ का एक उपसमूह है, परंतु R का एक उपवलय नहीं है।

E13) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिये।

i) क्रमविनिमेय वलय का उपवलय क्रमविनिमेय होता है।

ii) यदि R का S एक तत्समकी उपवलय है, तो R भी तत्समकी होगा।

iii) यदि R का एक क्रमविनिमेय उपवलय है, तो R भी क्रमविनिमेय होगा।

E14) $R = \mathbb{Z}, R = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ और $R = \mathbb{H}$ के लिए $C(R)$ ज्ञात कीजिए (देखिए उदाहरण 14, इकाई 10).

E15) मान लीजिए कि $(R, +, \cdot)$ एक वलय है। क्या समूह $(R, +)$ का केंद्र $C(R)$ के बराबर है? क्यों?

E16) यदि R तत्समकी है, तो क्या $C(R)$ तत्समकी है? क्यों, या क्यों नहीं?

E17) निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में जाँच कीजिए कि S, R का उपवलय है या नहीं।

i) $S = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \middle| 3 \nmid b\right\}, R = \mathbb{Q}$;

ii) $S = \left\{\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}, R = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

आइए एक महत्त्वपूर्ण टिप्पणी के साथ इस भाग को समाप्त करें।

टिप्पणी 3 : उदाहरणों 7 और 8 से, तथा E13 से, आप देख सकते हैं कि एक वलय और उसके उपवलय की भिन्न-भिन्न बीजीय संरचनाएँ हो सकती हैं। एक वलय जिस गुण को संतुष्ट करता है, हो सकता है उसका उपवलय उस गुण को संतुष्ट नहीं करें, तथा इसका विलोम भी सत्य है। आपको वलयों और उनके उपवलयों के साथ कार्य करते समय इस तथ्य को सदैव अपने ध्यान में रखना चाहिए।

अब, आइए एक वलय के उपवलयों के अधःस्थ समुच्चयों पर संक्रियाओं के अधीन इन उपवलयों के व्यवहार पर विचार करें।

11.4 उपवलयों पर समुच्चय संक्रियाएँ

इकाई 3 में आपने देखा था कि समूह के दो उपसमूहों का प्रतिच्छेदन एक उपसमूह होता है। क्या यह उपवलयों के लिए भी सत्य है? आगे, क्या उपवलयों का सम्मिलन एक उपवलय होता है? क्या एक उपवलय का पूरक एक उपवलय होता है? इन प्रश्नों के उत्तर उपसमूहों के अनुरूप प्रश्नों के उत्तरों के समान हैं, जैसा कि आपने अब तक अनुमान लगा लिया होगा। इस भाग में, हम अपना ध्यान इन प्रश्नों के, तथा अन्य ऐसे ही प्रश्नों के उत्तरों पर केंद्रित करेंगे।

आइए, उपरोक्त पहले प्रश्न के उत्तर के साथ प्रारंभ करें।

प्रमेय 2 : मान लीजिए कि S_1 और S_2 किसी वलय R के उपवलय हैं। तब, $S_1 \cap S_2$ भी R का एक उपवलय है।

उपपत्ति : क्योंकि $0 \in S_1$ और $0 \in S_2$, इसलिए $0 \in S_1 \cap S_2$. $\therefore S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

अब, मान लीजिए कि $x, y \in S_1 \cap S_2$. तब, $x, y \in S_1$ और $x, y \in S_2$.

इस प्रकार, प्रमेय 1 द्वारा, $x - y$ तथा xy दोनों S_1 में हैं तथा S_2 में भी हैं, अर्थात्, $S_1 \cap S_2$ में $x - y$ और xy स्थित हैं।

इस प्रकार, $S_1 \cap S_2$, R का एक उपवलय है। ■

उपरोक्त उपपत्ति में इस्तेमाल किए गए तर्क की तरह ही, आप सिद्ध कर सकते हैं कि **वलय R के तीन, चार या अधिक उपवलयों का प्रतिच्छेदन भी R का एक उपवलय होता है।**

आइए प्रमेय 2 का अनुप्रयोग करने के लिए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 11 : दर्शाइए कि $\mathbb{Z}$ के किन्हीं दो उपवलयों का प्रतिच्छेदन $r\mathbb{Z}$ है, किसी $r \in \mathbb{Z}$ के लिए।

हल : मान लीजिए कि $\mathbb{Z}$ के दो उपवलय $n\mathbb{Z}$ और $m\mathbb{Z}$ हैं। तब, प्रमेय 2 द्वारा $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ का एक उपवलय है। इस प्रकार, उदाहरण 4 द्वारा, किसी $r \in \mathbb{Z}$ के लिए, $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$. वस्तुतः, आपको इकाई 4 के अध्ययन का उपयोग करते हुए दिखाना चाहिए कि n और m का l.c.m r है।

***

अब वलय के उपवलयों के सम्मिलन पर विचार करें। क्या आप सोचते हैं कि यह एक उपवलय होगा? आइए देखें। आपको यह याद रखना चाहिए कि दो उपसमूहों के सम्मिलन का उपसमूह होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 12 : दर्शाइए कि $S = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ का एक उपवलय नहीं है।

हल : ध्यान दीजिए कि $2 \in S$ और $3 \in S$. परंतु $2 - 3 = -1 \notin S$, क्योंकि $(-1) \notin 2\mathbb{Z}$ तथा $(-1) \notin 3\mathbb{Z}$. इस प्रकार, प्रमेय 1 द्वारा, $\mathbb{Z}$ का S एक उपवलय नहीं है।

***

अब, निम्नलिखित संबंधित प्रश्नों को हल कीजिए।

E18) आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}[i]$ और $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ के उपवलय हैं। क्या इनका सम्मिलन $\mathbb{C}$ का एक उपवलय है? क्यों, या क्यों नहीं?

E19) R के उपवलयों S_1 और S_2 पर किन प्रतिबंधों के अधीन $S_1 \cup S_2$, R का एक उपवलय होगा? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

अब, आइए उपवलयों के लिए दो उपसमूहों के गुणनफल के अनुरूप परिणाम पर दृष्टि डालें। याद रखिए कि वलय एक आबेली समूह होता है।

उदाहरण 13 : यदि S और T किसी वलय R के उपवलय हैं, तो क्या $S+T$, R का उपसमूह है? क्यों, या क्यों नहीं?

हल : आप जानते हैं कि $S+T = T+S$.

अतः, इकाई 3 के प्रमेय 7 द्वारा, $(S+T, +) \le (R, +)$.

परंतु, गुणन के सापेक्ष $S+T$ का संवृत्त होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरणार्थ, निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ और } T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

इकाई 10 के E5 द्वारा, S और T, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ के उपवलय हैं। परंतु,

$S+T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ का एक उपवलय नहीं है, जैसा कि आप E11(ii) में दिखा चुके हैं।

***

आइए, अब पूरकीकरण की समुच्चय संक्रिया पर विचार करें। यदि S_1 और S_2 किसी वलय R के उपवलय हैं, तो क्या $S_1 \setminus S_2$, R का एक उपवलय है? क्या $S_1 \Delta S_2$, R का एक उपवलय है? आइए एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 14 : यदि S_1 और S_2 किसी वलय R के उपवलय हैं, तो दर्शाइए कि $S_1 \setminus S_2$, R का एक उपवलय कभी नहीं हो सकता है।

हल : क्योंकि S_2 एक उपवलय है, इसलिए $0 \in S_2$ हैं। अतः, $0 \notin S_1 \setminus S_2$.

अतः $S_1 \setminus S_2$, R का उपवलय नहीं हो सकता है।

***

अब, एक प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E20) यदि S_1 और S_2, R के उपवलय हैं, तो क्या $S_1 \Delta S_2$, R का एक उपवलय हो सकता है, जहाँ Δ समामित अंतर को व्यक्त करता है? क्यों, या क्यों नहीं?

अब, आइए उपवलयों के कार्तीय गुणनफल पर दृष्टि डालें। आइए वलय $\mathbb{Z}^2$ के दो उपवलयों पर विचार करें।

उदाहरण 15 : दर्शाइए कि का $S=\{(n, 0) | n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}\times\{0\}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ एक उपवलय है। साथ ही, दर्शाइए कि का $D=\{(n,n) | n\in\mathbb{Z}\}$ भी $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ एक उपवलय है।

हल : इकाई 10 के उदाहरण 9 से $\mathbb{Z}^2$ की वलय संरचना को याद कीजिए।

S और D दोनों अरिक्त हैं।

साथ ही, आपको इसका सत्यापन करना चाहिए कि ये दोनों प्रमेय 1 के (i) और (ii) को संतुष्ट करते हैं।

इस प्रकार, दोनों S और D, $\mathbb{Z}^2$ के उपवलय हैं।

***

आपने अभी देखा कि $\mathbb{Z}\times\{0\}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ का एक उपवलय है। साथ ही, $\{(0, 0)\}=\{0\}\times\{0\}$ भी $\mathbb{Z}^2$ का एक उपवलय है। अधिक व्यापक रूप में, निम्नलिखित परिणाम हमें वलयों के अनुलोम गुणनफल के **कुछ** उपवलयों के बारे में बताता है।

प्रमेय 3: मान लीजिए कि S_1 और S_2 क्रमशः वलयों R_1 और R_2 के उपवलय हैं। तब, $R_1\times R_2$ का $S_1\times S_2$ एक उपवलय है।

उपपत्ति : क्योंकि S_1 और S_2, R_1 और R_2 के उपवलय हैं, इसलिए $S_1\neq\emptyset$ और $S_2\neq\emptyset$. $\therefore S_1\times S_2\neq\emptyset$.

अब, मान लीजिए कि (a,b) और (a',b'), $S_1\times S_2$ में हैं। तब, $a,a'\in S_1$ और $b,b'\in S_2$.

क्योंकि S_1 और S_2 उपवलय हैं, इसलिए $a-a', aa'\in S_1$ तथा $b-b', bb'\in S_2$.

(हम सुविधा की दृष्टि से R_1, R_2 और $R_1\times R_2$ तीनों के लिए, + और $\cdot$ का उपयोग यहां कर रहे हैं।)

अतः, $(a,b)-(a',b')=(a-a',b-b')\in S_1\times S_2$.

साथ ही, $(a,b)\cdot(a',b')=(aa', bb')\in S_1\times S_2$.

इस प्रकार, प्रमेय 1 द्वारा $S_1\times S_2$, $R_1\times R_2$ का एक उपवलय है। ■

प्रमेय 3 को तीन या अधिक उपवलयों के कार्तीय गुणनफल के लिए व्यापकीकृत किया जा सकता है। परंतु, ध्यान दीजिए कि **$\mathbf{R_1\times R_2}$ का प्रत्येक उपवलय $\mathbf{S_1\times S_2}$ के रूप का नहीं होता** (देखें E21).

आइए, $R_1\times R_2$ के एक उपवलय के एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 16 : दर्शाइए कि $\mathbb{Z}[x]\times\mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}[x]\times\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ का एक उपवलय है। साथ ही, इस उपवलय के दो भिन्न-भिन्न अवयव दीजिए।

हल : सर्वप्रथम, E4 से आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ का एक उपवलय है।

आगे, आइए देखें कि क्या $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ का $\mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$ एक उपवलय है। इकाई 10 के E11 द्वारा, आप जानते हैं कि $\mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$ और $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ आव्यूह योग और गुणन की संक्रियाओं के सापेक्ष वलय हैं। साथ ही, क्योंकि $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, इसलिए $\mathbb{M}_3(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. इसलिए, ये दोनों समुच्चय समान द्वि-आधारी संक्रियाओं के सापेक्ष वलय हैं।

अतः, $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ का $\mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$ एक उपवलय है।

इस प्रकार, $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ का $\mathbb{Z}[x] \times \mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$ एक उपवलय है।

यह उपवलय अपरिमित है। इसके अवयवों में से दो अवयव उदाहरणार्थ, $(1, I)$ और $(x, \mathbf{0})$ हैं, जहाँ I और $\mathbf{0}$ क्रमशः $\mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$ के गुणनात्मक और योज्य तत्समक हैं।

ध्यान दीजिए कि $(1, I)$ और $(0, I)$ भिन्न-भिन्न अवयव हैं, क्योंकि इनके प्रथम घटक अलग-अलग हैं।

***

अब कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E21) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ के दो उचित अतुच्छ उपवलयों को प्राप्त कीजिए।

E22) यह दर्शाने के लिए कि $R_1 \times R_2$ का प्रत्येक उपवलय $S_1 \times S_2$ के रूप का नहीं है, उदाहरण 15 के D का उपयोग कीजिए, जहाँ S_1 और S_2 क्रमशः R_1 और R_2 के उपवलय हैं।

E23) मान लीजिए कि S_1 और S_2 क्रमशः वलयों R_1 और R_2 के उपवलय हैं। S_1 और S_2 पर किन प्रतिबंधों के अधीन $S_1 \times S_2$ एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय होगा?

E24) यदि X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं, तो $\wp(X) \times \wp(Y)$ का एक उचित अतुच्छ उपवलय दीजिए।

इसके साथ ही, हम उपवलयों की इस चर्चा की समाप्ति करते हैं। अगली इकाई में आप कुछ विशेष उपवलयों का अध्ययन करेंगे। अब, आइए इस इकाई में जो आपने अध्ययन किया है, उसका संक्षिप्त रूप से विवरण दें।

11.5 सारांश

इस इकाई में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं पर अध्ययन किया है :

1. वलय R का एक उपवलय R का एक ऐसा उपसमुच्चय S है जिसके लिए $(S, +) \leq (R, +)$ तथा S में गुणन संवृत्त है।

2. उपवलयों के अनेक उदाहरण, तथा ऐसे उपसमुच्चयों के भी अनेक उदाहरण जो उपवलय नहीं हैं।

3. वलय के उपवलय में वे सभी बीजीय गुण होने आवश्यक नहीं हैं जो उस वलय में हैं, तथा इसका विलोम भी सत्य है।

4. उपवलय परीक्षण की उपपत्ति तथा अनुप्रयोग, अर्थात् किसी वलय R का एक उपसमुच्चय S उस वलय R का एक उपवलय होता है iff $x - y \in S$ और $xy \in S \ \forall \ x, y \in S$.

5. यदि S_1 और S_2 किसी वलय R के उपवलय हैं, तो $S_1 \cap S_2$ भी R का एक उपवलय होता है।

   परंतु $S_1 \cup S_2$, R का एक वलय होता है iff $S_1 \subseteq S_2$ या $S_2 \subseteq S_1$.

   साथ ही, $S_1 \setminus S_2$ और $S_1 \Delta S_2$ कभी R के उपवलय नहीं होते हैं।

6. यदि S_1 और S_2 क्रमशः R_1 और R_2 के उपवलय हैं, तो $S_1 \times S_2$ भी $R_1 \times R_2$ का एक उपवलय होता है। लेकिन $R_1 \times R_2$ का प्रत्येक उपवलय इस रूप का नहीं होता है।

11.6 हल/उत्तर

E1) नहीं, क्योंकि $\mathbb{Z}_n \not\subset \mathbb{Z}$.

E2) $a + bi, c + di \in \mathbb{Z}[i]$ के लिए,

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{Z}[i]$, और
$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc) \in \mathbb{Z}[i]$.

साथ ही, $0 = 0 + i0 \in \mathbb{Z}[i]$.

अंत में, $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ के लिए, $-(a + ib) = (-a) + i(-b) \in \mathbb{Z}[i]$.

इस प्रकार, S1, S2 और S3 को $\mathbb{Z}[i]$ संतुष्ट करता है।

अतः, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{C}$ का एक उपवलय है।

E3) इकाई 10 के E11 से, $\mathbb{M}_3(R)$ आव्यूह योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय है, जहाँ $(R, +, \cdot)$ एक वलय है।

अतः, $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$ और $\mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$ समान संक्रियाओं के सापेक्ष वलय हैं।

साथ ही, $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$.

अतः, $\mathbb{M}_3(\mathbb{Q})$ का $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$ एक उपवलय है।

E4) आपको यह दर्शाना चाहिए कि यदि $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, तो $f(x) + g(x)$ तथा $f(x)g(x)$ भी $\mathbb{Z}[x]$ में हैं।

आगे $0 \in \mathbb{Z}[x]$.

अंत में, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ के लिए,

$-f(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n \in \mathbb{Z}[x].$

अतः $\mathbb{R}[x]$ का $\mathbb{Z}[x]$ एक उपवलय है।

E5) **S1 आवश्यक है** : समुच्च्य $S = \{0, 1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$ लीजिए। $\mathbb{Z}$ में योग के संदर्भ में यह S2 और S3 को संतुष्ट करता है, परंतु S1 को नहीं (उदाहरणार्थ, $1 \in S$, परंतु $1+1 \notin S$).

ध्यान दीजिए कि $(S, +, \cdot)$ एक वलय नहीं है, क्योंकि S पर योग एक द्वि-आधारी संक्रिया नहीं है। इस प्रकार, S, $\mathbb{Z}$ का एक उपवलय नहीं है।

S3 आवश्यक है : पूर्ण संख्याओं के समुच्चय W पर विचार कीजिए। S1 और S2 को $(W, +, \cdot)$ संतुष्ट करता है, परंतु S3 को नहीं (उदाहरणार्थ, $1 \in W$, परंतु $(-1) \notin W$).

ध्यान दीजिए कि $(W, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ का एक उवलय नहीं है, क्योंकि यह R4 (इकाई 10 के) को संतुष्ट नहीं करता है, तथा इसीलिए एक वलय नहीं है।

S1 और S3 से मिलकर S2 निकलता है। अतः, S2 यदि स्पष्ट रूप से शामिल नहीं है, तब भी यह इनमें अंतर्निहित है। अतः, यह आवश्यक है।

E6) i) सर्वप्रथम, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

आगे, $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ x - y \in \mathbb{R}$ और $xy \in \mathbb{R}$.

इस प्रकार, $\mathbb{C}$ का $\mathbb{R}$ एक उपवलय है।

इसी प्रकार, आपको अन्य दो स्थितियों की जाँच करनी चाहिए।

E7) $x, y \in S$ के लिए,

$x - y = x\,\Delta\,(-y) = x\,\Delta\,y$ (जैसा कि उदाहरण 6 में बताया गया है), तथा $x \cdot y = x \cap y$.

अतः, आपको इसकी जाँच करने की आवश्यकता है कि प्रत्येक $x, y \in S$ के लिए, $x\,\Delta\,y \in S$ और $x \cap y \in S$.

एक बार ऐसा कर लेंगे, तब आप पाएँगे कि $\wp(X)$ का S एक उपवलय है।

आगे, इकाई 3 में आप देख चुके हैं कि $(\wp(A), \Delta) \le (\wp(X), \Delta)$.

साथ ही, $x, y \in \wp(A)$ के लिए, $x \cdot y = x \cap y \in \wp(A)$.

इस प्रकार, $(\wp(A), \Delta, \cap)$, $\wp(X)$ का एक उपवलय है।

E8) क्योंकि B का A एक उपवलय है, इसलिए $A \neq \emptyset$ तथा

$\forall\ x, y \in A,\ x - y \in A$ और $xy \in A$.

यहाँ योग और गुणन वही हैं जो B पर परिभाषित किए गए हैं। आगे, ये संक्रियाएँ वही हैं जो C पर परिभाषित की गई हैं, क्योंकि B, C का एक उपवलय है। इस प्रकार, A प्रमेय 1 को संतुष्ट करता है, तथा इसीलिए C का एक उपवलय है।

यह संबंध सममित नहीं है। उदाहरणार्थ, $\mathbb{Q}$ का $\mathbb{Z}$ एक उपवलय है, परंतु $\mathbb{Z}$ का $\mathbb{Q}$ एक उपवलय नहीं है।

क्योंकि प्रत्येक वलय स्वयं का उपवलय होता है, इसलिए यह संबंध स्वतुल्य है।

E9) सर्वप्रथम, ध्यान दीजिये कि $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$. अतः, $R \neq \emptyset$.

आगे, R में $A = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & c \\ d & d \end{bmatrix}$ के लिए,

$A - B = \begin{bmatrix} a-c & a-c \\ b-d & b-d \end{bmatrix} \in R$, तथा

$AB = \begin{bmatrix} a(c+d) & a(c+d) \\ b(c+d) & b(c+d) \end{bmatrix} \in R.$

अतः, $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ का R एक उपवलय है।

E10) उदाहरण 9 से आप जानते हैं कि का $\overline{m}\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_n$ का उपवलय है, $\forall\ \overline{m} \in \mathbb{Z}_n$. साथ ही, उदाहरण 4 की ही तरह, आपको यह दर्शाना चाहिए कि $\mathbb{Z}_n$ के प्रत्येक उपवलय को $\overline{m}\mathbb{Z}_n$ के रूप का होना चाहिए, किसी $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ के लिए।

इस प्रकार, $\mathbb{Z}_n$ के सभी उपवलय $\overline{m}\mathbb{Z}_n$, जहाँ $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$.

आगे, $\overline{1} \in \overline{m}\mathbb{Z}_n$ iff $1 = mr + ns$ किन्हीं $r, s \in \mathbb{Z}$ के लिए, अर्थात् iff $(m, n) = 1$, जैसा कि आप इकाई 1 से जानते हैं।

E11) i) सर्वप्रथम, $S \neq \emptyset$. (क्यों?)

दूसरे, S में किन्हीं $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ के लिए,

$A - C = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{bmatrix} \in S$ और $AC = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} \in S.$

इस प्रकार, R का S एक उपवलय है।

S का तत्समक $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$ R का तत्समक।

ii) सत्यापन कीजिए कि $T \neq \emptyset$. अब, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in T$. परंतु,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \notin T$, क्योंकि इसमें $(2, 2)$ वें स्थान पर 0 नहीं है। अतः, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ का T एक उपवलय नहीं है।

E12) E11(ii) में दिए T पर विचार कीजिए। जाँच कीजिए कि $(T, +) \leq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

परंतु जैसा कि हल में दिया गया है, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ का T एक उपवलय नहीं है।

आप ऐसे अन्य अनेक उदाहरण सोच सकते हैं।

E13) i) यह सत्य है क्योंकि उपवलय पर गुणन की संक्रिया वही है जो वलय पर है।

ii) नहीं। उदाहरणार्थ, तुच्छ वलय का तत्समक है तथा यह $2\mathbb{Z}$ का एक उपवलय है। परंतु $2\mathbb{Z}$ जिसका तत्समक नहीं है।

iii) नहीं। उदाहरणार्थ, E11(i) में उपवलय S क्रमविनिमेय है, परंतु $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ ऐसा नहीं है।

E14) $C(\mathbb{Z}) = \{z \in \mathbb{Z} \mid zx = xz \ \forall \ x \in \mathbb{Z}\}$

$= \mathbb{Z}$, क्योंकि $\mathbb{Z}$ क्रमविनिमेय है।

$C(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA \ \forall \ B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})\}$.

अब, किसी भी $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in C(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))$ के लिए, और $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$, के लिए,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\alpha & d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha \\ c\beta & d\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b\beta = b\alpha, \ c\alpha = c\beta.$$

$\Rightarrow b = 0, c = 0,$ क्योंकि $\alpha \neq \beta$.

अब, क्योंकि $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in C(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))$, इसलिए इसे $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ के साथ क्रमविनिमेय होना चाहिए।

इससे $\begin{bmatrix} a & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ प्राप्त होता है। अतः $a = d$.

अंत में, किसी भी $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ के लिए, जहाँ $a \in \mathbb{R}$,

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & c \\ d & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ d & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b & c \\ d & r \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ के लिए।

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ पर **एक आदिश आव्यूह** कहलाता है।

इस प्रकार, $C(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbb{R}$, है जो

$\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ में अदिश आव्यूहों का वलय है।

क्योंकि i, j, k क्रमशः j, k, i के साथ क्रमविनिमेय नहीं करते, इसलिए $a + ib + jc + kd \in C(\mathbb{H})$ iff $b = c = d = 0$.

साथ ही, किन्हीं $a, b, c, d, r \in \mathbb{R}$ के लिए, $r(a + ib + jc + kd) = (a + ib + jc + kd)r$.

अतः, $C(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.

E15) नहीं। क्योंकि $(R, +)$ आबेली है, आप इकाई 6 से जानते हैं कि $Z(R) = R$.

परंतु, जैसा कि आप E14 में देख चुके हैं, सभी अक्रमविनिमेय वलयों R के लिए $C(R) \neq R$.

E16) किसी भी $r \in R$ के लिए $1 \cdot r = r = r \cdot 1$. इस प्रकार, $1 \in C(R)$. अतः, $C(R)$ तत्समकी है।

E17) i) पहले तो $S \subseteq \mathbb{Q}$ और $S \neq \emptyset$.

आगे, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in S$ के लिए, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \in S$ और $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in S$, क्योंकि $3 \nmid bd$.

अतः S, R का उपवलय है।

ii) नोट करें कि $\mathbf{0} \notin S$, क्योंकि $\mathbf{0}$ में $(1, 2)$ वें जगह पर 1 नहीं है।

अतः S, R का उपवलय नहीं है।

E18) $1 + i$ और $\frac{1}{2}$ सम्मिलन के अवयव हैं।

परंतु $1 + i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + i \notin \mathbb{Z}[i] \cup \mathbb{Q}$. इस प्रकार, $\mathbb{C}$ का $\mathbb{Z}[i] \cup \mathbb{Q}$ एक उपवलय नहीं है।

E19) सर्वप्रथम, $(R, +)$ का $S_1 \cup S_2$ एक उपसमूह है iff $S_1 \subseteq S_2$ या $S_2 \subseteq S_1$.

एक बार यह प्रतिबंध संतुष्ट हो जाए, तब परिभाषा द्वारा $S_1 \cup S_2$ पर गुणन संवृत्त होगा।

इस प्रकार, R का $S_1 \cup S_2$ एक उपवलय है iff $S_1 \subseteq S_2$ या $S_2 \subseteq S_1$.

E20) $S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$.

क्योंकि न तो $S_1 \setminus S_2$ और न ही $S_2 \setminus S_1$ में 0 है, इसलिए $0 \notin S_1 \Delta S_2$.

अतः, R का $S_1 \Delta S_2$ उपवलय कभी भी नहीं हो सकता।

E21) क्योंकि $\mathbb{Z}$ का $n\mathbb{Z}$ एक उपवलय है $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, तथा $\{0\}$ और $\mathbb{R}$ वलय $\mathbb{R}$ के उपवलय हैं, इसलिए $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ के दो उपवलय $2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ और $3\mathbb{Z} \times \{0\}$ हैं। आप ऐसे अनंततः अनेक उदाहरण ज्ञात कर सकते हैं।

E22) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ के उपवलय $D = \{(n, n) | n \in \mathbb{Z}\}$ पर विचार कीजिए।

मान लीजिए कि D, $S_1 \times S_2$ के रूप का है, जहाँ S_1 और S_2, $\mathbb{Z}$ के उपवलय हैं।

अतः, किन्हीं $m, s \in \mathbb{Z}$ के लिए, $S_1 = m\mathbb{Z}$ और $S_2 = s\mathbb{Z}$.

अब D का कोई भी अवयव (a, b) के रूप का है, जहाँ $a \in S_1$ और $b \in S_2$.

अतः, $a = mm_1$ और $b = ss_1$, किन्हीं $m_1, s_1 \in \mathbb{Z}$ के लिए।

क्योंकि $(a, b) \in D$, इसलिए $(a, b) = (n, n)$ किसी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए। अर्थात् $(mm_1, ss_1) = (n, n)$.

अतः $mm_1 = n = ss_1$, अर्थात् $m | n, s | n$. यह प्रत्येक $n \in \mathbb{Z}$ के लिए सत्य है।

इस प्रकार, इकाई 10 के E29 द्वारा $m = \pm 1, s = \pm 1$.

अतः $S_1 = \mathbb{Z} = S_2$, अर्थात् $D = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

परंतु, तब $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ में $(1, 2)$ जैसे भी अवयव हैं, जो D में नहीं है। अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँच जाते हैं। इस प्रकार, हम जो मानकर चले थे वह ग़लत होना चाहिए।

इस प्रकार, $D \neq S_1 \times S_2$.

E23) इकाई 13 के उदाहरण 10 द्वारा, $S_1 \times S_2$ क्रमविनिमेय होगा यदि और केवल यदि दोनों S_1 और S_2 क्रमविनिमेय हों।

इसी प्रकार, पुनः इकाई 10 के उदाहरण 13 से, $S_1 \times S_2$ तत्समकी होगा iff दोनों S_1 और S_2 तत्समकी हों।

E24) $\{\emptyset\} \times \wp(Y)$ एक उदाहरण है।

यह एक उपवलय है क्योंकि $\wp(X)$ का $\{\emptyset\}$ एक उपवलय है, तथा $\wp(Y)$ का $\wp(Y)$ एक उपवलय है।

यह उचित उपवलय है, क्योंकि $\{\emptyset\} \subsetneq \wp(X)$.

यह अतुच्छ है क्योंकि $\wp(Y) \neq \{\emptyset\}$.

इकाई 12

गुणजावलियाँ

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

12.1 प्रस्तावना

आप देख चुके हैं कि एक वलय R का एक उपवलय S समूह $(R, +)$ का एक उपसमूह हो ता है। इकाई 6 से, आप यह भी जानते हैं कि $(R, +)$ का $(S, +)$ एक प्रसामान्य उपसमूह है, क्योंकि $+$ क्रमविनिमेय है। क्या यह प्रसामान्यता को किसी अर्थ में दोनों संक्रियाओं $+$ और . के लिए, विस्तृत किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, क्या कोई संकल्पना एक प्रसामान्य उपवलय जैसी भी हो सकती है?

स्मरण कीजिए कि गैलवा (Galois) वे प्रसामान्य उपसमूह की संकल्पना की खोज विभाग समूह को परिभाषित करने के संदर्भ में की थी। अतः, जो अब प्रश्न, जो उजागर होते हैं, वे हैं : क्या वलय सिद्धांत में कोई संकल्पना निम्नलिखित के अनुरूप है?

i) एक विभाग समूह।

ii) एक प्रसामान्य उपसमूह।

इस इकाई में, इन दोनों प्रश्नों पर विचार किया गया है।

भाग 12.2 में, आप वलय सिद्धांत में, प्रसामान्य उपसमूह के अनुरूप एक संकल्पना का अध्ययन करेंगे। यह 'एक गुणजावली (ideal)' की संकल्पना है। इस भाग में, आप गुणजावलियों के अनेक उदाहरणों का अध्ययन करेंगे।

भाग 12.3 में गुणजावलियों के प्रारंभिक गुणों पर ध्यान केंद्रित रहेगा। आप ज्ञात करेंगे कि क्या गुणजावलियों के प्रतिच्छेदन, सम्मिलन या गुणनफल एक गुणजावली हैं या नहीं।

अंत में, भाग 12.4 में, आप वलय सिद्धांत में एक विभाग समूह के अनुरूप संकल्पना का अध्ययन करेंगे। यहाँ चर्चा को समझने के लिए, यह अच्छा विचार रहेगा कि, इस भाग का अध्ययन करने से पहले, आप इकाई 7 पर पुनः दृष्टि डाल लें।

इस इकाई में, हमारी चर्चा निम्नलिखित अधिगम प्रत्याशाओं के इर्द-गिर्द निर्मित होगी। कृपया इन उद्देश्यों का प्राप्त करने के लिए, इस इकाई का सावधानीपूर्वक अध्ययन करें।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो जाएँगे :

- किसी वलय की गुणजावली को परिभाषित करना और उसके उदाहरण देना;
- निर्धारित करना कि किसी वलय का एक उपसमुच्चय एक गुणजावली या नहीं;
- किसी वलय की गुणजावलियों के मौलिक गुणों को सिद्ध करना तथा उनका अनुप्रयोग करना;
- एक विभाग वलय (quotient ring) को परिभाषित करना और उसके उदाहरण देना;
- विभाग वलयों के कुछ प्रारंभिक गुणों को सिद्ध करना तथा उनका अनुप्रयोग करना।

12.2 एक गुणजावली क्या होती है?

खंड 2 में, आपने प्रसामान्य उपसमूहों तथा समूह सिद्धांत में उनके द्वारा अदा की गई भूमिका का अध्ययन किया था। आपने देखा था कि प्रसामान्य उपसमूहों को रचित करने का सबसे महत्त्वपूर्ण कारण यह था कि यह हमें विभाग समूह को परिभाषित करने की अनुमति देता है। वलय सिद्धांत में, हम इसका एक अनुरूप संकल्पना अर्थात् विभाग वलय को परिभाषित करना चाहेंगे। इस भाग में, हम उपवलयों के एक वर्ग (class) का अध्ययन करेंगे, जो हमें ऐसा करने में सहायता करेगा। बीजीय संख्या सिद्धांत की खोज करते समय, 19वीं शताब्दी के गणितज्ञों डेडेकंड (Dedekind), क्रोनेकर (Kronecker) तथा अन्य ने इस संकल्पना को विकसित किया।

आकृति 1: डेडिकंड

सर्वप्रथम, आइए इस पर विचार करें कि एक उपवलय के किस प्रकार के गुणों की हमें आवश्यकता है, ताकि हम संगत विभाग वलय को परिभाषित कर सकें।

आइए $\mathbb{Z}$ पर विचार करते हुए प्रारंभ करें। आप जानते हैं कि यह $\mathbb{R}$ का एक उपवलय है। अतः, $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$ है। इसलिए $\mathbb{Z}$ $\mathbb{R}$ है। इसलिए, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ एक सुपरिभाषित विभाग समूह है। क्या यह वलय भी हैं। आइए देखें।

जैसा कि इकाई 7 में था, यदि $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ पर गुणन परिभाषित होता, तो हमें प्राप्त होता : $(r+\mathbb{Z})\cdot(s+\mathbb{Z}) = rs+\mathbb{Z} \ \forall \ r, s \in \mathbb{R}$.

अतः, आइए देखें कि क्या यह संक्रिया सुपरिभाषित है।

सर्वप्रथम, आप जानते हैं कि $\forall \ n \in \mathbb{Z}, n+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ है। अतः, $1+\mathbb{Z} = 0+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ है।

इसलिए, $\left(\frac{1}{5}+\mathbb{Z}\right)(1+\mathbb{Z}) = \left(\frac{1}{5}+\mathbb{Z}\right)(0+\mathbb{Z})$ है।

इस प्रकार, $\left(\frac{1}{5}\cdot 1\right)+\mathbb{Z} = \left(\frac{1}{5}\cdot 0\right)+\mathbb{Z}$ है। अर्थात्, $\frac{1}{5}+\mathbb{Z} = 0+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ है।

अतः, $\frac{1}{5} \in \mathbb{Z}$ है, जो सत्य नहीं है।

इसलिए, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ में यह गुणन सुपरिभाषित नहीं है।

दूसरी ओर, आइए देखें कि क्या होता है, यदि हम $\mathbb{Z}$ के उपवलय $6\mathbb{Z}$ पर विचार करते हैं। क्या $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ में अवयव अनुसार गुणन परिभाषित है? आइए देखें।

मान लीजिए कि $r+6\mathbb{Z}=s+6\mathbb{Z}$ और $m+6\mathbb{Z}=n+6\mathbb{Z}$ है, जहाँ $r, s, m, n \in \mathbb{Z}$ है।

तब, $r-s \in 6\mathbb{Z}$ और $m-n \in 6\mathbb{Z}$ है। मान लीजिए कि $t, u \in \mathbb{Z}$ के लिए, $r-s=6t$ और $m-n=6u$ है।

तब, $(r+6\mathbb{Z})(m+6\mathbb{Z}) = rm+6\mathbb{Z} = (s+6t)(n+6u)+6\mathbb{Z}$

$$= sn + 6(nt+su+6ut)+6\mathbb{Z}$$

$$= sn + 6\mathbb{Z}, \text{ क्योंकि } nt+su+6ut \in \mathbb{Z} \text{ है।}$$

$$= (s+6\mathbb{Z})(n+6\mathbb{Z}) \text{ है।}$$

इस प्रकार, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ में गुणन सुपरिभाषित है।

साथ ही, इस तथ्य का उपयोग करते हुए कि $\mathbb{Z}$ में गुणन सहचारी है, आपको इसका भी सत्यापन करना चाहिए कि यह गुणन सहचारी हैं

अंत में, $r, s, t \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$$(r+6\mathbb{Z})[(s+6\mathbb{Z})+(t+6\mathbb{Z})] = r(s+t)+6\mathbb{Z}$$

$$= (rs+6\mathbb{Z})+(rt+6\mathbb{Z})$$

$$= (r+6\mathbb{Z})(s+6\mathbb{Z})+(r+6\mathbb{Z})(t+6\mathbb{Z}) \text{ है।}$$

इस प्रकार, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ में गुणन योग पर वितरित है।

अतः, इस स्थिति में, ऐसा प्रतीत होता है कि हमें एक विभाग समूह प्राप्त हुआ है, जो एक वलय भी है।

वह क्या था जो $\mathbb{Z}$ में उपवलय $6\mathbb{Z}$ के बारे में था, परंतु $\mathbb{R}$ में उपवलय $\mathbb{Z}$ में नहीं था? ध्यान दीजिए कि $t \in \mathbb{Z}$ और $6n \in 6\mathbb{Z}$ के लिए, $6nt \in 6\mathbb{Z}$ भी है। परंतु, $n \in \mathbb{Z}$ और $r \in \mathbb{R}$ के लिए, rn का $\mathbb{Z}$ में होना आवश्यक नहीं है। ऐसा पता लगता है कि यही वह गुण है, जो संपूर्ण अंतर बना देता है, जो आप भाग 12.4 में विभाग वलयों पर विस्तृत चर्चा में देखेंगे। अभी के लिए, हम उस गुण के साथ उपवलयों पर ध्यान केंद्रित करेंगे, जिन्हें अभी आपने देखा है। आइए, ऐसे उपवलय को परिभाषित करते हुए प्रारंभ करें।

परिभाषा : किसी वलय $(R, +, \cdot)$ का एक उपवलय I वलय R की एक **गुणजावली** कहलाती है, यदि सभी $r \in R$ और $a \in I$ के लिए, $ar \in I$ है और $ra \in I$ है।

यदि आप उच्च वलय सिद्धांत का अध्ययन करेंगे, तो आप ज्ञात करेंगे कि अक्रमविनिमेय वलयों में बाईं गुणजावलियाँ और दाईं गुणजावलियाँ दोनों होती हैं।

उदारणार्थ, जैसा आपने पहले इस चर्चा में देखा था, $\mathbb{Z}$ की $6\mathbb{Z}$ एक गुणजावली है, परंतु $\mathbb{R}$ की $\mathbb{Z}$ एक गुणजावली नहीं है।

ध्यान दीजिए कि यदि R एक क्रमविनिमेय वलय है, तो उपरोक्त परिभाषा में दूसरे प्रतिबंध की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि $ar \in I \Rightarrow ra \in I \ \forall \ a \in I, r \in R$ है।

अतः, उपरोक्त परिभाषा से, आप जानते हैं कि **गुणजावलियाँ किसी वलय के परिभाषित की जाती हैं।** परंतु, जब तक अन्यथा न कहा जाए, आगे से इस इकाई में,

हम सदैव यह परिकल्पना करेंगे कि जिन वलयों के साथ हम कार्य करेंगे क्रमविनियम हैं। यह इसलिए किया जा रहा है ताकि आपको इस संकल्पना के साथ कार्य करने मं सहायता हो जाए।

अब, परिभाषा से आप जानते हैं कि प्रत्येक गुणजावली एक उपवलय है। क्या इसका विलोम सत्य है? यहाँ, इस बारे में एक टिप्पणी है।

टिप्पणी 1 : आप जानते हैं कि एक क्रमविनिमेय समूह का प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह होता है। परंतु, एक क्रमविनिमेय वलय के प्रत्येक उपवलय का एक गुणजावली होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, $\mathbb{R}$ क्रमविनिमेय है, $\mathbb{R}$ का $\mathbb{Z}$ एक उपवलय है, परंतु $\mathbb{R}$ की $\mathbb{Z}$ एक गुणजावली नहीं है, जैसाकि आप ऊपर देख चुके हैं

आइए, अब गुणजावलियों के कुछ उदाहरणों पर एक दृष्टि डालें।

उदाहरण 1 : प्रत्येक वलय R की चाहे वह क्रमविनिमेय है या नहीं, की न्यूनतम दो गुणजावलियाँ $\{0\}$ और R होती हैं। (R की $\{0\}$ तुच्छ **गुणजावली** कहलाती है)।

हल : इकाई 11 के उदाहरण में, आप देख चुके हैं कि R के R और $\{0\}$ उपवलय हैं। अब, किसी $r \in R$ के लिए $r \cdot 0 = 0 \in \{0\}$ है तथा $0 \cdot r = 0 \in \{0\}$ है।

अतः, R की $\{0\}$ एक गुणजावली है।

आगे, किसी $r \in R$ के लिए, $r \cdot s = rs \in R$ है तथा $s \cdot r = sr \in R\ \forall\ s \in R$ है।

इस प्रकार, R एक गुणजावली की वांछनीयताओं को संतुष्ट करता है।

***

उदाहरण 1 हमें निम्नलिखित परिभाषा की ओर पहुँचा देता है।

परिभाषा : यदि किसी वलय R की एक गुणजावली I ऐसी है कि $I \neq R$ है, तो I को R की **उचित गुणजावली (proper ideal)** कहते हैं। साथ ही, यदि $I \neq \{0\}$ है, तो I को R की एक **अतुच्छ गुणजावली (non-trivial ideal)** कहते हैं।

आइए अब कुछ उचित अतुच्छ गुणजावलियों पर विचार करें। पहले आप देख चुके हैं कि $\mathbb{Z}$ की $6\mathbb{Z}$ एक गुणजावली है। हम इसे निम्नलिखित उदाहरण में व्यापीकृत करते हैं।

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि यदि $n \neq 0, \pm 1$ है, तो $\mathbb{Z}$ का $n\mathbb{Z}$ उपवलय एक उचित अतुच्छ गुणजावली है। साथ ही, $\mathbb{Z}$ की केवल यही गुणजावलियाँ हैं।

हल : इकाई 11 के उदाहरण 4 से, आप जानते हैं कि यदि $n \neq 0, \pm 1$ है, तो $\mathbb{Z}$ का $n\mathbb{Z}$ एक उचित अतुच्छ उपवलय होता है।

साथ ही, किन्हीं $z \in \mathbb{Z}$ और $nm \in n\mathbb{Z}$ के लिए, $z(nm) = n(zm) \in n\mathbb{Z}$ है।

अतः, $\mathbb{Z}, n\mathbb{Z} \neq \{0\}$ और $n\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ की $n\mathbb{Z}$ एक गुणजावली है।

अब, प्रत्येक गुणजावली एक उपवलय होता है। इकाई 11 के उदाहरण 4 से, आप यह भी जानते हैं कि $\mathbb{Z}$ के उपवलय केवल $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ के रूप के ही होते हैं। अतः $\mathbb{Z}$ की गुणजावलियाँ केवल $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ के रूप की होती हैं। इस प्रकार, $\mathbb{Z}$ की उचित अतुच्छ गुणजावलियाँ केवल $n\mathbb{Z}, n \neq 0, 1, -1$ हैं।

***

उदाहरण 3 : जाँच कीजिए कि $\mathbb{R}$ की $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ एक गुणजावली है या नहीं, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है।

हल : इकाई 11 के उदाहरण 2 से, आप जानते हैं कि $\mathbb{R}$ का $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ एक उपवलय है। अब, $\pi \in \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए। तब, $a, b \in \mathbb{Q}$ के लिए,

$\pi(a + b\sqrt{p}) = \pi a + \pi b\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ है, क्योंकि $\pi a \notin \mathbb{Q}$ है।

अतः, $\mathbb{R}$ की $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ एक गुणवजावली नहीं है।

***

अब, आप कुछ प्रश्न को नहीं हल कर लेते?

E1) बिंदुश : योग और गुणन के सापेक्ष $[-3, 3]$ से $\mathbb{R}$ तक के फलनों के वलय की एक अतुच्छ उचित गुणजावली ज्ञात कीजिए।

E2) क्या $\mathbb{C}$ की $\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$ एक गुणजावली है? क्यों या क्यों नहीं?

E3) जाँच कीजिए कि

i) $\mathbb{C}$ की $\mathbb{Z}[i]$ एक उचित गुणजावली है या नहीं।

ii) $\mathbb{C}[x]$ की $\mathbb{R}[x]$ एक गुणजावली है या नहीं।

iii) $\mathbb{Z}_6$ की $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ और $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ उचित गुणजावलियाँ हैं या नहीं।

अब, इकाई 11 के भाग 11.3 से, आप जानते हैं कि इसके निर्धारित (या सुनिश्चित) करने के निकष (नियम) हैं कि किसी वलय का एक दिया हुआ उपसमुच्चय एक उपवलय है या नहीं। क्या हम इनका उपयोग यह जाँच करने के नियम (निकष) विकसित करने में कर सकते हैं कि उपसमुच्चय एक गुणजावली है या नहीं? इसके बारे में निम्नलिखित परिणाम पर विचार कीजिए।

प्रमेय 1 : (गुणजावली परीक्षण) : किसी वलय R का एक अरिक्त उपसमुच्चय I (क्रमविनिमेय होना आवश्यक नहीं) R की एक गुणजावली होती है यदि और केवल यदि

i) $a - b \in I \ \forall\ a \in I, b \in I$, तथा

ii) $ar \in I$ और $ra \in I \ \forall\ a \in I, r \in R$ है।

उपपत्ति : सर्वप्रथम, मान लीजिए कि R की I एक गुणजावली है। तब, R का I एक उपवलय है। इस प्रकार, उपवलय परीक्षण (Test) द्वारा, $a - b \in I \ \forall\ a, b \in I$ है। अतः, (i) सत्य है।

आगे, परिभाषा द्वारा उपरोक्त (ii) सत्य है।

विलोमतः, परिकल्पना कीजिए कि I के लिए (i) और (ii) सत्य है।

तब, $a - b \in I$ और $ab \in I \ \forall\ a, b \in I$ है।

अतः, R का I एक उपवलय है।

आगे, (ii) के कारण, R की एक गुणजावली की परिभाषा में दिए प्रतिबंधों को I संतुष्ट करता है।

इस प्रकार, R की I एक गुणजावली है। ■

ध्यान दीजिए कि यदि R एक क्रमविनियम वलय है, तो गुणजावली परीक्षण में, प्रतिबंध (ii) केवल $'ar \in I \ \forall \ a \in I, r \in R'$ रह जाता है।

आइए इस परीक्षण (टेस्ट) का कुछ स्थितियों में अनुप्रयोग करें।

उदाहरण 4: मान लीजिए कि $S = \{a + 2bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$ है, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है। दर्शाइए कि $\mathbb{Z}[i]$ का S एक उपवलय है। क्या $\mathbb{Z}[i]$ की S एक गुणजावली है? क्यों या क्यों नहीं।

हल : सर्वप्रथम, $2i \in S$ है। अतः, $S \neq \emptyset$ है।

आगे, S में $a + 2bi, c + 2di$ के लिए,

$(a + 2bi) - (c + 2di) = (a - c) + 2(b - d)i \in S$ है, तथा

$(a + 2bi)(c + 2di) = (ac - 4bd) + 2(bc + ad)i \in S$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{Z}[i]$ का S एक उपवलय है।

परंतु, $ar \notin S \ \forall \ a \in S$ और $r \in \mathbb{Z}[i]$ है। उदाहरणार्थ, $1 = 1 + 2 \cdot 0 \cdot i \in S$ है और $i \in \mathbb{Z}[i]$ है ताकि $1 \cdot i = i \notin S$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{Z}[i]$ की S एक गुणजावली नहीं है।

***

उदाहरण 5: मान लीजिए कि X एक अपरिमित समुच्चय है। X के सभी परिमित उपसमुच्चयों के समुच्चय I पर विचार कीजिए। क्या $(\wp(X), \Delta, \cap)$ की I एक गुणजवली है? क्यों और क्यों नहीं?

हल : $I = \{A | X$ एक A परिमित उपसमुच्चय है$\}$ है। ध्यान दीजिए कि

i) $\emptyset \in I$ है। अर्थात्, $\wp(X)$ का शून्य अवयव I में है। अतः, $I \neq \emptyset$ है।

ii) $A, B \in \wp(X)$ के लिए, $A - B = A \Delta (-B)$

$= A \Delta B$, क्योंकि $B = -B$ में $\wp(X)$ है।

iii) $A, B \in \wp(X)$ के लिए, $AB = A \cap B$ है।

इस प्रकार, यदि $A, B \in I$ है, तो $A - B$ पुनः X का एक परिमित उपसमुच्चय है, तथा इसीलिए $A - B \in I$ है।

आगे, जब भी X का A एक परिमित उपसमुच्चय है तथा X का B कोई भी उपसमुच्चय है, तो $A \cap B \subseteq A$ है। अतः, X का $A \cap B$ एक परिमित उपसमुच्चय है।

इस प्रकार, यदि $A \in I$ और $B \in \wp(X)$ है, तो $AB \in I$ है।

अतः, गुणजावली परीक्षण द्वारा, $\wp(X)$ की I एक गुणजावली है।

***

उदाहरण 6: मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है तथा X का Y एक अरिक्त उचित उपसमुच्चय है। दर्शाइए कि $\wp(X)$ की $I = \{A \in \wp(X) | A \cap Y = \emptyset\}$ एक गुणजावली है।

विशिष्ट रूप में, यदि $Y = \{x_0\}$ है, जहाँ $\{x_0\} \subsetneq X$, है, तो $\wp(X)$ की $I = \{A \in \wp(X) | x_0 \notin A\}$ एक गुणजावली है।

हल : सर्वप्रथम, ध्यान दीजिए कि $I = \wp(Y^c)$ है तथा $Y^c \neq \emptyset$ है। इस प्रकार, $I \neq \emptyset$ है।

दूसरे, $\forall\ A, B \in I,$

$$(A - B) \cap Y = (A \Delta B) \cap Y$$
$$= (A \cap Y) \Delta (B \cap Y) = \emptyset \Delta \emptyset$$
$$= \emptyset \text{ है।}$$

इस प्रकार, $A - B \in I$ है।

अंत में, $A \in I$ और $B \in \wp(X)$ के लिए,

$(AB) \cap Y = (A \cap B) \cap Y = (B \cap A) \cap Y = B \cap (A \cap Y) = B \cap \emptyset = \emptyset$ है।

इस प्रकार, $AB \in I$ है।

अतः, प्रमेय 1 द्वारा, $\wp(X)$ की I एक गुणजावली है।

***

अब एक उदाहरण पर विचार कीजिए, जिसका उपयोग शेष बची इकाइयों में अनेक बार किया जाएगा।

उदाहरण 7: इकाई 10 के उदाहरण 7 में दिए हुए वलय $C[0,1]$ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि $M = \{f \in C[0,1] \mid f(1/2) = 0\}$ है। दर्शाइए कि $C[0,1]$ की एक गुणजावली है।

हल : सभी $x \in [0, 1]$ के लिए, $\mathbf{0}(x) = 0$ द्वारा शून्य अवयव $\mathbf{0}$ परिभाषित है। क्योंकि $0(1/2) = 0$ है, इसलिए $0 \in M$ है। इस प्रकार, $M \neq \emptyset$ है।

साथ ही, यदि $f, g \in M$ है, तो $f - g \in C[0, 1]$ है, तथा $(f - g)(1/2) = f(1/2) - g(1/2) = 0 - 0 = 0$ है।

अतः, $f - g \in M$ है।

आगे, यदि $f \in M$ और $g \in C[0, 1]$ है, तो आप जानते हैं कि $f \cdot g \in C[0, 1]$ है।

साथ ही, $(fg)(1/2) = f(1/2)g(1/2) = 0 \cdot g(1/2) = 0$ है।

अतः, $fg \in M$ है।

इस प्रकार, प्रमेय 1 द्वारा, $C[0, 1]$ की M एक गुणजावली है।

***

$\mathbb{R}$ में किसी संवृत्त अंतराल $[a, b]$ के लिए, $C[a, b]$ की अपरिमित रूप से अनेक गुणजावलियाँ होती हैं।

अब आपके लिए कुछ प्रश्न हल करने का समय है।

E4) आइए उदाहरण 7 को व्यापीकृत करें।

i) मान लीजिए कि $a \in [0,1]$ है। दर्शाइए कि $C[0, 1]$ की $I_a = \{f \in C[0,1] \mid f(a) = 0\}$ एक गुणजावली है।

ii) $\mathbb{R}$ में किसी अंतराल $[a, b]$ तथा $r \in [a, b]$ के लिए, दर्शाइए कि $C[a, b]$ की $I_r = \{f \in C[a, b] \mid f(r) = 0\}$ एक गुणजावली है।

iii) $r \in [0, 1]$ के लिए, क्या $C[0, 1]$ की $J_r = \{f \in C[0, 1] | f(r) = 1\}$ एक गुणजावली है? क्यों या क्यों नहीं?

E5) जाँच कीजिए कि R का केंद्र $C(R)$, R की एक गुणजावली है या नहीं।

E6) जाँच कीजिए कि $\mathbb{Z}[x]$ की निम्नलिखित गुणजावलियाँ हैं या नहीं :

i) अचर पद 0 के साथ, $\mathbb{Z}$ पर सभी बहुपदों का समुच्चय।

ii) $S = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \middle| a_i \in 3\mathbb{Z} \ \forall \ i = 0, 1, \ldots, n \right\}$।

E7) मान लीजिए कि R एक वलय है तथा $a \in R$ है। दर्शाइए कि R की Ra एक गुणजावली है। (Ra को $a \in R$ द्वारा जनित R की **मुख्य गुणजावली** कहते हैं।)

(स्मरण कीजिए कि R एक क्रमविनिमेय वलय है!)

E8) मान लीजिए कि R एक वलय है तथा $a, b \in R$ है। दर्शाइए कि R की $I = \{x \in R | ax \in bR\}$ एक गुणजावली है।

अब, जब आपने E7 को हल कर लिया है, तो क्या आप E3(iii) और E6(i) के साथ इसका कोई संबंध देखते हैं? ध्यान दीजिए कि E6(i) केवल $x\mathbb{Z}[x]$ ही है।

अब, आइए देखें कि जो आपने E7 में सिद्ध किया है, उसे किस प्रकार व्यापीकृत किया जा सकता है।

उदाहरण 8: किसी वलय R और $a_1, a_2 \in R$ के लिए, दर्शाइए कि R की $Ra_1 + Ra_2 = \{x_1a_1 + x_2a_2 | x_1, x_2 \in R\}$ एक गुणजावली है।

हल : सर्वप्रथम, $0 = 0a_1 + 0a_2$ है। $\therefore 0 \in Ra_1 + Ra_2$ है।

यदि R क्रमविनिमय नहीं है, तो $Ra_1 + Ra_2$ की एक गुणजावली नहीं है।

अतः, $Ra_1 + Ra_2 \neq \emptyset$ है।

आगे, $\forall \ x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$,

$(x_1a_1 + x_2a_2) - (y_1a_1 + y_2a_2) = (x_1 - y_1)a_1 + (x_2 - y_2)a_2 \in Ra_1 + Ra_2$ है।

अंत में, $r \in R$ और $x_1a_1 + x_2a_2 \in Ra_1 + Ra_2$ के लिए,

$r(x_1a_1 + x_2a_2) = rx_1a_1 + rx_2a_2 \in Ra_1 + Ra_2$ क्योंकि $rx_1 \in R, rx_2 \in R$ है।

इस प्रकार प्रमेय 1 द्वारा, R की $Ra_1 + Ra_2$ एक गुणजावली है।

***

उदाहरण 8 में गुणजावलियाँ प्राप्त करने की विधि को किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, R के स्थिर अवयवों $a_1, \ldots, a_n$ के लिए $\{x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n | x_i \in R\}$ की गुणजावलियाँ प्रदान करने के लिए, विस्तृत किया जा सकता है। ऐसी गुणजावलियाँ वलय सिद्धांत में बार-बार प्रकट होती रहती हैं। इनका एक विशिष्ट नाम है, जो इकाई 4 के भाग 4.4 में आपके द्वारा किए गए अध्ययन से जुड़ा हुआ है।

परिभाषा : मान लीजिए कि $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $a_1, \ldots, a_n$ किसी वलय R के दिए हुए अवयव हैं। तब, **$a_1, \ldots, a_n$ द्वारा जनित R की गुणजावली** $Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n = \{x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n | x_i \in R\}$ होती है।

अवयव $a_1,\ldots,a_n$ इस गुणजावली के **जनक (generators)** कहलाते हैं। हम इस गुणजावली को $<\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a_n}>$ द्वारा भी व्यक्त करते हैं।

जब $n=1$ है, तब हमारे द्वारा प्राप्त गुणजावली वह है, जो E7 में है, जिसे **मुख्य गुणजावली** कहा जाता है। इस प्रकार, यदि $a\in R$ है तो R पर $\mathbf{Ra}=<\mathbf{a}>$ एक मुख्य गुणजावली है। अगले खंड में, आप मुख्य गुणजावलियों के साथ बहुत कुछ कार्य कर रहे होंगे।

क्या आप मुख्य गुणजावली तथा चक्रीय समूह की संकल्पनाओं के बीच कुछ संबंध देख रहे हैं? क्या ये समान नहीं हैं, यदि वलय $\mathbb{Z}$ है? इस संदर्भ में, निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 2 : उदाहरण 2 से, आप देख सकते हैं कि $\mathbb{Z}$ की प्रत्येक गुणजावली एक मुख्य गुणजावली है।

अब, गुणजावलियों तथा जनकों पर कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

E9) मान लीजिए कि R एक तत्समकी वलय है। दर्शाइए कि $<1>=R$ है। यदि $u\in U(R)$ है, तो $<u>$ को ज्ञात कीजिए।

E10) मान लीजिए कि R एक वलय है तथा $r\in R$ है। r द्वारा जनित R का चक्रीय उपसमूह ज्ञात कीजिए। क्या यह वही है जो r द्वारा जनित R की मुख्य गुणजावली है? क्यों या क्यों नहीं?

E11) क्रमशः $\overline{3}$ द्वारा और $\overline{5}$ द्वारा जनित $\mathbb{Z}_{10}$ की मुख्य गुणजावलियाँ ज्ञात कीजिए। साथ ही, $<\overline{2},\overline{3}>$ भी ज्ञात कीजिए तथा देखिये कि क्या यह $<\overline{5}>$ है या नहीं।

E12) दर्शाइए कि $\mathbb{Z}_n$, $n\in\mathbb{N}$ की प्रत्येक गुणजावली एक मुख्य गुणजावली है।

E13) मान लीजिए कि X एक अरिक्त अपरिमित समुच्चय है तथा यह भी मान लीजिए कि X का A एक उचित अरिक्त उपसमुच्चय है। दर्शाइए कि मुख्य गुणजावली $\wp(X)A=\wp(A)$ है।

अब आइए किसी वलय की एक विशिष्ट गुणजावली पर दृष्टि डालें। परंतु, ऐसा करने से पहले, हमें एक परिभाषा देने की आवश्यकता है।

परिभाषा : किसी वलय R का एक अवयव **शून्यंभावी (nilpotent)** कहलाता है, यदि एक धनात्मक पूर्णांक n का अस्तित्व है ताकि $a^n=0$ है।

उदाहरणार्थ, $\mathbb{Z}_9$ के $\overline{3}$ और $\overline{6}$ शून्यंभावी अवयव हैं, क्योंकि है $\overline{3}^2=\overline{9}=\overline{0}$ तथा $\overline{6}^2=\overline{36}=\overline{0}$ है।

साथ ही, **किसी भी वलय R में, 0 एक शून्यंभावी अवयव होता है।**

अब, निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 9: मान लीजिए कि R एक वलय है। दर्शाइए कि R के शून्यम्भावी अवयवों का समुच्चय R की एक गुणजावली है (यह गुणजावली R की **शून्य करणी (nil radical)** कहलाती है)।

हल : मान लीजिए कि R के शून्यंभावी अवयवों का समुच्चय N है। अर्थात्, $N=\{a\in R\mid$ किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए $a^n=0$ है। तब, $0\in N$ है। अतः,

$N \neq \emptyset$ है।

आगे, यदि $a, b \in N$ है, तो किन्हीं धनात्मक पूर्णांकों m और n के लिए, $a^n = 0$ और $b^m = 0$ है। अब, इकाई 10 के E16 से, आप जानते हैं कि

$$(a-b)^{m+n} = \sum_{r=0}^{m+n} {}^{m+n}C_r a^r (-b)^{m+n-r} \text{ है।}$$

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक $r = 0, 1, \ldots, m+n$ के लिए, या तो $r \geq n$ है या $m+n-r \geq m$ है। अतः, या तो $a^r = 0$ है या $b^{m+n-r} = 0$ है।

इस प्रकार, प्रत्येक r के लिए, पद $a^r b^{m+n-r} = 0$ है।

अतः, $(a-b)^{m+n} = 0$ है।

इस प्रकार, $a - b \in N$ जब भी $a, b \in N$ है।

अंत में, यदि $a \in N$ है, तो किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए $a^n = 0$ है। अतः, किसी $r \in R$ के लिए $(ar)^n = a^n r^n$ है, क्योंकि R क्रमविनिमेय है

$= 0$ है।

अर्थात्, $ar \in N$ है।

इस प्रकार, R की N एक गुणजावली है।

***

आइए देखें कि कुछ परिचित वलयों की शून्य करणियाँ क्या हैं।

वलयों $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ या $\mathbb{C}$ के लिए, $N = \{0\}$ है, क्योंकि इन वलयों के किसी भी शून्येतर अवयव की कोई भी धनात्मक घात शून्येतर होती है।

$\mathbb{Z}_4$ के लिए, $N = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ है, क्योंकि $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\overline{1}^n = \overline{1}$ है तथा $\overline{3}^n = \overline{1}$ या $\overline{3}$ है।

अब, यदि R एक वलय है तथा $a \in R$ है, तो a के सहचर (से जुड़ी) R की एक गुणजावली होती है। हम इसे परिभाषित करते हैं तथा आपसे कहते हैं कि निम्नलिखित में से एक प्रश्न में (देखिए E15) इसे सिद्ध कीजिए।

E14) $\mathbb{Z}_8$ और $\wp(X)$ की शून्य करणियाँ ज्ञात कीजिए, जहाँ X एक अरिक्त समुच्चय है।

E15) मान लीजिए कि R एक वलय है तथा $a \in R$ है। दर्शाइए कि $\textbf{Ann a} = \{r \in R \mid ra = 0\}$, R की एक गुणजावली है। (यह गुणजावली a का **शून्यकारी (annihilator)** कहलाता है।)

$0 \in R$ का शून्यकारी क्या है? यदि R तत्समकी है, तो $1 \in R$ का शून्यकारी क्या है?

E16) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

i) R की $\text{Ann}\, a$ एक उचित अतुच्छ गुणजावली है, जहाँ R एक अतुच्छ वलय है तथा $a \in R$ है।

ii) यदि R एक वलय है तथा $a, b \in R$ है, $\text{Ann}\, a = \text{Ann}\, b$ है, तो $a = b$ है।

iii) यदि R और S समान शून्य करणियों वाले वलय हैं, तो $R = S$ है।

अब आप एक गुणजावली की संकल्पना से भली-भाँति परिचित हो गए होंगे। आइए अब गुणजावलियों के कुछ मौलिक गुणों की चर्चा करें।

12.3 गुणजावलियों के गुण

इस भाग में, हम गुणजावलियों के अनेक रोचक पहलुओं पर दृष्टि डालेंगे। हम गुणजावलियों पर समुच्चय संक्रियाओं तथा गुणजावलियों के बीजगणित की चर्चा करेंगे।

आइए, एक गुण से प्रारंभ करें, जिसके बारे में आपको E9 से संकेत मिल गया होगा। $\mathbb{Z}$ की सभी गुणजावलियों पर विचार कीजिए। ये उदाहरण 2 में दी हुई हैं। किसी भी उचित गुणजावली में 1 अंतर्विष्ट नहीं है। क्या यह केवल $\mathbb{Z}$ के लिए सत्य है। ऐसा नहीं है, जैसा कि निम्नलिखित प्रमेय आपको बताती है।

प्रमेय 2 : मान लीजिए कि तत्समक 1 के साथ R एक वलय है। यदि R की I एक गुणजावली है तथा $1 \in I$ है, तो $I = R$ होता है।

उपपत्ति : आप जानते हैं कि $I \subseteq R$ है। हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $R \subseteq I$ है।

मान लीजिए कि $r \in R$ है। क्योंकि $1 \in I$ है तथा R की I एक गुणजावली, इसलिए $r = r \cdot 1 \in I$ है। अतः, $R \subseteq I$ है।

इसलिए, $I = R$ है। ■

इस परिणाम का उपयोग करते हुए, हम तुरंत कह सकते हैं कि $\mathbb{Q}$ की $\mathbb{Z}$ एक गुणजावली नहीं है। कैसे? ठीक है, यदि $\mathbb{Q}$ की $\mathbb{Z}$ एक गुणजावली होती, तो प्रमेय 2 का क्या यह निहितार्थ नहीं होता कि $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ है? और यह सत्य नहीं है। अतः, $\mathbb{Q}$ की $\mathbb{Z}$ एक गुणजावली नहीं हो सकती।

क्या यह हमें यह भी बताती है कि $\mathbb{R}$ की $\mathbb{Q}$ एक गुणजावली है या नहीं? यह हमें बताती है। क्योंकि $1 \in \mathbb{Q}$ और $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ है, इसलिए $\mathbb{R}$ की $\mathbb{Q}$ एक गुणजावली नहीं हो सकती।

प्रमेय 2 का एक अन्य महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग निम्नलिखित है।

उदाहरण 10 : $\mathbb{Q}$ की सभी गुणजावलियों को ज्ञात कीजिए।

हल : जैसा कि आप जानते हैं, इसकी दो गुणजावलियाँ $\{0\}$ और $\mathbb{Q}$ हैं। क्या कोई अन्य भी हैं? आइए ज्ञात करें।

मान लीजिए कि $I \neq \{0\}$, $\mathbb{Q}$ की एक गुणजावली है। तब, $\exists\, x \in I, x \neq 0$ है।

क्योंकि $x \in I \subseteq \mathbb{Q}$ है, इसलिए $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ है।

क्योंकि $\mathbb{Q}$ की I एक गुणजावली है, इसलिए $x \cdot \dfrac{1}{x} \in I,$ है। अर्थात् $1 \in I$ है।

परंतु, तब प्रमेय 2 द्वारा, $I = \mathbb{Q}$ है।

अतः, $\mathbb{Q}$ की कोई अतुच्छ उचित गुणजावली नहीं है।

***

अब एक संबंधित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E17) $\mathbb{R}$ और $\mathbb{C}$ की सभी गुणवजालियों को ज्ञात कीजिए।

अब, आइए किसी वलय की गुणजावलियों के समुच्चय पर द्विआधारी संक्रियाओं की ओर अपना ध्यान केंद्रित करें। पिछले भाग में, आपने अध्ययन किया था कि उपवलयों का प्रतिच्छेदन एक उपवलय होता है। अब आप देखेंगे कि गुणजावलियों का प्रतिच्छेदन क्यों एक गुणजावली होती है।

प्रमेय 3 : यदि I और J एक वलय R की गुणजावलियाँ हैं (क्रमविनिमेय होना आवश्यक नहीं है), तो R की निम्नलिखित गुणजावलियाँ होती हैं :

i) $I \cap J$, तथा

ii) $I + J = \{a + b \mid a \in I$ और $b \in J\}$

उपपत्ति : i) इकाई 11 से, आप जानते हैं कि R का $I \cap J$ एक उपवलय है।

आगे, यदि $a \in I \cap J$ है, तो $a \in I$ और $a \in J$ है।

अतः, R में सभी x के लिए, $ax \in I, xa \in I$, $ax \in J$ और $xa \in J$ है।

इसलिए, सभी $ax \in I \cap J$ और $a \in I \cap J$ के लिए, $xa \in I \cap J$ और $x \in R$ है।

इस प्रकार, R की $I \cap J$ एक गुणजावली है।

ii) सर्वप्रथम, $0 = 0 + 0 \in I + J$ है। $\therefore I + J \neq \emptyset$ है।

दूसरे, यदि $x, y \in I + J$ है, तो किन्हीं $a_1, a_2 \in I$ और $b_1, b_2 \in J$ के लिए, $x = a_1 + b_1$ और $y = a_2 + b_2$ है।

अतः, $x - y = (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I + J$ है।

अंत में, मान लीजिए कि $x \in I + J$ और $r \in R$ है। तब, किन्हीं $a \in I$ और $b \in J$ के लिए, $x = a + b$ है। अब, $ar \in I, ra \in I$ तथा $br \in J, rb \in J$ है, क्योंकि R की I और J गुणजावलियाँ हैं

अतः, $xr = (a + b)r = ar + br \in I + J$ है।

साथ ही, इसी प्रकार, $rx = r(a + b) = ra + rb \in I + J$ है।

इस प्रकार, R की $I + J$ एक गुणजावली है। ■

अतः, दो गुणजावलियों का योग एक गुणजावली है। यहाँ, ध्यान दीजिए कि जैसा आपने इकाई 11 में ज्ञात किया था दो उपवलयों का एक उपवलय होना आवश्यक नहीं है।

साथ ही, जैसा हमने इकाई 11 में देखा था कि उपवलयों की स्थिति में, **R की कितनी भी संख्या में गुणजावलियों का प्रतिच्छेदन R की एक गुणजावली होती है।** इसको उसी प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है, जैसे प्रमेय 3(i) में किया था।

इस ओर भी ध्यान दीजिए कि प्रमेय 3 से उदाहरण 8 भी प्राप्त हो जाता है।

अब, आइए गुणजावलियों के गुणनफल पर विचार करें। इकाई 11 में, आपने देखा था कि यदि हम $IJ = \{ab \mid a \in I, b \in J\}$ परिभाषित करें, तो IJ का एक उपवलय होना भी आवश्यक नहीं है, एक गुणजावली की तो बात ही छोड़िए। इसका कारण यह है कि यदि $x, y \in IJ$ है, तो IJ की इस परिभाषा के साथ, यह आवश्यक नहीं है कि $x - y \in IJ$ हो। (आप इसके एक उदाहरण का इकाई 15 में अध्ययन करेंगे।)

परंतु, यदि हम गुणनफल

$\mathbf{IJ = \{x \in R \mid x = a_1b_1 + \cdots + a_mb_m,\ a_i \in I,\ b_i \in J\ \forall\ i = 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N}}$ **के लिए** $\mathbf{\}}$

परिभाषित करें, तो हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होती है।

प्रमेय 4 : मान लीजिए कि I और J किसी वलय R (चाहे क्रमविनिमेय है या नहीं) की गुणजावलियाँ हैं। तब R की IJ एक गुणजावली होती है।

उपपत्ति : सर्वप्रथम, $IJ \neq \emptyset$ है, क्योंकि $I \neq \emptyset$ और $J \neq \emptyset$ है।

आगे, मान लीजिए कि $x, y \in IJ$ है। तब

$x = a_1b_1 + \cdots + a_mb_m$ तथा $y = a_1'b_1' + \cdots + a_n'b_n'$ है, किन्हीं

$a_1, \ldots, a_m, a_1', \ldots, a_n' \in I$ और $b_1, \ldots, b_m, b_1', \ldots, b_n' \in J$ के लिए।

$\therefore x - y = (a_1b_1 + \cdots + a_mb_m) - (a_1'b_1' + \cdots + a_n'b_n')$

$\qquad = (a_1b_1 + \cdots + a_mb_m) + (-a_1')b_1' + \cdots + (-a_n')b_n'$ है,

जो ab के रूप के अवयवों का एक परिमित योग है, जिसमें $a \in I$ और $b \in J$ है।

अतः, $x - y \in IJ$ है।

अंत में, मान लीजिए कि $x \in IJ$, मान लीजिए $a_i \in I$ और $b_i \in J$ के साथ, $x = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ है।

तब, किसी $r \in R$ के लिए,

$xr = (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)r = a_1(b_1r) + \ldots + a_n(b_nr)$ है, तथा

$rx = r(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) = (ra_1)b_1 + \cdots + (ra_n)b_n$ है।

क्योंकि R की I और J गुणजावलियाँ हैं, इसलिए $ra_i \in I$ और $b_ir \in J\ \forall\ i = 1, \ldots, n$ है।

अतः, $a \in I$ और $b \in J$ के साथ, xr और rx, ab के रूप में अवयवों के परिमित योग हैं।

अतः, $xr \in IJ$ और $rx \in IJ$ है।

इस प्रकार, R की IJ एक गुणजावली है। ■

आइए यह समझने के लिए एक उदाहरण पर विचार करें कि $I \cap J$, IJ और $I + J$ कैसे दिखाई देते हैं।

उदाहरण 11: $m, n \in \mathbb{Z}$ के लिए, दर्शाइए कि

i) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \ell\mathbb{Z}$ है, जहाँ $\ell = [n, m]$ है, जो n और m का l.c.m है,

ii) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = h\mathbb{Z}$ है, जहाँ $h = (n, m)$ है, जो n और m का g.c.d है, तथा

iii) $(n\mathbb{Z})(m\mathbb{Z}) = nm\mathbb{Z}$ है।

हलः इकाई 1 से, आप जानते हैं कि ℓ और h के अस्तित्व हैं।

i) क्योंकि $\ell = [n, m]$ है, इसलिए किन्हीं $x, y \in \mathbb{Z}$ के लिए $\ell = nx$ और $\ell = my$ है।

अतः, $\ell \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ है।

इसलिए $\ell\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ है। …(1)

विलोमतः, मान लीजिए कि $\alpha \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ है।

क्योंकि $\alpha \in n\mathbb{Z}$ है, इसलिए $n|\alpha$ है। क्योंकि $\alpha \in m\mathbb{Z}$ है, इसलिए $m|\alpha$ है।

अतः, परिभाषा द्वारा, $\ell|\alpha$ है। इसलिए, $\alpha \in \ell\mathbb{Z}$ है।

इस प्रकार, $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \subseteq \ell\mathbb{Z}$ है। …(2)

(1) और (2) से, हम $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \ell\mathbb{Z}$ प्राप्त करते हैं।

ii) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ का कोई भी अवयव $nr + ms$ है, जहाँ $r, s \in \mathbb{Z}$ है।

क्योंकि $(n, m) = h$ है, इसलिए मान लीजिए कि किन्हीं $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}$ के लिए, $hn_1 = n$ और $hm_1 = m$ है।

तब, $nr + ms = h(n_1r + m_1s) \in h\mathbb{Z}$ है।

अतः, $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} \subseteq h\mathbb{Z}$ है। …(3)

विलोमतः, इकाई 1 से आप जानते हैं कि किन्हीं $a, b \in \mathbb{Z}$ के लिए, $h = na + mb$ होता है।

अतः, $h \in n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ है।

इसलिए, $h\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ है। …(4)

(3) और (4) से, हम देखते हैं कि $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = h\mathbb{Z}$ है।

iii) गुणनफल के लिए, ध्यान दीजिए कि $nm = (n \cdot 1)(m \cdot 1) \in (n\mathbb{Z})(m\mathbb{Z})$ है।

$\therefore nm\mathbb{Z} \subseteq (n\mathbb{Z})(m\mathbb{Z})$ है।

साथ ही, $(n\mathbb{Z})(m\mathbb{Z})$ का कोई भी अवयव

$\sum_{i=1}^{t}(nr_i)(ms_i) = nm\left(\sum_{i=1}^{t} r_i s_i\right) \in nm\mathbb{Z}$ के रूप का है।

अतः, $(n\mathbb{Z})(m\mathbb{Z}) \subseteq nm\mathbb{Z}$ है।

इसलिए, $(n\mathbb{Z})(m\mathbb{Z}) = nm\mathbb{Z}$ है।

***

उदाहरण 11 से संबंधित निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 3: ध्यान दीजिए कि उदाहरण 11 में जो सिद्ध किया गया है, वह उसके अनुरूप है, जो चक्रीय समूहों के लिए, इकाई 4 की प्रमेय 8 में सिद्ध किया गया था।

आगे, हम उदाहरण 11 में बताए गए एक अति महत्त्वपूर्ण और उपयोग बिंदु की ओर ध्यान आकर्षित करना चाहते हैं। इस बिंदु का $\mathbb{Z}$ के साथ कार्य करते समय, जैसा कि आप विशिष्ट रूप से खंड 4 में देखेंगे, बहुत बार उपयोग किया जाता है।

उदाहरण 12: दर्शाइए कि यदि n और m असहभाज्य पूर्णांक हैं, तो $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ है।

हल: क्योंकि n और m असहभाज्य हैं, इसलिए $(n, m) = 1$ है (देखें इकाई 1)।

अब, उदाहरण 11 से, आप जानते हैं कि

$n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = (n, m)\mathbb{Z}$ है।

अतः, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

***

अब आइए देखें कि यदि I या J में से एक मुख्य गुणजावली है, तो IJ कैसा दिखाई देता है। आप इसे उदाहरण 11 में $\mathbb{Z}$ के लिए पहले ही देख चुके हैं।

उदाहरण 13: मान लीजिए कि R एक वलय है तथा R की I और J गुणजावलियाँ हैं, ताकि इनमें से एक मुख्य गुणजावली है। दर्शाइए कि $IJ = \{ab \mid a \in I, b \in J\}$ है।

हल : मान लीजिए कि $I = < a >$ है तथा J मुख्य गुणजावली हो भी सकती है या नहीं हो सकती है।

तब, IJ का कोई भी अवयव $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,\ a_i \in I,\ b_i \in J$ है।

मान लीजिए कि $a_i = ar_i$ है, जहाँ $r_i \in R\ \forall\ i = 1, \ldots, n$ है।

तब, $x = a\left(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i\right) = ab$ है, जहाँ $b = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i \in J$ है, क्योंकि R की J एक गुणजावली है।

अतः, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

***

अतः, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E18) निम्नलिखित के लिए, $I \cap J$, $I + J$ और IJ ज्ञात कीजिए :

i) $\mathbb{Z}_{12}$ में $I = < \overline{4} >$ और $J = < \overline{6} >$ है;

ii) $\wp(X)$ में $I = \wp(Y)$ और $J = \{A \in \wp(X) \mid A \cap Y = \emptyset\}$ है, जहाँ X एक अरिक्त समुच्चय है तथा $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ है।

E19) यदि I और J किसी वलय R (क्रमविनिमेय होना आवश्यक नहीं) की गुणजावलियाँ हैं, तो दर्शाइए कि

i) $IJ \subseteq I \cap J \subseteq I \subseteq I + J$ तथा $IJ \subseteq I \cap J \subseteq J \subseteq I + J$; है।

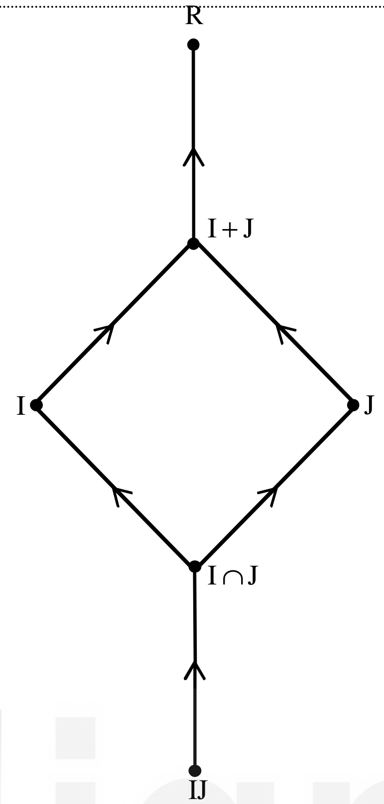
(इसको योजनाबद्ध रूप से आकृति 2 में दर्शाया गया है।)

ii) $I + J$ दोनों गुणजावलियों I और J को अंतर्विष्ट करने वाली न्यूनतम गुणजावली है। अर्थात्, यदि R की I और J दोनों को अंतर्विष्ट करने वाली एक गुणजावली A है, तो A में $I + J$ अवश्य ही अंतर्विष्ट होनी चाहिए।

iii) I और J दोनों में अंतर्विष्ट होने वाली $I \cap J$ अधिकतम गुणजावली है। अर्थात्, यदि I और J दोनों में अंतर्विष्ट होने वाली एक गुणजावली B है, तो $B \subseteq (I \cap J)$ है। अर्थात् यदि आकृति के सबसे ऊपर के दो व्यंजक बराबर हैं, तो नीचे के दो भी बराबर होते हैं।

iv) यदि $1 \in R$ और $I + J = R$ है, तो $IJ = I \cap J$ है; अर्थात् यदि आकृति 2 के सबसे ऊपर के दो व्यंजक बराबर हैं, तो नीचे के दो भी बराबर होते हैं।

v) यदि उपरोक्त (iv) में $1 \notin R$ है, तो क्या (iv) का शेष भाग अब भी सत्य होगा? क्यों या क्यों नहीं?



आकृति 2: गुणजावली पदसोपानता (hierarchy)! एक गुणजावली से दूसरी गुणजावली तक का तीर यह दर्शाता है कि पहली गुणजावली दूसरी में अंतर्विश्ट है, जैसा कि खंड 1 के उपसमूह आरेखों में था।

अब, आइए पूरकीकरण तथा सम्मिलन की समुच्चय संक्रियाओं पर दृष्टि डालें। इकाई 11 में, आप देख चुके हैं कि किसी उपवलय का पूरक एक उपवलय नहीं होता है। आपने उन प्रतिबंधों को भी देखा था जिनके अंतर्गत दो उपवलयों का सम्मिलिन एक उपवलय होता है। उसी समय पर निर्मित ज्ञान के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए।

E20) कथन ''R की $I_1 \setminus I_2$ एक गुणजावली होती है, जब R की I_1 और I_2 भिन्न-भिन्न गुणजावलियाँ होती हैं'' की निम्नलिखित 'उपपत्ति' पर विचार कीजिए।

'उपपत्ति' के प्रत्येक चरण पर, यह निर्णय लीजिए कि कथन सत्य है या असत्य है तथा ऐसा कहने के लिए, अपना कारण भी दीजिए।

उपपत्ति : 1) $x, y \in I_1 \setminus I_2$ के लिए, $x, y \in I_1$ और $x \notin I_2, y \notin I_2$ है।

2) $x - y \in I_1 \setminus I_2$ है।

3) $x \in I_1 \setminus I_2$ और $r \in R$ के लिए, $xr \in I_1$ और $xr \notin I_2$ है।

4) $xr \in I_1 \setminus I_2 \ \forall \ x \in I_1 \setminus I_2, r \in R$ है।

5) R की $I_1 \setminus I_2$ एक गुणजावली है।

E21) स्पष्ट कीजिए कि $I_1 \setminus I_2$ वलय R की एक गुणजावली क्यों नहीं है, जहाँ R की I_1 और I_2 गुणजावलियाँ हैं।

E22) i) मान लीजिए कि $\mathbb{Z}_{10}$ में, $I_1 = <\bar{3}>$ और $I_2 = <\bar{5}>$ है। क्या $\mathbb{Z}_{10}$ की $I_1 \cup I_2$ एक गुणजावली है? क्यों या क्यों नहीं?

ii) यदि $I_3 = <\bar{4}>$ है, तो क्या $\mathbb{Z}_{10}$ की $I_2 \cup I_3$ एक गुणजावली है? क्यों या क्यों नहीं?

E23) जो आपने E22 में प्राप्त किया है, उसका उपयोग करते हुए, वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए, जिसके अंतर्गत $I_1 \cup I_2$ वलय R की एक गुणजावली है, जहाँ R की I_1 और I_2 गुणजावलियाँ हैं।

अब आइए देखें कि गुणजावलियों का कार्तीय गुणनफल संबंधित वलयों के अनुलोम गुणनफल की एक गुणजावली है या नहीं। इकाई 6 के भाग 6.4 में, आपने देखा था कि यदि है $H \triangleleft G_1$ और $K \triangleleft G_2$ है, तो $H \times K \triangleleft G_1 \times G_2$ होता है। क्या ऐसा है। अनुरूप परिणाम अनुलोम गुणनफल $R_1 \times R_2$ की गुणजावलियों के लिए सत्य है? निम्नलिखित प्रमेय पर विचार कीजिए।

प्रमेय 5: मान लीजिए कि I_1 और I_2 क्रमशः वलयों R_1 और R_2 की गुणजावलियाँ हैं, जहाँ R_1 और R_2 क्रमविनिमेय हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं। तब, $R_1 \times R_2$ की $I_1 \times I_2$ एक गुणजावली होती है।

उपपत्ति : इकाई 11 की प्रमेय 3 से, आप जानते हैं कि $R_1 \times R_2$ की $I_1 \times I_2$ एक उपवलय है।

अब, मान लीजिए कि $(a, b) \in I_1 \times I_2$ और $(x, y) \in R_1 \times R_2$ है।

तब $(a, b)(x, y) = (ax, by) \in I_1 \times I_2$ है, तथा $(x, y)(a, b) = (xa, yb) \in I_1 \times I_2$ है (क्यों?

इस प्रकार, $R_1 \times R_2$ की $I_1 \times I_2$ एक गुणजावली है। ■

प्रमेय 5 की प्रक्रिया को अपनाते हुए, आप सिद्ध कर सकते हैं कि क्रमशः $R_1, R_2, \ldots, R_n$ में गुणजावलियों $I_1, I_2, \ldots, I_n$ का कार्तीय गुणनफल $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ गुणनफल $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n \; \forall \; n \geq 2$ की एक गुणजावली होती है। आइए $n = 2$ के लिए, इसका एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 14 : $C[0, 1] \times C[1, 2]$ की एक उचित अतुच्छ गुणजावली ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ हम उसका उपयोग करेंगे, जो आपने E4 में सिद्ध किया था।

मान लीजिए कि $a \in [0, 1]$ और $b \in [1, 2]$ है। तब, I_a और I_b क्रमशः $C[0, 1]$ और $C[1, 2]$ की गुणजावलियाँ हैं। क्योंकि I_a का $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f(x) = 1$ एक अवयव (अंग) नहीं है, इसलिए $I_a \neq C[0, 1]$ है।

साथ ही, I_a में $g : [0, 1] \to \mathbb{R} : g(x) = x - a$ है तथा $g \neq \mathbf{0}$ है। अतः, $I_a \neq \{\mathbf{0}\}$ है।

इस प्रकार, $C[0, 1]$ की I_a एक उचित अतुच्छ गुणजावली है।

इसी प्रकार, $C[1, 2]$ की I_b एक उचित अतुच्छ गुणजावली है।

इस प्रकार, प्रमेय 5 द्वारा, $C[0, 1] \times C[1, 2]$ की $I_a \times I_b$ एक उचित अतुच्छ गुणजावली है।

***

इकाई 11 में, आपने यह दर्शाया था कि $R_1 \times R_2$ का प्रत्येक उपवलय, उपवलयों का एक अनुलोम गुणनफल होता है। निम्नलिखित उदाहरण यह दर्शाता है कि यही बात गुणजावलियों के लिए भी सत्य है।

उदाहरण 15 : मान लीजिए कि R_1 और R_2 वलय हैं। दर्शाइए कि $R_1 \times R_2$ की प्रत्येक गुणजावली $I_1 \times I_2$ के रूप की नहीं होती है, जहाँ R_1 की गुणजावली I_1 है तथा R_2 की गुणजावली I_2 है।

हल : मान लीजिए A_1 और A_2 आबेली समूह हैं। A_1 और A_2 पर गुणन को $a \odot b = 0 \; \forall \; a, b \in A_1$ और $a' \odot b' = 0 \; \forall \; a', b' \in A_2$ परिभाषित कीजिए।

तब, आपको सत्यापन करना चाहिए कि $(A_1 \times A_2, +, \odot)$ एक वलय है, जहाँ + और $\odot$ घटक-अनुसार योग और गुणन का व्यक्त करते हैं।

आइए $A_1 = A_2 = \mathbb{Z}$ लें।

मान लीजिए कि $I = \{(n, n) | n \in \mathbb{Z}\}$ है। तब, इकाई 11 के उदाहरण 15 में, आप देख चुके हैं कि $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ का I एक उपवलय है।

साथ ही, $A_1 \times A_2$ की I एक गुणजावली है, क्योंकि $(n, n) \odot (a, b) = (n \odot a, n \odot b) = (0, 0) \in I \; \forall \; n \in \mathbb{Z}, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ है।

ध्यान दीजिए कि $I_1 \times I_2$ के रूप की I नहीं हो सकती, जहाँ $\mathbb{Z}$ की I_1 और I_2 गुणजावलियाँ हैं। क्योंकि यदि ऐसा होता, तो $I_1 \times I_2$ के रूप का उपवलय I होता, जहाँ $\mathbb{Z}$ के I_1 और I_2 उपवलय हैं। परंतु, इकाई 11 के E21 में आप सिद्ध कर चुके हैं कि ऐसा नहीं होता है।

***

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करके, आप प्रमेय 5 में चर्चा की गईं गुणजावलियों के कुछ और उदाहरण प्राप्त कर लेंगे। इनको हल करते समय, समूहों के अनुलोम गुणनफलों के साथ कार्य करने के अपने अनुभव का भी उपयोग कीजिए।

E24) $\mathbb{R}^4$ की तीन भिन्न-भिन्न अतुच्छ उचित गुणजावलियाँ ज्ञात कीजिए।

E25) मान लीजिए कि R एक अतुच्छ वलय है। जाँच कीजिए कि $R \times R$ की $S = \{(x, x) | x \in R\}$ एक गुणजावली है या नहीं। (यहाँ R पर गुणन उदाहरण 15 में दिया शून्य गुणन नहीं है।)

E26) $\mathbb{Q}[x] \times \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ की दो भिन्न-भिन्न अतुच्छ उचित गुणजावलियाँ ज्ञात कीजिए।

इसके साथ, आइए गुणजावलियों पर समुच्चय संक्रियाओं की अपनी चर्चा को समाप्त करें। अब, हम अपना ध्यान एक गुणजावली की संकल्पना की रचना करने के वास्तविक कारण पर केंद्रित करेंगे।

12.4 विभाग वलय

इकाई 7 में, आप कुछ विस्तार से विभाग समूहों का अध्ययन कर चुके हैं। इस भाग में, हम वलयों के लिए एक अनुरूप संकल्पना की चर्चा करेंगे। इन दोनों संकल्पनाओं में बहुत कुछ समानता है। इसलिए, आगे बढ़ने से पहले, कृप्या इकाई 7 पर पुनः दृष्टि डाल लें।

आप जानते हैं कि किसी समूह G के एक उपसमूह H के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय एक समूह केवल तभी बनाता है, जब $H \triangleleft G$ हो। यह समूह G/H है, जो प्रसामान्य उपसमूह H से जुड़ा गुणनखंड समूह (या विभाग समूह) कहलाता है। हम

वलयों के लिए ऐसा ही अनुमान संकल्पना को परिभाषित करना चाहते हैं। परंतु पहले, एक महत्त्वपूर्ण टिप्पणी!

टिप्पणी 4: इस इकाई में, आपने किसी वलय *(किसी भी वलय)* की एक गुणजावली की परिभाषा का अध्ययन किया है। वहाँ हमने यह भी कहा था कि जब तक अन्यथा नहीं कहा जाएगा, हम केवल क्रमविनिमेय वलयों के साथ ही कार्य करेंगे। **इस भाग में, जिन प्रमेयों को हम सिद्ध करेंगे, वो किसी भी वलय (क्रमविनिमेय है या नहीं है) के लिए मान्य होंगी।** परंतु **उदाहरण** केवल **क्रमविनिमेय वलयों** से ही होंगे, क्योंकि आप अधिकतर उन्हीं उदाहरणों को देख रहे होंगे, जिनको आप पिछले भागों में अध्ययन कर चुके हैं।

भाग 12.2 के प्रारंभ में, आपने देखा था कि यदि $(R,+,\cdot)$ एक वलय है तथा R का I एक उपवलय है, तो $I \lhd (R,+)$ होता है। अतः, $(R/I,+)$ एक समूह है। वस्तुतः, इकाई 7 से आप जानते हैं कि यह एक आबेली समूह है। अब, यदि $(R/I,+,\cdot)$ को एक वलय होना है, जहाँ $+$ और $\cdot$

$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I$, तथा

$(x+I)\cdot(y+I)=xy+I \ \forall \ x+I,\ y+I \in R/I$

द्वारा परिभाषित हैं, तो आप देख चुके हैं कि उपवलय I को अतिरिक्त प्रतिबंधों $rx \in I$ और $xr \in I$ को संतुष्ट करने की आवश्यकता है, जब भी $r \in R$ और $x \in I$ हैं, अर्थात् I को R की गुणजवली होना चाहिए।

निस्संदेह, यदि R की I एक गुणजावली है, तो R/I पर $+$ सुपरिभाषित है। हमें यह देखने की आवश्यकता है कि R/I पर $\cdot$ सुपरिभाषित है या नहीं। आइए इसकी जाँच करें।

मान लीजिए कि $a, a', b, b' \in R$ है ताकि $a+I=a'+I,\ b+I=b'+I$ है।

अब, क्योंकि $a+I=a'+I$ है, इसलिए $a-a' \in I$ है। मान लीजिए कि $a-a'=x$ है।

इसी प्रकार, $b-b' \in I$ है। मान लीजिए कि $b-b'=y$ है।

तब, $ab=(a'+x)(b'+y)=a'b'+(xb'+a'y+xy)$ है।

$\therefore ab-a'b' \in I$ है, क्योंकि $x \in I,\ y \in I$ है तथा R की I एक गुणजावली है।

$\therefore ab+I=a'b'+I$ है, जैसा कि आप इकाई 5 से जानते हैं।

इस प्रकार, R/I पर $\cdot$ सुपरिभाषित है।

अब, हम एक वलय R के लिए (जो क्रमविनिमेय हो सकती है और नहीं भी हो सकती है), निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करने की स्थिति में हैं।

प्रमेय 6: मान लीजिए कि R एक वलय है तथा R में I एक गुणजावली है। तब $(x+y)+(y+I)=(x+y)+I$, तथा $(x+I)\cdot(y+I)=xy+I \ \forall \ x,y \in R$ द्वारा परिभाषित योग और गुणन के सापेक्ष R/I एक वलय है।

R/I को 'R मोडूलों I' या संक्षेप में 'R mod I' पढ़ा जाता है।

उपपत्ति : जैसा कि पहले देख चुके हैं, $(R/I,+)$ एक आबेली समूह है। अतः, R/I को एक वलय सिद्ध करने के लिए, हमें केवल यह जाँच करने की आवश्यकता है कि $\cdot$ सहचारी है तथा $+$ पर वितरित है।

i) **$\cdot$ सहचारी है** : $\forall\ a,b,c \in R$,

$$((a+I)\cdot(b+I))\cdot(c+I)=(ab+I)\cdot(c+I)$$
$$=(ab)c+I$$
$$=a(bc)+I$$
$$=(a+I)\cdot((b+I)\cdot(c+I)) \text{ है।}$$

ii) **वितरण नियम** : मान लीजिए कि $a+I, b+I, c+I \in R/I$ है।

$$(a+I)\cdot((b+I)+(c+I))=(a+I)\cdot[(b+c)+I]$$
$$=a(b+c)+I$$
$$=(ab+ac)+I$$
$$=(ab+I)+(ac+I)$$
$$=(a+I)\cdot(b+I)+(a+I)\cdot(c+I) \text{ है।}$$

इसी प्रकार, आप सिद्ध कर सकते हैं कि $\forall\ a, b, c \in R$,

$((a+I)+(b+I))\cdot(c+I)=(a+I)\cdot(c+I)+(b+I)\cdot(c+I)$ है।

इस प्रकार, R/I एक वलय है।

ध्यान दीजिए कि प्रमेय 7 **किसी भी वलय** R के लिए सत्य है, चाहे वह क्रमविनिमेय है ■ या नहीं।

वलय R/I गुणजावली I द्वारा, वलय R का **विभाग वलय (quotient ring)** या **गुणखंड वलय** कहलाता है।

आइए, कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें। हम उस उदाहरण से प्रारंभ करते हैं, जिससे शब्दावली 'R mod I' उजागर हुई थी।

उदाहरण 16: मान लीजिए कि $R=\mathbb{Z}$ और $I=n\mathbb{Z}$ है। R/I क्या है?

हल : भाग 12.2 में, आप देख चुके हैं कि $\mathbb{Z}$ की $n\mathbb{Z}$ एक गुणजावली है। इकाई 2 से, आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1)+n\mathbb{Z}\}$ है,

$$=\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\} \text{ है,}$$

अर्थात् यह तुल्यता वर्गों (equivalence classes) मोडूलों n का समुच्चय $\mathbb{Z}_n$ है।

अतः, R/I वलय $\mathbb{Z}_n$ है, जो पूर्णांकों मोडूलों n का वलय है।

***

अब, आइए $\mathbb{Z}_n$ की एक गुणजावली पर दृष्टि डालें, जहाँ $n=8$ है।

उदाहरण 17: मान लीजिए कि $R=\mathbb{Z}_8$ है। दर्शाइए कि R की $I=\{\overline{0},\overline{4}\}$ एक गुणजावली है। R/I में $+$ और $\cdot$ के लिए कैले सारणियों की रचना कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि $I=\overline{4}R$ है, तथा इसीलिए, यह R की एक मुख्य गुणजावली है। इकाई 7 से, आप जानते हैं कि R/I में अवयवों की संख्या

$$=o(R/I)=\frac{o(R)}{o(I)}=\frac{8}{2}=4 \text{ है।}$$

आप देख सकते हैं कि ये अवयव निम्नलिखित सहसमुच्चय हैं :

$\overline{0}+I=\{\overline{0},\overline{4}\}$, $\overline{1}+I=\{\overline{1},\overline{5}\}$, $\overline{2}+I=\{\overline{2},\overline{6}\}$, $\overline{3}+I=\{\overline{3},\overline{7}\}$

R/I में + और · के लिए कैले सारणियाँ हैं :

+	$\overline{0}+I$	$\overline{1}+I$	$\overline{2}+I$	$\overline{3}+I$
$\overline{0}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{1}+I$	$\overline{2}+I$	$\overline{3}+I$
$\overline{1}+I$	$\overline{1}+I$	$\overline{2}+I$	$\overline{3}+I$	$\overline{0}+I$
$\overline{2}+I$	$\overline{2}+I$	$\overline{3}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{1}+I$
$\overline{3}+I$	$\overline{3}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{1}+I$	$\overline{2}+I$

·	$\overline{0}+I$	$\overline{1}+I$	$\overline{2}+I$	$\overline{3}+I$
$\overline{0}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{0}+I$
$\overline{1}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{1}+I$	$\overline{2}+I$	$\overline{3}+I$
$\overline{2}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{2}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{2}+I$
$\overline{3}+I$	$\overline{0}+I$	$\overline{3}+I$	$\overline{2}+I$	$\overline{1}+I$

***

आगे, आइए एक बहुपद वलय एक उदाहरण दृष्टि डालें।

उदाहरण 18: $\mathbb{R}[x]/<x>$ के अवयव किस प्रकार के दिखाई देते हैं? इस वलय के दो भिन्न-भिन्न अतुच्छ अवयवों को भी दीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in\mathbb{R}[x]$ है। तब, $f(x)=a_0+xg(x)$ है, जहाँ $g(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$ है।

अतः, $f(x)+<x>=a_0+xg(x)+<x>=a_0+<x>$ है, क्योंकि $xg(x)\in<x>$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{R}[x]/<x>$ का कोई भी अवयव $a+<x>=\overline{a}$ के रूप में होता है, जहाँ $a\in\mathbb{R}$ है।

$\mathbb{R}[x]/<x>$ के दो अतुच्छ अवयव $\overline{1}$ और $\overline{2}$ हैं। ये भिन्न-भिन्न हैं, क्योंकि $\overline{2}-\overline{1}=\overline{1}\neq\overline{0}$ है। (ऐसे अपरिमित रूप से अनेक अन्य अवयव हैं, जिन्हें आप चुन सकते हैं। वस्तुतः, आप अन्य कुछ अवयव क्यों नहीं ज्ञात कर लेते?)

***

उपरोक्त उदाहरणों में, ध्यान दीजिए कि R और R/I दोनों क्रमविनिमेय हैं तथा दोनों के तत्समक हैं। क्या यह सदैव सत्य है? इसका उत्तर आप निम्नलिखित प्रश्नों के साथ कार्य करते हुए देंगे।

E27) यदि R एक क्रमविनिमेय वलय है तथा R की I एक गुणजावली है, तो क्या R/I क्रमविनिमेय होना चाहिए? क्यों और क्यों नहीं?

E28) दर्शाइए कि यदि R एक तत्समकी वलय है, तो R की किसी गुणजावली I के लिए, R/I एक तत्समकी वलय है।

E29) विभाग वलयों $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ तथा $\mathbb{Z}_{14}/<\overline{2}>$ के लिए, कैले सारणियों की रचना कीजिए।

E30) यदि R तत्समक 1 के साथ एक वलय है तथा R की 1 को अंतर्विष्ट करने वाली I एक गुणजावली है, तो R/I कैसा दिखाई देता है?

E31) मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है तथा $Y\subsetneq X$, $Y\neq\emptyset$ है। $\wp(X)/\wp(Y)$ के दो भिन्न-भिन्न अवयवों को दीजिए।

E32) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/(<3>\times<5>)$ के दो भिन्न-भिन्न अतुच्छ अवयव दीजिए। इस वलय में कितने अवयव हैं?

E33) मान लीजिए कि R की N शून्य करणी है। दर्शाइए कि R/N को कोई शून्येतर शून्यंभावी अवयव नहीं हैं।

E34) मान लीजिए कि R एक वलय है तथा R की I एक गुणजावली है। R/N का केंद्र $C(R/I)$ ज्ञात कीजिए।

अब, आइए देखें कि एक विभाग वलय के उपवलय किस प्रकार के दिखाई देते हैं? इकाई 7 से, आप जानते हैं कि विभाग समूह $(R/I, +)$ के उपसमूह $(J/I, +)$ के रूप के होते हैं, जहाँ R का I को अंतर्विष्ट करने वाला J एक उपसमूह है। साथ ही, आप यह भी जानते हैं कि R/I का कोई भी उपवलय $(R/I, +)$ का एक उपसमूह होता है। इस प्रकार, $(R/I, +)$ का कोई भी उपवलय $(S/I, +)$ के रूप का होना चाहिए, जहाँ $I \le S \le R$ है। क्या यह S/I को R/I का एक उपवलय होने के लिए पर्याप्त है? ऐसा नहीं है। यह मत भूलिये कि S/I को गुणन के सापेक्ष संवृत्त होना चाहिएं आइए देखें कि इसका S के लिए, क्या तात्पर्य है। निम्नलिखित प्रमेय पर विचार कीजिए।

प्रमेय **7**: मान लीजिए कि R एक वलय है तथा R की I एक गुणजावली है। R/I के उपवलयों के समुच्चय $\mathcal{S}$ तथा I को अंतर्विष्ट करने वाले R के उपवलयों के समुच्चय $\mathcal{T}$ के बीच 1-1 के संगति है।

उपपत्ति : आइए $\phi : \mathcal{T} \to \mathcal{S} : \phi(S) = S/I$ परिभाषित करें।

ϕ सुपरिभाषित है : हमें यह दर्शाने की आवश्यकता है कि $\mathcal{T}$ में S के लिए, $\mathcal{S}$ में S/I है।

क्योंकि $S \supseteq I$ और $S \neq \emptyset$ है, इसलिए $S/I \neq \emptyset$ है।

मान लीजिए कि $s_1 + I, s_2 + I \in S/I$ है। तब, $s_1, s_2 \in S$ है। अतः, $s_1 - s_2 \in S$ है और $s_1 s_2 \in S$ है।

अब, $\pi(a + b\sqrt{p}) = \pi a + \pi b\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ है क्योंकि $(s_1 - s_2) \in S$ है।

साथ ही, $(s_1 + I) \cdot (s_2 + I) = s_1 s_2 + I \in S/I$ है, क्योंकि $s_1 s_2 \in S$ है।

इस प्रकार, $S/I \in \mathcal{S}$ है।

ϕ एकैकी 1-1 है : मान लीजिए कि $S_1, S_2 \in \mathcal{T}$ है ताकि $(S_1/I) = (S_2/I)$ है।

मान लीजिए कि $s \in S_1$ है। तब, $s + I \in S_1/I = S_2/I$ है।

अतः, $\exists\, s' \in S_2$ s.t. $s + I = s' + I$ है। इस प्रकार $(s - s') \in I \subseteq S_2$ है।

अब, $s - s' \in S_2$ और $s' \in S_2$ है, जिससे $s \in S_2$ है।

इस प्रकार, $S_1 \subseteq S_2$ है।

इसी प्रकार, आपको दर्शाना चाहिए कि $S_2 \subseteq S_1$ है।

इस प्रकार, $S_1 = S_2$ है।

अतः, ϕ एकैकी 1-1 है।

ϕ आच्छादक है : मान लीजिए कि R/I का A एक उपवलय है तथा मान लीजिए कि $S = \{s \in R \,|\, s + I \in A\}$ है।

क्योंकि $A \neq \emptyset$ है, इसलिए $S \neq \emptyset$ है।

साथ ही, $s_1, s_2 \in S$ के लिए, $s_1 + I \in A, s_2 + I \in A$ है।

क्योंकि R/I का A एक उपवलय है, इसलिए $(s_1 - s_2) + I \in A$ और $s_1 s_2 + I \in A$ है।

इस प्रकार, $s_1 - s_2 \in S$ और $s_1 s_2 \in S$ है।

$\therefore$ R का S एक उपवलय है।

अब, $\forall\, x \in I$, $x + I = I$ है, जो R/I का शून्य अवयव है। अतः, $x + I \in A$ है।

इस प्रकार, $x \in S\ \forall\, x \in I$ है। अर्थात्, $S \supseteq I$ है।

साथ ही, R/I में $r + I$ के लिए, $r + I \in A \Leftrightarrow r \in S \Leftrightarrow r + I \in S/I$ है।

इस प्रकार, $A = S/I$ है।

अतः, $A = \phi(S)$ है। अर्थात् ϕ आच्छादक है।

इस प्रकार, ϕ एक एकैकी आच्छादक है। ■

अतः, **R/I का प्रत्येक उपवलय S/I के रूप का होता है, जहाँ R का I को अंतर्विष्ट करने वाला S एक उपवलय है।**

अब, जैसा कि आप उपवलयों के लिए देख चुके हैं, आइए विचार करें कि एक विभाग वलय की गुणजावलियाँ किस प्रकार की दिखाई देती हैं। क्या प्रमेय 7 से हमें कुछ विचार मिलता है? आप जानते हैं कि एक वलय R की गुणजावली R का एक उपवलय होती है। इस प्रकार, यदि R एक वलय है, तथा R की I एक गुणजावली है, तो R/I की कोई भी गुणजावली J/I के रूप की होनी चाहिए, जहाँ R का I को अंतर्विष्ट करने वाला J **एक उपवलय** है। निस्संदेह, J को कुछ और गुणों को संतुष्ट करने की भी आवश्यकता होगी। अतः, आइए देखें कि R/I की गुणजावलियाँ क्या हैं।

प्रमेय 8: मान लीजिए कि R एक वलय है तथा R की I एक गुणजावली है। तब, R/I की गुणजावलियों के समुच्चय $\mathcal{A}$ तथा R की I को अंतर्विष्ट करने वाली गुणजावलियों के समुच्चय $\mathcal{B}$ के बीच 1-1 संगति होती है।

उपपत्ति : $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{A} : \phi(J) = J/I$ परिभाषित कीजिए।

ϕ सुपरिभाषित है : यहाँ हमें यह जाँच करने की आवश्यकता है कि $J/I \in \mathcal{A}$ है।

क्योंकि $J \supseteq I$ और $J \neq \emptyset$ है, इसलिए $J/I \neq \emptyset$ है।

मान लीजिए कि $a + I, b + I \in J/I$ है। तब, $a, b \in J$ है, तथा $(a + I) - (b + I) = (a - b) + I \in J/I$ है, क्योंकि $(a - b) \in J$ है।

आगे, $a + I \in J/I$ तथा $r + I \in R/I$ के लिए, $a \in J$ और $r \in R$ है। अतः, $(a + I)(r + I) = ar + I \in J/I$ है, क्योंकि R की J एक गुणजावली होने के कारण, $ar \in J$ है।

अतः, R/I की J/I एक गुणजावली है।

इसलिए, ϕ सुपरिभाषित है।

ϕ एकैकी 1-1 है : मान लीजिए कि $J_1, J_2 \in \mathcal{B}$ है ताकि $J_1/I = J_2/I$ है।

प्रमेय 7 के लिए जैसा किया था, उसी प्रकार आपको सिद्ध करना चाहिए कि $J_1 = J_2$ है। अर्थात्, ϕ एकैकी (1-1) है।

ϕ आच्छादक है : मान लीजिए कि R/I की S गुणजावली है तथा मान लीजिए कि $J = \{s \in R \mid s + I \in S\}$ है।

प्रमेय 7 की ही तरह, आपको सिद्ध करना चाहिए कि R की I को अंतर्विष्ट करने वाली J एक गुणजावली है।

साथ ही, $x+I \in R/I$ के लिए, $x+I \in S$ है iff $x+I \in J/I$ है। अर्थात्, $S = J/I$ है।

इस प्रकार, $J \in \mathscr{B}$ है s.t. $\phi(J) = S$ है। ■

अतः, ϕ एकैकी और आच्छादक है। अर्थात्, ϕ एकैकी 1-1 आच्छादक है।

इस प्रकार, **R/I की प्रत्येक गुणजावली, R की I को अंतर्विष्ट करने वाली गुणजावली J के लिए, J/I के रूप की होती है।** विलामेतः, **R की I को अंतर्विष्ट करने वाली प्रत्येक गुणजावली J के लिए, R/I की J/I एक गुणजावली होती है।**

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 19 : $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ के ⁄ की सभी उपवलय और गुणजावलियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, $n \in \mathbb{Z}$ के लिए, $\mathbb{Z}$ का कोई भी उपवलय $n\mathbb{Z}$ के रूप का होता है। साथ ही, इकाई 7 में आप देख चुके हैं कि $10\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ है iff $n|10$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ के उपवलय केवल $n\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ हैं, जहाँ $n = 1, 2, 5$ और 10 हैं।

$n=1$ के लिए, हमें संपूर्ण वलय $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ प्राप्त होता है।

$n=10$ के लिए, हमें तुच्छ उपवलय प्राप्त होता है।

अन्य दो उपवलय $<2>/<10>$ और $<5>/<10>$ हैं।

आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}$ का प्रत्येक उपवलय $\mathbb{Z}$ की एक गुणजावली होती है। निस्संदेह, $\mathbb{Z}$ की प्रत्येक गुणजावली $\mathbb{Z}$ का एक उपवलय होता है। प्रमेयों 7 और 8 द्वारा, यह $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ के लिए भी सत्य है। इस प्रकार, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ की चार गुणजावलियाँ $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ और $\{\bar{0}\}$ हैं।

***

उदाहरण 20: वलय $2\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ की सभी गुणजावलियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : $2\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ की कोई भी गुणजावली $n\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ के रूप की होती है, जहाँ $30\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$ है। अर्थात् $2|n$ और $n|30$ है।

अतः, $n = 2, 6, 10$ या 30 है।

इसलिए, वांछित गुणजावलियाँ $2\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, 10\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ और $\{\bar{0}\}$ हैं।

ध्यान दीजिए कि ये सभी $2\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ के उपवलय भी हैं।

***

उदाहरण 21: मान लीजिए कि R एक वलय है (क्रमविनिमेय होना आवश्यक नहीं) तथा R की I एक गुणजावली है। R के किसी उपवलय S के लिए, क्या R/I के S/I और $(S+I)/I$ उपवलय होंगे? S पर किन प्रतिबंधों के अंतर्गत R/I की $(S+I)/I$ एक

गुणजावली होगी? साथ ही, यह दर्शाने के लिए, एक उदाहरण दीजिए कि $S+I/I$ का R/I की गुणजावली होना आवश्यक नहीं है।

हल : प्रमेय 7 द्वारा, आप जानते हैं कि R/I का S/I एक उपवलय केवल तभी है, जब $S \supseteq I$ है। आगे, ध्यान दीजिए कि $I \subseteq S+I \subseteq R$ है।

साथ ही, $s_1+x_1, s_2+x_2 \in S+I$ के लिए,
$(s_1+x_1)-(s_2+x_2)=(s_1-s_2)+(x_1-x_2) \in S+I$ है, तथा

$(s_1+x_1)(s_2+x_2)=s_1s_2+x_1s_2+s_1x_2+x_1x_2 \in S+I$ है, क्योंकि

$s_1s_2 \in S$ है तथा $x_1s_2, s_1x_2, x_1x_2 \in I$ है

इस प्रकार, R का I को अंतर्विष्ट करने वाला $S+I$ एक उपवलय है।

अतः, R/I का $(S+I)/I$ एक उपवलय है।

अंत में, प्रमेय 8 द्वारा R/I की $(S+I)/I$ एक गुणजावली है, यदि R की $S+I$ एक गुणजावली है।

अब, $S+I$ को R की एक गुणजावली होने के लिए,

$(s+x)r = sr + xr \in S+I$ है, $(s+x) \in S+I$ और $r \in R$ के लिए।

क्योंकि R की I एक गुणजावली है, इसलिए $xr \in I$ है।

इस प्रकार, R/I की $S+I$ एक गुणजावली होगी iff $\forall\ s \in S$ और $r \in R$, $sr \in S+I$ है।

विशिष्ट रूप में, यदि R की S एक गुणजावली है, तो R/I की $(S+I)/I$ एक गुणजावली होगी।

$S+I/I$ के एक उदाहरण के रूप में, जहाँ S एक गुणजावली नहीं है, $\mathbb{Q}$ में $S=\mathbb{Z}$ और $I=\{0\}$ लीजिए। तब, $\mathbb{Q}/I$ की $S+I/I$ एक गुणजावली होगी iff $\mathbb{Q}$ की $S+I$ एक गुणजावली होगी। अर्थात्, $\mathbb{Q}$ की $\mathbb{Z}+\{0\}=\mathbb{Z}$ एक गुणजावली है। आप यह पहले ही देख चुके हैं कि यह सत्य नहीं है।

अतः, $\mathbb{Q}/I$ की $S+I/I$ एक गुणजावली नहीं है।

***

यहाँ हमने सिद्ध किया है कि R का $S+I$ एक उपवलय है। परंतु, उदाहरण 13, इकाई 11 में, आपने अध्ययन किया था कि उपवलयों के योग का उपवलय होना आवश्यक नहीं है। इससे आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

अब, कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E35) दर्शाइए कि $\mathbb{Z}[x]/<x>$ की $<2, x>/<x>$ एक गुणजावली है।

E36) $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ की दो भिन्न-भिन्न गुणजावलियाँ दीजिए।

E37) $\wp(X)/\wp(Y)$ की भिन्न-भिन्न गुणजावलियाँ दीजिए, जहाँ $X=\{1, 2, \ldots, 10\}$ है तथा $Y=\{1, 2\}$ है।

E38) दर्शाइए कि यदि S वलय R का एक उपवलय है तथा R की I एक गुणजावली है, तो S की $S \cap I$ एक गुणजावली है। (इकाई 13 में, आप देखेंगे कि R/I का $S/_{S \cap I}$ एक उपवलय है।)

यह दर्शाने के लिए, एक उदाहरण दीजिए कि $S/_{S \cap I}$ का $R/_{S \cap I}$ की गुणजावली होना आवश्यक नहीं है।

आप विभाग वलयों की उपयोगिता और महत्त्व का अनुभव तब करेंगे, जब हम अगली इकाई में, सभाकारिताओं की चर्चा करेंगे। अभी के लिए, इससे पहले हम इस चर्चा को समाप्त करें, एक महत्त्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 5: इस इकाई में, आपने बहुत कुछ क्रमविनिमेय वलयों के साथ कार्य किया है। परंतु, आपने अक्रमविनिमय वलयों के लिए भी अनेक प्रमेयों की उपपत्तियों का अध्ययन किया है। आपने किसी वलय के लिए, विभाग वलयों का अध्ययन किया है। इस प्रकार, उदाहरणार्थ, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ और $\mathbb{H}$ की/के भी गुणजावलियाँ तथा संगत विभाग वलय होते हैं। इसी प्रकार, किसी वलय के लिए, प्रमेय 7 और 8 भी सत्य होती हैं। परंतु, **हमने केवल क्रमविनिमेय वलयों के लिए ही n अवयवों द्वारा जनित गुणजावलियों को परिभाषित किया है, जब $n \in \mathbb{N}$ है।**

आइए अब संक्षिप्त रूप से बताएँ कि इस इकाई में आपने क्या अध्ययन किया है।

12.5 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर चर्चा की है :

1. किसी वलय की एक गुणजावली की परिभाषा तथा क्रमविनिमेय वलयों की गुणजावलियों के उदाहरण।
2. किसी वलय के उपसमुच्चय के एक गुणजावली होने के निकष (नियम) : किसी वलय R का एक अरिक्त उपसमुच्चय I, R की एक गुणजावली होता है यदि और केवल यदि
   i) $a - b \in I \ \forall \ a \in I, b \in I$ तथा
   ii) $ar \in I$ और $ra \in I$ है $\forall \ a \in I, r \in R.$
3. एक मुख्य गुणजावली की परिभाषा तथा एक क्रमविनिमेय वलय के n अवयवों द्वारा जनित एक गुणजावली की परिभाषा, जब $n \geq 2$ है।
4. एक क्रमविनिमेय वलय में शून्यंभावी अवयवों का समुच्चय उस वलय की एक गुणजावली होता है।
5. यदि तत्समक 1 के साथ किसी वलय R की I एक गुणजावली है तथा $1 \in I$ है तो $I = R$ होता है।
6. यदि I और J किसी वयल R की गुणजावलियाँ हैं, तो
   i) R की $I \cap J, I + J$ और IJ गुणजावलियाँ होती हैं।
   ii) $I \cup J$ वलय R की एक गुणजावली है iff $I \subseteq J$ या $J \subseteq I$ है।
   iii) R की $I \setminus J$ एक गुणजावली नहीं है।

7. गुणजावलियों का कार्तीय गुणनफल संगत वलयों के कार्तीय गुणनफल की एक गुणजावली होता है।

8. एक विभाग वलय की परिभाषा और उसके उदाहरण।

9. किसी तत्समकी वलय का विभाग वलय (क्रमविनिमेय, क्रमशः) एक तत्समकी वलय (क्रमविनिमेय, क्रमशः) होता है।

10. एक विभाग वलय R/I का एक उपवलय (क्रमशः गुणजावली) S/I के रूप का होता है, जहाँ I को अंतर्विष्ट करने वाला R का/की S एक उपवलय (क्रमशः, गुणजावली) होता (होती) है।

12.6 हल/उत्तर

E1) मान लीजिए कि बिंदुशः योग और गुणन के सापेक्ष $[-3, 3]$ से $\mathbb{R}$ तक के फलनों का $\mathcal{F}$ एक वलय है। आप जानते हैं कि $\mathcal{F}$ एक क्रमविनिमेय वलय है।

मान लीजिए कि $I = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0\}$ है।

भाग 11.3 के उपवलय परीक्षण (टेस्ट) का उपयोग करते हुए, आपको इसकी जाँच करनीचाहिए कि $\mathcal{F}$ का I एक उपवलय है।

साथ ही, किन्हीं $f \in \mathcal{F}$ और $g \in I$ के लिए, $(f \cdot g)(0) = f(0)g(0) = 0$ है।

अतः, $f \cdot g \in I \; \forall \; f \in \mathcal{F}$ और $g \in I$ है।

इस प्रकार, $\mathcal{F}$ की I एक गुणजावली है।

E2) उदाहरण 3 की तरह, दर्शाइए कि यह $\mathbb{C}$ की एक गुणजावली नहीं है।

E3) i) इकाई 11 में, आप देख चुके हैं कि $\mathbb{C}$ का $\mathbb{Z}[i]$ एक उपवलय है।

परंतु, $\frac{1}{5} \in \mathbb{C}$ है तथा $i \in \mathbb{Z}[i]$ है, लेकिन $\frac{1}{5} i \notin \mathbb{Z}[i]$ है। अतः, $\mathbb{C}$ की $\mathbb{Z}[i]$ एक गुणजावली नहीं है।

ii) आप जानते हैं कि $\mathbb{C}[x]$ का $\mathbb{R}[x]$ एक उपवलय है, क्योंकि $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ है।

परंतु, $i \in \mathbb{C}[x]$ और $x \in \mathbb{R}[x]$ है, लेकिन $i \cdot x = ix \notin \mathbb{R}[x]$ है।

अतः, $\mathbb{C}[x]$ की $\mathbb{R}[x]$ एक गुणजावली नहीं है।

iii) ध्यान दीजिए कि दोनों समुच्चय $\bar{3}\mathbb{Z}_6$ और $\bar{2}\mathbb{Z}_6$ हैं। इकाई 11 के उदाहरण 9 से, आप जानते हैं कि ये $\mathbb{Z}_6$ के उपवलय हैं।

अब, अवयव-अनुसार गुणन द्वारा, आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $rx \in \bar{3}\mathbb{Z}_6 \; \forall \; r \in \mathbb{Z}_6$ और $x \in \bar{3}\mathbb{Z}_6$ है।

(उदाहरणार्थ, $\bar{5} \cdot \bar{3} = \overline{15} = \bar{3} \in \bar{3}\mathbb{Z}_6$ है।)

इसी प्रकार, आप देख सकते हैं कि $rx \in \bar{2}\mathbb{Z}_6 \; \forall \; r \in \mathbb{Z}_6, x \in \bar{2}\mathbb{Z}_6$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{Z}_6$ की $\bar{3}\mathbb{Z}_6$ और $\bar{2}\mathbb{Z}_6$ गुणजावलियाँ है।

E4) i) सर्वप्रथम, $I_a \neq \emptyset$ क्योंकि $0 \in I_a$ है।

आगे, $f, g \in I_a \Rightarrow f, g \in C[0, 1]$ है। अतः, $f - g \in C[0, 1]$ है।

साथ ही, $(f-g)(a) = f(a) - g(a) = 0$ है।

इस प्रकार, $f - g \in I_a$ है।

तीसरे, $f \in I_a,\ g \in C[0,1] \Rightarrow fg \in C[0, 1]$ है।

साथ ही, $(fg)(a) = f(a)g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$ है

इस प्रकार, $fg \in I_a$ है।

$\therefore$ $C[0,1]$ की I_a एक गुणजावली है।

ii) उपरोक्त (i) की ही तरह, आपको सिद्ध करना चाहिए कि $C[a, b]$ की I_r एक गुणजावली है।

iii) मान लीजिए कि $r = \frac{1}{2}$ है। तब, $J_r = \{f \in C[0, 1] \mid f(\frac{1}{2}) = 1\}$ है। यदि $f, g \in J_r$ है, तो $(f-g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \neq 1$ है। अतः, $f - g \notin J_r$ है।

इस प्रकार, $C[0, 1]$ का J_r एक उपवलय नहीं है। अतः, $C[0, 1]$ की J_r एक गुणजावली नहीं है।

E5) क्योंकि R क्रमविनिमेय है, इसलिए $C(R) = R$ है। अतः, R की $C(R)$ एक गुणजावली है।

E6) i) मान लीजिए कि $S = \{a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ है।

क्योंकि $x \in S$ है, इसलिए $S \neq \emptyset$ है।

यदि S में $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ और $g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ हैं, तो

$f(x) - g(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} (-b_j)x^j$ है, यदि $n \le m$ है। (यदि $n \ge m$ है, तो आपको इसी प्रकार कार्य करते हुए व्यंजक ज्ञात करना चाहिए।)

अतः, $f(x) - g(x)$ में अचर पद 0 है। अर्थात् $f(x) - g(x) \in S$ है।

पुनः, कैलकुलस के खंड 1 से, आप जानते हैं कि यदि $f(x) \in S$ है, तो है $f(x) = 0$ या $\deg f(x) \ge 1$ है।

साथ ही, यदि $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ है, तो $g(x) = 0$ या $g(x) \neq 0$ है।

यदि $g(x) = 0$ है, तो $f(x)g(x) = 0 \in S\ \forall\ f(x) \in S$ है।

यदि $g(x) \neq 0$ है, तो $\deg g(x) \ge 0$ है।

इसलिए, $\deg\ (f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \ge 1$ है। इस प्रकार, $f(x)g(x) \in S$ है।

अतः $\mathbb{Z}[x]$ की एक गुणजावली है।

ii) क्योंकि $0 \in S$ है, इसलिए $S \neq \emptyset$ है।

यदि S में $f(x)=\sum_{i=0}^{n} 3a_i x^i$ और $g(x)=\sum_{j=0}^{m} 3b_j x^j$ हैं, तो आपको दर्शाना चाहिए कि $f(x)-g(x)\in S$ क्यों है।

साथ ही, यदि $f(x)=\sum_{i=0}^{n} 3a_i x^i$ और $g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$ हैं, तो

$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{m+n}(\sum_{i+j=k} 3a_i b_j)x^k \in S$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{Z}[x]$ की S एक गुणजावली है।

E7) R का Ra एक उपवलय है (देखिए उदाहरण 9, इकाई 11)।

साथ ही, $r\in R$ और $xa\in Ra$ के लिए,

$r(xa)=(rx)a\in Ra$ है।

$\therefore$ R की Ra एक गुणजावली है।

E8) $I\neq\emptyset$ है। क्यों? क्या $b\in I$ नहीं है?

साथ ही, $x, y\in I$ के लिए, $ax\in bR$ और $ay\in bR$ है।

क्योंकि R का bR एक उपवलय है, इसलिए $a(x-y)=ax-ay\in bR$ है।

$\therefore x-y\in I$ है।

आगे, यदि $x\in I$ और $r\in R$ है, तो $a(xr)=(ax)r\in bRr=bR$ है।

अतः, $xr\in I$ है।

इस प्रकार, R की I एक गुणजावली है।

E9) आप जानते हैं कि $<1>\subseteq R$ है। अतः, आपको यह दर्शाने की आवश्यकता है कि $R\subseteq<1>$ है। अब, किसी $r\in R$ के लिए, $r=r\cdot 1\in<1>$ है। इस प्रकार, $R\subseteq<1>$ है $\therefore R=<1>$ है।

आगे, क्योंकि $u\in U(R)$ है, इसलिए $\exists\ v\in R$ s.t. $uv=1$ है। अतः, $1\in<u>$ है। $\therefore <1>\subseteq<u>$ है। अर्थात्, $R\subseteq<u>$ है।

परंतु $<u>\subseteq R$ है, क्योंकि $u\in R$ है।

इस प्रकार, $<u>=R$ है।

E10) (R, +) का **उपसमूह $<r>=\mathbb{Z}r$ है।**

परंतु, **मुख्य गुणजावली Rr** है।

अतः, उदाहरणार्थ, यदि $R=\mathbb{R}$ और $r=5$ है, तो चक्रीय उपसमूह $5\mathbb{Z}$ है।

परंतु, क्योंकि $5\in U(\mathbb{R})$ है, इसलिए $5\mathbb{R}=\mathbb{R}$ है (E9 द्वारा)।

ध्यान दीजिए कि $5\mathbb{Z}\neq\mathbb{R}$ है।

E11) $\overline{3}\mathbb{Z}_{10}=\{\overline{3}x \mid x\in\mathbb{Z}_{10}\}=\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12},\overline{15},\overline{18},\overline{21},\overline{24},\overline{27}\}$

$=\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{2},\overline{5},\overline{8},\overline{1},\overline{4},\overline{7}\}$

$=\mathbb{Z}_{10}$ है।

$\bar{5}\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{5}\}$ है।

अब, $\bar{2}\mathbb{Z}_{10} + \bar{3}\mathbb{Z}_{10} = \bar{2}\mathbb{Z}_{10} + \mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}_{10}$ है, क्योंकि $\bar{2}\mathbb{Z}_{10} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ है।

इस प्रकार, $< \bar{5} > \neq < \bar{2}, \bar{3} >$ है।

E12) आपको इकाई 11 के E10 का उपयोग करते हुए, इसे उदाहरण 2 की प्रक्रिया अपनाते हुए सिद्ध करना चाहिए।

E13) $\wp(X)A$ का कोई भी अवयव, $Y \in \wp(X)$ के लिए, $YA = Y \cap A \in \wp(A)$ है।

अतः, $\wp(X)A \subseteq \wp(A)$ है।

विलोमतः, यदि $S \in \wp(A)$ है, तो $S \in \wp(X)$ और $S = S \cap A \in \wp(X)A$ है।

अतः, $\wp(A) \subseteq \wp(X)A$

इस प्रकार, $\wp(A) = \wp(X)A$ है।

E14) मान लीजिए कि $\mathbb{Z}_8$ की शून्यकरणी N है।

तब $\bar{0} \in N$ है।

$\bar{1} \notin N$ है, क्योंकि $(\bar{1})^n = \bar{1} \neq \bar{0}$ है, सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए।

ध्यान दीजिए कि $\bar{a} \in N$ है iff $a^n \in 8\mathbb{Z}$ (किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए) iff $8 | a^n$ (किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए) iff $2 | a^n$ iff $2 | a$ (इकाई 1 देखें) है।

इस प्रकार, $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6} \in N$ है तथा $\bar{3}, \bar{5}, \bar{7} \notin N$ है।

$\therefore N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ है।

किसी $A \in \wp(X)$ के लिए, $A^n = A \cap A \cap \ldots \cap A = A \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ है।

इस प्रकार, $A^n = \emptyset$ iff $A = \emptyset$ है।

अतः, $\wp(X)$ की शून्य करणी $\{\emptyset\}$ है, जो तुच्छ गुणजावली है।

E15) मान लीजिए कि $I = \text{Ann } a$ है। सर्वप्रथम, $I \neq \emptyset$ है, क्योंकि $0 \in I$ है।

दूसरे, $r, s \in I \Rightarrow ra = 0 = sa \Rightarrow (r-s)a = 0 \Rightarrow r - s \in I$ है।

अंत में, $r \in I$ और $x \in R \Rightarrow (rx)a = x(ra) = x \cdot 0 = 0 \Rightarrow rx \in I$ है।

इस प्रकार, R की I एक गुणजावली है।

$\text{Ann } 0 = \{r \in R | r \cdot 0 = 0\} = R$ है।

$\text{Ann } 1 = \{r \in R | r \cdot 1 = 0\} = \{0\}$ है।

E16) i) असत्य, जैसा कि आप E15 में देख चुके हैं।

ii) $\mathbb{Z}$ में 1 और 2 को लीजिए। तब, $\text{Ann } 1 = \{0\} = \text{Ann } 2$ है, परंतु $1 \neq 2$ है। अतः, यह असत्य है।

iii) जैसा कि आप देख चुके हैं, $\mathbb{Z}$ और $\mathbb{R}$ दोनों में शून्य करणियाँ $\{0\}$ हैं। परंतु $\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$ है। अतः, यह असत्य है।

E17) उदाहरण 10 की तरह, दर्शाइए कि $\mathbb{R}$ की गुणजावलियाँ केवल $\{0\}$ और $\mathbb{R}$ हैं तथा $\mathbb{C}$ की गुणजावलियाँ $\{0\}$ और $\mathbb{C}$ हैं।

E18) i) क्योंकि $<\overline{4}> = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ और $<\overline{6}> = \{\overline{0}, \overline{6}\}$ है, इसलिए $<\overline{4}> \cap <\overline{6}> = \{\overline{0}\}$ है।

साथ ही, $<\overline{4}> + <\overline{6}> = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\} = <\overline{2}>$ है।

यहाँ $IJ = \{ab \mid a \in I,\ b \in J\} = \{\overline{0}\}$ क्योंकि $\overline{24} = \overline{0}$ है।

ii) $I \cap J = \{A \in \wp(Y) \mid A \cap Y = \emptyset\} = \{\emptyset\}$ है।

$I + J = \{A \Delta B \mid A \in I, B \in J\} = \{A \cup B \mid A \in I, B \in J\}$ है, क्योंकि $A \subseteq Y$ और $B \subseteq Y^c$ है।

$IJ = \{(A_1 \cap B_1)\Delta(A_2 \cap B_2)\Delta \ldots \Delta(A_n \cap B_n) \mid A_i \in I, B_i \in J\} = \{\emptyset\}$ है, क्योंकि since $A_i \cap B_i = \emptyset\ \forall\ i = 1, \ldots, n$ है।

E19) i) किन्हीं $a \in I$ और $b \in J$ के लिए, $ab \in I$ और $ab \in J$ है।

इस प्रकार, $ab \in I \cap J$ है।

क्योंकि $I \cap J$ एक गुणजावली है, इसलिए ऐसे अवयवों के परिमित योग को भी $I \cap J$ में होना चाहिए।

इस प्रकार, $IJ \subseteq I \cap J$ है।

परिभाषा द्वारा, $I \cap J \subseteq I$ है और $I \cap J \subseteq J$ है।

साथ ही, $I \subseteq I + J$ और $J \subseteq I + J$ है, क्योंकि $x = x + 0 \in I + J$ है, $x \in I$ के लिए, तथा इसी प्रकार, $y = 0 + y \in I + J$ है, $y \in J$ के लिए।

ii) मान लीजिए कि I और J दोनों को अंतर्विष्ट करने वाली R की A एक गुणजावली है।

तब, किसी $x + y \in I + J$ के लिए, $x \in I \subseteq A$ और $y \in J \subseteq A$ है। अतः, $x + y \in A$ है। इस प्रकार, $I + J \subseteq A$ है।

इस प्रकार, (ii) सिद्ध हो जाता है।

iii) मान लीजिए कि R की B एक गुणजावली है ताकि $B \subseteq I$ और $B \subseteq J$ है। तब, निश्चित रूप से, $B \subseteq I \cap J$ है।

इस प्रकार, (iii) सिद्ध हो जाता है।

iv) आप जानते हैं कि $IJ \subseteq I \cap J$ है। अतः, आपको यह दर्शाने की आवश्यकता है कि $I \cap J \subseteq IJ$ है।

मान लीजिए कि $x \in I \cap J$ है। तब, $x \in I$ और $x \in J$ है।

क्योंकि $1 \in R = I + J$ है, इसलिए किन्हीं $i \in I$ और $j \in J$ के लिए, $1 = i + j$ है।

अब, $ix \in IJ$ है, क्योंकि $i \in I$ और $x \in J$ है। इसी प्रकार, $xj \in IJ$ है। अतः, $x = x \cdot 1 = xi + xj \in IJ$ है।

इस प्रकार, $I \cap J \subseteq IJ$ है।

v) नहीं। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि $R = 2\mathbb{Z}$, $I = 4\mathbb{Z}$ और $J = 6\mathbb{Z}$ है।

तब, $1 \notin R$ है।

साथ ही, उदाहरण 11 से, आप जानते हैं कि $R = I + J$ $I \cap J = 12\mathbb{Z}$ और $IJ = 24\mathbb{Z}$ है।

इस प्रकार, $IJ \neq I \cap J$ है।

E20) 1) क्योंकि $I_1 \setminus I_2 \neq \emptyset$ है, इसलिए कथन सही है।

2) असत्य, उदाहरणार्थ, $3 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1 \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ परंतु $3 - 1 = 2 \notin \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ है।

3) असत्य, उदाहरणार्थ, $3 \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ परंतु $2 \cdot 3 = 6 \in 2\mathbb{Z}$ है।

4) यह (3) से प्राप्त होता है, परंतु (3) असत्य है। अतः, यह असत्य है।

5) यह (2) और (4) से प्राप्त होता है, जो असत्य है। अतः, यह असत्य है।

E21) क्योंकि $I_1 \setminus I_2$ एक उपवलय नहीं है, जैसा आप इकाई 11 में देख चुके हैं, इसलिए यह एक गुणजावली नहीं हो सकती है।

E22) i) हाँ, क्योंकि, $I_1 = < \overline{3} > = \mathbb{Z}_{10}$ जिससे $I_1 \cup I_2 = \mathbb{Z}_{10}$ है।

ii) नहीं। ध्यान दीजिए कि $\overline{4}, \overline{5} \in I_2 \cup I_3 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\}$ है, परंतु $\overline{4} + \overline{5} \notin I_2 \cup I_3$ है।

E23) इकाई 11 से, आप जानते हैं कि R का $I_1 \cup I_2$ एक उपवलय है iff $I_1 \subseteq I_2$ है या $I_2 \subseteq I_1$ है। एक बार यह प्रतिबंध संतुष्ट हो जाए, तो R की $I_1 \cup I_2$ एक गुणजावली हो जाएगी।

E24) उदाहरणार्थ, $\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ और $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ हैं।

ये $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ की गुणजावलियाँ है; क्योंकि $\mathbb{R}$ की $\mathbb{R}$ और $\{0\}$ गुणजावलियाँ हैं। इनमें से प्रत्येक अतुच्छ है, क्योंकि तुच्छ गुणजावली $\{(0, 0, 0, 0)\}$ है। इनमें से प्रत्येक एक उचित गुणजावली है, क्योंकि एक घटक $\mathbb{R}$ नहीं है।

E25) इकाई 11 में, आप देख चुके हैं कि $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ का $S = \{(n, n) | n \in \mathbb{Z}\}$ एक उपवलय है। परंतु $(1, 1) \in S$ और $(1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ है ताकि $(1, 1)(1, 2) = (1, 2) \notin S$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ की S एक गुणजावली नहीं है।

इसी प्रकार, आपको दर्शाना चाहिए कि किसी अतुच्छ वलय R के लिए, $R \times R$ की $S = \{(x, x) | x \in R\}$ एक गुणजावली नहीं है।

E26) उदाहरणार्थ, $< x > \times \{0\}$ और $\mathbb{Q}[x] \times \{0\}$ है।

E27) यदि R एक क्रमविनिमेय वलय है, तो R/I एक क्रमविनिमेय वलय होगा। इसका कारण यह है कि $(a + I) \cdot (b + I) = ab + I = ba + I = (b + I) \cdot (a + I)$, सभी $a + I, b + I \in R/I$ के लिए।

E28) R/I का $1 + I$ तत्समक है, जहाँ R का 1 तत्समक है, क्योंकि $(x + I) \cdot (1 + I) = x + I = (1 + I) \cdot (x + I)\ \forall\ x \in R$ है।

E29) आपको दर्शाना चाहिए कि $2\mathbb{Z}$ की $6\mathbb{Z}$ एक गुणजावली है तथा $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{6\mathbb{Z},\ 2+6\mathbb{Z},\ 4+6\mathbb{Z}\}$ है। तब, बैले सारणियाँ हैं :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

जाँच कीजिए कि $\mathbb{Z}_{14}\big/\bar{2}\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{2}\mathbb{Z}_{14},\ \bar{1}+\bar{2}\mathbb{Z}_{14}\}$ है। तब, सारणियाँ हैं :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

E30) प्रमेय 2 से, आप जानते हैं कि $I = R$ है।

$\therefore R/I = \{\bar{0}\}$ है, जहाँ 'ऊपरी रेखा' (दंड-'bar') I का सहसमुच्चय व्यक्त करती है।

E31) मान लीजिए कि X परिमित है तथा $|X| = n$ है। तब, $|Y| \le n-1$ है।

अतः, $o(\wp(X)/\wp(Y)) \ge (2^n/2^{n-1}) = 2$ है।

यदि X अपरिमित है तथा Y एक परिमित उपसमुच्चय है, तो $\wp(X)/\wp(Y)$ एक अपरिमित वलय है।

प्रत्येक स्थिति में, $\exists\, a \in X \setminus Y$ है। अतः, $\{a\}\Delta\wp(Y)$ एक शून्येतर सहसमुच्चय नहीं है। इस प्रकार, $\wp(X)/\wp(Y)$ के $\overline{\emptyset}$ और $\overline{\{a\}}$ दो भिन्न-भिन्न अवयव हैं, इनमें 'ऊपरी रेख' $\wp(Y)$ के सहसमुच्चय को व्यक्त करती है।

E32) $R = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/(<3>\times<5>)$ का कोई भी अवयव $m, n \in \mathbb{Z}$ के लिए, $(m, n) + (<3>\times<5>)$ के रूप का होता है।

अब, $\overline{(m, n)} = \overline{(a, b)}$ iff $(a-m) \in <3>$ और $(b-n) \in <5>$ है।

इस प्रकार, R के भिन्न-भिन्न अवयव $\{0+3\mathbb{Z},\ 1+3\mathbb{Z},\ 2+3\mathbb{Z}\}\times\{0+5\mathbb{Z},\ 1+5\mathbb{Z},\ 2+5\mathbb{Z},\ 3+5\mathbb{Z},\ 4+5\mathbb{Z}\}$ हैं। अर्थात् $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$ हैं।

अतः, R के 15 अवयव हैं। उदाहरणार्थ, इनमें से दो अवयव $(0+3\mathbb{Z},\ 0+5\mathbb{Z})$ और $(2+3\mathbb{Z},\ 1+5\mathbb{Z})$ हैं।

E33) मान लीजिए कि $x + N \in R/N$ एक शून्यंभावी अवयव है।

तब, किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, $(x+N)^n = N$ है।

$\Rightarrow x^n \in N$, किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए।

$\Rightarrow (x^n)^m = 0$, किसी धनात्मक पूर्णांक m के लिए।

$\Rightarrow x^{nm} = 0$, किसी धनात्मक पूर्णांक nm के लिए। $\Rightarrow x \in N$

$\Rightarrow x + N = 0 + N$, जो R/N का शून्य अवयव है।

इस प्रकार, R/N का कोई शून्येतर शून्यंभावी अवयव नहीं है।

E34) मान लीजिए कि $\bar{x} \in C(R/I)$ है। तब, $\bar{x}\,\bar{r} = \bar{r}\,\bar{x}\ \forall\ \bar{r} \in R/I$ है, अर्थात् $(xr - rx) \in I\ \forall\ r \in R$ है।

$\therefore C(R/I) = \{x + I \in R/I \mid xr - rx \in I\ \forall\ r \in R\}$ है।

E35) क्योंकि $\mathbb{Z}[x]$ की $< x >$ को अंतर्विष्ट करने वाली $< 2, x >$ एक गुणजावली है, इसलिए $\left.< 2, x >\right/ < x >$, $\mathbb{Z}[x]/< x >$ की एक गुणजावली है।

E36) $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ की कोई भी गुणजावली $n\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ के रूप की होती है, जहाँ $n \mid 25$ है। इस प्रकार, $n = 1, 5$ और 25 है।

इस प्रकार, आप $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ में से कोई भी दो उदाहरणार्थ, $\{\bar{0}\}$ और $5\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ को चुन सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि ये भिन्न-भिन्न हैं, क्योंकि, उदाहरणार्थ, यहाँ आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि इनकी कोटियाँ भिन्न-भिन्न हैं।

E37) $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{1, 2, 6, 7\}$ पर विचार कीजिए। तब, $\wp(X)$ की $\wp(A)$ और $\wp(B)$ गुणजावलियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक $\wp(Y)$ को अंतर्विष्ट करती हैं।

अतः, $\wp(X)/\wp(Y)$ की $\wp(A)/\wp(Y)$ और $\wp(B)/\wp(Y)$ गुणजावलियाँ है।

ध्यान दीजिए कि $o(\wp(A)/\wp(Y)) = \dfrac{2^3}{2^2} = 2$ है तथा $o(\wp(B)/\wp(Y)) = \dfrac{2^4}{2^2} = 4$ है। इस प्रकार, ये दोनों गुणजावलियाँ भिन्न-भिन्न हैं।

E38) क्योंकि R के S और I उपवलय हैं, इसलिए $S \cap I$ भी ऐसे ही हैं।

क्योंकि $S \cap I \subseteq S$ है, इसलिए S का $S \cap I$ एक उपवलय है।

साथ ही, $x \in S \cap I$ और $s \in S$ के लिए, $xs \in S$ है तथा $xs \in I$ है।

अतः, $xs \in S \cap I$ है।

इसी प्रकार, $sx \in S \cap I$ है।

इस प्रकार, $S \cap I$, S की एक गुणजावली है।

उदाहरणार्थ, $S = \mathbb{Z}, R = \mathbb{R}, I = \{0\}$ पर विचार कीजिए।

तब, $S \cap I = \{0\}$ है, जिससे $\left. S \right/ S \cap I = \left. \mathbb{Z} \right/ \{0\}$ है।

क्योंकि $\mathbb{R}$ की $\mathbb{Z}$ एक गुणजावली नहीं है, इसलिए $\mathbb{R}/\{0\}$ की $\mathbb{Z}/\{0\}$ एक गुणजावली नहीं है।

इकाई 13

वलय समकारिताएँ।

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

13.1 प्रस्तावना

इकाई 8 में, आपने समूहों के बीच ऐसे फलनों के बारे में अध्ययन किया था जो संबंधित द्विआधारी संक्रिया को परिरक्षित रखते हैं। आपने यह भी देखा था कि ये किसी समूह की बीजीय संरचना के अध्ययन के लिए तथा तद्नुसार वर्गों को वर्गीकृत करने में कितने उपयोगी होते हैं। इस इकाई में, हम वलयों के बीच फलनों की चर्चा करेंगे जो दोनों द्विआधारी संक्रियाओं से परिरक्षित रखते हैं। ऐसे फलन, जैसी आप प्रत्याशा रख रहे होंगे, वलय समाकारिताएँ (Ring Homomorphisms) कहलाते हैं।

भाग 13.2 में, आप एक वलय समाकारिता की औपचारिक परिभाषा का अध्ययन करेंगे। निस्संेह, आप इस संकल्पना के अनेक उदाहरणों पर तथा ऐसे उदाहरणों पर भी, जो इस संकल्पना के नहीं है, विचार करेंगे। इस भाग में, आप यह भी देखेंगे कि किस प्रकार समाकारिताएँ हमें किसी वलय की बीजीय प्रकृति की खोज करने में सहायता करती हैं। भाग 13.3 में, आप वलय समाकारिताओं के अनेक गुणों का अध्ययन करेंगे। इनमें से अधिकांश गुण समूह समाकारिताओं के गुणों के अनुरूप होंगे, जिनका आप इकाई 8 में अध्ययन और अनुप्रयोग कर चुके हैं।

यदि कोई समाकारिता एक एकैकी आच्छादक हो, तो वह एक तुल्याकारिता कहलाती है। समूह सिद्धांत की ही तरह, वलय सिद्धांत में तुल्याकारिताओं की भूमिका बीजीय सर्वसम निकायों (algebraically identical systems) की पहचान करने में होती है।इसी कारण ये महत्त्वपूर्ण हैं। हम भाग 13.4 में इनका परिचय आपसे कराएँगें। तब, आप वलयों के लिए समाकारिता की मूलभूत प्रमेय के रूप में वलय समाकारिताओं, गुणजावलियों तथा विभाग वलयों के बीच आंतरिक संबंध का भी अध्ययन करेंगे। आप दो अन्य तुल्याकारिता प्रमेयों को सिद्ध करने और उनका उपयोग करने के लिए, इसके अनुप्रयोगों का भी अध्ययन करेंगे।

जैसा कि समूह सिद्धांत में था, समाकारिताएँ वलय सिद्धांत से निकट रूप से संबंधित हैं। अतः, यह आवश्यक है कि आप इस इकाई का सावधानीपूर्वक अध्ययन करें तथा जो भी प्रश्न आपके सम्मुख आए उसे हल करें। इससे आपको निम्नलिखित अधिगम उद्देश्यों को प्राप्त करने में सहायता मिलेगी।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- विभिन्न प्रकार की वलय समाकरिताओं को परिभाषित करना तथा उनके उदाहरण देना;
- किसी वलय समाकारिता की अष्टि (kernel) और प्रतिबिंब को प्राप्त करना;
- वलय तुल्याकारिताओं की परिभाषा देना तथा उनके उदाहरण देना;
- किसी वलय समाकारिता के कुछ मौलिक गुणों को सिद्ध करना; तथा
- वलयों के लिए, समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का कथन देना, उसे सिद्ध करना तथा उसका अनुप्रयोग करना।

13.2 वलयों के बीच समाकारिताएँ

इकाई 8 में, आपने समूहों के बीच प्रतिचित्रणों (maps) का अध्ययन किया था, जो संबंधित प्रांतों की समूह संक्रियाओं को परिरक्षित (preserve) रखते हैं। ये फलन समूह समाकारिताएँ कहलाते हैं, जैसा कि आप जानते हैं। एक समूह समाकारिता के धारणा के अनुरूप, हमें वलय समाकारिता की संकल्पना होती है। अतः, इसकी प्रत्याशा करना स्वाभाविक है कि एक वलय समाकरिता को वलयों के बीच में ऐसा प्रतिचित्र मानना जो उसके प्रांत की वलय संरचना को परिरक्षित रखता है। इस स्थिति में, यहाँ दो द्विआधारी संक्रियाएँ संबद्ध होती हैं। इसलिए, आप एक वलय समाकारिता निम्नलिखित परिभाषा की आशा कर सकते हैं।

परिभाषा : मान लीजिए कि $(R_1, +, \cdot)$ और $(R_2, +, \cdot)$ दो वलय हैं। एक प्रतिचित्र $f: R_1 \to R_2$ एक **वलय समाकारिता** कहलाता है, यदि R_1 में सभी a, b के लिए,

$f(a+b) = f(a) + f(b)$ है तथा

$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ है।

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त परिभाषा में, समीकरणों के बाएं पक्षों में प्रकट होने वाले + और $\cdot$ R_1 पर परिभाषित हैं, जबकि दाएं पक्षों में प्रकट होने वाले + और $\cdot$ R_2 पर परिभाषित हैं।

उपरोक्त परिभाषा के बारे में निम्नलिखित टिप्पणी की ओर भी ध्यान दीजिए।

टिप्पणी 1 : ध्यान दीजिए कि $f: R_1 \to R_2$ एक वलय समाकारिता होती है, यदि

i) एक योग का प्रतिबिंब प्रतिबिंबों के योग के बराबर हो, तथा

ii) एक गुणनफल का प्रतिबिंब प्रतिबिंबों के गुणनफल के बराबर हो।

उपरोक्त (i) के कारण, वलय समाकारिता f विशिष्ट रूप में, $(R_1, +)$ से $(R_2, +)$ तक एक समूह समाकारिता होती है।

साथ ही, आप जानते हैं कि $(R_1, \cdot)$ और $(R_2, \cdot)$ उपसमूह होते हैं। उपरोक्त (ii) जो कहता है, वह यह है कि $(R_1, \cdot)$ से $(R_2, \cdot)$ तक f एक उपसमूह समाकारिता है।

समूहों की स्थिति की ही तरह, हमें विभिन्न प्रकार की समाकारिताएँ प्राप्त हैं।

परिभाषा : मान लीजिए कि $f: R_1 \to R_2$ एक वलय समाकारिता है। क

i) यदि f एकैकी 1-1 है, तो यह एक **वलय एकैक समाकारिता** कहलाती है।

ii) यदि f आच्छादक है, तो यह एक **वलय आच्छादक समाकारिता** कहालाती है।

iii) यदि f एकैकी आच्छादक है, तो यह एक **वलय तुल्याकारिता** कहलाती है।

iv) यदि $R_1 = R_2$ है, तो f को R_1 की एक**वलय अंतराकारिता** कहते हैं।

उपरोक्त परिभाषाओं के बारे में एक टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी : प्रत्येक परिभाषा में शब्द 'वलय' केवल इस पर बल देने के लिए है कि हम वलयों के संदर्भ में कार्य कर रहे हैं। यदि यह संदर्भ स्पष्ट है, तो हम शब्द 'वलय' को छोड़ देते हैं। इस प्रकार, भविष्य में **हम वलय समकारिता के लिए पद 'समकारिता' का उपयोग करेंगे,** यदि संदर्भ स्पष्ट है। आपको याद होगा कि समूह समाकारिताओं की स्थिति में भी ऐसा ही कहा था।

आइए अभी जिन फलनों को परिभाषित किया उनके कुछ उदाहरणों तथा अउदाहरणों (अर्थात् जो उदाहरण नहीं है) पर विचार करें।

उदाहरण 1: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}: f(x) = x, g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}: g(x) = 2x,$ पर विचार कीजिए तथा मान लीजिए कि $h = -f$ है। जाँच कीजिए कि f, g और h वलय समाकारिताएँ हैं या नहीं।

हल : सर्वप्रथम, आपको सत्यापन करना चाहिए कि f, g और h सुपरिभाषित हैं।

आगे, $n, m \in \mathbb{Z}$ के लिए, $f(n+m) = n+m = f(n)+f(m)$ है, तथा $f(nm) = nm = f(n)f(m)$ है।

इस प्रकार, f एक वलय समाकारिता है। दर्शाइए दर्शाइए

अब, आइए g पर विचार करें।

$n, m \in \mathbb{Z}$ के लिए, $g(n+m) = 2(n+m) = 2n+2m = g(n)+g(m)$ है।

परंतु, $g(nm) = 2nm \neq (2n)(2m)$ है।

उदाहरणार्थ, $g(2 \cdot 3) = g(6) = 12$ है। परंतु $g(2)g(3) = 4 \cdot 6 = 24$ है।

अतः, $g(2 \cdot 3) \neq g(2)g(3)$ है।

इसलिए, g एक वलय समाकारिता नहीं है।

अंत में, आपको सत्यापन करना चाहिए कि $(-f)$ भी एक वलय समाकारिता नहीं है, क्योंकि यह गुणन को परिरक्षित नहीं करता है।

***

उपरोक्त उदाहरण में, कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदु उभर कर आए हैं। हम इनके बारे में निम्नलिखित टिप्पणी के बारे में बता रहे हैं।

टिप्पणी 3 : उदाहरण 1 के f, g और h के बारे में निम्नलिखित तीन बिंदुओं पर विचार कीजिए :

i) यदि f एक समूह समाकारिता है, तो भी $-f$ समूह समाकारिता होती है। परंतु, यह वलय समाकारिताओं के लिए सत्य नहीं है।

ii) वस्तुतः, f एकैकी आच्छादक है तथा **तत्समक समाकारिता** है। हम f को प्रायः $\mathbf{I}$ से व्यक्त करते हैं।

iii) यद्यपि, $(\mathbb{Z}, +)$ से $(\mathbb{Z}, +)$ तक g एक समूह समाकारिता है, फिर भी यह एक वलय समाकारिता नहीं है।

अब एक अन्य उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 2: $f : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : f(A) = \mathbf{0}$ पर विचार कीजिए, जो $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ में शून्य आव्यूह है। जाँच कीजिए कि f एक वलय तुल्याकारिता है या नहीं।

हल: $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ के लिए, $f(A+B) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = f(A) + f(B)$ है तथा $f(AB) = \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = f(A) \cdot f(B)$ है।

इस प्रकार, f एक वलय समाकारिता है।

परंतु, f आच्छादक नहीं है, क्योंकि उदाहरणार्थ, ऐसा कोई $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ नहीं है जिसके लिए, $f(A) = I$ हो, जो $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ में तत्समक आव्यूह है।

अतः, f एक तुल्याकारिता नहीं है।

***

आइए, अब उपरोक्त उदाहरणों में बताए गए कुछ बिंदुओं को व्यापीकृत करें।

उदाहरण 3: मान लीजिए R एक वलय है। दर्शाइए कि $I : R \to R : I(r) = r$ और $\mathbf{0} : R \to R : \mathbf{0}(r) = 0$ अंतराकारिताएँ (endomorphisms) हैं। (जैसा कि टिप्पणी 3 में $\mathbb{Z}$ के लिए बताया था, I **तत्समक समाकरिता** कहलाती है। $\mathbf{0}$ **तुच्छ समाकारिता** कहलाती है।)

हल : आपको इसका सत्यापन करना चाहिए कि R की दोनों संक्रियाओं को I और $\mathbf{0}$ परिरक्षित रखते हैं।

***

आगे बढ़ने से पहले, आइए एक वलय समाकारिता की अष्टि और प्रतिबिंब पर विचार करें। इकाई में, आपने इन वस्तुओं का एक समूह समाकारिता के लिए अध्ययन किया था। क्या आप आशा करते हैं कि एक वलय समाकारिता की अष्टि या प्रतिबिंब कुछ उससे भिन्न होंगे? वास्तव में, ये ठीक उसी प्रकार से परिभाषित किए जाते हैं।

> ध्यान दीजिए कि $\text{Im } f \subseteq R_2$ है। तथा $\text{Ker } f \subseteq R_1$ है।

परिभाषा : मान लीजिए कि R_1 और R_2 दो वलय हैं तथा यह भी मान लीजिए कि $f : R_1 \to R_2$ एक वलय समाकारिता है। तब, हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

i) **f के प्रतिबिंब** को समुच्च्य $\textbf{Im f} = \{f(x) \mid x \in R_1\}$ के रूप में।

ii) **f की अष्टि** को समुच्च्य $\textbf{Ker f} = \{x \in R_1 \mid f(x) = 0\}$ के रूप में।

आप जानते हैं कि यदि f एक आच्छादक समाकारिता है, तो $\text{Im } f = R_2$ है।

अब आइए किसी वलय समाकारिता के (की) प्रतिबिंब और अष्टि के कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 4: मान लीजिए कि R एक वलय है। उदाहरण 3 में परिभाषित, तत्समक समाकारिता तथा तुच्छ समाकारिता की (के) अष्टियाँ और प्रतिबिंब प्राप्त कीजिए।

हल : $\text{Ker } I = \{x \in R \mid I(x) = 0\} = \{x \in R \mid x = 0\}$

$= \{0\}$ है।

$\text{Im } I = \{I(x) \mid x \in R\} = \{x \mid x \in R\} = R$ है।

$\text{Im } \mathbf{0} = \{\mathbf{0}(x) \mid x \in R\} = \{0\}$ है।

***

उदाहरण 5: मान लीजिए कि $s \in \mathbb{N}$ है। दर्शाइए कि प्रतिचित्र $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_s : f(m) = \overline{m}$ एक वलय आच्छादक समाकारिता है। $\text{Ker } f$ भी प्राप्त कीजिए।

हल : किन्हीं $m, n \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$f(m+n) = \overline{m+n} = \overline{m} + \overline{n} = f(m) + f(n)$ है तथा

$f(mn) = \overline{mn} = \overline{m}\,\overline{n} = f(m)f(n)$ है।

अतः, f एक वलय समाकारिता है।

साथ ही, $\text{Im } f = \{f(m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\overline{m} \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$= \mathbb{Z}_s$ है, जो यह दर्शाता है कि f एक आच्छादक समाकारिता है।

अब, $\text{Ker } f = \{m \in \mathbb{Z} \mid f(m) = \overline{0}\}$

$= \{m \in \mathbb{Z} \mid \overline{m} = \overline{0}\}$

$= \{m \in \mathbb{Z} \mid m \equiv 0 \pmod{s}\}$

$= s\mathbb{Z}$ है।

***

उदाहरण 6: प्रतिचित्रों $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3 : f(n \pmod 6) = n \pmod 3$ तथा $g : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6 : g(n \pmod 3) = n \pmod 6$ पर विचार कीजिए। जाँच कीजिए कि f और g वलय समाकारिताएँ हैं या नहीं। यदि वे हैं, तो उनकी (के) अष्टियाँ और प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, $n, m \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$n \pmod 6 = m \pmod 6$

$\Rightarrow 6 \mid (n-m)$

$\Rightarrow 3 \mid (n-m)$

$\Rightarrow n \pmod 3 = m \pmod 3$

$\Rightarrow f(n) = f(m)$ है।

अतः, f सुपरिभाषित है।

दूसरे, $n, m \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$$f(n(\bmod 6)+m(\bmod 6)) = f((n+m)(\bmod 6)) = (n+m)(\bmod 3)$$
$$= n(\bmod 3)+m(\bmod 3)$$
$$= f(n(\bmod 6))+f(m(\bmod 6)) \text{ है।}$$

आपको इसी प्रकार दर्शाना चाहिए कि

$f(n(\bmod 6)\cdot m(\bmod 6)) = f(n(\bmod 6))\cdot f(m(\bmod 6))$ है।

इस प्रकार, f एक वलय समाकारिता है।

$$\text{Ker } f = \{n(\bmod 6) \mid n \equiv 0(\bmod 3)\} = \{n(\bmod 6) \mid n \in 3\mathbb{Z}\}$$

$= \{\overline{0}, \overline{3}\}$ 'ऊपरी रेखा' '$\bmod 6$' को व्यक्त करती है।

$= \overline{3}\mathbb{Z}_6$ है।

$\text{Im } f = \{n(\bmod 3) \mid \overline{n} \in \mathbb{Z}_6\} = \mathbb{Z}_3$ है।

अब, आइए देखें कि क्या g सुपरिभाषित है। ध्यान दीजिए कि $\mathbb{Z}_3$ में $\overline{1} = \overline{4}$ है, परंतु $\mathbb{Z}_6$ में $g(\overline{1}) \neq g(\overline{4})$ है। अतः, g सुपरिभाषित नहीं है। इस प्रकार, g का एक समाकारिता होने का कोई प्रश्न ही नहीं है।

***

उपरोक्त उदाहरणों को देखकर, आपने यह जान लिया होगा, जिसके बारे में हम अब टिप्पणी करने जा रहे हैं।

टिप्पणी 4: R_1 से R_2 तक की एक वलय समाकारिता f की (के) अष्टि और प्रतिबिंब वहीं है जो $(R_1, +)$ से $(R_2, +)$ तक की एक समूह समाकारिता f की (के) अष्टि और प्रतिबिंब हैं।

इससे पहले कि हम कुछ और उदाहरणों पर दृष्टि डालें, आप कुछ प्रश्न क्यों नहीं हल कर लेते? इससे आपको यह जाँच करने में सहायता मिलेगी कि आपने अब तक की गई चर्चा को समझ लिया है।

E1) यदि S किसी वलय R का एक उपवलय है, तो R के उन्हीं + और · के सापेक्ष S एक वलय है। दर्शाइए कि आविष्टि प्रतिचित्र $i : S \to R : i(x) = x$ एक समाकारिता है। Ker i और Im i क्या हैं?

E2) i) दर्शाइए कि $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z} : \phi(f(x)) = f(1)$ एक समाकारिता है। $\text{Ker }\phi$ और $\text{Im }\phi$ भी ज्ञात कीजिए। (ϕ को $\mathbf{x = 1}$ पर **मूल्यांकन प्रतिचित्र (evaluation map)** कहते है।)

ii) किसी $z \in \mathbb{C}$ के लिए, दर्शाइए कि मूल्यांकन प्रतिचित्र $\phi_z : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} : \phi_z(f(x)) = f(z)$ एक समाकारिता है। $\text{Ker }\phi_z$ और $\text{Im }\phi_z$ भी ज्ञात कीजिए।

E3) $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R} : \phi(a+ib+jc+kd) = a$ पर विचार कीजिए। जाँच कीजिए कि ϕ एक समाकारिता है या नहीं।

ध्यान दीजिए कि E1 के उपयोग से, हम जानते हैं कि $f(n) = n$ द्वारा दिया जाने वाला $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ (या $\mathbb{R}$ या $\mathbb{C}$ या $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$) एक वयल समाकारिता है।

E4) $\psi: \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}: \psi(A) = \det(A)$ पर विचार कीजिए। जाँच कीजिए कि ψ एक समाकारिता है या नहीं।

E5) $f: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6 : f(n(\text{mod}3)) = 4n(\text{mod}6)$ पर विचार कीजिए। जाँच कीजिए कि f एक वलय समाकारिता है या नहीं।

अब, आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7: संवृत्त अंतराल $C[0,1]$ पर परिभाषित सभी वास्तविक मान संतत फलनों के वलय $[0,1]$ पर विचार कीजिए। $\phi: C[0,1] \to \mathbb{R} : \phi(f) = f(1/2)$ को परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि ϕ एक आच्छादक समाकारिता है। क्या ϕ एक एकैक समाकारिता है?

हल : मान लीजिए कि f और $g \in C[0,1]$ है। तब, सभी $x \in [0,1]$ के लिए, + और $\cdot$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ तथा $(fg)(x) = f(x)g(x)$ द्वारा परिभाषित हैं।

अब, $\phi(f+g) = (f+g)(1/2) = f(1/2) + g(1/2) = \phi(f) + \phi(g)$ है, तथा $\phi(fg) = (fg)(1/2) = f(1/2)g(1/2) = \phi(f)\phi(g)$ है।

उदाहरण 7 में, ϕ बिंदु $x = \frac{1}{2}$ पर मूल्यांकन प्रतिचित्र कहलाता है।

इस प्रकार, ϕ एक वलय समाकारिता है।

अब, ϕ आच्छादक है, क्योंकि किसी $r \in \mathbb{R}$ के लिए, अचर फलन $g:[0,1] \to \mathbb{R} : g(x) = r$ पर विचार करने पर, कैलकुलस से आप जानते हैं कि $[0,1]$ पर g संतत है। साथ ही, $g(1/2) = r$ है।

इस प्रकार, $\phi(g) = r$ है।

अतः, ϕ एक आच्छादक समाकारिता है।

परंतु ϕ एकैकी 1-1 नहीं है। उदाहरणार्थ, यदि $f:[0,1] \to \mathbb{R} : f(x) = x - \frac{1}{2}$ है तथा g शून्य फलन है, तो $\phi(f) = \phi(g)$ है, परंतु $f \neq g$ है।

***

उदाहरण 8: आव्यूह योग और गुणन के अंतर्गत वलय $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि प्रतिचित्र (फलन) $f: \mathbb{Z} \to R : f(n) = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ एक समाकारिता है। Ker f भी ज्ञात कीजिए। क्या f एक आच्छादक समाकारिता है।?

हल: ध्यान दीजिए कि f सुपरिभाषित है, क्योंकि यदि $n = m$ है, तो
$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ है।

आगे, $n, m \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$$f(n+m) = \begin{bmatrix} n+m & 0 \\ 0 & n+m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = f(n) + f(m)$$ है, तथा

$f(nm) = f(n)f(m)$ है। (इसका सत्यापन कीजिए।)

इस प्रकार, f एक समाकारिता है।

$\text{Ker } f = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = \mathbf{0}\} = \{0\}$ है।

अंत में, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ पर विचार कीजिए। यह $\operatorname{Im} f$ में नहीं है, क्योंकि इसके $(1, 1)$ वें और $(2, 2)$ वें अवयव भिन्न-भिन्न हैं। परंतु, R में A है। अतः, एक आच्छादक समाकारिता नहीं है।

अंतः, f एक आच्छादक समाकारिता नहीं है।

***

उदाहरण 9: वलय $(\wp(X), \Delta, \cap)$ पर विचार कीजिए, जहाँ X एक अरिक्त समुच्च्य है।

मान लीजिए कि X का Y एक अरिक्त उचित उपसमुच्च्य है।

$f : \wp(X) \to \wp(Y) : f(A) = A \cap Y$ परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि f एक समाकारिता है। $Y^c \in \operatorname{Ker} f$ क्या है? $\wp(Y) \setminus \operatorname{Im} f$ क्या है?

हल : यदि $\wp(X)$ में A और B हैं s.t. $A = B$ है, तो $A \cap Y = B \cap Y$ है। इस प्रकार, f सुपरिभाषित है।

अब, कैलकुलस के खंड 1 से स्मण कीजिए कि 'प्रतिच्छेदन' 'सम्मिलन' और 'पूरीकरण' पर वितरित होता है। हम इन गुणों का अब उपयोग करेंगे।

$A, B \in \wp(X)$ के लिए,

$$\begin{aligned} f(A \Delta B) &= f((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\ &= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap Y \\ &= ((A \setminus B) \cap Y) \cup ((B \setminus A) \cap Y) \\ &= ((A \cap Y) \setminus (B \cap Y)) \cup ((B \cap Y) \setminus (A \cap Y)) \\ &= (f(A) \setminus f(B)) \cup (f(B) \setminus f(A)) \\ &= f(A) \Delta f(B) \text{ है, तथा} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(A \cap B) &= (A \cap B) \cap Y \\ &= (A \cap B) \cap (Y \cap Y) \text{ क्योंकि } Y \cap Y = Y \text{ है।} \\ &= (A \cap Y) \cap (B \cap Y) \text{ क्योंकि } \cap \text{सहचारी और क्रमविनिमेय है।} \\ &= f(A) \cap f(B) \text{ है।} \end{aligned}$$

अतः, $\wp(X)$ से $\wp(Y)$ तक f एक वलय समाकारिता है।

आगे, स्मरण कीजिए कि $\wp(Y)$ का शून्य $\emptyset$ अवयव है। इसलिए,

$$\operatorname{Ker} f = \{A \in \wp(X) \mid A \cap Y = \emptyset\} = \{A \in \wp(X) \mid A \subseteq Y^c\} = \wp(Y^c) \text{ है।}$$

$$\therefore Y^c \in \operatorname{Ker} f \text{ है।}$$

अंत में, यह देखने के लिए कि $\wp(Y) \setminus \operatorname{Im} f$ क्या है, ध्यान दीजिए कि $\operatorname{Im} f = \{A \cap Y \mid A \in \wp(X)\} \subseteq \wp(Y)$ है।

अब, मान लीजिए कि $B \in \wp(Y)$ है। तब, $B \in \wp(X)$ और $f(B) = B \cap Y = B$ है। इस प्रकार, $B \in \operatorname{Im} f$ है।

अतः, $\wp(Y) \subseteq \operatorname{Im} f$ है।

इसलिए, $\operatorname{Im} f = \wp(Y)$ है।

अतः, $\wp(Y) \setminus \operatorname{Im} f = \emptyset$ है।

***

अब समाकारिता के कुछ और उदाहरण (तथा अउदाहरण) प्राप्त करने के लिए, आपको निम्नलिखित प्रश्नों को हल करना चाहिए।

E6) मान लीजिए कि A और B दो वलय हैं। दर्शाइए कि **प्रमेय फलन (प्रतिचित्र) (projection map)** $p: A \times B \to A : p(x, y) = x$ एक समाकारिता है। $\operatorname{Ker} p$ और $\operatorname{Im} p$ क्या हैं? क्या p एक तुल्याकारिता है? (इसी प्रकार, $p' : A \times B \to B : p'(x, y) = y$ एक समाकारिता है।)

E7) क्या $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}] : f(a + \sqrt{2}b) = a - \sqrt{2}b$ एक वलय अंतराकारिता है? क्या $g : \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{7}] : g(a + b\sqrt{3}) = a + b\sqrt{7}$ एक वलय समाकारिता है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

E8) जाँच कीजिए कि $f : 3\mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z} : f(3n) = 5n$ एक समाकारिता है या नहीं।

E9) जाँच कीजिए कि $\phi : \mathbb{C} \to R : \phi(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ एक तुल्याकारिता है या नहीं, जहाँ $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ का $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ एक उपवलय है।

E10) दर्शाइए कि प्रतिचित्र $\phi : C[0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \phi(f) = (f(0), f(1))$ एक समाकारिता है। इसकी भी जाँच कीजिए कि ϕ एक तुल्याकारिता है या नहीं।

अनेक उदाहरणों की चर्चा करने के बाद, आइए वलय समाकारिताओं के कुछ प्रारंभिक गुणों पर दृष्टि डालें।

13.3 वलय समाकारिताओं के गुण

आइए, पिछले भाग में, अध्ययन किए गए समाकारिताओं के प्रत्येक उदाहरण का पुनरावलोकन करते हुए, इस भाग का प्रारंभ करें। इन सभी स्थितियों में, प्रांत वलय के योज्य तत्समक का प्रतिबिंब क्या है? क्या यह सहप्रांत (co-domain) का योज्य तत्समक नहीं है? क्या यह प्रत्याशा के अनुकूल नहीं है, क्योंकि प्रत्येक वलय समाकारिता एक समूह प्रमेय समाारिता भी होती है? वस्तुतः, प्रत्येक वलय समाकारिता इसी कारण निम्नलिखित प्रमेय में सूचीबद्ध सभी गुणों को संतुष्ट करेगी।

प्रमेय 1: मान लीजिए कि $f : R_1 \to R_2$ एक वलय समाकारिता है। तब,

i) $f(0) = 0$ है

ii) $f(-x) = -f(x) \forall x \in R_1$ है, तथा

iii) $f(x - y) = f(x) - f(y) \forall x, y \in R_1$ है।

उपपत्ति : क्योंकि $(R_1, +)$ से $(R_2, +)$ तक f एक समूह समाकारिता है, इसलिए आप परिणाम प्राप्त करने के लिए, इकाई 8 की प्रमेय 1 का उपयोग कर सकते हैं। ■

अब, आइए एकवलय समाकारिता के उन पहलुओं के कुछ गुणों पर विचार करें, जो समूह समाकारिताओं से कुछ ऊपर हैं।

प्रमेय 2: मान लीजिए कि R_1 एक तत्समकी वलय है, तथा यह भी मान लीजिए कि $f: R_1 \to R_2$ एक वलय आच्छादक समाकारिता है, जहाँ $R_2 \neq \{0\}$ है। तब,

i) R_2 तत्समक $f(1)$ के साथ है;

ii) यदि $u \in U(R_1)$ है, तो $f(u) \in U(R_2)$ और $[f(u)]^{-1} = f(u^{-1})$ है।

उपपत्ति : यहाँ ध्यान दीजिए कि R_1 तत्समकी है तथा f आच्छादक है।

i) मान लीजिए कि $r \in R_2$ है। क्योंकि f आच्छादक है, इसलिए $\exists\, s \in R_1$ s.t. $f(s) = r$ है।

तब, $r \cdot f(1) = f(s)f(1) = f(s \cdot 1) = f(s) = r$ है

इसी प्रकार, $f(1)r = r$ है।

अतः, R का तत्समक $f(1)$ है।

ii) मान लीजिए कि $u \in U(R_1)$ है।

तब, $\exists\, u^{-1} \in R_1$ s.t. $uu^{-1} = 1 = u^{-1}u$ है।

अतः, $f(uu^{-1}) = f(1)$ है। अर्थात्, $f(u)f(u^{-1}) = f(1) = f(u^{-1})f(u)$ है।

इस प्रकार, $f(u) \in U(R_2)$ और $[f(u)]^{-1} = f(u^{-1})$ है। ■

प्रमेय 2 के कारण, हम जानते हैं कि किसी आच्छादक समाकारिता $f: R \to \mathbb{Z}$ के लिए, जहाँ R एक तत्समकी वलय है, $f(1) = 1$ है। इसी प्रकार, यदि $f: R \to \mathbb{Q}$ एक वलय आच्छादक समाकारिता है, जहाँ R तत्समकी है, तो $f(1) = 1$ है।

ध्यान दीजिए कि प्रमेय 2 का सत्य होना आवश्यक नहीं है, यदि f आच्छादक नहीं है। उदाहरणार्थ, उदाहरण 2 की तुच्छ समाकारिता को लीजिए। तब, $f(I) = \mathbf{0} \neq I$ है।

अब, आइए समाकारिताओं के अंतर्गत, उपवलयों के अनुलोम और प्रतिलोम प्रतिबिंबों पर दृष्टि डालें।

प्रमेय 3: मान लीजिए कि $f: R_1 \to R_2$ एक वलय समाकारिता है। तब,

i) यदि R_1 का S एक उपवलय है, तो R_2 का $f(S)$ एक उपवलय है;

ii) यदि R_2 का T एक उपवलय है, तो R_1 का $f^{-1}(T)$ एक उपवलय है।

उपपत्ति : हम (ii) को सिद्ध करेंगे तथा (i) की उपपत्ति आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E11)।

सर्वप्रथम, क्योंकि $T \neq \emptyset$ है, इसलिए $f^{-1}(T) \neq \emptyset$ है।

आगे, मान लीजिए कि $a, b \in f^{-1}(T)$ है। तब, $f(a), f(b) \in T$ है।

$\Rightarrow f(a) - f(b) \in T$ है तथा $f(a)f(b) \in T$ है, क्योंकि R_2 का T एक उपवलय है।

$\Rightarrow f(a-b) \in T$ (प्रमेय 1 द्वारा) है तथा $f(ab) \in T$ है

$\Rightarrow a - b \in f^{-1}(T)$ और $ab \in f^{-1}(T)$ है।

$\Rightarrow$ R_1 का $f^{-1}(T)$ एक उपवलय है, उपवलय परीक्षण (टेस्ट) द्वारा। ■

प्रमेय 3 की उपपत्ति को पूरा करने के लिए, आपको E11 का हल करना आवश्यक है।

E11) प्रमेय 3 के (i) को सिद्ध कीजिए।

E12) प्रमेय 3 की व्यवस्था में, मान लीजिए कि $\mathcal{A}$ और $\mathcal{B}$ क्रमशः R_1 के उपवलयों का समुच्च्य और R_2 के उपवलयों का समुच्च्य है। तब, एक सगति $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ है। क्या ϕ एक एकैकी आच्छादक है? क्यों या क्यों नहीं?

अब, यह स्वाभाविक है कि गुणजावलियों के लिए प्रमेय 3 के अनुरूप एक परिणाम की आशा की जाए। वस्तुतः, (ii) गुणजावलियों के लिए भी सत्य है। परंतु, (i) के संदर्भ में, निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 5: एक वलय समाकारिता के अंतर्गत किसी गुणजावली के प्रतिबिंब का गुणजावली होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, आविष्टि $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} : i(x) = x$ पर विचार कीजिए। आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}$ की $\mathbb{Z}$ एक गुणजावली है। परंतु, क्या $\mathbb{R}$ की $i(\mathbb{Z})$ (अर्थात् $\mathbb{Z}$) एक गुणजावली है? नहीं, जैसा कि आप इकाई 12 में देख चुके हैं।

अतः, गुणजावलियों के संदर्भ में, हमें **किन्हीं** दो वलयों R_1 और R_2 के लिए, चाहे वे क्रमविनिमेय हैं या नहीं, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय 4: मान लीजिए कि $f : R_1 \to R_2$ एक वलय समाकारिता है।

i) यदि f आच्छादक है, तथा R_1 की I एक गुणजावली है, तो R_2 की $f(I)$ एक गुणजावली होती है।

ii) यदि R_2 की I एक गुणजावली है, तो R_1 की $f^{-1}(I)$ एक गुणजावली होती है, तथा $\operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(I)$ होता है।

उपपत्ति : यहाँ हम (i) को सिद्ध करेंगे तथा (ii) आपके लिए छोड़ देंगे (देखिए E13)।

सर्वप्रथम, क्योंकि R_1 का I एक उपवलय है, इसलिए प्रमेय 3 द्वारा R_2 का $f(I)$ एक उपवलय है।

दूसरे, कोई $f(x) \in f(I)$ और $r \in R_2$ लीजिए।

क्योंकि f आच्छादक है, इसलिए $\exists\, s \in R_1$ ताकि $f(s) = r$ है।

तब, $r \cdot f(x) = f(s) f(x) = f(sx) \in f(I)$ है, क्योंकि $sx \in I$ है।

इसी प्रकार, $f(x) \cdot r \in f(I)$ है।

इस प्रकार, R_2 की $f(I)$ एक गुणजावली है। ■

प्रमेय 4 की उपपत्ति तब पूरी होगी, जब एक बार आप नीचे दिए E13 को हल कर लेंगे।

E13) प्रमेय 4 के (ii) को सिद्ध कीजिए।

E14) मान लीजिए कि $f : R \to S$ एक आच्छादक है। तब, S के किसी अरिक्त उपसमुच्च्य J के लिए, $f(f^{-1}(J)) = J$ है। विशिष्ट रूप में, यदि f एक आच्छादक वलय समाकारिता है तथा S की J एक गुणजावली है, तो $f(f^{-1}(J)) = J$ होता है।

अब एक वलय आच्छादक समाकारिता $f : R \to S$ तथा R में एक गुणजावली I पर विचार कीजिए। E14 में, आप सिद्ध कर चुके हैं कि यदि S की J एक गुणजावली है, तो $J = f(f^{-1}(J))$ है। साथ ही, इस व्यवस्था में, प्रमेय 4 द्वारा आप जानते हैं कि S की

$f(I)$ एक गुणजावली है तथा R की $f^{-1}(f(I))$ एक गुणजावली है। अतः क्या $I = f^{-1}(f(I))$ है?

उदाहरणार्थ, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5 : f(m) = \overline{m}$ पर विचार कीजिए (देखिए उदाहरण 5)। यहाँ f एक आच्छादक है। $I = 2\mathbb{Z}$ लीजिए। तब, $5 \notin I$ है। परंतु, $5 \in f^{-1}(f(I))$ है, क्योंकि $f(5) = \overline{0} \in f(I)$ है। अतः, $I \neq f^{-1}(f(I))$ है।

परंतु, R में दोनों गुणजावलियों I और $f^{-1}(f(I))$ पर दृष्टि डालने पर, ऐसा प्रतीत होता है कि इनमें परस्पर कोई संबंध अवश्य होना चाहिए। यह क्या हो सकता है? इसका उत्तर आप निम्नलिखित प्रमेय में प्राप्त करेंगे।

प्रमेय 5: मान लीजिए कि $f: R \to S$ एक वलय समाकारिता है, तथा मान लीजिए कि R की I एक गुणजावली है। तब $f^{-1}(f(I)) = I + \text{Ker } f$ होता है।

उपपत्ति : आप जानते हैं कि $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(f(I))$ है, क्योंकि $0 \in f(I)$ है।

साथ ही, यदि $x \in I$ है, तो $f(x) \in f(I)$ है। इसलिए, $x \in f^{-1}(f(I))$ है।

अतः, $I \subseteq f^{-1}(f(I))$ है।

इस प्रकार, $I + \text{Ker } f \subseteq f^{-1}(f(I))$ है। …(1)

अब, यह दर्शाने के लिए कि $f^{-1}(f(I)) \subseteq I + \text{Ker } f$ है, मान लीजिए कि $x \in f^{-1}(f(I))$ है। तब, $f(x) \in f(I)$ है।

$\Rightarrow f(x) = f(y)$, किसी $y \in I$ के लिए।

$\Rightarrow f(x - y) = 0$, प्रमेय 1 के द्वारा।

$\Rightarrow x - y \in \text{Ker } f$ है।

$\Rightarrow x \in y + \text{Ker } f \subseteq I + \text{Ker } f$ है।

$\therefore f^{-1}(f(I)) \subseteq I + \text{Ker } f$ है। …(2)

(1) और (2) से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $f^{-1}(f(I)) = I + \text{Ker } f$ है। ■

प्रमेय 5 से तुरंत प्राप्त होने वाली उपप्रमेय निम्नलिखित है :

उपप्रमेय 1: यदि $f: R \to S$ एक वलय समाकारिता है तथा R की Ker f को अंतर्विष्ट करने वाली I एक गुणजावली है, तो $f^{-1}(f(I)) = I$ होता है।

उपपत्ति : क्योंकि $\text{Ker } f \subseteq I$ है, इसलिए $I + \text{Ker } f = I$ है।

$$\therefore f^{-1}(f(I)) = I \text{ है।}$$

प्रमेय 5 के संदर्भ में, निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण टिप्पणी पर विचार कीजिए। ■

टिप्पणी 6: ध्यान दीजिए कि प्रमेय 5 सत्य है, चाहे आच्छादक हो या नहीं हो। इस प्रमेय तथा उपप्रमेय 1 में, हम प्रमेय 3 द्वारा $f(I)$ को केवल एक उपवलय मानते हैं। यदि हम $f(I)$ को एक गुणजावली रखना चाहते हैं, तो हमें यह प्रतिबंध जोड़ना पड़ेगा कि f एक आच्छादक है।

अब, E12 में आप देख चुके हैं कि यदि $f: R \to S$ एक समाकारिता है, तो R के उपवलयों और S के उपवलयों के बीच में एक संगति होती है। परंतु 1 से 1 यह संगति

नहीं है। आइए यह देखने के लिए कि R और S की गुणजावलियों के संदर्भ में क्या स्थिति है, प्रमेयों 4 और 5 का उपयोग करें। निम्नलिखित प्रमेय पर विचार कीजिए।

प्रमेय 6: मान लीजिए कि $f: R \to S$ एक **आच्छादक** वलय समाकारिता है। तब, $I \mapsto f(I)$, $\text{Ker } f$ को अंतर्विष्ट करने वाली R की गुणजावलियों के समुच्च्य तथा S की गुणजावलियों के समुच्च्य के बीच एक एक-से-एक संगति परिभाषित करता है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $\text{Ker } f$ को अंतर्विष्ट करने वाली R की गुणजावलियों का समुच्च्य $\mathcal{A}$ है तथा S की गुणजावलियों का समुच्च्य $\mathcal{B}$ है।

$\phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}: \phi(I) = f(I)$ परिभाषित कीजिए।

हम यह दर्शाना चाहते हैं कि ϕ एक एकैकी आच्छादक है।

ϕ आच्छादक है : यदि $J \in \mathcal{B}$ है, तो $f^{-1}(J) \in \mathcal{A}$ और $\text{Ker } f \subseteq f^{-1}(J)$ है, प्रमेय 4 द्वारा।

अब, $\phi(f^{-1}(J)) = f(f^{-1}(J)) = J$, E14 के उपयोग से।

अतः, ϕ आच्छादक है।

ϕ एक-एक है: यदि $\mathcal{A}$ में I_1 और I_2 हैं, तो

$$\phi(I_1) = \phi(I_2) \Rightarrow f(I_1) = f(I_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(I_1)) = f^{-1}(f(I_2))$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2 \text{ है, उपप्रमेय 1 द्वारा।}$$

इस प्रकार, ϕ एकैकी आच्छादक है। ■

आइए, प्रमेय 6 की उपयोगिता के एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 10: समाकारिता $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}: f(z) = \bar{z}$ की अष्टि ज्ञात कीजिए। साथ ही, $\mathbb{Z}_{12}$ की सभी गुणजावलियों को भी ज्ञात कीजिए।

हल : $\text{Ker } f = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{12}\} = 12\mathbb{Z}$ है।

अब, आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}$ की कोई भी गुणजावली $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ के रूप की हाती है। इस प्रकार, $\text{Ker } f$ को अंतर्विष्ट करने वाली $\mathbb{Z}$ की गुणजावलियाँ $n\mathbb{Z}$ के रूप की होती हैं ताकि $n \mid 12$ है, अर्थात् जब $n = 1, 2, 3, 4, 6$ और 12 हैं। ये $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}$ और $12\mathbb{Z}$ हैं।

इस प्रकार, प्रमेय 6 द्वारा $\mathbb{Z}_{12}$ की गुणजावलियाँ $\mathbb{Z}_{12}, \bar{2}\mathbb{Z}_{12}, \bar{3}\mathbb{Z}_{12}, \bar{4}\mathbb{Z}_{12}, \bar{6}\mathbb{Z}_{12}$ और $\{\bar{0}\}$ हैं।

***

अब आपको कुछ संबंधित प्रश्न हल करने चाहिए।

E15) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5: f(n) = n \pmod 5$ तथा $I = 2\mathbb{Z}$ के लिए प्रमेय 5 का सत्यापन कीजिए। साथ ही, इसका सत्यापन उदाहरण 3 की तुच्छ समाकारिता के लिए भी कीजिए।

E16) उदाहरण 7 के संदर्भ में प्रमेय 6 क्या कहती है?

E17) i) दर्शाइए कि $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:f(n)=(n,n)$ एक आच्छादक समाकारिता नहीं है।

ii) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ में एक गुणजावली ज्ञात कीजिए, जो $f(I)$ के रूप की नहीं है, जहाँ $\mathbb{Z}$ की I एक गुणजावली है।

E18) जाँच कीजिए कि क्या $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:g(n)=(n,0)$ एक वलय समाकारिता है या नहीं। आगे, क्या g आच्छादक है? क्या $\mathbb{Z}$ की प्रत्येक गुणजावली I के लिए, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ की $g(I)$ गुणजावली है? क्या यह प्रमेय 4 का प्रतिरोध करती है? क्यों या क्यों नहीं?

E19) क्या $\mathbb{Z}_n$ की प्रत्येक गुणजावली, किसी भी $n\in\mathbb{N}$ के लिए, एक मुख्य गुणजावली है? इसको निर्धारित करने के लिए, प्रमेय 6 का उपयोग कीजिए।

और अब आइए समुच्च्यों $\text{Ker}\, f$ और $\text{Im}\, f$ पर निकटता से दृष्टि डालें, जहाँ f एक वलय समाकारिता है। इकाई 8 में, हम सिद्ध कर चुके हैं कि यदि $f:G_1\to G_2$ एक समूह समाकारिता है, तो G_1 का $\text{Ker}\, f$ एक प्रसामान्य उपसमूह होता है तथा G_2 का $\text{Im}\, f$ एक उपसमूह होता है। वलय समाकारिताओं के लिए, हमें इसके एक अनुरूप परिणाम प्राप्त है, जिसका अनुभव आपने अभी तक अध्ययन किए गए उदाहरणों से कर लिया होगा।

प्रमेय 7: मान लीजिए कि $f:R_1\to R_2$ एक वलय समाकारिता है। तब,

i) R_1 की $\text{Ker}\, f$ एक गुणजावली है, तथा

ii) R_2 का $\text{Im}\, f$ एक उपवलय है।

उपपत्ति : i) क्योंकि R_2 की $\{0\}$ एक गुणजावली है, इसलिए प्रमेय 4(ii) द्वारा आप जानते हैं कि R_1 की $f^{-1}(\{0\})$ एक गुणजावली है।

क्योंकि $f^{-1}(\{0\})=\text{Ker}\, f$ है, इसलिए R_1 की $\text{Ker}\, f$ एक गुणजावली है।

ii) क्योंकि R_1 का R_1 एक उपवलय है, इसलिए प्रमेय 3(i) द्वारा, R_2 का $f(R_1)$ एक उपवलय है।

इस प्रकार, R_2 का $\text{Im}\, f$ एक उपवलय है। ■

यह दर्शाने के लिए कि कुछ विशेष समुच्च्य गुणजावलियाँ होते हैं, प्रमेय 7 अति उपयोगी रहती है। उदाहरणार्थ, प्रमेय 7 और उदाहरण 9 से, आप किसी $X\neq\emptyset$ के लिए, $\wp(X)$ की एक अतुच्छ उचित गुणजावली तुरंत ज्ञात कर सकते हैं।

इसी प्रकार, उदाहरण 7 से आप देख सकते हैं कि $C[0,1]$ की $\{f\in C[0,1] \mid f(1/2)=0\}$ एक अतुच्छ गुणजावली है।

जैसे-जैसे, हम आगे कार्य करेंगे, आप प्रमेय 7 के उपयोग के और अधिक उदाहरणों को देखेंगे। अभी के लिए, आइए किसी समाकारिता की अष्टि कुछ और अधिक जाँच करें। वस्तुतः, आइए एक परिणाम को सिद्ध करें, जो वास्तव में इकाई 8 की प्रमेय 4 की एक उपप्रमेय है।

प्रमेय 8: मान लीजिए कि $f:R_1\to R_2$ एक समाकारिता है। तब, f एकैकी होता है iff $\text{Ker}\, f=\{0\}$ हो।

उपपत्ति : ध्यान दीजिए कि $f: R_1 \to R_2$ एकैकी है $f:(R_1, +) \to (R_2, +)$ एक एकैकी समूह समाकारिता हो, अर्थात् iff $\text{Ker } f = \{0\}$ हो, इकाई 8की प्रमेय 4 द्वारा।

अतः, परिणाम सिद्ध हो गया है।

प्रमेय 8 के अनुप्रयोग के एक उदाहरण के रूप में, आप तुरंत कह सकते हैं कि f (उदाहरण 9 में) एकैकी नहीं है।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए।

E20) उदाहरणों 1 से 8 में दी समाकारिताओं में से कौन-कौन 1-1 हैं?

E21) E1 से E7 की समाकारिताओं में से कौन-कौन 1-1 हैं?

E22) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित वलय समाकारिताएँ हैं या नहीं। जो हैं, उनके लिए $\text{Ker } \phi$ और $\text{Im } \phi$ ज्ञात कीजिए। इससे निर्धारित कीजिए कि क्या ϕ तुल्याकारिता है या नहीं है।

i) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : \phi(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ -x & 0 \end{bmatrix}$ है।

ii) $\phi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3 : \phi(\overline{n}) = \overline{n}^3$ है।

आइए अब समाकारिताओं के एक अन्य पहलू पर दृष्टि डालें। इकाई 8 से, आप जानते हैं कि $(R, +)$ का एक उपसमूह H दिया रहने पर, आप $\text{Ker } f = H$ के साथ एक समूह समाकारिता $f:(R, +) \to (S, +)$ को परिभाषित कर सकते हैं। आप यह भी देख चुके हैं कि एक वलय समाकारिता $f: R \to S$ दी होने पर, आप f के संगत R की एक गुणजावली Ker f प्राप्त करते हैं। अतः, प्रश्न उठता है कि एक वलय R की एक गुणजावली I दी होने पर, क्या आप एक वलय समाकारिता f परिभाषित कर सकते हैं, जिससे $\text{Ker } f = I$ हो?

निम्नलिखित प्रमेय इस प्रश्न का उत्तर देती है। इसका अध्ययन करने से पहले, कृप्या इकाई 12 से विभाग वलय की परिभाषा के बारे में अपने मस्तिष्क को तरोताजा कर लें। साथ ही, यह भी यादि रखिए कि विभाग वलय किसी भी वलय के लिए परिभाषित होते हैं।

प्रमेय 9: यदि I किसी वलय R की एक गुणजावली है, तो एक वलय S और एक आच्छादक वलय समाकारिता $f: R \to S$ का अस्तित्व होता है, जिसकी अष्टि I है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $S = R/I$ है, जो सुपरिभाषित है, क्योंकि R की I एक गुणजावली है, हम $f: R \to R/I : f(a) = a + I$ परिभाषित करते है।

आइए देखें कि क्या f एक सुपरिभाषित समाकारिता है।

यदि R में $a = b$ है, तो $a + I = b + I$ है। अर्थात् $f(a) = f(b)$ है।

अतः, f सुपरिभाातित हैं

आगे, $a, b \in R$ के लिए,

$f(a+b) = (a+b) + I = (a+I) + (b+I) = f(a) + f(b)$ है, तथा

$f(ab) = ab + I = (a+I)(b+I) = f(a)f(b)$ है।

इस प्रकार, f एक समाकारिता है।

साथ ही, $\text{Ker } f = \{a \in R \mid f(a) = I\}$ (स्मरण कीजिए, R/I का I शून्य अवयव है।)

$$= \{a \in R \mid a + I = I\}$$

$$= \{a \in R \mid a \in I\}$$

$$= I \text{ है।}$$

$$\text{Im } f = \{r + I \mid r \in R\} = R/I \text{ है।}$$

इस प्रकार, f आच्छादक है।

इस प्रकार, प्रमेय सिद्ध हो जाती है। ■

उपरोक्त उपपत्ति में परिभाषित समाकाारिता R से पर R/I **आच्छादक विहित (canonical)** [या प्राकृतिक **(natural)**] समाकारिता कहलाती है। आप इकाई 8 में, समूहों के लिए, इसके अनुरूप संकल्पना का पहले ही अध्ययन कर चुके हैं। समूहों की स्थिति की ही तरह, आप अगले भाग में इस प्रमेय के उपयोग को प्रचुर मात्रा में पाएंगे।

अब संबंधित प्रश्नों के एक युग्म को हल करने का प्रयास कीजिए।

E23) क्या प्रमेय 9 का कथन तब भी सत्य होगा, जब हम इसमें 'गुणजावली' को 'उपवलय' से प्रतिस्थापित कर देते हैं? अर्थात्, यदि S एक वलय R का उपवलय है, तो क्या हम सदैव एक वलय समाकारिता परिभाषित कर सकते हैं, जिसका प्रांत R है और अष्टि S है? क्यों या क्यों नहीं?

E24) मान लीजिए कि R एक वलय है तथा R की I एक गुणजावली है। यह सिद्ध करने के लिए कि R/I की कोई भी गुणजावली J/I के रूप की होती है, जहाँ R की I को अंतर्विष्ट करने वाली J एक गुणजावली है, प्रमेयों 4 और 9 का उपयोग कीजिए। (निस्संदेह, आप इसे इकाई 12 में पहले ही सिद्ध कर चुके हैं।)

अब, आइए समाकारिताओं के संयोजन के वयवहार पर दृष्टि डालें। इकाई 8 की प्रमेय 2 में आपने अध्ययन किया था कि समूह समाकारिताओं का संयोजन एक समूह समाकारिता होता है। अतः आप निम्नलिखित अनुरूप परिणाम को आश्चर्यजनक नहीं पाएंगे।

प्रमेय 10: मान लीजिए कि R_1, R_2 और R_3 वलय हैं तथा मान लीजिए कि $f : R_1 \to R_2$ तथा $g : R_2 \to R_3$ वलय समाकारिताएँ हैं। तब, इनका संयोजन $g \circ f : R_1 \to R_3 : (g \circ f)(x) = g(f(x))$ एक वलय समाकारिता है।

इस परिणाम की उपपत्ति ठीक उसी प्रकार से है, जैसी की इकाई 8 में संगत परिणाम की उपपत्ति थी। हम, इसे सिद्ध करना आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखें E25)। ■

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का समय है। ऐसा करने से, आपको वलय समाकारिताओं के संयोजन के कुछ गुणों से परिचित होने में सहायता मिलेगी।

E25) प्रमेय 10 को सिद्ध कीजिए।

E26) प्रमेय 10 की स्थिति में, सिद्ध कीजिए कि

i) यदि $g \circ f$ एकैकी है, तो f भी ऐसा ही है।

ii) यदि $g \circ f$ आच्छादक है, तो g भी ऐसा ही है।

iii) यदि $g \circ f$ एकैकी है, तो g का एकैकी $(1\text{-}1)$ होना आवश्यक नहीं है।

iv) यदि $g \circ f$ आच्छदक है, तो f का आच्छादक होना आवश्यक नहीं है।

E27) यह दर्शाने के लिए कि $h((n,m)) = \overline{m}$ द्वारा परिभाषित $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_r$ एक समाकारिता है, प्रमेय 10 का उपयोग कीजिए, जहाँ $r \in \mathbb{N}$ है।

अब, आइए वलय तुल्याकारिताओं पर अपना ध्यान केंद्रित करें।

13.4 तुल्याकारिता प्रमेय

भाग 8.4, इकाई 8 में, हमने समूह समाकारिताओं की चर्चा, उनके संबद्ध विभिन्न परिणामों के साथ, की थी। इस भाग में, हम यही बात वलयों के लिए करेंगे। भाग 13.2 में, आप यह पहले ही देख चुके हैं कि एक वलय तुल्याकारिता एक एकैक आच्छादक वलय समाकारिता होती है। साथ ही, जैसा कि समूहों के लिए था, यदि $f : R_1 \to R_2$ एक तुल्याकारिता है, तो हम कहते हैं कि **R_2 के R_1 तुल्याकारी (isomorphic) है,** तथा इसे $\mathbf{R_1 \simeq R_2}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

आगे, समूहों में जैसा था, किसी वलय R की स्वयं पर तुल्याकारिता R की एक **स्वाकारिता (automorphism)** कहलाती है।

उदाहरणार्थ, प्रत्येक वलय R की न्यूनतम एक स्वाकारिता, अर्थात्, I होती है, जैसा आप उदाहरणों 3 और 4 में अध्ययन कर चुके हैं।

यहाँ पर निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कीजिए, जो उसी प्रकार की है, जिसे आप समूहों के लिए देख चुके हैं।

टिप्पणी 7: दो वलय तुल्याकारी होते हैं यदि और केवल यदि वे बीजीय रूप से सर्वसम होते हैं। अर्थात्, तुल्याकारी वलयों में यथार्थ रूप से समान बीजीय गुण होने चाहिए। इस प्रकार, यदि R एक तत्समकी वलय है, तो वह एक अतत्समकी (जिसका तत्समक नहीं) वलय के तुल्याकारी नहीं हो सकता। इसी प्रकार, यदि R की केवल गुणजावलियाँ $\{0\}$ और स्वयं वही है, तो R के किसी भी तुल्याकारी वलय में भी यही गुण होना चाहिए।

आइए कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें, जिनको आप पहले ही हल कर चुके हैं। E9 की स्थिति को लीजिए। वहाँ आपने दर्शाया था कि $\mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ है, जो $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ का एक उपवलय है। इकाई 12 से आप जानते हैं कि $\mathbb{C}$ की केवल दो गुणजावलियाँ $\{0\}$ और स्वयं वही हैं। इसलिए, यही $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ के उपवलय के लिए भी सत्ता है, जो $\mathbb{C}$ के तुल्याकारी है।

आगे, E22(i) पर विचार कीजिए। आप देख चुके हैं कि ϕ एक समाकारिता है, $\text{Ker}\,\phi = \{0\}$ तथा $\text{Im}\,\phi = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ -x & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = S$, मान लीजिए है। अतः, $\mathbb{R} \simeq S$ है।

इसलिए S क्रमविनिमेय है, क्योंकि $\mathbb{R}$ क्रमविनिमेय है।

क्योंकि $\mathbb{R}$ की केवल दो गुणजावलियाँ $\{0\}$ और स्वयं वही हैं, इसलिए S के लिए भी यही सत्य है।

क्योंकि $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ है, इसलिए यही S के लिए सत्य है। अर्थात् $U(S) = S \setminus \{\mathbf{0}\}$ है, इत्यादि।

यहाँ इस ओर ध्यान दीजिए कि ऊपर चर्चा किए गए S के गुणों में से कोई भी $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ के लिए सत्य नहीं है। परंतु ये $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ के उपवलय S के लिए सत्य हैं।

आइए कुछ अन्य उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 11: मान लीजिए कि $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ का $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 10b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ उपवलय S है।

जाँच कीजिए कि $f: \mathbb{Z}[\sqrt{10}] \to S : f(a+b\sqrt{10}) = \begin{bmatrix} a & b \\ 10b & a \end{bmatrix}$ एक तुल्याकारिता है या नहीं।

हल : आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि f सुपरिभाषित है।

आगे, दर्शाइए कि $f[(a+b\sqrt{10})+(c+d\sqrt{10})] = f(a+b\sqrt{10}) + f(c+d\sqrt{10})$ है, तथा $f[(a+b\sqrt{10})(c+d\sqrt{10})] = f(a+b\sqrt{10})\, f(c+d\sqrt{10})$ है।

$$\text{Ker } f = \left\{a+b\sqrt{10} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ 10b & a \end{bmatrix} = \mathbf{0},\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

$= \{0\}$ है।

$\text{Im } f = S$ है, जिसका आपको सत्यापन करना चाहिए।

हस प्रकार, f एक तुल्याकारिता है।

***

उदाहरण 12: मान लीजिए कि R और S वलय हैं। सिद्ध कीजिए कि $R \times S$ में एक उपवलय R के तुल्याकारी तथा एक उपवलय S के तुल्याकारी अंतर्विष्ट है।

हल : $f: R \to R \times S : f(r) = (r, 0)$ तथा $g: S \to R \times S : g(s) = (0, s)$ परिभाषित कीजिए।

अब, आपको इसका सत्यापन करना चाहिए कि f और g दोनों सुपरिभाषित हैं।

आगे, $\forall\ r_1, r_2 \in R$,

$f(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2, 0) = (r_1, 0) + (r_2, 0) = f(r_1) + f(r_2)$ है, तथा
$f(r_1 r_2) = (r_1 r_2, 0) = (r_1, 0)(r_2, 0) = f(r_1) f(r_2)$ है।

इस प्रकार, f एक वलय समाकारिता है।

इसी प्रकार, आपको सत्यापन करना चाहिए कि g एक वलय समाकारिता है।

आगे, $\text{Ker } f = \{r \in R \mid (r, 0) = (0, 0)\} = \{0\}$ है, जिससे f एकैकी है।

साथ ही, $\text{Im } f = \{(r, 0) \mid r \in R\} = R \times \{0\}$ का एक उपवलय $R \times S$ है, ताकि $R \simeq \text{Im } f = R \times \{0\}$ है।

इसी प्रकार, आपको दर्शाना चाहिए कि $S \simeq \text{Im } g = \{0\} \times S$ है, जो $R \times S$ एक उपवलय है।

इस प्रकार, $R \times S$ में एक उपवलय R के तुल्याकारी तथा एक उपवलय S के तुल्याकारी अंतर्विष्ट है।

***

उदाहरण 13: दर्शाइए कि $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}$ है।

हल : हम, इसे इकाई 8 की तरह, अंतर्विरोध द्वारा सिद्ध करेंगे।

इकाई 8 से, स्मरण कीजिए कि $\neq$ 'के तुल्याकारी नहीं है' को व्यक्त करता है।

अतः, मान लीजिए कि $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}$ है। तब, $\mathbb{C}$ और $\mathbb{R}$ में समान बीजीय गुण होने चाहिए।

इस प्रकार, $U(\mathbb{C})$ और $U(\mathbb{R})$ में समान गुण हाने चाहिए। अर्थात् $\mathbb{C}^*$ और $\mathbb{R}^*$ में समान गुण होने चाहिए।

अब, $\mathbb{C}^*$ में एक अवयव कोटि 4 का है। अर्थात् $(i)^4 = 1$ है। परंतु $\mathbb{R}^*$ में कोटि 4 का कोई अवयव नहीं है। अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँच जाते हैं।

इस प्रकार, $\mathbb{C} \neq \mathbb{R}$ है।

***

उदाहरण 14: दर्शाइए कि यदि $R \simeq S$ है तथा R एक तत्समकी वलय है, तो $|U(R)| = |U(S)|$ है, जहाँ R के एककों के समूह को $U(R)$ व्यक्त करता है तथा $|A|$ एक समुच्च्य A की गणन संख्या (अर्थात् गणनीयता) (cardinality) को व्यक्त करता है।

हल : मान लीजिए कि $f : R \to S$ एक तुल्याकारिता है।

सर्वप्रथम, क्योंकि R एक तत्समकी वलय है तथा $R \simeq S$ है, इसलिए S भी एक तत्समकी वलय है।

आप प्रमेय 2 से यह भी जानते हैं कि यदि $u \in U(R)$ है, तो $f(u) \in U(S)$ है।

अतः, $f(U(R)) \subseteq U(S)$ है।

हम यह दर्शाएंगे कि $U(S) \subseteq f(U(R))$ है।

अतः, मान लीजिए कि $s \in U(S)$ है। तब, किसी $t \in R$ के लिए $s = f(t)$ है, क्योंकि f आच्छादक है।

इसी प्रकार, $\exists\, r \in R$ s.t. $s^{-1} = f(r)$ है।

अब, $f(rt) = f(r)f(t) = s^{-1}s = 1 = f(1)$ है, प्रमेय 2 से।

इस प्रकार, $rt = 1$ है, क्योंकि f एकैकी है।

अतः, $r \in U(R)$ है तथा $U(S) \subseteq f(U(R))$ है।

इस प्रकार, $U(S) = f(U(R))$ है।

साथ ही, क्योंकि R पर f एकैकी है, इसलिए यह 1-1 है, जब इसे $U(R)$ तक सीमित रखा जाता है।

इस प्रकार, $U(R)$ तक सीमित f, $U(R)$ से $U(S)$ तक एक एकैकी आच्छादक है।

अतः, $|U(R)| = |U(S)|$ है।

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए। ये आपको तुल्याकारिता से और अधिक परिचित होने में सहायता करेंगे।

E28) निम्नलिखित में से कौन-से फलन वलय तुल्याकारिताएँ हैं? अपने उत्तरों के लिए, कारण दीजिए।

i) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}: f(n)=n$ है,

ii) $f:\mathbb{Z}\to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}: f(n)=\overline{5n}$ है,

iii) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}: f(z)=\overline{z}$ है, जो z का सम्मिश्र संयुग्मी है।

iv) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}: f(z)=(|z|, \text{Arg } z)$ है।

E29) मान लीजिए कि $\phi: R_1\to R_2$ एक वलय तुल्याकारिता है। तब, आप जानते हैं कि $\phi^{-1}: R_1\to R_2$ एक सुपरिभाषित फलन है, क्योंकि ϕ एकैकी आच्छादक है। दर्शाइए कि ϕ^{-1} भी एक तुल्याकारिता है।

$R_1\simeq R_2$ iff $R_2\simeq R_1$.

E30) दर्शाइए कि तुल्याकारिताओं का संयोजन एक तुल्याकारिता होता है।

E31) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए, कारण दीजिए।

i) $\mathbb{Q}\simeq\mathbb{Z}$ है।

ii) $\mathbb{Q}\not\simeq\mathbb{R}$ है।

iii) $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_m)$ है, किन्हीं $n, m\in\mathbb{N}$ के लिए।

iv) $\mathbb{Z}_3\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ है।

v) यदि R और S वलय हैं ताकि समूहों के रूप में $(R, +)\simeq(S, +)$ है, तो R और S तुल्याकारी वलय हैं।

E32) सिद्ध कीजिए कि $\wp(X)\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ है, जहाँ $X=\{1, 2\}$ है।

(**संकेत** : $\wp(X)$ के 4 अवयवों में से प्रत्येक के लिए, $f:\wp(X)\to\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, इस प्रकार परिभाषित कीजिए कि f एक तुल्याकारिता है।)

और अब, आइए कुछ क्षण के लिए इकाई 8 के भाग 8.4 पर वापस आ जाएँ। वहाँ हमने समूहों के लिए समाकारिता की मूलभूत प्रमेय को सिद्ध किया था। इस प्रमेय के अनुसार, किसी समूह G का समाकारिता प्रतिबिंब G के विभाग समूह के तुल्याकारी होता है। हम अब ऐसा ही परिणाम वलयों के लिए सिद्ध करेंगे। यह परिणाम वलयों के लिए **प्रथम तुल्याकारिता प्रमेय (first isomorphism theorem) या वलयों के लिए समाकारिता की मूलभूत प्रमेय** कहलाता है। (संक्षेप में, FTH)।

प्रमेय 11 समकारिता की मूलभूत प्रमेय) : मान लीजिए कि $f:R\to S$ एक वलय समाकारिता है। तब, $R/_{\text{Ker } f}\simeq \text{Im } f$ होता है।

विशिष्ट रूप से, यदि f आच्छादक है, तो $R/_{\text{Ker } f}\simeq S$ होता है।

उपपत्ति : सर्वप्रथम, ध्यान दीजिए कि $R/\text{Ker } f$ एक सुपरिभाषित विभाग वलय है, क्योंकि R की $\text{Ker } f$ एक गुणजावली है। सुविधा की दृष्टि से, मान लीजिए कि $\text{Ker } f = I$ है।

आइए, $\psi(x+I)=f(x)$ द्वारा $\psi: R/I\to S$ परिभाषित कीजिए।

जैसा कि इकाई 8 में FTH की स्थिति में था, हमें यह जाँच करने की आवश्यकता है कि ψ सुपरिभाषित है।

अब, $x+I=y+I\Rightarrow x-y\in I=\text{Ker } f\Rightarrow f(x-y)=0\Rightarrow f(x)=f(y)$ है।

$\Rightarrow \psi(x+I) = \psi(y+I)$ है।

इस प्रकार, ψ सुपरिभाषित है।

अब, आइए देखें कि ψ एक तुल्याकारिता है या नहीं।

ψ एक समाकारिता है : मान लीजिए कि $x, y \in R$ है। तब,

$$\psi((x+I)+(y+I)) = \psi(x+y+I) = f(x+y) = f(x)+f(y)$$

$$= \psi(x+I)+\psi(y+I) \text{ है, तथा}$$

$$\psi((x+I)(y+I)) = \psi(xy+I) = f(xy) = f(x)f(y)$$

$$= \psi(x+I)\psi(y+I) \text{ है।}$$

इस प्रकार, ψ एक वलय समाकारिता है।

$\mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Im}\,f$ है : क्योंकि $\psi(x+I) = f(x) \in \mathrm{Im}\,f \;\forall\; x \in R$ है, इसलिए $\mathrm{Im}\,\psi \subseteq \mathrm{Im}\,f$ है। साथ ही, $\mathrm{Im}\,f$ का कोई भी अवयव, किसी $x \in R$ के लिए, $f(x) = \psi(x+I)$ के रूप का है।

इस प्रकार, $\mathrm{Im}\,f \subseteq \mathrm{Im}\,\psi$ है।

अतः, $\mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Im}\,f$ है।

ψ एकैकी 1-1 है : मान लीजिए कि $x, y \in R$ है ताकि $\psi(x+I) = \psi(y+I)$ है।

तब, $f(x) = f(y)$ है, जिससे $f(x-y) = 0$ है। अर्थात्, $x - y \in \mathrm{Ker}\,f = I$ है।

अर्थात्, $x + I = y + I$ है।

इस प्रकार, ψ एकैकी है।

अतः, हमने दर्शा दिया है कि $R/\mathrm{Ker}\,f \simeq \mathrm{Im}\,f$ है।

इस प्रकार, यदि f आच्छादक है, तो $\mathrm{Im}\,f = S$ और $R/\mathrm{Ker}\,f \simeq S$ है। ■

ध्यान दीजिए कि यह परिणाम बताता है कि f संयोजन $\psi \circ \eta$ है, जहाँ η एक विहित समाकारिता $\eta : R \to (R/\mathrm{Ker}\,f) : \eta(a) = a + \mathrm{Ker}\,f$ है। इसे आरेखीय रूप में आकृति 1 में दर्शाया गया है।

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[r, "\mathbf{f}"] \arrow[dr, "\eta"'] & \mathbf{Im\,f} \hookrightarrow \mathbf{S} \\ & \mathbf{R/Ker\,f} \arrow[u, dashed, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

आकृति 1: f दिया होने पर, $\exists$ एक तुल्याकारिता ψ s.t. $\psi \circ \eta = f$ है।

आइए अब इस मूलभूत प्रमेय के अनुप्रयोग के कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 15: दर्शाइए कि वलय $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ और $\mathbb{Z}_m$ तुल्याकारी हैं, जहाँ $m \in \mathbb{N}$ है।

हल : $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m : p(n) = \overline{n}$ पर विचार कीजिए।

आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि p एक आच्छादक समाकारिता है, तथा $\mathrm{Ker}\,p = \{n \mid \overline{n} = \mathbb{Z}_m \text{ में } \overline{0}\} = m\mathbb{Z}$ है।

अतः, प्रमेय 11 द्वारा $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$ है।

(ध्यान दीजिए कि आपने अनेक बार इस तथ्य का उपयोग किया है कि $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ और $\mathbb{Z}_m$ तुल्याकारी समूह है।)

***

उदाहरण 16: सिद्ध कीजिए कि यदि R_1 और R_2 वलय है, तो $(R_1 \times R_2)/_{R_2} \simeq R_1$ है तथा $(R_1 \times R_2)/_{R_1} \simeq R_2$ है।

हल : $p: R_1 \times R_2 \to R_1 : p(a,b) = a$ परिभाषित कीजिए। तब, E6 से आप जानते हैं कि प्रक्षेप फलन p एक आच्छादक समाकारिता है तथा इसकी अष्टि $\text{Ker } p = \{(0,b) \mid b \in R_2\} = \{0\} \times R_2$ है।

इस प्रकार, प्रमेय 11 द्वारा $(R_1 \times R_2)/_{\{0\} \times R_2} \simeq R_1$ है।

अब, $f: \{0\} \times R_2 \to R_2 : f(0, b) = b$ परिभाषित कीजिए। तब, आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि f एक वलय तुल्याकारिता है।

इस प्रकार, $\text{Ker } p \simeq R_2$ है।

अतः, R_2 को $R_1 \times R_2$ की एक गुणजावली समझा जा सकता है तथा यह Ker p का स्थान ले सकती है।

इसलिए, $(R_1 \times R_2)/_{R_2} \simeq R_1$ है।

इसी प्रकार, आपको सिद्ध करना चाहिए कि $(R_1 \times R_2)/_{R_1} \simeq R_2$ है।

***

उदाहरण 17: वलय $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ पर विचार कीजिए।

मान लीजिए कि $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ है।

i) सिद्ध कीजिए कि R की I एक गुणजावली है।

ii) दर्शाइए कि $(R/I) \simeq \mathbb{R}$ है।

हल : i) क्योंकि $\mathbf{0} \in I$ है, इसलिए $I \neq \emptyset$ है।

आगे, I में $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ के लिए, $A - B = \begin{bmatrix} 0 & a-b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ है।

साथ ही, I में $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तथा R में $C = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}$ के लिए $AC = \begin{bmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ और $CA = \begin{bmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ है।

इस प्रकार, R की I एक गुणजावली है।

ii) $\pi : R \to \mathbb{R} : \pi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = a$ परिभाषित कीजिए। तब, π सुपरिभाषित है (इसका सत्यापन कीजिए!)।

साथ ही, सिद्ध कीजिए कि π एक वलय समाकारिता है तथा π आच्छादक है।

अब, $\text{Ker}\,\pi = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| b \in \mathbb{R}\right\} = I$ है।

अतः, FTH द्वारा $(R/I) \simeq \mathbb{R}$ है।

***

अब, कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E33) उदाहरणों 1 से 9 में से प्रत्येक में समाकारिताओं की स्थिति में समाकारिता की मूलभूत प्रमेय क्या कहती है?

E34) सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{R}[x]\big/_{< x >} \simeq \mathbb{R}$ है।

E35) मान लीजिए कि $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ है। दर्शाइए कि R, इकाई (unity) के साथ, $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ का क्रमविनिमेय उपवलय है।

आगे, $\phi : R \to \mathbb{Z} : \phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = a - b$ परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि ϕ एक वलय समाकारिता है। इस स्थिति में, प्रमेय 11 क्या कहती है?

E36) मान लीजिए कि R एक तत्समकी वलय है। $r \in U(R)$ के लिए, $f_r : R \to R : f_r(s) = r^{-1}sr$ परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या f_r एक समाकारिता है या नहीं। यदि है, तो इस स्थिति में, FTH क्या कहती है? यदि f_r समाकारिता नहीं है, तो R की एक आच्छादक समाकारिता ज्ञात कीजिए।

E37) मान लीजिए कि S एक वलय R का एक उपवलय है, तथा R की I एक गुणजावली है। इकाई 12 में, आप सिद्ध कर चुके हैं कि S की $S \cap I$ एक गुणजावली है। यह सिद्ध करने के लिए कि R/I का $S/(S \cap I)$ एक उपवलय है, FTH का उपयोग कीजिए। क्या यह R/I की गुणजावली भी है? क्यों?

अब E36, जो हमें बताता है, वह यह है कि यदि R एक तत्समकी वलय है, तो प्रत्येक $r \in U(R)$ के लिए, $f_r \in \text{Aut}\,R$ है। क्या ये सभी भिन्न-भिन्न हैं? उदाहरणार्थ, क्या की f_{-1} और f_1 भिन्न-भिन्न स्वीकारिताएँ $\mathbb{Z}$ हैं? इसका उत्तर एक बहुत ही आश्चर्यजनक परिणाम में निहित है, जिसकी अब हम चर्चा करेंगे। हम प्रमेय 11 से यह सिद्ध करने के लिए कि एक वलय R से $\mathbb{Z}$ तक आच्छादक कोई भी वलय समाकारिता उसकी अष्टि द्वारा अद्वितीय रूप से निर्धारित होती है। अर्थात्, हमें R से $\mathbb{Z}$ तक आच्छादक एक ही अष्टि वाली दो भिन्न-भिन्न वलय समाकारिताएँ प्राप्त नहीं हो सकती हैं। (ध्यान दीजिए कि **यह समूह समाकारिताओं के लिए सत्य नहीं है।** वस्तुतः, आप जानते हैं कि I, जो $\mathbb{Z}$ पर तत्समक फलन (प्रतिचित्र) है, तथा $-I$ भिन्न-भिन्न समूह समाकारिताएँ, एक

ही अष्टि {0} वाली, $\mathbb{Z}$ से स्वयं $\mathbb{Z}$ पर ही आच्छादक हैं।) इस कथन को सिद्ध करने के लिए, हमें निम्नलिखित परिणाम की आवश्यकता है।

प्रमेय 12: $\mathbb{Z}$ से स्वयं उसी पर केवल अतुच्छ वलय समाकारिता तत्समक फलन है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ एक अतुच्छ वलय समाकारिता है। मान लीजिए कि n एक धनात्मक पूर्णांक है। तब, $n = 1+1+\cdots+1$ (n बार) है।

अतः, $f(n) = f(1)+f(1)+\cdots+f(1)$ (n बार) $= nf(1)$ है।

दूसरी ओर, यदि n एक ऋणात्मक पूर्णांक है, तो $(-n)$ एक धनात्मक पूर्णांक है। अतः, $f(-n) = (-n)f(1)$ है।

अर्थात्, $-f(n) = -nf(1)$ प्रमेय 1 द्वारा।

इस प्रकार, इस स्थिति में भी $f(n) = nf(1)$ है।

साथ ही, $f(0) = 0 = 0f(1)$ है, पुनः प्रमेय 1 द्वारा।

इस प्रकार, $f(n) = nf(1)\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$ है। …(3)

आप यह भी जानते हैं कि $f(1) = 1$ है, क्योंकि f एक अतुच्छ वलय समाकारिता है।

अतः, (3) से आप देख सकते हैं कि

$f(n) = n\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$ है। अर्थात्, $f = I$ है। ■

इस प्रमेय की एक महत्त्वपूर्ण उपप्रमेय है।

उपप्रमेय 2: मान लीजिए कि $\mathbb{Z}$ के R एक वलय तुल्याकारी है। यदि R से $\mathbb{Z}$ पर आच्छादक f और g दो तुल्याकारिताएँ हैं, तो $f = g$ होता है।

उपपत्ति : $\mathbb{Z}$ से स्वयं उसी पर आच्छादित संयोजन $f\circ g^{-1}$ एक तुल्याकारिता है।

अतः, प्रमेय 12 द्वारा, है $f\circ g^{-1} = \mathbf{0}$ या $f\circ g^{-1} = I$ है।

यदि $f\circ g^{-1} = \mathbf{0}$ है, तो $(f\circ g^{-1})(1) = 0 \Rightarrow f(g^{-1}(1)) = 0 \Rightarrow f(1) = \mathbf{0}$ है, जो एक अंतर्विरोध है, क्योंकि f अतुच्छ है।

इस प्रकार, $f\circ g^{-1} = I$ है।

अतः, $f = g$ है। ■

अब, हम उस वास्तव में आश्चर्यजनक परिणाम को सिद्ध करने की स्थितिमें है, जिसके बारे में हमने पहले बताया था।

प्रमेय 13: मान लीजिए कि R एक वलय है तथा R से $\mathbb{Z}$ पर आच्छादक f और g समाकारिताएँ हैं ताकि $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ है। तब, $f = g$ होता है।

उपपत्ति : प्रमेय 11 द्वारा, हमें तुल्याकारिताएँ $\psi_f : R/_{\text{Ker } f} \to \mathbb{Z}$ तथा $\psi_g : R/_{\text{Ker } g} \to \mathbb{Z}$ प्राप्त होती हैं।

क्योंकि $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ है, इसलिए ψ_f और ψ_g एक ही वलय से $\mathbb{Z}$ पर आच्छादक तुल्याकारिताएँ हैं। इस प्रकार, उपप्रमेय 2 द्वारा $\psi_f = \psi_g$ है।

साथ ही, विहित प्रतिचित्र $\eta_f : R \to R/\text{Ker } f$ और $\eta_g : R \to R/\text{Ker } g$ समान हैं, क्योंकि $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ है।

$\therefore f = \psi_f \circ \eta_f$, प्रमेय 11 के उपयोग से।

$= \psi_g \circ \eta_g$

$= g$ है। ■

अब हम आपको प्रमेय 11 के कुछ महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोगों को सिद्ध करने के अवसर प्रदान करेंगे। ये इकाई 8 की प्रमेय 12 और प्रमेय 14 के अनुरूप हैं।

E38) **(द्वितीय तुल्यकारिता प्रमेय)** : मान लीजिए कि एक वलय R का S एक उपवलय है तथा I एक गुणजावली है। दर्शाइए कि $(S+I)/I \simeq S/(S \cap I)$ है।

E39) **(तृतीय तुल्यकारिता प्रमेय)** : मान लीजिए एक वलय R की I और J गुणजावलियाँ हैं ताकि $J \subseteq I$ है। दर्शाइए कि $(R/J)/(I/J) \simeq R/I$ है।

E40) सिद्ध कीजिए कि

i) $\mathbb{Z}_{15}/5\mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_5$ है।

ii) $\mathbb{Z}_m/\overline{n}\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_n$ है, जहाँ $m, n \in \mathbb{N}$ है और $n|m$ है।

E41) $\mathbb{Q}$ की कितनी अतुच्छ वलय स्वाकारिताएँ हैं, और क्यों?

हम यहाँ वलय समाकारिताओं और तुल्याकारिताओं की अपनी चर्चा को विराम देंगे तथा संक्षिप्त रूप से स्मरण करेंगे कि इस इकाई में हमने क्या किया है। निस्संदेह, हमने इन फलनों के अध्ययन को समाप्त कर लिया है। हम अगले खंड की इकाइयों में इनका बार-बार उपयोग करेंगे।

13.5 सारांश

इस इकाई में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं पर अध्ययन किया है :

1. एक वलय समाकारिता की परिभाषा, तथा उनके उदाहरणों सहित उसकी अष्टि और प्रतिबिंब।

2. किसी समाकारिता के अंतर्गत एक उपवलय का अनुलोम या प्रतिलोम प्रतिबिंब एक उपवलय होता है।

3. यदि $f : R \to S$ एक वलय समाकारिता है, तो

   i) R की $\text{Ker } f$ एक गुणजावली होती है।

   ii) S का $\text{Im } f$ एक उपवलय है।

   iii) S की प्रत्येक गुणजावली I के लिए R की $f^{-1}(I)$ एक गुणजावली है।

   iv) यदि f आच्छादक है, तो S की $f(I)$ एक गुणजावली है।

4. मान लीजिए कि $f: R \to S$ एक आच्छादक वलय समाकारिता है। तब, $\text{Ker } f$ को अंतर्विष्ट करने वाली R की गुणजावलियों के समुच्च्य तथा S की गुणजावलियों के समुच्च्य के बीच ए $I \mapsto f(I)$ क एकैकी संगति परिभाषित करता है।

5. एक समाकारिता एकैकी होती है iff उसकी अष्टि $\{0\}$ है।

6. यदि I किसी वलय R की गुणजावली है, तो एक वलय S तथा एक आच्छादक वलय समाकारिता $f: R \to S$ का अस्तित्व है, जिसकी अष्टि I है।

7. समाकारिताओं का संयोजन एक समाकारिता होता है।

8. एक वलय तुल्याकारिता की परिभाषा और उदाहरण।

9. वलयों के लिए समाकारिता की मूलभूत प्रमेय की उपपत्ति और अनुप्रयोग, जो यह कहती है कि यदि $f: R \to S$ एक वलय समाकारिता है, तो $R/_{\text{Ker } f} \simeq \text{Im } f$ है।

10. **द्वितीय तुल्याकारिता प्रमेय** : मान लीजिए कि किसी वलय R का S एक उपवलय है तथा I एक गुणजावली है। तब, $(S+I)/_I \simeq S/_{(S \cap I)}$ होता है।

11. **तृतीय तुल्याकारिता प्रमेय** : मान I और J किसी वलय R की गुणजावलियाँ हैं ताकि $J \subseteq I$ है। तब $(R/J)/_{(I/J)} \simeq R/_I$ होता है।

12. $\mathbb{Z}$ से $\mathbb{Z}$ तक केवल अतुच्छ वलय समाकारिता तत्समक स्वाकारिता है।

13. मान लीजिए कि R एक वलय है तथा R से $\mathbb{Z}$ पर आच्छादक f और g समाकारिताएँ हैं ताकि $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ है। तब, $f = g$ होता है।

13.6 हल और उत्तर

E1) $x, y \in S$ के लिए,

$i(x+y) = x+y = i(x)+i(y)$ है, तथा

$i(xy) = xy = i(x)i(y)$ है।

$\therefore i$ एक समाकारिता है।

$\text{Ker } i = \{x \in S \mid i(x) = 0\} = \{0\}$ है।

$\text{Im } i = \{i(x) \mid x \in S\} = S$ है।

E2) i) सर्वप्रथम, यदि $\mathbb{Z}[x]$ में $f(x) = g(x)$ है, तो $\mathbb{Z}$ में $f(1) = g(1)$ है। अतः, ϕ सुपरिभाषित है।

आगे, मान लीजिए कि $\mathbb{Z}[x]$ में $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, तथा $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ है।

तब, $\phi(f(x)+g(x))$

$= \phi\left(\sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i\right)$, यह परिकल्पना करते हुए कि $m \geq n$ है तथा $b_{n+1} = 0 = b_{n+2} = \cdots = b_m$ है।

$= \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i)$, $x = 1$ रखने पर।

$= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right)$, क्योंकि $b_j = 0$ है, $j \geq n$ के लिए।

$= \phi(f(x)) + \phi(g(x))$ है।

यदि $m \leq n$ है, तो आप इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि $\phi(f(x)+g(x)) = \phi(f(x)) + \phi(g(x))$ है।

साथ ही, $\phi(f(x)\cdot g(x)) = \phi\left(\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j x^{i+j}\right)\right)$

$= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)$, $x = 1$ रखने पर।

$= f(1)\cdot g(1)$

$= \phi(f(x))\cdot\phi(g(x))$ है।

इस प्रकार, ϕ एक समाकारिता है।

$\operatorname{Ker}\phi = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(1) = 0\}$ है।

कैलकुलस से, आप जानते हैं कि यदि $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ है, तो $f(a) = 0$ है iff बहुपद $f(x)$ का a एक मूल है, जहाँ $a \in \mathbb{Z}$ है।

इस प्रकार, $\operatorname{Ker}\phi = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f$ का एक मूल 1 है$\}$ है।

$\operatorname{Im}\phi = \mathbb{Z}$ है, क्योंकि किसी $m \in \mathbb{Z}$ के लिए, $f(x) = x - 1 + m \in \mathbb{Z}[x]$ है s.t. $f(1) = m$ है।

ii) जैसा (i) में था, आपको सिद्ध करना चाहिए कि ϕ_z एक समाकारिता है।

आगे, $\operatorname{Ker}\phi_z = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(z) = 0\}$ है।

इस प्रकार, $\operatorname{Ker}\phi_z$ उन सभी सम्मिश्र बहुपदों का समुच्चय है, जिनका एक मूल z है।

$\operatorname{Im}\phi_z = \{f(z) \in \mathbb{C} \mid f(x) \in \mathbb{C}[x]\} = \mathbb{C}$ है, क्योंकि किसी

$w \in \mathbb{C}, x + w - z \in \mathbb{C}[x]$ s.t. $\phi_z(x + w - z) = w$ है।

E3) मान लीजिए कि $\alpha = 1 + i \in \mathbb{H}$ तथा $\beta = 1 + 2i + j \in \mathbb{H}$ है। तब, $\alpha\beta = (1+i)(1+2i+j) = -1 + 3i + j + k$ है। (i, j, k द्वारा संतुष्ट किए जाने संबंधों का स्मरण कीजिए!)

अतः, $\phi(\alpha\beta) = -1$ है।

परंतु, $\phi(\alpha)\phi(\beta) = 1\cdot 1 = 1$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{R}$ में $\phi(\alpha\beta) \neq \phi(\alpha)\phi(\beta)$ है।

अतः, ϕ एक समाकारिता नहीं है।

E4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ लीजिए। तब,

$\psi(A+B) = \psi\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right) = 15 - 9 = 6$ है।

साथ ही, $\psi(A) + \psi(B) = -2 + 2 = 0$ है।

इस प्रकार, ψ एक समाकारिता नहीं है।

E5) सर्वप्रथम, आपको इसकी जाँच करने की आवष्यकता है कि f सुपरिभाषित है।

अब, यदि $\mathbb{Z}_3$ में $\bar{n} = \bar{m}$ है, तो $3|(n-m)$ है। अतः, $12|4(n-m)$ है।

इसलिए, $6|4(n-m)$ है। अर्थात्, $\mathbb{Z}_6$ में $\overline{4n} = \overline{4m}$ है।

अतः, f सुपरिभाषित है।

आगे, $\mathbb{Z}_3$ में $\bar{n}, \bar{m}$ के लिए,

$$\begin{aligned} f(\bar{n} + \bar{m}) = f(\overline{n+m}) &= 4(n+m)(\text{mod}\, 6) \\ &= 4n(\text{mod}\, 6) + 4m(\text{mod}\, 6) \\ &= f(\bar{n}) + f(\bar{m}) \text{ है।} \end{aligned}$$

साथ ही, $f(\bar{n} \cdot \bar{m}) = f(\overline{nm}) = 4nm(\text{mod}\, 6)$

$= 16nm(\text{mod}\, 6)$ है, क्योंकि $\mathbb{Z}_6$ है। $\bar{4} = \overline{16}$ है।

$= 4n(\text{mod}\, 6) \cdot 4m(\text{mod}\, 6)$

$= f(\bar{n}) \cdot f(\bar{m})$ है।

इस प्रकार, f एक वलय समाकारिता है।

E6) सर्वप्रथम, आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि p सुपरिभाषित है।

आगे, किन्हीं $(a, b), (c, d) \in A \times B$ के लिए,

$p((a, b) + (c, d)) = p((a+c, b+d)) = a + c = p((a, b)) + p((c, d))$ है, तथा

$p((a, b)(c, d)) = p((ac, bd)) = ac = p((a, b))p((c, d))$ है।

अतः, p एक वलय समाकारिता है।

$\text{Ker } p = \{(a,b) \in A \times B \,|\, a = 0\} = \{0\} \times B$ है।

$\text{Im } p = \{p(a,b) \,|\, (a,b) \in A \times B\} = \{a \,|\, (a,b) \in A \times B\} = A$ है।

यदि B एक तुच्छ वलय नहीं है, तो p एकैकी नहीं है। यह इसलिए कि

$\exists\, b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ जिससे $(0, b_1) \neq (0, b_2)$ है।

परंतु, $p((0, b_1)) = 0 = p((0, b_2))$ है।

अतः $B \neq \{0\}$ है, तो p एक तुल्याकारिता नहीं है।

E7) सर्वप्रथम, f सुपरिभाषित है, क्योंकि
$a - b\sqrt{2} = a + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]\ \forall\ a, b \in \mathbb{Z}$ है।

आगे, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$$f((a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})) = f(a+c+\sqrt{2}(b+d))$$

$$= (a+c)-(b+d)\sqrt{2} = (a-b\sqrt{2})+(c-d\sqrt{2})$$

$= f(a+b\sqrt{2})+f(c+d\sqrt{2})$ है।

साथ ही, $f((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})) = f(ac+2bd+\sqrt{2}(ad+bc))$

$$= ac+2bd-(ad+bc)\sqrt{2} = (a-\sqrt{2}b)(c-\sqrt{2}d)$$

$= f(a+b\sqrt{2})\cdot f(c+d\sqrt{2})$ है।

इस प्रकार, f एक अंतराकारिता है।

आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि g सुपरिभाषित है। परंतु,

$g[(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})] = g(-2) = -2$ है, तथा

$g(1+\sqrt{3})\cdot g(1-\sqrt{3}) = (1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7}) = -6$ है। इस प्रकार, g एक समाकारिता नहीं है।

E8) $3n, 3m \in \mathbb{Z}$ के लिए, $f(3n\cdot 3m) = f(9nm) = 5(3nm) \neq 5n\cdot 5m$ है। अतः, f एक समाकारिता नहीं है।

E9) सर्वप्रथम, आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि ϕ सुपरिभाषित है या नहीं। इसके बाद, सिद्ध कीजिए कि यह एक समाकरिता, 1-1 और आच्छादक है।

यहाँ ध्यान दीजिए कि

$$\phi((a+ib)(c+id)) = \phi[(ac-bd)+i(ad+bc)]$$

$$= \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$$= \phi(a+ib)\cdot\phi(c+id)$$

$\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ है।

E10) $f, g \in C[0,1]$ के लिए,

$$\phi(f+g) = ((f+g)(0), (f+g)(1))$$

$$= (f(0)+g(0), f(1)+g(1))$$

$$= (f(0), f(1)) + (g(0), g(1))$$

$= \phi(f)+\phi(g)$ है, तथा

$$\phi(fg) = (fg(0), fg(1)) = (f(0)\cdot g(0), f(1)\cdot g(1))$$

$$= (f(0, f(1))(g(0), g(1))$$

$$= \phi(f)\phi(g)$$

$\therefore \phi$ एक समाकारिता है।

ϕ एकैकी नहीं है, क्योंकि, उदाहरणार्थ, $f \neq \mathbf{0}$ है परंतु $\phi(f) = \phi(\mathbf{0})$ है, जहाँ $\mathbb{C}[0,1]$ में, $f:[0,1] \to \mathbb{R} : f(x) = x(x-1)$ है।

इस प्रकार, ϕ एक तुल्याकारिता नहीं है।

E11) हम इकाई 11 की प्रमेय 1 का उपयोग करेंगे।

सर्वप्रथम, $S \neq \emptyset \Rightarrow f(S) \neq \emptyset$ है।

आगे, मान लीजिए कि $a', b' \in f(S)$ है। तब $\exists\, a, b \in S$ है ताकि $f(a) = a'$ और $f(b) = b'$ है।

अब, $a' - b' = f(a) - f(b) = f(a-b) \in f(S)$ है, क्योंकि $a - b \in S$ है, तथा $a'b' = f(a)f(b) = f(ab) \in f(S)$ है, क्योंकि $ab \in S$ है।

$\therefore R_2$ का $f(S)$ एक उपवलय है।

E12) तुच्छ समाकारिता $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f(x) = 0$ पर विचार कीजिए। तब, $\mathcal{A}$ में $2\mathbb{Z} \neq 3\mathbb{Z}$ है। परंतु, $\mathcal{B}$ में $f(2\mathbb{Z}) = \{\mathbf{0}\} = f(3\mathbb{Z})$ है। इस प्रकार, ϕ एकैकी नहीं है तथा इसीलिए, एकैकी आच्छादक नहीं है।

E13) क्योंकि R_2 का I एक उपवलय है, इसलिए प्रमेय 3 द्वारा, R_1 का $f^{-1}(I)$ एक उपवलय है।

अब, मान लीजिए कि $a \in f^{-1}(I)$ और $r \in R_1$ है।

हम यह दर्शाना चाहते हैं कि $ar \in f^{-1}(I)$ और $ra \in f^{-1}(I)$ है।

क्योंकि $a \in f^{-1}(I)$ है, इसलिए $f(a) \in I$ है।

$\therefore f(a)f(r) \in I$ तथा $f(r)f(a) \in I$ है। अर्थात् $f(ar) \in I$ और $f(ra) \in I$ है। (ध्यान दीजिए कि R_2 का क्रमविनिमेय होना आवश्यक नहीं है।)

$\therefore ar \in f^{-1}(I)$ और $ra \in f^{-1}(I)$ है।

इस प्रकार, R_1 की $f^{-1}(I)$ एक गुणजावली है।

साथ ही, यदि $x \in \text{Ker}\, f$ है, तो $f(x) = 0 \in I$ है।

$\therefore x \in f^{-1}(I)$ है।

$\therefore \text{Ker}\, f \subseteq f^{-1}(I)$ है।

E14) मान लीजिए कि $x \in f(f^{-1}(J))$ है। तब, $x = f(y)$ है, जहाँ, $y \in f^{-1}(J)$ है। अर्थात्, $f(y) \in J$ है, अर्थात् $x \in J$ है।

इस प्रकार, $f(f^{-1}(J)) \subseteq J$ है।

अब, मान लीजिए कि $x \in J$ है। क्योंकि f आच्छदक है, इसलिए $\exists\, y \in R$ ताकि $f(y) = x$ है।

तब, $y \in f^{-1}(x) \subseteq f^{-1}(J)$ है। (ध्यान दीजिए कि $f^{-1}(x)$ एक समुच्च्य है, एक अवयव नहीं)

$\therefore x = f(y) \in f(f^{-1}(J))$ है।

इस प्रकार, $J \subseteq f(f^{-1}(J))$ है।

अतः, परिणाम सिद्ध हो जाता है।

E15) यहाँ, $f(I) = \bar{2}\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$ है, क्योंकि $(2, 5) = 1$ है।

अतः, $f^{-1}(f(I)) = \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \text{Ker } f$ है, क्योंकि $\text{Ker } f \subseteq \mathbb{Z}$ है।

उदाहरण 3 में, R की किसी गुणजावली I के लिए, $f(I) = \{0\}$ है, जहाँ $f = \mathbf{0}$ है। अतः, $f^{-1}(f(I)) = R = R + \text{Ker } f$ है, क्योंकि $\text{Ker } f = R$ है।

E16) इकाई 12 से आप जानते हैं कि $\mathbb{R}$ की गुणजावलियाँ केवल $\{0\}$ और $\mathbb{R}$ हैं। यहाँ, $\text{Ker } \phi = \{f \in C[0, 1] \text{ s.t. } f(1/2) = 0\}$ है।

अतः, यदि $C[0, 1]$ की I एक गुणजावली है s.t. $\text{Ker } \phi \subseteq I$ है, तो प्रमेय 6 द्वारा, $\phi(I) = \{0\}$ या $\phi(I) = \mathbb{R}$ है।

परंतु, यदि $\phi(I) = \{0\}$ है, तो $I \subseteq \text{Ker } \phi$ है। अर्थात्, $I = \text{Ker } \phi$ है।

अतः, यदि $I \neq \text{Ker } \phi$ है, तो प्रमेय 6 द्वारा $\phi(I) = \mathbb{R}$ है।

E17) i) उदाहरणार्थ, $(0, 1) \notin \text{Im } f$ है। अतः, f आच्छादक है।

ii) $\mathbb{Z}$ की किसी गुणजावली I के लिए, किसी $I = n\mathbb{Z}$ के लिए $n \in \mathbb{Z}$ है। अतः, $f(I) = \{(nm, nm) | m \in \mathbb{Z}\}$ है, जो जैसा कि इकाई 12 में आप देख चुके हैं $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ की एक गुणजावली नहीं है। इस प्रकार, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ की गुणजावली $\mathbb{Z} \times \{0\}$, $\mathbb{Z}$ की किसी गुणजावली I के लिए, $f(I)$ के रूप की नहीं है। वस्तुतः, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ की कोई भी गुणजावली $f(I)$ के रूप की नहीं हो सकती है।

E18) आपको सिद्ध करना चाहिए कि $g(m + n) = g(m) + g(n)$ है, तथा $g(mn) = g(m)g(n)$ है।

अतः, g एक समाकारिता है।

परंतु, g आच्छादक नहीं है। उदाहरणार्थ, $(1, 2) \notin \text{Im } g$ है।

अब, मान लीजिए कि $\mathbb{Z}$ की I गुणजावली है। अतः, किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $I = n\mathbb{Z}$ है।

तब, इकाई 12 की प्रमेय 5 द्वारा $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ की $g(I) = n\mathbb{Z} \times \{0\}$ एक गुणजावली है।

यह प्रमेय 4 के प्रतिकूल नहीं है, क्योंकि प्रमेय 4 कहती है कि यदि f आच्छादक है, तो $f(I)$ को सहप्रांत की गुणजावली होना चाहिए। वह यह नहीं कहती कि यदि f आच्छादक नहीं है, तो $f(I)$ एक गुणजावली नहीं हो सकती।

E19) उदाहरण 10 की तरह, हम $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n : f(m) = \overline{m}$ पर विचार कीजिए। क्योंकि f एक आच्छादक समाकारिता है, इसलिए $\mathbb{Z}_n$ की गुणजावलियाँ $f(m\mathbb{Z})$ के रूप की हैं, जहाँ $m | n$ है।

इस प्रकार, $\mathbb{Z}_n$ की गुणजावलियाँ $\overline{m}\mathbb{Z}_n$ हैं, जहाँ $m | n$ है।

अतः, $\mathbb{Z}_n$ की प्रत्येक गुणजावली एक मुख्य गुणजावली है।

E20) उदाहरण 1 में समाकारिताएँ है, उदाहरण 3 (और 4) में I है, तथा उदाहरण 8 की अष्टि $\{0\}$ है। इस प्रकार, ये 1-1 हैं।

E21) E1 में समाकारिता है, निश्चित रूप से / E5 में, $\text{Ker } f = \{\overline{n} \in \mathbb{Z}_3 | 4n | 6\} = \{\overline{0}\}$ है।

अतः, f एकैकी है।

E7 में, $\text{Ker } f = \{a + b\sqrt{2} \mid a - b\sqrt{2} = 0,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$

$= \{a + b\sqrt{2} \mid a = 0,\ b = 0\}$

$= \{0\}$ है।

E22) i) सर्वप्रथम, यदि $\mathbb{R}$ में $x = y$ है, तो $\begin{bmatrix} x & 0 \\ -x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ -y & 0 \end{bmatrix}$ है। अतः, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ में $\phi(x) = \phi(y)$ है।

इस प्रकार, ϕ सुपरिभाषित है।

आगे, आप इसकी जाँच कीजिए कि $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए,

$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ और $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ है।

अतः, ϕ एक वलय समाकारिता है।

$\text{Ker } \phi = \{x \mid \phi(x) = \mathbf{0}\} = \{0\}$ है। अतः, ϕ एकैकी है।

$\text{Im } \phi = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ -x & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \neq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ है, क्योंकि, उदाहरणार्थ,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin \text{Im } \phi$ है।

इसलिए, ϕ आच्छादक नहीं है।

इस प्रकार, ϕ एक तुल्याकारिता नहीं है।

ii) आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि ϕ सुपरिभाषित है तथा $\phi(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2) = \phi(\bar{n}_1) \cdot \phi(\bar{n}_2)\ \forall\ \bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \mathbb{Z}_3$ है।

अब, $\phi(\bar{n}_1 + \bar{n}_2) = \phi(\overline{n_1 + n_2}) = (\overline{n_1 + n_2})^3 = (\bar{n}_1 + \bar{n}_2)^3$

$= \bar{n}_1^3 + \bar{n}_2^3$ है। क्योंकि $\bar{3} = \bar{0}$ है।

$= \phi(\bar{n}_1) + \phi(\bar{n}_2)\ \forall\ \bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \mathbb{Z}_3$ है।

इस प्रकार, ϕ एक वलय समाकारिता है।

$\text{Ker } \phi = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}_3 \mid \bar{n}^3 = \bar{0}\} = \{\bar{0}\}$ है। अतः, ϕ एकैकी है।

$\text{Im } \phi = \{\bar{n}^3 \mid \bar{n} \in \mathbb{Z}_3\} = \mathbb{Z}_3$ है। अतः, ϕ आच्छादक है।

इस प्रकार, ϕ एक तुल्याकारिता है।

E23) नहीं। उदाहरणार्थ, $\mathbb{Q}$ के उपवलय $\mathbb{Z}$ को लीजिए। क्योंकि $\mathbb{Q}$ की $\mathbb{Z}$ एक गुणजावली नहीं है, इसलिए यह $\mathbb{Q}$ से एक अन्य वलय तक की किसी समाकारिता की अष्टि, प्रमेय 7 के कारण, नहीं हो सकती।

E24) प्रमेय 9 के f पर विचार कीजिए। क्योंकि f आच्छादक है, इसलिए प्रमेय 4 द्वारा, I को अंतर्विष्ट करने वाली R की किसी गुणजावली J के लिए, R/I की $f(J) = J/I$ एक गुणजावली है।

विलोमतः, R/I की A एक गुणजावली है। तब, $\text{Ker } f = I$ को अंतर्विष्ट करने वाली R की $f^{-1}(A)$ एक गुणजावली है।

अतः, प्रमेय 6 द्वारा, R/I की $f(f^{-1}(A)) = (f^{-1}(A)/I)$ एक गुणजावली है।

साथ, ही, E14 से, आप जानते हैं कि $A = f(f^{-1}(A))$ है।

इस प्रकार, $A = (f^{-1}(A)/I) = J/I$ है, जहाँ $J = f^{-1}(A)$ है।

E25) किन्हीं $x, y \in R_1$ के लिए,

$g \circ f(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y))$ है, क्योंकि f एक समाकारिता है।

$= g(f(x)) + g(f(y))$ है, क्योंकि g एक समाकारिता है।

$= g \circ f(x) + g \circ f(y)$ है, तथा

$g \circ f(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y))$ है, क्योंकि f एक समाकारिता है।

$= g(f(x)) \cdot g(f(y))$ है, क्योंकि g एक समाकारिता है।

$= g \circ f(x) \cdot g \circ f(y)$ है,

इस प्रकार, $g \circ f$ एक समाकारिता है।

E26) i) $x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g \circ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ है, $g \circ f$ एकैकी है।

$\therefore \text{Ker } f = \{0\}$ है।

$\therefore f$ एकैकी (1-1) है।

ii) मान लीजिए कि $x \in R_3$ है। क्योंकि $g \circ f$ आच्छादक है, इसलिए $\exists\, y \in R_1$ ताकि $g \circ f(y) = x$ है। अर्थात् $g(f(y)) = x$ है, जहाँ $f(y) \in R_2$ है। इस प्रकार, g आच्छादक है।

iii) उदाहरणार्थ, $\phi \circ i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ पर विचार कीजिए, जहाँ $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[x] : i(m) = m$ है तथा E2(i) में ϕ प्रतिचित्र है।

तब, $\phi \circ i = I : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ है, जो 1-1 है।

परंतु, ϕ एकैकी (1-1) नहीं है, क्योंकि $\text{Ker } \phi \neq \{0\}$ है।

iv) आप उपरोक्त (iii) के उदाहरण को इसे दर्शाने के लिए उपयोग कर सकते हैं।

E27) h प्रक्षेण प्रतिचित्र (फलन) $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : p(n, m) = m$ तथा प्रतिचित्र $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_r : f(m) = \overline{m}$ का संयोजन है।

जैसा कि आप क्रमशः E6 और उदाहरण 5 से जानते हैं, p और f दोनों वलय समाकारिताएँ है।

$\therefore h$ एक समाकारिता है।

E28) i) f आच्छादक नहीं है, क्योंकि उदाहरणार्थ, $\frac{1}{2} \notin \text{Im } f$ है। अतः, f एक तुल्याकारिता नहीं है।

ii) f एक तुल्याकारिता नहीं है, क्योंकि $\text{Ker } f = 10\mathbb{Z} \neq \{0\}$ है।

iii) कैलकुलस के खंड 1 से, आप जानते हैं कि $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ है, तथा $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ है। इसका उपयोग यह दर्शाने में कीजिए कि f एक वलय समाकारिता है।

आगे, किसी $a + ib \in \mathbb{C}$ के लिए, $f(a - ib) = a + ib$ है। अतः, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{C}$ है।

साथ ही, $\mathrm{Ker}\, f = \{a + ib \mid a - ib = 0\} = \{0\}$ है।

इस प्रकार, f एक तुल्याकारिता है।

iv) ध्यान दीजिए कि $|z| \geq 0$ है। इसका उपयोग यह दर्शाने में कीजिए कि f आच्छादक नहीं है। अतः, f एक तुल्याकारिता नहीं हो सकती है।

E29) मान लीजिए कि $x, y \in R_2$ तथा $\phi^{-1}(x) = r$ और $\phi^{-1}(y) = s$ है। तब, $x = \phi(r)$ और $y = \phi(s)$ है।

अतः, $x + y = \phi(r) + \phi(s) = \phi(r + s)$ है तथा $xy = \phi(rs)$ है।

$\therefore \phi^{-1}(x + y) = r + s = \phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)$ है, तथा

$\phi^{-1}(xy) = rs = \phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y)$ है।

इस प्रकार, ϕ^{-1} एक वलय समाकारिता है।

आप यह पहले से ही जानते हैं कि यह एकैकी आच्छादक है।

इस प्रकार, ϕ^{-1} एक तुल्याकारिता है।

E30) मान लीजिए कि $f : R_1 \to R_2$ तथा $g : R_2 \to R_3$ वलय तुल्याकारिताएँ हैं। प्रमेय 10 से आप जानते हैं कि $g \circ f$ एक समाकारिता है। शेष भाग के लिए, आप वही प्रक्रिया अपनाइए, जो आपने इकाई 8 के E19 को हल करने के लिए अपनाई थी।

E31) i) क्योंकि $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$ तथा $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ है, इसलिए $\mathbb{Q} \not\simeq \mathbb{Z}$ है (उदाहरण 14 द्वारा)। इस प्रकार, यह असत्य है।

ii) यह क्यों सत्य है, इसके लिए इकाई 8 का उदाहरण 20 देखिये।

iii) यहाँ $\mathbb{Z}$ अपरिमित है, परंतु $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_m)$ परिमित है। इस प्रकार, यह असत्य है।

iv) क्योंकि $\mathbb{Z}_3$ परिमित है और $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ अपरिमित है, इसलिए यह असत्य है।

v) असत्य। $\mathbb{Z}$ और $2\mathbb{Z}$ पर विचार कीजिए। आप जानते हैं कि $\mathbb{Z}$ और $\mathbb{Z}$ तुल्याकारी समूह हैं। परंतु $2\mathbb{Z}$ एक तत्समकी वलय है, जबकि $2\mathbb{Z}$ का तत्समक नहीं है। अतः, ये तुल्याकारी वलय नहीं है।

E32) $f(\emptyset) = (0, 0), f(\{1\}) = (1, 0), f(\{2\}) = (0, 1), f(X) = (1, 1)$ द्वारा $f : \wp(X) \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ परिभाषित कीजिए।

अब, जैसा कि आप देख सकते हैं, f एक सुपरिभाषित एकैकी आच्छादक है।

आपको इसकी स्थिति अनुसार, जाँच करनी चाहिए कि $A, B \in \wp(X)$ के लिए, $f(A \Delta B) = f(A) + f(B)$ है तथा $f(A \cap B) = f(A) \cdot f(B)$ है।

इस प्रकार, $\wp(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ है। उदाहरण है।

E33) उदाहरण 1 : $\mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$ है।

उदाहरण 2: $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R})/\mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \simeq \{\mathbf{0}\}$ है।

उदाहरण 3 और 4: किसी वलय R के लिए है $R/\{0\} \simeq R$ तथा $(R/R) \simeq \{0\}$ हैं।

उदाहरण 5: $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_s, \forall\, s \in \mathbb{N}$ है।

उदाहरण 6: $\mathbb{Z}_6/\{\overline{0}, \overline{3}\} \simeq \mathbb{Z}_3$ है। अर्थात् $(\mathbb{Z}_6/\overline{3}\mathbb{Z}_6) \simeq \mathbb{Z}_3$ है।

उदाहरण 7: $\text{Ker}\,\phi = \{f \in C[0,1] \mid f(1/2) = 0\}$ है, तथा $\text{Im}\,\phi = \mathbb{R}$ है।

अतः $C[0,1]/\text{Ker}\,\phi \simeq \mathbb{R}$ है।

उदाहरण 8: उदाहरण 1 के तथ्य, अर्थात् $\mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$ का तथा प्रमेय 10 का उपयोग करते हुए, $\mathbb{Z} \simeq \{nI \mid n \in \mathbb{Z}\}$ है।

यहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

उदाहरण 9: $\wp(X)/\wp(Y^c) \simeq \wp(Y)$ है।

E34) $f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R} : f(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0$ है।

तब, f मूल्यांकन प्रतिचित्र ϕ_0 है। E2 की तरह, आपको यह सिद्ध करना चाहिए कि f एक समाकारिता है, $\text{Ker}\, f = < x >$ है तथा $\text{Im}\, f = \mathbb{R}$ है।

अतः, FTH द्वारा, $\mathbb{R}[x]/< x > \simeq \mathbb{R}$ है।

E35) आपको यह दर्शाना चाहिए कि $R \neq \emptyset$ है तथा यह कि $A - B \in R$ है और $AB \in R\ \forall\, A, B \in R$ है।

साथ ही, सिद्ध कीजिए कि $AB = BA\ \forall\, A, B \in R$ है।

ध्यान दीजिए कि $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R$ है।

आगे, सिद्ध कीजिए कि ϕ एक वलय समाकारिता है।

इसके बाद, दर्शाइए कि $\text{Ker}\,\phi = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} r \,\middle|\, r \in \mathbb{Z} \right\}$ है।

ध्यान दीजिए कि $\text{Im}\,\phi = \mathbb{Z}$ है, क्योंकि किसी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए, $n = \phi\left(\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}\right)$ है।

अतः, FTH हमें बताती है कि $R/\text{Ker}\,\phi \simeq \mathbb{Z}$ है।

E36) क्योंकि $r \in U(R)$ है, इसलिए f_r सुपरिभाषित है।

अब, $x, y \in R$ के लिए,

$f_r(x+y) = r^{-1}(x+y)r = r^{-1}xr + r^{-1}yr$

$= f_r(x) + f_r(y)$ है, तथा

$f_r(xy) = r^{-1}xyr = (r^{-1}xr)(r^{-1}yr)$

$= f_r(x) \cdot f_r(y)$ है।

इस प्रकार, f_r एक समाकारिता है।

आगे, $\text{Ker } f_r = \{x \in R \mid r^{-1}xr = 0\}$ है।

क्योंकि r एक एकक है, इसलिए $\exists\, s \in R$ s.t. $rs = 1 = sr$ है।

अतः, $r^{-1}xr = 0$ है iff $s^{-1}r^{-1}xrs = s^{-1}0\, s = 0$ है, अर्थात् iff $x = 0$ है।

इस प्रकार, $\text{Ker } f_r = \{0\}$ है।

साथ ही, $s \in R$ किसी के लिए, $f_r(rsr^{-1}) = s$ है।

अतः, $\text{Im } f_r = R$ है।

इस प्रकार, f_r एक स्वाकारिता है, तथा FTH बताती है कि $R/\{0\} \simeq R$ है।

E37) $f : S \to R/I : f(s) = s + I$ परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि f एक समाकारिता है, तथा $\text{Ker } f = S \cap I$ है।

इस प्रकार, FTH द्वारा, $(S/(S \cap I)) \simeq \text{Im } f$ है, जो R/I का एक उपवलय है।

अतः, हम $(S/S \cap I)$ का R/I एक उपवलय मान सकते हैं।

इकाई 12 के E38 में, आपने यह दर्शाने के लिए एक उदाहरण दिया था कि $(S/S \cap I)$ का R/I की एक गुणजावली होना आवश्यक नहीं है।

E38) क्योंकि R की I एक गुणजावली है तथा $I \subseteq S + I$ है, इसलिए यह $S + I$ की एक गुणजावली है।

इस प्रकार, $(S+I)/I$ एक सुपरिभाषित वलय है।

$f : S \to (S+I)/I : f(x) = x + I$ परिभाषित कीजिए।

जैसा कि आपने इकाई 8 की प्रमेय 12 में किया था, आप उसी प्रकार सिद्ध कीजिए कि f सुपरिभाषित है।

तब, आपको इसकी जाँच कीजिए कि $f(x+y) = f(x) + f(y)$ है, तथा $f(xy) = f(x)f(y)\ \forall\ x, y \in S$ है।

साथ ही, दर्शाइए कि f आच्छादक है तथा $\text{Ker } f = S \cap I$ है।

इस प्रकार, प्रमेय 11 द्वारा $S/_{(S \cap I)} \simeq {(S+I)}/_{I}$ है।

E39) $f : R/J \to R/I : f(r+J) = r + I$ परिभाषित कीजिए।

जैसा कि आपने इकाई 8 की प्रमेय 14 में किया था, आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि f सुपरिभाषित है।

आगे, सिद्ध कीजिए कि f एक वलय समाकारिता है, f आच्छादक है तथा $\text{Ker } f = I/J$ है।

इस प्रकार, R/J का I/J एक गुणजावली है तथा $\frac{(R/J)}{(I/J)} \simeq \frac{R}{I}$ है।

E40) i) उदाहरण 15 से, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_m \; \forall \; m \in \mathbb{N}$ है।

अतः, $\mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, \; \overline{5}\mathbb{Z}_{15} \simeq \overline{5}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) = 5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ है।

इसलिए, तृतीय तुल्याकारिता प्रमेय द्वारा, $\mathbb{Z}_{15}/<\overline{5}> \simeq \mathbb{Z}/\overline{5}\,\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_5$ है।

ii) पुनः, जैसा ऊपर (i) में था,

$$\mathbb{Z}_m/\overline{n}\mathbb{Z}_m \simeq \frac{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})}{(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n \text{ है।}$$

E41) मान लीजिए कि $\mathbb{Q}$ की f एक स्वाकारिता है। तब, किसी $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ के लिए,

$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n}$ है, किन्हीं $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ के लिए।

अतः, $f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right) = q\frac{m}{n}$, क्योंकि f एक समाकारिता है।

साथ ही, $f(p) = f(p \cdot 1) = pf(1)$

$= p$ है।

अतः, $p = q\left(\frac{m}{n}\right)$ है।

$\therefore \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ है।

$\therefore f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \; \forall \; \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ है।

अर्थात्, $f = I$ है, जो तत्समक समाकारिता है।

इस प्रकार, $\mathbb{Q}$ की केवल स्वाकारिता I है।

वस्तुतः, $\mathbb{Q}$ से $\mathbb{Q}$ तक की केवल आच्छादक समाकारिता I है।

विविध उदाहरण और प्रश्न

पिछले खंडों की तरह, नीचे दिए हुए कुछ उदाहरण और प्रश्न इस खंड में आपके द्वारा अध्ययन की गई संकल्पनाओं तथा प्रक्रियाओं पर आधारित हैं। इन उदाहरणों के अध्ययन से तथा इन प्रश्नों को हल करने से, आपको संबंधित संकल्पनाओं के बारे में बेहतर समझ प्राप्त होगी। इससे आपको इस प्रकार के सवालों को हल करने का अधिक अभ्यास भी प्राप्त होगा।

उदाहरण 1: $\mathbb{Z}[i]$ में गुणजावली $<2-i>$ के अलग-अलग सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए।

हल: $<2-i>$ का कोई भी सहसमुच्चय $a+bi+<2-i>$ के रूप का है, जहाँ $a, b\in \mathbb{Z}$.
$R=\mathbb{Z}[i]/<2-i>$ में, ध्यान दीजिए कि $\overline{2-i}=\overline{0}$. इसलिए, $\overline{2}=\overline{i}$.
$\therefore \overline{a+ib}=\overline{a}+\overline{i}\,\overline{b}=\overline{a}+\overline{2}\,\overline{b}\ \forall\ a, b\in \mathbb{Z}$.
साथ ही, $\overline{2}=\overline{i}\Rightarrow \overline{4}=-\overline{1}\Rightarrow \overline{5}=\overline{0}$.
अतः, $\overline{a+ib}=\overline{a+2b}=\overline{x}$, जहाँ $a+2b\equiv x(\text{mod}\,5)$.
उदाहरणार्थ, $\overline{-2+i3}=-\overline{2}+\overline{2}\cdot\overline{3}=\overline{4}$ तथा $\overline{2+i3}=\overline{2}+\overline{2}\cdot\overline{3}=\overline{8}=\overline{3}$, क्योंकि $8\equiv 3(\text{mod}\,5)$.
आगे, यह सिद्ध करने के लिए कि R में $<2-i>$ के अलग-अलग सहसमुच्चय $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ हैं, इसके विपरीत मान लीजिए कि $\overline{1}=\overline{2}$.
तब, $\overline{2}-\overline{1}=\overline{0}$, अर्थात्, $1\in<2-i>$.
तब, $1=(2-i)(c+id)$, किन्हीं $c, d\in\mathbb{Z}$ के लिए।
$\Rightarrow 1=2c+d$ तथा $0=-c+2d$.
$\Rightarrow d=1/5$, जो एक अंतर्विरोध है।
अतः, $\overline{1}\neq\overline{2}$.

इसी प्रकार, दर्शाइए कि $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ में से किन्हीं दो को बराबर रखने पर एक अंतर्विरोध प्राप्त होता है।
अतः, R के अलग-अलग अवयव $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ हैं।
वस्तुतः, $R\simeq\mathbb{Z}_5$.

***

उदाहरण 2: दर्शाइए कि समुच्चय $\{3+4k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ का कोई भी अवयव दो पूर्णांकों के वर्गों के योग के बराबर नहीं है।

हल: हम इसे अंतर्विरोध द्वारा सिद्ध करेंगे।
मान लीजिए कि $\exists\, k, a, b\in\mathbb{Z}$ s.t.
$3+4k=a^2+b^2$. …(1)
अब, (1) पर प्राकृतिक समाकारिता $p:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_4 : p(m)=\overline{m}$ का अनुप्रयोग कीजिए। तब हमें $\mathbb{Z}_4$ में किन्हीं $\overline{a}, \overline{b}$ के लिए,
$\overline{3}=\overline{a}^2+\overline{b}^2$ प्राप्त होता है। …(2)
अब, $\overline{a}=\overline{0}, \overline{b}=\overline{0}$, (2) को संतुष्ट नहीं करता है। इसी प्रकार, आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि $(\overline{a}, \overline{b})$ की 16 संभावनाओं में से कोई भी (2) को संतुष्ट नहीं करती है।
अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं।

इस प्रकार, ऐसे कोई $a, b \in \mathbb{Z}$ नहीं हैं जिनसे कि किसी भी $k \in \mathbb{Z}$ के लिए,

$3+4k = a^2+b^2$

***

उदाहरण 3: $\mathbb{Z}_{30}$ के एक ऐसे तत्समकी अतुच्छ उपवलय S का, पुष्टि करते हुए उदाहरण दीजिए, जिसका तत्समक $\overline{1}$ नहीं है।

हल: उदाहरण के तौर पर, $S = 3\mathbb{Z}_{30}$ लीजिए। तब $\mathbb{Z}_{30}$ का S एक अतुच्छ उपवलय है, तथा $\overline{1} \notin S$.

आपको S में गुणन के लिए केली सारणी बनानी चाहिए। इस सारणी में आप पाएंगे कि $3 \cdot \overline{7} = \overline{21}$, S का तत्समक है।

***

उदाहरण 4: $U(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15})$ ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए $U = U(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15})$.

अब, $(a(\text{mod}10), b(\text{mod}15)) \in U$

$\Leftrightarrow (a(\text{mod}10), b(\text{mod}15))(c(\text{mod}10), d(\text{mod}15)) = (1(\text{mod}10), 1(\text{mod}15))$,

किन्हीं $c, d \in \mathbb{Z}$ के लिए।

$\Leftrightarrow ac \equiv 1(\text{mod}10)$ और $bd \equiv 1(\text{mod}15)$, किन्हीं $c, d \in \mathbb{Z}$ के लिए।

$\Leftrightarrow \overline{a} \in U(\mathbb{Z}_{10})$ और $\overline{b} \in U(\mathbb{Z}_{15})$.

इस प्रकार, $U(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}) = U(\mathbb{Z}_{10}) \times U(\mathbb{Z}_{15})$.

***

उदाहरण 5: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ से $\mathbb{Z}$ तक की सभी वलय समाकारिताएँ मालूम कीजिए।

हल: मान लीजिए $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ एक समाकारिता है।

यदि ϕ शून्य समाकारिता नहीं है, तो

$\phi(1, 1) = 1$, क्योंकि $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ का तत्समक $(1, 1)$ है और $\mathbb{Z}$ का तत्समक 1 है।

अर्थात्, $\phi[(1, 0)+(0, 1)] = 1$, …(3)

अर्थात्, $\phi\big((1, 0)\big) + \phi\big((0, 1)\big) = 1$.

मान लीजिए $\phi((1, 0)) = m$.

साथ ही, $\phi((1, 0)) = \phi((1, 0)(1, 0)) = \phi\big((1, 0)\big)\, \phi\big((1, 0)\big)$. अतः, $m = m^2$.

इसलिए, $\mathbb{Z}$ में m एक वर्गसम अवयव है। $\therefore m = 0, 1$.

यदि $m = 0$, तो $\phi\big((0, 1)\big) = 1$, तथा यदि $m = 1$, तो $\phi\big((0, 1)\big) = 0$, (3) से।

अब, $\phi((x, y)) = \phi[x(1, 0) + y(0, 1)] = x\phi((1, 0)) + y\phi((0, 1)) \;\forall\; x, y \in \mathbb{Z}$.

अतः, यदि $\phi((1, 0)) = 0$, तो $\phi((x, y)) = y \;\forall\; x, y \in \mathbb{Z}$.

यदि $\phi((0, 1)) = 0$, तो $\phi((x, y)) = x \;\forall\; x, y \in \mathbb{Z}$.

इस प्रकार, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ से $\mathbb{Z}$ तक संभव समाकारिताएँ केवल

$\phi_1((x, y)) = x$, या $\phi_2((x, y)) = y$, या $\phi_3((x, y)) = 0 \;\forall\; x, y \in \mathbb{Z}$

से परिभाषित फलन ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 हैं।

***

उदाहरण 6: दर्शाइए कि $\frac{1}{2}$ को आविष्ट करने वाला $\mathbb{Q}$ का न्यूनतम उपवलय

$S = \left\{ \frac{m}{2^n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\}$ है।

हल: पहले, $S \subseteq \mathbb{Q}$.

साथ ही, $\frac{m_1}{2^{n_1}}, \frac{m_2}{2^{n_2}} \in S$ के लिए, मान लीजिए $n_1 \geq n_2$. तब,

$\frac{m_1}{2^{n_1}} - \frac{m_2}{2^{n_2}} = \frac{1}{2^{n_1}}(m_1 - 2^{n_1 - n_2} \cdot m_2) \in S.$

साथ ही, $\frac{m_1}{2^{n_1}} \cdot \frac{m_2}{2^{n_2}} = \frac{m_1 m_2}{2^{n_1+n_2}} \in S.$

अतः, $\mathbb{Q}$ का S एक उपवलय है।

मान लीजिए कि $\mathbb{Q}$ का T एक ऐसा उपवलय है कि $\frac{1}{2} \in T$.

तब, $\frac{m}{2^n} \in T \ \forall \ m, n \in \mathbb{Z}$ तथा $n > 0$.

अतः, $S \subseteq T$.

इस प्रकार, $\frac{1}{2}$ को आविष्ट करने वाला $\mathbb{Q}$ का न्यूनतम उपवलय S है।

***

उदाहरण 7: $\mathbb{Z}_6$ से $\mathbb{Z}_6$ तक सभी संभव वलय समाकारिताएँ ज्ञात कीजिए।

हल: एक तो तुच्छ समाकारिता है ही। आइए औरों को मालूम करें।
मान लीजिए $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ एक अतुच्छ समाकारिता है।
तब, $\text{Im}\,\phi$ का तत्समक $\phi(\overline{1})$ है, मान लीजिए $\mathbb{Z}_6$ में $\phi(\overline{1}) = \overline{m}$, जहाँ $\overline{m} \neq \overline{0}$.
तब, $\overline{m}^2 = \overline{m}$.
यह $\mathbb{Z}_6$ में केवल $\overline{m} = \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}$ के लिए ही सत्य है।
अतः, अतुच्छ समाकारिताएँ हैं:
$\phi_1 : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6 : \phi_1(\overline{n}) = \overline{n}$, (अर्थात्, $\phi_1 = I$),
$\phi_2 : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6 : \phi_2(\overline{n}) = \overline{3n}$, तथा
$\phi_3 : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6 : \phi_3(\overline{n}) = \overline{4n}$.
यहाँ, ध्यान दीजिए कि $\text{Im}\,\phi_1 = \mathbb{Z}_6, \text{Im}\,\phi_2 = \{\overline{0}, \overline{3}\}, \text{Im}\,\phi_3 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$; तथा $\mathbb{Z}_6$ का $\{\overline{0}, \overline{3}\}$ तत्समक $\overline{3}$ वाला उपवलय है; $\mathbb{Z}_6$ का $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ तत्समक $\overline{4}$ वाला उपवलय है।

***

विविध प्रश्न

E1) मान लीजिए R एक वलय है। दर्शाइए कि $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \ \forall \ a, b \in R$ iff R क्रमविनिमेय है।

E2) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? प्रत्येक उत्तर की पुष्टि कीजिए।

i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ एक बूलीय वलय है (संदर्भ, इकाई 10 का E24)।

ii) $\mathbb{Z}_{12}$ का $\mathbb{Z}_6$ एक उपवलय है।

iii) $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ में $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ परस्पर क्रमविनिमेय करते हैं।

iv) $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ एक तत्समकी वलय है।

v) $U(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z})$.

E3) $(\bar{2}\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ के लिए, केली सारणियाँ बनाइए। इस तरह निश्चित कीजिए कि यह एक तत्समकी क्रमविनिमेय वलय है या नहीं।

E4) क्या $2\mathbb{Z}$ और $3\mathbb{Z}$ तुल्याकारी वलय हैं? क्या $2\mathbb{Z}$ और $4\mathbb{Z}$ तुल्याकारी वलय हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

E5) जाँच कीजिए कि $S = \left\{ \begin{bmatrix} m & m-n \\ m-n & n \end{bmatrix} \middle| m, n \in \mathbb{Z} \right\}$, $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ का एक उपवलय है या नहीं। क्या यह $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ की गुणजावली है? क्यों?

E6) जाँच कीजिए कि $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ का $S = \left\{ \begin{bmatrix} m & m+n \\ m+n & n \end{bmatrix} \middle| m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ एक उपवलय है या नहीं। क्या यह $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ की गुणजावली है? क्यों?

E7) दर्शाइए कि $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ की $I = \mathbb{M}_2(2\mathbb{Z})$ एक गुणजावली है। साथ ही, सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) \big/ \mathbb{M}_2(2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

E8) $\mathbb{Z}[i]/< i+3 >$ में कितने अवयव हैं? क्यों?

E9) $\mathbb{Z}_{20}$ से $\mathbb{Z}_{30}$ तक सभी संभव वलय समाकारिताएँ ज्ञात कीजिए।

E10) सिद्ध कीजिए कि $\{2+8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ में कोई पूर्णांक का घन नहीं है।

हल / उत्तर

E1) R क्रमविनिमेय है

$\Leftrightarrow ab = ba \ \forall\ a, b \in R$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \ \forall\ a, b \in R.$

E2) i) सत्य है। किसी भी $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ के लिए,

$\overline{x}_i = \overline{0}$ या $\overline{1}\ \forall\ i = 1, 2, 3.$

$\therefore (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = (\overline{x}_1^2, \overline{x}_2^2, \overline{x}_3^2) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3).$

ii) असत्य है। $\mathbb{Z}_6 \not\subset \mathbb{Z}_{12}$.

iii) आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

iv) क्योंकि $2\mathbb{Z}$ बिना तत्समक का है, इसलिए $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ भी बिना तत्समक का है।

v) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ के अवयव $\mathbb{Z}$ के अवयवों के क्रमित युग्म हैं। अतः, यह असत्य है।

E3)

$+$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$

सारणियों से हम देख सकते हैं कि $\overline{2}\mathbb{Z}_{10}$ योग और गुणन $(\text{mod } 10)$ के सापेक्ष संवृत है।

आगे, योग और गुणन दोनों ही क्रमविनिमेय हैं।

फिर, $\overline{0}$ योज्य तत्समक है तथा $\overline{6}$ गुणनात्मक तत्समक है।

साथ ही, प्रत्येक अवयव का योज्य प्रतिलोम है, तथा गुणनात्मक प्रतिलोम हैं:
$\overline{2}^{-1} = \overline{8}, \overline{4}^{-1} = \overline{4}, \overline{6}^{-1} = \overline{6}, \overline{8}^{-1} = \overline{2}.$

आप सारणियों का उपयोग करके जाँच कर सकते हैं कि $< \overline{2} >$ एक तत्समकी क्रमविनिमेय वलय होने की शेष आवश्यकताएँ भी संतुष्ट करता है।

E4) मान लीजिए $2\mathbb{Z} \simeq 3\mathbb{Z}$. तब $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, अर्थात्, $\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_3$, जो एक अंतर्विरोध है।

मान लीजिए $\phi : 2\mathbb{Z} \to 4\mathbb{Z}$ एक तुल्याकारिता है, तथा $\phi(2) = 4n$, किसी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए।

तब, $\phi(4) = \phi(2+2) = \phi(2) + \phi(2) = 8n.$

साथ ही, $\phi(4) = \phi(2 \cdot 2) = \phi(2) \cdot \phi(2) = (4n)^2 = 16n^2.$

अतः, $8n = 16n^2 \Rightarrow 2n = 1$, जो एक अंतर्विरोध है, क्योंकि $n \in \mathbb{Z}.$

$\therefore 2\mathbb{Z} \not\simeq 4\mathbb{Z}.$

E5) पहले, $S \neq \emptyset$, क्योंकि $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$. साथ ही, $S \subseteq \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$.

आगे, मान लीजिए कि $\begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} m & m-n \\ m-n & n \end{bmatrix} \in S$.

तब

$$\begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & m-n \\ m-n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-m & (a-m)-(b-n) \\ (a-m)-(b-n) & b-n \end{bmatrix} \in S,$$

और

$$\begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & m-n \\ m-n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am+(a-b)(m-n) & a(m-n)+(a-b)n \\ (a-b)m+b(m-n) & (a-b)(m-n)+bn \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2am-bm-an+bn & am-bn \\ am-bn & am-bm-an+2bn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta-\alpha \\ \alpha-\beta & \beta \end{bmatrix} \in S,$$

जहाँ $\alpha = 2am-bm-an+bn$ तथा $\beta = am-bm-an+2bn$.

अतः, $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ का S एक उपवलय है।

परंतु, $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ की S एक गुणजावली नहीं है। उदाहरणार्थ,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \notin S, \text{हालांकि } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in S.$$

E6) यहाँ S एक उपवलय नहीं है, क्योंकि उदाहरणार्थ,

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in S$, परंतु

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \notin S.$$

इसलिए, S गुणजावली भी नहीं है।

E7) आपको दर्शाना चाहिए कि $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in 2\mathbb{Z} \right\}$, $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ की एक गुणजावली है।

$\phi : \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2) : \phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}$ परिभाषित कीजिए।

जाँच कीजिए कि ϕ सुपरिभाषित है तथा एक आच्छादक वलय समाकारिता है।

आगे,

$$\text{Ker } \phi = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \mathbb{Z}_2 \text{ में } \bar{a} = \bar{0} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{d} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

$$= \mathbb{M}_2(2\mathbb{Z}).$$

अब, वाँछित परिणाम प्राप्त करने के लिए FTH (यानी, समाकारिता का मूल प्रमेय) का अनुप्रयोग कीजिए।

E8) उदाहरण 1 की ही तरह, दर्शाइए कि $\mathbb{Z}[i]/<i+3>$ में $\overline{10}=\overline{0}$.
साथ ही, $i=-3 \Rightarrow \overline{i}=-\overline{3}=\overline{7}$.
इस तरह दर्शाइए कि $\mathbb{Z}[i]\big/_{<i+3>} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{9}\}$.

E9) मान लीजिए $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{30}$ एक अतुच्छ समाकारिता है।
चूंकि $\overline{1}$, $\mathbb{Z}_{20}$ को जनित करता है, $\phi(\overline{1})$ से ϕ निर्धारित होता है।
मान लीजिए कि $\phi(\overline{1}) = m(\text{mod}\,30)$.
अब, $\mathbb{Z}_{20}$ में, $\overline{1}=\overline{21}$. साथ ही, $(\overline{1})^2=\overline{1}$.
अतः, $\phi(\overline{1})=\phi(\overline{21})=21\phi(\overline{1})$, तथा $[\phi(\overline{1})]^2=\phi(\overline{1})$.
इस प्रकार, $\mathbb{Z}_{30}$ में $\overline{m}=21\overline{m}$ तथा $\overline{m}^2=\overline{m}$.
अतः, $\mathbb{Z}$ में $30|20m$ और $30|m(m-1)$.
अब, $30|20m \Rightarrow 3|2m \Rightarrow 3|m$.
इसलिए, $\mathbb{Z}_{30}$ में $\overline{m}=\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \ldots, \overline{27}$.
अब इनमें से कौन-से मान $\overline{m}^2=\overline{m}$ को संतुष्ट करते हैं?
ये हैं $\overline{0}, \overline{6}, \overline{15}, \overline{21}$.
इनके अनुसार, $\mathbb{Z}_{20}$ से $\mathbb{Z}_{30}$ तक निम्नलिखित 4 समाकारिताएँ हैं:
$\phi_1 \equiv \mathbf{0}$,
$\phi_2 : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{30} : \phi_2(\overline{n}) = \overline{6n}$,
$\phi_3 : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{30} : \phi_3(\overline{n}) = \overline{15n}$,
$\phi_4 : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{30} : \phi_4(\overline{n}) = \overline{21n}$.

E10) मान लीजिए कि किसी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए,
$2+8k=n^3$. …(4)
तब, (4) पर विहित समाकारिता $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 : p(x) = \overline{x}$ लागू करके,
हम $\mathbb{Z}_8$ में $\overline{2}=\overline{n}^3$ प्राप्त करते हैं।
आपको इसकी जाँच करनी चाहिए कि $\mathbb{Z}_8$ में ऐसा कोई $\overline{n}$ नहीं है।
अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँचते हैं।
इस प्रकार, $\{2+8k | k \in \mathbb{Z}\}$ में n^3 के रूप का कोई अवयव नहीं है, जहाँ $n \in \mathbb{Z}$.

शब्दावली

यह शब्दावली पिछले खंडों में दी हुई शब्दावलियों से आगे बढ़ती है। इसलिए, इस खंड की पढ़ाई करते समय आप उन शब्दावलियों को भी ध्यान में रखिए।

Annihilator	शून्यकारी
Binomial expansion	द्विपद प्रसार
Boolean ring	बूलीय वलय
Canonical homomorphism	विहित समाकारिता
Centre	केंद्र
Commutative ring	क्रमविनिमेय वलय
Commuting elements	अवयव जो क्रमविनिमय करते हैं
Corollary	उपप्रमेय
Endomorphism ring	अंतराकारिता वलय
Evaluation map	मूलांकन फलन
Gaussian integers	गाउसीय पूर्णांक
Homomorphic	समाकारी
Homomorphism	समाकारिता
Ideal	गुणजावली
Idempotent	वर्गसम अवयव
Inclusion map	आविष्टि फलन
Inverse	प्रतिलोम
Isomorphic	तुल्याकारी
Isomorphism	तुल्याकारिता
Natural homomorphism	प्राकृतिक समाकारिता
Nil radical	शून्य करणी
Nilpotent	शून्यंभावी
Non-commutative	अक्रमविनिमेय
Principal ideal	मुख्य गुणजावली
Projection map	प्रक्षेप फलन
Proper subring/ideal	उचित उपवलय/गुणजावली
Quotient ring	विभाग वलय
Residue class	अवशेष वर्ग
Ring	वलय
Ring with identity/unity	तत्समकी वलय
Subring	उपवलय
Trivial ideal	तुच्छ गुणजावली
Trivial ring/subring	तुच्छ वलय/उपवलय
Unit	मात्रक